

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 22

2021

№ 7

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print)

ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

Заместители главного редактора:

БОЛШАКОВ А. А., д.т.н.

ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.

ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционный совет:

АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН

БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН

ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН

ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН

КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН

КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН

КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН

ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН

РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН

СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН

СИГОВ А. С., акад. РАН

СОЙФЕР В. А., акад. РАН

СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН

ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН

ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН

ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН

ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН

ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

Редколлегия:

DORANTES D. J., PhD, Турция

GROUMPOS P. P., PhD, Греция

ISIDORI A., PhD, Италия

KATALINIC V., PhD, Австрия

LIN CH.-Y., PhD, Тайвань

MASON O. J., PhD, Ирландия

ORTEGA R. S., PhD, Франция

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США

STRZELECKI R. M., PhD, Польша

SUBUDHI V. D., PhD, Индия

АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан

ГАРАЩЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина

БОЩОВ А. А., д.т.н.

БУКОВ В. Н., д.т.н.

ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.

ЖУКОВ И. А., д.т.н.

ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.

КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.

ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.

ЛОХИН В. М., д.т.н.

МАГОМЕДОВ М. Х., д.ф.-м.н.

ПУТОВ В. В., д.т.н.

ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.

РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.

СЕРГЕЕВ С. Ф., д.п.с.н.

ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.

ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.

ФУРСОВ В. А., д.т.н.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Директор издательства:

АНТОНОВ Б. И.

СОДЕРЖАНИЕ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Сухинин Б. В., Сурков В. В., Филимонов Н. Б. Феномен Фуллера в задачах аналитического конструирования оптимальных регуляторов339

Лаговский Б. А., Рубинович Е. Я. Алгоритмы цифровой обработки данных измерений, обеспечивающие угловое сверхразрешение349

Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф., Сулейманова М. Т. Алгоритмы определения вероятности рисков аварий в туннелях по характеристикам помехи зашумленных сигналов357

ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Do Quang Thong. Synthesis of a High-Precision Missile Homing System with an Permissible Stability Margin of the Normal Acceleration Stabilization System365

Распопов В. Я., Лихошерст В. В. Датчик угловых скоростей на базе волнового твердотельного гироскопа с металлическим резонатором для систем ориентации, стабилизации и навигации374

Любимов В. В., Бакри И. Управляемое изменение габаритных размеров спускаемого в атмосфере Марса космического аппарата осесимметричной формы383

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в МНБД Scopus и RSCI (на платформе Web of Science).

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL

Vol. 22
2021
No. 7

MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print)

ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Editor-in-Chief

FILIMONOV N. B.

Deputy Editors-in-Chief:

BOLSHAKOV A. A.
PODURAEV Yu. V.
YUSCHENKO A. S.

Responsible Secretary:

BEZMEANOVA M. Yu.

Editorial Board:

ANSHAKOV G. P.
BOLOTNIK N. N.
CHENTSOV A. G.
CHERNOUSKO F. L.
FEDOROV I. B.
KALYAEV I. A.
KURZHANSKI A. B.
KUZNETSOV N. A.
PESHEKHONOV V. G.
REZCHIKOV A. F.
SCHERBATYUK A. F.
SEBRYAKOV G. G.
SIGOV A. S.
SOJFER V. A.
SOLOMENTSEV Yu. M.
VASSILYEV S. N.
YUSUPOV R. M.
ZHELTOV S. Yu.

Editorial Council:

ALIEV T. A., Azerbaijan
DORANTES D. J., PhD, Turkey
GARASCHENKO F. G., Ukraine
GROUMPOS P. P., PhD, Greece
ISIDORI A., PhD, Italy
KATALINIC B., PhD, Austria
LIN CH.-Y., PhD, Taiwan
MASON O. J., PhD, Ireland
ORTEGA R. S., PhD, France
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA
STRZELECKI R. M., PhD, Poland
SUBUDHI B. D., PhD, India
BOBTSOV A. A.
BUKOV V. N.
ERMOLOV I. L.
FILARETOV V. F.
FRADKOV V. L.
FURSOV V. A.
ILYASOV B. G.
KOROSTELEV V. F.
LEBEDEV G. N.
LOKHIN V.M.
MAGOMEDOV M. Kh.
PUTOV V. V.
PSHIKHOPOV V. Kh.
RAPOPORT E. Ya.
SERGEEV S. F.
ZHUKOV I. A.

Editorial Staff:

BEZMEANOVA M. Yu.

Director of the Publishing House:

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

Sukhinin B. V., Surkov V. V., Filimonov N. B. Phenomen by Fuller in the Problems of Analytical Design of Optimal Regulators 339

Lagovsky B. A., Rubinovitch E. Ya. Algorithms for Digital Processing of Measurement Data Providing Angular Superresolution 349

Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T. Algorithms for Determining the Probability of Risks of Accidents in Tunnels Based on the Characteristics of the Noise of Noisy Signals 357

DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

Do Quang Thong. Synthesis of a High-Precision Missile Homing System with an Permissible Stability Margin of the Normal Acceleration Stabilization System 365

Raspopov V. Ya., Likhosherst V. V. Angular Rate Sensor Based on a Solid-State Wave Gyro- scope with a Metal Resonator for Attitude Control, Stabilization and Navigation Systems . . 374

Lyubimov V. V., Bakry I. Controlled Change in the Dimensions of an Axisymmetric Spacecraft Descending in the Atmosphere of Mars 383

Information about the journal is available online at:
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: mech@novtex.ru

Б. В. Сухинин, д-р техн. наук, проф., eeo@uic.tula.ru,
В. В. Сурков, д-р техн. наук, проф., vvs150747@mail.ru,

Тульский государственный университет,

Н. Б. Филимонов, д-р техн. наук, проф., nbfilimonov@mail.ru,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

Феномен Фуллера в задачах аналитического конструирования оптимальных регуляторов

Обсуждается проблема синтеза оптимальной управляемой системы с квадратичным критерием качества, имеющей бесконечное число точек переключения на конечном интервале времени. В теории оптимального управления данное явление получило название "феномен Фуллера". Проблема Фуллера уже более 60 лет является весьма привлекательной, актуальной и до сих пор не решенной, особенно для нелинейных многомерных динамических систем высокого порядка и, тем более, с получением решения в явном аналитическом виде для практической реализации в системе управления.

Целью настоящей работы является демонстрация теоретических аспектов и практических особенностей метода синтеза оптимальных систем управления по критерию быстродействия на примере решения задач, связанных с феноменом Фуллера.

При решении данных задач используется принятый в классическом вариационном исчислении и принципе максимума Понтрягина прием введения в рассмотрение новой дополнительной фазовой переменной, которая сопоставляется интегральному критерию качества и расширяет исходный фазовый вектор объекта. В результате, если для объекта управления известно наилучшее оптимальное по быстродействию управление, то данный прием позволяет весьма просто получить более худшее оптимальное по точности управление путем включения в динамику объекта управления критерия точности Фуллера. Следует отметить, что важным приобретением здесь является повышение точности до оптимального значения и снижение установившейся ошибки регулирования до нулевого значения, причем все коэффициенты ошибок (по положению, скорости, ускорению, рывку и т. д.) равны нулю при наличии внешних и внутренних помех.

Приводятся постановки и решения классической и модифицированной задач Фуллера. В качестве иллюстрирующих примеров рассмотрены традиционные задачи синтеза оптимального по быстродействию управления, решенные в известных работах.

Ключевые слова: феномен Фуллера, квадратичный критерий оптимальности, оптимальное быстродействие, точность, синтез управления, устойчивость

В последнее время интерес к феномену Фуллера еще более обострился, в частности, благодаря интенсивным попыткам осознать истинную природу такого явления, как регулярный синтез.

М. И. Зеликин и В. Ф. Борисов

Введение

В потоке современных публикаций по математической теории оптимального управления техническими объектами основное внимание уделяется методам исследования готовых математических постановок оптимизационных задач, включая задачи управления с квадратичными критериями качества (см., например, [1–3]). Решения для готовых постановок — это лишь надводная часть айсберга, в то время как подводная его часть — математические

формулировки задач по их практическому содержанию и использование полученных решений, — как правило, не обсуждается, что усугубляет взаимонепонимание теоретиков и практиков и приводит к обесцениванию теоретических результатов. Теоретики, как правило, увлечены математическими изысками в ущерб физической сущности решаемой задачи [4, 5]. Здесь речь идет об оформлении теоретиками своих решений с помощью многочисленных лемм, теорем и прочего подчас чрезмерного неоправданного математического формализ-

ма, в котором нередко теряется само решение поставленной задачи. Кстати, по этому поводу выдающийся математик В. И. Арнольд писал: "Попытки обойтись без вмешательства физики в математику — сектанство и изоляционизм, разрушающие образ математики как полезной человеческой деятельности... Если математики не образуются сами, то потребители, сохранившие как нужду в современной математической теории, так и свойственный каждому здравомыслящему человеку иммунитет к бесполезной аксиоматической болтовне, в конце концов откажутся от услуг схоластов-недоучек".

В настоящей работе рассматривается одна из подобных оптимизационных задач управления с квадратичным критерием, связанная с феноменом Фуллера [6].

В 1960 г. на I конгрессе ИФАК в Москве А. Т. Фуллер [7] привел пример двумерной линейной управляемой системы с квадратичным критерием качества, в котором оптимальное управление имеет бесконечное число точек переключения на конечном интервале времени. Впоследствии это явление получило название "феномен Фуллера", а соответствующий режим управления стал называться в иностранной литературе "чаттеринг" (от англ. chattering — болтанка). В качестве русского эквивалента этого термина используется термин "режим учащающихся переключений".

Явное решение задачи Фуллера было получено благодаря наличию у нее однопараметрической группы симметрий, позволяющей использовать аппарат группового анализа дифференциальных уравнений и алгебры Ли. Работа Фуллера была встречена с большим интересом, но вскоре была забыта. Интерес к ней вновь пробудился в 70...80-х годах прошлого столетия, когда начали публиковаться многочисленные примеры с оптимальными режимами учащающихся переключений, а в 90-х годах интерес к феномену Фуллера еще более обострился, и им вплотную заинтересовались математики (см., например, [8—11]).

В настоящее время проблема Фуллера по-прежнему является весьма актуальной и далеко не решенной, особенно для класса нелинейных многомерных систем высокого порядка, на что косвенно указывает продолжающийся поток публикаций и диссертаций (см., например, [12—20]).

Поскольку в ряде прикладных задач оптимального релейного управления центральной является именно проблема чаттеринга — бесконечно час-

тых переключений управляющих воздействий, — то все чаще ставится вопрос об избежании этого нежелательного режима функционирования системы путем перехода от оптимального к субоптимальному управлению с конечным числом переключений. На наш взгляд целесообразнее не "бороться" с проблемой чаттеринга, а понять физическую причину этого явления и не допускать его в системе, например, путем смены критерия оптимальности в задаче оптимального управления. Практическая ценность знания оптимальных режимов с чаттерингом состоит не столько в том, что они "описывают вполне естественные" [8], хотя и нежелательные режимы, возникающие из-за "плохого" управления и "плохого" критерия, сколько в том, что они позволяют найти способы решения задач оптимального управления без режимов "болтанки" по заранее заданному критерию точности, не зависящему в явной форме от управления: от критерия быстродействия до критерия энергозатрат (критерия расхода "сигнала управления").

Классическая постановка задачи Фуллера и ее решение

Задача Фуллера. Минимизировать интегральный критерий качества, именуемый далее критерием Фуллера:

$$x_0 = \int_0^{\infty} |x_1|^q dt \rightarrow \min, \quad q > 1, \quad (1)$$

на траекториях управляемой системы второго порядка со скалярным входом $u(t) \in [-1, 1]$ и вектором состояния $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u \quad (2)$$

с заданными начальными условиями $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$.

Допустимыми управлениями считаются локально измеримые, ограниченные по модулю функции $u(t) \in [-1, 1]$; допустимые траектории $x_1(t)$, $x_2(t)$ абсолютно непрерывны из-за инерционности объекта.

Решение. А. Т. Фуллер и вслед за ним многие авторы в качестве решения данной задачи приводят следующий закон управления:

$$u(x) = -\text{sign} \psi, \quad \psi = x_1 + k|x_2|x_2, \quad k = 0,444623. \quad (3)$$

На рис. 1 показаны результаты моделирования объекта (2) с управлением (3) при миними-

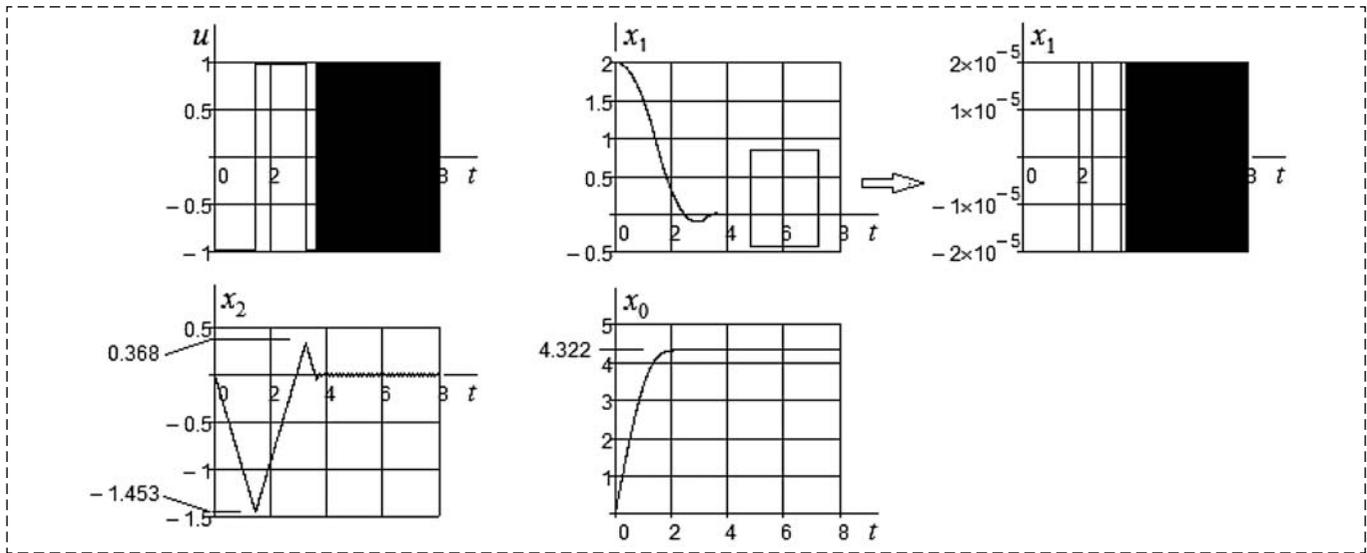


Рис. 1. Результаты моделирования известной задачи Фуллера
 Fig. 1. Simulation results of the famous Fuller problem

зации интеграла (1) при $q = 2$, $x_0(0) = 0$, $x_1(0) = 2$. Исследуя системы второго порядка, оптимизированные по критерию (1) при различных q , Фуллер показал [7], что работа такой оптимальной системы мало чем отличается от работы системы второго порядка, оптимальной по критерию быстродействия.

Приведем для подтверждения вывода Фуллера решение задачи оптимального быстродействия объектом (2) методом аналитического конструирования оптимальных регуляторов по критерию быстродействия (АКОРБ) [1, 21].

Здесь имеем объект второго порядка и, следовательно, два интервала управления, имеющие разные функции переключения: функ-

ция переключения второго интервала $\psi_2 = x_2$ и функция переключения первого интервала $\psi = \psi_2 + |\psi_2|u$. Подставляя уравнения объекта (2) и интегрируя, получим $\psi = x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2} + C$. Из условия $\psi(x = 0) = 0$ определяем постоянную интегрирования $C = 0$. В результате оптимальное по быстродействию управление принимает вид

$$u(x) = -\text{sign}\psi = -\text{sign}\left(x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2}\right), \quad (4)$$

совпадающий с известным из литературы.

На рис. 2 приведены результаты моделирования объекта (2) с быстродействующим управлением (4).

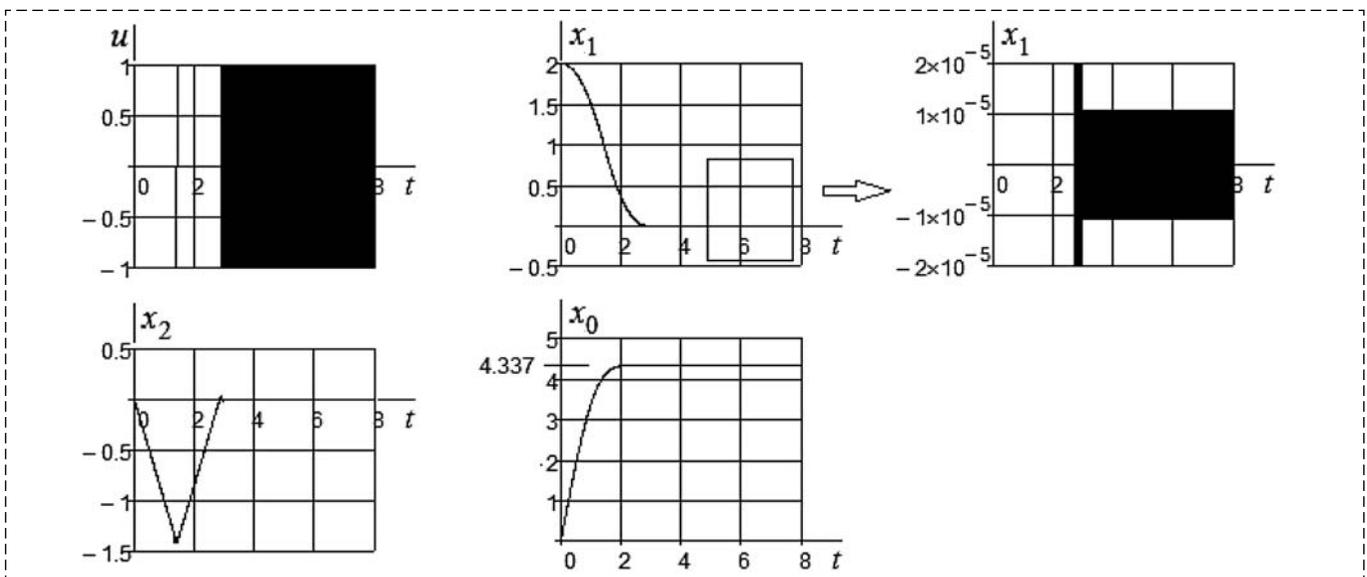


Рис. 2. Результаты моделирования объекта (2) с оптимальным по быстродействию управлением (4)
 Fig. 2. Object modeling results (2) with optimal speed control (4)

Фуллер установил, что значение ошибки, полученное с управляющим устройством, оптимальным по длительности переходного процесса, отличается от минимально возможного для любых систем не более чем на 0,5 %, что следует и из сравнения рис. 1 и рис. 2. На основе этого факта можно заключить, что оптимальная по быстродействию система может с успехом минимизировать критерий Фуллера (1), т. е. обеспечить достаточно точную (оптимальную по точности регулирования) работу системы.

Например, в работе [22] показано, что системы, построенные по критерию быстродействия, могут оказаться близкими к оптимальным и по другим критериям, например, по интегральным квадратичным критериям, но обеспечивают по сравнению с ними дополнительный выигрыш, минимизируя время переходного процесса и (наше добавление) без "болтанки". Практически для всех автоматических систем быстродействие является одним из основных требований к качеству процесса управления [23].

Постановка и идея метода решения модифицированной задачи Фуллера

Введем в рассмотрение расширенный объект управления $(n + 1)$ -го порядка, состоящий из исходного объекта n -го порядка, описываемого уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u,$$

с фазовым вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и скалярным управлением u , дополненного новой фазовой переменной x_0 , удовлетворяющей уравнению

$$\dot{x}_0 = F_0(\mathbf{x}),$$

полученному из критерия точности Фуллера (1) при $F_0(\mathbf{x}) = |x_1|^q$.

Ставится задача определения оптимального по быстродействию управления расширенным объектом.

При решении данной задачи используется принятый в классическом вариационном исчислении и принципе максимума Понтрягина прием введения в рассмотрение новой дополнительной фазовой переменной, которая сопоставляется интегральному критерию качества и расширяет исходный фазовый вектор объекта. В результате, если для объекта управления известно наилучшее оптимальное по быстро-

действию управление, то данный прием позволяет весьма просто получить более худшее оптимальное по точности управление путем включения в динамику объекта управления критерия точности Фуллера.

Простота и универсальность предлагаемого метода решения поставленной модифицированной задачи Фуллера заключается в использовании метода динамического программирования Р. Беллмана и декомпозиции многомерной задачи оптимального по быстродействию управления на ряд однотипных одномерных задач.

Решение модифицированной задачи Фуллера базируется на методе АКОРБ [1, 21] и включает следующие три этапа:

1. По уравнениям исходного объекта, в соответствии с теоремой об n интервалах управлений, записываются функциональные уравнения и определяются функции переключения каждого интервала, начиная с n -го до первого. Если функция переключения первого интервала (для не расширенного объекта) известна, то осуществляется переход к следующему этапу.

2. Записывается функциональное уравнение и определяется функция переключения нулевого интервала.

3. С использованием найденных ранее функций переключения находится искомым закон управления.

Проиллюстрируем метод решения модифицированной задачи Фуллера на примере объекта второго порядка.

Запишем уравнения динамики расширенного объекта путем включения в них уравнения, полученного из критерия Фуллера (1):

$$\dot{x}_0 = |x_1|^q, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u. \quad (5)$$

Применим к полученному объекту третьего порядка (5) метод АКОРБ. Искомое управление состоит из трех интервалов $i = 0, 1, 2$.

Функции переключения для второго и первого интервалов $\psi_2 = x_2$, $\psi_1 = x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2}$ определены выше. Для нулевого интервала имеем $\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \psi_1 + |\psi_1|u$ и оптимальное по быстродействию управление принимает вид

$$u = -\text{sign}\psi = -\text{sign}(\int (\text{sign}\psi_1 + u)dt + C). \quad (6)$$

Здесь использовано свойство инвариантного преобразования [20] функции переключения нулевого интервала: правая часть функционального уравнения почленно разделена на положительно

определенную величину $|\psi_1|$, не влияющую на моменты переключения сигнала управления.

Для определения ψ необходимо проинтегрировать $\dot{\psi}$, поэтому уравнения расширенного объекта при моделировании необходимо дополнить уравнением $\dot{x}_3 = \text{sign}\psi_2 + u(\mathbf{x})$, а в систему управления необходимо включить интегратор (здесь для определенности взято значение $q = 2$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2 \\ u(\mathbf{x}) \\ \text{sign}\left(x_1 + \frac{|x_2|x_2}{2}\right) + u(\mathbf{x}) \end{bmatrix};$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; u = -\text{sign}(x_3 + C); C = 0,08.$$

Результаты моделирования (см. рис. 1) расширенного объекта (5) с управлением (6) практически совпадают с результатами моделирования объекта (2) с управлением (3), а переходные процессы при управлении по критерию Фуллера носят колебательный характер.

Структурная схема системы с объектом управления для реальных координат приведена на рис. 3. Здесь x_z — задание для выходной координаты x_1 ; C — константа, подбирается по минимуму критерия.

Отметим, что полученное решение (управление (6) и структурную схему (рис. 3)) можно использовать для любого объекта, в том числе и нелинейного (с соответствующей оптимальной по быстродействию функцией переключения) и любого критерия, записанного в общем виде:

$$x_0 = \int_0^{\infty} F_0(\mathbf{x}) dt \rightarrow \min, \quad (7)$$

с конкретной функцией $F_0(\mathbf{x}) > 0$.

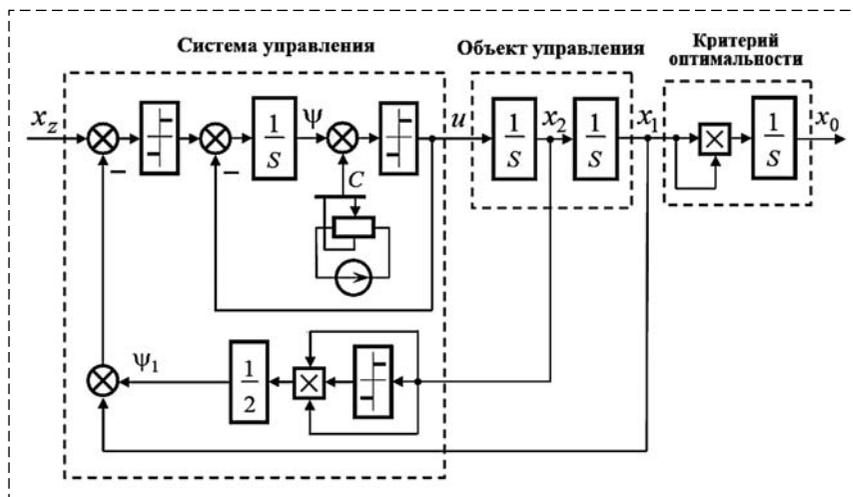


Рис. 3. Структурная схема системы (2) с управлением (6) при $q = 2$, работоспособная при любых значениях q

Fig. 3. Structural diagram of system (2) with control (6) at $q = 2$, operable at any values q

Решение задачи Фуллера для различных q

The solution of the Fuller problem for various q

q	C	K	x_0^{**}	$x_0, C = 0$	$x_0 = \min, C \neq 0$
1	0,02	0,491438219	2,828	2,825	2,822
2	0,08	0,444623782*	4,337	4,336	4,322
3	0,13	0,425013686	7,354	7,353	7,338
4	0,196	0,389735922*	13,029	13,028	13,015
5	0,21	0,369475382	23,66	23,659	23,648
6	0,25	0,364746375	43,66	43,66	43,65
7	0,27	0,354142957	81,485	81,484	81,476
8	0,29	0,325643874	153,372	153,371	153,365

* k совпадает с известным из работы [16] значением k для задачи Фуллера;
 ** значение критерия при оптимальном по быстродействию управлении.

Компьютерное исследование полученных результатов

По рассмотренной методике определены постоянные интегрирования, численные значения критерия Фуллера и коэффициенты закона управления (3) задачи Фуллера при различных значениях q (см. таблицу).

Из таблицы следует, что значения x_0 критерия (1) в последних трех столбцах практически одинаковы (отличаются менее чем на 0,5 %). Это подтверждает вывод Фуллера [7] и позволяет при реализации на практике оптимальной по критерию Фуллера системы управления (рис. 3) принять $C = 0$ и упростить схему управления.

Акцентируем здесь внимание на том, что решение задачи по критерию Фуллера при различных значениях q характеризуется колебательностью переходного процесса, что вытекает из условия $|f| > \varphi$ для осциллирующих объектов [21]. Действительно, определяя ψ из (3), учитывая уравнения (2), запи-

сывая условие $|f| > \varphi$ и сокращая на $|x_2|$, в итоге получим $1 > 2k$ при значениях $k < 0,5$.

Выбор следующих примеров обусловлен тем, что эти задачи решались рядом ученых, и оптимальное по быстродействию управление известно.

Пример 1. Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления для гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \dot{x} = u \quad (8)$$

при ограниченном управлении и квадратичном интегральном критерии качества

$$J = \int_0^{\infty} (a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2) dt, \quad (9)$$

которым оцениваются переходные искажения сигнала в линейных системах автоматического регулирования и электроакустики.

В работе [10] с применением принципа максимума Понтрягина проведено подробное исследование свойств линии переключения и указан способ ее практического нахождения (правда, решения в виде закона управления не приведено) для системы

$$\dot{x}_0 = a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + u, \quad (10)$$

где a, b — неотрицательные константы, не обращающиеся в нуль одновременно.

Функция переключения оптимального по быстродействию управления консервативной системой (8) получена в работе [21, стр. 159]:

$$\psi_1 =$$

$$= \left\{ \left[x_1 + \left(2 \operatorname{int} \left(\frac{|x_1| + 2}{2} \right) - 1 \right) \operatorname{sign} x_2 \right]^2 + x_2^2 - 1 \right\} x_2, \quad (11)$$

где $\operatorname{int}(x)$ — целая часть x .

Поскольку расширенный объект (10) остается осциллирующим, то для определения функции переключения на нулевом интервале необходимо использовать условие $|f| > \varphi$: $\dot{\psi} = \psi_0 = \lambda \operatorname{sign} \psi_1 + u$, $\lambda > 1$. При этом оптимальное по критерию (9) управление имеет вид

$$u = -\operatorname{sign} \psi = -\operatorname{sign} \left(\int (\lambda \operatorname{sign} \psi_1 + u) dt + C \right). \quad (12)$$

Константа интегрирования C и величина λ определяются при моделировании по минимуму критерия (9) для конкретных начальных условий.

На рис. 4 представлены результаты моделирования объекта (10) с управлением (12) для $x_0(0) = 0, x_1(0) = 3, x_2(0) = 0, C = 0,105, \lambda = 1,048218$.

Результаты моделирования (рис. 4) подтверждают выводы работы [9]. Сравнение величины J данного примера вдоль оптимальных траекторий ($J_{\text{опт}}$) и вдоль траекторий, оптимальных по быстродействию (J_6), показывают, что для начального состояния в круге радиусом 2 имеем $\max(J_6/J_{\text{опт}}) = 1,5624$ при $a = 1$ и $b = 0$.

Однако уже в круге радиусом 3 относительный проигрыш в величине J не превышает 0,85 %. Иными словами, чем больше значение начального отклонения, тем меньше проигрыш. Переходный процесс носит колебательный характер.

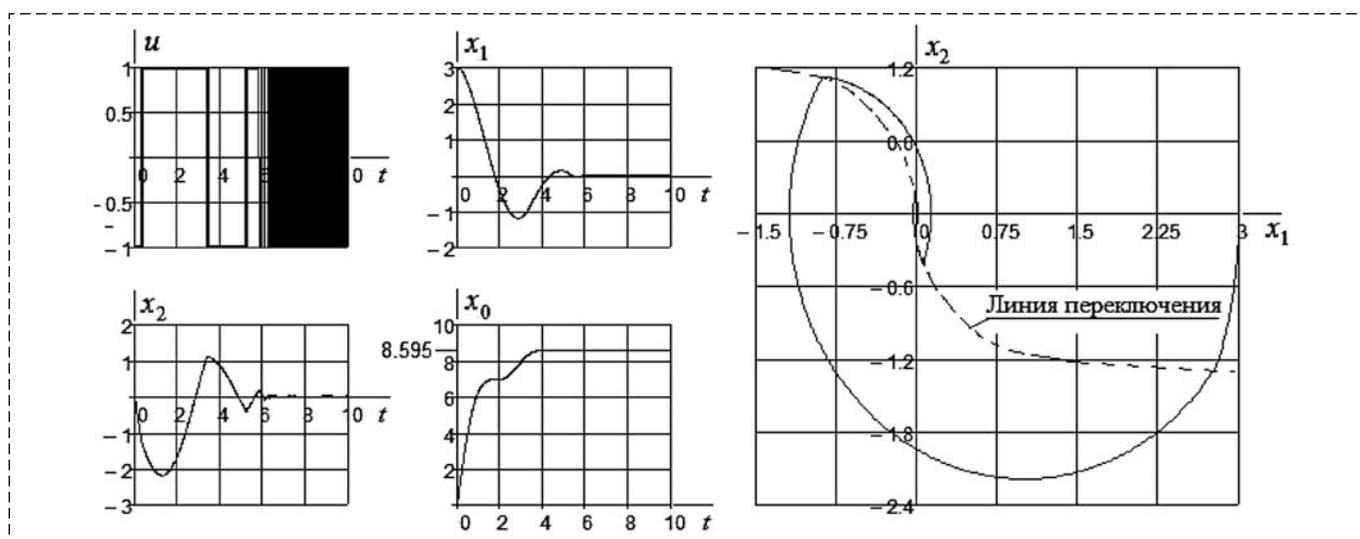


Рис. 4. Результаты моделирования объекта (10) с управлением (12) по критерию (9) при $a = 1$ и $b = 0$
Fig. 4. The simulation results of object (10) with control (12) according to criterion (9) with $a = 1$ and $b = 0$

Пример 2. Найдем закон оптимального управления по критерию Фуллера для нелинейного объекта

$$\ddot{x}_1 + f_1(\dot{x}_1) = u(t). \quad (13)$$

Уравнениями такого вида описываются, например, системы следящего электропривода постоянного тока с нагрузкой, нелинейно зависящей от частоты вращения, или системы с внутренними нелинейными обратными связями в виде "отсечек" по скорости, введенными для ограничения этой координаты [22]. Для определенности, не влияющей на ход решения задачи, предположим, что нелинейная функция $f_1(\dot{x}_1) = \dot{x}_1^3$. Уравнения движения расширенного объекта в форме Коши при $q = 2$:

$$\dot{x}_0 = x_1^2, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_2^3 + u(t). \quad (14)$$

Оптимальный по критерию Фуллера закон управления определяется выражением (6):

$$u = -\text{sign}\psi = -\text{sign}\left(\int (\text{sign}\psi_1 + u)dt + C\right),$$

где точное выражение оптимальной по быстродействию функции переключения второго интервала [21, стр. 155] имеет вид

$$\psi_1 = x_1 + \left[\frac{1}{6} \ln \frac{1 - |x_2| + x_2^2}{(1 + |x_2|)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2x_2 \text{sign}x_2 - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \text{sign}x_2. \quad (15)$$

На рис. 5 представлены результаты моделирования объекта (14) с управлением (6), (15) для $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, C = 0,06$.

Сравнение значения J данного примера вдоль оптимальных траекторий ($J_{\text{опт}}$) и вдоль траекторий, оптимальных по быстродействию (J_6), показывает, что для начального состояния в круге радиусом 1 $\max(J_6/J_{\text{опт}}) = 1,0013$. Однако уже в круге радиусом 2 относительный проигрыш в значении J не превышает 0,02 %. Здесь также, чем больше значение начального отклонения, тем меньше проигрыш. Переходный процесс также носит колебательный характер.

Пример 3. Найти закон оптимального управления по критерию Фуллера для объекта управления, представляющего собой последовательное соединение трех интеграторов:

$$\dot{x}_0 = |x_1|^2, \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = u. \quad (16)$$

Воспользуемся известным из литературы (см., например, [21, стр. 171]) законом оптимального по быстродействию управления для не расширенной системы в реальных координатах с учетом задающего сигнала $x_{1z} = 2$:

$$u = -\text{sign}\psi_1; \quad (17)$$

$$\psi_1 = x_1 - x_{1z} + \frac{x_3^3}{3} + \left(x_2 x_3 + \left[\frac{x_3^2}{2} + x_2 \text{sign}\psi_2 \right]^{2/3} \right) \text{sign}\psi_2; \quad (18)$$

$$\psi_2 = x_2 + \frac{|x_3| x_3}{2}, u = -\text{sign}\psi_1; \psi_3 = x_3,$$

где ψ_1, ψ_2, ψ_3 — функции переключения первого, второго и третьего интервалов.

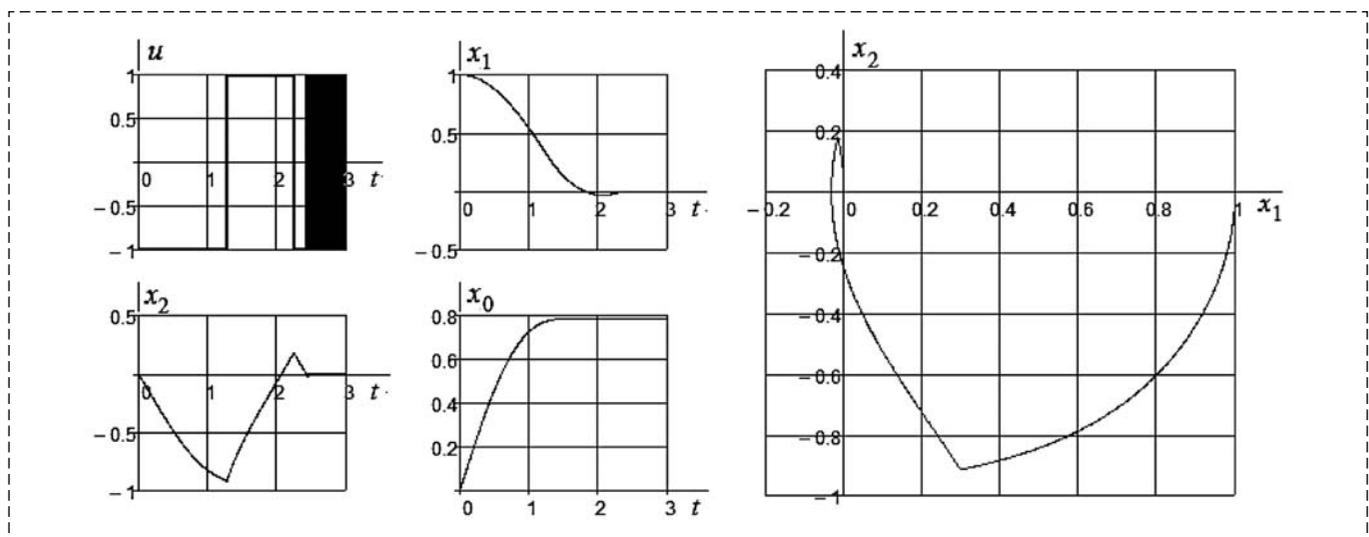


Рис. 5. Результаты моделирования объекта (14) с управлением (6), (15) по критерию Фуллера
Fig. 5. The simulation results of the object (14) with control (6), (15) according to the Fuller criterion

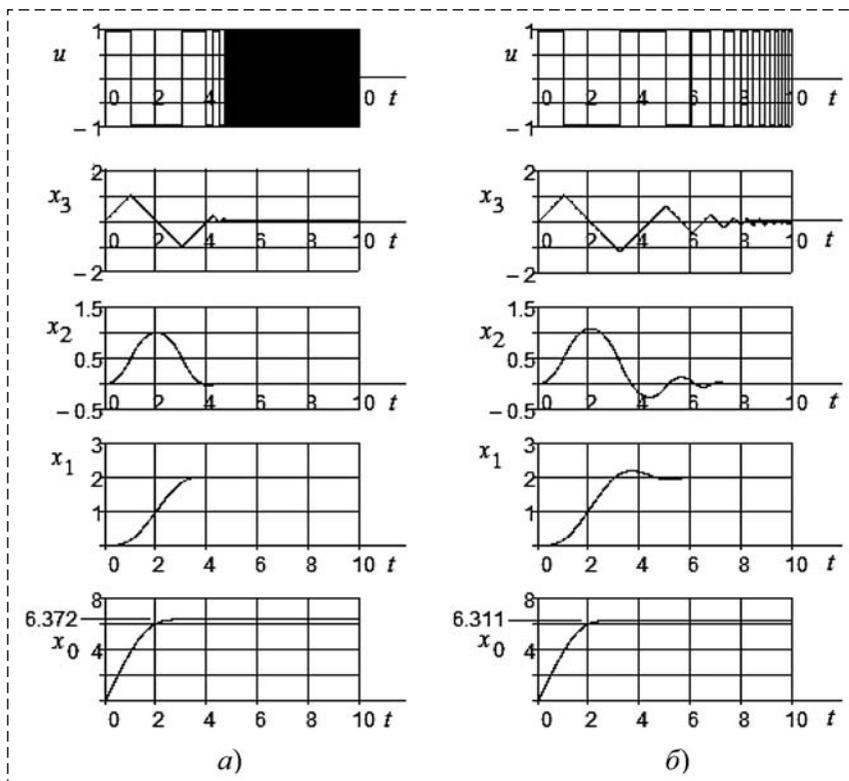


Рис. 6. Результаты моделирования объекта третьего порядка:
a — оптимальное управление по быстродействию; *б* — оптимальное управление по критерию Фуллера

Fig. 6. The results of modeling a third-order object:
a — optimal control by speed; *b* — optimal control by Fuller criterion

Тогда для нулевого интервала

$$\dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \psi_1 + |\psi_1|u \quad (19)$$

и оптимальное по критерию Фуллера управление

$$u = -\text{sign}(\psi - C), \quad C = 0,00016. \quad (20)$$

На рис. 6 приведены результаты моделирования систем (16)—(20), откуда следует, что оптимальное по быстродействию управление для нерасширенной системы имеет более чем три интервала вследствие не точного вычисления функции переключения при моделировании. И хотя значение критерия при оптимальном по быстродействию управлении и при управлении по квадратичному критерию отличаются менее, чем на 0,1 %, колебательность системы третьего порядка по сравнению с системой второго порядка больше (продолжительнее режим чаттеринга).

Заключение

Результаты исследования метода синтеза оптимальных систем управления по критерию

быстродействия на примере решения задач, связанных с феноменом Фуллера, позволяют сделать следующие выводы:

1. Квадратичный критерий качества (критерий точности) в задачах оптимального управления приводит к колебательному переходному процессу даже для не осциллирующих (не колебательных) объектов.

2. С увеличением значения q в задаче Фуллера колебательность переходного процесса возрастает.

3. С увеличением порядка объекта колебательность переменных вектора состояния объекта управления увеличивается, причем, чем ближе переменная к сигналу управления (чем дальше от выхода), тем больше "chattering" (болтанка).

4. Так ли необходимо решать проблему Фуллера с такими неоправданными затратами времени и усилиями, если известна причина появления проблемы — квадратичный критерий качества? Может быть, надо не решать эту проблему, а выяснить физическую причину такого явления и не допускать его, задаваясь не квадратичным критерием, который а priori реализует управление с чаттерингом, а каким-либо другим, например, критерием оптимального быстродействия.

5. Предложенный метод аналитического синтеза оптимального по быстродействию регулятора позволяет найти оптимальное управление по любому наперед заданному критерию точности, а также найти критерий точности и условия, устраняющие "феномен Фуллера".

Список литературы

1. Сухинин Б. В., Сурков В. В. Аналитическое конструирование робастных оптимальных по быстродействию систем управления с бесконечно большим коэффициентом усиления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 8. С.453—463.
2. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Synthesis of Automatic Systems with Standard Dynamics on the Basis of Formalism Linear-Quadratic Optimization // Proc. of the Internat. Russian Automation Conference (RusAutoCon-2019). IEEE. 2019. 8867718. P. 148—152.
3. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Synthesis of Regulation by the Method of Linear-Square Approximate Correction // Proc. of 2019 3rd Internat. Conference on Control in Technical Systems (CTS-2019). IEEE. 2019. 8973309. P. 3—7.

4. **Красовский А. А.** Проблемы физической теории управления // Автоматика и телемеханика. 1990. № 11. С. 3—28.
5. **Филимонов Н. Б.** Методологический кризис "всепообеждающей математизации" современной теории управления // Мехатроника, автоматизация управление. 2016. Т. 17, № 5. С. 291—301.
6. **Сухинин Б. В., Сурков В. В.** Феномен Фуллера в теории и практике оптимального управления // Journal of Advanced in Technical Science. 2021. Vol. 2, Iss. 23. P. 94—99.
7. **Фуллер А. Т.** Оптимизация релейных систем регулирования по различным критериям качества // Труды I конгресса ИФАК. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 584—605.
8. **Зеликин М. И., Борисов В. Ф.** Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления // Труды Математического института АН СССР. 1991. Т. 197. С. 85—166.
9. **Zelikin M. I., Borisov V. F.** Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering. Birkhäuser, Boston, MA, 1994. 244 p.
10. **Телеснин В. Р.** Об одной задаче оптимизации переходных процессов // Труды МИАН. 1984. Т. 166. С. 235—244.
11. **Дифференциальные уравнения.** Некоторые математические задачи оптимального управления. Сборник статей под ред. акад. Е. Ф. Мищенко // Труды математического института им. В. А. Стеклова. М.: Наука, 2001. С. 87—150.
12. **Павленок Н. С.** Задача оптимального управления линейной системой по квадратичному критерию качества // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация: Матер. Междунар. науч. конф., посвященной 100-летию со дня рождения акад. Е. А. Барбашина. Белорус. гос. ун-т. Минск: БГУ, 2018. С. 173—175.
13. **Майкова О. Е.** Субоптимальные режимы в задаче Фуллера // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 226—229.
14. **Chyba M., Haberkorn T.** Autonomous Underwater Vehicles: Singular Extremals and Chattering. In: Systems, Control, Modeling and Optimization (Eds. F. Cergioi et al.), Springer Verlag, 2003. P. 103—113.
15. **Наумов Г. В.** Анализ задач оптимального управления с учащающимися переключениями инвариантно-групповыми и численными методами: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МИФИ (ГУ), 2005. 93 с.
16. **Yang J.** Timing of Effort and Reward: Three-Sided Moral Hazard in a Continuous-time Model // Management Science. 2010. Vol. 56. P. 1568—1583.
17. **Schättler H., Ledzewicz U.** Synthesis of Optimal Controlled Trajectories with Chattering Arcs // Dynamics of Continuous. 2012. N. 9. P. 161—186.
18. **Борисов В. Ф.** Экстремали с бесконечным числом переключений в окрестности особых экстремалей высоких порядков: дис. ... д-р физ.-мат наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова. 2015. 256 с.
19. **Кочетков С. А.** Разработка методов повышения точности регулирования в релейных системах управления: дис. ... д-р тех. наук. М.: ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, 2015. 297 с.
20. **Киселев Ю. Н., Аввакумов С. Н.** Решение задачи Фуллера на основе принципа максимума Понтрягина // Системный анализ: моделирование и управление: Материалы Междунар. конф., посвященной памяти акад. А. В. Кряжковского, М.: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2018. С. 55—58.
21. **Сурков В. В., Сухинин Б. В., Ловчаков В. И., Соловьев А. Э.** Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов по критериям точности, быстродействию, энергосбережению. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. 300 с.
22. **Бор-Раменский А. Е., Воронцовский Б. Б., Святославский В. А.** Быстродействующий электропривод. М.: Энергия, 1969. 168 с.
23. **Клюев А. С., Колесников А. А.** Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.

Phenomen by Fuller in the Problems of Analytical Design of Optimal Regulators

V. V. Sukhinin, eeo@uic.tula.ru, **V. V. Surkov**, vvs150747@mail.ru,
The Tula State University, Tula, 300034, Russian Federation,

N. B. Filimonov, nbfilimonov@mail.ru,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation,
Trapeznikov Institute of Control Problems, RAS, Moscow, 117997, Russian Federation

Corresponding author: **Surkov Vladimir V.**, Professor, Dr.Sci.Tech.,
Tula State University, Tula, 300034, Russian Federation, e-mail: vvs150747@mail.ru

Accepted on December 15, 2020

Abstract

The problem of synthesis of an optimal controlled system with a quadratic quality criterion having an infinite number of switching points at a finite time interval is discussed. In the theory of optimal control, this phenomenon is called the "Fuller phenomenon". For more than 60 years, the Fuller problem has been very attractive, relevant, and still unsolved, especially for non-linear multidimensional dynamical systems of high order, and even more so, with obtaining a solution in an explicit analytical form for practical implementation in a control system.

The purpose of this work is to demonstrate the theoretical aspects and practical features of the method of synthesis of optimal control systems by the fast acting criterion by the example of solving problems related to the Fuller phenomenon.

When solving these problems, we use in the classical variations calculus and the Pontryagin maximum principle of the method of introducing a new additional phase variable into consideration, which is defined to the integral quality criterion and expands the original phase vector of the object. As a result, if the best optimal control in terms of fast acting for the control object is known then this technique makes it very easy to get a worse optimal control in terms of accuracy by including the Fuller accuracy criterion in the dynamics of the control object. It should be note that an important acquisition here is to increase the accuracy to the optimal value and reduce the established control error to zero, with all error coefficients (in position, speed, acceleration, jerk, etc.) equal to zero in the presence of external and internal interference.

Statements and solutions of the classical and modified Fuller problems are presented. As illustrative examples, we consider the traditional problems of the synthesis of optimal control in terms of speed, solved in well-known methods.

Keywords: Fuller phenomenon, square optimality criterion, criterion of fast acting, accuracy, control synthesis, stability

For citation:

Sukhinin B. V., Surkov V. V., Filimonov N. B. Phenomen by Fuller in the Problems of Analytical Design of Optimal Regulators, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 7, pp. 339–348.

DOI: 10.17587/mau.22.339-348

References

1. **Sukhinin B. V., Surkov V. V.** Analytical construction of robust time-optimal control systems with infinitely large gain, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 8, pp. 453–463 (in Russian).
2. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Synthesis of Automatic Systems with Standard Dynamics on the Basis of Formalism Linear-Quadratic Optimization, *Proc. of the Internat. Russian Automation Conference (RusAutoCon-2019)*, IEEE, 2019, 8867718, pp. 148–152.
3. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Synthesis of Regulation by the Method of Linear-Square Approximate Correction, *Proc. of 2019 3rd Internat. Conference on Control in Technical Systems (CTS-2019)*, IEEE, 2019, 8973309, pp. 3–7.
4. **Krasovsky A. A.** Problems of physical control theory, *Automation and Remote Control*, 1990, vol. 51, no. 11, pp. 1459–1479.
5. **Filimonov N. B.** Methodological Crisis of the "All Winning Mathematization" of the Modern Control Theory, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 5, pp. 291–301.
6. **Sukhinin B. V., Surkov V. V.** Fuller's phenomenon in theory and practice of optimal control, *Journal of Advanced in Technical Science*, 2021, iss. 23, vol. 2, pp. 94–99.
7. **Fuller A. T.** Optimization of relay control systems according to various quality criteria, *1st Internat. IFAC Congress on Automatic and Remote Control*, vol. 2, Moscow, USSR, pp. 584–605 (in Russian).
8. **Zelikin M. I., Borisov V. F.** Modes of Increasing Switching in Optimal Control Problems, *Proc. of the Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the USSR*, 1991, vol. 197, pp. 85–166 (in Russian).
9. **Zelikin M. I., Borisov V. F.** Theory of Chattering Control with applications to Astronautics, Robotics, Economics, and Engineering, Birkhäuser, Boston, MA, 1994, 244 p.
10. **Telesnin V. R.** On a Problem of Optimization of Transient Processes, *Proc. of Steklov Institute of Mathematics*, 1984, vol. 166, pp. 235–244 (in Russian).
11. **Differential Equations.** Some mathematical problems of optimal control, Collection of articles, ed. Academician E. F. Mishchenko, *Proc. of Steklov Institute of Mathematics*, 2001, pp. 87–150 (in Russian).
12. **Pavlenok N. S.** The problem of optimal control of a linear system by a quadratic performance criterion, *Dynamical systems: stability, control, optimization. Materials of the Intern. scientific conf., dedicated to the 100th anniversary of the birth of acad. E. A. Barbashin*, Minsk, BSU, 2018, pp. 173–175 (in Russian).
13. **Majkova O. E.** Suboptimal Regimes in Fuller's Problem, *Proc. of Steklov Institute of Mathematics*, 2002, vol. 236, pp. 226–229 (in Russian).
14. **Chyba M., Haberkorn T.** Autonomous underwater vehicles: singular extremals and chattering, *Systems, Control, Modeling and Optimization* (Eds. F. Cerglioli et al.), 2003, Springer Verlag, pp. 103–113.
15. **Naumov G. V.** Analysis of optimal control problems with increasing switching by invariant-group and numerical methods, Dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, Moscow, Moscow. Physics and Technology Institute (State University), 2005, 93 p.
16. **Yang J.** Timing of effort and reward: three-sided moral hazard in a continuous-time model, *Management Science*, 2010, vol. 56, pp. 1568–1583.
17. **Schättler H., Ledzewicz U.** Synthesis of optimal controlled trajectories with chattering arcs, *Dynamics of Continuous*, 2012, vol. 19, pp. 161–186.
18. **Borisov V. F.** Extremals with an infinite number of switchings in the vicinity of singular high-order extremals, Dissertation for the degree of Doctor of Physics and Mathematics, Moscow, Lomonosov State University, 2015, 256 p. (in Russian).
19. **Kochetkov S. A.** Development of methods for increasing the accuracy of regulation in relay control systems, Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences, Moscow, V. A. Trapeznikov Institute of Control Science of RAN, 2015, 297 p. (in Russian).
20. **Kiselev Yu. N., Avvakumov S. N.** Solution of Fuller's problem based on the Pontryagin maximum principle, *System analysis: modeling and control: Materials of the Internat. conf. dedicated to the memory of acad. A. V. Kryazhinsky*, Moscow, Steklov Institute of Mathematics, RAN, 2018, pp. 55–58 (in Russian).
21. **Surkov V. V., Sukhinin B. V., Lovchakov V. I., Soloviev A. E.** Analytical construction of optimal regulators by the criteria of accuracy, speed, energy saving, Tula, Publishing house of TuSU, 2005, 300 p. (in Russian).
22. **Bor-Ramensky A. E., Voronetsky B. B., Svyatoslavsky V. A.** Fast-acting electric drive, Moscow, Energiya, 1969, 168 p. (in Russian).
23. **Klyuev A. S., Kolesnikov A. A.** Optimization of automatic control systems for speed, Moscow, Energoizdat, 1982, 240 p. (in Russian).

Б. А. Лаговский, д-р техн. наук, проф., Robertlag@yandex.ru,
 Российский технологический университет, г. Москва,
Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук, проф., rubinvch@ipu.ru,
 Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

Алгоритмы цифровой обработки данных измерений, обеспечивающие угловое сверхразрешение¹

Рассмотрены некорректно поставленные одно- и двумерные обратные задачи восстановления изображений объектов с угловым разрешением, превышающим критерий Рэлея. Представлены алгебраические методы и алгоритмы обработки данных, полученных измерительными системами, в целях достижения углового сверхразрешения. Угловое сверхразрешение позволяет детализировать изображения объектов, решать задачи их распознавания и идентификации. Показана эффективность использования алгоритмов на основе развитых алгебраических методов и их модификаций при параметризации исследуемых обратных задач и дальнейшем восстановлении приближенных изображений объектов различных типов. Адекватность и устойчивость решений проверена в ходе численных экспериментов на математической модели. Выяснено, что помехоустойчивость полученных решений превышает многие известные подходы. Результаты численных экспериментов подтверждают возможность получения изображений с разрешением, превосходящим критерий Рэлея в 2...6 раз при малых значениях отношения сигнал/шум. Описаны пути дальнейшего повышения степени сверхразрешения на основе интеллектуального анализа данных измерений. Найдено, что предложенный алгоритм симметризации позволяет повысить качество решений рассматриваемых обратных задач и их устойчивость. На примерах продемонстрировано успешное применение модифицированных алгебраических методов и алгоритмов получения изображений исследуемых объектов при наличии априорной информации о решении. Результаты численных исследований показывают, что представляемые методы цифровой обработки принимаемых сигналов позволяют достичь эффективной угловой разрешающей способности, в 3...10 раз превышающей критерий Рэлея, с хорошей точностью восстанавливать угловые координаты исследуемых объектов и их отдельных элементов. Минимально необходимое отношение сигнал/шум для получения адекватных решений со сверхразрешением составляет для описываемых методов 13...16 дБ, что существенно меньше, чем у известных методов. Относительная простота представленных методов позволяет использовать недорогие вычислительные устройства и работать в режиме реального времени.

Ключевые слова: угловое сверхразрешение, критерий Рэлея, устойчивость обратных задач, параметризация обратных задач, интегральное уравнение типа свертки

Введение

Важная задача усовершенствования современных угломерных систем — повышение их информативности. Одно из основных направлений ее решения — детализация изображений исследуемых объектов на основе повышения угловой разрешающей способности систем. В силу важности задачи во многих странах проблемам достижения углового сверхразрешения посвящены уже сотни публикаций. Выделим ряд статей, носящих общий характер, [1—4]. Популярными в настоящее время являются методы MUSIC [5—7], ESPRIT [8], метод деконволюции [9, 10], метод максимальной энтропии [11], метод Борджотти—Лагунаса [12], метод Кейпона [13], метод максимального правдоподобия [14] и ряд других [15].

Алгоритмы на основе упомянутых методов в основном позволяют увеличить угловое разрешение при отношении сигнал/шум (ОСШ) не ниже 20...25 дБ. Для дальнейшего увеличе-

ния разрешения в два раза требуется обеспечить увеличение отношения сигнал/шум на порядок. Быстродействие большинства алгоритмов недостаточно для работы в режиме реального времени.

Развиваемые алгебраические методы [16—18] обладают существенно более высокой помехоустойчивостью. Они достаточно просты, что позволяет использовать относительно простые и дешевые вычислительные устройства. В итоге, в отличие от многих других методов, оказывается возможным применять их в режиме реального времени.

Постановка задачи

Ставится задача восстановления изображения источника сигнала $I(\theta, \varphi)$ с возможно большим уровнем сверхразрешения при меньших ОСШ, чем большинство известных методов. Известными считаются принятый сигнал $U(\theta, \varphi)$ и диаграмма направленности (ДН) $f(\theta, \varphi)$ измерительной системы.

Пусть в секторе обзора Ω измерительной системы находится объект с конечными угловыми

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-07-00006 и РНФ в рамках научного проекта № 21-19-00128.

размерами. При сканировании на выходе приемного устройства измерительной системы получим зависимость от угла наблюдения в виде $U(\theta, \varphi)$.

Поскольку большинство измерительных систем, систем наблюдения и контроля могут быть описаны как линейные системы, то связь величин I , U и $f(\theta, \varphi)$ представляет собой двумерное линейное интегральное уравнение (ИУ) Фредгольма первого рода типа свертки:

$$U(\theta, \varphi) = \int_{\Omega} f(\theta - \theta', \varphi - \varphi') I(\theta', \varphi') d\theta' d\varphi'. \quad (1)$$

Поиск зависимости $I(\theta, \varphi)$ является обратной задачей и относится к классу некорректных. Из трех условий корректности задач по Адамару (существование решения, единственность решения, устойчивость решения) уравнение Фредгольма (1) не удовлетворяет второму и третьему условиям.

Без обработки сигнала детали объекта в пределах ширины ДН оказываются неразличимы, и видимое изображение в этой области представляет собой единое "пятно". Угловое разрешение по каждой из координат, обеспечиваемое при прямом наблюдении, соответствует критерию Рэля:

$$\delta\theta \cong \lambda/D, \quad (2)$$

где D — размер апертуры; λ — длина волны.

Ширина ДН измерительных систем $\theta_{0,5}$ также описывается выражением (2). Ширина ДН определяется соотношением неопределенностей, и ее значение является фундаментальной величиной. В то же время угловое разрешение в форме (2) не носит фундаментальный характер. Таким образом, при анализе и обработке результатов прямых измерений есть возможность превысить критерий Рэля и получить угловое сверхразрешение.

Цифровая обработка результатов измерений $U(\theta, \varphi)$, направленная на превышение критерия Рэля, приводит к появлению неустойчивостей в решениях. Неустойчивости начинают резко, обычно экспоненциально, возрастать с увеличением уровня достигаемого углового сверхразрешения. Как следствие, появляются и возрастают ошибки, приводящие в итоге к неадекватным решениям. Следует отметить, что обратные задачи, вследствие их неустойчивости, гораздо более, чем прямые, чувствительны к случайным составляющим в исследуемом сигнале $U(\theta, \varphi)$.

Превышение критерия Рэля, т. е. получение сверхразрешения, как показывают исследования, возможно, но до определенного предела, определяемого ОСШ, точностью измерений и точностью задания ДН.

Алгебраические методы решения

Алгоритмы решений обратной задачи (1) предлагается строить на основе итерационных процедур. Они заключаются в поиске решений в виде разложений по задаваемым последовательностям ортогональных функций в области расположения источника [19] при последовательном увеличении числа используемых функций. Будем называть эти методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов алгебраическими.

Искомое решение $I(\theta, \varphi)$ всегда можно представить в виде разложения по полной системе ортонормированных в области расположения источника Ω функций $g_m(\theta, \varphi)$ с неизвестными коэффициентами b_m :

$$I(\theta, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m g_m(\theta, \varphi) \cong \sum_{m=1}^N b_m g_m(\theta, \varphi). \quad (3)$$

Для упрощения получаемых выражений рассмотрим вначале одномерный случай. Тогда искомое решение $I(\theta)$ (3) выражается в виде

$$I(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m g_m(\theta) \cong \sum_{m=1}^N b_m g_m(\theta). \quad (4)$$

Используя соотношение (4), вместо ИУ (1) приходим к разложению полученного при сканировании сигнала по системе неортогональных функций $\chi_m(\theta)$:

$$U(\theta) \cong \sum_{m=1}^N b_m \chi_m(\theta), \quad (5)$$

$$\chi_m(\theta) = \int_{\Omega} f(\theta - \gamma) g_m(\gamma) d\gamma. \quad (6)$$

Все коэффициенты b_m , необходимые для получения решения (4), обычно находятся из условия минимизации среднеквадратичного отклонения правой части в соотношении (5) от заданных значений $U(\theta)$. В итоге поиск неизвестных коэффициентов b_m , формирующих вектор B , сводится к решению СЛАУ

$$V = HB, \quad (7)$$

где элементы вектора V и матрицы H представляют собой интегралы:

$$V_m = \int_{\Theta} U(\theta) \chi_m(\theta) d\theta, \quad H_{nm} = \int_{\Theta} \chi_n(\theta) \chi_m(\theta) d\theta, \quad (8)$$

$$m, n = 1, 2, \dots, N.$$

Область Θ — сектор углов, в пределах которого значение ОСШ достаточно для получения устойчивых решений.

Таким образом, поиск решения в виде (4) позволяет провести параметризацию обратной

задачи и свести ее решение к решению СЛАУ [20, 21].

Атрибутом получающихся СЛАУ является их плохая обусловленность, появляющаяся вследствие попытки решения обратной задачи.

Коэффициенты b_j в соотношении (4) можно найти и не прибегая к критерию среднеквадратичного приближения. Вместо использования непрерывной зависимости сигнала $U(\theta)$ возможно использование выборки сигнала при N значениях углов: $\theta_j \in \Theta, j = 1, 2, \dots, N$. Тогда вместо ИУ (1) приходим к СЛАУ

$$W = FB, \quad (9)$$

где W — вектор значений $U(\theta_j)$; F — матрица с элементами $F_{mj} = \chi_m(\theta_j)$.

Решения СЛАУ (9) при малом уровне шумов оказываются более устойчивыми, чем на основе (7), о чем свидетельствуют меньшие значения чисел обусловленности алгоритмов [22]. Это позволяет, в частности, при одинаковой устойчивости алгоритмов использовать в решении на основе (9) большее число функций N , повышая уровень сверхразрешения.

Сравнивая алгебраический метод с другими, следует отметить, что он потенциально позволяет получить *точное* решение обратной задачи (1), если $I(\theta)$ *точно* выражается с помощью конечного числа членов из выбранной системы функций $g_m(\theta)$. Легко доказать, что какой бы ни была зависимость $I(\theta)$, возможен выбор такой системы функций $g_m(\theta)$. Таким образом, алгебраический метод *потенциально* обеспечивает качество получаемого решения по меньшей мере не хуже, чем любой другой известный метод. Вопрос выбора оптимальной системы функций $g_m(\theta)$ для каждой конкретной задачи остается, однако, открытым.

Известно, что существенное повышение качества решений обратных задач может быть достигнуто при использовании априорной информации о решении. Наличие такой информации позволяет, в частности, использовать ее при оптимизации выбора системы функций для построения решения [23].

В качестве примера использования информации такого рода на рис. 1 показано решение задачи восстановления изображения двух близко расположенных источников сигналов. Сплошная кривая 1 — истинное распределение амплитуды отраженного объектами сигнала. В виде кривой 4 показан сигнал, полученный при сканировании области расположения источника угломерной системой с шириной луча $\theta_{0,5}$. Объекты оказались не разрешены при прямом наблюдении.

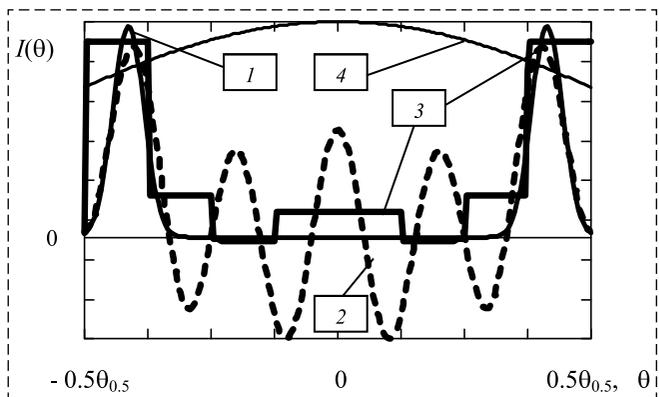


Рис. 1. Восстановление изображения источника сигнала
Fig. 1. Restoring the image of the signal source

На рис. 1 приведены два решения. В виде штриховой кривой 2 показано изображение источника, полученное на основе соотношений (4)—(8) без использования какой-либо предварительной информации о решении. В качестве системы функций $g_m(\theta)$ вначале были выбраны тригонометрические.

Полученное решение, помимо правильно найденного расположения истинного источника, содержит и ложные источники со значительными амплитудами, что существенно снижает качество восстановленного изображения.

В виде ломаной 3 на этом же рисунке приведено решение при использовании предварительной информации о наличии значительных градиентов в распределении амплитуды отражаемого сигнала. Эта информация предопределила использование ступенчатых функций в качестве системы $g_m(\theta)$.

Полученное приближенное решение на основе априорной информации позволило разрешить источники и практически точно определить их угловое положение. Амплитудные значения ложных источников оказались пренебрежимо малы. Таким образом, дополнительная информация позволила резко повысить качество решения.

Нередко в поставленных задачах априорная информация об исследуемом объекте отсутствует или ее немного. В целях получения дополнительной информации предложено использовать методы, близкие к *data mining*. Их применение позволяет выявлять "скрытые" характеристики источников сигналов. Предлагаемые для этого алгоритмы основаны на формировании итерационного процесса, при котором на каждом его шаге в качестве априорных используются данные, полученные на предыдущем шаге. Найденные промежуточные данные о решении уточняются и детализируются. Кроме того, выявляются новые характеристики источника. На следующем шаге

полученная новая информация об объекте вновь используется уже в качестве априорной. Поиск проводится при последовательном возрастании числа используемых функций $g_m(\theta)$.

На основе выявленных новых характеристик источника сигналов в ходе описываемого итерационного процесса выбираются и, при необходимости, изменяются системы используемых функций. На основе новой полученной информации возможна также селекция функций из выбранной ортогональной системы. Отбираются функции, в наибольшей степени отражающие вид зависимости $I(\theta)$. Это особенно важно, так как размерность матриц (7), (8) ограничена из-за экспоненциального роста неустойчивости решения с увеличением числа уравнений. Селекция может быть осуществлена на основе:

- выбора функций из используемого семейства с наибольшими значениями коэффициентов разложения;
- сравнения спектров сигнала и спектров функций $g_m(\theta)$;
- анализа взаимных корреляционных функций сигнала и $g_m(\theta)$.

В качестве примера применения итерационного алгоритма поиска и использования априорных данных на рис. 2 показано решение задачи восстановления изображения источника сигналов с заранее неизвестным типом распределения амплитуды отраженного сигнала.

При решении задачи на первых шагах итерационного процесса было отмечено, что распределение скорее всего носит плавно-неоднородный характер, но со значительными перепадами амплитуды сигнала. Это предопределило выбор системы функций в виде МНАТ-вейвлетов при построении решения. Далее был проведен отбор семи наиболее пригодных для решения вейвлетов на основе анализа спектрального состава принятого сигнала.

Истинное распределение амплитуды отраженного объектом сигнала показано на рис. 2

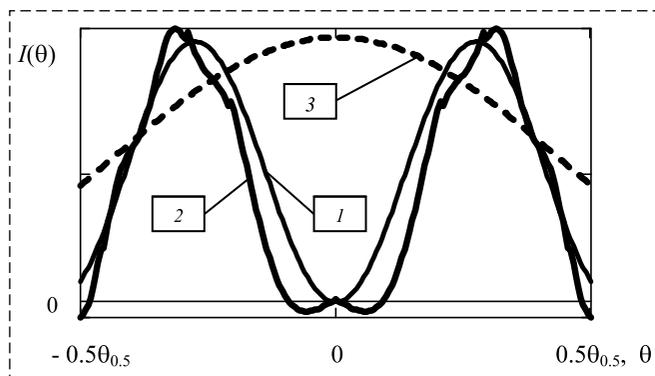


Рис. 2. Восстановление изображения плавно-неоднородного источника

Fig. 2. Image reconstruction of a smoothly inhomogeneous source

в виде тонкой кривой 1. Восстановленное изображение показано в виде сплошной жирной кривой 2. Для иллюстрации в виде штриховой кривой 3 приведен принимаемый сигнал в области расположения источника.

Превышение критерия Рэля составило 3...4 раза, точность локализации источника сигналов около $\theta_{0,5}/12$ при незначительных искажениях.

Большинство известных методов достижения сверхразрешения предназначено для получения решения одномерных задач. Их обобщение на двумерные задачи существенно усложняет алгоритмы, повышает неустойчивость решений. Кроме того, резко повышается время обработки сигналов. Для получения удовлетворительных результатов иногда требуется использование параллельных процессоров [28]. В то же время алгебраический метод и алгоритмы на его основе могут успешно применяться к двумерным задачам.

Симметризация решений

Дальнейшее повышение сверхразрешения возможно при использовании более сложных алгоритмов обработки сигналов, использующих особенности конкретных решаемых задач [25—27]. Представим один из такого рода алгоритмов, основанный на симметризации обратной задачи.

Поскольку решение $I(\theta)$ всегда может быть представлено в виде суммы четной и нечетной частей

$$I(\theta) = 0,5[I_0(\theta) + I_e(\theta)],$$

где

$$\begin{aligned} I_0(\theta) &= 0,5 [I(\theta) + I(-\theta)], \\ I_e(\theta) &= 0,5 [I(\theta) - I(-\theta)], \end{aligned} \quad (10)$$

то и принятый сигнал также может быть выражен в виде суммы четной и нечетной частей:

$$\begin{aligned} U(\theta) &= 1/2[U_o(\theta) + U_e(\theta)], \\ U_o(\theta) &= \int_{\Omega} f(\theta - \varphi)I_o(\varphi)d\varphi, \\ U_e(\theta) &= \int_{\Omega} f(\theta - \varphi)I_e(\varphi)d\varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда в силу линейности задача поиска источника $I(\theta)$ распадается на две отдельные задачи. Первая задача — поиск четной части $I(\theta)$, т.е. $I_0(\theta)$ по четной части принятого сигнала на основе системы четных функций. Вторая — поиск нечетной части решения $I_e(\theta)$ по $U_e(\theta)$ на основе нечетных функций.

Общим решением всей задачи является суперпозиция четного и нечетного решений. Если при решении каждой из задач удается получить устойчивое решение при использовании N функций, то итоговое суммарное решение содержит $2N$ функций. При прямом поиске распределения $I(\theta)$ в виде разложения по $2N$ функциям, т. е. без выделения четной и нечетной частей сигнала, приходится решать одну плохо обусловленную СЛАУ вдвое большей размерности. Получить решение в этом случае удастся далеко не всегда, так как неустойчивости экспоненциально возрастают с ростом размерности СЛАУ.

Таким образом, симметризация задачи потенциально позволяет удвоить эффективное разрешение без снижения устойчивости решения.

На рис. 3 показано решение задачи восстановления изображения двух близко расположенных источников на основе симметризации задачи.

Были заданы два малоразмерных источника с различающимися в два раза амплитудами. Без обработки сигнала при прямом наблюдении эти источники разрешаются при расстоянии между ними не менее $2,54\theta_{0,5}$.

Задача решалась при наличии случайных составляющих в исходном сигнале. ОСШ составляло 16 дБ. Обычная обработка сигнала на основе формул (4)–(8) не позволила разрешить источники. Была проведена симметризация задачи. В качестве систем функций использовались ступенчатые функции.

Полученные результаты представлены на рис. 3: 1 — исходные точечные источники сигнала; 2 — решение на основе симметризации и получаемой в ходе итерационного процесса дополнительной информации о локализации источников; 3, 4 — четная и нечетная части принимаемого сигнала, полученные при его симметризации.

Обработка сигнала с помощью алгоритма симметризации позволила значительно повысить

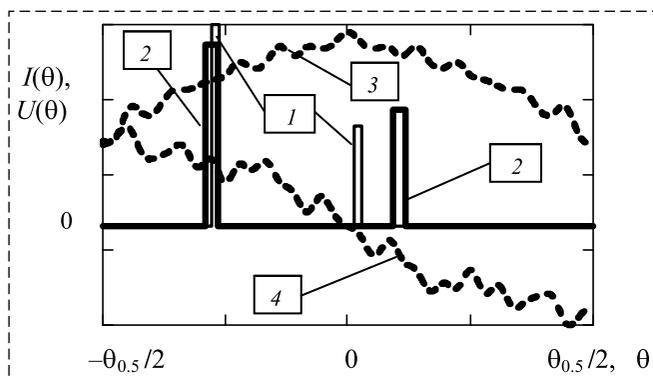


Рис. 3. Решение на основе симметризации задачи
Fig. 3. Solution based on the symmetrization of the problem

устойчивость решения и добиться превышения критерия Рэлея на порядок при относительно высоком уровне шума.

Алгоритм симметризации задач успешно работает, если исходная зависимость $U(\theta)$ не является симметричной, антисимметричной или близкой к ним. В противном случае амплитудные значения либо четной, либо нечетной части полезного сигнала $U(\theta)$ значительно снижаются, что резко уменьшает ОСШ, и адекватное решение задачи не может быть получено [23].

Проведение симметризации эффективно также и для двумерных задач. Для этого введем понятие двойной четности: если функция четна по θ и φ , то назовем ее четно-четной, если четна по θ и нечетна по φ , назовем ее четно-нечетной и т. д. Далее представим принятый сигнал U и решение I в виде суммы четырех составляющих различной четности вида U_{oo} , U_{eo} , U_{oe} и U_{ee} .

$$\begin{aligned} U_{oo}(\theta, \varphi) &= 0,25(U(\theta, \varphi) + U(-\theta, \varphi) + \\ &+ U(\theta, -\varphi) + U(-\theta, -\varphi)); \\ U_{eo}(\theta, \varphi) &= 0,25(U(\theta, \varphi) - U(-\theta, \varphi) + \\ &+ U(\theta, -\varphi) - U(-\theta, -\varphi)); \\ U_{oe}(\theta, \varphi) &= 0,25(U(\theta, \varphi) + U(-\theta, \varphi) - \\ &- U(\theta, -\varphi) - U(-\theta, -\varphi)); \\ U_{ee}(\theta, \varphi) &= 0,25(U(\theta, \varphi) - U(-\theta, \varphi) - \\ &- U(\theta, -\varphi) + U(-\theta, -\varphi)). \end{aligned} \quad (12)$$

Для представления решения теперь требуется четыре системы функций различной четности, например, в прямоугольной системе координат (θ, φ) на основе четырех произведений тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} g_{oo,m}(\theta, \varphi) &= \cos(\Delta_\theta m) \cos(\Delta_\varphi m); \\ g_{eo,m}(\theta, \varphi) &= \sin(\Delta_\theta m) \cos(\Delta_\varphi m); \\ g_{oe,m}(\theta, \varphi) &= \cos(\Delta_\theta m) \sin(\Delta_\varphi m); \\ g_{ee,m}(\theta, \varphi) &= \sin(\Delta_\theta m) \sin(\Delta_\varphi m); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Delta_\theta = \frac{2\pi\theta}{T_\theta}, \quad \Delta_\varphi = \frac{2\pi\varphi}{T_\varphi}.$$

где T_θ и T_φ — размеры области расположения источника по углам θ и φ .

В итоге силу линейности исходная задача распадается на четыре отдельные задачи. Общее решение — суперпозиция решений задач всех четностей:

$$I(\theta, \varphi) = 0,25[I_{eo}(\theta, \varphi) + I_{oe}(\theta, \varphi) + I_{oo}(\theta, \varphi) + I_{ee}(\theta, \varphi)]. \quad (14)$$

В качестве примера на рис. 4 в декартовых координатах показано решение задачи восстановления изображения источников, получен-

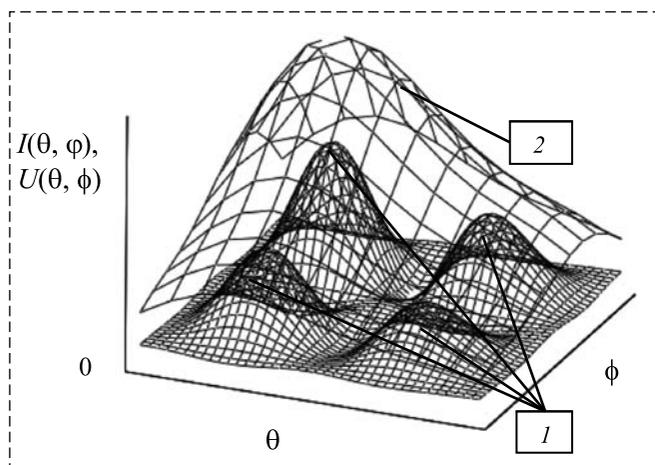


Рис. 4. Решение на основе симметризации двумерной задачи
Fig. 4. Solution based on the symmetrization of the two-dimensional problem

ное методом симметризации. Углы (θ, φ) отложены по горизонтальным осям в пределах

$$-\theta_{0,5}/2 \leq \theta \leq \theta_{0,5}/2; -\varphi_{0,5}/2 \leq \varphi \leq \varphi_{0,5}/2. \quad (15)$$

В области (15) были заданы источники с плавным распределением интенсивности, не разрешаемые при прямом наблюдении. Их максимумы различались в 4 раза. Принятый при сканировании сигнал $U(\theta, \varphi)$ приведен на рис. 4 в виде поверхности 2.

Решение задачи на основе соотношений (3)—(9) не позволило разрешить все источники. Далее был использован алгоритм симметризации, в котором в качестве систем функций использовались четыре системы функций вида (13).

Полученное на основе соотношений (12)—(14) решение, показанное в виде поверхности с густой сеткой, позволило разрешить все четыре источника I , правильно передать их расположение и характер распределения интенсивности.

Найденные угловые размеры источников немного, на 5...8 %, превысили их истинные размеры, амплитудные значения восстановлены с небольшими в пределах 7 % погрешностями.

Заключение

В статье предложены алгоритмы решения обратных одно- и двумерных задач восстановления изображений источников сигналов с угловым разрешением, превышающим критерий Рэлея, на основе развиваемых алгебраических методов обработки сигналов. Разработанные алгоритмы позволяют формировать приближенные изображения сложных объектов при меньших ОСШ, чем многие известные упомянутые во введении алгоритмы.

Изображения восстанавливаются с относительно небольшими ошибками в амплитудных значениях и в угловых положениях объектов, а также их элементов. Описан новый тип более сложных алгоритмов, основанный на итерационном процессе, в ходе которого выявляются "скрытые" характеристики решения, используемые далее в качестве априорной информации на последующих шагах итерационного процесса.

В итоге достигаемое угловое разрешение удается довести до значений в 5...10, а иногда и более раз превышающих критерий Рэлея. В альтернативной трактовке: модифицированные алгебраические методы и алгоритмы при фиксированном уровне сверхразрешения позволяют снизить уровень допустимого ОСШ в исходных данных. Предложенные алгоритмы в сравнении с известными относительно просты, что позволяет использовать их в режиме реального времени.

Список литературы

1. **Kasturiwala S. B., Ladhake S. A.** Superresolution: A novel application to image restoration // International Journal on Computer Science and Engineering, 2010. N. 5. P. 1659—1664.
2. **Uttam S., Goodman N. A.** Superresolution of coherent sources in real-beam Data // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 2010. Vol. 46, N. 3. P. 1557—1566.
3. **Park S. C., Park M. K., Kang M. G.** Super-resolution image reconstruction: a technical overview // IEEE Signal Processing Magazine. 2003. Vol. 20(3). P. 21—36.
4. **Dung G. V., Kulikov N. V.** Analysis of noise immunity of reception of signals with multiple phase shift keying under the influence of scanning interference // Russian technological journal. 2018. Vol. 6, N. 6. P. 5—12.
5. **Waweru N. P., Konditi D. B. O., Langat P. K.** Performance Analysis of MUSIC Root-MUSIC and ESPRIT // DOA Estimation Algorithm. International Journal of Electrical Computer Energetic Electronic and Comm. Engineering. 2014. Vol. 8, N. 1. P. 209—216.
6. **Rao B. D., Hari K. V. S.** Performance analysis of Root-Music // IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1989. Vol. 37. N. 12. P. 1939—1949.
7. **Kim K. T., Seo D. K., Kim H. T.** Efficient radar target recognition using the MUSIC algorithm and invariant features // IEEE Trans. Antennas and Propagation, 2002. Vol. 50. N. 3. P. 325—337.
8. **Lavate T. B., Kokate V. K., Sapkal A. M.** Performance Analysis of MUSIC and ESPRIT // DOA Estimation Algorithms for Adaptive Array Smart Antenna in Mobile Communication. 2nd Int. Conf. on Computer and Network Technology ICCNT, United States. 2010. P. 308—311.
9. **Sroubek F., Cristobal G., Flusser J.** Simultaneous Super-Resolution and Blind Deconvolution // Journal of Physics: Conference Series. 2008. Vol. 124, N. 1. P. 012048.
10. **Almeida M. S., Figueiredo M. A.** Deconvolving images with unknown boundaries using the alternating direction method of multipliers // IEEE Trans. Image Process, 2013. Vol. 22, N. 8. P. 3074—3086.
11. **Dudík M., Phillips S. J., Schapire R. E.** Maximum entropy density estimation with generalized regularization and an application to species distribution modeling // Journal of Machine Learning Research. 2007. N. 8. P. 1217—1260.
12. **Borgiotti G. V., Kaplan L. J.** Superresolution of uncorrected interference sources by using adaptive array technique // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1979. Vol. AP-27. P. 842—845.

13. **Tan W. Q., Hou Y. G.** Estimation of direction of source arrival based upon MUSIC and Capon // Journal of Nanchang Institute of Technology. 2008. N. 27(1). P. 20–23.
14. **Stoica P., Sharman K. C.** Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation // IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing. 1990. N. 38(7). P. 1132–1143.
15. **Cetin M., Karl W. C.** Feature-enhanced synthetic aperture radar image formation based on nonquadratic regularization // IEEE Trans. Image Processing. 2001. Vol. 10. N. 4. P. 623–631.
16. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B., Shestopalov Y. V.** Increasing effective angular resolution measuring systems based on antenna arrays // Proc. 2016 URSI Int. Symp. Electromagnetic Theory (EMTS). Espoo, Finland. 2016. P. 432–434.
17. **Lagovsky B. A., Chikina A. G.** Superresolution in signal processing using a priori information. IEEE // Progress in Electromagnetics Research Symp. St. Petersburg, 2017. P. 944–947.
18. **Lagovsky B., Rubinovich E.** Increasing the Angular Resolution of Control and Measurement Systems in Signal Processing // IEEE Proceedings. Prague, Czech Republic. 2020. P. 496–500.
19. **Morse P., Feshbach H.** Methods of Theoretical Physics. McGraw-Hill. Science/Engineering/Math. 1953. 1978 p.
20. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B.** Image Restoration of Two-dimensional Signal Sources with Superresolution // Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings (PIERS). Stockholm. 2013. P. 315–319.
21. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B., Shestopalov Y. V.** Creating Two-Dimensional Images of Objects with High Angular Resolution // 2018 IEEE Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation (APCAP). 2018. P. 114–115.
22. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B., Tripathy M.** Superresolution in problems of remote sensing // ITM Web of Conferences. 29th International Crimean Conference Microwave & Telecommunication Technology. 2019. Vol. 30. P. 7–11.
23. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B., Shestopalov Y. V.** Angular Superresolution Based on A Priori Information // Radio Science. 2021. Vol. 56, N. 1. P. 1–11.
24. **P. Charbonnier L., Blanc-Feraud G., Barlaud M.** Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging // IEEE Trans. Image Processing. 1997. Vol. 6, N. 2. P. 298–310.
25. **Zhang Yo., Zhang Yi., Huang Y.** 1. Angular superresolution for scanning radar with improved regularized iterative adaptive approach // IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters. 2016. Vol. 13(6). P. 1–5.
26. **Nickel U.** Angular superresolution with phased array radar: a review of algorithms and operational constraints // IEE Proceedings F Communications, Radar and Signal Processing. 1989. Vol. 134, N. 1. P. 53–59.
27. **Yang J., Kang Y., Zhang Y.** A Bayesian angular superresolution method with lognormal constraint for sea-surface target // IEEE Access. Vol. 8. P. 13419–13428.
28. **Evdokimov N. A., Lukyanenko D. V., Yagola A. G.** Application of multiprocessor systems for the solution of Fredholm integral equations // Comput. Methods and Programming. 2009. Vol. 10. P. 263–267.

Algorithms for Digital Processing of Measurement Data Providing Angular Superresolution

B. A. Lagovsky, Robertlag@yandex.ru,

Russian Technological University, 119454, Moscow, Russian Federation

E. Ya. Rubinovich, rubinvch@ipu.ru,

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, 117997, Russian Federation

Corresponding author: Rubinovich Eugeny Ya. Professor,
Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, 117997, Russian Federation,
e-mail: rubinvch@ipu.ru

Accepted on March 22, 2021

Abstract

Incorrect one- and two-dimensional inverse problems of reconstructing images of objects with angular resolution exceeding the Rayleigh criterion are considered. The technique is based on the solution of inverse problems of source reconstruction signals described Fredholm integral equations. Algebraic methods and algorithms for processing data obtained by measuring systems in order to achieve angular superresolution are presented. Angular superresolution allows you to detail images of objects, solve problems of their recognition and identification on this basis. The efficiency of using algorithms based on developed algebraic methods and their modifications in parameterization the inverse problems under study and further reconstructing approximate images of objects of various types is shown. It is shown that the noise immunity of the obtained solutions exceeds many known approaches. The results of numerical experiments demonstrate the possibility of obtaining images with a resolution exceeding the Rayleigh criterion by 2–6 times at small values of the signal-to-noise ratio. The ways of further increasing the degree of superresolution based on the intelligent analysis of measurement data are described. On the basis of the preliminary information on a source of signals algorithms allow to increase consistently the effective angular resolution before achievement greatest possible for a solved problem. Algorithms of secondary processing of the information necessary for it are described. It is found that the proposed symmetrization algorithm improves the quality of solutions to the inverse problems under consideration and their stability. The examples demonstrate the successful application of modified algebraic methods and algorithms for obtaining images of the objects under study in the presence of a priori information about the solution. The results of numerical studies show that the presented methods of digital processing of received signals allow us to restore the angular coordinates of individual objects under study and their elements with super-resolution with good accuracy. The adequacy and stability of the solutions were verified by conducting numerical experiments on a mathematical model. It was shown that the stability of solutions, especially at a significant level of random components, is higher than that of many other methods. The limiting possibilities of increasing the effective angular resolution and the accuracy of image reconstruction of signal sources, depending on the level of random components in the data utilized, are found. The effective angular resolution achieved in this case is 2–10 times higher than the Rayleigh criterion.

The minimum required signal-to-noise ratio for obtaining adequate solutions with super-resolution is 13–16 dB for the described methods, which is significantly less than for the known methods. The relative simplicity of the presented methods allows you to use inexpensive computing devices and work in real time.

Keywords: angular superresolution, Rayleigh criterion, stability of inverse problems, parametrization of inverse problems, convolution type integral equation

Acknowledgements: The reported study was partially supported by RFBR, research project No. 20-07-00006 and by RSF No. 21-19-00128.

For citation:

Lagovsky B. A., Rubinovich E. Ya. Algorithms for Digital Processing of Measurement Data Providing Angular Superresolution, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 7, pp. 349–356.

DOI: 10.17587/mau.22.349-356

References

1. **Kasturiwala S. B., Ladhake S. A.** Superresolution: A novel application to image restoration, *International Journal on Computer Science and Engineering*, 2010, no. 5, pp. 1659–1664.
2. **Uttam S., Goodman N. A.** Superresolution of coherent sources in real-beam Data, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2010, vol. 46, no. 3, pp. 1557–1566.
3. **Park S. C., Park M. K., Kang M. G.** Super-resolution image reconstruction: a technical overview, *IEEE Signal Processing Magazine*, 2003, vol. 20(3), pp. 21–36.
4. **Dung G. V., Kulikov N. V.** Analysis of noise immunity of reception of signals with multiple phase shift keying under the influence of scanning interference, *Russian technological journal*, 2018, vol. 6, no. 6, pp. 5–12.
5. **Waweru N. P., Konditi D. B. O., Langat P. K.** Performance Analysis of MUSIC Root-MUSIC and ESPRIT, *DOA Estimation Algorithm. International Journal of Electrical Computer Energetic Electronic and Comm. Engineering*, 2014, vol. 8, no. 1, pp. 209–216.
6. **Rao B. D., Hari K. V. S.** Performance analysis of Root-Music, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, v. 37, no. 12, pp. 1939–1949.
7. **Kim K. T., Seo D. K., Kim H. T.** Efficient radar target recognition using the MUSIC algorithm and invariant features, *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 2002, vol. 50, no. 3, pp. 325–337.
8. **Lavate T. B., Kokate V. K., Sapkal A. M.** Performance Analysis of MUSIC and ESPRIT, DOA Estimation Algorithms for Adaptive Array Smart Antenna in Mobile Communication. *2nd Int. Conf. on Computer and Network Technology ICCNT, United States*, 2010, pp. 308–311.
9. **Sroubek F., Cristobal G., Flusser J.** Simultaneous Super-Resolution and Blind Deconvolution, *Journal of Physics: Conference Series*, 2008, 124(1): 012048.
10. **Almeida M. S., Figueiredo M. A.** Deconvolving images with unknown boundaries using the alternating direction method of multipliers, *IEEE Trans. Image Process*, 2013, vol. 22, no. 8, pp. 3074–3086.
11. **Dudik M., Phillips S. J., Schapire R. E.** Maximum entropy density estimation with generalized regularization and an application to species distribution modeling, *Journal of Machine Learning Research*, 2007, no. 8, pp. 1217–1260.
12. **Borgiotti G. V., Kaplan L. J.** Superresolution of uncorrected interference sources by using adaptive array technique, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 1979, vol. AP-27, pp. 842–845.
13. **Tan W. Q., Hou Y. G.** Estimation of direction of source arrival based upon MUSIC and Capon, *Journal of Nanchang Institute of Technology*, 2008, no. 27(1), pp. 20–23.
14. **Stoica P., Sharman K. C.** Maximum likelihood methods for direction-of-arrival estimation, *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 1990, no. 38(7), pp. 1132–1143.
15. **Cetin M., Karl W. C.** Feature-enhanced synthetic aperture radar image formation based on nonquadratic regularization, *IEEE Trans. Image Processing*, 2001, vol. 10, no. 4, pp. 623–631.
16. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B., Shestopalov Y. V.** Increasing effective angular resolution measuring systems based on antenna arrays, *Proc. 2016 URSI Int. Symp. Electromagnetic Theory (EMTS), Espoo, Finland*, pp. 432–434, 2016.
17. **Lagovsky B. A., Chikina A. G.** Superresolution in signal processing using a priori information. *IEEE, Progress in Electromagnetics Research Symp., St. Petersburg*, 2017, pp. 944–947.
18. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B., Shestopalov Y. V.** Increasing the effective angular resolution measuring systems based on antenna arrays, *Proc. of the 2016 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS), Espoo, Finland*, 2016, pp. 434–436.
19. **Morse P., Feshbach H.** *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, Science/Engineering/Math., 1953, 1978 p.
20. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B.** Image Restoration of Two-dimensional Signal Sources with Superresolution, *Progress In Electromagnetics Research Symposium Proceedings (PIERS), Stockholm*, 2013, pp. 315–319.
21. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B., Shestopalov Y. V.** Creating Two-Dimensional Images of Objects with High Angular Resolution, *2018 IEEE Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation (APCAP)*, 2018, pp. 114–115.
22. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B., Tripathy M.** Superresolution in problems of remote sensing, *ITM Web of Conferences. 29th International Crimean Conference Microwave & Telecommunication Technology*, 2019, vol. 30, pp. 7–11.
23. **Lagovsky B. A., Samokhin A. B., Shestopalov Y. V.** Angular Superresolution Based on A Priori Information. *Radio Science*, vol. 56, no. 1, 2021, pp. 1–11.
24. **P. Charbonnier L., Blanc-F'eraud G., M. Barlaud.** Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging, *IEEE Trans. Image Processing*, 1997, vol. 6, no. 2, pp. 298–310.
25. **Zhang Yo., Zhang Yi., Huang Y.** Angular superresolution for scanning radar with improved regularized iterative adaptive approach, *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2016, vol. 13(6), pp. 1–5.
26. **Nickel U.** Angular superresolution with phased array radar: a review of algorithms and operational constraints, *IEE Proceedings F Communications, Radar and Signal Processing*, 1989, vol. 134, no. 1, pp. 53–59.
27. **Yang J., Kang Y., Zhang Y.** A Bayesian angular superresolution method with lognormal constraint for sea-surface target, *IEEE Access*, vol. 8, pp. 13419–13428.
28. **Evdokimov N. A., Lukyanenko D. V., Yagola A. G.** Application of multiprocessor systems for the solution of Fredholm integral equations, *Comput. Methods and Programming*, 2009, vol. 10, pp. 263–267.

Т. А. Алиев^{1, 2}, д-р техн. наук, академик, telmancyber@gmail.com,

Н. Ф. Мусаева^{1, 2}, д-р техн. наук, musanaila@gmail.com,

М. Т. Сулейманова¹, диссертант, metanet_suli@yahoo.com,

¹ Институт систем управления НАН Азербайджана, г. Баку,

² Азербайджанский архитектурно-строительный университет, г. Баку

Алгоритмы определения вероятности рисков аварий в тоннелях по характеристикам помехи зашумленных сигналов

Обсуждается разработка алгоритмов вычисления вероятности возникновения в тоннелях различного рода дефектов, развитие которых может привести к авариям. Отмечено, что тоннели являются важной и сложной частью транспортно-коммуникационной системы, по которой осуществляется интенсивное движение. Поэтому определение вероятности возникновения дефектов в скрытом периоде зарождения на отдельных участках тоннелей является важной задачей.

Отмечено, что образование дефектов сопровождается появлением помех, которые искажают полезные сигналы, поступающие от датчиков и измерительных приборов, установленных для контроля устойчивости тоннеля и надежности его конструкций. Традиционно в таких случаях измерительные приборы регистрируют зашумленные сигналы, и по значениям их характеристик оценивают техническое состояние тоннелей. Однако в работе показано, что более надежными индикаторами фиксации начала опасных изменений в скрытом периоде зарождения являются характеристики помехи, которую невозможно выделить из зашумленного сигнала. При этом отмечено, что вероятности, с которой помеха принимает допустимые и критические значения, являются показателем изменения технического состояния тоннелей. Поэтому разработаны алгоритмы вычисления вероятностей попадания значений помехи в заданные интервалы. Показано, что эти вероятности хранятся как эталонные множества начала зарождения дефектов тоннелей. После проведенного обучения значениям вероятностей, с которыми помеха принимает заданные значения в различные моменты времени, ставится в соответствие вид дефекта и одно из возможных технических состояний: исправное, работоспособное, частично работоспособное, неработоспособное; предаварийное; аварийное и т. п.

Кроме того, показано, что разности вероятностей, с которыми помеха принимает одни и те же значения в различные моменты, являются показателями динамики изменения возникшей неисправности в тоннели. В работе также создана база информативных признаков интенсивности развития неисправностей. Для данной базы определены такие показатели динамики развития дефекта, как незначительное, медленное, существенное, интенсивное.

Ключевые слова: полезный сигнал, помеха, зашумленный сигнал, вероятность попадания помехи в заданный интервал, вероятности допустимых и критических значений помехи, тоннель, вид неисправности тоннеля

Введение

Известно, что тоннели представляют собой сложные сооружения, которые служат для транспортных целей. При этом с точки зрения риска аварий железнодорожные и автодорожные тоннели являются наиболее опасными. Это связано с тем, что тоннели чаще всего проходят через горные массивы или под водой [1–4]. Поэтому на тоннели оказывают давление горные породы, грунтовые и подземные воды. В результате возникают коррозионные процессы, которые приводят к уменьшению прочности железобетонных конструкций и, как итог, являются причиной их разрушения. Причинами разрушений тоннелей также являются вибрационные процессы, возникающие от движения транспорта. Сотрясения, которым подвергаются тоннели, приводят к деформациям, трещинам, износам, полумкам основных конструкций [1–4].

Традиционно для контроля технического состояния тоннеля создаются системы мониторинга и контроля напряженно-деформационных со-

стояний основных конструкций, что позволяет избежать как риска разрушений самих тоннелей, так и аварий транспортных средств [1–4]. Для этого выполняется геодезический мониторинг, в процессе которого проводятся наблюдения за состоянием грунтового массива, проверяется наличие деформации породы, определяются вертикальные или горизонтальные смещения, выявляются трещины и т. д. С этой целью устанавливается система датчиков давления, перемещения, нагрузки на арматуру и анкера, датчики раскрытия трещин, инклинометры и др. С помощью этих датчиков проводятся замеры, которые затем обрабатываются и анализируются традиционными методами статистической обработки данных [5–14]. На основании полученных результатов делается заключение о техническом состоянии тоннеля, наличии дефектов и степени их опасности для эксплуатации транспортных средств, а также выдаются рекомендации по устранению возникших неисправностей [1–14].

Однако существующие системы мониторинга и контроля тоннелей не обеспечивают

контроль скрытого периода изменения технического состояния тоннелей [1–14]. Это особенно важно для стран сейсмоактивных регионов и регионов, подверженных воздействию опасных геологических процессов, так как после маломощных, но частых землетрясений или незначительных, но многократных оползней появляются невидимые и не поддающиеся обнаружению микроскопические трещины, деформации, изгибы и т. д., которые впоследствии могут привести к серьезным повреждениям, требующим больших затрат [1–14].

В работах [1, 15–18] показано, что образование даже самых незначительных повреждений сопровождается появлением аддитивных помех в сигналах, которые поступают от соответствующих датчиков. При этом применение технологии обработки помехи зашумленных сигналов в системах noise-мониторинга и noise-контроля позволяет выявлять ранний скрытый период образования дефекта и определить динамику его развития, а также вычислять вероятность риска возникновения аварий в тоннелях.

Постановка задачи

Известно [1–14], что для определения технического состояния тоннелей вычисляются статистические характеристики сигналов, которые поступают от датчиков давления, перемещения, нагрузки, раскрытия трещин, инклинометров и др. При нормальном состоянии тоннелей эти сигналы могут быть искажены помехами только под влиянием внешних факторов $\varepsilon_1(t)$, происхождение которых обычно известно. При появлении дефектов, износов, коррозии, трещин, поломок и др. неисправностей возникает дополнительная помеха $\varepsilon_2(t)$. Таким образом, суммарная помеха $\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$ состоит из двух составляющих, и от датчиков вместо полезного сигнала $x(t)$ поступает зашумленный сигнал $g(t) = x(t) + \varepsilon(t)$. При этом помеха $\varepsilon_2(t)$ отражает процессы, приводящие к зарождению дефектов в тоннелях, и по значениям ее характеристик можно выявить ранний период возникновения неисправности. Кроме того, зная вероятность, с которой помеха может принимать заданные критические значения, можно определить динамику развития неисправности за определенный промежуток времени [1, 15–18].

В то же время сигналы $x(t)$, $\varepsilon(t)$, $g(t)$ обычно являются случайными стационарными эргодическими процессами, и помеху $\varepsilon(t)$ невозможно выделить из зашумленного сигнала $g(t)$.

Поэтому возникает задача определения ранней стадии возрождения дефекта в тоннеле и динамики его развития в результате вычисления вероятности достижения помехой критического порогового значения. Это позволит уменьшить риск аварий в тоннелях с тяжелыми катастрофическими последствиями.

Предположим, что от датчика поступает случайный зашумленный сигнал $g(t)$, для которого можно вычислить математическое ожидание m_g , дисперсию D_g , среднее квадратическое отклонение σ_g , корреляционную функцию $R_{gg}(\tau)$ по следующим формулам [1, 15–19]:

$$m_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t); \quad (1)$$

$$D_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [g(i\Delta t) - m_g]^2; \quad (2)$$

$$\sigma_g = \sqrt{D_g}; \quad (3)$$

$$R_g(\mu) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g((i+\mu)\Delta t), \quad (4)$$

где $g(t) = g(t) - m_g$; Δt — шаг дискретизации; $\mu = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$, — временной сдвиг.

Известно, что вероятность $P(\alpha \leq \varepsilon(t) \leq \beta)$ попадания помехи $\varepsilon(t)$ в некоторый интервал $[\alpha, \beta]$ можно вычислить по формуле

$$P(\alpha \leq \varepsilon(t) \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (5)$$

где $f(\varepsilon)$ — функция плотности распределения помехи $\varepsilon(t)$.

В то же время в большинстве случаев помеха подчиняется нормальному закону распределения $N(\varepsilon, m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$, и ее математическое ожидание $m_\varepsilon = 0$. Так как помеха является стационарной эргодической [1, 15–18], то

$$N(\varepsilon, m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) = N(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} e^A, \quad (6)$$

и вероятность $P(\alpha \leq \varepsilon(t) \leq \beta)$ можно вычислить по формуле

$$P(\alpha \leq \varepsilon(t) \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} N(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (7)$$

где $A = -\frac{(\varepsilon - m_\varepsilon)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}$.

Ниже предлагается технология определения ранней стадии зарождения дефекта в тоннеле и динамики его развития в результате вычисления вероятности попадания значений помехи в некоторый критический интервал $[\alpha, \beta]$.

Разработка алгоритмов вычисления вероятности попадания помехи в заданный интервал

Из формулы (7) следует, что для вычисления вероятности попадания помехи в заданный интервал необходимо определить функцию плотности распределения $N(\varepsilon)$. Очевидно, что для этого, прежде всего, следует вычислить среднее квадратическое отклонение $\sigma_\varepsilon = \sqrt{D_\varepsilon}$ помехи $\varepsilon(t)$. В работах [1, 15–18] показано, что оценку среднего квадратического отклонения σ_ε^* помехи $\varepsilon(t)$ зашумленного сигнала $g(t)$ для реальных технических объектов можно вычислить по выражению

$$\sigma_\varepsilon^* = \sqrt{R_g(0) - 2R_g(\Delta t) + R_g(2\Delta t)}, \quad (8)$$

или

$$\sigma_\varepsilon^* = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g(i\Delta t) - 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g((i+1)\Delta t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g((i+2)\Delta t)}.$$

Кроме того, в работах [1, 15–18] выведена формула вычисления среднего квадратического отклонения помехи для частного случая, когда помеха является белым шумом:

$$\sigma_\varepsilon^* = \sqrt{R_g(0) - R_g(\Delta t)}. \quad (9)$$

Тогда функция плотности распределения помехи $\varepsilon(t)$ с учетом того, что математическое ожидание помехи $m_\varepsilon = 0$, будет определяться следующим образом:

$$N^*(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^* \sqrt{2\pi}} e^{A_1}, \quad (10)$$

где $A_1 = -\frac{\varepsilon^2}{2(\sigma_\varepsilon^*)^2}$, причем для общего случая

σ_ε^* определяется по выражению (8), а для частного случая – по выражению (9).

Очевидно, что вероятность попадания помехи $\varepsilon(t)$ в некоторый интервал $[\alpha, \beta]$ можно вычислить по формуле

$$P(\alpha \leq \varepsilon(t) \leq \beta) = \int_\alpha^\beta N^*(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (11)$$

Таким образом, зная вероятность, с которой помеха $\varepsilon(t)$ принимает критические значения в различные моменты времени, можно определить ранний скрытый период возникновения дефектов тоннелей, а также динамику их развития, что позволит своевременно предотвратить аварийные ситуации.

Алгоритмы определения вероятности рисков аварий в тоннелях по характеристикам помехи зашумленных сигналов

Известно, что для предотвращения риска аварий в тоннелях необходимо проводить контроль случайных сигналов, которые поступают от датчиков давления, перемещения, нагрузки на арматуру и анкера, датчиков раскрытия трещин, инклинометров и др., в реальном масштабе времени. При этом основной задачей существующих систем мониторинга является обнаружение раннего, скрытого периода зарождения неисправностей, чтобы не доводить ситуацию до аварий и разрушений с катастрофическими последствиями. Кроме того, необходимо определить динамику развития неисправности в скрытом периоде зарождения [1, 15–18, 20].

Проведенные исследования показали, что, вычислив динамику изменения вероятности, с которой помеха принимает допустимые значения, можно определить степень развития неисправности во времени. Поэтому ниже предлагается алгоритм вычисления вероятности возникновения и развития дефектов тоннелей, позволяющий значительно уменьшить риск возможных аварий. Данный алгоритм сводится к следующему.

1. В начальный период времени t_0 , когда тоннель находится в исправном состоянии, вычисляются дисперсии D_{ε, t_0}^* , D_{x, t_0}^* помехи $\varepsilon(t)$ и полезного сигнала $x(t)$ по выражениям

$$D_{\varepsilon, t_0}^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g(i\Delta t) - 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g((i+1)\Delta t) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) g((i+2)\Delta t);$$

$$D_{x, t_0}^* = D_{g, t_0} - D_{\varepsilon, t_0}^*,$$

где D_{g, t_0} вычисляется по выражению (2).

2. Вычисляется соотношение полезный сигнал/помеха в момент времени t_0 , когда тоннель находится в исправном состоянии:

$$SP_{t_0} = D_{x, t_0}^* / D_{\varepsilon, t_0}^*.$$

Значение SP_{t_0} фиксируется и заносится в базу информативных признаков как эталонное значение исправного состояния тоннеля.

Затем для момента времени t_0 вычисляются вероятности допустимых значений помехи $\varepsilon(t)$,

т. е. тех значений помехи, в пределах которых считается, что повреждения отсутствуют. Учитывая, что для нормально распределенного случайного параметра отклонение от математического ожидания по абсолютной величине не превышает утроенного среднего квадратического отклонения, в начальный период времени t_0 дискретные значения функции плотности распределения $N^*(\varepsilon)_{t_0}$ помехи $\varepsilon(t)$ следовало бы вычислять в интервале $m_\varepsilon \pm 3\sigma_{\varepsilon,t_0}^*$. Однако, принимая во внимание, что в последующие моменты времени t_1, t_2, \dots, t_m этот интервал может быть шире, заранее выбирается достаточно большой интервал возможных значений помехи исходя из условия

$$m_\varepsilon - k\sigma_{\varepsilon,t_0}^* \leq \varepsilon(t) \leq m_\varepsilon + k\sigma_{\varepsilon,t_0}^*,$$

где k — выбранный коэффициент.

Затем в этом интервале:

— с учетом условия $m_\varepsilon = 0$ вычисляются минимальное и максимальное значения помехи $\varepsilon(t)$: $\varepsilon_{\min} = -k\sigma_{\varepsilon,t_0}^*$; $\varepsilon_{\max} = k\sigma_{\varepsilon,t_0}^*$;

— с определенным шагом $\Delta\varepsilon$ задаются значения помехи $\varepsilon(t)$ в порядке возрастания от ε_{\min} до ε_{\max} :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{\min}, \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon, \varepsilon_{i+2} = \varepsilon_{i+1} + \Delta\varepsilon, \dots, \varepsilon_n = \varepsilon_{\max}, \quad (12)$$

и формируется последовательность допустимых значений помехи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, для которой выполняется условие $\varepsilon_{i-1} < \varepsilon_i$.

Затем для момента времени t_0 в точках $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ для помехи $\varepsilon(t)$ со средним квадратическим отклонением $\sigma_{\varepsilon,t_0}^* = \sqrt{D_{\varepsilon,t_0}^*}$ вычисляется функция плотности нормального распределения:

$$N^*(\varepsilon_i)_{t_0} = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon,t_0}^* \sqrt{2\pi}} e^{A_{t_0}},$$

где $A_{t_0} = -\frac{(\varepsilon_i)^2}{2(\sigma_{\varepsilon,t_0}^*)^2}$.

После этого для момента времени t_0 вычисляются вероятности попадания значений помехи $\varepsilon(t)$ со средним квадратическим отклонением $\sigma_{\varepsilon,t_0}^*$ в допустимые интервалы $\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3$, ..., $\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon_n$:

$$\begin{aligned} P_{1,t_0}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2) &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} N^*(\varepsilon)_{t_0} d\varepsilon, \\ P_{2,t_0}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3) &= \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} N^*(\varepsilon)_{t_0} d\varepsilon, \dots, \\ P_{(n-1),t_0}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n) &= \int_{\varepsilon_{n-1}}^{\varepsilon_n} N^*(\varepsilon)_{t_0} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (13)$$

Значения этих вероятностей заносятся в базу информативных признаков как эталонные значения, соответствующие исправному состоянию тоннелей.

Через некоторый промежуток времени в момент t_1 заново вычисляется соотношение полезный сигнал/помеха $SP_{t_1} = D_{x,t_1}^*/D_{\varepsilon,t_1}^*$.

Если $SP_{t_1} = SP_{t_0}$, то в техническом состоянии тоннеля нет изменения. Если

$$SP_{t_1} \neq SP_{t_0}, \quad (14)$$

то это означает, что в техническом состоянии тоннеля произошли изменения.

Неравенство (14) может выполняться при возникновении двух видов изменений в техническом состоянии тоннелей:

1) в текущем состоянии тоннеля есть изменения, которые обусловлены изменениями внешней среды, например, заменой вентиляционных комплексов и др. В то же время в техническом состоянии несущих конструкций, подземных и надземных вестибюлей и т. д. дефекты и неисправности не наблюдаются. Эти изменения влияют только на характеристики полезного сигнала $x(t)$, но не отражаются на характеристиках помехи $\varepsilon(t)$. В таком случае для дисперсии полезного сигнала выполняется неравенство $D_{x,t_0}^* \neq D_{x,t_1}^*$, а для дисперсии помехи выполняется равенство $D_{\varepsilon,t_0}^* = D_{\varepsilon,t_1}^*$. Подобного рода изменения и реконструкции бывают известны заранее, и для этих случаев заново вычисляется и заносится в базу эталонных множеств новое значение SP_{t_0} для нормального состояния тоннеля;

2) в техническом состоянии колонн, пилонов, прогонов, перекрытий, стен и др. появились износы, коррозии, трещины, поломки, деформации, повреждения, дефекты и другие неисправности, что является предвестником возможности возникновения аварий. В этом случае для дисперсий полезного сигнала выполняется условие $D_{x,t_0}^* = D_{x,t_1}^*$, а для дисперсии помехи выполняется условие $D_{\varepsilon,t_0}^* \neq D_{\varepsilon,t_1}^*$, причем $D_{\varepsilon,t_1}^* > D_{\varepsilon,t_0}^*$.

В подобных случаях необходимо за промежуток времени $t_1 - t_0$ определить вероятность, с которой изменилось техническое состояние тоннеля, и с какой вероятностью можно оценить его как исправное, работоспособное, неисправное, неработоспособное, аварийное и т. п. Поэтому необходимо опять вычислить вероятности для возможных значений помехи $\varepsilon(t)$.

Для этого сначала для момента времени t_1 в точках $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ для помехи $\varepsilon(t)$ со средним квадратическим отклонением $\sigma_{\varepsilon,t_1}^* = \sqrt{D_{\varepsilon,t_1}^*}$ вы-

числяется функция плотности нормального распределения $N^*(\varepsilon)_{t_1}$:

$$N^*(\varepsilon_i)_{t_1} = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon,t_1}^* \sqrt{2\pi}} e^{A_{t_1}},$$

где $A_{t_1} = -\frac{(\varepsilon_i)^2}{2(\sigma_{\varepsilon,t_1}^*)^2}$.

Затем для момента времени t_1 вычисляются вероятности попадания значений помехи $\varepsilon(t)$ со средним квадратическим отклонением $\sigma_{\varepsilon,t_1}^*$ в допустимые интервалы $\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3$, ..., $\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon_n$:

$$\begin{aligned} P_{1,t_1}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2) &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} N^*(\varepsilon)_{t_1} d\varepsilon, \\ P_{2,t_1}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3) &= \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} N^*(\varepsilon)_{t_1} d\varepsilon, \dots, \\ P_{(n-1),t_1}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n) &= \int_{\varepsilon_{n-1}}^{\varepsilon_n} N^*(\varepsilon)_{t_1} d\varepsilon. \end{aligned} \quad (15)$$

После этого вычисляется разность вероятностей, с которыми помеха $\varepsilon(t)$ попадает в интервалы $\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3$, ..., $\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon_n$ в моменты времени t_1 и t_0 :

$$\begin{aligned} P_{1,t_1-t_0}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2) &= \\ &= P_{1,t_1}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2) - P_{1,t_0}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2); \\ P_{2,t_1-t_0}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3) &= \\ &= P_{2,t_1}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3) - P_{2,t_0}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3); \\ &\dots \\ P_{(n-1),t_1-t_0}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n) &= \\ &= P_{(n-1),t_1}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n) - \\ &- P_{(n-1),t_0}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n). \end{aligned} \quad (16)$$

Превышение разностями этих вероятностей допустимых значений

$$\begin{aligned} P_{1,t_1-t_0}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2) &\geq \Delta_1, \\ P_{2,t_1-t_0}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3) &\geq \Delta_2, \dots, \\ P_{(n-1),t_1-t_0}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n) &\geq \Delta_{n-1} \end{aligned}$$

является информативным признаком возникновения дефектов в тоннелях.

Тогда проводятся работы по обнаружению дефекта, а значения вероятностей (15) и разности вероятностей (16) запоминаются как эталонные множества возникновения данного вида дефекта.

Затем аналогичные вычисления выполняются в момент времени t_2 . Для момента времени t_2 вычисляется среднее квадратическое отклонение $\sigma_{\varepsilon,t_2}^*$ помехи, и в точках $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ определяется функция плотности нормального распределения $N^*(\varepsilon)_{t_2}$

$$N^*(\varepsilon_i)_{t_2} = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon,t_2}^* \sqrt{2\pi}} e^{A_{t_2}},$$

где $A_{t_2} = -\frac{(\varepsilon_i)^2}{2(\sigma_{\varepsilon,t_2}^*)^2}$.

Далее для момента времени t_2 вычисляются вероятности попадания значений помехи $\varepsilon(t)$ со средним квадратическим отклонением $\sigma_{\varepsilon,t_2}^*$ в допустимые интервалы $\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3$, ..., $\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon_n$:

$$\begin{aligned} P_{1,t_2}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2) &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} N^*(\varepsilon)_{t_2} d\varepsilon, \\ P_{2,t_2}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3) &= \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3} N^*(\varepsilon)_{t_2} d\varepsilon, \dots, \\ P_{(n-1),t_2}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n) &= \int_{\varepsilon_{n-1}}^{\varepsilon_n} N^*(\varepsilon)_{t_2} d\varepsilon. \end{aligned}$$

После этого вычисляются разности вероятностей, с которыми помеха $\varepsilon(t)$ попадает в интервалы $\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3$, ..., $\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon_n$ в моменты времени t_2 и t_1 :

$$\begin{aligned} P_{1,t_2-t_1}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2) &= \\ &= P_{1,t_2}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2) - P_{1,t_1}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2); \\ P_{2,t_2-t_1}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3) &= \\ &= P_{2,t_2}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3) - P_{2,t_1}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3); \\ &\dots \\ P_{(n-1),t_2-t_1}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n) &= \\ &= P_{(n-1),t_2}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n) - \\ &- P_{(n-1),t_1}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n). \end{aligned}$$

Превышение разностями этих вероятностей допустимых значений

$$\begin{aligned} P_{1,t_2-t_1}(\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2) &\geq \Delta_1, \\ P_{2,t_2-t_1}(\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3) &\geq \Delta_2, \dots, \\ P_{(n-1),t_2-t_1}(\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_n) &\geq \Delta_{n-1} \end{aligned}$$

является информативным признаком динамики развития повреждений в тоннелях. Значения этих вероятностей также заносятся в базу информативных признаков.

После того, как получены значения вероятностей также в моменты времени t_3, t_4, \dots, t_k , база информативных признаков, которую можно представить в виде матрицы, приобретает следующий вид:

$$TS = \begin{bmatrix} SP_{t_0} & \sigma_{\varepsilon, t_0}^* & N^*(\varepsilon_i)_{t_0} & P_{1, t_0} & P_{2, t_0} & \dots & P_{(n-1), t_0} \\ SP_{t_1} & \sigma_{\varepsilon, t_1}^* & N^*(\varepsilon_i)_{t_1} & P_{1, t_1} & P_{2, t_1} & \dots & P_{(n-1), t_1} \\ SP_{t_2} & \sigma_{\varepsilon, t_2}^* & N^*(\varepsilon_i)_{t_2} & P_{1, t_2} & P_{2, t_2} & \dots & P_{(n-1), t_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ SP_{t_k} & \sigma_{\varepsilon, t_k}^* & N^*(\varepsilon_i)_{t_k} & P_{1, t_k} & P_{2, t_k} & \dots & P_{(n-1), t_k} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

После проведения соответствующего обучения каждой строке матрицы ставится в соответствие одно из возможных технических состояний тоннеля. В таком случае к матрице (17) добавляется новый столбец со значениями, соответствующими техническому состоянию тоннеля:

$$TS = \begin{bmatrix} SP_{t_0} & \sigma_{\varepsilon, t_0}^* & N^*(\varepsilon_i)_{t_0} & P_{1, t_0} & P_{2, t_0} & \dots & P_{(n-1), t_0} & 0 \\ SP_{t_1} & \sigma_{\varepsilon, t_1}^* & N^*(\varepsilon_i)_{t_1} & P_{1, t_1} & P_{2, t_1} & \dots & P_{(n-1), t_1} & 1 \\ SP_{t_2} & \sigma_{\varepsilon, t_2}^* & N^*(\varepsilon_i)_{t_2} & P_{1, t_2} & P_{2, t_2} & \dots & P_{(n-1), t_2} & 2 \\ \dots & \dots \\ SP_{t_k} & \sigma_{\varepsilon, t_k}^* & N^*(\varepsilon_i)_{t_k} & P_{1, t_k} & P_{2, t_k} & \dots & P_{(n-1), t_k} & k \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где 0 — исправное; 1 — работоспособное без повреждений; 2 — ограниченно работоспособное и имеется незначительное повреждение; 3 — ограниченно работоспособное, но возникшее незначительное повреждение развивается интенсивно; 4 — неработоспособное; 5 — предаварийное; 6 — аварийное и т. п. в зависимости от значений вероятностей в данный момент времени.

Кроме матрицы технического состояния (18) также составляется матрица динамики развития повреждений, которая состоит из разностей вероятностей попадания значений помехи $\varepsilon(t)$ в допустимые интервалы $\varepsilon_1 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \leq \varepsilon(t) < \varepsilon_3$, ..., $\varepsilon_{n-1} \leq \varepsilon(t) \leq \varepsilon_n$ в моменты времени $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_k$. После обучения каждому значению разности вероятностей ставится в соответствие определенная степень динамики развития неисправности: 0 — повреждение отсутствует; 1 — повреждение существует, но находится в неизменном состоянии; 2 — повреждение развивается незначительно; 3 — повреждение развивается неинтенсивно; 4 — повреждение развивается интенсивно; 5 — повреждение бы-

стро приводит к катастрофической ситуации и т. д. В результате получается следующая матрица динамики развития повреждения:

$$DR = \begin{bmatrix} P_{1, t_1 - t_0} & P_{2, t_1 - t_0} & \dots & P_{(n-1), t_1 - t_0} & 0 \\ P_{1, t_2 - t_1} & P_{2, t_2 - t_1} & \dots & P_{(n-1), t_2 - t_1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1, t_k - t_{k-1}} & P_{2, t_k - t_{k-1}} & \dots & P_{(n-1), t_k - t_{k-1}} & k \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Таким образом, используя матрицы (18), (19), можно определить вероятность зарождения дефектов в тоннелях, а также определить вероятность развития этих дефектов с течением времени, что является предпосылкой для определения вероятности риска аварий.

Заключение

Известно, что в традиционных системах мониторинга технического состояния тоннелей проводится проверка соответствия текущих значений параметров значениям, установленным технической документацией [3—7, 19]. В случае отклонения значений этих параметров от установленных норм информируются соответствующие службы. Однако таким образом не удастся выявить начальный скрытый период возникновения повреждений и дефектов и определить динамику их развития.

Проведенные исследования показали, что одной из возможностей решения этой задачи является вычисление и анализ характеристик помехи, которая появляется при зарождении неисправностей и добавляется к полезному сигналу, поступающему от датчиков перемещения, давления, нагрузки, инклинометров и др. В то же время для определения риска возникновения аварий в тоннелях по характеристикам помехи зашумленных сигналов необходимо знать вероятности, с которыми помеха принимает критические значения, за пределами которых техническое состояние тоннелей считается опасным или же аварийным. Кроме того, для безопасной эксплуатации тоннелей необходимо знать вероятность развития дефектов, так как порой самые незначительные повреждения при определенных природных или техногенных условиях могут интенсивно развиваться и привести к аварийному состоянию достаточно большой участок тоннеля.

Предложенные в работе алгоритмы и технологии позволяют решить обе эти задачи

в результате вычисления вероятностей, с которыми помеха принимает значения, превышающие допустимые нормы в различные моменты времени. Вычисление же разностей этих вероятностей в те же самые моменты времени позволяет определить динамику развития неисправностей. Применение предложенных технологий в системах мониторинга и контроля позволит выявлять поврежденные участки тоннелей на ранней стадии, что предотвращает вероятность риска возникновения аварий.

Список литературы

1. **Aliev T.** Noise Control of the Beginning and Development Dynamics of Accidents. Springer, 2019. 201 p.
2. **Швидкий В. Я., Гресь А. А.** Контролирование деформаций при проходке тоннелей под действующими ВПП аэропорта Шереметьево // *Транспортное строительство*. 2019. № 3. С. 23–25.
3. **Маковский Л. В., Кравченко В. В.** Перспективы создания системы подземных автомагистралей в крупнейших городах и мегаполисах // *Транспортное строительство*. 2018. № 1. С. 11–14.
4. **Шевченко А. А., Кобецкий А. Д., Боев А. О.** Опыт применения автоматизированных систем мониторинга для тоннелей метрополитенов // *Транспортное строительство*. 2019. № 2. С. 26–28.
5. **Noorossana R., Saghaei A., Amiri A.** Statistical Analysis of Profile Monitoring, Wiley, New York, 2012, 332 p. URL: <https://www.wiley.com/en-us/Statistical+Analysis+of+Profile+Monitoring-p-9781118071977>.
6. **Алилуев С. В., Большаков А. А., Попов А. Н., Тетерин Д. П.** Методики и алгоритмы контроля и диагностики привода системы управления автономного подвижного аппарата // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2017. Т. 18, № 4. С. 264–269.
7. **Бошляков А. А., Ковалев В. В., Рубцов В. И.** Автоматизация диагностики дефектов сканеров оптико-локационных станций. Ч. 1 // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2017. Т. 18, № 3. С. 180–185.
8. **Weihong (Grace) Guo, Jionghua (Judy) Jin, S. Jack Hu.** Profile Monitoring and Fault Diagnosis Via Sensor Fusion for Ultrasonic Welding // *Journal of Manufacturing Science and Engineering*. 2019. Vol. 141, Iss. 8. P. 081001-1-81001-13. URL: <https://doi.org/10.1115/1.4043731>.
9. **Yaser Zerehsaz, Chenhui Shao, Jionghua Jin.** Tool wear monitoring in ultrasonic welding using high-order decomposition // *Journal of Intelligent Manufacturing*. 2019. Vol. 30, N. 2. P. 657–669. URL: <https://doi.org/10.1007/s10845-016-1272-4>.
10. **Kim J., Huang Q., Shi J., Chang T.-S.** Online Multichannel Forging Tonnage Monitoring and Fault Pattern Discrimination Using Principal Curve // *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*. 2006. Vol. 128, N. 4. P. 944–950. URL: <https://doi.org/10.1115/1.2193552>.
11. **Amiri A., Zou C., Doroudyan M. H.** Monitoring Correlated Profile and Multivariate Quality Characteristics // *Quality and Reliability Engineering International*. 2013. Vol. 30, N. 1. P. 133–142. URL: <https://doi.org/10.1002/qre.1483>.
12. **Xiaoli Li, Shen Dong, Zhejun Yuan.** Discrete wavelet transform for tool breakage monitoring // *International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 1999. Vol. 39, N.12. P. 1935–1944. URL: [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(99\)00021-8](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(99)00021-8).
13. **Jian Guo, Zhaojun Li, Jionghua Jin.** System Reliability Assessment with Multilevel Information Using the Bayesian Melding Method // *Reliability Engineering & System Safety*. 2018. Vol. 170. P. 1–268. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ress.2017.09.020>.
14. **Weihong Guo, Chenhui Shao, Tae Hyung Kim, S. Jack Hu, Jionghua Jin, J. Patrick Spicer, Hui Wang.** Online process monitoring with near-zero misdetection for ultrasonic welding of lithium-ion batteries: An integration of univariate and multivariate methods // *Journal of Manufacturing Systems*. 2016. Vol. 38, N. 1. P. 141–150. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2016.01.001>.
15. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф., Газызаде Б. И.** Технологии мониторинга динамики развития повреждений на буровых установках с использованием моментов высоких порядков помехи // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2020. Т. 21, № 4. С. 213–223.
16. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф., Сулейманова М. Т.** Алгоритмы построения доверительного интервала для математического ожидания помехи и их применение для контроля динамики развития аварий // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2020. Т. 21, № 9. С. 521–529.
17. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф.** Technologies for Early Monitoring of Technical Objects Using the Estimates of Noise Distribution Density // *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, N. 9. P. 12–23.
18. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф., Сулейманова М. Т., Газызаде Б. И.** Analytic representation of the density function of normal distribution of noise // *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47(8), N. 4. P. 24–40.
19. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: КНОРУС, 2013. 448 с.
20. **Руководство** по техническому диагностированию автотодорожных тоннелей. URL: <https://www.normacs.ru/Doclist/doc/7UE.html>.

Algorithms for Determining the Probability of Risks of Accidents in Tunnels Based on the Characteristics of the Noise of Noisy Signals

T. A. Aliev^{1,2}, telmancyber@gmail.com, N. F. Musaeva^{1,2}, musanaila@gmail.com,
M. T. Suleymanova¹, metanet_suli@yahoo.com,

¹Institute of Control Systems (Azerbaijan National Academy of Sciences), Baku, AZ1141, Republic of Azerbaijan;

²Azerbaijan University of Architecture and Construction, Baku, AZ1073, Republic of Azerbaijan

Corresponding author: **Musaeva Naila F.**, Doctor of Engineering,
Azerbaijan University of Architecture and Construction, Baku, AZ1073, Republic of Azerbaijan,
e-mail: musanaila@gmail.com

Accepted on March 12, 2021

Abstract

The paper covers creating the algorithms for calculating the probability of various types of defects in tunnels, the development of which can lead to accidents. Tunnels are an important and complex part of the transport and communication system, through which heavy traffic is carried out. Determining the probability of defects in the latent period of their initiation in individual sections of tunnels is an important problem. The formation of defects is accompanied by the appearance of noise that distorts the useful signals coming from sensors and measuring instruments installed to control the stability of the tunnel and the reliability of its structures. Traditionally measuring instruments register noisy signals, and the technical condition of the tunnels is assessed on the basis of the values of their characteristics. It is shown in the paper that the more reliable indicators of fixing the onset of dangerous changes in the latent period of initiation are the characteristics of the noise, which cannot be extracted from the noisy signal. It is noted that the probability with which the noise takes on admissible and critical values is an indicator of changes in the technical condition of tunnels. Algorithms have been developed for calculating the probabilities of the noise values getting in the given intervals. These probabilities are stored as reference sets for the initiation of tunnel defects. After the training has been carried out, the values of the probabilities with which the noise takes on the given values at different time instants are matched to the type of defect and one of the possible technical states: serviceable, operational, partially operational, inoperable; pre-emergency; emergency, etc. It is also shown that the differences in the probabilities with which the noise takes on the same values at different times are indicators of the dynamics of changes in the malfunction in the tunnels. A database of informative attributes of the intensity of the development of failures is also created in the paper. For this database, the indicators of the dynamics of the development of a defect are determined, such as insignificant, slow, significant, intensive.

Keywords: useful signal, noise, noisy signal, probability of the noise getting in a given interval, probabilities of admissible and critical values of the noise, tunnel, type of tunnel failure

For citation:

Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T. Algorithms for Determining the Probability of Risks of Accidents in Tunnels Based on the Characteristics of the Noise of Noisy Signals, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 7, pp. 357–364.

DOI: 10.17587/mau.22.357-364

References

1. **Aliev T.** Noise Control of the Beginning and Development Dynamics of Accidents. Springer, 2019, 201 p.
2. **Shvidkiy V. Ya., Gres A. A.** Checkup of deformations when tunneling under the runways-in-use of Sheremetyevo airport, *Transport construction*, 2019, no. 3, pp. 23–25 (in Russian).
3. **Makovskij L. V., Kravchenko V. V.** Prospects for creation of the underground expressway system in the largest cities and megalopolises, *Transport construction*, 2018, no. 1, pp. 11–14 (in Russian).
4. **Shevchenko A. A., Kobetskiy A. D., Boev A. O.** Experience in application of automated systems for monitoring of metro tunnels, *Transport construction*, 2019, no. 2, pp. 26–28 (in Russian).
5. **Noorossana R., Saghaei A., Amiri A.** Statistical Analysis of Profile Monitoring, Wiley, New York, 2012, 332 p., available at: <https://www.wiley.com/en-us/Statistical+Analysis+of+Profile+Monitoring-p-9781118071977>.
6. **Aliluev S. V., Bolshakov A. A., Popov A. N., Teterin D. P.** Methods and Algorithms for Control and Diagnostics of the Steering Gear of the Autonomous Underwater Vehicles, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 4, pp. 264–269 (in Russian).
7. **Boshlyakov A. A., Kovalev V. V., Rubtsov V. I.** Automated Fault Diagnostics in the Scanners of the Optical-Location Stations, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 3, pp. 180–185 (in Russian).
8. **Weihong (Grace) Guo, Jionghua (Judy) Jin, S. Jack Hu.** Profile Monitoring and Fault Diagnosis Via Sensor Fusion for Ultrasonic Welding, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 2019, vol. 141, issue 8, pp. 081001-1-81001-13, available at: <https://doi.org/10.1115/1.4043731>.
9. **Yaser Zerehsaz, Chenhui Shao, Jionghua Jin.** Tool wear monitoring in ultrasonic welding using high-order decomposition, *Journal of Intelligent Manufacturing*, 2019, vol. 30, no. 2, pp. 657–669, available at: <https://doi.org/10.1007/s10845-016-1272-4>.
10. **Kim J., Huang Q., Shi J., Chang T.-S.** Online Multichannel Forging Tonnage Monitoring and Fault Pattern Discrimination Using Principal Curve, *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 2006, vol. 128, no. 4, pp. 944–950, available at: <https://doi.org/10.1115/1.2193552>.
11. **Amiri A., Zou C., Doroudyan M. H.** Monitoring Correlated Profile and Multivariate Quality Characteristics, *Quality and Reliability Engineering International*, 2013, vol. 30, no. 1, pp. 133–142, available at: <https://doi.org/10.1002/qre.1483>.
12. **Xiaoli Li, Shen Dong, Zhejun Yuan.** Discrete wavelet transform for tool breakage monitoring, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 1999, vol. 39, no. 12, pp. 1935–1944, available at: [https://doi.org/10.1016/S0890-6955\(99\)00021-8](https://doi.org/10.1016/S0890-6955(99)00021-8).
13. **Jian Guo, Zhaojun Li, Jionghua Jin.** System Reliability Assessment with Multilevel Information Using the Bayesian Melding Method, *Reliability Engineering & System Safety*, 2018, vol. 170, pp. 1–268, available at: <https://doi.org/10.1016/j.res.2017.09.020>.
14. **Weihong Guo, Chenhui Shao, Tae Hyung Kim, S. Jack Hu, Jionghua Jin, J. Patrick Spicer, Hui Wang.** Online process monitoring with near-zero misdetection for ultrasonic welding of lithium-ion batteries: An integration of univariate and multivariate methods, *Journal of Manufacturing Systems*, 2016, vol. 38, no. 1, pp. 141–150, available at: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2016.01.001>.
15. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Gazizade B. I.** Technologies for Monitoring the Dynamics of Damage Development in Drilling Rigs Using High-Order Moments of the Noise, *Mechatronics, automation, control*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 213–223 (in Russian).
16. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T.** Algorithms for constructing the confidence interval for the mathematical expectation of the noise and their application in the control of the dynamics of accident development. *Mechatronics, automation, control*, 2020, vol. 21, no. 9, pp. 521–529 (in Russian).
17. **Aliev T. A., Musaeva N. F.** Technologies for Early Monitoring of Technical Objects Using the Estimates of Noise Distribution Density, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2019, vol. 51, no. 9, pp. 12–23.
18. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T., Gazizade B. I.** Analytic representation of the density function of normal distribution of noise, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2015, vol. 47(8), no. 4, pp. 24–40.
19. **Ventsel Y. S., Ovcharov L. A.** The Theory of Random Processes and Its Engineering Applications, Moscow, KNORUS, 2013, 448 p. (in Russian).
20. **Guidelines** for the technical diagnosis of road tunnels, available at: <https://www.normacs.ru/Doclist/doc/7UE.html>.

Do Quang Thong, Ph.D., doquangthong@yahoo.com,
Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam

Corresponding author: Do Quang Thong, Ph.D.,
Le Quy Don Technical University, Hanoi, Vietnam, e-mail: doquangthong@yahoo.com

Accepted on March 12, 2021

Synthesis of a High-Precision Missile Homing System with an Permissible Stability Margin of the Normal Acceleration Stabilization System

Abstract

The proportional guidance method-based missile homing systems (MHS) have been widely used the real-world environments. In these systems, in order to destroy the targets at different altitudes, a normal acceleration stabilization system (NASS) is often utilized. Therefore, the MHS are complex and the synthesis of these systems are a complex task. However, it is necessary to synthesize NASS during the synthesis of the MHS. To simplify the synthesis process, a linear model of the NASS is used. In addition, we make use of the available commands in Control System Toolbox in MATLAB. Because the Toolbox has the commands to describe the transfer function, determine the stability gain margin, and the values of the transient respond of the linear automatic systems. Thus, this article presents two methods for synthesizing the missile homing systems, including (i) a method for synthesizing the MHS while ensuring the permissible stability gain margin of the NASS, and (ii) a method for synthesizing the MHS while ensuring the permissible stability margin of the NASS by overshoot. These techniques are very easy to implement using MATLAB commands. The synthesis of the proposed MHS is carried out by the parametric optimization method. To validate the performance of the proposed techniques, we compare them with the MHS synthesized by ensuring the stability margin of the NASS by the oscillation index. The results show that, two our proposed methods and the existing method provide the same results in terms of high-precision. Nevertheless, the proposed methods are simple and faster than the conventional method. The article also investigates the effect of gravity, longitudinal acceleration of the rocket, and blinding of the homing head on the accuracy of the synthesized MHS. The results illustrate that they have a little effect on its accuracy.

Keywords: system synthesis, missile, missile homing system, proportional guidance method, target

For citation:

Do Quang Thong. Synthesis of a High-Precision Missile Homing System with an Permissible Stability Margin of the Normal Acceleration Stabilization System, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 7, pp. 365–373.

DOI: 10.17587/mau.22.365-373

УДК 681.5.01

DOI: 10.17587/mau.22.365-373

До Куанг Тхонг, канд. техн. наук, преподаватель, doquangthong@yahoo.com,
Технический Университет им. Лэ Куй Дон, Ханой, Вьетнам

Синтез высокоточной системы самонаведения ракет с допустимым запасом устойчивости системы стабилизации нормального ускорения

На практике широко используется система самонаведения ракет (ССР) с применением метода пропорционального наведения. В ней при уничтожении целей на разных высотах применяется система стабилизации нормального ускорения (СЧУ). Следовательно, система самонаведения ракет является сложной системой, и ее синтез является сложной задачей. При синтезе ССР необходимо синтезировать СЧУ. В целях упрощения процесса синтеза в первом приближении принимаем линейную модель СЧУ и стараемся максимально использовать команды пакета Control System Toolbox (Matlab). В нем существуют команды описания передаточных функций, команда определения запаса устойчивости по амплитуде и команда определения значений переходной характеристики линейных автоматических

систем. Поэтому в работе представлены методики синтеза ССР с допустимым запасом устойчивости ССНУ по перерегулированию или по амплитуде. Они нетрудно осуществляются с помощью команд MATLAB. Синтез ССР осуществлен методом параметрической оптимизации, позволяющим получить высокоточную ССР. В работе также представлено сравнение результата синтеза ССР с применением этих методик с результатом ее синтеза с допустимым запасом устойчивости ССНУ по показателю колебательности, которое показывает, что предложенные методики синтеза дают одинаковые результаты.

В статье также проводится исследование влияния силы тяжести, продольного ускорения ракеты, ослепления головки самонаведения на точность синтезированной ССР. По результатам наших исследований они мало влияют на ее точность.

Ключевые слова: синтез системы, ракета, система самонаведения ракет, метод пропорционального наведения, цель

Introduction

When synthesizing a MHS using the proportional guidance method [1–4], it is proposed to select the proportionality coefficient k_p in the range of 3–5. However, the MHS with such a small proportionality coefficient has a large guidance error when firing at high-maneuverable targets [1]. In order to improve the accuracy of guidance at maneuverable targets, the method of proportional guidance with offset is proposed in [1], and in [5, 6] the method of proportional guidance with anticipation and the method of instantaneous miss homing is presented. However, their technical implementation very is complex, requiring further define ω_a — the projection of the angular velocity of the line-of-sight of the antenna coordinate system and ω_r component that compensates for the maneuver target, etc... The exact definition of ω_r on a missile is difficult, requiring the definition of normal acceleration of the target [6, 7].

In the MHS using the method of proportional guidance to destroy targets at a large range of heights, the NASS is used. Stability of NASS is a necessary condition for the MHS operation [8]. When synthesizing the MHS, it is necessary to synthesize NASS. In [7, 9], a method for the synthesis of the MHS with an permissible stability margin of NASS in oscillation index is presented. It allows us to get a high-precision of the MHS. Then we need to determine the values of the amplitude-frequency characteristic of the NASS and determine its oscillation index because the Control System Toolbox (Matlab) package does not have a command for determining the oscillation index of linear systems.

Reducing the time and simplification the complexity of the synthesis process of the MHS are very important tasks for the MHS designer. Thus, this paper presents methods for synthesizing high-precision MHS

with less time. In addition, reducing the time and simplification the difficulty of the MHS synthesis process are performed by applying the commands of the Control System Toolbox package, which are used to describe transfer function (TF) of the NASS and determine its gain stability margin or stability margin by over-shoot.

In order to simplify the synthesis, in the article, the guidance error is determined by the distance between the missile and the target at the end of the homing process, and the movement of the target is assumed to be straight with a constant speed. The speed of the rocket is considered constant. The blindness of the homing head is skipped.

Functional structure of the missile homing system

The functional scheme of the MHS using the method of proportional guidance in the vertical plane is shown in Fig. 1 [7–9]. The MHS using the method of proportional guidance in the vertical plane consists of rudder actuator (RA), angular speed measuring device (ASMD) (speed gyroscope), normal acceleration measuring device (NAMD) (accelerometer), compute tilt angular velocity of missile trajectory device, kinematic link, gyrostabilized homing head (GHH), stabilization law generator, guidance law generator. The RA, missile,

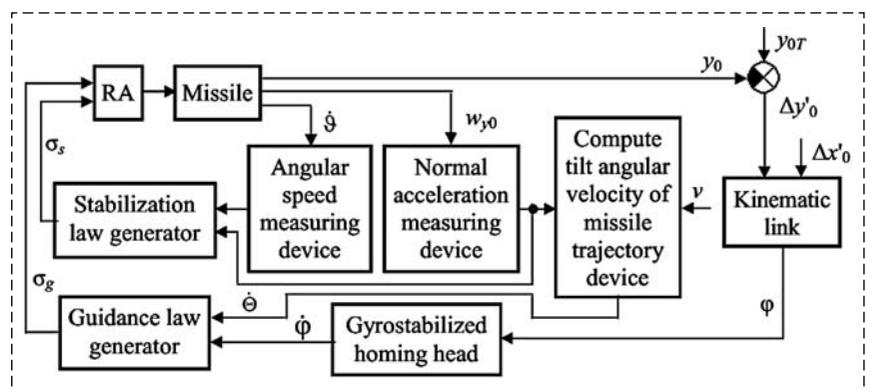


Fig.1. The block diagram of the missile homing system

ASMD, NAMD, stabilization law generator form the NASS. The RA is an implementing element of the NASS. It converts the guidance signal σ_g from the guidance law generator and the feedback signal σ_s from the stabilization law generator to the rudder rotation angle δ . The missile is a control object. It converts the rudder rotation angle δ to the pitch angular velocity $\dot{\vartheta}$, pitch angle ϑ , normal acceleration w_{y0} , and the height y_0 . The ASMD measures the speed of change of the pitch angle. The feedback circuit for the speed of pitch angle change improves the damping of the NASS. The NAMD measures normal acceleration w_{y0} . The signals from the ASMD and NAMD are sent to the stabilization law generator to form the stabilization law σ_s . In addition, a signal from the NAMD and a proportional signal to the speed v of the missile are sent to the compute tilt angular velocity missile trajectory device to calculate the velocity of tilt angular of missile trajectory $\dot{\Theta}$. The kinematic link converts the height difference ($\Delta y'_0 = y_{0T} - y_0$) and the difference in the horizontal coordinate ($\Delta x'_0 = x_{0T} - x_0$) between the missile and the target to the angle of the line of sight of the missile and the target φ . The GHH track the target and measures the speed of change in the angle of the line of sight of the missile and the target $\dot{\varphi}$. Signals from the GHH and the compute tilt angular velocity missile trajectory device are sent to the guidance law generation to form the law of guidance σ_g .

The relative position of the missile M and the target T is shown in Fig. 2. Here: y_0 axis is the height, x_0 axis is the horizontal coordinate, r is the distance between the missile and the target, v_T is the speed of target, x_{HH} is the directions of the optical axis of the homing head (HH), x_1 is the directions of the longitudinal axis of the missile.

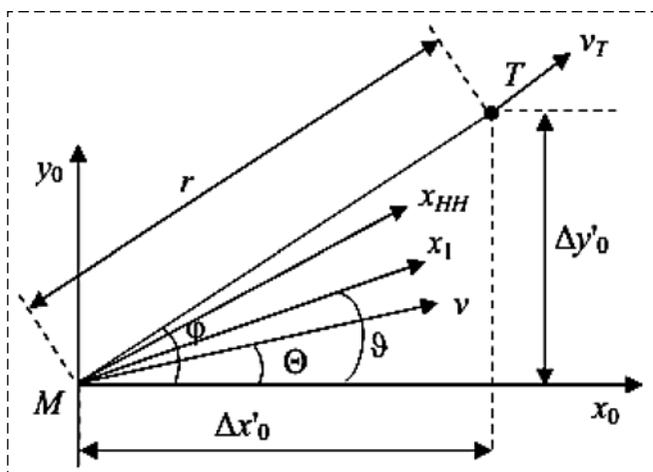


Fig. 2. The relative position of the missile and target

Mathematical models of the missile homing system elements

According to the works [10, 14], the mathematical model of RA in the form of a TF has the form as follows:

$$W_r(s) = \frac{\delta(s)}{u_r(s)} = \frac{k_r}{T_r^2 s^2 + 2\xi_r T_r s + 1},$$

where, u_r is input signal; k_r is the conversion coefficient; T_r is the time constant; ξ_r is the damping coefficient. And in the form of a differential equation (DE), it has the form as follows:

$$T_r^2 \ddot{\delta} + 2T_r \xi_r \dot{\delta} + \delta = k_r u_r.$$

In the vertical plane the mathematical model of a missile with fixed wings in the form of the DE has the form [5, 10, 14]:

$$\begin{cases} \ddot{\vartheta} = -a_{11}\omega_{z1} - a_{12}\alpha - a_{13}\delta; \\ \dot{\Theta} = a_{42}\alpha; \\ \alpha = \vartheta - \Theta; \\ w_{y0} = v a_{42}\alpha, \end{cases} \quad (1)$$

where, α is the attack angle of missiles; ω_{z1} is the rotation speed of the missile (pitch angular velocity); a_{11} is the natural damping coefficient; a_{12} is the wind direction coefficient; a_{13} is the rudder efficiency coefficient; a_{42} is the normal force coefficient. From the system of equations (1), we can obtain a mathematical model of a missile with fixed wings in the form of a TF [8, 14]:

$$W(s) = \frac{\vartheta(s)}{\delta(s)} = -\frac{a_{13}s + a_{13}a_{42}}{s[s^2 + (a_{11} + a_{42})s + a_{12} + a_{11}a_{42}]}$$

The mathematical model of the ASMD in the form of transfer function has the form [10, 14]:

$$W_{as}(s) = \frac{u_{as}(s)}{\omega_{z1}(s)} = \frac{k_{as}}{T_{as}^2 s^2 + 2\xi_{as} T_{as} s + 1},$$

where: u_{as} is the output of ASMD; ω_{z1} is input of ASMD; k_{as} , ξ_{as} , T_{as} are the conversion coefficient, damping coefficient, time constant of ASMD, respectively. And in the form of a DE it has the form as follows:

$$T_{as}^2 \ddot{u}_{as} + 2T_{as} \xi_{as} \dot{u}_{as} + u_{as} = k_{as} \omega_{z1}.$$

The mathematical model of NAMD in the form of transfer function has the form [10, 14]:

$$W_{ak}(s) = \frac{u_{ak}(s)}{w_{y0}(s)} = \frac{k_{ak}}{T_{ak}^2 s^2 + 2\xi_{ak} T_{ak} s + 1},$$

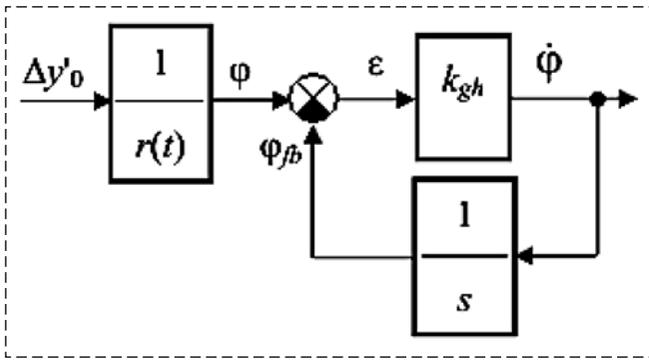


Fig. 3. Simplified scheme of gyro-stabilized homing head

where, u_{ak} is the output of NAMD; w_{y0} is input of NAMD; k_{ak} , ξ_{ak} , T_{ak} are the conversion coefficient, damping coefficient, time constant of NAMD, respectively. And in the form of a DE has the form as follows:

$$T_{ak}^2 \ddot{u}_{ak} + 2T_{ak} \xi_{ak} \dot{u}_{ak} + u_{ak} = k_{ak} w_{y0}.$$

According to the study in [8], a simplified scheme of the GHH is shown in Fig. 3, where k_{gh} is the conversion coefficient.

As presented in Fig. 3, the mathematical model of a simplified GHH has the followed form:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{fb} = k_{gh} \varepsilon; \\ \varepsilon = \phi - \phi_{fb}. \end{cases} \quad (2)$$

The law of stabilization has the form [8]:

$$\sigma_s = k_w u_{ak} + k_{\omega z1} u_{as},$$

where, k_w is the feedback coefficient for normal acceleration; $k_{\omega z1}$ is the feedback coefficient for pitch angular velocity.

The law of the guidance when applying the proportionality guidance method has the form [7–9]:

$$\sigma_g = k(k_p \dot{\phi} - \dot{\Theta}), \quad (3)$$

where, k is the coefficient; and k_p is the proportionality coefficient.

Taking into account (1) and (2), (3) has the form:

$$\sigma_g = k \left(k_p k_{gh} \varepsilon - \frac{w_{y0}}{v} \right).$$

Mathematical simulator of the missile homing system in the Matlab environment

The mathematical model of the MHS when using the proportional guidance method, taking into account the dynamics of the RA and measuring elements in the form of a first-order DE system in the vertical plane, has the form as follows:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{z1} = -a_{11} \omega_{z1} - a_{12} \alpha - a_{13} \delta; \\ \dot{\Theta} = \omega_{z1}; \\ \dot{\Theta} = a_{42} \alpha; \\ \alpha = \vartheta - \Theta; \\ w_{y0} = v a_{42} \alpha; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \sigma_s = k_w u_{ak} + k_{\omega z1} u_{as}; \\ \sigma_g = k \left(k_p k_{gh} \varepsilon - \frac{w_{y0}}{v} \right); \\ \dot{u}_{ak1} = \frac{k_{ak}}{T_{ak}^2} w_{y0} - \frac{1}{T_{ak}^2} u_{ak} - \frac{2\xi_{ak}}{T_{ak}} u_{ak1}; \\ \dot{u}_{ak} = u_{ak1}; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{as1} = \frac{k_{as}}{T_{as}^2} \omega_{z1} - \frac{1}{T_{as}^2} u_{as} - \frac{2\xi_{as}}{T_{as}} u_{as1}; \\ \dot{u}_{as} = u_{as1}; \\ u_r = \sigma_s - \sigma_g; \\ \dot{\delta}_1 = \frac{k_r}{T_r^2} u_r - \frac{1}{T_r^2} \delta - \frac{2\xi_r}{T_r} \delta_1; \\ \dot{\delta} = \delta_1; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{fb} = k_{gh} \varepsilon; \\ \varepsilon = \phi - \phi_{fb}; \\ \dot{x}_0 = v \cos \Theta; \\ \dot{y}_0 = v \sin \Theta; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{0T} = v_T \cos \Theta_T; \\ \dot{y}_{0T} = v_T \sin \Theta_T; \\ \Delta x'_0 = x_{0T} - x_0; \\ \Delta y'_0 = y_{0T} - y_0; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{\Delta x_0'^2 + \Delta y_0'^2}; \\ \phi = \arcsin \frac{\Delta y'_0}{r}; \\ 0 \leq t \leq T^*, \end{cases} \quad (9)$$

where: x_0 , y_0 are the coordinates of the missile at the horizontal and vertical axes; x_{0T} , y_{0T} are the coordinates of the target along the horizontal and vertical axes; v_T is the speed of target; Θ_T is the tilt angle of the target trajectory; T^* is the time guidance.

When synthesizing the MHS by parametric optimization in a laptop, it is necessary to solve systems of equations (4)–(9). In order to improve the accuracy of the calculation, we will solve them using the numerical Tustin method [15]. The value of the variable y_i of a first-order differential equation:

$$\dot{y}_i = f(y_1, y_2, \dots)$$

in the n -th step of integration has the form:

$$y_i(n) = y_i(n_1) + \frac{T_k}{2} \{3f[y_1(n_1), y_2(n_1), \dots] - f[y_1(n_2), y_2(n_2), \dots]\}$$

where, $i = 1, 2, \dots$; T_k is the integration step; $y_i(n_1)$ and $y_i(n_2)$ are the values of the variable y_i in the $(n - 1)$ -th and $(n - 2)$ -th integration steps.

The mathematical model of the NASS of the missile when taking into account the dynamics of RA and measuring elements in the form of TF has the form [7, 9]:

$$W(s) = \frac{b_0s^9 + b_1s^8 + b_2s^7 + \dots + b_8s + b_9}{a_0s^9 + a_1s^8 + a_2s^7 + \dots + a_8s + a_9}. \quad (10)$$

We define the TF presented in (10) using the commands in the Control System Toolbox (Matlab) package [7, 9, 16], and apply the `tf` command to describe the TF of dynamic links. We then apply the product (*) operation to define the TF of consecutive connected dynamic links, and apply the feedback command to define the TF of a closed sysk loop.

The task of MHS synthesis is to determine the optimal values of the coefficients ($k_{\omega z1opt}$, k_{wopt} , k_{opt} , k_{popt}) that provide the smallest guidance error. We implement it by parametric optimization in the Matlab environment. Here, the target function is the guidance error $f(k_{\omega z1}, k_w, k, k_p)$, which has no explicit expression. In order to find it, it is necessary to integrate the systems of equations (4)–(9) from the beginning to the end of the homing process. In [7, 9], a synthesis method of MHS with a permissible stability margin of the NASS by oscillation index is proposed. In the following sections we are propose the synthesis method of MHS with a permissible stability margin of NASS by overshoot and the synthesis method of MHS with a permissible stability gain margin of NASS.

According to [8], we assume $a_{11} = 1,2$ 1/s; $a_{12} = 20$ 1/s²; $a_{13} = 30$ 1/s²; $a_{42} = 1,5$ 1/s; $v = 1300$ m/s; $k_r = 1$ degree/V; $\xi_r = 0,6$; $T_r = 0,05$ s; $\delta_{max} = \pm 20$ degree; $k_{as} = 1$ V/degree/s, $\xi_{as} = 0,6$, $T_{as} = 0,05$ s; $k_{ak} = 1$ V/m/s², $\xi_{ak} = 0,6$, $T_{ak} = 0,05$ s; $k_{gh} = 50$; $k_{\omega z1} = 0,06$ – $0,4$; $k_w = 0,001$ – $0,01$; $k = 1$ – 20 ; $k_p = 20$ – 100 . The shooting is conducted towards.

Parametric synthesis of the missile homing system by simulation

The algorithm for parametric optimization of the MHS with an permissible stability margin of the NASS by overshoot contains the following basic steps, as presented in Fig. 4.

Step 1: Data input.

Step 2: Pre-synthesize the NASS. Scan the parameter $k_{\omega z1}$ from the value $k_{\omega z1min}$ with a "comparatively large" scanning step $dk_{\omega z1}$. For each $k_{\omega z1}$ value, we scan the parameter k_w from the value k_{wmin} with a "comparatively large" scanning step dk_w . For each pair of coefficients ($k_{\omega z1}$, k_w), using the commands of the Control System Toolbox package [9, 16], we describe the TF of the closed NASS (sysk).

Next, we select only pairs of parameters ($k_{\omega z1}$, k_w) that ensure the stability of the NASS according to the Hurwitz criterion. Therefore, we need to determine the coefficients of the TF of the closed NASS with the command `[nm, dn] = tfdata(sysk, 'v')` [9, 16]. From the parameters of the obtained vector `dn` (parameters of the characteristic polynomial), we make square matrices of order 1–9. We define the value of Hurwitz determinants with the `det(x)` command.

If the Hurwitz stability criterion is satisfied, then we define the values of the transition characteristic of the NASS with the command `[Y, T] = step(sysk, 4)` [16], where 4 is the integration time. We define the overshoot σ of the NASS. And if the Hurwitz stability criterion is not satisfied, then in order to reduce the synthesis time, the scanning steps will double in this value of the parameters k_w or $k_{\omega z1}$. If the overshoot of the NASS is less than 35 %, then go to step 2, as shown in Fig. 4.

Step 3: Scan parameter k from the k_{min} value with "comparatively large" dk scanning step. For each value of k , we scan the parameter k_p from the k_{pmin} value with a "comparatively large" scanning step of dk_p . For each set of parameters ($k_{\omega z1}$, k_w , k , k_p), we integrate the systems of equations (4)–(9) from the beginning to the end of the homing process to find the guidance error r_1 . If the guidance error r_1 is less than 1 (or some value), then go to step 4, as shown in Fig. 4.

Step 4: Assign $a_1 = k_{\omega z1}$; $a_2 = k_w$; $a_3 = k$; $a_4 = k_p$. With the obtained higher set of parameters ($k_{\omega z1}$, k_w , k , k_p), we scan $k_{\omega z1}$ from the value $(a_1 - dk_{\omega z1})$ with the scanning step $dk_{\omega z1}/N_1$; k_w from the value $(a_2 - dk_w)$ with the scanning step dk_w/N_2 ; k from the value $(a_3 - dk)$ with the scanning step dk/N_3 ; k_p from the value $(a_4 - dk_p)$ with the scanning step dk_p/N_4 ($N_i \geq 5$). For each set of parameters ($k_{\omega z1}$, k_w , k , k_p), we integrate the systems of equations (4)–(9) from the beginning to the end of the homing process to find the guidance error r .

Scanning parameters ($k_{\omega z1}$, k_w , k , k_p), integrating systems of equations (4)–(9) and finding the guidance error r in step 4 are repeated until $k_p \leq (a_4 + dk_p)$; $k \leq (a_3 + dk)$; $k_w \leq (a_2 + dk_w)$; $k_{\omega z1} \leq (a_1 + dk_{\omega z1})$.

The operations in steps 2-4 are repeated until $k_p \leq k_{pmax}$; $k \leq k_{max}$; $k_w \leq k_{wmax}$; $k_{\omega z1} \leq k_{\omega z1max}$.

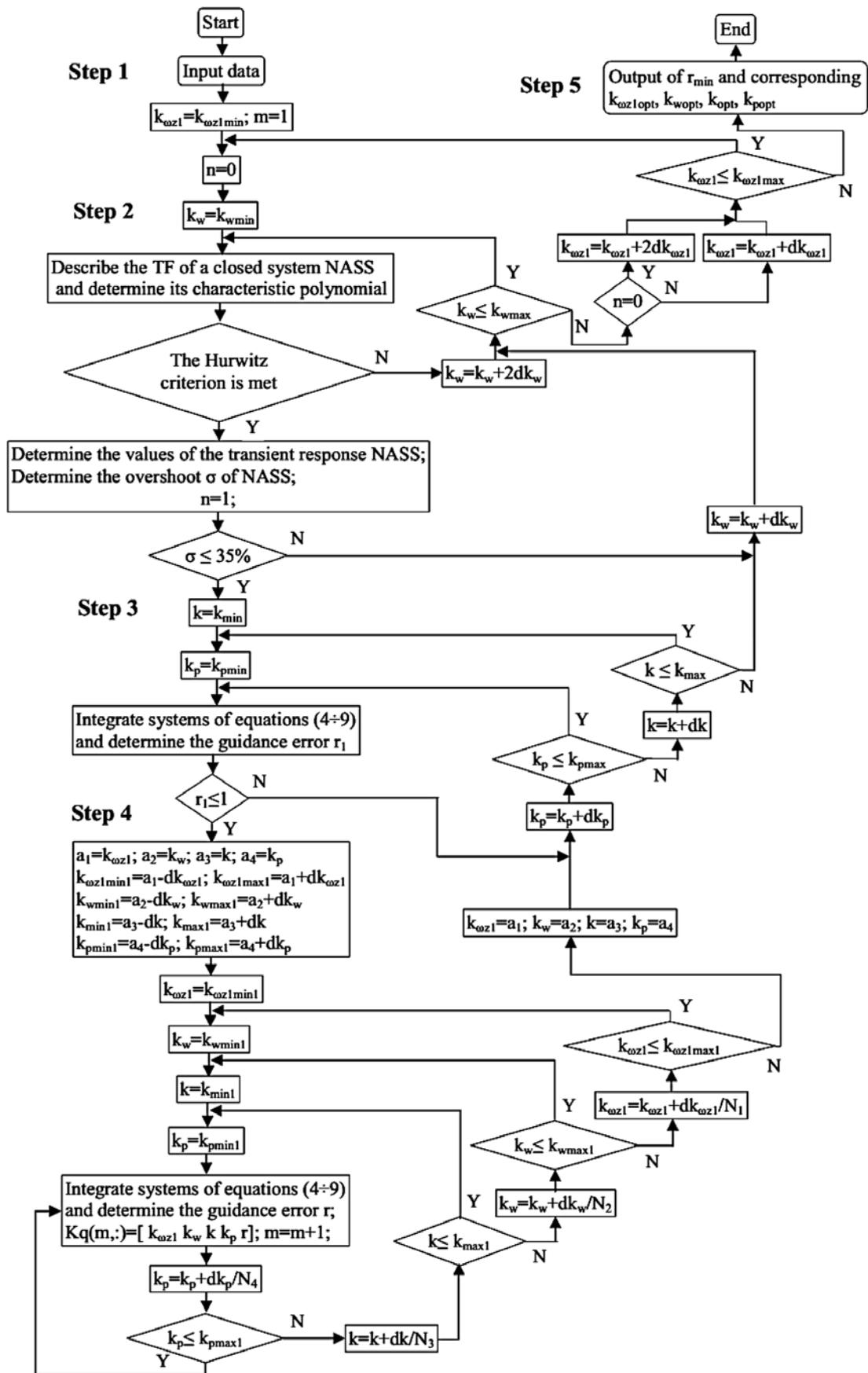


Fig. 4. The algorithm for parametric optimization of the MHS

Step 5: Find a set of optimal parameters ($k_{\omega z1opt}$, k_{wopt} , k_{opt} , k_{poppt}) that provide the smallest guidance error r_{min} .

Consider the first case: $x_{0T} = 7000$ m; $y_{0T} = 3000$ m; $v_T = 800$ m/s. After parametric optimization, the result was $k_{\omega z1opt} = 0,18$; $k_{wopt} = 0,003$; $k_{opt} = 5$; $k_{poppt} = 59$; guidance error 0,0094 m. Overshoot of the NASS is 8,4 %.

Consider the second case: $x_{0T} = 5000$ m; $y_{0T} = 3000$ m; $v_T = 800$ m/s. After parametric optimization, the result was $k_{\omega z1opt} = 0,21$; $k_{wopt} = 0,005$; $k_{opt} = 7$; $k_{poppt} = 62$; guidance error 0,0094 m. Overshoot of the NASS is 10,3 %.

Now we will describe the method of synthesis of MHS with an permissible gain stability margin of the NASS. It is basically similar to the method presented above. The differences are as follows:

In step 2: when describing the TF of an open (sysh) and closed (sysk) NASS using the commands of the Control System Toolbox package [9, 16], we must select its output so that it becomes a system with a single negative feedback. Next, instead of determining the overshoot of the NASS, we will determine its gain stability margin by command $[Gm, Pm, Wcg, Wcp] = margin(sysh)$ [16, 17]. If the gain stability margin of the NASS Gm is in the range of 5–25 dB, then go to step 3, and so on.

Consider the first case: $x_{0T} = 7000$ m; $y_{0T} = 3000$ m; $v_T = 800$ m/s. After parametric optimization, the result was $k_{\omega z1opt} = 0,18$; $k_{wopt} = 0,003$; $k_{opt} = 5$; $k_{poppt} = 59$; guidance error 0,0094 m. The stability gain margin of the NASS is 10,92 dB.

Consider the second case: $x_{0T} = 5000$ m; $y_{0T} = 3000$ m; $v_T = 800$ m/s. After parametric optimization, the result was $k_{\omega z1opt} = 0,21$; $k_{wopt} = 0,005$; $k_{opt} = 7$; $k_{poppt} = 62$; guidance error 0,0094 m. The stability gain margin of the NASS is 6,1 dB.

Using these methods, it is possible to synthesize the MHS with a permissible stability margin of NASS by oscillation index. Then, instead of determining its stability margin by overshoot, or gain margin, we find the values of its amplitude-frequency characteristic and determine the oscillation index.

Consider the first case: $x_{0T} = 7000$ m; $y_{0T} = 3000$ m; $v_T = 800$ m/s. After parametric optimization, the result was $k_{\omega z1opt} = 0,18$; $k_{wopt} = 0,003$; $k_{opt} = 5$; $k_{poppt} = 59$; guidance error 0,0094 m. The oscillation index of the NASS is 1,044.

Consider the second case: $x_{0T} = 5000$ m; $y_{0T} = 3000$ m; $v_T = 800$ m/s. After parametric optimization, the result was $k_{\omega z1opt} = 0,21$; $k_{wopt} = 0,005$; $k_{opt} = 7$; $k_{poppt} = 62$; guidance error 0,0094 m. The oscillation index of the NASS is 1,392.

As a result, three methods of MHS synthesis gave the same result. Note that the method of synthesis of MHS with a permissible stability gain margin of NASS is the simplest and has the shortest synthesis time. The method of synthesis of MHS with a permissible stability margin of NASS by oscillation index is the most difficult and has the longest synthesis time.

Computer simulation of the synthesized missile homing system

We will perform computer simulation of the synthesized the MHS when firing at a high-maneuverable target. When the target is maneuvering, we need to add the system (4)–(9) equation [6]:

$$\dot{\Theta}_T = \frac{w_{y0T}}{v_T}, \quad (11)$$

where, w_{y0T} is the normal acceleration of the target.

The modeling of the synthesized MHS is performed by solving the systems of equations (4)–(9), (11) by the Tustin method [15]. It is assumed that in the beginning of homing process the target has the coordinate $x_{0T} = 15\ 000$ m, $y_{0T} = 5000$ m and the speed $v_T = 800$ m/s. The shooting is conducted towards. At time $t = 1$ s; (2 s; 3 s; 4 s; 5 s; 5,5 s; 6 s; 6,5 s) from the beginning of homing, the target maneuvers with acceleration $w_T = -70$ m/s². The total guidance time is approximately 7,8 s. The guidance errors of system with $k_{\omega z1opt} = 0,21$; $k_{wopt} = 0,005$; $k_{opt} = 7$; $k_{poppt} = 62$ for various moments of the maneuvering of the target are shown in the Table 1. The trajectories of the missile and the target with maneuvering moment of target $t = 3$ s are shown in Fig. 5.

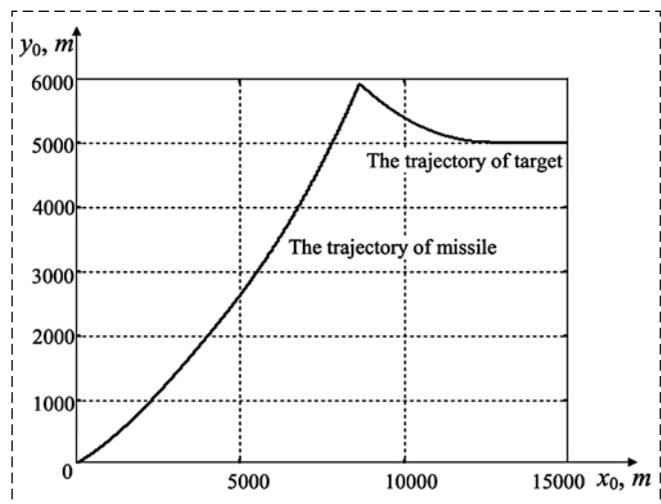


Fig. 5. Trajectories of missile and target

Guidance errors, m

Times, s	1	2	3	4	5	5,5	6	6,5
Guidance errors, m	0,0003	0,006	0,004	0,021	0,071	0,226	1,78	1,4

The result presented in Table 1 indicates that the synthesized MHS can fire at highly maneuverable targets with high accuracy.

Investigation of the accuracy of the synthesized homing system in real shooting conditions

In real conditions, the missile moves in the Earth's gravity field. It is affected by the force of gravity. By taking into account of gravity, the 4th equation in the system of equations (7) is replaced by the following equations:

$$\begin{cases} \dot{y}_{01} = v \sin \Theta; \\ y_0 = y_{01} - \frac{gt^2}{2}, \end{cases}$$

where, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

In addition to gravity, the thrust force of the cruise engine and the force of the frontal resistance also act on the missile. When the cruise engine is running, the missile's speed increases and when the cruise engine is switched off, the missile's speed decreases. Then speed of the missile in 5th equation of the system of equations (4), the 2nd equation of system of equations (5), and the 3rd and 4th equations of system of equations (7) are changed. We assume that the speed of missile changes by law:

$$\dot{v} = \begin{cases} a_1; t \leq t_e \\ -a_2; t > t_e \end{cases}$$

where, t_e is the moment of shutdown of the cruise engine, reporting from the beginning of homing.

The HH has a range of blinding, as presented [13]. When it is reached, the work of the HH is destroyed. Then the MHS should stop working. The rudder takes a zero position or is set at an angle that compensates with the weight of the missile.

The study of the effect of gravity, longitudinal acceleration of the missile, and blinding of HH on the accuracy of the synthesized MHS is carried out by modeling in the MATLAB environment. The simulation results show that, the changes of the aerodynamic coefficients of missile a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{42} in range $\pm 20\%$ due to the changes of the speed of the missile have little effect on the guidance errors. Therefore, we can use the method of frozen coefficients, assuming that they do not change. We assume that $a_1 = a_2 = 40 \text{ m/s}^2$; $t_e = 1,05 \text{ s}$; the blindness range of homing head is 200 m. We use MHS with the optimum parameters $k_{\omega z1opt} = 0,21$; $k_{\omega opt} = 0,005$, $k_{opt} = 7$, $k_{popt} = 62$. We also assume that at the beginning of homing the target has the coordinate $x_{0T} = 15 \text{ 000 m}$, $y_{0T} = 5000 \text{ m}$ and the speed $v_T = 800 \text{ m/s}$. The shooting is conducted towards. At time $t = 0 \text{ s}$ (1 s; 2 s; 3 s; 4 s; 5 s; 5,5 s; 6 s; 6,5 s) from the beginning of the homing process, the target maneuvers with acceleration $w_T = -70 \text{ m/s}^2$. Shooting is carried out in 4 conditions: 1 – optimal condition; 2 – taking into account the missile's gravity; 3 – taking into account the gravity and longitudinal acceleration of the missile; taking into account the gravity, longitudinal acceleration of the missile and the range of the blindness of HH. Guidance errors are shown in Table 2.

Let's explain some special error values in Table 2. At $t = 0$, $t_e = 1,05 \text{ s}$, the error is 37,658 m when taking into account the gravity and longitudinal acceleration

Table 2

Guidance errors, m

Conditions	Time, s								
	0	1	2	3	4	5	5,5	6	6,5
1	0								
2	0,006	$3,10^{-4}$	0,006	0,004	0,021	0,071	0,226	1,78	1,4
3	0,005	0,004	0,005	0,004	0,016	0,103	0,007	1,437	0,767
4	37,658	0,023	0,023	0,024	0,020	0,009	0,022	0,332	1,15
5	10,55	0,486	0,191	0,107	0,077	0,029	0,018	0,391	1,157

of the missile, and 10,55 m while taking into account the gravity, longitudinal acceleration of the missile and the range of the blindness of HH. Whereas, the error is 0,006 m in the optimal condition. This is because in those cases, the passive time of flight of the missile the greatest and therefore the speed of the missile at the end of the homing is slightly higher than the speed of target ($v = 901,6$ m/s while taking into account the gravity and longitudinal acceleration of the missile and $v = 906,5$ m/s while taking into account the gravity, longitudinal acceleration of the missile and the range of the blindness of HH). If we slightly increase the operating time of the cruise engine, for instance $t_e = 1,1$ s, the guidance error is reduced to 0,02 m and 5,82 m respectively. If the target does not maneuver, the guidance error is 0,0078 m and 0,0097 m, respectively.

At $t = 6$ s, $t_e = 1,05$ s the error is 0,332 m when taking into account the gravity and longitudinal acceleration of the missile, 0,391 m taking into account the gravity, longitudinal acceleration of the missile and the range of the blindness of HH. These errors are much less than 1,78 m in the optimal condition. This is because in those cases the speed of the missile is small, so the time from the moment of maneuvering of the target to the end of homing is longer than the time of the transition process of the NASS. The NASS transition is over, so the guidance error is small.

In summary, the gravity of the missile, the blinding of the HH almost does not effect on the accuracy of the MHS when using the method of proportional guidance with a large proportionality coefficient. The longitudinal acceleration of missiles does not effect on the accuracy of the MHS when using the method of proportional guidance with a large proportionality coefficient, and when guidance towards a non-maneuverable target. It causes an increase in the guidance error on a high-maneuverable target when the speed of the missile at the end of the homing process slightly exceeds the speed of the target.

Conclusion

The proposed synthesis methods are quite simple, since they mainly use the commands of the Control System Toolbox package to describe TF and synthesize the NASS. They allow us to select the parameters of the MHS with high precision guidance. The MHS synthesized by these methods can destroy highly maneuverable targets. The proposed synthe-

sis methods of MHS give the same synthesis result. The synthesis method of MHS with a permissible gain stability margin of NASS is the simplest and has the shortest synthesis time, and the synthesis method of MHS with a permissible stability margin of NASS in terms of oscillation index is the most difficult and has the longest synthesis time.

In the MHS, when using the proportional guidance method with large coefficients, it is not necessary to enter the components into the law of guidance that exclude the influence of gravity, longitudinal acceleration of the missile, and blinding of the homing head.

Reference

1. **Kanashchenkova A. I., Merkulova V. I.** Aviation radio control systems. Vol. 2, Moscow, Radio Engineering, 2003, pp. 23–30 (in Russian).
2. **Zarchan P.** Tactical and Strategic Missile Guidance, third edition, Vol. 157, Progress in Astronautics and Aeronautics, published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1801 Alexander Bell Drive, Reston, VA 20191-4344, p. 14.
3. **George M.** Siouris Missile Guidance and Control Systems, New York, Springer-Verlag, 2004, pp. 166, P. 194–196.
4. **Yanushevsky R.** Modern missile guidance, 2008 by Taylor & Francis Group, LLC CRC Press is an imprint of Taylor & Francis Group, an Informa business, p. 10, p. 18.
5. **Pupkov K. A., Egupov N. D., Kolesnikov L. V.** et al. High-Precision homing systems: Calculation and design. Computational experiment, Moscow, FIZMATLIT, 2011, p. 51, p. 54, p. 294 (in Russian).
6. **Arkhangelsk I. I., Afanasiev P. P., Bolotov E. G., Golubev I. S., Matvienko A. M., Mizrahi V. Ya., Novikov V. N., Ostapenko S. N., Svetlov V. G.** Design of anti-aircraft guided missiles, Moscow, MAI Publishing house, 2001, pp. 321–344 (in Russian).
7. **Thong Do Quang.** Synthesis of high-precision missile homing system using proportional guidance method, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 20, no. 4, pp. 242–248 (in Russian).
8. **Timofeev N. N., Shestun A. N.** Design of non-stationary dynamic control systems of aircraft, Saint Petersburg, BSTU, 2001, pp. 9–43 (in Russian).
9. **Thong Do Quang.** Synthesis of a missile homing system taking into account the dynamics of measuring elements, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 4, pp. 251–256 (in Russian).
10. **Krinetsky E. I.** Homing Systems, Moscow, Mashinostroenie, 1970, pp. 134–151 (in Russian).
11. **Fedosov E. A., Bobronnikov V. T., Krasilschikov N. N.** et al. Dynamic design of control systems for automatic maneuverable aircraft, Moscow, Mashinostroenie, 1997, pp. 63–65; pp. 87–88 (in Russian).
12. **Tolpegin O. A.** Mathematical models of aircraft guidance systems, Saint Petersburg, BSTU, 1999, pp. 65–96 (in Russian).
13. **Lebedev A. A., Karabanov V. A.** Dynamics of flight of unmanned aerial vehicles, Moscow, Mashinostroenie, 1962, pp. 482–503 (in Russian).
14. **Lebedev A. A., Karabanov V. A.** Dynamics of control systems for unmanned aerial vehicles, Moscow, Mashinostroenie, 1965, pp. 249, pp. 410–442 (in Russian).
15. **Gane V. A., Stepanov V. L.** Calculation of tracking systems, Minsk, Vysheyshaya shkola publishing house, 1990, pp. 218–228 (in Russian).
16. **Metvedev V. S., Pochemkin V. G.** Control System Toolbox, Moscow, ED. DIALOG MEFPI, 1999 (in Russian).
17. **Ogata K.** Modern Control Engineering, Prentice Hall, Pearson, p. 468.

В. Я. Распопов, д-р техн. наук, проф., tguru@yandex.ru,
В. В. Лихошерст, канд. техн. наук, доц., lvv_01@inbox.ru,
 ФГБОУ ВО "Тулский государственный университет"

Датчик угловых скоростей на базе волнового твердотельного гироскопа с металлическим резонатором для систем ориентации, стабилизации и навигации

Описаны методики и результаты испытаний волнового твердотельного гироскопа (ВТГ) — датчика угловых скоростей (ДУС), разработанного на кафедре "Приборы управления" ТулГУ и изготовленного серийным заводом АО "Мичуринский завод "Прогресс" по отработанной им технологии.

Металлический резонатор ВТГ-ДУС изготовлен из эливарного сплава и имеет разнотолщинную цилиндрическую конструкцию, нижняя часть которой с меньшей толщиной стенки выполняет роль подвеса для верхнего цилиндра, собственно резонатора, имеющего конусную форму, обеспечивающую лучшую локализацию колебаний на его торцевой кромке.

Технологические дефекты изготовления, разночастотность и разнородность, устранены балансировкой "по массе", основанной на удалении избыточного металла в определенных точках на торцевой кромке резонатора.

Электронный модуль обеспечивает вторую моду первичных и вторичных, возникающих при вращении, колебаний кромки резонатора и создает сигнал компенсации кориолисовой и квадратурной составляющих выходного сигнала в узлах. Поскольку максимальные амплитуды сигналов возбуждения и компенсации не превышают 10 В, то при больших механических воздействиях контур компенсации может не обработать возросший сигнал, и ВТГ-ДУС теряет работоспособность. Полное время обработки сигнала компенсации не превышает 1 мкс при максимальной потребляемой мощности электронного модуля, не превышающей 4 Вт.

При испытаниях на механические и температурные воздействия использовались нормы, характерные для аналогичных датчиков угловых скоростей, применяемых на борту летательных аппаратов. Определены стабильность нулевого сигнала и масштабного коэффициента при одновременном воздействии на ВТГ-ДУС измеряемой скорости и температуры. Получены значения случайного блуждания и нестабильности нулевого сигнала по графикам отклонений Аллана. Установлено, что ВТГ-ДУС обладает ударной прочностью и восстанавливает измерительную способность после удара. Испытания на вибростойкость выявили резонансные частоты и диапазоны частот, в которых испытываемый образец ВТГ-ДУС может применяться без существенной доработки.

Ключевые слова: волновой твердотельный гироскоп, вращение, температура, удар, вибрация

Введение

Волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) с металлическим резонатором являются перспективными инерциальными датчиками угловых скоростей для приборов и систем ориентации, стабилизации и навигации объектов наземного, морского и воздушно-космического применений. По сравнению с другими типами гироскопических датчиков они имеют следующие преимущества:

- полностью отсутствуют вращающиеся части, поэтому рабочий ресурс датчика (механической части) составляет 15 000 часов и более;
- высокое соотношение точность / цена;
- компактность, небольшой вес и габаритные размеры;
- сохранение инерциальной информации при кратковременном отключении электропитания;
- низкая энергоемкость 1...3 Вт;
- малое время готовности 1...5 с;
- стойкость к ионизирующему излучению с высокой энергией ограничивается применяемой элементной базой электронного блока.

В основе работы ВТГ лежит эффект прецессии волновой картины колеблющейся оболочки (рис. 1), установленной на вращающемся основании, обнаруженный и исследованный Дж. Х. Брайаном [1].

Брайан исследовал природу биений вибрирующей оболочки на звуковых частотах и пока-

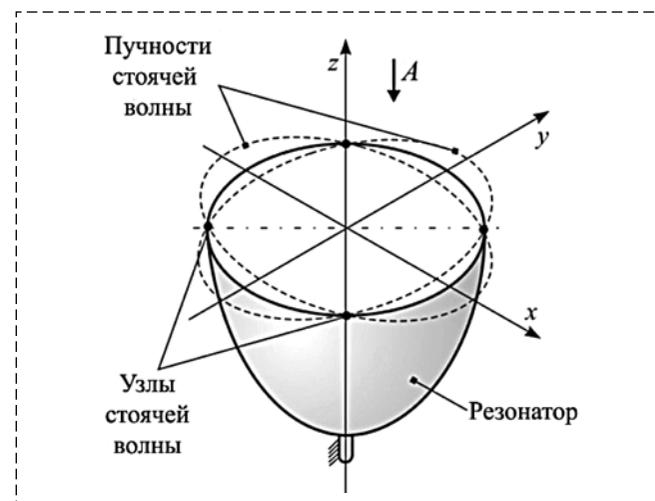


Рис. 1. Стоячая волна в резонаторе
 Fig. 1. Standing wave in the resonator

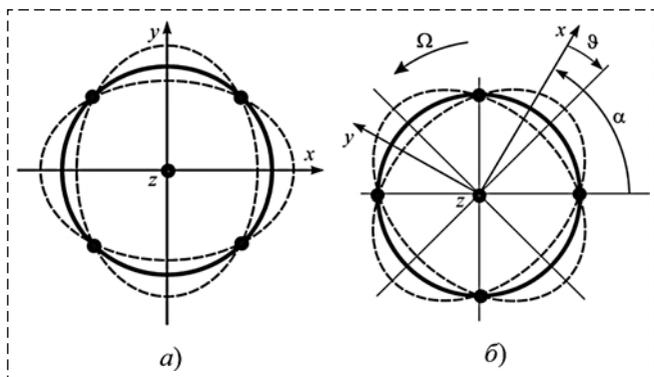


Рис. 2. Стоячая волна в неподвижном (а) и вращающемся (б) резонаторе:

Ω — скорость вращения; ϑ — угол прецессии стоячей волны; α — угол поворота резонатора

Fig. 2. Standing wave in a stationary (a) and rotating (b) resonator:
 Ω — rotation speed; ϑ — angle of precession of a standing wave; α — angle of rotation of the resonator

зал, что под действием сил Кориолиса, возникающих при вращении вибрирующей оболочки вокруг оси, перпендикулярной плоскости вибрации, происходит прецессия стоячих волн как относительно резонатора, так и в инерциальном пространстве (рис. 2).

Брайан рассмотрел случай равномерного вращения вибрирующей оболочки. Д. Линч (США) [2—4] доказал справедливость эффекта Брайана и для переменной скорости вращения. Фундаментальные исследования вибрирующей оболочки на вращающемся основании выполнены в работе [5].

Вибрирующая оболочка является чувствительным элементом ВТГ (резонатором). На кромке резонатора могут существовать различные формы упругих колебаний. В качестве рабочей используется вторая форма колебаний. При вращении резонатора вокруг оси Z под действием сил инерции Кориолиса происходит смещение вибрационных пучностей относительно кромки резонатора. Иными словами, вращение резонатора вызывает вторичные вибрации в форме эллиптической моды, повернутые на некоторый угол относительно первоначального положения. При работе ВТГ в режиме датчика угловой скорости (ВТГ-ДУС) ориентация волны, связанной с кромкой резонатора, обеспечивается позиционным возбуждением резонатора и определяется выражением [5]

$$\vartheta(t) - \vartheta_0 = -\frac{4K_M Q}{\omega_0} \Omega,$$

где ϑ_0 — угловое положение в системе координат резонатора; Ω — скорость вращения ре-

зонатора; K_M — коэффициент (масштабный, прецессии, Брайана); $Q = 1/2\xi$ — добротность резонатора (ξ — относительный коэффициент затухания); ω_0 — собственная частота колебаний резонатора.

Коэффициент Брайана определяется зависимостью [5]

$$K_M = \frac{1}{2(1-\nu)n^2} [2 + \nu - \sqrt{(2 + \nu)^2 + 4(1 - \nu)n^2}],$$

где n — номер формы колебаний; ν — коэффициент Пуассона материала резонатора.

Для $\nu = 0,17$ и $n = 2$ значение $K_M \approx 0,3$. Следовательно, при повороте резонатора относительно ϑ_0 вокруг оси Z (см. рис. 1), которая является осью чувствительности ВТГ, на угол $\int \Omega(\tau) d\tau = 90^\circ$ против часовой стрелки пучности стоячей волны будут прецессировать по часовой стрелке на угол $\vartheta \approx 0,3 \cdot 90^\circ \approx 27^\circ$, или относительно инерциального пространства — на угол $\alpha \approx 63^\circ$.

Возбуждение первичных стоячих волн реализуется датчиками силы — актюаторами (магнитоэлектрическими, пьезоэлектрическими, электростатическими), а измерение перемещений кромки резонатора — датчиками перемещений, которые могут иметь такую же физическую "природу", как и актюаторы.

Погрешности изготовления резонатора и анизотропия физико-механических свойств материала приводят к расщеплению собственной частоты его рабочих колебаний по второй форме массового дефекта на две близкие частоты. Каждой из этих частот соответствуют колебания также по второй форме, но с определенной ориентацией волны относительно резонатора. Такой дефект называется разночастотностью [5, 6].

Скорость затухания колебаний резонатора зависит от ориентации волны, т. е. резонатор имеет различные декременты затухания и соответствующее им направление осей. Такой дефект резонатора называется разнодобротностью [5, 6]. Указанные дефекты устраняются специальной технологической процедурой — балансировкой [7].

Основными динамическими характеристиками ВТГ-ДУС являются диапазон измерения, полоса пропускания, нестабильность нулевого сигнала, случайное блуждание, шум покоя, ошибка масштабного коэффициента.

В работе рассматривается экспериментальное определение на аттестованном стендовом оборудовании характеристик точности и их стабильности при воздействии температурных и механических факторов на ВТГ-ДУС с металлическим резонатором, изготовленным на серийном заводе.

Объект исследования

Конструкция ВТГ приведена на рис. 3, а (см. вторую сторону обложки). Резонатор 1 с пьезоэлементами 3, наклеенными на доньшко, образуют чувствительный элемент, который с помощью узла крепления 2 смонтирован на корпусе 5 и закрывается кожухом 6. Герметичность внутренней полости достигается шовной сваркой по периметру стыка между корпусом и кожухом, а также применением гермовыводов 4, обеспечивающих связь пьезоэлементов с блоками электроники. Пьезоэлементы выполняют функции датчиков перемещений и силы (прямой и обратный пьезоэффект).

Резонатор состоит из двух сопряженных цилиндров, один из которых с большей толщиной является его рабочей зоной, а тонкостенный цилиндр, сопряженный с доньшком, выполняет роль подвеса. Заодно с доньшком изготавливается часть узла крепления. Резонатор изготовлен из сплава 21НКМТ-ВИ и в отличие от прототипа [8–10] имеет конусную форму рабочей зоны, обеспечивающую лучшую локализацию стоячих волн на кромке резонатора.

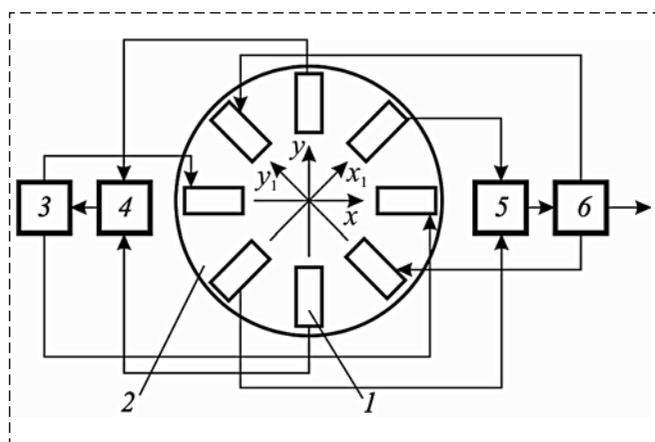


Рис. 4. Функциональная схема ВТГ-ДУС:

1 — пьезоэлементы; 2 — доньшко резонатора; 3 — генератор; 4, 5 — измерительные блоки; 6 — управляющий блок

Fig. 4. Functional diagram of SVG-ARS:

1 — piezoelectric elements; 2 — resonator bottom; 3 — generator; 4, 5 — measuring units; 6 — control block

Возбуждение колебаний и измерение перемещений кромки резонатора в узлах и пучностях проводятся с помощью восьми пьезоэлементов, наклеенных на доньшко (рис. 3, б, см. вторую сторону обложки).

Функциональная схема ВТГ-ДУС с пьезоэлементами 1, наклеенными на доньшко 2 резонатора в соответствии с направлением осей на рис. 3, б (см. вторую сторону обложки) приведена на рис. 4.

Генератор 3 электрических сигналов возбуждает элементы, расположенные по оси $x-x$ пучностей первой вибрационной моды. Измерительный блок 4 сравнивает амплитуду первой вибрационной моды с заданным значением и передает на генератор 3 сигнал рассогласования, обеспечивая режим регулирования амплитуды. Вторая вибрационная мода при вращении ВТГ-ДУС вокруг измерительной оси (ось чувствительности), параллельной оси симметрии, ориентирована по осям x_1-x_1 , y_1-y_1 . Измерительный блок 5 принимает сигналы пьезоэлементов по оси y_1-y_1 . Управляющий блок 6 принимает сигналы от блока 5, пропорциональные амплитуде угла по оси y_1-y_1 , и формирует управляющий (компенсирующий) сигнал на пьезоэлементы, расположенные по оси x_1-x_1 (вторая ось узла второй вибрационной моды) для сведения к нулю амплитуды сигналов, детектированных блоком 5. Блок 6 на основе детектированного сигнала вырабатывает сигнал, пропорциональный угловой скорости вращения ВТГ-ДУС.

Электроника ВТГ-ДУС содержит аналоговый и цифровой модули. Аналоговый модуль служит для усиления сигналов с пьезоэлементов — датчиков перемещений и для передачи на пьезоэлементы — датчики силы сигналов управления и коррекции.

Цифровой модуль проводит оцифровку сигналов с аналогового модуля, их демодуляцию (определение амплитуды, фазы и т. д.), формирует сигналы управления и коррекции, модулирует их и переводит в аналоговую форму посредством ЦАП. Аналоговый блок размещается непосредственно на гермовыводах 4 (рис. 3, а, см. вторую сторону обложки) чувствительного элемента. Цифровой вычислитель состоит из программируемой логической интегральной схемы (ПЛИС) и контроллера и может осуществлять управление работой от одного до трех резонаторов. ПЛИС цифрового вычислителя выполняет основные операции, время вычисления которых должно быть минимизировано, — опреде-

ление текущих значений частот колебаний, фаз и амплитуд сигналов в узлах и пучностях. Это реализуется за счет особенностей функционирования ПЛИС — параллельной работы всех блоков. Блок "генератор" на рис. 4 по сути является вычислителем, который на основе начальной резонансной частоты текущих амплитуд и фаз сигнала резонатора вычисляет синусные и косинусные амплитуды мгновенных значений в цифровом коде, которые посредством ЦАП преобразуются в управляющие и корректирующие напряжения на пьезоэлементах.

Контроллер выполняет функции связи с потребителем сигнала, определения коэффициентов контуров управления. Начальные параметры ВТГ-ДУС (резонансная частота, амплитуда возбуждения, постоянные поправки) также первоначально передаются в контроллер.

Алгоритмическая и схемотехническая реализации электронного модуля ВТГ-ДУС, соответствующие рис. 4, рассмотрены в работе [11].

Работоспособность ВТГ-ДУС обеспечивается процедурами настройки и калибровки [11]. Настройка обеспечивает резонансный режим работы, а калибровка — максимально возможное ослабление влияния дрейфа резонансной частоты и квадратурной составляющей на масштабный коэффициент, его нелинейность и на смещение нуля в диапазоне измеряемой угловой скорости.

Исполнение ВТГ-ДУС с корпусом, снабженным трехточечным креплением с возможностью установки амортизирующих опор в точках крепления, создает возможность построения трехосного измерительного модуля (рис. 5, см. вторую сторону обложки) для систем ориентации, стабилизации и навигации объектов различного применения (для автомобильного, авиационного и водного транспорта, космических аппаратов, робототехники), которые имеют различные характеристики ударного и вибрационного воздействия на приборы и системы управления.

Конструктивное оформление несущей конструкции измерительного модуля может быть выполнено в соответствии с вариантом его применения.

Исследование характеристик точности ВТГ-ДУС

Определение характеристик точности ВТГ-ДУС проводили с применением измерительного модуля, показанного на рис. 5, с диапазоном

измерения $\pm 650^\circ/\text{с}$ и диапазоном температур эксплуатации $-40...80^\circ\text{C}$ (исходя из диапазона эксплуатации элементной базы, примененной в электронном блоке). Целью испытаний являлось определение следующих характеристик ВТГ-ДУС:

— стабильность коэффициента передачи и нулевого сигнала в диапазоне температур эксплуатации;

— устойчивость ВТГ-ДУС под действием ударов и вибрации.

Значения воздействующих факторов принимали в соответствии с нормами испытаний аналогичных приборов, предназначенных для эксплуатации на борту летательных аппаратов: диапазон угловых скоростей воздействия $\pm 180^\circ/\text{с}$; температурное воздействие $-20...50^\circ\text{C}$ с шагом $+10^\circ\text{C}$; вибрационное воздействие с частотой $10...2500$ Гц, амплитудой $9,81...15$ $\text{м}/\text{с}^2$, форма воздействия — синус; ударное воздействие с амплитудами 59 $\text{м}/\text{с}^2$, 147 $\text{м}/\text{с}^2$, 441 $\text{м}/\text{с}^2$, 981 $\text{м}/\text{с}^2$ при различном числе ударов.

Характеристики ВТГ-ДУС определяли по изменению выходного сигнала независимо от того, что послужило причиной его изменения — измеряемый параметр (угловая скорость) или не измеряемый параметр (температура, ударное или вибрационное воздействие). В виду того, что проведение испытаний на одновременное воздействие вращения и вибрации (удара) невозможно на использованном оборудовании, под устойчивостью понимается нахождение выходного сигнала в допустимом диапазоне во время действия и после снятия нагрузки.

Выходной сигнал ВТГ-ДУС, эквивалентный сигналам в цепи обратной связи компенсации кориолисовой и квадратурной составляющих, регистрировался программным обеспечением. Умножением на постоянный коэффициент показания ВТГ-ДУС из единиц кода приводятся к размерности $[\%/\text{с}]$. В цепи преобразования ВТГ-ДУС на момент проведения испытаний не содержались контуры коррекции температурного влияния.

Последовательность проведения видов испытаний:

1) проведение испытаний на воздействие температуры и вращения — определение смещения нулевого сигнала и погрешности коэффициента передачи;

2) проведение испытаний на механическое воздействие.

Испытания на воздействие температуры и вращения. Целью проведения испытаний яв-

лялось установление достигнутого на данном этапе работ уровня точности функционирования ВТГ-ДУС при измерении угловой скорости на различных температурах эксплуатации.

Испытания проводили на одноосном поворотном столе, совмещенном с термокамерой. Для каждой температуры испытания алгоритм проведения был следующий: выход термокамеры на режим со скоростью не более 1 °С/мин, выдержка не менее 1 ч, вращение в диапазоне угловых скоростей с шагом 30 °/с и записью выходного сигнала на каждой угловой скорости не менее 2 мин при частоте обновления информации об угловой скорости 500 Гц. На температурах -20 °С, 0 °С, 20 °С и 40 °С дополнительно проводили запись выходного сигнала при нулевой угловой скорости стенда в течение не менее 2 ч.

По записям сигнала на каждой из угловых скоростей определяли коэффициент передачи на каждой температуре. На основании полученных данных определяли как погрешность коэффициента передачи при одной температуре, так и изменение коэффициента передачи в диапазоне температур. При угловой скорости стенда, равной нулю, определялся нулевой сигнал ВТГ-ДУС на каждой температуре испытания.

Погрешности коэффициента передачи на температуре вычисляли по формуле

$$\Delta k_j = \frac{\max(|\omega_{ij} - \omega_{p ij}|)}{\Omega_{\max}} \cdot 100, \quad (1)$$

где ω — угловая скорость, измеренная ВТГ-ДУС; i — задаваемая на стенде угловая скорость (-180...180 °/с с шагом 30°/с); j — температура испытания (-20...50 °С с шагом 10 °С); Ω_{\max} — максимальная задаваемая угловая скорость 180 °/с; ω_p — расчетное значение угловой скорости.

Расчетное значение угловой скорости для каждой температуры воздействия определяли по формуле

$$\omega_p = k\omega_c + b, \quad (2)$$

где k — коэффициент передачи ВТГ-ДУС на данной температуре; ω_c — угловая скорость стенда; b — смещение нулевого сигнала.

Коэффициенты k и b рассчитывались на основании измеренных ВТГ-ДУС значений угловой скорости по методу наименьших квадратов для каждой температуры.

Результаты вычисления погрешности коэффициента передачи на температуре приведены в табл. 1.

Погрешность измерения угловой скорости на температуре определяли следующим образом:

$$\Delta\omega_{ij} = \omega_{ij} - \omega_{p ij}.$$

Таблица 1
Table 1

Погрешность коэффициента передачи на температуре
Scale factor error at temperature

Температура, °С	-20	-10	0	10	20	30	40	50
Погрешность коэффициента передачи, %	0,009	0,065	0,055	0,011	0,0015	0,011	0,015	0,033

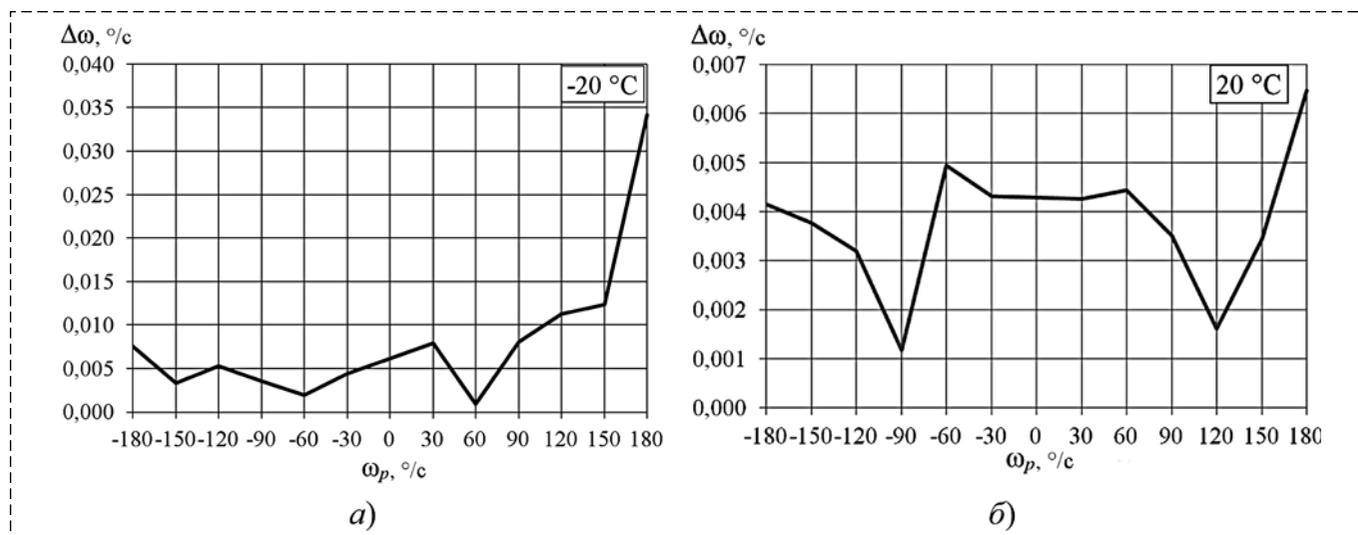


Рис. 6. Отклонение угловой скорости при температурах минус 20 °С (а) и плюс 20 °С (б)
Fig. 6. Deviation of angular rate at temperatures of minus 20 °С (а) and plus 20 °С (б)

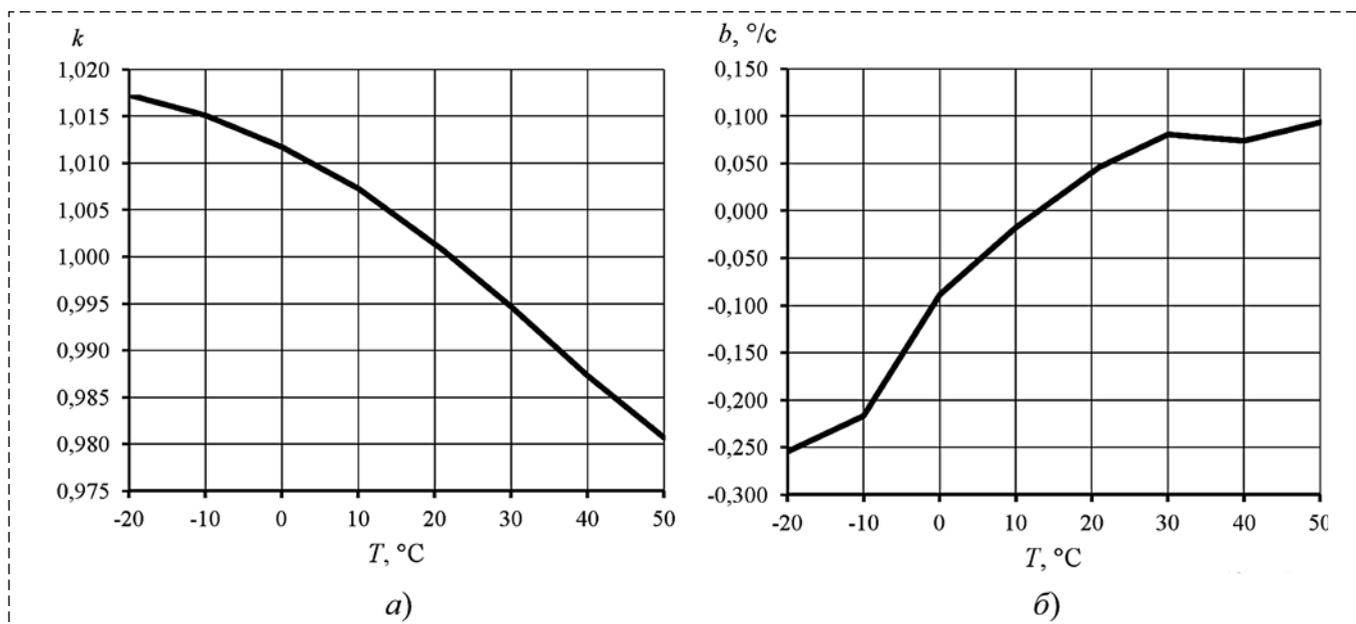


Рис. 7. Относительная погрешность коэффициента передачи (а) и нулевого сигнала (б) от температуры
 Fig. 7. Relative error of the scale factor (a) and zero signal (b) over temperature

Графические результаты погрешности измерения угловой скорости для температурах $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ и $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ приведены на рис. 6.

Таблица 2
 Table 2

Параметры ВТГ-ДУС
 Parameters of SVG-ARS

Параметр	$-20\text{ }^{\circ}\text{C}$	$0\text{ }^{\circ}\text{C}$	$+21\text{ }^{\circ}\text{C}$	$+40\text{ }^{\circ}\text{C}$
Случайное блуждание, $^{\circ}/\sqrt{\text{ч}}$	0,035	0,022	0,0182	0,0185
Нестабильность нуля, $^{\circ}/\text{ч}$	0,2048	0,20016	0,1831	0,6139

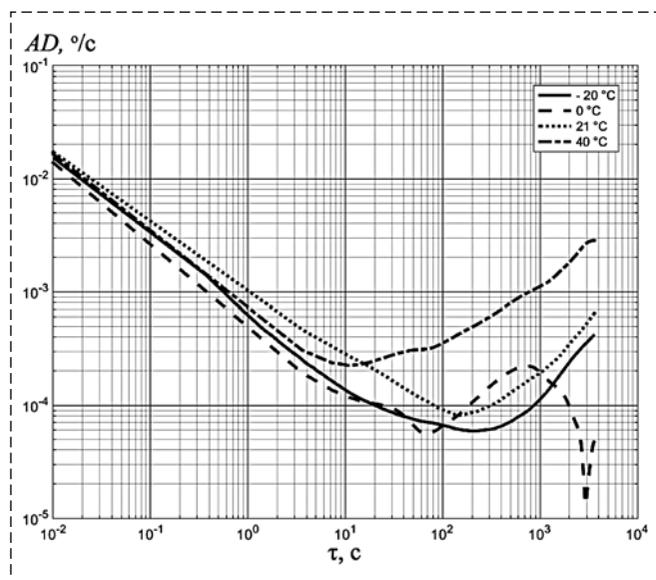


Рис. 8. Отклонения Аллана
 Fig. 8. Allan's deviations

Полученные результаты свидетельствуют о высокой стабильности коэффициента передачи при фиксированной температуре.

Значения коэффициента передачи и нулевого сигнала, полученные для каждой температуры, приведены на рис. 7.

В соответствии с рис. 7 максимальное значение $\Delta k \approx 1,7\%$ (вычисление по выражению (1)), откуда следует необходимость температурной коррекции выходного сигнала.

По длительным записям ($\sim 2\text{ ч}$) выходного сигнала на неподвижном основании при температурах $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$, $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $21\text{ }^{\circ}\text{C}$, $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ рассчитаны отклонения Аллана [12], вычисленные параметры приведены в табл. 2. В графическом виде результаты вычисления представлены на рис. 8.

Из анализа приведенных данных следует возможность построения на базе рассматриваемого ВТГ-ДУС систем ориентации и стабилизации с работой в течение нескольких часов.

Результаты испытаний на ударное воздействие. Целью проведения данного вида испытаний являлось установление допустимых для данной конструктивной реализации резонатора и алгоритмов управления ВТГ-ДУС амплитуд ударных воздействий в направлении оси чувствительности и перпендикулярно ей.

Реакция ВТГ-ДУС (изменение выходного сигнала) при действии механического удара в направлении измерительной оси с амплитудой 147 м/с^2 в графическом виде представлена на рис. 9, а (см. третью сторону обложки), для

амплитуды удара 441 м/с^2 — на рис. 9, б (см. третью сторону обложки).

На основе результатов испытаний на ударное воздействие можно сделать следующие выводы:

— с увеличением амплитуды удара увеличивается амплитуда выходного сигнала, но не пропорционально амплитуде удара;

— удар с амплитудой 441 м/с^2 является максимально допустимым в направлении измерительной оси для данного образца ВТГ-ДУС (имеются в виду конструктивные размеры резонатора и параметры контуров управления), так как выходной сигнал находится практически на границе диапазона измерения. Превышение амплитуды удара приводит к нарушению в работе контура поддержания колебаний и, как следствие, к потере работоспособности ВТГ-ДУС. Восстановление работоспособности возможно только при повторном включении;

— форма ударного воздействия и форма выходного сигнала ВТГ-ДУС существенно отличаются из-за наличия демпферов в узлах крепления корпуса.

Проведение испытаний на ударное воздействие в направлении оси, перпендикулярной измерительной, показало стойкость ВТГ-ДУС в диапазоне амплитуд ударных воздействий до 882 м/с^2 .

Результаты испытаний на вибрационное воздействие. Целью проведения испытаний являлось получение информации о поведении резонатора и контура поддержания колебаний при действии вибрации. На основании полученной информации определены допустимые частотные и амплитудные границы воздействия, в которых возможно функционирование разработанного ВТГ-ДУС с обеспечением характеристик точности.

Вибрационные испытания при использовании электродинамических стендов сопровождаются воздействием на испытываемый объект электромагнитных помех. Для исследуемого образца ВТГ-ДУС зафиксировано увеличение шумовой составляющей в пять раз (с $0,1 \text{ } \%/с$ до $0,5 \text{ } \%/с$ — размах) при включении оборудования в рабочий режим без вибрации. Шум имеет нормальное распределение и не содержит постоянной составляющей.

Испытания на воздействие вибрации проводили в несколько этапов: первый — поиск резонансов конструкции (ускорение $9,81 \text{ м/с}^2$, диапазон частот $10...2500 \text{ Гц}$); второй — стойкость на воздействие вибрации (ускорение

$9,81...98,1 \text{ м/с}^2$, диапазон частот $10...2000 \text{ Гц}$); третий — стойкость на воздействие вибрации (ускорение $29,4...147,2 \text{ м/с}^2$, диапазон частот $10...2000 \text{ Гц}$ с большей скоростью прохождения октавы).

В процессе проведения первого этапа выявлен резонанс демпфирующей опоры в диапазоне частот $300...450 \text{ Гц}$. При проведении испытаний на втором и третьем этапах в диапазоне $250...500 \text{ Гц}$ амплитуда вибрационного воздействия была минимизирована.

Результаты испытаний по второму этапу приведены на рис. 10 (см. третью сторону обложки). Анализ графика показывает наличие частот воздействия, на которых происходит существенное изменение реакции ВТГ-ДУС, но при этом контуром управления поддерживается режим работы. Наряду с этим присутствуют частоты, при которых происходит срыв работы контура поддержания колебаний, работа которого самостоятельно восстанавливается после изменения частоты воздействия.

Существенным отличием реакции ВТГ-ДУС при проведении испытаний на третьем этапе (рис. 11, см. третью сторону обложки) является значительно большая амплитуда шумовых всплесков в области малых частот воздействия от 10 до 100 Гц .

Диапазоны частот устойчивости к вибрации на рис. 10, 11 (см. третью сторону обложки) обозначены следующим образом:

на рис. 10: 1 — $10...92 \text{ Гц}$, 2 — $500...560 \text{ Гц}$ и 3 — $610...870 \text{ Гц}$;

на рис. 11: 1 — $10...38 \text{ Гц}$, 2 — $45...55 \text{ Гц}$), 3 — $150...200 \text{ Гц}$, 4 — $1615...1700 \text{ Гц}$ и 5 — $1900...2000 \text{ Гц}$.

Анализ результатов испытания на вибрационное воздействие показал, что имеются диапазоны частот, при которых сохраняется виброустойчивость ВТГ-ДУС. Для его применения во всем диапазоне широкополосной вибрации необходимо внести изменения либо в конструкцию резонатора, либо в алгоритм управления им в зависимости от диапазона и амплитуд вибрационного воздействия.

Заключение

Разработан ВТГ с металлическим резонатором, работающий в режиме ДУС. Гироскоп изготовлен в составе опытной партии на серийном заводе по разработанной им технологии.

На стендовом оборудовании отдела испытаний профильного предприятия проведены испытания ВТГ-ДУС по нормам, аналогичным для приборов, применяемых на борту ЛА.

Определены нулевой сигнал, случайное блуждание выходного сигнала и нестабильность его масштабного коэффициента для диапазона температур от $-20...50$ °С и диапазона измеряемых угловых скоростей ± 180 °/с.

Полученные значения характеристик точности ВТГ-ДУС достаточны для его применения в течение нескольких часов в системах ориентации, стабилизации и навигации для объектов, механические воздействия со стороны которых не нарушают виброустойчивость и ударную прочность гироскопа.

Для динамичных объектов с большими значениями амплитуды и диапазона частот вибраций полученные результаты могут быть использованы для определения направлений конструкторской доработки резонатора и электроники управления для заданных значений механических возмущений.

Список литературы

1. **Bryan G. H.** On the Beats in the Vibrations of a Revolving Cylinder or Bell // Proc. of Cambridge Phil. Soc. 1890, Nov. 24. Vol. VII. Pt. III. P. 101–111.

2. **Линч Д.** Взгляд компании "НОРТРОП ГРУММАН" на развитие инерциальных технологий // Гироскопия и навигация. 2008. № 3. С. 102–106.

3. **Lynch D. D.** Vibratory gyro analysis by the method of averaging // Proceedings of the 2nd St. Petersburg conference on gyroscopic technology and navigation. St. Petersburg. 1995. P. 26–34.

4. **Lynch D. D.** Coriolis vibratory gyroscope // IEEE standard specification format guide and test procedure for Coriolis vibratory gyros. IEEE std.1431 annex B. 2004. P. 56–66.

5. **Журавлев В. Ф., Климов Д. М.** Волновой твердотельный гироскоп. М.: Наука, 1985. 125 с.

6. **Матвеев В. А., Липатников В. И., Алехин А. В.** Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 165 с.

7. **Распопов В. Я., Волчихин И. А., Волчихин А. И., Ладонкин А. В., Лихошерст В. В., Матвеев В. В.** Волновой твердотельный гироскоп с металлическим резонатором. Тула: Издательство ТулГУ, 2018. 189 с.

8. **US Patent** № US 2006/0266116 A1, 30.11.2006. Coriolis force gyroscope with high sensitivity // United States Patent 7281425 B2, 2007 / Valery V. Chikovani, Kiev (UA); Yuri A. Yatsenko, Kiev (UA); Vladimir A. Kovalenko, Kiev (UA).

9. **Chikovani V.** Secondary wave control system of the Coriolis vibratory gyroscope resonator // Electronics and Control Systems. 2013. N. 3. P. 58–61.

10. **Chikovani V. V., Yatsenko Yu. A., Barabashov A. S., Kovalenko V. A., Tewksbury P.** A Set of High Accuracy Low Cost Metallic Resonator CVG // Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2007), Fort Worth, TX, September 2007. P. 1345–1350.

11. **Распопов В. Я., Алалуев Р. В., Ладонкин А. В., Лихошерст В. В., Шепилов С. И.** Настройка и калибровка волнового твердотельного гироскопа с металлическим резонатором, работающего в режиме датчика угловой скорости // Гироскопия и навигация. 2020. Т. 28. № 1. С. 31–41. DOI 10.17285/0869-7035.0019.

12. **IEE Std 1421-2004.** Standart Specification Form Guide and Test Procedure for Coriolis Vibratory Gyros, 2004.

Angular Rate Sensor Based on a Solid-State Wave Gyroscope with a Metal Resonator for Attitude Control, Stabilization and Navigation Systems

V. Ya. Raspopov, tgupu@yandex.ru, **V. V. Likhosherst**, lvv_01@inbox.ru,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation

Corresponding author: **Vladimir Raspopov Ya.**, D., Professor,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation, e-mail: tgupu@yandex.ru

Accepted on April 02, 2021

Abstract

The article describes the methods and test results of a solid-wave gyroscope (SVG) — an angular rate sensor (ARS), developed at the Department of Control Devices, Tula State University and manufactured by the serial plant of JSC "Michurinsky Plant" Progress "according to the technology it worked out. The metal resonator SVG-ARS is made of an elinvar alloy and has a cylindrical structure of different thickness, the lower part of which, with a smaller wall thickness, acts as a suspension for the upper cylinder, the resonator itself, which has a conical shape, providing better vibration localization at its end edge. Technological manufacturing defects, different frequencies and variability, are eliminated by balancing "by mass" based on the removal of excess metal at certain points on the end edge of the resonator. The electronic module provides the second mode of primary and secondary oscillations of the resonator edge arising during rotation and creates a signal to compensate for the Coriolis and quadrature components of the output signal at the nodes. The maximum amplitudes of the excitation and compensation signals do not exceed 10 V. Therefore, at large values of mechanical influences, the compensation circuit may not work out the increased signal and the SVG-ARS loses its operability. The total processing time of the compensation signal does not exceed 1 μ s. The maximum power consumption of the electronic module is not more than 4 W. When testing for mechanical and temperature effects, the norms were used that are typical for similar devices (angular rate sensors) used on board aircraft. The tests were carried out on the bench equipment of a

specialized enterprise. The stability of the zero signal and the scale factor was determined under the simultaneous action of the measured speed and temperature on the SVG-ARS. The values of the random walk and the instability of the zero signal were obtained from the Allan deviation plots. Their values provide a basis for the conclusion about the possibility of using the developed SVG for several hours on board dynamic aircraft in orientation, stabilization and navigation systems. It was found that SVG-ARS possesses impact strength and restores its measuring ability after impact. Tests for vibration resistance revealed resonance frequencies and frequency ranges in which the tested VTG-DUS sample can be used without significant modification. The results of vibration tests can be used to refine the design and control electronics for the operating conditions of a particular aircraft.

Keywords: wave solid state gyroscope, rotation, temperature, shock, vibration

For citation:

Raspopov V. Ya., Likhosherst V. V. Angular Rate Sensor Based on a Solid-State Wave Gyroscope with a Metal Resonator for Attitude Control, Stabilization and Navigation Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 7, pp. 374–382.

DOI: 10.17587/mau.22.374-382

References

1. **Bryan G. H.** On the Beats in the Vibrations of a Revolving Cylinder or Bell, *Proc. of Cambridge Phil. Soc.* 1890, Nov. 24, vol. VII, pt. III, pp. 101–111.
2. **Lynch D.** View of the company "NORTHROP GRUMMAN" on the development of inertial technologies, *Gyroscopy and navigation*, 2008, no. 3, pp. 102–106 (in Russian).
3. **Lynch D. D.** Vibratory gyro analysis by the method of averaging, *Proceedings of the 2nd St. Petersburg conference on gyroscopic technology and navigation*, St. Petersburg, 1995, pp. 26–34.
4. **Lynch D. D.** Coriolis vibratory gyroscope, *IEEE standard specification format guide and test procedure for Coriolis vibratory gyros*, IEEE std.1431 annex B, 2004, pp. 56–66.
5. **Zhuravlev V. F., Klimov D. M.** Wave solid state gyroscope, Moscow, Nauka, 1985, 125 p. (in Russian).
6. **Matveev V. A., Lipatnikov V. I., Alekhin A. V.** Designing a wave solid-state gyroscope, Moscow, Publishing house of MSTU im. N. E. Bauman, 1997, 165 p. (in Russian).
7. **Raspopov V. Ya., Volchikhin I. A., Volchikhin A. I., Ladonkin A. V., Likhosherst V. V., Matveev V. V.** Wave solid-state gyroscope with a metal resonator, Tula, Publishing house of TuSU, 2018, 189 p. (in Russian).
8. **US Patent № US 2006/0266116 A1**, 30.11.2006. Coriolis force gyroscope with high sensitivity, United States Patent 7281425 B2, 2007, Valery V. Chikovani, Kiev (UA); Yuri A. Yatsenko, Kiev (UA); Vladimir A. Kovalenko, Kiev (UA).
9. **Chikovani V.** Secondary wave control system of the Coriolis vibratory gyroscope resonator, *Electronics and Control Systems*, 2013, no. 3, pp. 58–61.
10. **Chikovani V. V., Yatsenko Yu. A., Barabashov A. S., Kovalenko V. A., Tewksbury P.** A Set of High Accuracy Low Cost Metallic Resonator CVG, *Proceedings of the 20th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GNSS 2007)*, Fort Worth, TX, September 2007, pp. 1345–1350.
11. **Raspopov V. Ya., Alaluev R. V., Ladonkin A. V., Likhosherst V. V., Shepilov S. I.** Tuning and calibration of a wave solid-state gyroscope with a metal resonator operating in the mode of an angular velocity sensor, *Gyroscopy and Navigation*, 2020, vol. 28, no. 1, pp. 31–41. DOI 10.17285/0869-7035.0019 (in Russian)
12. **IEE Std 1421-2004.** Standart Specification Form Guide and Test Procedure for Coriolis Vibratory Gyros, 2004.

В. В. Любимов, зав. кафедрой высшей математики, доц., д-р техн. наук, vlubimov@mail.ru,
И. Бакри, аспирант, ibrahimbakry0@gmail.com,
Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королева

Управляемое изменение габаритных размеров спускаемого в атмосфере Марса космического аппарата осесимметричной формы

Рассматривается управляемое изменение габаритных размеров спускаемого в атмосфере Марса космического аппарата (КА). Целью работы является получение методики расчета массовых и массово-геометрических характеристик КА при изменении его габаритных размеров, обеспечивающей пассивное управление угловой скоростью на этапе спуска данного космического аппарата в разреженной атмосфере. В процессе решения данной задачи вычисляются геометрические и массово-геометрические характеристики спускаемого КА (объем, площадь поперечного сечения, моменты инерции). Предполагается, что задняя относительно набегающего потока внешняя форма КА представляет собой однополостный гиперboloид вращения, изменяющий свои габаритные размеры в процессе спуска КА в разреженной атмосфере Марса. В результате решения задачи нелинейного программирования получены искомые минимальные и максимальные значения главных осевых моментов инерции, способствующих раскручиванию КА относительно продольной оси симметрии. Исходными данными при решении задачи нелинейного программирования являются минимальный внутренний объем и максимальная площадь поперечного сечения гиперboloида, рассчитываемые исходя из габаритных размеров реального КА. Сформулирована методика расчета массовых и массово-геометрических характеристик КА при изменении его габаритных размеров, позволяющая осуществлять управление значением угловой скорости симметричного КА в разреженной атмосфере Марса без применения бортовых реактивных двигателей. В частности, в работе показывается, что при увеличении высоты гиперboloида происходит уменьшение момента инерции относительно продольной оси симметрии КА, сопровождающееся увеличением моментов инерции относительно поперечных осей симметрии. Следует отметить, что в этом случае происходит увеличение угловой скорости вращения КА относительно продольной оси, которое позволяет достичь устойчивой ориентации КА при входе в атмосферу. Однако более подробное исследование динамики относительного движения КА с изменяемой формой в атмосфере выходит за рамки данной работы, но оно может быть представлено в дальнейших публикациях.

Ключевые слова: космический аппарат, гиперboloид, момент инерции, нелинейное программирование, управление, изменяемые габаритные размеры, угловая скорость, внешняя форма

Введение

Известно, что спускаемые космические аппараты (КА) применяют бортовые ракетные двигатели в качестве тормозных устройств и устройств управления ориентацией КА при спуске в атмосфере Марса. В данной работе для обеспечения стабильной ориентации при входе в атмосферу применяется управляемое изменение формы КА. Сокращение массы КА, обусловленное уменьшением числа бортовых реактивных двигателей и запасов топлива к ним, получаемое в этом случае, позволит уменьшить стоимость миссии или предоставит возможность отправить на поверхность Марса полезный груз большей массы. Применение КА с изменяемой формой для обеспечения эффективного торможения или достижения стабильной ориентации рассматривалось в целом ряде публикаций, например, в работах [1, 2].

В данной работе рассматривается методика изменения габаритных размеров конструкции спускаемого КА, часть которой имеет форму

однополостного гиперboloида вращения. Эта методика может применяться для минимизации или максимизации соответствующих главных осевых моментов инерции КА в целях увеличения или уменьшения угловой скорости КА без использования бортовых реактивных двигателей. Для достижения указанной цели решается задача нелинейного программирования, позволяющая рассчитать искомые геометрические и массово-геометрические характеристики рассматриваемого спускаемого КА.

В работе содержится постановка рассматриваемой задачи нелинейного программирования. Приводятся формулы для расчета геометрических и массово-геометрических характеристик однополостного гиперboloида: главных центральных осевых моментов инерции, объема и площади поперечного сечения. Описан метод вычисления характеристик гиперboloида при изменении его габаритных размеров методом нелинейного программирования. Представлены численные результаты решения этой задачи и содержится методика расчета массовых и мас-

сово-геометрических характеристик КА. В заключении обсуждаются основные результаты работы.

Описание космического аппарата

Исходные массово-геометрические характеристики (масса и габаритные размеры), а также конструкция рассматриваемого в работе спускаемого КА соответствуют спускаемому КА Mars Polar Lander.

КА Mars Polar Lander состоит из следующих частей: нижняя часть (теплозащитный щит), внутренняя часть (посадочный аппарат) и верхняя часть.

Верхняя часть КА Mars Polar Lander имеет форму кругового усеченного конуса. В данной работе предполагается, что верхняя часть КА имеет форму половины поверхности однополостного однородного гиперboloида вращения с габаритными размерами a , c и h (рис. 1). В представленной задаче переменные величины a и c претерпевают изменение при изменении высоты верхней части h . Отметим, что поверхность однополостного гиперboloида может быть построена, например, путем соединения двух концентрических вертикально смещенных колец, соединенных наклонными стержнями. Такая конструкция может расширяться и скла-

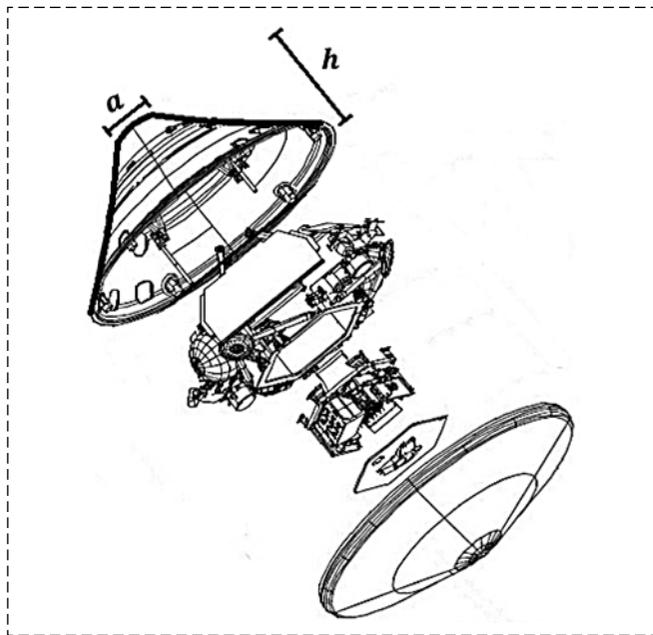


Рис. 1. Конструкция спускаемого на Марс аппарата на примере КА Mars Polar Lander

Fig. 1. The design of the spacecraft descent to Mars on the example of the Mars Polar Lander spacecraft

дываться, когда одно кольцо поворачивается относительно другого на некоторый угол [3, 4].

Исходный объем верхней части V и исходная площадь поперечного сечения S соответствуют габаритным размерам КА Mars Polar Lander [5], имеющего форму кругового усеченного конуса с высотой $h = 1,02$ м, с радиусом теплозащитного щита $r_1 = 1,2$ м, с радиусом верхнего поперечного сечения $r_2 = 0,19$ м. Из этих данных можно рассчитать минимальный объем и максимальную площадь поперечного сечения КА:

$$V = \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = 1,8202 \text{ м}^3 = V_{\min};$$

$$S = \pi R_{\max}^2 = \pi \cdot 1,2^2 = 4,5239 \text{ м}^2 = S_{\max}.$$

Постановка задачи

Традиционным подходом при управлении угловой скоростью спускаемых КА является применение бортовых двигателей, описанное, например, в работе [6].

Следует отметить, что при управлении угловой скоростью КА также часто применяются устройства, основанные на гироскопических или магнитных принципах действия. Например, в работе [7] рассматривалась система управления ориентацией движения КА относительно центра масс, базирующаяся на применении двигателей-маховиков. При этом предполагалось осуществление совместного управления по углам ориентации и по угловой скорости КА. Одним из примеров использования магнитной системы управления ориентацией КА является метод, описанный в работе [8].

В данной работе рассматривается пассивное управление угловой скоростью спускаемого КА в целях обеспечения его стабильной ориентации на этапе его движения в разреженной атмосфере. Управление угловой скоростью КА проводится посредством изменения габаритных размеров верхней (по отношению к набегающему потоку) части корпуса КА, имеющего форму однополостного гиперboloида вращения. При этом рассчитываются значения геометрических и массово-геометрических характеристик КА, получаемые при изменении его габаритных размеров. Для определения значений геометрических и массово-геометрических характеристик КА решается задача нелинейного программирования. Для описания движения КА относительно центра масс применяется главная свя-

занная система координат XYZ . Ось Z данной системы координат является продольной осью симметрии конструкции КА.

Для управления угловой скоростью ω_z КА требуется либо управлять значением момента M_z , либо изменять момент инерции $I_{z1}(a, c, h)$, либо осуществлять совместное изменение обеих этих величины. В работах [6, 7] значением момента M_z управляли посредством использования бортовых двигателей. В данном исследовании предполагается управлять угловой скоростью ω_z посредством изменения момента инерции $I_{z1}(a, c, h)$, наблюдаемого при изменении габаритных размеров КА.

Значение угловой скорости $\omega_z(t)$ определяем из закона сохранения кинетического момента:

$$(I_{z1}(a, c, h, t) + I_{z2})\omega_z(t) = (I_{z1}(a, c, h, 0) + I_{z2})\omega_z(0).$$

Здесь $\omega_z(0)$ — известное начальное значение угловой скорости $\omega_z(t)$; $I_z(a, c, h, 0)$ — известное начальное значение момента инерции $I_z(a, c, h, t)$; I_{z2} — неизменяемый известный суммарный момент инерции посадочного аппарата и теплозащитного щита относительно оси Z .

Следовательно, угловая скорость ω_z равна

$$\omega_z(t) = (I_{z1}(a, c, h, 0) + I_{z2})\omega_z(0) / (I_{z1}(a, c, h, t) + I_{z2}).$$

В целях определения искомых величин V и S , а также для нахождения величины $I_{z1}(a, c, h, t)$ для КА, имеющего верхнюю часть конструкции в форме однополостного гиперболоида с изменяемыми габаритными размерами, сформулируем задачу нелинейного программирования (НЛП). Задача НЛП может быть сформулирована следующим образом: найти вектор параметров $x^T = (a, c)$, такой, чтобы минимизировать скалярную целевую функцию $I_{z1}(a, c, h)$ для каждого значения высоты КА h , учитывая заданные ограничения на объем V и площадь поперечного сечения S половины поверхности однополостного гиперболоида вращения:

$$\begin{aligned} & \min_{a, c} I_{z1}(a, c, h), \\ & \text{при } V \geq V_{\min}, \\ & 0 < S \leq S_{\max}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь V — это объем гиперболоида (для 1/2 его части); V_{\min} — заданное минимальное значение внешнего объема гиперболоида (для 1/2 его части); S — площадь поперечного сечения гиперболоида в наибольшем нижнем сечении,

где $z = h$ (в наибольшем по площади сечении, перпендикулярном оси Z); S_{\max} — заданная наибольшая площадь поперечного сечения гиперболоида, $S_{\max} = \pi R_{\max}^2$; R_{\max} — радиус поверхности с теплозащитным покрытием.

Условие $V \geq V_{\min}$ ограничивает снизу объем гиперболоида значением объема V_{\min} , занимаемого внутренним бортовым оборудованием. Условие $S \leq S_{\max}$ обеспечивает не превышение наибольшей площади поперечного сечения S_{\max} , равной площади термозащитного щита.

Существуют несколько разных методов решения задачи НЛП (1) [9—20]. Остановимся на применении для решения данной задачи метода обхода узлов пространственной сетки [10]. Этот метод заключается в следующем: для каждой неизвестной величины a или c устанавливаем определенный интервал изменения данных величин. Для величины a задаем отрезок $[-A, A]$ или для величины c задаем отрезок $[-C, C]$. Далее выбираем начальную точку с минимальными координатами $a = -A$, и вычисляем в ней исходное значение целевой функции $I_{z1}(a, c, h)$. Затем увеличиваем значение одной из координат на заданный интервал, а остальные координаты оставляем теми же. Таким образом, осуществляется переход от одной точки к другой (на шаг Δa или Δc). Для новой точки также проверяем принадлежность к нужной области (удовлетворение системы ограничений (1)) и вычисляем функционал $I_{z1}(a, c, h)$ при заданной высоте КА h . Далее снова увеличиваем величину a или c на интервал и повторяем расчет и т. д. После достижения границы области меняем значение шага и снова от начальной точки движемся до конца области и т. д. В результате находим значения $\min_{a, c} I_{z1}(a, c, h)$.

При решении задачи НЛП (1) величины h задаем в виде вектора известных длин: $h = \{h_1, h_2, h_3, \dots\}$. При этом значения высоты определяем посредством следующей линейной программной закономерности: $h = h_0 + ht$. Здесь h_0 — известное начальное значение высоты верхней части корпуса КА; h — известное постоянное значение скорости изменения высоты.

Решение задачи нелинейного программирования

Для решения задачи НЛП (1) требуется определить геометрические и массово-гео-

метрические характеристики однополостного гиперboloида вращения, а именно, формулы для объема, для главных осевых моментов инерции и для площади поперечного сечения гиперboloида.

Ниже представлены формулы для объема, площади поперечного сечения и моментов инерции однополостного гиперboloида вращения:

- уравнение поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad (2)$$

- площадь поперечного сечения

$$S = \pi \left(\frac{a}{c} \right)^2 (h^2 + c^2); \quad (3)$$

- объем половины гиперboloида вращения

$$V = \frac{\pi h}{3} (3c^2 + h^2) \left(\frac{a}{c} \right)^2; \quad (4)$$

- главные осевые и центробежные моменты инерции половины гиперboloида вращения

$$I_{z1} = \frac{\rho a^4 \pi}{2c^4} \left(\frac{h^5}{5} + \frac{2}{3} c^2 h^3 + c^4 h \right); \quad (5)$$

$$I_{x1} = I_{y1} = \frac{\rho a^2 \pi}{c^2} \left(\frac{h^5}{5} + \frac{c^2 h^3}{3} \right) + \quad (6)$$

$$+ \frac{\rho a^4 \pi}{4c^4} \left(\frac{h^5}{5} + \frac{2}{3} c^2 h^3 + c^4 h \right); \quad (7)$$

$$I_{xy1} = I_{xz1} = I_{yz1} = 0.$$

Запишем левые части неравенств задачи НЛП (1) в виде соответствующих формул для однородного однополостного гиперboloида вращения, имеющего объем V , площадь поперечного сечения S и момент инерции I_{z1} . В результате получим задачу НЛП в виде

$$\min_{a,c} \frac{\rho a^4 \pi}{2c^4} \left(\frac{h^5}{5} + \frac{2}{3} c^2 h^3 + c^4 h \right);$$

$$\frac{\pi h}{3} (3c^2 + h^2) \left(\frac{a}{c} \right)^2 \geq V_{\min}; \quad (8)$$

$$0 < \pi \left(\frac{a}{c} \right)^2 (h^2 + c^2) \leq S_{\max}.$$

Задача НЛП (8) решается с помощью программного приложения MATLAB. Задачу (8) решаем на интервале высоты КА h от 0,67 м до h_f м, где $h_f = 3V_{\min}/S_{\min}$. Неизвестные величины a и c меняются в диапазоне от 0,1 до 2 м.

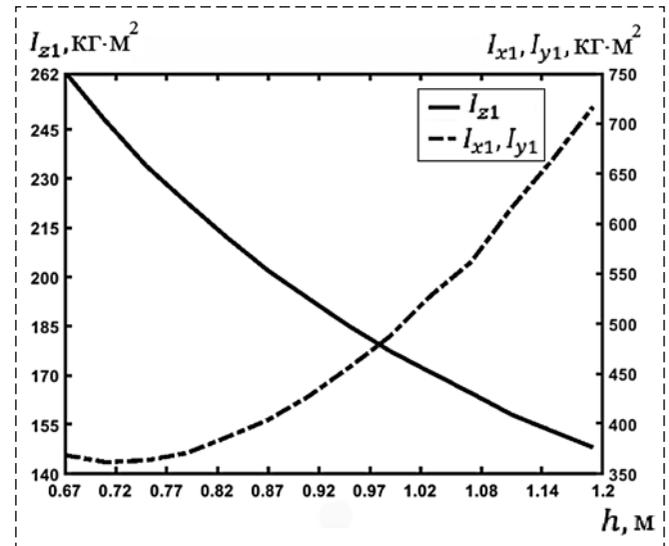


Рис. 2. Зависимости момента инерции I_{z1} и моментов инерции $I_{x1} = I_{y1}$ однополостного гиперboloида от его высоты
Fig. 2. Dependences of the values of the moment of inertia I_{z1} and the moments of inertia $I_{x1} = I_{y1}$ of a one-sheet hyperboloid on its height

На рис. 2 показаны численные результаты в виде зависимостей осевого момента инерции I_{z1} однополостного гиперboloида от его высоты h . Заметим, что момент инерции принимает значения от 262 до 150 кг·м² на интервале изменения высоты от 0,67 до 1,2071 м.

Зависимости осевых моментов инерции $I_{x1} = I_{y1}$ от высоты КА представлены также на рис. 2. Данные моменты инерции увеличиваются от 360 до 710 кг·м² при увеличении высоты КА h от 0,67 до 1,2071 м. Момент инерции I_{z1} аппроксимируется уравнением второго порядка:

$$I_{z1} \cong 0,3284h^2 - 0,9894h + 1,3183,$$

а момент инерции I_{x1} аппроксимируется уравнением третьего порядка:

$$I_{x1} = I_{y1} \cong -535,2h^3 + 2996,4h^2 - 3476,1h + 1511,8.$$

Эти соотношения можно применять при математическом и численном моделировании вращательного движения КА.

Из рис. 2 следует, что при увеличении высоты КА момент инерции I_{z1} уменьшается. Напротив, моменты инерции $I_{x1} = I_{y1}$ при этом увеличиваются. Согласно описанной выше закономерности для угловой скорости $\omega_z(t)$ получаем, что при входе в разряженную атмосферу после увеличения высоты h КА приобретет дополнительную угловую скорость относи-

тельно оси Z . Действительно, если на КА действует только гравитационный момент, то при $I_{x1} = I_{y1}$ относительно оси Z будет выполняться закон сохранения кинетического момента, описанный выше. При этом, если КА ориентирован по набегающему потоку, то такое увеличение угловой скорости относительно оси Z будет способствовать поддержанию заданной ориентации при дальнейшем спуске в атмосфере.

На рис. 3 показаны значения переменных гиперboloида a и c , определяющие минимальное значение осевых моментов инерции I_{z1} и значения моментов инерции $I_{x1} = I_{y1}$. Значение переменной гиперboloида a на рис. 3 уменьшается от 0,8 до 0,6 м, а значение переменной гиперboloида c увеличивается от 0,6 до 1,15 м при увеличении высоты h от 0,7 до 1,2071 м.

На рис. 4 показана зависимость объема однополостного гиперboloида от его высоты h . Следует отметить, что объем гиперboloида уменьшается при повышении высоты h . Указанный объем уменьшается от 5 м^3 до $V_{\min} = 1,82 \text{ м}^3$ на выбранных значениях высот КА.

На рис. 5 показана зависимость площади наибольшего поперечного сечения гиперboloида от высоты h . При увеличении высоты h эта площадь поперечного сечения уменьшается от $S_{\max} = 4,52 \text{ м}^2$ до малых величин, не имеющих практического значения. Отметим, что изме-

нение формы поперечного сечения гиперboloида, расположенного за неизменяемым теплозащитным щитом, может несколько изменять силу лобового сопротивления. Этот вопрос требует отдельного исследования, выходящего за рамки данной работы.

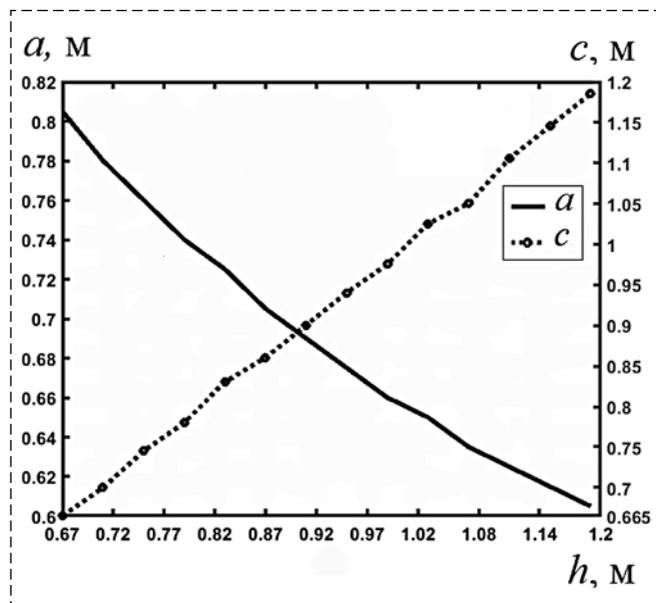


Рис. 3. Зависимость значения переменных однополостного гиперboloида a и c от высоты h
 Fig. 3. Dependence of the values of the variables of a one-sheet hyperboloid a and c on the height h

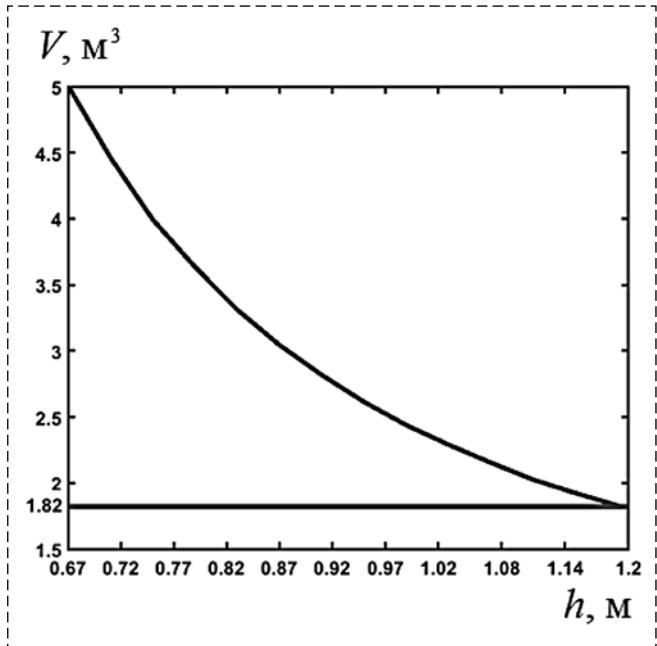


Рис. 4. Зависимость объема однополостного гиперboloида от высоты h
 Fig. 4. Dependence of the volume of a one-sheet hyperboloid on the height h

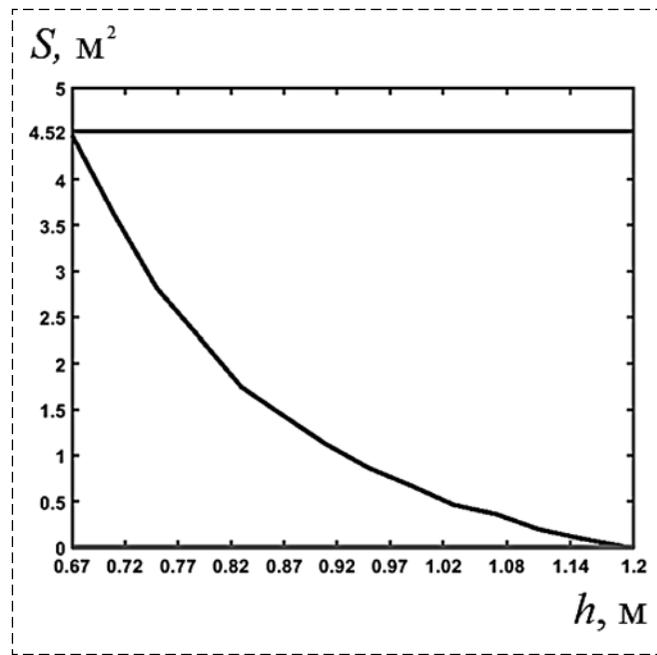


Рис. 5. Зависимость площади поперечного сечения однополостного гиперboloида от высоты h
 Fig. 5. Dependence of the cross-sectional area of a one-sheet hyperboloid on the height h

Методика определения характеристик КА

На основе представленного ранее решения задачи НЛП сформулируем следующую методику определения массовых и массово-геометрических характеристик КА, имеющего изменяемую форму верхней внешней части конструкции в виде однополостного гиперboloида вращения:

1. Выбираем интервалы изменения искомым величин a и c .

2. На основе исходных данных о массе и габаритных размерах КА рассчитываем ограничения V_{\min} и S_{\max} .

3. Задаем набор значений изменения высоты КА.

4. Решаем задачу НЛП.

5. Формируем базу данных значений массовых и массово-геометрических характеристик КА, полученных при различных значениях его габаритных размеров.

Данную методику предполагается применять при моделировании пассивного управления угловой скоростью КА, спускаемого в разреженной атмосфере Марса.

Заключение

На примере КА Mars Polar Lander с использованием метода обхода узлов пространственной сетки решена задача НЛП в целях определения минимального значения массового главного момента инерции I_{z1} при увеличении высоты данного КА в процессе его спуска в разреженной атмосфере Марса.

При расчете предполагалось, что КА имеет верхнюю внешнюю часть конструкции изменяемой формы в виде однополостного гиперboloида вращения. В результате расчета однополостного гиперboloида получено минимальное значение момента инерции I_{z1} для каждого из рассматриваемых значений высоты данного гиперboloида. Программное увеличение высоты верхней внешней части конструкции проводилось согласно линейной зависимости данной высоты от времени движения КА.

Показано, что значение момента инерции I_{z1} уменьшается до некоторого значения при достижении максимально возможного значения высоты КА. При этом площадь поперечного сечения и объем КА уменьшаются до наименьшего значений, а главные моменты инерции $I_{y1} = I_{x1}$ увеличиваются. В результате проис-

ходит увеличение угловой скорости КА относительно оси Z . Изменение угловых скоростей КА относительно осей X и Y не рассматривалось. Предполагалось, что эти две угловые скорости имеют малые начальные значения и в процессе изменений габаритных размеров КА эти значения остаются малыми.

Анализ численных результатов показал, что для решения поставленной задачи по обеспечению эффективного пассивного управления угловой скоростью КА следует применять форму аппарата в виде однополостного гиперboloида вращения. По этой причине использование КА в форме однополостного гиперboloида вращения изменяемой формы является достаточно перспективным для решения поставленной задачи пассивного управления угловой скоростью КА.

Список литературы

1. Ярошевский В. А. Вход в атмосферу космических летательных аппаратов, Москва. Наука, 1988. 336 с.
2. Любимов В. В., Куркина Е. В. Вероятность захвата в резонанс асимметричной капсулы при управляемом спуске в атмосфере Марса // Мехатроника, Автоматизация, Управление. 2017. Т. 18, № 8. С. 564–571.
3. Steinhaus H. Mathematical Snapshots, 3rd ed. New York. Dover Publications, 1999.
4. Hilbert D., Cohn-Vossen S. Geometry and the Imagination. New York: Chelsea Publications, 1999.
5. Mars Polar Lander / Deep Space 2, National aeronautics and space administration (NASA). 1999. 47 p. URL: <https://www2.jpl.nasa.gov/files/misc/mpl-ds2hq.pdf>.
6. Тырнов П. А. Решение задачи управления перемещением центра масс и угловым движением космического аппарата с использованием двигателей ориентации методом наименьших квадратов // XLIV Королевские академические чтения по космонавтике. Т. 17. 2020. С. 177–179.
7. Сыров А. С., Соколов В. Н., Шатский М. А. и др. Способ ориентации космического аппарата и устройство для его реализации. М., ФГУП "Московское опытно-конструкторское бюро "Марс". Патент RU 2514650 C2. 2014.
8. Rodriguez-Vazquez A. L., Martin-Prats M. A., Bernelli-Zazzera F. Spacecraft magnetic attitude control using approximating sequence Riccati equations // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 2015. Vol. 51, Iss. 4. P. 3374–3385.
9. Betts J. T. Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. 458 p.
10. Полуниин И. Ф. Курс математического программирования / учеб. пособ. М.: Высшая школа, 2008. 464 с.
11. Magnus R. H. Optimization Theory. The Finite Dimensional Case. Los Angeles, University of California. Department of Mathematics: John Wiley & Sons, 1975. 461 p.
12. Wenyu S., Yaxiang Y. Optimization Theory and Methods — Nonlinear Programming. Springer Science, 2006. 700 p.
13. Andrei A. A., Morse A. S., Eduardo D. S. et.al. Nonlinear and Optimal Control Theory. Lecture Notes in Mathematics. Cetraro. Italy, Springer Science, 2004. 368 p.
14. Donald E. K. Optimal Control Theory: An Introduction. California, San Jose State University: Dover Publications, 1998. 472 p.

15. **David G. L., Yinyn Y.** Linear and Nonlinear Programming. Stanford University, Springer, 2008. 546 p.

16. **Dimitri P. B.** Nonlinear Programming. Massachusetts Institute of Technology, Athena Scientific, 1999. 372 p.

17. **Mokhtar S. B., Hanif D. S., Shetty C. M.** Solutions Manual to Accompany Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. Department of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology. Atlanta: Wiley, 2013. 175 p.

18. **Paul E. F.** Linear and Nonlinear Programming with Maple — An Interactive, Applications-Based Approach. Grand Valley State University. Michigan: CRC Press, 2010. 402 p.

19. **Городецкий С. Ю.** Лекции по нелинейному математическому программированию. Н. Новгород: Изд. Нижегород. Гос. университета им. Н. И. Лобачевского, 2020. 172 с.

20. **Mordesai A.** Nonlinear Programming: Analysis and Methods. Dover Publications, 2003. 233 p.

Controlled Change in the Dimensions of an Axisymmetric Spacecraft Descending in the Atmosphere of Mars

V. V. Lyubimov, vlyubimov@mail.ru, **I. Bakry**, ibrahimbakry0@gmail.com,
Samara National Research University, Samara, 443086, Russian Federation

Corresponding author: Lyubimov V. V., Chair of the Department of Further Mathematics, D. Sc., Associate Professor, Samara National Research University, Samara, 443086, Russian Federation, e-mail: vlyubimov@mail.ru

Accepted on March 29, 2021

Abstract

In the presented work, a controlled change by dimensions of a spacecraft descending in the atmosphere of Mars is considered. The aim of the work is to obtain a method for calculating the mass and mass-geometric characteristics of a spacecraft when changing its dimensions, which provides angular velocity passive control during the descent of this spacecraft in a low-density atmosphere. In the process of solving this problem, the geometric and mass-geometric characteristics of the descent spacecraft (volume, cross-sectional area, moments of inertia) were calculated. It is assumed that the outer shape of the spacecraft posterior to the incoming flow is a one-sheet rotational hyperboloid, which changes its dimensions during the spacecraft descent in the low-density atmosphere of Mars. As a result of solving the nonlinear programming problem, the minimum and maximum values of the main axial moments of inertia are obtained, which able to spin the spacecraft relative to the longitudinal axis of symmetry. The initial data for solving the nonlinear programming problem are the minimum volume and the maximum cross-sectional area of the hyperboloid, calculated according to the specified intervals of the variable controlling the dimensions of this surface. The method for calculating the mass and mass-geometric characteristics of a spacecraft when changing its dimensions is presented, which makes it possible to control the magnitude of the angular velocity of a symmetric spacecraft in the low-density atmosphere of Mars without the use of onboard jet engines. In particular, it is shown in the work that as the height of the hyperboloid increases, the moment of inertia about the spacecraft longitudinal axis of symmetry decreases, accompanied by an increase in the moments of inertia about the transverse axes of symmetry. It can be shown that in this case there is an increase in the angular velocity of the spacecraft about the longitudinal axis, which makes it possible to achieve a stable orientation of the spacecraft upon entering the atmosphere. However, a more detailed study of the dynamics of the spacecraft relative motion with a changeable shape in the atmosphere is beyond the scope of this work, but it can be presented in further publications.

Keywords: spacecraft, hyperboloid, moment of inertia, nonlinear programming, control, variable dimensions, angular velocity, external shape

For citation:

Lyubimov V. V., Bakry I. Controlled Change in the Dimensions of an Axisymmetric Spacecraft Descending in the Atmosphere of Mars, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 7, pp. 383–390.

DOI: 10.17587/mau.22.383-390

References

1. **Yaroshevsky V. A.** Entering the atmosphere of spacecraft, Moscow, Nauka, 1988, 336 p. (in Russian)

2. **Lyubimov V. V., Kurkina E. V.** The probability of an asymmetric capsule being captured into resonance during a controlled descent in the atmosphere of Mars, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, vol. 18, no. 8. 2017, pp. 564–571.

3. **Steinhaus H.** Mathematical Snapshots, New York, Dover Publications, 1999.

4. **Hilbert D., Cohn-Vossen S.** Geometry and the Imagination, New York, Chelsea Publications, 1999.

5. **Mars Polar Lander / Deep Space 2.** National aeronautics and space administration (NASA), 1999, 47 p., available at: <https://www2.jpl.nasa.gov/files/misc/mpl-ds2hq.pdf>.

6. **Турнов Р. А.** Solving the problem of controlling the displacement of the center of mass and the angular motion of a spacecraft using attitude motors using the least squares method, *XLIV Korolev Academic Readings in Cosmonautics*, 2020, vol. 17, pp. 177–179 (in Russian)

7. **Syrov A. S., Sokolov V. N., Shatskij M. A., Samus P. A., Lashchev A. J.** Method of spaceship orienting and device to this end, Federal State Unitary Enterprise "Moscow Experimental Design Bureau "Mars", Russia, Moscow, Patent RU 2514650 C2, 2014 (in Russian).

8. **Rodriquez-Vazquez A. L., Martin-Prats M. A., Bernelli-Zazzera F.** Spacecraft magnetic attitude control using approximating sequence Riccati equations, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, vol. 51, iss. 4, pp. 3374–3385.
9. **Betts J. T.** Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming, Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009, 458 p.
10. **Polunin I. F.** Course of mathematical programming, Moscow, Vysshaya shkola, 2008, 464 p. (in Russian)
11. **Magnus R. H.** Optimization Theory. The Finite Dimensional Case, Los Angeles, University of California, Department of Mathematics, John Wiley & Sons, 1975, 461 p.
12. **Wenyu S., Yaxiang Y.** Optimization Theory and Methods. Nonlinear Programming, Springer Science, 2006, 700 p.
13. **Andrei A. A., Morse A. S., Eduardo D. S.** et.al. Nonlinear and Optimal Control Theory, Lecture Notes in Mathematics, Cetraro, Italy, Springer Science, 2004, 368 p.
14. **Donald E. K.** Optimal Control Theory: An Introduction, California, San Jose State University, Dover Publications, 1998, 472 p.
15. **David G. L., Yinyu Y.** Linear and Nonlinear Programming, Stanford University, Springer, 2008, 546 p.
16. **Dimitri P. B.** Nonlinear Programming, Massachusetts Institute of Technology, Athena Scientific, 1999, 372 p.
17. **Mokhtar S. B., Hanif D. S., Shetty C. M.** Solutions Manual to Accompany Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, Department of Industrial and Systems Engineering, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Wiley, 2013, 175 p.
18. **Paul E. F.** Linear and Nonlinear Programming with Maple. An Interactive, Applications-Based Approach, Grand Valley State University, Michigan, CRC Press, 2010, 402 p.
19. **Gorodetsky S. Yu.** Lectures on nonlinear mathematical programming, Nizhny Novgorod State University, 2020, 172 p. (in Russian).
20. **Mordecai A.** Nonlinear Programming: Analysis and Methods, Dover Publications, 2003, 233 p.

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5510, (499) 269-5397**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *М. Ю. Безменова*.

Сдано в набор 29.04.2021. Подписано в печать 09.06.2021. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН721. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: www.aov.ru

IV МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

21 - 23 сентября 2021

Санкт-Петербург, Россия



CTS.ETU.RU



IEEE

ИНФОРМАЦИОННОЕ ПИСЬМО

С 21 по 23 сентября 2021 года в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) (Россия, Санкт-Петербург) состоится IV Международная научная конференция по проблемам управления в технических системах (ПУТС-2021).

ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ

- Министерство науки и высшего образования
- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»)
- ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»
- Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН)
- Институт компьютерных технологий и информационной безопасности Южного федерального университета
- Российская Северо-Западная секция IEEE
- ООО «Мицубиси электрик (рус)»
- АО «НПФ «Система-Сервис»
- ООО «Амтел»

Конференция проходит при поддержке Комитета по науке и высшей школе Правительства Санкт-Петербурга.

В дни конференции пройдет молодежная школа им. А.А. Вавилова, ориентированная на молодых ученых, аспирантов и магистров, специализирующихся в области систем управления сложными динамическими объектами. Школа носит имя Члена-корр. Академии Наук СССР, профессора, доктора технических наук Александра Александровича Вавилова и продолжает традиции работы с молодежью, заложенные Великим ученым.

СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

1. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ
4. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В УПРАВЛЕНИИ
5. РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЛЕКСЫ



ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

Пешехонов В.Г., акад. РАН, д.т.н., проф. ген. директор ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор» (Россия) - *сопредседатель*
Шелудько В.Н., д.т.н., ректор СПбГЭТУ «ЛЭТИ» (Россия) - *сопредседатель*
Юсупов Р.М., член-корр. РАН, д.т.н., проф., научный руководитель СПИИРАН (Россия) - *заместитель*
Холод И.И., д.т.н., доц., декан СПбГЭТУ «ЛЭТИ» (Россия) - *заместитель*
Сентябрев Ю.В., к.т.н., доц., декан СПбГЭТУ «ЛЭТИ» (Россия) - *заместитель*

Члены программного комитета:

Альтшуль С.Д., к.т.н., доц. (Россия)
Белый О.В., д.т.н., проф. (Россия)
Бобцов А.А., д.т.н., проф. (Россия)
Веселов Г.Е., д.т.н., проф. (Россия)
Каляев И.А., акад. РАН, д.т.н., проф. (Россия)
Куприянов М.С., д.т.н., проф. (Россия)
Лангманн Райнхард, проф. (Германия)
Лохин В.М., д.т.н., проф. (Россия)
Путов В.В., д.т.н. проф. (Россия)
Растринин В.Л., д-р (Латвия)
Рапопорт Э.Я., д.т.н., проф. (Россия)

Русинов Л.А., д.т.н., проф. (Россия)
Советов Б.Я., д.т.н., проф. (Россия)
Степанов О.А., член-корр. РАН, д.т.н., проф. (Россия)
Уткин Л.В., д.т.н., проф. (Россия)
Филимонов Н.Б., д.т.н., проф. (Россия)
Чистякова Т.Б., д.т.н., проф. (Россия)
Шапошников С.О., к.т.н., доц. (Россия)
Шестопапов М.Ю., д.т.н., доц. (Россия)
Южаков А.А., д.т.н. проф. (Россия)
Dr.Sc. Minav Tatiana, Aalto University, Espoo (Finland)
Dr.Sc. Heikkinen Jani, independent researcher, (Finland)

ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ

Тупик В.А., д.т.н., проф. (Россия) - *председатель*
Шестопапов М.Ю., д.т.н., доц. (Россия) - *зам. председателя*
Члены организационного комитета
Кораблев Ю.А., к.т.н., доц. (Россия)
Котова Е.Е., к.т.н., доц. (Россия)
Каплун Д.И., к.т.н., доц. (Россия)
Скаун А.Д., к.т.н., доц. (Россия)
Журавлева О.Н. (Россия)

Участники осуществляют регистрацию на конференцию на cts.etu.ru

КАЛЕНДАРЬ КОНФЕРЕНЦИИ

Загрузка в личный кабинет экспертного заключения на право публикации в открытой печати, акта идентификационной экспертизы.

После получения подтверждения следует оплатить организационный взнос и загрузить квитанцию об оплате в личный кабинет.

По результатам рецензирования докладов Российской Северо-Западной секцией IEEE возможна передача докладов участников конференции (на английском языке) в электронную библиотеку IEEE Xplore. Информация для участников конференции, претендующих на размещение доклада в IEEE Xplore размещена на cts.etu.ru

ОРГВЗНОС

включает публикацию одного доклада объемом 4 стр. и/или предоставление сборника докладов при регистрации участников конференции.

- 6 500 руб. - публикация в РИНЦ
- 9 500 руб. - публикация в IEEE Xplore и РИНЦ

ДО 28 ИЮНЯ

Авторы размещают тексты докладов на русском и английском языках, а также файл с информацией, необходимой для размещения в РИНЦ, в личном кабинете. Объем доклада - 4 страницы. Один автор может опубликовать не более двух докладов.

ДО 5 ИЮЛЯ

Осуществляется рецензирование докладов членами программного комитета. Оргкомитетом будет выслан ответ с подтверждением о принятии доклада к публикации на e-mail докладчика, указанный при регистрации.

ДО 19 ИЮЛЯ

ДО 9 АВГУСТА

ДО 23 АВГУСТА

Просим прислать на e-mail irvc.eltech@mail.ru подтверждение приезда на конференцию докладчиков и соавторов.

ДО 6 ОКТЯБРЯ

Работа конференции.

21-23 СЕНТЯБРЯ

Для размещения в IEEE Xplore доклад должен быть сделан очно.

CTS.ETU.RU



ОРГКОМИТЕТ: 197376, СПб., ул. Проф. Попова, 5, СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
Центр конференций (ЦК)

+7 (812) 346-46-37
IRVC.eltech@mail.ru