

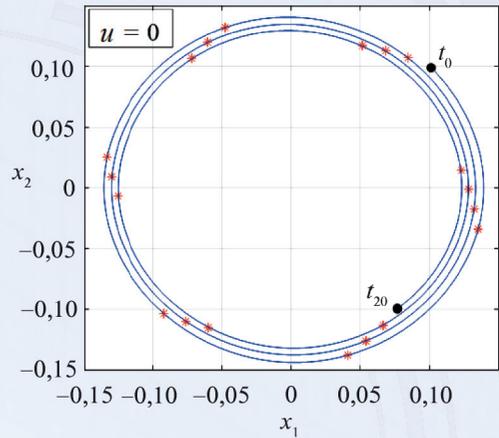
# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ



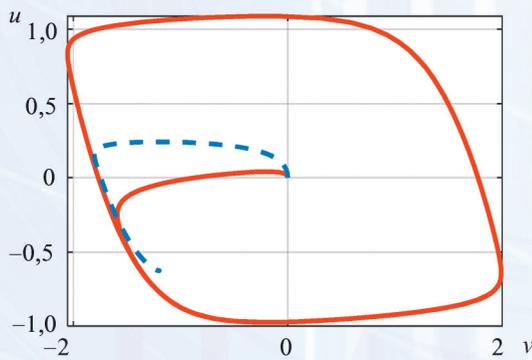
Том 22  
2021  
№ 6

Рисунок к статье А. Р. Гайдука  
 «ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА  
 КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ  
 НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ»

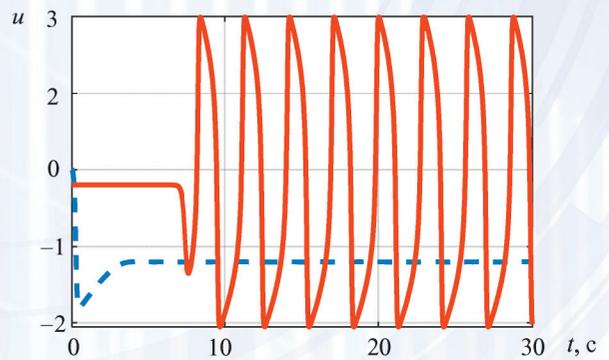
Фазовые траектории  
 Phase trajectories



Рисунки к статье А. А. Кабанова, С. А. Дубовика  
 «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ РЕДКИХ СОБЫТИЙ  
 В НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ»



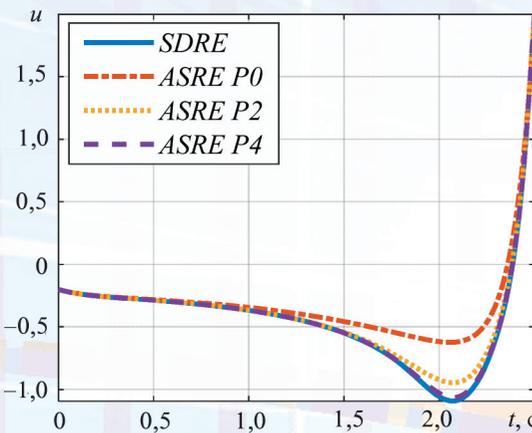
а)



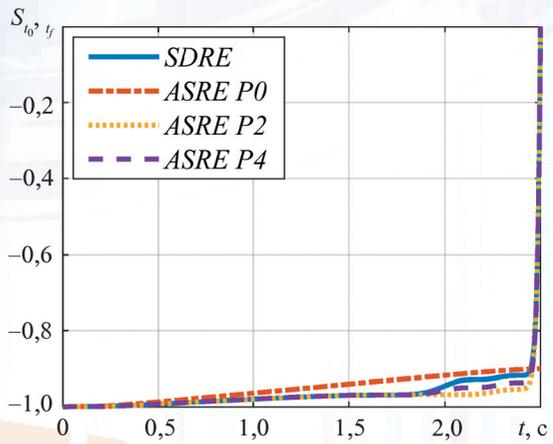
б)

Рис. 1. Фазовая плоскость (а) и динамика активатора (б)

Fig. 1. Phase plane (a) and dynamics of the activator (b)



а)



б)

Рис. 2. Случай 1: динамика активатора (а) и функционала действия (б)

Fig. 2. Case 1: dynamics of the activator (a) and the action functional (b)

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 22

2021

№ 6

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print)

ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Главный редактор:**  
ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

**Заместители главного редактора:**  
БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.  
ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.  
ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

**Ответственный секретарь:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционный совет:**  
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН  
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН  
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН  
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН  
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН  
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН  
КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН  
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН  
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН  
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН  
СИГОВ А. С., акад. РАН  
СОЙФЕР В. А., акад. РАН  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН  
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН  
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН  
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН  
ШЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН  
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

**Редколлегия:**  
DORANTES D. J., PhD, Турция  
GROUMPOS P. P., PhD, Греция  
ISIDORI A., PhD, Италия  
KATALINIC B., PhD, Австрия  
LIN CH.-Y., PhD, Тайвань  
MASON O. J., PhD, Ирландия  
ORTEGA R. S., PhD, Франция  
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США  
STRZELECKI R. M., PhD, Польша  
SUBUDHI B. D., PhD, Индия  
АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан  
ГАРАЩЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина  
БОБЦОВ А. А., д.т.н.  
БУКОВ В. Н., д.т.н.  
ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.  
ЖУКОВ И. А., д.т.н.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.  
ЛОХИН В. М., д.т.н.  
МАГОМЕДОВ М. Х., д.ф.-м.н.  
ПУТОВ В. В., д.т.н.  
ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.  
РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.  
СЕРГЕЕВ С. Ф., д.п.с.н.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.  
ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.  
ФУРСОВ В. А., д.т.н.

**Редакция:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Директор издательства:**  
АНТОНОВ Б. И.

## СОДЕРЖАНИЕ

### СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

**Гайдук А. Р.** Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов .....283

**Кабанов А. А., Дубовик С. А.** Численные методы контроля редких событий в нелинейных стохастических системах .....291

**Жирибок А. Н., Ким Ч. И.** Виртуальные датчики в задаче функционального диагностирования .....298

### РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

**Kurochkin S. Yu., Tachkov A. A.** Methods of Formation Control for a Group of Mobile Robots (a Review) .....304

**Лурье М. С., Лурье О. М., Фролов А. С.** Исследование динамических режимов систем стабилизации тока мощных электромагнитов с широтно-импульсной модуляцией .....313

### ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

**Левский М. В.** Динамическая задача оптимального управления ориентацией космического аппарата с ограничением на фазовые переменные .....321

**Зубов Н. Е., Рябенко В. Н.** Инвариантность управления боковым движением вертолета по углу крена. Аналитический синтез .....331

*Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в МНБД Scopus и RSCI (на платформе Web of Science).*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

# MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



## MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Editor-in-Chief**

FILIMONOV N. B.

**Deputy Editors-in-Chief:**

BOLSHAKOV A. A.

PODURAEV Yu. V.

YUSCHENKO A. S.

**Responsible Secretary:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Editorial Board:**

ANSHAKOV G. P.

BOLOTNIK N. N.

CHENTSOV A. G.

CHERNOUSKO F. L.

FEDOROV I. B.

KALYAEV I. A.

KURZHANSKI A. B.

KUZNETSOV N. A.

PESHEKHONOV V. G.

REZCHIKOV A. F.

SCHERBATYUK A. F.

SEBRYAKOV G. G.

SIGOV A. S.

SOJFER V. A.

SOLOMENTSEV Yu. M.

VASSILYEV S. N.

YUSUPOV R. M.

ZHELTOV S. Yu.

**Editorial Council:**

ALIEV T. A., Azerbaijan

DORANTES D. J., PhD, Turkey

GARASCHENKO F. G., Ukraine

GROUMPOS P. P., PhD, Greece

ISIDORI A., PhD, Italy

KATALINIC B., PhD, Austria

LIN CH.-Y., PhD, Taiwan

MASON O. J., PhD, Ireland

ORTEGA R. S., PhD, France

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA

STRZELECKI R. M., PhD, Poland

SUBUDHI B. D., PhD, India

BOBTSOV A. A.

BUKOV V. N.

ERMOLOV I. L.

FILARETOV V. F.

FRADKOV V. L.

FURSOV V. A.

ILYASOV B. G.

KOROSTELEV V. F.

LEBEDEV G. N.

LOKHIN V.M.

MAGOMEDOV M. Kh.

PUTOV V. V.

PSHIKHOPOV V. Kh.

RAPOPORT E. Ya.

SERGEEV S. F.

ZHUKOV I. A.

**Editorial Staff:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Director of the Publishing House:**

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

## CONTENTS

### SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

- Gaiduk A. R.** Numerical Design Method of Quasilinear Models for Nonlinear Objects . . . . . 283
- Kabanov A. A., Dubovik S. A.** Numerical Methods for Monitoring Rare Events in Nonlinear Stochastic Systems . . . . . 291
- Zhirabok A. N., Kim C.** Virtual Sensors in the Fault Diagnosis Problem . . . . . 298

### ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

- Kurochkin S. Yu., Tachkov A. A.** Methods of Formation Control for a Group of Mobile Robots (a Review) . . . . . 304
- Lur'e M. S., Lur'e O. M., Frolov A. S.** Study of Dynamic Modes of Current Stabilization Systems of Powerful Electromagnets with Pulse-Width Modulation . . . . . 313

### DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

- Levskii M. V.** Dynamic Problem of Optimal Control of Spacecraft Attitude under Restriction on Phase Variables . . . . . 321
- Zubov N. E., Ryabchenko V. N.** Lateral Motion Control Invariance Helicopter on the Roll Angle. Analytical Synthesis . . . . . 331

Information about the journal is available online at:  
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

А. Р. Гайдук, д-р техн. наук, проф., gaiduk\_2003@mail.ru,  
ФГАОУ ВО Южный федеральный университет, г. Таганрог

## Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов\*

*Большинство современных методов синтеза нелинейных систем управления нелинейными объектами предполагают преобразование исходной модели объекта к некоторым специальным формам. При этом целесообразно использовать квазилинейные модели, так как они могут быть синтезированы при условии лишь дифференцируемости нелинейностей исходных моделей объектов. Эти модели позволяют найти управление аналитически, т. е. в результате решения некоторой системы уравнений, если объект, естественно, удовлетворяет условию управляемости. Традиционно квазилинейные модели нелинейных объектов синтезируются аналитически путем взятия частных производных от нелинейностей исходной модели и последующего интегрирования этих производных по вспомогательной переменной с применением известных формул дифференцирования и интегрирования. Однако во многих случаях нелинейности объекта имеют настолько сложный характер, что операции дифференцирования и, в особенности, интегрирования довольно трудно выполнить указанным способом.*

*Эта сложность может быть преодолена путем применения нового численного метода синтеза квазилинейных моделей, который исключает необходимость аналитического дифференцирования и интегрирования, но требует выполнения значительного числа арифметических операций. Однако в настоящее время это не является большой проблемой, так как современные многопроцессорные контроллеры могут выполнить все необходимые операции за короткое время. Разработанный метод позволяет получить достаточно точную приближенную кусочно-постоянную квазилинейную модель объектов со сложными нелинейностями. Такие модели удобно применять при цифровом управлении нелинейными объектами. Эффективность численного метода показана путем сравнения фазовых портретов кусочно-постоянной квазилинейной и нелинейной моделей простого объекта, а также путем сравнения значений переменных состояния этих моделей. Предложенный метод может применяться при синтезе нелинейных систем управления нелинейными, обладающими сложными характеристиками объектами в кораблестроительной, авиационной, химической, сельскохозяйственной и других отраслях.*

**Ключевые слова:** нелинейный объект, сложная нелинейность, квазилинейная модель, функциональный коэффициент, аналитический метод синтеза, численный метод синтеза

### Введение

Математические модели нелинейных объектов очень часто являются системами нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, т. е. имеют форму Коши [1–3]. Ввиду очень большого разнообразия нелинейностей синтез систем управления на основе этих моделей сильно затруднен даже в тех случаях, когда нелинейности являются дифференцируемыми по всем своим аргументам. Значительное разнообразие нелинейностей привело к разработке ряда методов синтеза систем управления нелинейными объектами. Как правило, эти методы являются аналитическими, т. е. искомые математические модели нелинейных устройств управления находятся с применением некоторых преобразований исходных нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ) объектов

управления [4–12]. Некоторые из этих методов рассмотрены в работе [13]. При этом каждый из методов синтеза, как правило, ориентирован на преобразование исходных ДУ объекта управления (ОУ) к определенной форме, что требует соответствующего нелинейного, взаимобратного преобразования переменных состояния. Основной трудностью применения большинства этих методов является сложность как проверки условий существования решения задачи синтеза тем или иным методом, так и поиска подходящего нелинейного преобразования.

Одним из наиболее простых, аналитических методов синтеза нелинейных систем управления является метод квазилинейных моделей [11, 13]. Условиями возможности его применения являются управляемость модели ОУ, дифференцируемость ее правых частей по всем переменным и измеримость всех переменных состояния с помощью датчиков. Естественно, если последнее условие не выполняется, то, как обычно, применяются наблюдатели переменных состояния [1, 14].

\*Работа выполнена в ЮФУ при поддержке РФФИ, проект № 19-08-01226.

Известный аналитический метод создания квазилинейных моделей (КЛМ) нелинейных объектов на основе их нелинейных ДУ предполагает определение первых частных производных от правых частей этих уравнений и последующее интегрирование этих производных по вспомогательной переменной [11, 13]. Однако в некоторых случаях нелинейности объектов управления описываются очень сложными выражениями, так что определение их частных производных с использованием известных формул дифференцирования представляет собой достаточно сложную задачу. Еще более сложной задачей в этих случаях оказывается интегрирование полученных выражений по вспомогательной переменной.

Разработка нового метода синтеза КЛМ, исключаящего необходимость дифференцирования и интегрирования сложных нелинейных функций с использованием известных формул, является целью данной работы.

### Постановка задачи

Чтобы полнее показать основные особенности синтеза КЛМ известным аналитическим методом, рассмотрим подробнее его основные этапы [13]. Эти модели одномерных (SISO) нелинейных объектов в векторно-матричной форме имеют вид

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u, \quad y = c^T(x)x + d(x)u, \quad (1)$$

где  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  — вектор состояния,  $u$  — управление,  $y$  — управляемая переменная;  $A(x)$  и  $b(x)$ ,  $c(x)$  — функциональные матрица и векторы:

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$b(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}, \quad c(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{bmatrix},$$

$d(x)$  — скаляр.

Функциональные коэффициенты матрицы и векторов (2) и скаляр  $d(x)$  определяются по нелинейным моделям объектов, которые в общем случае имеют вид

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x; u), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad y = \psi(x; u). \quad (3)$$

Подчеркнем, что основным условием существования квазилинейных моделей типа (1), (2) нелинейных объектов (3) является диффе-

ренцируемость нелинейных функций  $\varphi_i(x, u)$  и  $\psi(x, u)$  по всем аргументам.

Таким образом, для достижения цели работы необходимо найти способы определения коэффициентов матрицы  $A(x)$ , векторов  $b(x)$ ,  $c(x)$  и скаляра  $d(x)$  КЛМ нелинейных объектов, заданных уравнениями (3) с существенно сложными нелинейными правыми частями. При этом не должны использоваться известные формулы дифференцирования и интегрирования.

### Аналитический метод синтеза КЛМ

В данном случае в соответствии с работой [13] определяются с применением известных формул дифференцирования [15, 16] частные производные

$$\varphi'_{ij}(x; u) = \frac{\partial \varphi_i(x; u)}{\partial x_j}, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (4)$$

$$\varphi'_{iu}(x; u) = \frac{\partial \varphi_i(x; u)}{\partial u}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\psi'_j(x; u) = \frac{\partial \psi(x; u)}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5)$$

$$\psi'_u(x; u) = \frac{\partial \psi(x; u)}{\partial u}.$$

При этом очень часто могут выполняться следующие условия:

$$\varphi'_{iu}(x, u) = \varphi'_{iu}(x, 0), \quad i = \overline{1, n}; \quad (6)$$

$$\psi'_u(x, u) = \psi'_u(x, 0).$$

Как видно, при выполнении условий (6) производные по управлению функций  $\varphi_i(x, u)$  и  $\psi(x, u)$  из соотношений (3) не зависят от управления  $u$ . Этот момент важен с точки зрения решения задачи синтеза нелинейных САУ для объектов (3).

Далее определяются функциональные коэффициенты  $a_{ij}(x)$  и  $c_j(x)$  матрицы  $A(x)$  и вектора  $c(x)$  из уравнения (1) по следующим формулам:

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 \varphi'_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \theta x_j, 0, \dots, 0; 0) d\theta, \quad (7)$$

$$i, j = \overline{1, n};$$

$$c_j(x) = \int_0^1 \psi'_j(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \theta x_j, 0, \dots, 0; 0) d\theta, \quad (8)$$

$$j = \overline{1, n}.$$

Здесь и ниже при  $j = 1$  переменные  $x_0$  и  $\tilde{x}_0$  опускаются из соответствующих выражений.

Порядок определения коэффициентов  $b_j(x)$  и скаляра  $d(x)$  зависит от того, выполняются условия (6) или не выполняются. Если эти условия не выполняются, то используются выражения

$$b_i(x) = \int_0^1 \varphi'_{iu}(x; \theta u) d\theta, \quad i = \overline{1, n};$$

$$d(x) = \int_0^1 \psi'_u(x; \theta u) d\theta. \quad (9)$$

При выполнении условий (6) вектор  $b(x)$  и скаляр  $d(x)$  оказываются не зависящими от управления  $u$  и находятся значительно проще:

$$b_i(x) = \varphi'_{iu}(x; 0), \quad i = \overline{1, n}; \quad d(x) = \psi'_u(x, 0). \quad (10)$$

Определение коэффициентов  $b_i(x)$  и скаляра  $d(x)$  по соотношениям (9) или (10) на свойствах КЛМ (1), (2) не сказывается: и в том, и в другом случае квазилинейная модель (1), (2), (7)–(10) является точным представлением нелинейной модели (3).

Для большей ясности идеи и особенностей численного метода синтеза КЛМ сначала покажем порядок применения аналитического метода синтеза КЛМ на примере следующей скалярной функции:

$$\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1^3x_2^2 + 5x_2^2 + 6 \sin x_1 + 7. \quad (11)$$

В данном случае функция имеет два аргумента, поэтому ее квазилинейная модель типа (1) имеет вид

$$\varphi_{\text{КЛМ}}(x) = [a_1(x) \ a_2(x)] \cdot x + \varphi(0), \quad (12)$$

где  $x = [x_1 \ x_2]^T$  — вектор столбец;  $\cdot$  — здесь и далее знак скалярного произведения векторов.

Для получения КЛМ (12), очевидно, достаточно найти два функциональных коэффициента  $a_1(x)$  и  $a_2(x)$ . В соответствии с приведенными выше выражениями, прежде всего, находятся частные производные от функции (11) по ее аргументам:

$$\varphi'_1(x) = 6x_1 + 12x_1^2x_2^2 + 6 \cos x_1;$$

$$\varphi'_2(x) = 8x_1^3x_2 + 10x_2 = (8x_1^3 + 10)x_2. \quad (13)$$

Далее, опустим в выражении (7) индекс  $i$ , положим  $j = 1$  и подставим первое выражение (13) в (7) с заменой переменной  $x_1$  на  $\theta x_1$ , а переменной  $x_2$  — на 0. В результате, интегрируя по переменной  $\theta$ , имеем:

$$a_1(x) = \int_0^1 (6\theta x_1 + 6 \cos \theta x_1) d\theta =$$

$$= 6x_1 \frac{\theta^2}{2} \Big|_0^1 + 6 \frac{\sin \theta x_1}{x_1} \Big|_0^1 = 3x_1 + 6 \frac{\sin x_1}{x_1}. \quad (14)$$

Аналогично, подставив второе выражение (13) в соотношение (7) при  $j = 2$ , т. е. не изменяя  $x_1$ , заменим переменную  $x_2$  на  $\theta x_2$  и, интегрируя по переменной  $\theta$ , получим:

$$a_2(x) = \int_0^1 (8x_1^3 + 10)\theta x_2 d\theta =$$

$$= (8x_1^3 + 10)x_2 \frac{\theta^2}{2} \Big|_0^1 = 4x_1^3x_2 + 5x_2. \quad (15)$$

В данном случае  $\varphi(0) = 7$ , поэтому из выражения (12) с учетом (14) и (15) вытекает следующая квазилинейная модель нелинейной функции (11):

$$\varphi_{\text{КЛМ}}(x) =$$

$$= \left[ 3x_1 + 6 \frac{\sin x_1}{x_1} \quad 4x_1^3x_2 + 5x_2 \right] \cdot x + 7. \quad (16)$$

Выполнив в (16) скалярное умножение векторов, мы получим точное выражение рассматриваемой функции (11), за исключением порядка записи слагаемых. Это подтверждает, что любая КЛМ, построенная аналитическим методом [3, 11, 13], является точным представлением соответствующей нелинейной дифференцируемой функции.

### Численный метод синтеза КЛМ

Как видно, в основе аналитического метода синтеза КЛМ лежит необходимость, прежде всего, дифференцирования нелинейных функций уравнений нелинейных объектов. Далее будем иметь в виду случаи, когда эти нелинейности настолько сложны, что найти производные (4), (5), с применением известных формул, а затем выполнить интегрирование в выражениях (7)–(9), также с применением известных формул [15, 16], очень трудно. Именно в случае таких объектов с существенно сложными нелинейностями рекомендуется применять предлагаемый в данной работе численный метод. Его основная особенность состоит в том, что определяются не сами частные производные (4), (5) нелинейностей, а дискретные значения этих производных в том виде, в котором они используются в выражениях (7)–(10).

Применительно к уравнениям (3) значения соответствующих частных производных, следуя Л. Эйлеру, можно найти по формулам

$$\varphi'_{ij}(x) \approx [\varphi_i(x_1, \dots, x_{(j-1)}, x_j + \Delta x, 0, \dots, 0; 0) - \varphi_i(x_1, \dots, x_{(j-1)}, x_j, 0, \dots, 0; 0)] / \Delta x; \quad (17)$$

$$\varphi'_{iu}(x; u) \approx \frac{\varphi_i(x; u + \Delta u) - \varphi_i(x; u)}{\Delta u}; \quad (18)$$

$$\psi'_{ij}(x) \approx [\psi(x_1, \dots, x_{(j-1)}, x_j + \Delta x, 0, \dots, 0; 0) - \psi(x_1, \dots, x_{(j-1)}, x_j, 0, \dots, 0; 0)] / \Delta x; \quad (19)$$

$$\psi'_{iu}(x, u) \approx \frac{\psi(x, u + \Delta u) - \psi(x, u)}{\Delta u}. \quad (20)$$

Значения производных  
Derivatives values

$x_1$	$\varphi'_1(x_1, 0)$	$\Delta_x$		
		0,1	0,01	0,001
		$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0)$	$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0)$	$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0)$
0	6	6	6	6
0,5	8,2655	8,1229	8,2511	8,2641
1,0	9,2418	8,9940	9,2166	9,2393
1,25	9,3919	9,1141	9,2166	9,3891
$\pi/2$	9,4248	9,1348	9,2166	9,4218

Здесь  $i, j = \overline{1, n}$ ;  $\Delta_x \neq 0, \Delta_u \neq 0$  — малые приращения.

Отметим, что если по выражениям (17)—(20) осуществлять вычисления при  $\Delta_x \rightarrow 0$  и  $\Delta_u \rightarrow 0$ , то, как известно, результаты будут приближаться к точным значениям частных производных [15]. Конечно, реализация вычислений при  $\Delta_x \rightarrow 0, \Delta_u \rightarrow 0$  является достаточно затруднительной. Однако на практике это и не требуется, так как обычно достаточно найти значения некоторой величины с необходимой точностью. В настоящее время, когда решение нелинейных дифференциальных уравнений осуществляется с помощью ЭВМ, вполне возможно получать достаточно точные приближенные значения производных по формулам (17)—(20) при малых приращениях  $\Delta_x$  и  $\Delta_u$ . В этом случае выражения (1), (2) будут представлять, конечно, КЛМ с некоторыми погрешностями.

Найдем теперь коэффициенты  $a_1(x)$  и  $a_2(x)$  из КЛМ (12) численным методом, т.е. с применением соотношений (17)—(20). Так как функция  $\varphi(x)$  (11) скалярная, то для этой цели достаточно воспользоваться формулой (17), опуская  $i$  и полагая  $n = 2$ . Приближенное значение производной  $\varphi'_1(x_1, 0)$  по этой формуле имеет вид

$$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0) \approx [3(x_1 + \Delta_x)^2 + 6 \sin(x_1 + \Delta_x) - 3(x_1)^2 - 6 \sin x_1] / \Delta_x$$

или

$$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0) \approx 6x_1 + 3\Delta_x + 6[\sin(x_1 + \Delta_x) - \sin x_1] / \Delta_x. \quad (21)$$

Воспользовавшись разложением в ряд функции  $\sin(x_1 + \Delta_x)$  [16, с. 79; 415.07]:

$$\sin(x_1 + \Delta_x) = \sin x_1 + \Delta_x \cos x_1 - (\Delta_x^2 \sin x_1 / 2! + \Delta_x^3 \cos x_1 / 3!) + \dots$$

и ограничиваясь в этом ряде четырьмя слагаемыми, из выражения (21) получим

$$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0) \approx 6(x_1 + \cos x_1) + 3\Delta_x(1 - \sin x_1) - \Delta_x^2 \cos x_1. \quad (22)$$

Совершенно аналогично по формуле (17) при  $j = 2$  находится выражение для производной

$$\tilde{\varphi}'_2(x_1, x_2) \approx (8x_1^3 + 10)(x_1 + \Delta_x / 2). \quad (23)$$

Из первого выражения (13) при  $x_2 = 0$  следует:  $\varphi'_1(x_1, 0) = 6(x_1 + \cos x_1)$ . Сравнив это выражение с (22), а второе выражение (13) — с (23), придем к заключению, что погрешности соотношения (17) и аналогичных ему соотношений (18)—(20) уменьшаются с уменьшением приращений  $\Delta_x$  и  $\Delta_u$ . Для количественной оценки по-

грешности и влияния на нее приращений  $\Delta_x$  в табл. 1 приведены значения точной производной  $\varphi'_1(x_1, 0)$  (13) и ее приближенные значения  $\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0)$ , вычисленные по формуле (21), с помощью MATLAB при некоторых значениях  $x_1$  и  $\Delta_x$ . Из приведенных в этой таблице данных следует очевидный вывод: для получения достаточно точных значений производных необходимо приращения  $\Delta_x$  и  $\Delta_u$  выбирать малыми. В данном случае при  $\Delta_x = 0,001$  ошибка  $\delta_\varphi = |\varphi'_1(x_1, 0) - \tilde{\varphi}'_1(x_1, 0)| / \varphi'_1(x_1, 0) \cdot 100\%$  не превышает 0,032 %, а при  $\Delta_x = 0,01$  не превышает 0,32 %.

Для определения коэффициентов  $a_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , из КЛМ (12), как видно из выражений (7) или (14), (15), необходимо заменить переменную  $x_i$  на  $\theta x_i$  и проинтегрировать полученные выражения по  $\theta$  в пределах от 0 до 1. Учитывая, что по формулам (17)—(20) вычисляются дискретные значения производных, логично операцию интегрирования заменить суммированием [15]. В результате при  $\Delta_\theta = \Delta_x = 1/N$  из выражений (7), (11) и (17), как и выше, опуская  $i$  и полагая  $j = 1, 2$ , получим при  $x_i \neq 0, i = 1, 2$ :

$$a_1(x) \approx \frac{1}{x_1} \times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[ \varphi \left( \frac{(\mu+1,5)}{N} x_1, 0 \right) - \varphi \left( \frac{(\mu+0,5)}{N} x_1, 0 \right) \right]; \quad (24)$$

$$a_2(x) \approx \frac{1}{x_2} \times$$

$$\sum_{\mu=0}^{N-1} \left[ \varphi \left( x_1, \frac{(\mu+1,5)}{N} x_2 \right) - \varphi \left( x_1, \frac{(\mu+0,5)}{N} x_2 \right) \right].$$

Здесь  $N$  — число подынтервалов  $\Delta_\theta = 1/N$ , на которые разбивается интервал интегрирования в соотношениях (7)—(9). Отметим, что при  $x_i = 0, a_i(x) = 0, i = 1, 2$ , что допустимо в соответствии с определением КЛМ.

Подставив выражения (24) в (12), получим приближенную КЛМ нелинейной функции (11), найденную численным методом, без "взя-

тия" частных производных и интегрирования по формулам дифференцирования и интегрирования. Подробный вывод выражений (24) приведен в Приложении.

Вернемся к синтезу квазилинейных моделей (1), (2) нелинейных объектов (3) предлагаемым численным методом. По аналогии с построением выражений (24), заменяя в равенствах (7)–(10) частные производные их приближенными выражениями (17)–(20), а операцию интегрирования — суммированием [15] при  $\Delta_\theta = \Delta_x = \Delta_u = 1/N$ , придем к следующим выражениям:

$$a_{ij}(\tilde{x}) = \frac{1}{\tilde{x}_j} \times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[ \varphi_i \left( \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{(j-1)}, \frac{(\mu+1,5)}{N} \tilde{x}_j, 0, \dots, 0; 0 \right) - \varphi_i \left( \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{(j-1)}, \frac{(\mu+0,5)}{N} \tilde{x}_j, 0, \dots, 0; 0 \right) \right]; \quad (25)$$

$$c_j(\tilde{x}) = \frac{1}{\tilde{x}_j} \times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[ \psi \left( \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{(j-1)}, \frac{(\mu+1,5)}{N} \tilde{x}_j, 0, \dots, 0; 0 \right) - \psi \left( \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{(j-1)}, \frac{(\mu+0,5)}{N} \tilde{x}_j, 0, \dots, 0; 0 \right) \right]. \quad (26)$$

Здесь  $\tilde{x}_j \neq 0$ ,  $j = \overline{1, n}$ . При  $\tilde{x}_j = 0$   $a_{ij}(\tilde{x}) = c_j(\tilde{x}) = 0$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . Определение коэффициентов  $b_i(\tilde{x})$  и скаляра  $d(\tilde{x})$ , как и в случае аналитического метода, зависит от выполнимости условий (6). Если эти условия *не выполняются*, то используются выражения

$$b_i(\tilde{x}) = \frac{1}{u_{-1}} \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[ \varphi_i \left( \tilde{x}, \frac{(\mu+1,5)}{N} u_{-1} \right) - \varphi_i \left( \tilde{x}, \frac{(\mu+0,5)}{N} u_{-1} \right) \right]; \quad (27)$$

$$d(\tilde{x}) \approx \frac{1}{u_{-1}} \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[ \psi \left( \tilde{x}, \frac{(\mu+1,5)}{N} u_{-1} \right) - \psi \left( \tilde{x}, \frac{(\mu+0,5)}{N} u_{-1} \right) \right], \quad (28)$$

где  $i = \overline{1, n}$ ,  $u_{-1} \neq 0$ ; при  $u_{-1} = 0$   $b_i(\tilde{x}) = d(\tilde{x}) = 0$ .

Если же условия (6) *выполняются*, то вместо (27), (28) используются выражения

$$b_i(\tilde{x}) \approx [\varphi_i(\tilde{x}; u_{-1} + \Delta_u) - \varphi_i(\tilde{x}; u_{-1})] / \Delta_u, \quad i = \overline{1, n}; \quad (29)$$

$$d(\tilde{x}) = [\psi(\tilde{x}, u_{-1} + \Delta_u) - \psi(\tilde{x}, u_{-1})] / \Delta_u, \quad \Delta_u \neq 0.$$

*Примечание.* В выражениях (25)–(29)  $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$  — вектор состояния КЛМ, коэффициенты которой найдены численным методом.

Этот вектор, как отмечалось выше, отличается от вектора  $x(t)$  исходной нелинейной модели;  $u_{-1}$  — это значение управления, предшествующее его текущему значению  $u_k$ . Возможность его использования обусловлена тем, что при использовании ЭЦВМ формируются только дискретные значения управления:  $u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots$

Полученные соотношения (25)–(29) являются расчетными соотношениями численного метода синтеза КЛМ (1), (2) нелинейных объектов с существенно сложными нелинейностями. Формально модель (1), (2), (25)–(29) является непрерывной, так как ее функциональные коэффициенты определены при всех значениях вектора  $\tilde{x}$ . Однако практически эти коэффициенты могут быть вычислены только лишь при дискретных значениях вектора  $\tilde{x}$ . Поэтому КЛМ этого типа, фактически, могут использоваться только как кусочно-постоянные, в том смысле, что, если их коэффициенты вычисляются с периодом  $T_B$ , то на интервалах времени  $t \in [kT_B, (k+1)T_B]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , эти коэффициенты являются постоянными. Их значения в этом случае определяются значениями вектора состояния КЛМ  $\tilde{x}(kT_B)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . При этом, если ее вектор состояния  $\tilde{x}(t)$  квантуется по времени тоже с периодом  $T_B$ , а время вычисления коэффициентов КЛМ (1), (2), (25)–(29) меньше  $T_B$ , то эти модели оказываются дискретными квазилинейными моделями нелинейных объектов (3) следующего вида:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= A(\tilde{x}_k) \tilde{x}_k + b(\tilde{x}_k) u_k, \\ \tilde{y}_k &= c^T(\tilde{x}_k) \tilde{x}_k + d(\tilde{x}_k) u_k, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$  Такие модели являются очень удобными при цифровом управлении.

Для оценки эффективности предложенного численного метода синтеза КЛМ рассмотрим нелинейный объект второго порядка (исключительно для наглядности) с одной нелинейностью [17], который описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \varphi_1(x_2); \\ \dot{x}_2 &= u - x_2^3 - (1 + |x_2|) \sin x_1 = \varphi_2(x, u); \\ y &= x_1, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $x = [x_1 \ x_2]^T$ . В данном случае нелинейной является лишь функция  $\varphi_2(x, u)$ , а управление входит в нее линейно, поэтому КЛМ объекта (31), построенная численным методом, имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}(\tilde{x}) & a_{22}(\tilde{x}) \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \ 0] \tilde{x}, \quad (32)$$

т. е. для определения КЛМ достаточно найти лишь коэффициенты  $a_{21}(\tilde{x})$  и  $a_{22}(\tilde{x})$ . В соответствии с формулой (25) при  $n = 2$ ,  $i = 2$  и  $\tilde{x}_j \neq 0$ ,  $j = 1, 2$  получаем:

$$a_{21}(\tilde{x}) \approx \frac{1}{\tilde{x}_1} \times \left[ -\sin\left(\frac{\mu+1,5}{N}\tilde{x}_1\right) + \sin\left(\frac{\mu+0,5}{N}\tilde{x}_1\right) \right]; \quad (33)$$

$$a_{22}(\tilde{x}) = \frac{1}{\tilde{x}_2} \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[ -\left(\frac{\mu+1,5}{N}\tilde{x}_2\right)^3 + \left(1 + \left|\frac{\mu+1,5}{N}\tilde{x}_2\right|\right) \sin \tilde{x}_1 + \left(\frac{\mu+0,5}{N}\tilde{x}_2\right)^3 + \left(1 + \left|\frac{\mu+0,5}{N}\tilde{x}_2\right|\right) \sin \tilde{x}_1 \right]. \quad (34)$$

Как и выше, при  $\tilde{x}_j = 0$   $a_{2j}(\tilde{x}) = 0$ ,  $j = 1, 2$ . Подставив выражения (33) и (34) в первое равенство (32), получим КЛМ объекта (31).

Моделирование моделей (31) и (32)–(34), некоторые результаты которого приведены на рисунке (см. вторую сторону обложки) и в табл. 2, проводилось в среде MATLAB в целях сравнения фазовых траекторий и значений выходной величины при различных значениях  $N$ . Приведенная на рисунке непрерывная фазовая траектория построена по нелинейным уравнениям (31), а звездочками обозначены точки также непрерывной траектории, построенной по квазилинейной модели (32)–(34) при начальных условиях  $x_{10} = \tilde{x}_{10} = x_{20} = \tilde{x}_{20} = 0, 1$ . Коэффициенты КЛМ вычислялись через каждые  $T_B = 0,01$  с при  $N = 1000$  и  $u = 0$ , но на рисунке для наглядности фиксировалась только каждая сотая точка этой траектории, т. е. звездочки на рисунке соответствуют моментам времени  $t = 0, 1, 2, \dots, 20$  с. Очевидно, в данном случае КЛМ (32)–(34) является кусочно-постоянной, так как ее коэффициенты на интервалах времени  $t \in 0,01(k, k+1)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  являются постоянными. Интегрирование уравнений (31) и (32)–(34) на каждом из этих интервалов осуществлялось функцией ODE 45 при соответствующих начальных условиях:  $\tilde{x}_{10}^{k+1} = \tilde{x}_1(0,01k)$ ,  $\tilde{x}_{20}^{k+1} = \tilde{x}_2(0,01k)$ .

Как видно на рисунке (см. вторую сторону обложки), точки траектории КЛМ (32)–(34)

Таблица 2  
Table 2

Отклонения переменных, %  
Deviations of variables, %

N	t, с					
	3	6	9	12	15	18
250	0,08	0,16	0,26	0,37	0,49	0,64
500	0,17	0,18	0,28	0,40	0,53	0,70
750	0,09	0,18	0,29	0,41	0,55	0,62

достаточно близки к соответствующим точкам траектории непрерывной системы (31).

Для количественного сравнения КЛМ (32)–(34) с нелинейной моделью (31) вычислялись отклонения переменной  $\tilde{x}_1$  квазилинейной модели от переменной  $x_1$  нелинейной модели на интервале времени в 20 с. Эти переменные и их отклонения являются колебательными, поэтому в табл. 2 приведены значения отклонений  $\delta(t) = [|x_1(t) - \tilde{x}_1(t)|/x_1(t)] \cdot 100\%$  в процентах от текущего значения  $x_1(t)$ , соответствующие моментам времени  $t = 3k_1$ ,  $k_1 = 1, 2, 3, \dots$ , при которых эти отклонения близки к максимальным значениям.

На основе результатов моделирования можно заключить, что численный метод, в отличие от аналитического, приводит к приближенным КЛМ, однако отклонения их траекторий от траекторий исходных нелинейных моделей достаточно малы. При этом значения приращения  $\Delta_{\tilde{x}} = \Delta_u = 1/N$ , с которым происходит приближенное вычисление частных производных и их интегрирование, мало влияет на эти отклонения.

Однако время расчета значений переменных состояния по КЛМ существенно зависит от  $N$ . Так, интегрирование нелинейной модели (31) при  $0 \leq t \leq 20$  с в среде MATLAB составляет 0,66 с, в то время как интегрирование КЛМ (32)–(34) при  $N = 100$  составляет 6,33 с. Увеличение времени расчета обусловлено необходимостью расчетов функциональных коэффициентов КЛМ по формулам (25)–(29), однако его не трудно уменьшить до приемлемых значений за счет применения многопроцессорных микроконтроллеров, ориентированных на параллельные вычисления.

## Заключение

Таким образом, полученные выражения (25)–(29) позволяют численным путем найти достаточно точную КЛМ нелинейных объектов, заданных уравнениями (3), которые содержат существенно сложные нелинейности. Сложность указанных нелинейностей обусловлена трудностью взятия их частных производных и интегрирования этих производных по известным формулам дифференцирования и интегрирования.

В соответствии с выражениями (25)–(29) разработанный численный метод синтеза КЛМ позволяет привести математические модели объектов (3) с неаддитивным управлением, т. е. при невыполнении условий (6), к приближенной КЛМ, аддитивной по управлению. Это позволяет очень простой аналитический метод синтеза гурвицевых систем управления нелинейными объектами, разработанный для аддитивных по управлению нелинейных объ-

ектов [13], применять и в случае неаддитивных по управлению нелинейных объектов кораблестроительной, авиационной, химической, сельскохозяйственной и других отраслей.

### Приложение

*Вывод формул численного синтеза КЛМ.* Для большей ясности рассмотрим функцию  $\varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, x_2)$ , аналогичную функции (11), но при  $\varphi_i(0) = 0$ . В этом случае  $n = 2$ , поэтому, как и выше, необходимо найти два коэффициента  $a_{ij}(x)$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда по формуле (7) при  $j = 1$  имеем

$$a_{i1}(x) = \int_0^1 \varphi'_i(x_1, 0) \Big|_{x_1=\theta x_1} d\theta = \int_0^1 \varphi'_i(\theta x_1, 0) d\theta, \quad (\text{П.1})$$

где  $\varphi'_i(x_1, 0) = \partial \varphi_i(x_1, 0) / \partial x_1$ . Для взятия интеграла в (П.1) проведем замену, полагая  $x_1 \neq 0$ :

$$\begin{aligned} a_{i1}(x) &= \int_0^1 \varphi'_i(\theta x_1, 0) d\theta = \left| \begin{matrix} \theta x_1 = z, \\ d\theta = dz/x_1 \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} \varphi'_i(z, 0) dz \approx \frac{1}{x_1} \sum_{\mu=0}^{N-1} \varphi'_i(z_\mu, 0) \Delta z. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Здесь  $N$  — число отрезков шириной  $\Delta_\theta$ , на которое разбит интервал интегрирования по  $\theta$ , равный 1, а  $z_\mu$  — середины соответствующих отрезков по переменной  $z$ . Пусть  $\Delta_\theta = 1/N$ , тогда заменяя  $x_1$  на  $\tilde{x}_1$ , получим  $\Delta_z = \tilde{x}_1 \Delta_\theta = \tilde{x}_1/N$ . Выберем  $z_\mu = (\mu + 0,5)\Delta_z$ , тогда  $z_\mu = (\mu + 0,5)\tilde{x}_1/N$ . Следовательно, из выражения (П.2) вытекает равенство

$$a_{i1}(\tilde{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \varphi'_i(z_\mu, 0). \quad (\text{П.3})$$

Значения частной производной  $\varphi'_i(z, 0)$  в точках  $z_\mu$  будем определять по формуле

$$\varphi'_i(z_\mu, 0) \approx \frac{\varphi_i(z_\mu + \Delta_z, 0) - \varphi_i(z_\mu, 0)}{\Delta_z}.$$

Отсюда, с учетом приведенных выше выражений для  $z_\mu$  и  $\Delta_z$ , имеем

$$\begin{aligned} &\varphi'_i(z_\mu, 0) \approx \\ &\approx \left[ \varphi_i \left( \frac{\mu + 1,5}{N} \tilde{x}_1, 0 \right) - \varphi_i \left( \frac{\mu + 0,5}{N} \tilde{x}_1, 0 \right) \right] \frac{N}{\tilde{x}_1}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Подставляя (П.4) в (П.3), по-прежнему при  $\tilde{x}_1 \neq 0$ , получим

$$\begin{aligned} a_{i1}(\tilde{x}) &= \frac{1}{\tilde{x}_1} \times \\ &\times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[ \varphi_i \left( \frac{\mu + 1,5}{N} \tilde{x}_1, 0 \right) - \varphi_i \left( \frac{\mu + 0,5}{N} \tilde{x}_1, 0 \right) \right]. \end{aligned}$$

По аналогии при  $\tilde{x}_2 \neq 0$ , очевидно, можно записать

$$\begin{aligned} a_{i2}(\tilde{x}) &= \frac{1}{\tilde{x}_2} \times \\ &\times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[ \varphi_i \left( \tilde{x}_1, \frac{\mu + 1,5}{N} \tilde{x}_2 \right) - \varphi_i \left( \tilde{x}_1, \frac{\mu + 0,5}{N} \tilde{x}_2 \right) \right]. \end{aligned}$$

При  $n > 2$  вывод проводится аналогично.

### Список литературы

1. **Isidori A.** Nonlinear control systems II. Berlin, Springer, 1999.
2. **Lantos B., Marton L.** Nonlinear control of vehicles and robots. London, Springer-Verlag, 2011.
3. **Neydorf R. A., Gaiduk A. R., Kudinov N. V.** Application of cut-gluе approximation in analytical solution of the problem of nonlinear control design // Cyber-Physical systems: Industry 4.0 Challenges. Studies in Systems, Decision and Control. 2020. Vol. 260. P. 117–132.
4. **Zhu Y., Zhongsheng H.** Controller dynamic linearisation-based model-free adaptive control framework for a class of nonlinear system // IET Control Theory & Applications. 2015. Vol. 9, N. 7. P. 1162–1172.
5. **Sun H., Li S., Yang J., Zheng W.** Global output regulation for strict-feedback nonlinear systems with mismatched nonvanishing disturbances // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. Vol. 25, N. 15. P. 2631–2645.
6. **Lanzon A., Chen H.-J.** Feedback stability of negative imaginary systems // IEEE Transactions on automatic control. 2017. Vol. 62, N. 11. P. 5620–5633.
7. **Xia M., Antsaklis P., Gupta V., Zhu F.** Passivity and dissipativity analysis of a system and its approximation // IEEE Transactions on automatic control. 2016. Vol. 62, N. 2. P. 620–635.
8. **Rahnama A., Xia M., Antsaklis P. J.** Passivity-based design for event-triggered networked control systems // IEEE Transactions on automatic control. 2018. Vol. 63, N. 9. P. 2755–2770.
9. **Фургат И. Б., Туличин Е. А.** Модифицированный алгоритм бэкстепинга для нелинейных систем // АиТ. 2016. № 9. С. 70–83.
10. **Ascencio P., Astolfi T., Parisini T.** Backstepping PDE Design: A convex optimization approach // IEEE Transactions on automatic control. 2018. Vol. 63, N. 7. P. 1943–1958.
11. **Гайдук А. Р.** Полиномиальный синтез нелинейных систем управления // АиТ. 2003. № 10. С. 144–148.
12. **Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю.** Синтез систем управления подводными аппаратами с нелинейными характеристиками исполнительных органов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 3(104). С. 147–156.
13. **Gaiduk A. R.** Nonlinear control systems design by transformation method // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2018. Vol. 19, N. 12. P. 755–761.
14. **Гайдук А. Р.** Оценивание переменных состояния нелинейных систем // АиТ. 2004. № 1. С. 3–13.
15. **Фихтенгольц Г. М.** Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1, 2. М.: Наука, 1969.
16. **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие формулы: пер. с англ. Н. В. Леви / Под ред. К. А. Семендяева. М.: Наука. 1978.
17. **Топчеев Ю. И., Цыплаков А. П.** Задачник по теории автоматического регулирования. Учеб. Пособ. для вузов. М.: Машиностроение, 1977.

# Numerical Design Method of Quasilinear Models for Nonlinear Objects

A. R. Gaiduk, gaiduk\_2003@mail.ru,  
Southern Federal University, Taganrog, 347922, Russian Federation

Corresponding author: **Gaiduk Anatoly R.**, Dr. of Sci., Professor, Southern Federal University,  
Taganrog, 347922, Russian Federation, e-mail: gaiduk\_2003@mail.ru

Accepted on March 09, 2021

## Abstract

Design modern methods of nonlinear control systems of nonlinear objects in the majority assume transformation of initial object model to some special forms. In these cases, it is reasonable to use quasilinear models as they can be designed on condition only of differentiability of the nonlinearities of the initial objects models. These models allow to find control analytically, i.e. as a result of the solution of some equations system, if the object, naturally, meets the controllability condition. The quasilinear models are synthesized traditionally analytically, by transformation of initial nonlinear models using operation of the taking of partial derivatives from the nonlinearities of the initial objects models and the subsequent integration of these derivatives on the auxiliary variable with application of the known formulas of differentiation and integration. However, in many cases, the objects nonlinearities have so complicated character, that the operations of the differentiation and, in particular, the integration are executed very difficult by shown way. This complexity can be overcome by application of the new numerical design method of the quasilinear models, which excludes need of the analytical differentiation and integration, but demands considerable number of the arithmetic operations. But now it is not the big problem since the modern multiprocessor controllers can carry out all the necessary operations for a short time. The developed method allows to receive rather exact, approximate piecewise-constant quasilinear models for the objects with the complicated nonlinearities. It is convenient to apply such models at numerical control of the nonlinear objects. The efficiency of a numerical method is shown by comparison of phase portraits of piecewise constant quasilinear and nonlinear models of a simple object and also by comparison of the state variables values of these models. The offered method can be applied to nonlinear control systems design for the nonlinear, characterized by complicated characteristics objects ship, aviation, chemical, agricultural and other industries.

**Keywords:** nonlinear object, complicated nonlinearity, quasilinear model, functional coefficient, analytical design method, numerical design method

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-08-01226.

For citation:

**Gaiduk A. R.** Numerical Design Method of Quasilinear Models for Nonlinear Objects, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 283–290.

DOI: 10.17587/mau.22.283-290

## References

1. **Isidori A.** Nonlinear control systems II, Berlin, Springer, 1999.
2. **Lantos B., Marton L.** Nonlinear control of vehicles and robots, London, Springer-Verlag, 2011.
3. **Neydorf R. A., Gaiduk A. R., Kudinov N. V.** Application of cut-glide approximation in analytical solution of the problem of nonlinear control design, *Cyber-Physical systems: Industry 4.0 Challenges. Studies in Systems, Decision and Control*, 2020, vol. 260, pp. 117–132.
4. **Zhu Y., Zhongsheng H.** Controller dynamic linearisation-based model-free adaptive control framework for a class of non-linear system, *IET Control Theory & Applications*, 2015, vol. 9, no. 7, pp. 1162–1172.
5. **Sun H., Li S., Yang J., Zheng W.** Global output regulation for strict-feedback nonlinear systems with mismatched nonvanishing disturbances, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, vol. 25, no. 15, pp. 2631–2645.
6. **Lanzon A., Chen H.-J.** Feedback stability of negative imaginary systems, *IEEE Transactions on automatic control*, 2017, vol. 62, no. 11, pp. 5620–5633.
7. **Xia M., Antsaklis P., Gupta V., Zhu F.** Passivity and dissipativity analysis of a system and its approximation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, vol. 62, no. 2, pp. 620–635.
8. **Rahnama A., Xia M., Antsaklis P. J.** Passivity-based design for event-triggered networked control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, vol. 63, no. 9, pp. 2755–2770.
9. **Furtat I. B., Tupichin E. A.** The modified backstepping algorithm for nonlinear systems, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2016, no. 9, pp. 70–83 (in Russian).
10. **Ascencio P., Astolfi T., Parisini T.** Backstepping PDE design: a convex optimization approach, *IEEE Transactions On Automatic Control*, 2018, vol. 63, no. 7, pp. 1943–1958.
11. **Gaiduk A. R.** Polynomial design of nonlinear control systems, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2003, no. 10, pp. 144–148 (in Russian).
12. **Pshikhopov V. H., Medvedev M. Yu.** Control systems design of submarine ship with nonlinear characteristics of executive units, *Izvestiya YUFU. Tekhnicheskie Nauki*, 2010, no. 3(104), pp. 147–156 (in Russian).
13. **Gaiduk A. R.** Nonlinear control systems design by transformation method, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 12, pp. 755–761.
14. **Gaiduk A. R.** Estimation of nonlinear systems state variables, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2004, no. 1, pp. 3–13 (in Russian).
15. **Fikhtengolts G. M.** Differential and integral calculus, vol. 1,2, Moscow, Nauka, 1969.
16. **Dvait G. B.** Integral tables and other formulas: translation from English N. V. Levi, Under editorship of K. A. Semendyaev, Moscow, Nauka, 1978 (in Russian).
17. **Topcheev Yu. I., Tsyplakov A. P.** Book of problems according to automatic control theory. Manual for higher education institutions, Moscow, Mashinostroenie, 1977 (in Russian).

А. А. Кабанов, канд. техн. наук, доц., kabanovaleksey@gmail.com,

С. А. Дубовик, д-р техн. наук, проф., duboviksa@gmail.com,

Севастопольский государственный университет

## Численные методы контроля редких событий в нелинейных стохастических системах\*

*Рассматриваются вопросы разработки численных методов анализа больших отклонений для контроля редких событий в нелинейных стохастических системах. Большие отклонения управляемого процесса от некоторого штатного состояния являются основой прогнозирования наступления критической ситуации (редкого события). Задача прогнозирования сводится к задаче оптимального управления Лагранжа—Понтрягина. Представленный в статье подход для решения задачи Лагранжа—Понтрягина отличается от подхода, использованного ранее для линейных и нелинейных систем, тем, что он использует управление в форме обратной связи. При этом в нелинейном случае используются приближенные методы расчета, основанные на представлении модели системы в форме пространства состояний, где коэффициенты матриц зависят от состояния системы (методы State-Dependent Coefficients, SDC). В статье использованы два SDC-метода — метод зависящего от состояния уравнения Риккати (state-dependent Riccati equation, SDRE) и метод асимптотической последовательности уравнений Риккати (asymptotic sequence of Riccati equations, ASRE). В рассматриваемой постановке эти методы позволяют получить численно-аналитическое решение, удобное для реализации в режиме реального времени. На основе разработанных методов анализа больших отклонений представлены алгоритмы оценки вероятности наступления редкого события для нелинейной стохастической системы. Численная применимость разработанного подхода в настоящей работе показана на примере модели ФитцХью—Нагумо (ФХН) для анализа переключения между режимами возбудимости. Результаты моделирования вскрыли дополнительную проблему, связанную с так называемой задачей параметризации SDC-матриц системы. Действительно, можно было бы ожидать, что различные SDC-матрицы приводят к одному и тому же результату, но практические примеры показывают, что это не так. Поскольку использование разных представлений для SDC-матриц дает разные результаты в терминах траектории системы и функционала качества, то выбор матриц предложено осуществлять на каждой итерации алгоритма так, чтобы обеспечить условия разрешимости задачи Лагранжа—Понтрягина.*

**Ключевые слова:** большие отклонения, редкое событие, нелинейная система, оптимальное управление, зависящий от состояния коэффициент

### Введение

Динамические системы, даже когда они рассматриваются как детерминированные, обычно испытывают воздействие небольших случайных возмущений. При этом малый шум может в какой-то момент существенно повлиять на динамику, например, переводя штатный процесс в неустойчивый. Такие редкие события, как отклонения от номинально устойчивых состояний или переходы между метастабильными состояниями, актуальны в прикладных задачах анализа и управления. Поэтому важно обеспечить непрерывный мониторинг этих событий в режиме реального времени с выдачей вероятностных оценок их наступления.

Для численного определения подобных событий можно использовать управляемое движение системы, которое делает редкие события более вероятными [1, 2]. Этот подход используется совместно с инструментами теории больших отклонений (ТБУ) и оптимального управления для оценки вероятности того, что наблюдаемые в динамической системе состояния через некоторое время превысят заданный порог (наступит редкое событие). Детерминированную систему, соответствующую такому управляемому движению к редкому нежелательному событию, при-

нято называть системой путей [3]. Ее роль состоит в том, чтобы возможные пути к рассматриваемому состоянию различать по затраченной на это энергии управления. Метод больших отклонений позволяет установить асимптотическую связь минимального значения определенного функционала энергии (функции действия) с вероятностью наступления события. Таким образом, система путей дает возможность провести оценку вероятности больших отклонений, определяя некоторую задачу оптимального управления и ее предельное решение как профиль развития критической ситуации (А-профиль [3]).

В линейном случае указанный подход особенно эффективен, поскольку позволяет получить аналитическое решение соответствующей задачи оптимального управления, что особенно важно для систем реального времени. Например, в работе [4] показано решение в форме программного управления, а в статье [5] приведены некоторые результаты по решению в форме обратной связи. В нелинейном случае все существенно сложнее именно в силу того, что приходится искать предельную экстремаль как единственное ограниченное решение на всей прямой [4]. Поэтому в данной работе предлагаются итерационные численные схемы, где выполняется некоторая форма приближения к решению. Одной из групп таких приближенных методов являются методы с использованием параметров, зависящих от состояния (State-Dependent Coefficients) [6—9].

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, грант № 21-11-00202.

Широко известный метод зависящего от состояния уравнения Риккати (SDRE) является достаточно простым и эффективным, особенно для задач на бесконечном интервале времени [6, 7]. Этот метод рассматривает исходную нелинейную задачу оптимального управления поточечно в виде задачи о линейно-квадратичном регуляторе (LQR). В результате набор задач LQR решается последовательно в каждый момент времени, на которые дискретизируется вся временная область. Однако нестационарность управления для задач на конечном интервале времени приводит к следующей проблеме: точное решение задачи невозможно без знания будущих состояний системы, которые неизвестны в текущий момент времени. В работе [10] предложен приближенный алгоритм, использующий гипотезу о слабом изменении вектора состояния (гипотеза "замороженных" коэффициентов).

Другой подход для синтеза нелинейного оптимального управления на конечном интервале времени представлен методом аппроксимированной последовательности уравнений Риккати (ASRE) [8, 9]. Этот метод приводит к итерационному решению ряда LQR-задач. Для каждой текущей LQR-задачи матрицы системы оцениваются с помощью решения на предыдущей итерации. Важно, что при этом не возникает ситуации, требующей использовать "замораживание" коэффициентов, что является преимуществом метода. Вероятно, для задач на конечном интервале времени метод ASRE превосходит метод SDRE с точки зрения оптимальности решения (см. например, [8]). Данные результаты подтверждают эффективность обоих методов и актуальность исследований в области их развития и практического применения.

В настоящей работе рассматриваются вопросы разработки численных методов анализа больших уклонений для контроля редких событий динамических систем на основе решения соответствующих задач оптимального управления. Особенность постановки задачи оптимального управления как задачи точного терминального приведения на конечном интервале времени при отсутствии штрафа на состояние системы в функционале действия позволяет получить численно-аналитическое решение задачи, что особенно актуально для реализации в режиме реального времени.

Данный подход к анализу больших уклонений становится естественным инструментом для получения количественной информации о редких событиях, представляющих интерес. Его численная применимость в настоящей работе показана на примере модели ФитцХью—Нагумо (ФХН) [11]. Решению задач моделирования, управления и анализа режимов модели ФХН

посвящены работы многих исследователей. Так, в работе [1] показан пример анализа влияния возмущений в начальных условиях на возникновение больших уклонений, уводящих модель ФХН из состояния равновесия. Применение метода стохастической функции чувствительности для анализа возбудимости для модели ФХН показано в статье [12]. Этот метод был предложен для вероятностного описания стохастических аттракторов в контексте техники квазипотенциалов ТБУ. Анализ времени выхода на основе ТБУ для редуцированной одномерной модели ФХН приведен в работе [13]. В настоящей работе будет рассмотрено применение разработанных численных методов для анализа переключения возбудимых режимов модели ФХН.

### Теория больших уклонений и постановка задачи

Рассматривается замкнутая нелинейная динамическая система

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

возмущенная добавлением небольшого шума

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\dot{\mathbf{w}} \in R^r$  — вектор "белого шума";  $\varepsilon > 0$  — малый параметр;  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  — гладкие матричные функции,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = 0$ ,  $\forall t \in R$ .

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  с вероятностью, стремящейся к 1, траектории возмущенной системы приближаются к траекториям невозмущенной системы на любом конечном интервале времени. При малом, но фиксированном  $\varepsilon$  интерес представляют траектории системы (2), которые далеки от траекторий (1). Это события, вероятности которых близки к нулю, но при этом можно выделить те из них, которые в подавляющем большинстве случаев более вероятны, чем другие. Оценка вероятностей таких редких событий, называемых большими уклонениями, включает вариационную постановку, тесно связанную с динамикой возмущенной системы.

Затратность движения вдоль некоторого заданного пути  $\bar{\varphi}$  измеряется квадратичным критерием  $S_{t_0, t_f}$  от управляющих воздействий  $\mathbf{v} \in R^r$ , заменяющих шумы в исходной системе (2) при переходе к системе путей:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3)$$

где  $S_{t_0, t_f}$  является функционалом действия:

$$S_{t_0, t_f}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{v}^T \mathbf{v} dt. \quad (4)$$

Таким образом, глобальные свойства системы (2) описываются с помощью системы путей (3), учитывая, прежде всего, возможность отклонений состояния системы (2) от нуля в направлении границы  $\partial_D$  эксплуатационной области  $D \subset O_\chi$  ( $D$  — открытое множество,  $O_\chi$  — область притяжения аттрактора,  $\chi$  — состояние устойчивого равновесия (аттрактор) невозмущенной системы (1)).

Для множества  $D$  и системы (3) справедливо равенство [14]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P\{\mathbf{x} \in R^n / D\} = -\min_{\boldsymbol{\varphi} \in D} S_{t_0, t_f}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}), \quad (5)$$

где функционал  $S_{t_0, t_f}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v})$  определен соотношением (4) на решениях управляемой системы (3), для которой указывается еще граничное условие выхода в критическое состояние к моменту времени  $t_f$ :

$$\mathbf{y}(t_f) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t_f) \in \partial_D, \quad (6)$$

где  $\mathbf{C}$  — матрица полного ранга.

Вероятность в равенстве (5) можно оценить через решение задачи оптимального управления (задача Лагранжа—Понтрягина): на решениях системы путей (3) минимизировать функционал действия (4) при граничном условии (6).

### Решение задачи Лагранжа—Понтрягина

**Случай линейной системы.** В линейном случае

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{B}$$

система путей (3) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_0. \quad (7)$$

Сформулируем для нее задачу минимизации критерия (4) в условиях ограничений (6).

Решение задачи (7), (4), (6) в форме обратной связи можно получить по аналогии с работой [15] с учетом небольшой модификации:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T \mathbf{C}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{W}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}(t_f)), \quad (8)$$

где

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W} = -\mathbf{W}\mathbf{A}, \quad \mathbf{W}(t_f) = \mathbf{I}, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = -\mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T \mathbf{C}^T, \quad \mathbf{M}(t_f) = 0. \quad (10)$$

Для данной линейной задачи матрицы  $\mathbf{W}(t)$  и  $\mathbf{M}(t)$  можно представить в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_f-t)}, \\ \mathbf{M}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{W}(t)\mathbf{D}\mathbf{W}^T(t) - \mathbf{D})\mathbf{C}^T, \end{aligned} \quad (11)$$

где матрица  $\mathbf{D}$  является решением алгебраического уравнения Ляпунова

$$\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0. \quad (12)$$

Соотношение (11) для  $\mathbf{M}(t)$  следует из равенства

$$\begin{aligned} & -\int_{t_f}^t \mathbf{W}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T d\tau = \\ & = \int_{t_f}^t \frac{d}{d\tau} \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^T d\tau = \mathbf{W}(t)\mathbf{D}\mathbf{W}^T(t) - \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно проверить, взяв производную:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^T &= \frac{d}{dt} \mathbf{W} \cdot \mathbf{D}\mathbf{W}^T + \mathbf{W}\mathbf{D} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{W}^T = \\ &= -\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T)\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T. \end{aligned}$$

Минимальное значение функционала (4) — нормализованный функционал действия:

$$S_{t_0, t_f} = (\mathbf{C}\mathbf{W}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}(t_f))^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{W}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}(t_f)) \Big|_{t=t_0}. \quad (13)$$

Применим управление (8) к системе (7):

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}_{CL} \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{G}\mathbf{y}(t_f), \quad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_0,$$

$$\mathbf{A}_{CL} = \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{W}, \quad (14)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T \mathbf{C}^T \mathbf{M}^{-1}.$$

Решение уравнения (14) определяет  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ :

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{CL}t} \boldsymbol{\varphi}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{CL}(t-\tau)} \mathbf{G}\mathbf{y}(t_f) d\tau.$$

Решение данной линейной задачи дает аналитические выражения для управления в форме обратной связи, для профиля развития критической ситуации (А-профиль) и для минимального значения критерия качества, а следовательно, и для оценки вероятности. Условие существования этого решения — управляемость пары  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  и гурвицевость матрицы  $\mathbf{A}$ .

Опишем кратко алгоритм оценки вероятности наступления редкого события на базе описанного решения линейной задачи.

### Алгоритм 1 (линейный случай)

Шаг 1. Решить уравнение (12) для  $\mathbf{D}$ .

Шаг 2. Вычислить  $\mathbf{W}(t)$  и  $\mathbf{M}(t)$  с помощью соотношений (11).

Шаг 3. Вычислить управление  $\mathbf{v}$  с использованием (8).

Шаг 4. Применить управление  $\mathbf{v}$  к системе путей (7) и определить  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ .

Шаг 5. Вычислить функционал действия  $S_{t, t_f}$  через (13) и получить вероятностную меру из (5):  $\ln P^*\{\mathbf{x} \in R^n / D\} = -\varepsilon^{-2} S_{t, t_f}$ .

Шаг 6. Если вектор  $\mathbf{x}(t)$  состояния системы (2) находится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  системы путей, то в случае  $P^* > \rho$ , где  $\rho$  — заданное пороговое значение вероятности наступления редкого события, приходим к выводу, что редкое событие произойдет.

**Случай нелинейной системы. SDRE-техника.** В нелинейном случае рассматриваем систему путей (3), которую представляем в SDC-форме:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (15)$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}).$$

Решение задачи (15), (4), (6) в форме обратной связи, полученное с помощью SDRE-метода и "замораживания" коэффициентов, имеет вид уравнений (8)–(10), в которых, следуя гипотезе "замороженных" коэффициентов [10],  $\forall \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , обозначим  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$ ,  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})$ .

Заметим, что для расчета матриц  $\mathbf{W}(t)$  и  $\mathbf{M}(t)$  можно использовать аналитические соотношения (11), (12), которые рассчитываются при текущих значениях вектора состояния от текущего времени  $t$  до конечного времени  $t_f$  на каждом шаге. Условие существования этого решения — поточечная управляемость пары  $(\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}))$  и гурвицевость матрицы  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}) \forall \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

Таким образом, шаги, перечисленные ниже в алгоритме 2, должны быть выполнены для анализа вероятности больших отклонений в режиме реального времени на основе метода SDRE.

### Алгоритм 2 (нелинейный случай, SDRE-техника)

На каждом временном шаге повторить следующие шаги.

Шаг 1. Измерить  $\boldsymbol{\varphi}$  и оценить  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$  и  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})$ .

Шаг 2. Решить уравнение (12) для  $\mathbf{D}$ .

Шаг 3. Вычислить  $\mathbf{W}(t)$  и  $\mathbf{M}(t)$  с помощью соотношения (11).

Шаг 4. Вычислить управление  $\mathbf{v}$  по формуле (8).

Шаг 5. Применить управление  $\mathbf{v}$  к системе путей (15) и определить  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ .

Шаг 6. Вычислить функционал действия  $S_{t,t_f}$  и получить вероятностную меру из соотношения (5):  $\ln P^* \{ \mathbf{x} \in R^n / D \} = -\varepsilon^{-2} S_{t,t_f}$ .

Шаг 7. Если вектор  $\mathbf{x}(t)$  состояния системы (2) находится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  системы путей, то в случае  $P^* > \rho$ , где  $\rho$  — заданное пороговое значение вероятности наступления редкого события, приходим к выводу, что редкое событие произойдет.

Функционал действия также можно определить на основе выражения (13), но нужно понимать, что это будет субоптимальное решение, которое не даст точную вероятностную оценку, а позволит лишь качественно судить о приближении к критической ситуации.

**Случай нелинейной системы. ASRE-техника.** Решение задачи (15), (4), (6) методом ASRE состоит из нескольких этапов. Первая итерация состоит в решении задачи 0, определенной в виде:

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}^{(0)}}{dt} = \mathbf{A}^{(0)}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}^{(0)}\mathbf{v}^{(0)},$$

$$\mathbf{y}(t_f) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(t_f) \in \partial_K,$$

$$S_{t_0,t_f}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{v}^{(0)})^T \mathbf{v}^{(0)} dt \rightarrow \min_{\mathbf{v}}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}_0)$ ,  $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}_0)$ .

Задача (16) является линейной стационарной, так как все аргументы матриц заданы и являются постоянными. Решение этой задачи приведено выше.

В общем случае для некоторой итерации  $k$  задача формулируется следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}^{(k)} + \mathbf{B}^{(k)}(t)\mathbf{v}^{(k)},$$

$$S_{t_0,t_f}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{v}^{(k)})^T \mathbf{v}^{(k)} dt, \quad (17)$$

где  $\mathbf{A}^{(k)}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}^{(k-1)}(t))$ ,  $\mathbf{B}^{(k)}(t) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}^{(k-1)}(t))$ .

По сути, (17) — это нестационарная линейная задача (где  $\boldsymbol{\varphi}^{(k-1)}(t)$  и  $\mathbf{v}^{(k-1)}(t)$  — решения задачи на шаге  $k-1$ ). Ее решение имеет вид (8)–(10). Решая задачу  $k$ , получим  $\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(t)$  и  $\mathbf{v}^{(k)}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

**Замечание.** Нестационарная задача (17) может быть решена также с помощью переходной матрицы системы. Пример можно увидеть в работе [9].

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости. Сходимость достигается путем задания требуемой нормы ошибки между последовательностью решений:

$$\delta = \|\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(t) - \boldsymbol{\varphi}^{(k-1)}(t)\| \leq \mu, \quad (18)$$

где  $\mu > 0$  — некоторая константа. В работе [8] доказано, что последовательность решений  $\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(t)$ ,  $\mathbf{v}^{(k)}(t)$  сходится к решению исходной задачи (15), (4), (6) при условии, что  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$  и  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})$  непрерывны по Липшицу по своим аргументам, пара  $(\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}))$  поточечно управляема и матрица  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$  — гурвицева  $\forall \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

На основе метода ASRE можно предложить следующий алгоритм анализа вероятности больших отклонений в режиме реального времени.

### Алгоритм 3 (нелинейный случай, ASRE-техника)

Задать  $k = 0$  и параметр сходимости  $\mu$ .

Шаг 1. Задать  $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}_0)$ ,  $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}_0)$ . Решить задачу 0, используя алгоритм 1.

Шаг 2. Определить ошибку  $\delta$  по формуле (18). Если  $\delta > \mu$ , то перейти к шагу 2, иначе принять  $\varphi(t) \approx \varphi^{(0)}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}^{(0)}(t)$  и перейти к шагу 6.

Шаг 3. Увеличить  $k = k + 1$ , задать  $\mathbf{A}^{(k)}(t)$ ,  $\mathbf{V}^{(k)}(t)$  и решить задачу  $k$ , используя (8)–(10).

Шаг 4. Применить управление  $\mathbf{v}^{(k)}(t)$  к системе (17) и определить  $\varphi^{(k)}(t)$ .

Шаг 5. Определить ошибку  $\delta$  по формуле (18). Если  $\delta > \mu$ , то перейти к шагу 3, иначе  $\varphi(t) \approx \varphi^{(k)}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}^{(k)}(t)$ .

Шаг 6. Вычислить функционал действия  $S_{t,t_f}$  и получить вероятностную меру из соотношения (5):  $\ln P^*\{\mathbf{x} \in R^n / D\} = -\varepsilon^{-2} S_{t,t_f}$ .

Шаг 7. Если вектор  $\mathbf{x}(t)$  состояния системы (2) находится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\varphi(t)$  системы путей, то в случае  $P^* > \rho$ , где  $\rho$  — заданное пороговое значение вероятности наступления редкого события, приходим к выводу, что редкое событие произойдет.

### Анализа переключения возбудимых режимов модели ФХН

Модель ФХН представляет собой двумерную нейроподобную модель осциллятора с кубической нелинейностью, одной быстрой и одной медленной переменными. Двумерная модель ФХН является результатом упрощения четырехмерной модели Ходжкина—Хаксли [11, 16]. Эта модель может использоваться как для описания динамики нейронов, так и в других системах, в том числе для описания электронных схем [17], сердечнососудистых тканей [18] и климатических систем [19]. Модель ФХН описывается уравнениями в следующей форме [1, 20]:

$$\begin{aligned} \lambda \dot{u}(t) &= u(t) - \frac{u^3(t)}{3} - v(t); \\ \dot{v}(t) &= u(t) - bv(t) + a. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $u$  воспроизводит трансмембранный потенциал, а восстанавливающая переменная  $v$  — активацию исходящего тока (будем также называть их активатором и ингибитором соответственно);  $\lambda$  — малый параметр, характеризует разнотемповость переменных;  $a, b$  — постоянные параметры системы.

В частном случае при  $b = 0$  параметр  $a$  является пороговым параметром системы. Значениям  $|a| > 1$  соответствует возбудимый режим, при котором траектории системы стремятся к точке  $(-a; a^3/3 - a)$ , а значениям  $|a| < 1$  — автоколебательная динамика (рис. 1, *a*, см. вторую сторону обложки, где штриховой линией обозначен возбудимый режим, а сплошной линией — колебательный режим) [1, 20]. Во втором случае нейрон испускает спайки, т. е. автоколебания

(сплошная линия), тогда как в первом случае он находится в покое, т. е. колебания отсутствуют (рис. 1, *б*, см. вторую сторону обложки — штриховая линия).

Основной интерес состоит в том, чтобы отслеживать возможную генерацию колебаний системы при нахождении в устойчивом состоянии  $(-a; a^3/3 - a)$  для различных значений параметра  $a$  (в том числе для  $|a| > 1$ ) под действием стохастического возмущения.

Рассмотрим стохастическое возмущение одномерным винеровским процессом модели (19):

$$\begin{aligned} \lambda \dot{u}(t) &= u(t) - \frac{u^3(t)}{3} - v(t) + \varepsilon \dot{w}(t), \\ \dot{v}(t) &= u(t) - bv(t) + a. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай 1, когда  $|a| < 1$ , и система находится в точке устойчивого равновесия. При этом случайные возмущения выводят систему из области притяжения аттрактора и приводят переменную состояния  $u(t)$  к амплитудному значению режима автоколебаний  $y(t_f)$  за время  $t_f$ . Для первого примера, опираясь на рис. 1, *б* (см. вторую сторону обложки), примем  $a = 0,2$ ,  $t_f = 2,5$ ,  $y(t_f) = 2$ ,  $\lambda = 0,1$ . Результаты моделирования системы путей показаны на рис. 2, *a* (см. вторую сторону обложки). Для метода ASRE было выполнено пять итераций, траектории системы путей для задач 0, 2 и 4 показаны на рис. 2, *a*, соответственно в виде кривых  $P_0, P_2, P_4$ . Траектория выхода на автоколебания для метода SDRE показана синей сплошной линией. Видно, что при  $t > 2,083$  начинается стремительный рост амплитуды с выходом на критическое значение. Промасштабированное значение функционала действия для указанного примера показано на рис. 2, *б* (см. вторую сторону обложки). Из результатов видно, что методы SDRE и ASRE дают схожий результат.

Траекторию пути  $\varphi^*(t)$ , оптимального в смысле (4) выхода на амплитуду автоколебаний, можно сопоставить со свободным движением системы: это показано на рис. 3 (см. третью сторону обложки), где штриховой линией выделен путь  $\varphi^*(t)$  — оптимальная траектория выхода на режим автоколебаний.

Рассмотрим случай 2, когда  $|a| > 1$ , и система (1) имеет точку устойчивого равновесия  $(-a; a^3/3 - a)$ . При этом случайные возмущения выводят систему из области притяжения этого аттрактора и приводят активатор  $u(t)$  к амплитудному значению режима автоколебаний  $y(t_f)$  за время  $t_f$ . Примем  $a = 2,2$ ,  $t_f = 2,5$ ,  $y(t_f) = 2$ ,  $\lambda = 0,1$ . Результаты моделирования системы путей показаны на рис. 4, *a* (см. третью сторону обложки), промасштабированные значения функционала действия — на рис. 4, *б* (см. третью сторону об-

ложки). В данном случае уже вторая итерация метода ASRE показала неудовлетворительный результат. Это обусловлено тем, что на данной итерации не было выполнено условие гурвицевости матрицы  $A(\varphi) \forall \varphi(t), t \in [t_0, t_f]$ .

При уменьшении требуемого времени выхода в режим возбудимости до  $t_f = 0,5$  (случай 3) метод ASRE сохранил свою сходимость, было выполнено шесть итераций. Квазипотенциальная экстремаль и функционал действия для задачи 0, 4 и 5 показаны на рис. 5 (см. третью сторону обложки), соответственно, кривыми  $P_0, P_4, P_5$ . Видно, что решения методами ASRE и SDRE различаются. Рост вероятности выхода на возбудимый режим для задачи P5 наблюдается с момента  $t > 0,15$ , тогда как для метода SDRE рост вероятности начинается с  $t > 0,25$ .

**Замечание.** Неудачный пример 2 для метода ASRE демонстрирует ограничения метода, хотя подобная ситуация может складываться и для SDRE-метода в ходе расчетов на некотором временном шаге, поскольку важным аспектом применения SDC-методов является необходимость обеспечить определенное представление для динамики в форме системы с матрицами, зависящими от состояния. Эту задачу принято называть задачей параметризации или факторизации системы (см., например, [9]). Действительно, можно было бы ожидать, что различные SDC-матрицы приводят к одному и тому же результату, но на практике это не так. Кроме того, использование разных представлений для SDC-матриц дает разные результаты в терминах траектории системы и функционала качества.

Данный результат наталкивает на мысль о том, что можно модифицировать предложенные алгоритмы. По аналогии с линейным случаем можно предположить, что условие, которое требуется для представленных решений методами SDRE и ASRE, — это управляемость пары  $(A(\varphi), B(\varphi))$  и гурвицевость матрицы  $A(\varphi)$ . Поэтому SDC-матрицы должны выбираться так, чтобы эти условия выполнялись. При этом желательно выбрать факторизацию, которая обеспечивает максимальную управляемость, поскольку с этим строго связана производительность решения. Повышенная управляемость приводит к снижению усилий управления и, вероятно, к снижению затрат возмущений. Учитывая нелинейную динамику, выбор матрицы  $A(\varphi)$ , зависящей от состояния, является степенью свободы, которую можно использовать для обеспечения наилучших характеристик с точки зрения сходимости алгоритма и усилия управления. Влияние способов факторизации на результаты анализа больших отклонений является предметом дальнейших исследований.

В статье предложен метод анализа больших отклонений, основанный на решении задачи оптимального управления Лагранжа—Понтрягина для нелинейных систем на основе SDC-подхода. В работе используются два наиболее распространенных и эффективных метода SDRE и ASRE. Предложенный способ анализа больших отклонений позволяет получить решение в форме обратной связи по состоянию, что упрощает решение задачи Лагранжа—Понтрягина, поскольку исключает необходимость вычисления граничных значений для сопряженных переменных. Предполагается, что эта особенность может быть использована при решении задач долгосрочного прогноза возникновения критических ситуаций на основе анализа больших отклонений.

Список литературы

1. Grafke T., Vanden-Eijnden E. Numerical computation of rare events via large deviation theory // Chaos. 2019. Vol. 29. Paper no. 063118.
2. Sapsis T. P. New perspectives for the prediction and statistical quantification of extreme events in high-dimensional dynamical systems // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2018. Vol. 376. Paper no. 20170133.
3. Dubovik S., Kabanov A. Profiles of critical states in diagnostics of controlled processes // MATEC Web of Conferences. 2018. Vol. 224. Paper no. 04024.
4. Дубовик С. А. Асимптотическая семантизация данных в системах управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 8. С. 461—471.
5. Kabanov A. A., Dubovik S. A. Methods of modeling and probabilistic analysis of large deviations of dynamic systems // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1661. Paper no. 012044.
6. Cimen T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey // IFAC Proceedings Volumes. 2008. Vol. 41. P. 3761—3775.
7. Cimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2012. Vol. 35. P. 1025—1047.
8. Cimen T., Banks S. P. Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria // Systems & Control Letters. 2004. Vol. 53. P. 327—346.
9. Toppato F., Miani M., Bernelli-Zazzera F. Optimal selection of the coefficient matrix in state-dependent control methods // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2015. Vol. 38. P. 861—873. <https://doi.org/10.2514/1.G000136>.
10. Heydari A., Balakrishnan S. N. Closed-form solution to finite-horizon suboptimal control of nonlinear systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2014. Vol. 25. P. 2687—2704. <https://doi.org/10.1002/rnc.3222>.
11. Izhikevich E. M. Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting. Cambridge: Computational neuroscience. MIT Press, 2007. 464 p.
12. Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of excitability for the FitzHugh-Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique // Physical Review E. 2011. Vol. 83. Paper no. 061109.
13. Doss C., Thieullen M. Oscillations and random perturbations of a FitzHugh-Nagumo system // arXiv:0906.2671 2009 (preprint).
14. Freidlin M. I., Wentzell A. D. Random perturbations of dynamical systems, 3. ed. Heidelberg: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2012. 460 p.
15. Bryson A. E., Ho Y.-C. Applied optimal control: optimization, estimation, and control. New York: Taylor & Francis, 1975. 482 p.
16. Bachar M., Batzel J., Ditlevsen S. Stochastic biomathematical models, Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2013. 206 p.

17. Heinrich M., Dahms T., Flunkert V., Teitworth S. W., Schöll E. Symmetry-breaking transitions in networks of nonlinear circuit elements // *New Journal of Physics*. 2010. Vol. 12. paper no. 113030.

18. Nash M. P., Panfilov A. V. Electromechanical model of excitable tissue to study reentrant cardiac arrhythmias // *Progress in Biophysics and Molecular Biology*. 2004. Vol. 85. P. 501–522.

19. Ganopolski A., Rahmstorf S. Abrupt glacial climate changes due to stochastic resonance // *Physical Review Letters*. 2002. Vol. 88. Paper no. 038501.

20. Plotnikov S. A., Fradkov A. L. Controlled synchronization in two hybrid FitzHugh-Nagumo systems // *IFAC-PapersOnLine*. 2016. Vol. 49, Iss. 14. P. 137–141.

## Numerical Methods for Monitoring Rare Events in Nonlinear Stochastic Systems

A. A. Kabanov, kabanovaleksey@gmail.com, S. A. Dubovik, duboviksa@gmail.com,  
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Corresponding author: Kabanov Aleksey A., Ph.D., Associate Professor, Sevastopol State University,  
Sevastopol, 299053, Russian Federation, e-mail: kabanovaleksey@gmail.com

Accepted on April, 23, 2021

### Abstract

In this article, we consider the development of numerical methods of large deviations analysis for rare events in nonlinear stochastic systems. The large deviations of the controlled process from a certain stable state are the basis for predicting the occurrence of a critical situation (a rare event). The rare event forecasting problem is reduced to the Lagrange-Pontryagin optimal control problem. The presented approach for solving the Lagrange-Pontryagin problem differs from the approach used earlier for linear systems in that it uses feedback control. In the nonlinear case, approximate methods based on the representation of the system model in the state-space form with state-dependent coefficients (SDC) matrixes are used: the state-dependent Riccati equation (SDRE) and the asymptotic sequence of Riccati equations (ASRE). The considered optimal control problem allow us to obtain a numerical-analytical solution that is convenient for real-time implementation. Based on the developed methods of large deviations analysis, algorithms for estimating the probability of occurrence of a rare event in a dynamical system are presented. The numerical applicability of the developed methods is shown by the example of the FitzHugh-Nagumo model for the analysis of switching between excitable modes. The simulation results revealed an additional problem related to the so-called parameterization problem of the SDC matrices. Since the use of different representations for SDC matrices gives different results in terms of the system trajectory, the choice of matrices is proposed to be carried out at each algorithm iteration so as to provide conditions for the solvability of the Lagrange-Pontryagin problem.

**Keywords:** large deviations, rare event, nonlinear system, optimal control, state-dependent coefficient, FitzHugh-Nagumo model

**Acknowledgements:** The reported study was funded by the Russian Science Foundation (Project No. 21-22-00202).

For citation:

Kabanov A. A., Dubovik S. A. Numerical Methods for Monitoring Rare Events in Nonlinear Stochastic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 291–297.

DOI: 10.17587/mau.22.291-297

### References

1. Grafke T., Vanden-Eijnden E. Numerical computation of rare events via large deviation theory, *Chaos*, 2019, vol. 29, paper no. 063118.

2. Sapsis T. P. New perspectives for the prediction and statistical quantification of extreme events in high-dimensional dynamical systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2018, vol. 376, paper no. 20170133.

3. Dubovik S. A., Kabanov A. A. Profiles of critical states in diagnostics of controlled processes, *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 224, paper no. 04024.

4. Dubovik S. A. Asymptotic semantization of data in control systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 8, pp. 461–471 (In Russian).

5. Kabanov A. A., Dubovik S. A. Methods of modeling and probabilistic analysis of large deviations of dynamic systems, *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1661, paper no. 012044.

6. Çimen T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey, *IFAC Proceedings Volumes*, 2008, vol. 41, pp. 3761–3775.

7. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, vol. 35, pp. 1025–1047.

8. Çimen T., Banks S. P. Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria, *Systems & Control Letters*, 2004, vol. 53, pp. 327–346.

9. Toppoto F., Miani M., Bernelli-Zazzera F. Optimal selection of the coefficient matrix in state-dependent control methods, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, vol. 38, pp. 861–873.

10. Heydari A., Balakrishnan S. N. Closed-form solution to finite-horizon suboptimal control of nonlinear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, vol. 25, pp. 2687–2704.

11. Izhikevich E. M. Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting, Cambridge, Computational neuroscience, MIT Press, 2007, 464 p.

12. Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of excitability for the FitzHugh-Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique, *Physical Review E*, 2011, vol. 83, paper no. 061109.

13. Doss C., Thieullen M. Oscillations and random perturbations of a FitzHugh-Nagumo system, *Preprint, arXiv:0906.2671v1*, 2009.

14. Freidlin M. I., Wentzell A. D. Random perturbations of dynamical systems, 3. ed., Heidelberg, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 2012, 460 p.

15. Bryson A. E., Ho Y.-C. Applied optimal control: optimization, estimation, and control, New York, Taylor & Francis, 1975, 482 p.

16. Bachar M., Batzel J., Ditlevsen S. Stochastic biomathematical models, Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Springer Berlin Heidelberg, 2013, 206 p.

17. Heinrich M., Dahms T., Flunkert V., Teitworth S. W., Schöll E. Symmetry-breaking transitions in networks of nonlinear circuit elements, *New Journal of Physics*, 2010, vol. 12, paper no. 113030.

18. Nash M. P., Panfilov A. V. Electromechanical model of excitable tissue to study reentrant cardiac arrhythmias, *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 2004, vol. 85, pp. 501–522.

19. Ganopolski A., Rahmstorf S. Abrupt glacial climate changes due to stochastic resonance, *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, paper no. 038501.

20. Plotnikov S. A., Fradkov A. L. Controlled synchronization in two hybrid FitzHugh-Nagumo systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49, iss. 14, pp. 137–141.

А. Н. Жирабок<sup>1,2</sup>, д-р техн. наук, проф., zhirabok@mail.ru, Ким Чхун Ир<sup>1</sup>, аспирант,

<sup>1</sup>Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток,

<sup>2</sup>Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток

## Виртуальные датчики в задаче функционального диагностирования

*Рассматривается задача построения виртуальных датчиков в технических системах, описываемых линейными моделями, для решения задач функционального диагностирования. Приводятся соотношения, позволяющие построить датчик минимальной сложности, оценивающий заданную компоненту вектора состояния. Теоретические результаты иллюстрируются примером.*

**Ключевые слова:** линейные системы, дефекты, функциональное диагностирование, виртуальные датчики, наблюдатели, идентификация

### Введение

Функциональное диагностирование (ФД) является одним из мощных средств повышения эффективности эксплуатации сложных технических систем, оно позволяет проводить проверку правильности функционирования системы в процессе выполнения ею своих основных функций и оперативно поставлять информацию о возникающих сбоях и дефектах [1, 2]. Одним из существенных препятствий на пути эффективной реализации методов ФД является недостаточное число датчиков, которыми оснащена диагностируемая система. Неэффективность этих методов здесь может проявиться как в значительной сложности построенных средств диагностирования, так и в невозможности локализации и идентификации дефектов, что не позволит получить решение задачи обеспечения отказоустойчивости системы.

Простейшим выходом из этой ситуации является использование дополнительных датчиков, что приводит к дополнительным затратам и не всегда реализуемо на практике. К тому же датчики являются одними из наименее надежных элементов системы.

Более простым и изящным способом является использование так называемых виртуальных датчиков [3, 4], которые строятся на основе наблюдателей Люенбергера и в работах [3, 4] имеют размерность, совпадающую с размерностью исходной системы. В настоящей работе ставится и решается задача построения виртуальных датчиков минимальной размерности, оценивающих заданные компоненты вектора состояния объекта диагностирования.

### 1. Основные соотношения

Предполагается, что диагностируемая система описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) + L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t) + Dd(t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^m$  и  $y(t) \in R^l$  — векторы состояния, управления и выхода (показания имеющихся датчиков),  $F$ ,  $G$ ,  $L$ ,  $H$  и  $D$  — известные матрицы соответствующих размеров; функция  $d(t)$  отражает дефекты в некотором датчике, при их отсутствии  $d(t) = 0$ , при появлении дефектов  $d(t)$  становится неизвестной функцией времени; слагаемое  $L\rho(t)$  описывает действующее на систему возмущение;  $\rho(t)$  предполагается неизвестной функцией времени.

Рассмотрим ситуацию, когда задача идентификации дефекта, т. е. оценки функции  $d(t)$ , не может быть решена из-за недостаточного числа имеющихся датчиков, а использование дополнительных датчиков невозможно или нецелесообразно по ряду причин. Требуется построить виртуальный датчик для переменной  $y_v(t) = H_v x(t)$  с известной матрицей-строкой  $H_v$ ; способ ее определения приведен в разделе 4.

Решение рассматриваемой задачи состоит в построении наблюдателя, оценивающего переменную  $y_v(t)$  и, таким образом, выполняющего функцию виртуального датчика. Такой наблюдатель должен обладать двумя свойствами. Во-первых, для обеспечения его устойчивости он должен оценивать некоторую компоненту вектора выхода  $y_*(t) = H_* x_v(t)$ , которая при  $D = 0$ ,  $L = 0$  и после окончания переходного процесса определяется матрицей  $R_*$  в виде

$y_*(t) = R_*y(t)$ , для формирования невязки  $r(t) = R_*y(t) - y_*(t)$ ; здесь  $x_v(t)$  — вектор состояния наблюдателя. Компонента  $y_*(t)$  и эта матрица неизвестны, они определяются в процессе решения основной задачи. Во-вторых, наблюдатель должен оценивать заданную переменную  $y_v(t) = H_v x(t)$ . Для решения задачи введем составную матрицу  $H_0 = \begin{pmatrix} H \\ H_v \end{pmatrix}$  и примем вначале, что  $D = 0$ .

Уравнение искомого наблюдателя имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_v(t) &= F_*x_v(t) + J_*y_0(t) + G_*u(t) + J_v r(t); \\ y_*(t) &= H_*x_v(t); \\ y_v(t) &= H_{*v}x_v(t) + Qy(t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $F_*$ ,  $J_*$ ,  $J_v$ ,  $G_*$ ,  $H_*$ ,  $H_{*v}$ ,  $Q$  — матрицы, подлежащие определению,

$$y_0(t) = H_0x(t) = \begin{pmatrix} H \\ H_v \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_v(t) \end{pmatrix}.$$

Решение задачи осуществляется в два этапа: на первом строится модель

$$\begin{aligned} \dot{x}_v(t) &= F_*x_v(t) + J_*y_0(t) + G_*u(t); \\ y_*(t) &= H_*x_v(t) = R_*y(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

с последующей проверкой возможности выполнения равенства

$$y_v(t) = H_{*v}x_v(t) + Qy(t), \quad (1.4)$$

на втором ищется матрица  $J_v$ , обеспечивающая устойчивость наблюдателя.

## 2. Построение модели

Для получения решения на первом этапе матрицы  $F_*$  и  $H_*$  ищутся в каноническом виде

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$H_* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

Известно [5], что если пара  $(F_*, H_*)$  наблюдаема, такое представление существует; в противном случае модель (1.3) можно представить

в канонической форме наблюдаемости [5] и также искать матрицы  $F_*$  и  $H_*$  в виде (2.1).

Как и при решении задачи ФД, предполагается, что после окончания переходного процесса векторы  $x(t)$  и  $x_v(t)$  связаны матрицей  $\Phi$ , подлежащей определению:

$$x_v(t) = \Phi x(t).$$

Из (1.1) и (1.3) тогда можно получить уравнения, связывающие матрицы, описывающие эти системы [6, 7]:

$$R_*H = H_*\Phi, \quad \Phi F = F_*\Phi + J_*H_0, \quad G_* = \Phi G. \quad (2.2)$$

Из (1.3), (2.1) и (2.2) можно получить следующие уравнения [6, 7]:

$$\begin{aligned} R_*H &= \Phi_1; \quad \Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i}H_0, \quad i = 1, \dots, k-1; \\ \Phi_k F &= J_{*k}H_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Как показано в работах [6, 7], уравнения (2.3) могут быть сведены в одно уравнение

$$R_*HF^k = J_{*1}H_0F^{k-1} + J_{*2}H_0F^{k-2} + \dots + J_{*k}H_0.$$

Запишем его в виде

$$(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})V^{(k)} = 0, \quad (2.4)$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} HF^k \\ H_0F^{k-1} \\ \vdots \\ H_0 \end{pmatrix}.$$

В работах [6, 7] показано, что для обеспечения нечувствительности к возмущению строка  $(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})$  должна удовлетворять дополнительному условию

$$(R_* \ -J_{*1} \ \dots \ -J_{*k})L^{(k)} = 0,$$

где

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} HL & HFL & \dots & HF^{k-1}L \\ 0 & H_0L & \dots & H_0F^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее уравнение и уравнение (2.4) можно записать вместе:

$$(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})(V^{(k)} L^{(k)}) = 0; \quad (2.5)$$

полученное уравнение имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V^{(k)} L^{(k)}) < l + (l + 1)k. \quad (2.6)$$

Для построения модели из условия (2.6) определяется минимальная размерность  $k$  и из уравнения (2.5) — строка  $(R_* - J_{*1} \dots - J_{*k})$ , затем на основе соотношений (2.2) строится матрица  $\Phi$  и проверяется выполнение равенства (1.4). Для этого представим его в виде

$$H_v x(t) = H_{*v} \Phi x(t) + Q H x(t),$$

что эквивалентно равенству

$$H_v = H_{*v} \Phi + Q H = (H_{*v} \quad Q) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ H_v \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

то матрица-строка  $H_v$  выражается через матрицу  $\begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix}$ , и построенная модель оценивает заданную компоненту  $y_v = H_v x$ ; матрицы  $H_{*v}$  и  $Q$  определяются из алгебраического уравнения (2.7). Если (2.8) не выполняется, нужно найти другое решение уравнения (2.5) при прежней или увеличенной размерности  $k$ .

Предполагая, что условие (2.8) выполняется, примем  $G_* = \Phi G$ , на чем заканчивается процедура построения модели.

### 3. Построение наблюдателя

Для построения матрицы  $J_v$ , обеспечивающей устойчивость наблюдателя, проведем ряд тождественных преобразований первого уравнения (1.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_v(t) &= F_* x_v(t) + J_* y_0(t) + G_* u(t) + J_v r(t) = \\ &= F_* x_v(t) + J_* y_0(t) + G_* u(t) + J_v (R_* y(t) - y_*(t)) = \\ &= (F_* - J_v H_*) x_v(t) + J_* y_0(t) + G_* u(t) + J_v R_* y(t). \end{aligned}$$

Для анализа устойчивости введем ошибку по состоянию  $e(t) = \Phi x(t) - x_v(t)$  и с учетом соотношений (1.1), (1.2) и (2.2) запишем и преобразуем уравнение для  $\dot{e}(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \Phi F x(t) + \Phi G u(t) - F_* x_v(t) - \\ &- J_* y_0(t) - G_* u(t) - J_v (R_* y(t) - y_*(t)) = \\ &= F_* \Phi x(t) - F_* x_v(t) - J_v R_* H x(t) + J_v H_* x_v(t) = \\ &= F_* \Phi x(t) - J_v H_* \Phi x(t) - F_* x_v(t) + J_v H_* x_v(t) = \\ &= (F_* - J_v H_*) \Phi x(t) - (F_* - J_v H_*) x_v(t) = \\ &= (F_* - J_v H_*) e(t). \end{aligned}$$

Из полученного выражения ясно, что если матрица  $(F_* - J_v H_*)$  устойчива, то  $e(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Известно, что если пара  $(F_*, H_*)$  наблюдаема, то существует такая матрица  $J_v$ , что  $(F_* - J_v H_*)$  устойчива. Из соотношения (2.1) с очевидностью следует наблюдаемость пары  $(F_*, H_*)$  и, следовательно, существование матрицы  $J_v$ , обеспечивающей устойчивость матрицы  $(F_* - J_v H_*)$ .

Будем искать  $J_v$  в виде  $J_v = (a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_k)^T$ . Тогда

$$\begin{aligned} F_* - J_v H_* &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} - \\ - J_v (1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0) &= \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ -a_k & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_k$  связаны с собственными числами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  матрицы  $F_* - J_v H_*$  известными соотношениями:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k), \\ a_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{k-1} \lambda_k, \dots, a_k = \\ &= (-1)^k \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k. \end{aligned}$$

Исходя из заданных требований к качеству переходного процесса можно задать собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  и определить коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Отметим, что из-за наличия слагаемого  $J_* y_0(t)$  в модели (1.3) может появиться обратная связь по переменной  $y_v(t) = H_{*v} x_v(t) + Q y(t)$ , что приведет к матрице  $F_*$ , отличной от канониче-

ского вида (2.1). В этом случае выбор коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_k$  должен быть осуществлен так, чтобы собственные числа матрицы  $F_* - J_v H_*$  удовлетворяли требованию устойчивости. Сделать это можно, выразив в общем виде собственные числа матрицы  $F_* - J_v H_*$  через коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , задав числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  и найдя из полученных уравнений искомые коэффициенты.

#### 4. Определение матрицы $H_v$

Вид матрицы  $H_v$  определяется решаемой диагностической задачей. В качестве примера рассмотрим задачу идентификации дефекта в системе (1.1) при  $D \neq 0$ , т. е. оценки функции  $d(t)$ . Опуская детали решения (их можно найти в работе [6]), отметим только, что вначале строится модель, нечувствительная к возмущению:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= F_0 x_0(t) + J_0 y(t) + G_0 u(t); \\ y_0(t) &= H_0 x_0(t) = R_0 y(t), \end{aligned}$$

подобная (1.3), на основе которой далее строится скользящий наблюдатель.

Особенность задачи идентификации дефекта в датчиках состоит в том, что для реализации скользящего режима должно выполняться условие  $R_0 D = 0$ . Для его учета вводится матрица  $D^0$  максимального ранга такая, что  $D^0 D = 0$ , тогда  $R_0 = S D^0$  для некоторой матрицы  $S$ . Известно [6], что матрицы  $S$  и  $J_0$  определяются из уравнения

$$(S \quad -J_{01} \quad \dots \quad -J_{0k})(V_0^{(k)} \quad D_0^{(k)}) = 0 \quad (4.1)$$

подобного (2.4), где

$$V_0^{(k)} = \begin{pmatrix} D^0 H F^k \\ H F^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix};$$

$$D_0^{(k)} = \begin{pmatrix} D^0 H L & D^0 H F L & \dots & D^0 H F^{k-1} L \\ 0 & H L & \dots & H F^{k-2} L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Оно имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V_0^{(k)} \quad D_0^{(k)}) < l(k+1) - 1. \quad (4.2)$$

Невыполнение этого условия при всех  $k < n$  может быть обусловлено наличием как требования  $R_0 D = 0$ , так и требования нечувствитель-

ности к возмущению, задаваемому матрицей  $D_0^{(k)}$  в (4.1). Использование виртуального датчика  $y_v(t) = H_v x(t)$  может решить эту проблему.

Для определения матрицы  $H_v$  введем матрицу  $D_e = \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}$  и матрицу  $D_e^0$  максимального ранга такую, что  $D_e^0 D_e = 0$ . Исходя из структуры матриц  $V_0^{(k)}$  и  $B^{(k)}$  можно заметить, что условие, которому должна удовлетворять матрица  $H_v$ , имеет вид

$$\text{rank}(D^0 H) < \text{rank}(D_e^0 H_0) = \text{rank} \left( D_e^0 \begin{pmatrix} H \\ H_v \end{pmatrix} \right),$$

поскольку это увеличивает шансы удовлетворить условию (4.2), а следовательно, требованиям  $R_0 D = 0$  и нечувствительности к возмущению.

Отметим также, что решение многих задач диагностирования существенно упрощается в случае, когда доступны все компоненты вектора состояния системы. В частности, при решении задачи идентификации на основе скользящих наблюдателей здесь удастся существенно ослабить ограничения на исходную систему (см., например, [8]). В этом случае матрица  $H_v$  выбирается из условия

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ H_v \end{pmatrix} = n,$$

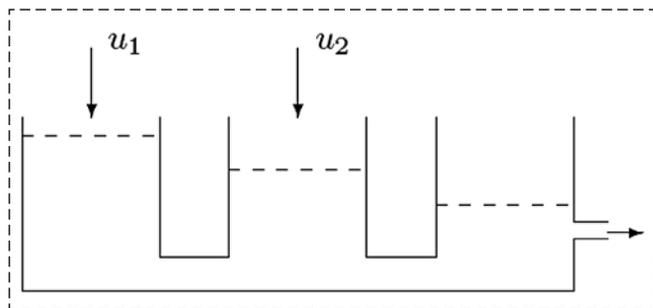
которое обеспечивает доступность всех компонент вектора состояния системы.

#### 5. Пример

Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_1(t)/\vartheta_1 - b_1(x_1(t) - x_2(t)); \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t)/\vartheta_2 + b_1(x_1(t) - x_2(t)) - b_2(x_2(t) - x_3(t)); \\ \dot{x}_3(t) &= b_2(x_2(t) - x_3(t)) - b_3(x_3(t) - \vartheta_3) + \rho(t); \\ y_1(t) &= x_2(t); \quad y_2(t) = x_3(t). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Уравнения (5.1) описывают так называемую трехтанковую систему (см. рисунок), состоящую из трех резервуаров, соединенных между собой трубами. Жидкость поступает в первый и второй танки и выливается из третьего танка. Уровни жидкости в танках обозначены  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $x_3(t)$ ;  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  — коэффициенты, значения которых определяются геометрическими размерами системы.



Трехтанковая система  
Three-tank system

Поскольку неизмеряемой является компонента  $x_1(t)$ , примем  $y_v(t) = x_1(t)$ ,  $H_v = (1 \ 0 \ 0)$  и построим соответствующий виртуальный наблюдатель. Для простоты примем  $\vartheta_1 = 1$ ,  $\vartheta_2 = 1$ ,  $\vartheta_3 = 0$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ . Приведем матрицы, описывающие систему (5.1):

$$F = \begin{pmatrix} -b_1 & b_1 & 0 \\ b_1 & -b_1 - b_2 & b_2 \\ 0 & b_2 & -b_2 - b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что условие (2.6) выполняется при  $k = 1$ , однако при этом не выполняется условие (2.8), поэтому принимаем  $k = 2$ . Составная матрица  $(V^{(2)} \ L^{(2)})$  имеет вид

$$(V^{(2)} \ L^{(2)}) = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что с матрицей  $(V^{(2)} \ L^{(2)})$  уравнение (2.5) имеет два решения:

$$(R^* \ -J_{*1} \ -J_{*2}) = (1 \ 0 \ 2 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1),$$

$$\Phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(R^* \ -J_{*1} \ -J_{*2}) = (1 \ 0 \ 3 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0),$$

$$\Phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первое из них дает модель

$$\begin{aligned} \dot{x}_{v1}(t) &= x_{v2}(t) - 2y_1(t) + y_2(t) + u_2(t); \\ \dot{x}_{v2}(t) &= -y_v(t) + y_1(t) = -x_{v2}(t) + y_1(t) + u_1(t); \\ y_*(t) &= x_{v1}(t); \quad y_v(t) = x_{v2}(t) \end{aligned}$$

с матрицами  $F^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $H^* = (1 \ 0)$ ,  $H_{*v} = (0 \ 1)$

и  $Q = 0$ . Нетрудно видеть, что пара  $(F^*, H^*)$  наблюдаема, поэтому существует такая матрица  $J_v$ , что  $(F^* - J_v H^*)$  устойчива. Можно принять  $J_v = (2 \ 1)^T$ , что дает  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ . Соответствующий наблюдатель описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_{v1}(t) &= x_{v2}(t) + y_2(t) - 2y_*(t) + u_2(t); \\ \dot{x}_{v2}(t) &= -x_{v2}(t) + 2y_1(t) - y_*(t) + u_1(t); \\ y_*(t) &= x_{v1}(t); \quad y_v(t) = x_{v2}(t). \end{aligned}$$

Второе решение дает модель

$$\begin{aligned} \dot{x}_{v1}(t) &= x_{v2}(t) - 3y_1(t) + y_2(t) + u_2(t); \\ \dot{x}_{v2}(t) &= -y_1(t) + y_2(t) + u_1(t) + u_2(t); \\ y_*(t) &= x_{v1}(t); \quad y_v(t) = x_{v2}(t) - y_1(t) \end{aligned}$$

с матрицами  $F^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $H^* = (1 \ 0)$ ,  $H_{*v} = (0 \ 1)$

и  $Q = (-1 \ 0)$ . Здесь можно принять  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ , что дает  $J_v = (2 \ 1)^T$ . Наблюдатель имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_{v1}(t) &= x_{v2}(t) - y_1(t) + y_2(t) - 2y_*(t) + u_2(t); \\ \dot{x}_{v2}(t) &= y_2(t) - y_*(t) + u_1(t) + u_2(t); \\ y_*(t) &= x_{v1}(t); \quad y_v(t) = x_{v2}(t) - y_1(t). \end{aligned}$$

### Заключение

В работе предложен метод построения виртуальных датчиков в технических системах, описываемых линейными моделями. На основе наблюдателей Льюенбергера получены соотношения, позволяющие построить датчики минимальной размерности, оценивающие заданные компоненты вектора состояния диагностируемой системы. Синтезированные виртуальные датчики дают возможность в ряде случаев не только уменьшить сложность средств диагностирования и повысить глубину диагностирования, но и рассмотреть задачи, которые без использования таких датчиков не могли быть решены.

## Список литературы

1. **Мироновский Л. А.** Функциональное диагностирование динамических систем. М.-СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998.
2. **Шумский А. Е., Жирабок А. Н., Гаджиев Ч.** Диагностирование и отказоустойчивое управление динамическими системами. Электронное издание. Владивосток: ДВФУ, 2016. 178 с. URL: <http://elibr.dvfu.ru/vital/access/manager/Repository/feFu:4053>
3. **Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M.** Diagnosis and fault tolerant control. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
4. **Witczak M.** Fault diagnosis and fault tolerant control strategies for nonlinear systems. Berlin: Springer, 2014.
5. **Квакернаак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Наука, 1977.

6. **Жирабок А. Н., Зуев А. В., Шумский А. Е.** Диагностирование линейных динамических систем: подход на основе скользящих наблюдателей // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. С. 18–35.

7. **Жирабок А. Н., Зуев А. В., Бобко Е. Ю., Филатов А. Л.** Решение задачи аккомодации в нелинейных системах с использованием линейных методов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. № 1. С. 21–27.

8. **Zhirabok A., Zuev A., Filaretov V.** Fault identification in underwater vehicle thrusters via sliding mode observers // Int. Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2020. Vol. 30, N. 4. P. 679–688.

## Virtual Sensors in the Fault Diagnosis Problem

**A. N. Zhirabok<sup>1,2</sup>**, [zhirabok@mail.ru](mailto:zhirabok@mail.ru), **Kim Chkhun Ir<sup>1</sup>**, [kim.ci@dvfu.ru](mailto:kim.ci@dvfu.ru),

<sup>1</sup>Far Eastern Federal University, Vladivostok, 690950, Russian Federation,

<sup>2</sup>Institute of Marine Technology Problems, 690950, Russian Federation

Corresponding author: **Zhirabok A. N.**, Dr. of Sci., Professor, Far Eastern Federal University, Vladivostok, 690950, Russian Federation, e-mail: [zhirabok@mail.ru](mailto:zhirabok@mail.ru)

Accepted on March 12, 2021

### Abstract

The paper is devoted to the problem of fault diagnosis (isolation and identification) in linear dynamic systems under disturbances. The performances of fault diagnosis depend on the sensors which are in the system under diagnosis. To improve the performances, additional sensors can be applied. But sometimes it is impossible to use such sensors; besides they have low reliability. In this paper, we suggest to use so-called virtual sensors instead of additional ones. To obtain such sensors, Luenberger observers can be used. Such an observer is designed in two steps. On the first step, the model of minimal dimension invariant with respect to the disturbances and estimating a predetermined component of the system state vector and some other components of the system state vector is designed. The second components are necessary to provide stability of the observer by means of generating residual and using feedback. Such components are determined during the process of the problem solution which is based on the canonical form of matrices describing the model. On the second step, the feedback matrix is found based on the required quality of transient. To obtain this matrix, eigenvalues are selected and coefficients of the characteristic equation are calculated. The rule to find the predetermined component of the system state vector to be estimated by virtual observer is suggested. Theoretical results are illustrated by practical example of well known three tank system.

**Keywords:** linear systems, faults, diagnosis, virtual sensors, observers, identification

For citation:

**Zhirabok A. N., Kim C.** Virtual Sensors in the Fault Diagnosis Problem, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 298–303.

DOI: 10.17587/mau.22.298-303

### References

1. **Mironovski L. A.** Functional diagnostics of dynamic systems, Moscow—SPb., MGU-GRIF, 1998.
2. **Shumsky A. E., Zhirabok A. N., Gadzhiev Ch.** Diagnostics and fault-tolerant control of dynamic systems, Electronic edition, Vladivostok, Publishing house of FEFU, 2016, 178 p., available at: <http://elibr.dvfu.ru/vital/access/manager/Repository/feFu:4053>.
3. **Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M.** Diagnosis and fault tolerant control, Berlin, Springer-Verlag, 2003.
4. **Witczak M.** Fault diagnosis and fault tolerant control strategies for nonlinear systems, Berlin, Springer, 2014.

5. **Kwakernaak H., Sivan R.** Linear optimal control systems, N. Y., Wiley, 1972.

6. **Zhirabok A. N., Zuev A. V., Shumsky A. Ye.** Diagnosis of linear dynamic systems: an approach based on sliding mode observers, *Avtomatika i telemekhanika*, 2020, no. 2, pp. 18–35.

7. **Zhirabok A. N., Zuev A. V., Bobko E. Yu., Filatov A. L.** Solution of fault accommodation problem in nonlinear systems based on linear methods, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, no. 1, pp. 21–27.

8. **Zhirabok A., Zuev A., Filaretov V.** Fault identification in underwater vehicle thrusters via sliding mode observers, *Int. Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 2020, vol. 30, no. 4, pp. 679–688.

**S. Yu. Kurochkin**, kurochkin.smn@gmail.com, **A. A. Tachkov**, Cand. Sc., tachkov@bmstu.ru,  
Science and Educational Center "Robotics" Bauman Moscow State Technical University,  
Moscow, 105005, Russian Federation

*Corresponding author: Kurochkin S. Yu.*, Engineer of the Department "Automated transport systems",  
Science and Educational Center "Robotics" Bauman Moscow State Technical, Postgraduate  
of "Theory of Mechanisms and Machines" department of the Bauman, Moscow State Technical University,  
Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: kurochkin.smn@gmail.com

Accepted on March 5, 2021

## Methods of Formation Control for a Group of Mobile Robots (a Review)

### Abstract

The multi-robot formation control is an essential issue in robotics. This review focuses on important lines of research on current control issues and strategies on a group of unmanned autonomous vehicles/robots formation. In this paper, we provide a brief description of each method characterizing its key benefits and drawbacks. A multilayered classification of both centralized and decentralized formation control methods is proposed. We consider the classification of robot communication topologies in terms of centralized control. Seminal works dedicated to the practical application of centralized approach are briefly discussed. The majority of centralized methods are represented by a "leader-follower" approach, taking into account the robot's dynamics models. Furthermore, the most common models of vehicle dynamics are mentioned. In the framework of decentralized approach, behaviour-based algorithms, as well as swarm algorithms, are discussed. Then, we present an outlook of both centralized and decentralized virtual structure methods used in robot formation control. The described modifications of these methods allow tracing the evolution of the virtual structure approach to hybrid algorithms used for cooperative movement of a group of robots. This paper deals with formation control approach considering communication delays and low carrying capacity in an inter-vehicular communication network as very few works discussed this issue despite its relevance. We pointed out the main development trends of formation control approaches. The most effective approach is the integration of various methods of the formation control so that their disadvantages are nullified. As the same time, the most common disadvantage of discussed formation control methods is their weak conceptual framework in terms of kinematic and dynamic constraints of robots.

**Keywords:** mobile robot, unmanned autonomous vehicle, formation control, formation navigation, leader-follower approach, behaviour-based approach, swarm intelligence, virtual structure approach

For citation:

**Kurochkin S. Yu., Tachkov A. A.** Methods of Formation Control for a Group of Mobile Robots (a Review), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 304–312.

DOI: 10.17587/mau.22.304-312

УДК 007.52, 004.75

DOI: 10.17587/mau.22.304-312

**С. Ю. Курочкин**, аспирант, kurochkin.smn@gmail.com,  
**А. А. Тачков**, канд. техн. наук, начальник отдела  
"Автоматизированные транспортные системы", tachkov@bmstu.ru,  
НУЦ "Робототехника" МГТУ им. Н. Э. Баумана

## Методы управления групповым движением мобильных роботов (обзор)

Управление согласованным движением группы мобильных роботов является одной из актуальных проблем современной робототехники. В настоящем обзоре представлены результаты анализа наиболее перспективных направлений исследований в данной области. Рассмотрены основные методы управления движением группы мобильных роботов с сохранением заданной геометрии строя. Представлено краткое описание каждого метода, показаны основные преимущества и недостатки. Предложена многоуровневая классификация методов управления движением, охватывающая как централизованные, так и децентрализованные методы. В рамках централизованного управления движением группы мобильных роботов рассмотрена классификация топологий организации связи между роботами, кратко описаны наиболее значимые работы, посвященные применению данного подхода на практике. Отмечено, что боль-

шинство централизованных методов реализуют подход «ведущий-ведомый». Рассмотрены алгоритмы, учитывающие при управлении строем динамику движения отдельных роботов, приведены наиболее распространенные динамические модели роботов. В рамках децентрализованного подхода к управлению согласованным движением групп роботов рассмотрены как коллективные, так и стайные алгоритмы управления. Представлен обзор класса методов на основе использования "виртуальной структуры", включающего как централизованные, так и децентрализованные методы управления согласованным движением группы роботов. Продемонстрирована эволюция данного подхода, рассмотрены его модификации, применяющиеся в гибридных алгоритмах управления согласованным движением группы. Рассмотрены работы, посвященные методам управления движением группы роботов с учетом возникающих в каналах связи запаздываний, а также ограниченной пропускной способности, указана недостаточная проработанность данных методов. В работе показаны основные тенденции развития методов группового движения роботов. Отмечено, что наиболее перспективным является комбинирование различных алгоритмов группового управления, что позволяет нивелировать недостатки, возникающие при использовании их по отдельности. Показано, что наиболее распространенным недостатком существующих методов управления является недостаточная проработка алгоритмов управления группой мобильных роботов с точки зрения учета кинематических ограничений роботов, а также их динамики.

**Ключевые слова:** мобильный робот, безэкипажное транспортное средство, управление строем, навигация строя, подход "ведущий-ведомый", поведенческий подход, роевой интеллект, метод виртуальной структуры

## 1. Introduction

An application of multi-robot systems covers a wide range of applied problems for both civil [1–3] and military purposes [4–6], while the number of robots in a group can reach several hundred units [7]. One of the most urgent scientific problems of group robotics today is the problem of coordinated motion control of mobile robots with their maintenance of the formation geometry. For example, in [8, 9] a formation control is considered when transporting passengers and goods indoor as well as on public roads and over rough terrain [10]. The most of papers dealing with public transportation are related to CACC — Cooperative Adaptive Cruise Control [11, 12]. In the CACC system, autonomous vehicles [13] are combined into a platoon and drive at the same speed, maintaining the desired shape or formation geometry communicating over the wireless network [1].

An impressive number of articles are devoted to the problem of motion control for mobile robot group while maintaining their formation. For example, the query "robot formation control" in Google Scholar search engine is produced more than 838,000 results. In the last five years alone, the number of articles is devoted to the coordinated control of the robotic group movement is about 64,000. To determine the trends in the design of group motion control methods over the past quarter of a century, the authors of this paper have summarized the disparate results of researches in this area and have proposed a multi-level classification based on the "strategy for controlling a group of robots".

The remaining part of this paper is organized as follows. In Section 2, a proposed classification of methods for the formation control is presented. Section 3 is devoted to reviewing all the main methods based on a leader-follower approach. In Section 4, we

consider methods of motion control for a mobile robot group are most often implemented by reactive, or "behavioural" algorithms are known as a behaviour-based approach. In Section 5, methods based upon a virtual structure approach are discussed. Finally, conclusions are made in Section 6.

## 2. Proposed classification of methods and approaches used for formation control

In this section, we introduce the proposed by the authors' classification of methods used for formation control shown in Fig. 1.

The most frequent formation control methods are divided into three classes: leader-follower methods (the centralized control strategy), behavioural methods (the decentralized control strategy) and virtual structure methods, which can be both centralized and decentralized.

Centralized strategies are suggested a robot group is controlled by the so-called Central Control Unit (CCU), which plans robot paths and assigns tasks for each robot individually [14]. The robot group can also assign a leader robot (static or dynamic) which tracks a predefined path, while the others act as followers and track the leader according to their states. The main advantage of this method consists of the relative simplicity of robots-followers and used control algo-

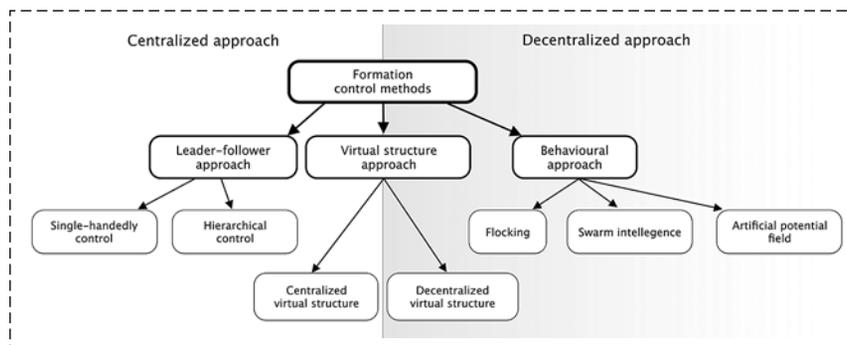


Fig. 1. Classification of methods for the formation control

rithms. The behaviour of robots can be analyzed using standard methods of the control theory. The disadvantages of leader-follower methods can be attributed to the fact that the error of the leader or the control center punishes the whole group and often leads to not-mission capable for further execution [15].

The methods relating to the decentralized approach include methods based on imitation of the animal behaviour, the so-called "behavioural" or "reactive" approaches [16]. For the first time, such a reactive approach was described by Craig Reynolds in 1987 [17]. In this method, each agent of the group has a pre-programmed set of behaviours which it chooses scenario-depended: the state of the environment, the behaviours of the other agents.

As an advantage of this class of methods, we can note their convenience for robots performing tasks in a dynamically changing environment and with moderate interaction between robots [15].

In the class of virtual structure methods, the desired position of each robot within the given structure and the shape of formation are specified. Thus, each robot is assigned its virtual leader and it has to minimize the error between its current and the desired position in the formation. It's important to stress that the path of the formation is only set to the entire virtual structure and not for each robot individually. This class includes both centralized and decentralized methods. Centralized virtual structure implies that positions of the robots are observed by CCU, which adjusts robot behaviour and appoints their poses in the formation. While using a decentralized approach, robots exchanging information, distribute their positions in formations they are involved.

The advantage of this class of methods, first of all, is the simplicity of setting the coordinated movement of the group, which is required, for example, when carrying bulky cargo. The disadvantages include the need to plan the path for the entire structure and when bypassing both static and dynamic obstacles, as a result of which the trajectories of individual robots may not be optimal [15].

### 3. Leader-follower approach

According to the centralized strategy, a mobile robot group is considered by a hierarchical structure. There is either a CCU or a leading robot at the top level of this structure.

Leader robots can be assigned in the group according to the number of robots and their homogeneity. Typically, a robot-follower equipped with a smaller set of navigation sensors than the leader. The information exchange between robots is organized following

one of the communication topologies, an overview of them is given in [18]. The most commonly used communication topologies are presented in Fig. 2.

In many situations, the leader-follower approach is mostly used to control vehicle platoons on the highway [19–23] or on the varying terrain [24, 25]. For example, Öncü et al. [19] consider the Cooperative Adaptive Cruise Control (CACC) system, which controls a group of vehicles of the same type driving along the highway. Communication between vehicles is organized according to the principle of a bidirectional topology (Fig. 2 c); a wireless communication channel with transport delays and limited bandwidth is used for data exchange. These communication limitations were considered by authors during the development of a control system for a group of vehicles movement [19]. The described system made it possible to ensure the reliable control of a vehicle platoon with an interval between cars of 20 m and a speed of 65 km/h with communication delays less than 750 ms.

The stability of the proposed method was analyzed in terms of string stability methods. The studied parameters were the transport delay in the communication channel, the number of cars in the group and the size of intervals between vehicles in the column. In the formation control system, as well as in the numerical simulation of the formation movement, a third-order dynamic car model was used (1) taking into account the delay in the wheel drive control loop:

$$\begin{cases} \dot{r}_i = v_i(t); \\ \dot{v}_i = a_i(t); \\ \dot{a}_i = \frac{1}{T_i} a_i(t) + \frac{1}{T_i} u_i(t - \tau_{a,i}), \end{cases} \quad (1)$$

where  $r_i$ ,  $v_i$ ,  $a_i$  — the absolute position, the velocity and the acceleration of the  $i$ -th vehicle, respectively;  $T_i$  — the parameter characterizing the internal actuator dynamics;  $u_i$  — the acceleration for the  $i$ -th vehicle;  $\tau_{a,i}$  — the constant actuation delay.

The effectiveness of the proposed algorithm was shown in [20], where the problem of forming a platoon and its further safe movement at a speed of 100 km/h in the presence of a transport delay up to 0.15 s has been solved.

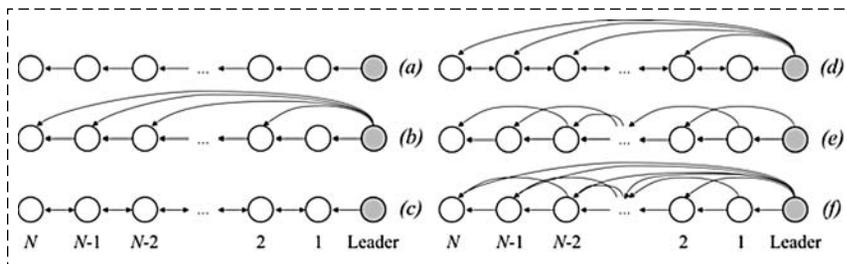


Fig. 2. Leader-follower topologies:

$a$  — predecessor following topology;  $b$  — predecessor-leader following topology;  $c$  — bidirectional topology;  $d$  — bidirectional-leader topology;  $e$  — two-predecessor following topology;  $f$  — two-predecessor-leader following topology

The method of formation control of non-identical vehicles while exchanging information over a wireless network of the IEEE 802.11p standard was proposed in [20]. This study was also taken into account transport delay in the communication network, packet loss as well as the switching time between different communication topologies (Fig. 2 a–f). In the in-line simulation in the Plexe simulator [21], the third-order linear model [22] similar to (1) was used. The stability of the control system for group motion was analyzed via Lyapunov-Razumikhin and Lyapunov-Krasovskii theorems. The transport lag margin in the communication channel was determined using the methods of linear matrix inequalities [20, 23].

It is widely known that the formation control of various shapes (diamond, chain, double column, etc.) is still a fundamental problem in unmanned vehicles. A detailed review of the control method in the formation of the "convoy" moving in a 2D-plane is presented in [24]. The navigation method for a group of heterogeneous mobile autonomous robots using the rules of the nearest neighbour was presented in [25]. The essence of this method is that robots of the group plan their trajectories taking into account the positions of their neighbours. The leader of such group moves along a planned trajectory and all other robots repeat his path with a given displacement [25, 24]. Further, this control method includes a mechanism for the reconfiguration of the formation, which is designed to avoid obstacles.

In general, the leader-follower approach can be used in sub-tasks of the group's motion control. For example, the leader-follower approach was used for the coordinated group's formation control while changing the formation shape [26]. In the control system [26], a-priori defined robot-leader sends commands to the rest of the group. The robots-followers move to their desired positions while avoiding collisions with obstacles and other robots, if the robot-follower finds its neighbour, then it moves after the neighbour until this robot-leader is in the desired position. In addition, the Hungarian algorithm was used in [26] to solve the problem of minimizing the cost of moving by robots.

#### 4. Behaviour-based approach

Decentralized methods of motion control of the robot group are most often implemented by reactive, or "behavioural" algorithms. These algorithms are based on the imitation of behavioural reactions of various organisms common in the living nature. Such algorithms are based on the concept of using competencies (behaviours) in known situations. Based on the information received from the robot's sensors, its control system selects the most appropriate behaviour for the environment. The basic principles of the behavioural approach are described in [27]:

- the behaviours of each robot are represented by standard algorithms implemented both at the software and hardware levels built with separate modules;
- each behaviour receives input information from the robot's sensors (radars, tactile sensors, lidars or cameras) and/or from other modules of its control system, and can also send commands to the robot's actuators and/or other modules of the robot's control system;
- the behaviours can independently receive data from the same sensors and send commands to the same actuators;
- the behaviours are relatively simple software modules added to the control system sequentially;
- the behaviours are performed in parallel taking into account interaction dynamics among behaviours and between behaviours and the environment.

The behavioural-based methods are used for control of a robot group while motioning in the formation of a certain geometric shape (pattern). For example, in [10], the problem of a moving convoy over rough terrain is considered. Using behavioural-based methods, the logic of movement of individual robots included in the group is implemented by simple behaviours: a movement to the target point, avoiding collisions with obstacles and other robots, a maintaining the shape of the formation (column, line, diamond and wedge). Two variants of the formation organization were also considered: relative to the geometric center and relative to the leading robot. As the experiments have shown, the formation relative to the leading robot is best suited for tasks where a column of robots is led by a human who independently navigates the terrain and drive around various obstacles. It was also noted that in this approach, the loss of communication or breakdown of one of the robots does not affect the overall behaviour of the system. The method of forming a group relative to its geometric center, as the authors note, has better performance [10], but the failure of one of the robots can stop the movement of the whole group. It is also noted that in the version of movement with the leader, the load on the communication network is reduced since there is no need for all robots to participate in the exchange of location information: only the leader transmits his position, and the necessary positions of the other robots of the group are calculated relative to him.

As another example describing the principle of operation of the behavioural approach, we can cite the robot motion control system described in the article [28]. In this paper, the behavioural-based method is used to control a group of robots, which task was to move the box in a dynamically changing environment. The control algorithm describes four possible situations in which robots may find its way into the process of performing a given task, using two parameters: the complexity of the task and the number of active robots. The architecture of the behaviour

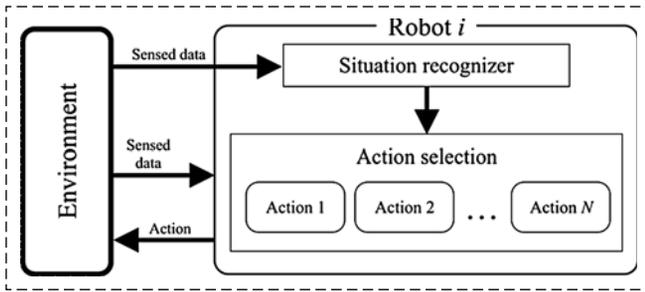


Fig. 3. The architecture of behaviour actions selection algorithm

actions selection algorithm of each robot is schematically shown in Fig. 3. Each robot recognizes one of the four possible situations and chooses the appropriate action for it. Thus, robots act according to the principles of a behavioural approach, responding to changes in the environment and adaptively selecting actions that correspond to the current situation.

A key node in this control system using a behavioural approach is a coordination system that links the available responses and output of the robot's actuators. The following coordination methods are usually used: an arbitration or a mixed strategy. When the arbitration method is used, only one of the available behaviours can participate in the computation of the control signal. This method is simple to implement, but unstable [29]. It is also noted that the choice of the correct rule (behaviour) is a non-trivial task [29]. In the mixed strategy method, all behaviours are simultaneously involved in the computation of the control signal, but the contribution of each is proportional to its applicability (weight) for the current situation. One of the implementations of the method with mixed strategy considered in the article [30] is presented in Fig. 4.

In such a control system, there is a supervisor unit that, based on data from the robot's sensors, tunes the weight for a set of actions, which are then added up and the resulting action is applied to the lower level of the robot's control system.

A modification of the behavioural approach called NSB-control (Null-Space-based Behavioral Control) was proposed in [31, 32]. In the proposed control system there is a supervisor unit that assigns a certain

weight to each action based on the robot's sensor data. In other words, each pre-described behaviour is assigned a priority, so that the robot can perform several actions simultaneously. Low-priority behaviours are not executed if they conflict with high-priority behaviours. Using this method, algorithms for the movement of robots in the formation of a certain geometric shape, the tasks of escorting a moving object, the movement of a flock, and patrolling a certain area were implemented in [31]. A detailed review of these algorithms is presented in the article [32]. The behavioural-based approach is also used in works devoted to the transportation of large-sized cargo by a group of UAVs, where the same problem of maintaining a certain form of structure is solving [33–35].

An algorithm using the principles of platoon movement is proposed in [36]. To maintain the formation of a certain geometric shape, the method of potentials was applied. Using simulation, it was shown that the proposed algorithm ensures the movement of a robot group in the formation of a given shape, while the same speed of movement of robots is provided during the movement. A similar approach was applied in the article [37], which describes the method of controlling a group of non-holonomic robots moving along a straight road. A safe distance between robots and maintaining the shape of the system was provided using the method of potentials. The La-Salle invariance principle was applied to analyze the stability of the robot's formation control system [38].

Another category of behavioural methods which used for controlling the movement of groups of robots is the swarm intelligence methods. Swarm intelligence methods are usually taken as an approach to managing and optimizing distributed systems using stable, decentralized, self-organizing methods based on the behaviour of social insects [39]. This category of methods of group motion control is well-known ant algorithms, a pack of wolves, swarm of bees, etc. Some of the most popular algorithms [40], as well as examples of their application, are shown in Table.

A detailed description of the above algorithms is given in the monograph [55]. In the [56], the algorithm of an ant colony optimization (ACO) was applied to

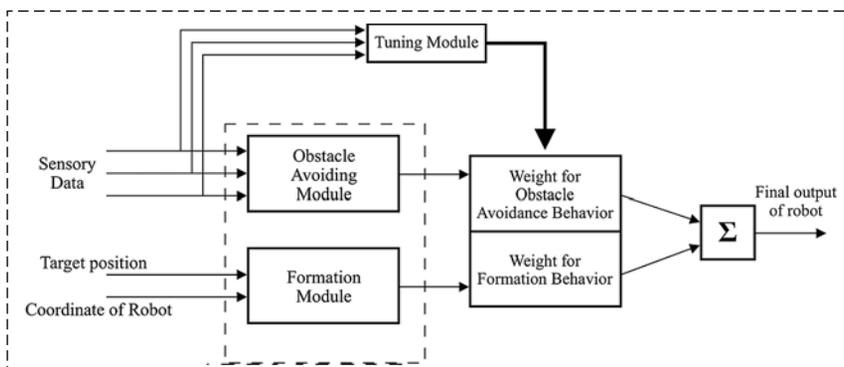


Fig. 4. Architecture of the control system for multi-robot formation control

solve the problem of rearrangement a group of robots in order to reduce the distances travelled by each robot in the process of changing the formation shape. Also, the ACO algorithm was used in the problem of forming a group of robots into the formation of a given shape. In [57], ants and the pheromones that they emit were implemented as mobile software agents. The diagram of the algorithm is shown in Fig. 5.

One agent, called the ant, controls the robot's actions, and another agent, called the pheromone, tells the ant agent

### Algorithms inspired by swarm intelligence

Algorithm	Algorithm details	Algorithm survey
Particle Swarm Optimization (PSO)	[41], [42]	[43], [44]
Ant Colony Optimization (ACO)	[45]	[46]
Artificial Bees Colony Optimization (ABCO)	[47]	[48]
Bacteria Foraging Optimization (BFO)	[49]	[50]
Glowworm Swarm Optimization (GSO)	[51]	[52]
Grey Wolf Optimizer (GWO)	[53]	[54]

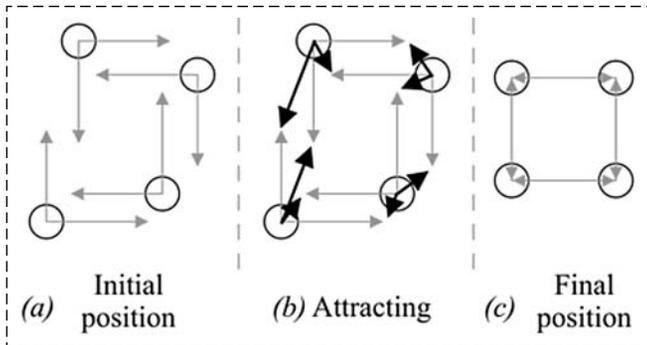


Fig. 5. The process of forming a shape by the group of ant agents

in which direction the robot is moved. Each ant agent knows only a fraction of the information about the shape of the formation. In order to spread partially known information among its neighbours, each ant agent generates pheromone agents and sends them to the surrounding robots (Fig. 5 a). The sent pheromone agent searches for the ant agent to which it was directed, and when the pheromone finds it, the ant agent leads the robot by following the pheromone agent's instructions, thus forming a building element (Fig. 5 b).

To solve the problem of a robot's rearrangement in the group, the known bat algorithm is also used. In [58], this algorithm was used to find the time-optimal method of group rearrangement. The algorithm has shown high efficiency in controlling a group of robots described by inaccurate mathematical models, in comparison with the CPTD (control parameterization and time discretization) method [59] and "line of sight" [60].

### 5. Virtual structure approach

The concept of the virtual structure was first introduced in [61] for methods of coordinated motion control of robot groups. In [61], a movement of three robots in shape formation of a triangle was described. The idea of the proposed method was to make similar the shapes of formation to a rigid formation, which elements are always at a fixed distance from each other, due to a system of physical constraints.

In a similar system, the perturbation of one element extends to all the others. An important feature of this class of methods is that if one of the robots cannot continue moving, for example, in the event of a breakdown, then the other robots do not allow the formation to break up until some high-level control process detects the failure and decides on further actions (Fig. 6). Among the advantages of the virtual structure method in comparison with the leader-follower approach, it is noted:

- a leader robot does not require due to high fault tolerance appointment of a group;
- the method of virtual structure can implement the movement of a robot group—in the formation of any possible shape;
- the virtual structure method does not require high computational burden for each robot in a centralized approach;
- there are no complex protocols for communication and decision-making.

According to the paper [61], the proposed method can be used in problems that require coordinated movement of robot groups transporting large objects, for example, boxes. This method can also be used in problems related to laser interferometry, in which it is required that several objects move in space, maintaining a fixed geometry with an accuracy of 1 cm [62].

In [62], the main directions of development of the proposed virtual structure algorithm were identified: the use of flexible or deformable structures, as well as hierarchical virtual structures. In [63], the virtual structure method was proposed for controlling robot groups moving along several lanes of the highway while maintaining the formation of a given shape. To achieve that, the control problem was divided into two subtasks: a high-level one for controlling the formation using the virtual structure method, and a low-level one for trajectory control of the robot's movement using a predictive model. The proposed method provided both the movement of robots in

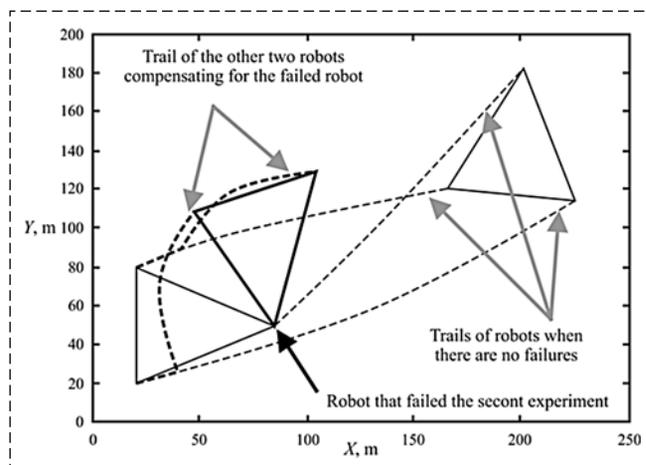


Fig. 6. The trajectory of three robots with a robot failure

the formation of a given shape and the prevention of collisions between robots. In [64] was proposed the architecture of an adaptive management system to arrange robots using a virtual structure, and the control system for the motion of a group of nonholonomic robots with reconfigurable formation shape was developed. Two controllers were used, the first one provided stable control of the group during a change in the configuration of the formation, and the second one controlling the movement of robots relative to a given position in the formation.

Among the works devoted to methods of controlling the formation of robots using flexible virtual structures, one can note the article [65]. The control system for a robot group is used three control algorithms: an algorithm for maintaining the shape of the system and avoiding collisions between robots, an attraction algorithm that ensures convergence to a given shape of the system, and an algorithm for avoiding obstacles. The stability of the proposed control system to external disturbances using the Lyapunov method was studied in [66]. The flexible virtual structure was described as a system of masses, springs, and dampers connecting each robot to its neighbours. The proposed method allowed a group of robots to behave like a flexible body, which can be used to avoid obstacles.

In [67], the architecture of a distributed control system for the motion of a robot group in an unstructured environment was considered. The architecture has used as a combination of a behavioural approach and a virtual structure method that, as the authors note [67], has the advantages of both control methods. The robot motion control system includes two algorithms: an algorithm for maintaining the shape of the system (a robot moves to its place in a virtual structure) and an algorithm for avoiding obstacles (Fig. 7). The robot control system based on the robot's sensors data selects the optimal algorithm for the current situation, like a supervisor using the arbitration method in a behavioural approach.

In subsequent works [68, 69], the authors proposed a modification of the control system for a group of unmanned vehicles: Multi-Layer and Multi-Controller (MLMC) architecture for dynamic navigation in the formation of a UGV's group in constrained

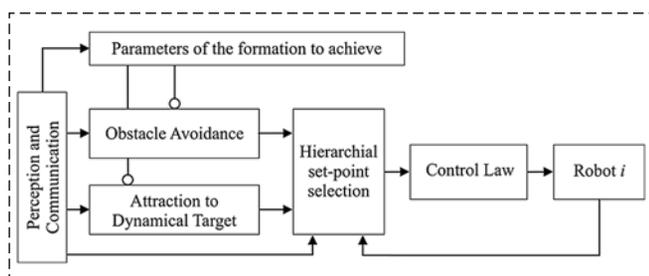


Fig. 7. Architecture of multi-robot formation control using hybrid control (deliberative/reactive)

environments. This control method also consists of two approach combination: the centralized leader-follower based approach and the decentralized behavioural-based approach, i.e. hybrid (centralized/decentralized) control as well as cognitive/reactive. The centralized part of the control algorithm is used to solve global tasks performed by the group, and the decentralized part is responsible for the navigation of robots and their local tasks, such as avoiding obstacles. In a group of robots controlled by this system, there is a leader leading the entire group and planning the path to avoid obstacles, taking into account the kinematic limitations of the other robots in the group. Also, these restrictions are used by the group control system during shape formation reconfigurations. In [70], the stability of the described control system is analyzed during the movement of a triangular structure in a circle with a change in the direction of movement using the Lyapunov method.

## 6. Conclusion

In this paper, we presented a literature review on the current research efforts on formation control for a group of robots/vehicles. Some well-developed control methodologies have been introduced. Over the last quarter of a century, there has been a tendency towards combination of different group motion control algorithms in order to eliminate the disadvantages that arise when using them separately. The problem of controlling the movement of a formation of robots does not lose its relevance, while the most promising methods for controlling a group of robots are hybrid methods that combine elements of both centralized and decentralized system.

In our opinion, the most promising methods are based on combinations of different approaches, especially those that use the virtual structure method as part of the multi-controller architecture. It is important to note the high versatility of the latter method, its low computational burden, as well as the low communication network load. It is also possible to use a decentralized virtual structure in hybrid control methods for a group of robots.

When developing the described control systems for groups of mobile robots, the authors usually follow only the kinematic constraints of mobile robots, with the exception of methods related to group movement on a one-lane road or highway in which dynamic models of second- and third-order vehicles are used. Also, only in a few of the reviewed works, the authors take into account the limitations imposed by the communication system (delays and bandwidth limitations). These shortcomings are present in most of the described works, from which it can be concluded that a thorough study of these problems is required.

## References

1. **Kavathekar P., Chen Y. Q.** Vehicle platooning: A brief survey and categorization, *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2011, pp. 829–845.
2. **Alonso-Mora J., Baker S., Rus D.** Multi-robot formation control and object transport in dynamic environments via constrained optimization, *The International Journal of Robotics Research*, 2017, vol. 36, no. 9, pp. 1000–1021.
3. **Das B., Subudhi B., Pati B. B.** Cooperative formation control of autonomous underwater vehicles: An overview, *International Journal of Automation and computing*, 2016, vol. 13, no. 3, pp. 199–225.
4. **Rudianov N. A., Khrushchev V. S.** Substantiation of the appearance of combat and support robotic complexes of the Ground Forces, *Engineering journal: science and innovations*, 2013, no. 8 (in Russian).
5. **Young S., Kott A.** Control of small robot squads in complex adversarial environments: A review. ARMY RESEARCH LAB ADELPHI MD, 2009.
6. **Scharre P.** Robotics on the battlefield part II, Center for New American Security, 2014.
7. **Chartier C., Swarming N. E.** C4ISR, and US Military Transformation, *Proc. of Conf. on Swarming: Network Enabled C4ISR*, 2003.
8. **Dey K. C. et al.** A review of communication, driver characteristics, and controls aspects of cooperative adaptive cruise control (CACC), *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2015, vol. 17, no. 2, pp. 491–509.
9. **Alonso-Mora J. et al.** Reactive mission and motion planning with deadlock resolution avoiding dynamic obstacles, *Autonomous Robots*, 2018, vol. 42, no. 4, pp. 801–824.
10. **Balch T., Arkin R. C.** Behavior-based formation control for multirobot teams, *IEEE transactions on robotics and automation*, 1998, vol. 14, no. 6, pp. 926–939.
11. **Sheikholeslam S., Desoer C. A.** Longitudinal control of a platoon of vehicles, *1990 American control conference*, IEEE, 1990, pp. 291–296.
12. **Girard A. R. et al.** A control architecture for integrated cooperative cruise control and collision warning systems, *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No. 01CH37228)*, IEEE, 2001, vol. 2, pp. 1491–1496.
13. **SAE On-Road Automated Vehicle Standards Committee.** Taxonomy and definitions for terms related to driving automation systems for on-road motor vehicles, *SAE International*, (J3016), 2016.
14. **Kalyaev I. A., Gaiduk A. R., Kapustyan S. G.** Models and algorithms of collective control in groups of robots, Moscow, FIZMATLIT, 2009, 280 p. (in Russian).
15. **Hirsch M. et al.** Optimization and Cooperative Control Strategies, *Proceedings of the 8th International Conference on Cooperative Control and Optimization*, Springer Science & Business Media, 2009, vol. 381.
16. **Beloglazov D. A. et al.** Group control of mobile objects in uncertain environments, Moscow, Fizmatlit, 2015 (in Russian).
17. **Reynolds C. W.** Flocks, herds and schools: A distributed behavioral model, *Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, 1987, pp. 25–34.
18. **Li S. E. et al.** An overview of vehicular platoon control under the four-component framework, *2015 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, IEEE, 2015, pp. 286–291.
19. **Öncü S. et al.** Cooperative adaptive cruise control: Network-aware analysis of string stability, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2014, vol. 15, no. 4, pp. 1527–1537.
20. **Salvi A., Santini S., Valente A. S.** Design, analysis and performance evaluation of a third order distributed protocol for platooning in the presence of time-varying delays and switching topologies, *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 2017, vol. 80, pp. 360–383.
21. **Segata M. et al.** Plexe: A platooning extension for Veins, *2014 IEEE Vehicular Networking Conference (VNC)*, IEEE, 2014, pp. 53–60.
22. **Rajamani R.** Vehicle Dynamics and Control. Springer, Boston, MA, 2012.
23. **Santini S. et al.** A consensus-based approach for platooning with intervehicular communications and its validation in realistic scenarios, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2016, vol. 66, no. 3, pp. 1985–1999.
24. **Das A. K. et al.** A vision-based formation control framework, *IEEE transactions on robotics and automation*, 2002, vol. 18, no. 5, pp. 813–825.
25. **Zhu Hua.** Motion control of a group of mobile robots in a "convoy" type formation. BMSTU, Moscow, 2018 (in Russian).
26. **Wan S., Lu J., Fan P.** Semi-centralized control for multi robot formation, *2017 2nd International Conference on Robotics and Automation Engineering (ICRAE)*, IEEE, 2017, pp. 31–36.
27. **Siciliano B., Khatib O.** Springer handbook of robotics, Springer, 2016.
28. **Yamada S., Saito J.** Adaptive action selection without explicit communication for multirobot box-pushing, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, 2001, vol. 31, no. 3, pp. 398–404.
29. **Egerstedt M.** Behavior based robotics using hybrid automata, *International Workshop on Hybrid Systems: Computation and Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000, pp. 103–116.
30. **Dong J., Chen H. T., Liu S.** A behavior-based policy for multirobot formation control, *Applied Mechanics and Materials. Trans Tech Publications Ltd*, 2012, vol. 220, pp. 1181–1185.
31. **Antonelli G. et al.** Experiences of formation control of multi-robot systems with the Null-Space-based Behavioral Control // Proceedings 2007 IEEE international conference on robotics and automation. IEEE, 2007, P. 1068–1073.
32. **Antonelli G., Arrichiello F., Chiaverini S.** The NSB control: a behavior-based approach for multi-robot systems, *Paladyn, Journal of Behavioral Robotics*, 2010, vol. 1, no. 1, pp. 48–56.
33. **Antonelli G. et al.** CAVIS: a Control software Architecture for cooperative multi-unmanned aerial Vehicle-manipulator System, *IFAC Proceedings Volumes*, 2014, vol. 47, no. 3, pp. 1108–1113.
34. **Baizid K. et al.** Behavioral control of unmanned aerial vehicle manipulator systems, *Autonomous Robots*, 2017, vol. 41, no. 5, pp. 1203–1220.
35. **Muscio G. et al.** Coordinated control of aerial robotic manipulators: theory and experiments, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, vol. 26, no. 4, pp. 1406–1413.
36. **Lei B., Li W.** Formation control for multi-robots based on flocking algorithm, *International Conference on Intelligent Robotics and Applications*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, pp. 1238–1247.
37. **Hayashi Y., Namerikawa T.** Flocking algorithm for multiple nonholonomic cars, *2016 55th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*, IEEE, 2016, pp. 1660–1665.
38. **La Salle J. P.** The stability of dynamical systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.
39. **Bonabeau E. et al.** Swarm intelligence: from natural to artificial systems, Oxford university press, 1999, no. 1.
40. **Soni A., Hu H.** Formation control for a fleet of autonomous ground vehicles: A survey, *Robotics*, 2018, vol. 7, no. 4, pp. 67.
41. **Kennedy J., Eberhart R.** Particle swarm optimization, *Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks*. IEEE, 1995, vol. 4, pp. 1942–1948.
42. **Shi Y., Eberhart R.** A modified particle swarm optimizer, *1998 IEEE international conference on evolutionary computation pro-*

ceedings. *IEEE world congress on computational intelligence*. IEEE, 1998, pp. 69–73.

43. **Sengupta S., Basak S., Peters R. A.** Particle Swarm Optimization: A survey of historical and recent developments with hybridization perspectives, *Machine Learning and Knowledge Extraction*, 2019, vol. 1, no. 1, pp. 157–191.

44. **Poli R., Kennedy J., Blackwell T.** Particle swarm optimization, *Swarm intelligence*, 2007, vol. 1, no. 1, pp. 33–57.

45. **Dorigo M., Caro G. D., Gambardella L. M.** Ant algorithms for discrete optimization, *Artificial life*, 1999, vol. 5, no. 2, pp. 137–172.

46. **Mohan B. C., Baskaran R.** A survey: Ant Colony Optimization based recent research and implementation on several engineering domain, *Expert Systems with Applications*, 2012, vol. 39, no. 4, pp. 4618–4627.

47. **Karaboga D., Basturk B.** A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: artificial bee colony (ABC) algorithm, *Journal of global optimization*, 2007, vol. 39, no. 3, pp. 459–471.

48. **Karaboga D. et al.** A comprehensive survey: artificial bee colony (ABC) algorithm and applications, *Artificial Intelligence Review*, 2014, no. 1, pp. 21–57.

49. **Passino K. M.** Biomimicry of bacterial foraging for distributed optimization and control, *IEEE control systems magazine*, 2002, no. 3, pp. 52–67.

50. **Rani B. S., Kumar C. A.** A comprehensive review on bacteria foraging optimization technique, *Multi-objective Swarm Intelligence*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2015, pp. 1–25.

51. **Krishnanand K. N., Ghose D.** Detection of multiple source locations using a glowworm metaphor with applications to collective robotics, *Proceedings 2005 IEEE Swarm Intelligence Symposium, 2005. SIS 2005*. IEEE, 2005, pp. 84–91.

52. **Karegowda A. G., Prasad M.** A survey of applications of glowworm swarm optimization algorithm, *International journal of computer applications*, 2013, vol. 975, pp. 39–42.

53. **Mirjalili S., Mirjalili S. M., Lewis A.** Grey wolf optimizer, *Advances in engineering software*, 2014, vol. 69, pp. 46–61.

54. **Faris H. et al.** Grey wolf optimizer: a review of recent variants and applications, *Neural computing and applications*, 2018, vol. 30, no. 2, pp. 413–435.

55. **Karpenko A. P.** Modern algorithms for search engine optimization. Algorithms inspired by nature, Moscow, BMSTU, 2014 (in Russian).

56. **Yang L., Gongyou T., Peidong W.** Formation distance problem in multi-agents control, *2012 Fifth International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation*, IEEE, 2012, pp. 181–184.

57. **Oikawa R., Takimoto M., Kambayashi Y.** Distributed formation control for swarm robots using mobile agents, *2015 IEEE 10th Jubilee International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics*. IEEE, 2015, pp. 111–116.

58. **Li G., Xu H., Lin Y.** Application of bat algorithm based time optimal control in multi-robots formation reconfiguration, *Journal of Bionic Engineering*, 2018, vol. 15, no. 1, pp. 126–138.

59. **Furukawa T. et al.** Time-optimal coordinated control of the relative formation of multiple vehicles, *Proceedings 2003 IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation. Computational Intelligence in Robotics and Automation for the New Millennium (Cat. No. 03EX694)*. IEEE, 2003, vol. 1, pp. 259–264.

60. **Borhaug E., Pavlov A., Pettersen K. Y.** Cross-track formation control of underactuated autonomous underwater vehicles, *Group Coordination and Cooperative Control*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006, pp. 35–54.

61. **Roy D., Maitra M., Bhattacharya S.** Study of formation control and obstacle avoidance of swarm robots using evolutionary algorithms, *2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC)*. IEEE, 2016, pp. 3154–3159.

62. **Tan K. H., Lewis M. A.** Virtual structures for high-precision cooperative mobile robotic control, *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IROS'96*, IEEE, 1996, vol. 1, pp. 132–139.

63. **Lau K. H.** Jet Propulsion Lab, *Personal Communication*, 2000.

64. **Qian X., De La Fortelle A., Moutarde F.** A hierarchical model predictive control framework for on-road formation control of autonomous vehicles, *2016 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, IEEE, 2016, pp. 376–381.

65. **Low C. B.** Adaptable virtual structure formation tracking control design for nonholonomic tracked mobile robots, with experiments, *2015 IEEE 18th International Conference on Intelligent Transportation Systems*, IEEE, 2015, pp. 1868–1875.

66. **Essghaier A. et al.** Co-leaders and a flexible virtual structure based formation motion control, *International journal of vehicle autonomous systems*, 2011, vol. 9, no. 1–2, pp. 108–125.

67. **Chen L., Baoli M.** A nonlinear formation control of wheeled mobile robots with virtual structure approach, *2015 34th Chinese Control Conference (CCC)*, IEEE, 2015, pp. 1080–1085.

68. **Benzerrouk A. et al.** Navigation of multi-robot formation in unstructured environment using dynamical virtual structures, *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, 2010, pp. 5589–5594.

69. **Vilca J., Adouane L., Mezouar Y.** Stable and Flexible Multi-Vehicle Navigation Based on Dynamic Inter-Target Distance Matrix, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 1416–1431.

70. **Benzerrouk A., Adouane L., Martinet P.** Stable navigation in formation for a multi-robot system based on a constrained virtual structure, *Robotics and Autonomous Systems*, 2014, vol. 62, no. 12, pp. 1806–1815.

**М. С. Лурье**, д-р техн. наук, проф., m-o-lur@yandex.ru,  
**О. М. Лурье**, канд. техн. наук, m-o-lur@yandex.ru,  
**А. С. Фролов**, канд. техн. наук, sibgtu-frolov@rambler.ru,  
Сибирский государственный университет науки и технологий  
имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск

## Исследование динамических режимов систем стабилизации тока мощных электромагнитов с широтно-импульсной модуляцией

*Настоящее исследование посвящено рассмотрению метода оценки устойчивости работы системы с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ), основанного на замене ее эквивалентной системой с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ). Проведено приближенное исследование динамических режимов работы систем с ШИМ с учетом устойчивости для системы автоматического регулирования тока питания электромагнитов в условиях действия внешних и внутренних помех. Представлены варианты выполнения схем широтно-импульсных регуляторов для питания электромагнита на основе однополярного и двухполярного элементов с ШИМ. Показана возможность линеаризации систем с ШИМ для последующей детальной оценки устойчивости таких систем. Показана перспективность применения функционально-дифференциальных уравнений для анализа устойчивости автоматических систем с ШИМ. Представлена оценка динамических режимов систем с ШИМ, основанная на принципе эквивалентности сигналов с ШИМ и АИМ, которая опирается на равенства площадей модулированных сигналов, на основе чего установлена связь между статическими коэффициентами передачи элементов с АИМ и ШИМ. Представлены выражения для исследования замкнутой одноконтурной схемы автоматического управления, содержащей идеальный импульсный элемент, экстраполятор нулевого порядка с коэффициентом передачи и непрерывной частью, имеющей линейную передаточную функцию. На примере системы стабилизации тока мощных электромагнитов с широтно-импульсным регулятором проанализированы частотные характеристики эквивалентной импульсной системы с учетом замены широтной модуляции на амплитудную. На основе проведенного анализа полученной передаточной функции предложены пути оценки устойчивости исходной системы с ШИМ с использованием критерия устойчивости Найквиста. Сделан вывод о преимуществе системы с ШИМ по сравнению с системой с АИМ в части устойчивости, а также даны рекомендации по применению полученных данных при анализе переходных процессов в таких системах.*

**Ключевые слова:** широтно-импульсная модуляция, линеаризация, нелинейная дискретная система, амплитудно-импульсная модуляция, устойчивость автоматической системы

### Введение

Для ряда физических исследований и технологических процессов, связанных с управлением электроприводом, требуются высокостабильные магнитные поля с широким диапазоном их изменения. Такие поля создаются мощными электромагнитами, как правило, имеющими кованый сердечник.

Источниками питания электромагнитов служат стабилизаторы тока мощностью до 100 кВт с широким диапазоном регулирования выходного тока. Особыми требованиями к ним является высокая точность поддержания заданного значения тока (до 0,01 %) при действии различных возмущений и малое значение длительной нестабильности (до 0,001 % за 6...8 ч работы).

Схема стабилизации тока включает, как правило, многофазный управляемый выпрямитель, охваченный обратной связью по напряжению, для предварительного регулирования напряжения и широтно-импульсный преобразователь для точного регулирования

тока, охваченный соответствующей обратной связью. Система автоматического регулирования напряжения здесь является подчиненной системой в контуре регулирования тока.

Необходимость высокой точности работы стабилизации тока предъявляет соответствующие требования к условиям устойчивости систем автоматического регулирования тока в условиях действия внешних и внутренних помех, поэтому в данной работе мы сделали попытку приближенного исследования динамических режимов работы систем с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ).

Поскольку электромагнит является колебательным звеном, то анализ устойчивости системы управления здесь оказывается обязательным. Исследованиям устойчивости автоматических систем управления с ШИМ посвящено достаточно много работ [1—9]. Затруднения вызывает то обстоятельство, что такие системы являются не только дискретными, но и нелинейными и не описываются дискретными (разностными) уравнениями. Для описания таких

систем могут быть использованы функционально-дифференциальные уравнения, причем нелинейные операторы, моделирующие импульсные элементы, в ряде случаев являются разрывными. Принципы описания импульсных систем с ШИМ приведены в работах [1, 10].

### Постановка задачи исследования

Широтно-импульсный регулятор может быть выполнен по двум схемам, показанным на рис. 1.

В схеме на рис. 1, а относительная величина пульсаций напряжения первой гармоники на ЭМ  $U_1$  составляет  $U_1 = \frac{2 \sin \pi \gamma}{\pi \gamma} \cdot 100\%$  и достигает 127,3 % при  $\gamma = 0$ , где  $\gamma = t_{и}/T$  — отношение длительности импульса  $t_{и}$  к его периоду  $T$ .

В схеме на рис. 1, б ключи работают с одной частотой и одинаковой относительной длительностью импульсов, но со сдвигом на полпериода частоты квантования. Для нее относительная величина первой гармоники пульсаций  $U_2$  будет равна

$$U_2 = \frac{2 \sin 2\pi\gamma}{2\pi\gamma} \cdot 100\%, \text{ при } 0 \leq \gamma \leq 0,5;$$

$$U_2 = \frac{\sin[2\pi(1-\gamma)]}{\pi\gamma} \cdot 100\% \text{ при } 0,5 \leq \gamma \leq 1,0.$$

При  $\gamma = 0,5$  пульсации в данной схеме отсутствуют. Частота квантования системы выбирается по минимуму пульсаций и должна, по меньшей мере, в два раза превосходить высшую частоту возмущающих воздействий, на которую рассчитан стабилизатор тока.

Системы с ШИМ представляют собой распространенную разновидность дискретных систем. Но в таких системах даже с линейной частью первого порядка возможны автоколебательные режимы при насыщении модулятора. В нашем случае передаточная функция электромагнита с кованым сердечником для медленно меняющихся токов имеет вид [11–13]

$$W(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{K_M(T_1s + 1)}{(T_3s + 1)(T_4s + 1)},$$

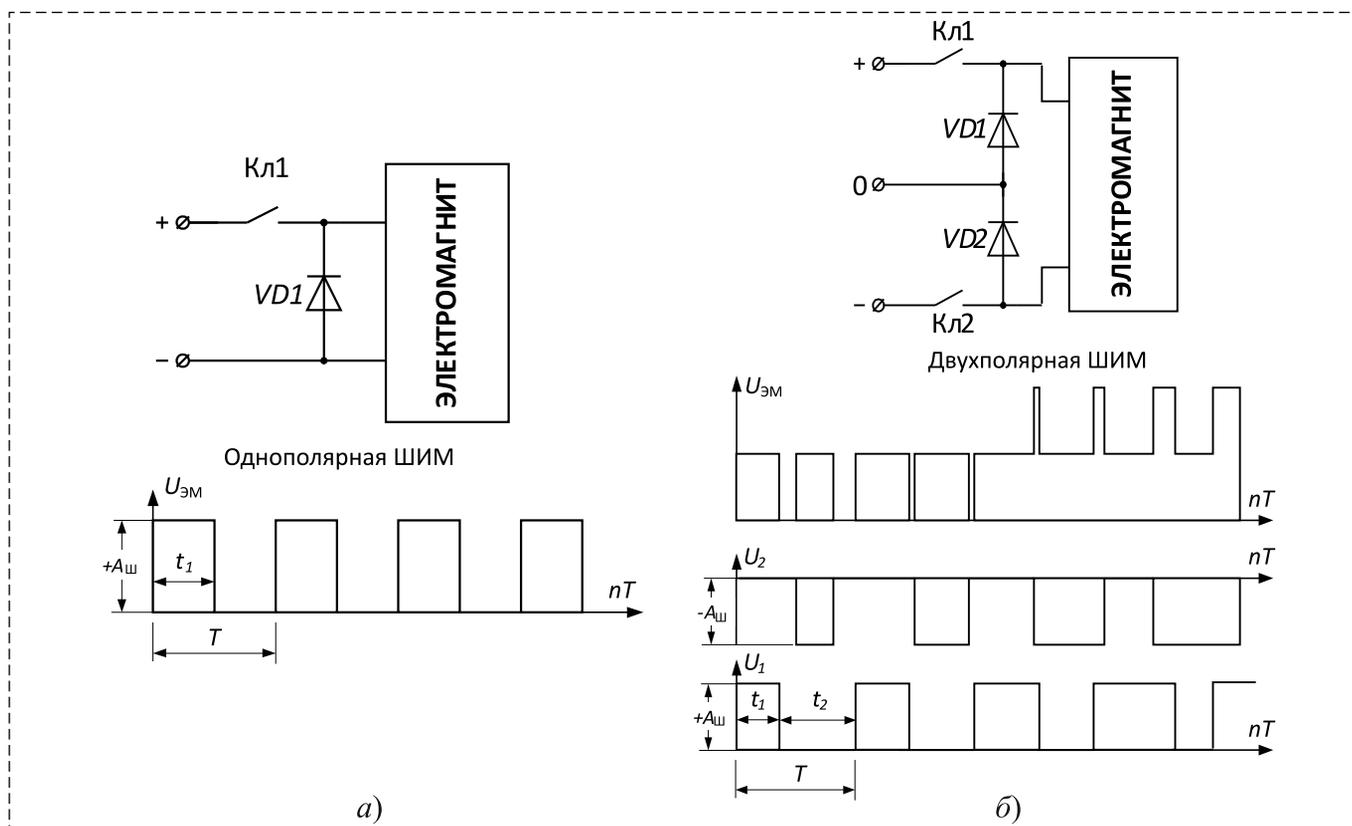


Рис. 1. Схемы широтно-импульсного регулятора

$t_1$  — длительность импульса;  $t_2$  — длительность паузы;  $T$  — период импульса;  $U_{ЭМ}$  — напряжение на ЭМ;  $U_1$  — напряжение с ключа Кл 1;  $U_2$  — напряжение с ключа Кл 2

Fig. 1. Pulse regulator circuits

$t_1$  — pulse duration;  $t_2$  — pause duration;  $T$  — pulse period;  $U_{EM}$  — voltage on EM;  $U_1$  — voltage from KL 1 key;  $U_2$  — voltage from KL 2 key

где

$$T_1 = \mu \sigma y_0^2 / 3; T_2 = L_S / R_M; T_M = \frac{3L_S}{4L_M} \mu \sigma y_0;$$

$$T_3 = \frac{2T_M T_S}{T_1 + T_2 + T_M + \sqrt{T_M^2 + 2T_M(T_1 + T_2) + (T_1 - T_2)^2}};$$

$$T_4 = \frac{2T_M T_S}{T_1 + T_2 + T_M - \sqrt{T_M^2 + 2T_M(T_1 + T_2) + (T_1 - T_2)^2}};$$

$I(s)$  — изображение выходного тока электромагнита;  $U(s)$  — изображение напряжения питания электромагнита;  $\mu$  — магнитная проницаемость материала;  $\sigma$  — полный коэффициент рассеяния;  $y_0$  — толщина сердечника;  $L_S, L_M$  — индуктивности рассеяния и обмотки электромагнита, соответственно;  $R_M$  — сопротивление обмотки постоянному току.

Задачей данной работы является исследование динамических режимов систем стабилизации тока с ШИМ в целях оценки устойчивости таких систем методом линеаризации.

### Линеаризация дискретной системы с ШИМ

Теория дискретных функций [10] позволяет достаточно полно аналитически исследовать системы с ШИМ при любом порядке линейной части, но требует решений, которые представляют сложную задачу даже для специалистов, владеющих аппаратом дискретных преобразований.

Начиная с 60-х годов прошлого века многие исследователи предлагали различные методы исследования динамики систем с ШИМ, основанные на допустимости применения того или иного математического аппарата, учитывающего информативные свойства ШИМ-сигнала [14].

Несколько специалистов (Р. Е. Andean [15], Р. Е. Nease [16]) предложили простую методику исследования динамических режимов систем с ШИМ, основанную на принципе эквивалентности сигналов с ШИМ и амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ) при равенстве их площадей. Этот приближенный метод несет погрешность в оценке поведения систем с ШИМ, но позволяет свести их исследование к классу достаточно изученных линейных систем с АИМ. Такой подход можно назвать линеаризацией нелинейной дискретной системы. Положим его в основу нижеприведенных оценок.

Прежде всего установим связь между статическими коэффициентами передачи элементов

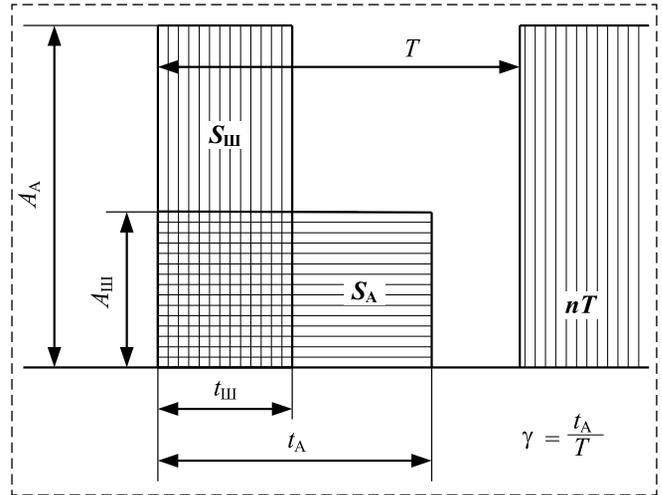


Рис. 2. Связь между статическими коэффициентами передачи систем с АИМ и ШИМ

Fig. 2. Communication between static coefficients Transmission of systems with AIM and PWM

с АИМ и ШИМ исходя из равенства площадей модулированных сигналов, представленных на рис. 2.

При этом можно записать такие известные соотношения:

$$K_A = A_A(x)/x; K_{Ш} = \psi(x)T/x,$$

где  $K_A$  и  $K_{Ш}$  — коэффициенты (крутизны) передачи элементов с АИМ и ШИМ;  $A_A(x)$  — амплитуда выходного сигнала элемента с АИМ;  $\psi(x)$  — относительная длительность импульсов элемента с ШИМ;  $T$  — период квантования.

Кроме того, принято:

- для однополярного элемента с ШИМ (см. рис. 1, а)

$$\psi = \gamma_1 = t_1 / T, \quad 0 < \gamma_1 < 1;$$

- для двухполярного элемента с ШИМ (см. рис. 1, б)

$$\psi = 2\gamma_1 - 1, \quad \gamma_1 = t_1 / T, \quad \gamma_2 = t_2 / T, \\ 0 < \gamma_1 < 1, \quad -1 < \psi < 1.$$

С учетом этих соотношений можно записать следующие формулы для площадей импульсов:

$$S_A = A_A(x)\gamma T; S_{Ш} = A_{Ш}\psi(x)T.$$

Отсюда, приравнявая площади импульсов  $S_A$  и  $S_{Ш}$ , после несложных преобразований получаем

$$K_{A,Ш} = \frac{A_{Ш}K_{Ш}}{\gamma T} = \frac{A_{Ш}\psi(x)}{\gamma x} = \frac{A_{A,Ш}(x)}{x},$$

где  $A_{A,Ш}(x) = A_{Ш}\psi(x)/\gamma$ ;  $\gamma = \text{const}$  — относительная длительность импульса при АИМ.

Таким образом, амплитуда  $A_{A,Ш}(x)$  становится таким же носителем информации о входном сигнале, как и при обычной АИМ.

Теперь будем исследовать обычную замкнутую одноконтурную схему системы автоматического управления, содержащую идеальный импульсный элемент, экстраполятор нулевого порядка с коэффициентом передачи  $K_{A,Ш}$  и непрерывной частью, имеющей передаточную функцию  $K_{H,T}(s)$ , являющейся отношением изображений выходного тока электромагнита  $I(s)$  и задающего сигнала системы стабилизации тока  $Uy(s)$ . Для получения достаточно общих выводов представим  $K_{H,T}(s)$  в виде суммы простых дробей:

$$K_{H,T}(s) = \frac{I(s)}{Uy(s)} = \frac{A}{s^v} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{B_i}{s - s_i} + \sum_{j=1}^{j=l} \frac{C_j s + D_j}{s^2 + p_j s + q_j}, \quad (1)$$

где число корней знаменателя передаточной функции будет равно  $n = v + k + 2l$ , причем здесь  $v$  — нулевых корней;  $k$  — вещественных некрратных и  $l$  — число пар комплексно-сопряженных некрратных корней.

Далее можно воспользоваться изображением в плоскости  $z$  для смещенной передаточной функции разомкнутой системы с экстраполятором нулевого порядка и запоминанием на неполный интервал квантования  $\gamma T$ , которое запишем в следующем виде:

$$\overline{K}^*(z, \sigma) = K_{A,Ш} [\overline{Y}^*(z, \sigma) - Y_1^*(z, \varepsilon_1)], \quad (2)$$

где  $K_{A,Ш}$  — передаточный коэффициент экстраполятора;  $\overline{Y}^*(z, \sigma)$ ,  $Y_1^*(z, \varepsilon_1)$  — смещенные  $z$ -преобразования передаточных функций импульсной системы;  $\sigma$  и  $\varepsilon_i$  — относительные смещения. В свою очередь,

$$\overline{Y}^*(z, \sigma) = \overline{z}_\sigma \left\{ \frac{K_{H,T}(s)}{s} \right\} = \overline{z}_\sigma \{K'_{H,T}(s)\}, \quad (3)$$

где  $\overline{z}_\sigma$  обозначена операция определения смещенного  $z$ -преобразования передаточной функции  $K'_{H,T}(s)$ ;

$$\overline{Y}_1^*(z, \varepsilon_i) = \begin{cases} z^{-1} \overline{Y}^*(z, \varepsilon_1) & \text{при } \varepsilon_1 = 1 + \sigma - \gamma \text{ и } 0 \leq \sigma \leq \gamma, \quad (4a) \\ \overline{Y}^*(z, \sigma_2) & \text{при } \varepsilon_2 = \sigma - \gamma \text{ и } 0 \leq \gamma \leq \sigma \leq 1. \quad (4b) \end{cases}$$

В формуле (4) принято, что

$$\overline{Y}^*(z, \varepsilon_i) = \overline{z}_{\varepsilon_i} \{K'_{H,T}(s)\}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_i$  — относительное фиктивное смещение.

Все дальнейшие выводы получены нами при оперировании формулами (1)–(5) для различных типов модуляторов. Для однополярного модулятора (см. рис. 1, а) из формулы (1) получим

$$\overline{K}_0^*(z, \sigma) = K_{A,Ш} \left[ \overline{Y}^*(z, \sigma) - \frac{Y^*(z, \varepsilon_1)}{z} \right], \quad (6)$$

где  $\sigma < \gamma_1$  и  $\varepsilon_1 = 1 + \sigma - \gamma_1$ .

Если  $\sigma > \gamma_1$ , то для преобразования следует пользоваться выражением (4б) при вычислении выражения (2). Этот случай (однополярного модулятора) нами здесь не рассматривается.

Для двухполярного модулятора (см. рис. 1, б) из выражения (2) находим

$$\overline{K}_D^*(z, \sigma) = K_{A,Ш} [\overline{Y}^*(z, \sigma) - \overline{Y}_1^*(z, \varepsilon_1) - \overline{Y}^*(z, \sigma_2) + \overline{Y}_1^*(z, \varepsilon_2)]. \quad (7)$$

При этом примем следующие значения параметров относительных смещений:

а) для положительного импульса модулятора  $\sigma < \gamma_1$ ,  $\varepsilon_1 = 1 + \sigma - \gamma$ ; в случае  $\sigma > \gamma_1$  необходимо пользоваться выражением (4а), вычисляя составляющую  $Y_1^*(z, \varepsilon_1)$  в выражении (7);

б) для отрицательного импульса модулятора

$$\sigma_2 = \gamma_1 + \sigma; \quad \varepsilon_2 = \gamma_1 + \sigma - \gamma_2 - 2\gamma_1 + \sigma - 1 \quad \text{при } 0 \leq \gamma_2 < \gamma_1 + \sigma < 1; \quad (8)$$

$$\sigma_2 = \gamma_1 + \sigma; \quad \varepsilon_2 = 1 + \gamma_1 + \sigma - \gamma_2 - 2\gamma_1 + \sigma \quad \text{при } 0 \leq \gamma_1 + \sigma < \gamma_2 < 1. \quad (9)$$

Таким образом, при соблюдении условия (8) и  $\gamma_1 + \sigma \geq 0,5$ , после преобразований по формуле (7) получаем:

$$\overline{K}_D^*(z, \sigma) = K_{A,Ш} \left[ \overline{Y}^*(z, \sigma) - \overline{Y}^*(z, \sigma_2) + \overline{Y}^*(z, \varepsilon_2) + \frac{\overline{Y}^*(z, \varepsilon_1)}{z} \right]. \quad (10)$$

При  $\gamma_1 + \sigma \leq 0,5$ , учитывая (9), имеем

$$\overline{K}_D^*(z, \sigma) = K_{A, \text{Ш}}[\overline{Y}^*(z, \sigma) - \overline{Y}^*(z, \sigma_2) + z^{-1}\{\overline{Y}^*(z, \varepsilon_2) - \overline{Y}^*(z, \varepsilon_1)\}]. \quad (11)$$

В дальнейших исследованиях для упрощения выкладок положим  $\sigma = 0$ , т. е. будем определять несмещенные значения  $z$ -преобразований передаточных функций  $K^*(z, 0)$  по формулам (6), (10) и (11) для импульсной системы, непрерывная часть которой описана выражением (1).

Для однополярного модулятора при  $\nu = 1$  найдем

$$\overline{K}_0^*(z, 0) = K_{A, \text{Ш}}[\overline{K}_1^*(z, 0) + \overline{K}_2^*(z, 0) + \overline{K}_3^*(z, 0)], \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{K}_1^*(z, 0) &= AT\gamma_1/(z-1); \\ \overline{K}_2^*(z, 0) &= \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{d_i^{1-\gamma_1} - d_i}{z - d_i}; \\ d_i &= e^{-\alpha_i T}; \quad \alpha_i = |s_i|; \quad b_i = B_i/\alpha_i; \\ \overline{K}_3^*(z, 0) &= \sum_{j=1}^{j=l} C_j \frac{a_{0j} z}{q_j} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{z} + \sec \varphi_j \frac{F_j(z, \lambda_1)/z - F_j(z, \lambda_0)}{N_j(z)} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь взаимосвязь параметров с элементами слагаемых формулы (1) будет следующей:

$$\begin{aligned} d_j &= e^{-\alpha_j T}; \quad a_{0j} = D_j/C_j; \quad a_j = p_j/2; \\ \operatorname{tg} \varphi_j &= (q_j - a_j a_{0j})/(a_{0j} \beta_j); \quad q_j = a_j^2 + \beta_j^2. \end{aligned}$$

Функции  $F_j(z, \lambda_0)$  и  $F_j(z, \lambda_1)$  вычисляются по единому выражению:

$$\begin{aligned} F_j(z, \lambda_i) &= d_j^{\lambda_i} \{z \cos(\lambda_i \beta_j T + \varphi_j) - \\ &- d_j \cos[(1 - \lambda_i) \beta_j T - \varphi_j]\}, \end{aligned}$$

со значениями  $\lambda_0 = 0$  и  $\lambda_1 = 1 - \gamma_1$ , а функция  $N(z)$  — по выражению

$$N(z) = z^2 - 2z d_j \cos \beta_j T + d_j^2.$$

Для двухполярного модулятора примем  $\gamma_1 \geq 0,5$  и, соблюдая условия (8), по формуле (12), оперируя выражениями (1) и (10), рассчитаем составляющие  $z$ -преобразованной несмещенной передаточной функции:

$$\overline{K}_1^*(z, 0) = \frac{1 - (1 - \gamma_1)(z + 1)}{z - d_j} AT; \quad (13)$$

$$\overline{K}_2^*(z, 0) = \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{z(d_i^{\lambda_3} - d_i^{\lambda_2}) + (d_i^{\lambda_1} - d_j)}{z - d_j}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \overline{K}_3^*(z, 0) &= \sum_{j=1}^{j=l} C_j \frac{a_{0j} z}{q_j} \left\{ \frac{1}{z} + \sec \varphi_j \times \right. \\ &\times \left. \frac{F_j(z, \lambda_3) - F_j(z, \lambda_0) - F_j(z, \lambda_2) + z^{-1} F_j(z, \lambda_1)}{N_j(z)} \right\}. \end{aligned}$$

Параметры полученных выражений находятся так же, как в формуле (12), но  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 1 - \gamma_1$ ,  $\lambda_2 = 2\gamma_1 - 1$  и  $\lambda_3 = \gamma_1$ . Аналогичным образом при  $\gamma_1 \leq 0,5$  по формуле (11) найдем:

$$\overline{K}_1^*(z, 0) = AT \frac{3\gamma_1 - \gamma_1 z - 1}{z - 1}; \quad (15)$$

$$\overline{K}_2^*(z, 0) = \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{z(d_i^{\lambda_3} - d_i^{\lambda_0}) + (d_i^{\lambda_1} - d_i^{\lambda_2})}{z - d_i}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \overline{K}_3^*(z, 0) &= \sum_{j=1}^{j=l} C_j \frac{a_{0j} z}{q_j} \left\{ \cos \varphi_j \times \right. \\ &\times \left. \frac{F_j(z, \lambda_3) - F_j(z, \lambda_0) + z^{-1} F_j(z, \lambda_1) - z^{-1} F_j(z, \lambda_2)}{N_j(z)} \right\}. \end{aligned}$$

В этих выражениях  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 1 - \gamma_1$ ,  $\lambda_3 = \gamma_1$ , но  $\lambda_2 = 2\gamma_1$ .

### Устойчивость линеаризованной модели системы с ШИМ

Проанализируем частотные характеристики эквивалентной импульсной системы, в которой широтная модуляция заменена амплитудной. Кроме того, ограничим число корней выражения (1) одним нулевым и  $k$  вещественными. Тогда, используя  $w$ -преобразование для однополярного модулятора, имеем

$$\begin{aligned} \overline{K}_0(j\omega^*, 0) &= K_{A, \text{Ш}} \left[ A \left( -\frac{T\gamma_1}{2} - \frac{j\gamma_1}{\omega^x} \right) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{d_i^{1-\gamma_1} \left( 1 - \frac{T}{2} \tau_i \omega^{*2} \right) - j\omega^* \left( \tau_i + \frac{T}{2} \right)}{1 + (\tau_i \omega^*)^2} \right], \quad (17) \end{aligned}$$

где  $\tau_i = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + d_i}{1 - d_i}$ ;  $\omega^*$  — размерная псевдочастота.

Выполнив аналогичные преобразования в формуле (12), с учетом выражений (13) и (14) при  $\gamma_1 \geq 0,5$  найдем:

$$\begin{aligned} \overline{K}_D^*(j\omega^*, 0) = & K_{A,Ш} \left[ \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{m_1 + m_2}{1 - d_i} \times \right. \\ & \left. \times \frac{(1 + T_i \tau_i \omega^{*2}) + j\omega^*(T_i - \tau_i)}{1 + (\tau_i \omega^*)^2} \right] + \\ & + A \left( -\frac{T}{2} - j \frac{2\gamma_1 - 1}{\omega^*} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $m_1 = d_i^{\lambda_3} - d_i^{\lambda_2}$ ,  $m_2 = d_i^{\lambda_1} - d_i$ ,  $T_i = \frac{T}{2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ .

Наконец, при  $\gamma_1 \leq 0,5$  для двухполярного модулятора, преобразуя (12) с учетом выражений (15) и (16), получим:

$$\begin{aligned} \overline{K}_D^*(j\omega^*, 0) = & K_{A,Ш} \left[ \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{n_1 + n_2}{1 - d_i} \times \right. \\ & \left. \times \frac{(1 + T_{li} \tau_i \omega^{*2}) + j\omega^*(T_{li} - \tau_i)}{1 + (\tau_i \omega^*)^2} \right] + \\ & + A \left( \frac{T}{2} (1 - 4\gamma_1) - j \frac{2\gamma_1 - 1}{\omega^*} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $n_1 = d_i^{\lambda_3} - d_i^{\lambda_0}$ ,  $n_2 = d_i^{\lambda_2} - d_i^{\lambda_1}$ ;  $T_{li} = \frac{T}{2} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ .

Передаточная функция линеаризованной замкнутой эквивалентной системы при нулевом смещении будет равна

$$\overline{\Phi}(\omega, 0) = \frac{\overline{K}(\omega, 0)}{1 + \overline{K}(\omega, 0)}.$$

Поскольку при заданном значении относительной длительности импульсов  $\gamma_1$  полюсы и нули передаточной функции остаются постоянными по величине и могут быть легко определены, то для исследования ее устойчивости можно воспользоваться аналогом критерия Найквиста [17].

Для удобства исследований амплитудно-фазовых характеристик вида (17)–(19) при вариациях  $\gamma_1$  и  $\omega^*$  запишем эти выражения следующим образом:

$$\overline{K}(j\omega^*, 0) = \overline{P}(\omega^*, 0) + j\overline{Q}(\omega^*, 0).$$

Сопоставление характеристик систем с АИМ (эквивалентной модуляцией) и ШИМ выполним по приращению вещественных частей выражения (18) при  $\gamma_1 = 1$  и при  $\gamma_1 < 1$  и получим

$$\begin{aligned} \Delta \overline{P}_0(\omega^*, 0) = \\ = K_{A,Ш} \left[ \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{1 - d_i^{1-\gamma_1}}{1 - d_i} \cdot \frac{1 - \frac{T}{2} \tau_i \omega^{*2}}{1 + (\tau_i \omega^*)^2} - \frac{AT}{2} (1 - \gamma_1) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Из формулы (20) очевидно условие лучшей устойчивости системы с ШИМ, чем с АИМ, поскольку  $\Delta \overline{P}_0(\omega^*, 0) < 0$  при  $\omega^* \rightarrow \infty$ .

Таким же способом найдем приращение вещественных характеристик систем с АИМ и с ШИМ при  $\gamma_1 > 0,5$  и двухполярной модуляции. Вычитая из вещественной части выражения (17) при  $\gamma_1 = 1$  вещественную часть выражения (18) и проводя ряд преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta \overline{P}_D(\omega^*, 0) = \\ = K_{A,Ш} \sum_{i=1}^{i=k} \left[ (1 + d_i^{2\gamma_1 - 1}) - \frac{T}{2} \tau_i \omega^{*2} (1 - d_i^{2\gamma_1 - 1}) \right] \times \\ \times \frac{b_i (1 - d_i^{1-\gamma_1})}{(1 - d_i) [1 + (\tau_i \omega^*)^2]}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из формулы (21) видно, что  $\Delta \overline{P}_D(\omega^*, 0) < 0$  при  $\omega^* \rightarrow \infty$ , но это условие начинает выполняться при больших значениях частот, чем в случае однополярного ШИМ.

Исследовать в общем виде приращение  $\Delta \overline{P}(\omega^*, 0)$  при наличии в линейной части системы колебательных звеньев из-за громоздкости выражений не удастся, но можно сделать вывод, что условия устойчивости для таких систем с ШИМ изменяются по сравнению с системами, имеющими амплитудную модуляцию, в зависимости от конкретных значений параметров колебательных звеньев. Поэтому устойчивость таких систем следует проверять по соотношениям (17)–(19) численным образом, что позволяет исследовать устойчивость систем с ШИМ практически при любом составе их непрерывной части [18].

### Заключение

1. Метод линеаризации систем с ШИМ путем замены последних на эквивалентную систему с АИМ может с успехом использоваться для аналитического исследования устойчивости при относительно несложной непрерывной части системы или для численного исследования при любом составе непрерывной части.

2. Можно утверждать, что условия устойчивости систем с ШИМ, содержащих в линейной части только интеграторы и апериодические звенья, будут лучше, чем в таких же системах с АИМ.

3. Если будут заданы качественные показатели переходного процесса, то можно установить пределы изменения относительной длительности импульсов ШИМ и с большей достоверностью оценить устойчивость эквивалентной системы с АИМ при фиксированных минимальных и максимальных значениях  $\gamma_1$  (если отсутствует насыщение широтно-импульсного модулятора).

4. При наличии насыщения в модуляторе эквивалентная система с АИМ должна рассматриваться как нелинейная, причем для оценки возможности возникновения автоколебаний могут быть использованы методы, разработанные для нелинейных систем с АИМ.

5. Для приближенной оценки переходных процессов в системе с ШИМ при заданных постоянных минимальных и максимальных значениях  $\gamma_1$  рассчитываются аналогичные режимы в эквивалентной системе с АИМ. Найденные показатели качества переходных процессов используются как предельные для системы, имеющей ШИМ.

#### Список литературы

1. **Якубович В. А.** Об импульсных системах управления с широтной модуляцией // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. С. 283–285.
2. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем // Мехатроника, автоматизация, управление, 2017. Т. 18, № 6. С. 371–375.
3. **Дикусар Ю. Г., Кузнецова Н. И.** Исследование абсолютной устойчивости нелинейных дискретных систем автоматического управления // Энергетические установки и технологии, 2017. № 3. С. 20–25.

4. **Фалдин Н. В., Феофилов С. В., Козырь А. В.** Об одном методе линеаризации систем управления, работающих в режиме ШИМ // Известия ТулГУ. Технические науки. 2016. Вып. 12. Ч. 4. С. 61–64.
5. **Абрамов С. С.** Оценка устойчивости широтно-импульсной системы методом приближенного анализа // Вестник ТГТУ. 2010. Т. 16, № 3. С. 528–532.
6. **Гелиг А. Х., Чурилов, А. Н.** Частотные методы в теории устойчивости систем управления с импульсной модуляцией // Автомат. и телемех. 2006. № 11. С. 60–76.
7. **Mouton H. du T., Cox S. M., McGrath B., Risbo L., Putzeys V.** Small-Signal Analysis of Naturally-Sampled Single-Edge PWM Control Loops // Power Electronics IEEE Transactions on. 2018. Vol. 33, N. 11. P. 51–64.
8. **He Sh., Q. Chunjiang, Yunlei Z.** Analysis of a Chain of Integrators with Pulse-Width-Modulation Controller // American Control Conference (ACC). 2020. P. 3653–3658.
9. **Bordry F., Dupaquier A.** High Current, Low Voltage Power Converters for LHC. Present development Directions // Proc. of the EPAC-96. 1996. Vol. 3. P. 2314.
10. **Цыпкин Я. З., Попков Ю. С.** Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. 416 с.
11. **Урман Е. Л.** О передаточной функции двигателя постоянного тока, управляемого изменением напряжения возбуждения // Автомат. и телемех. 1958. Т. 19, Вып. 6. С. 609–613.
12. **Жиц М. З.** Переходные процессы в машинах постоянного тока. М.: Энергия, 1974. 112 с.
13. **Merkel B., Thirumalai K., Tarlton J. E., Sch fer V. M., Balance C., Harty T. P., Lucas D. M.** Magnetic field stabilization system for atomic physics experiments // The Review of scientific instruments. 2019. Vol. 90, Iss. 4. P. 044702.
14. **Zhang Z., Han H., Zhao Q., Ye L.** Stability Analysis of Pulse-Width-Modulated Feedback Systems with Time-Varying Delays // Mathematical Problems in Engineering. 2014. Vol. 2014. Article ID 686389. 7 p.
15. **Andean P. E.** Analysis of pulse duration sampled data systems with linear elements // IRE Trans. Automat. Contr., 1960. Sept. Vol. 9. P. 17–22.
16. **Nease R. E.** Analysis and design of non linear sampled date control systems // Mars. Inst.Tech., Cambridge W. A. D.C., Techn. note, 1957. June. P. 57–162.
17. **Лурье М. С.** Исследование возможности линеаризации систем с широтно-импульсной модуляцией // Труды ЛПИ им. М. И. Калинина. Л.: Изд-во Ленинградского политехнического института, 1976. № 355. С. 28–32.
18. **Ковчин С. А., Лурье М. С.** Приближенное исследование динамических режимов систем автоматического управления с широтно-импульсной модуляцией // Автоматизация производства: Межвуз. сб. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. Вып. 2. С. 67–76.

## Study of Dynamic Modes of Current Stabilization Systems of Powerful Electromagnets with Pulse-Width Modulation

**M. S. Lur'e**, Dr. of Tech. Sc., Professor, m-o-lur@yandex.ru,

**O. M. Lur'e**, Cand. of Tech.Sc., Associate Professor, m-o-lur@yandex.ru,

**A. S. Frolov**, Cand. of Tech.Sc., Associate Professor, sibgtu-frolov@rambler.ru,  
Reshetnev Siberian State University of Science and Technology,  
Krasnoyarsk, 660037, Krasnoyarsk region, Russian Federation

*Corresponding author: Lur'e M. S., Dr. of Tech. Sci., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, 660037, Krasnoyarsk region, Russian Federation, e-mail: m-o-lur@yandex.ru*

*Accepted on March 19, 2021*

### Abstract

This study is devoted to the consideration of a method for assessing the stability of systems with pulse-width modulation, based on the linearization of its equivalent system with pulse-width modulation. An approximate study of the dynamic modes of operation of systems with pulse-width modulation, taking into account the stability for the system of automatic control of the supply current of electromagnets under the conditions of external and internal interference, is carried out. Variants of execution of schemes of pulse-width regulators for the power supply of an electromagnet based on a unipolar and bipolar element with pulse-width modulation are presented. The possibility of linearization of systems with pulse-width modulation for the subsequent detailed assessment of the stability of such systems is shown. The prospects of using functional differential equations for stability analysis of automatic systems with pulse-width modulation are shown. The frequency characteristics of an equivalent pulse system are analyzed using the example of a current stabilization system of high-power electromagnets with a pulse-width regulator, taking into account the replacement of the latitude modulation by the amplitude one. Based on the analysis of the resulting transfer function, which is a stable linearized equivalent open system, the ways of evaluating the stability of the original system with pulse-width modulation using the Nyquist stability criterion are proposed. The conclusion is made about the advantage of a system with PWM, in relation to a system with AIM, in terms of stability, and recommendations are given for the use of the obtained data in the analysis of transients in such systems.

**Keywords:** latitude and pulse modulation; linearization; nonlinear discrete system; Amplitude-impulse modulation, stability of the automatic system

For citation:

Lur'e M. S., Lur'e O. M., Frolov A. S. Study of Dynamic Modes of Current Stabilization Systems of Powerful Electromagnets with Pulse-Width Modulation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 313–320.

DOI: 10.17587/mau.22.313-320

### References

1. Yakubovich V. A. About pulsed control systems with latitudinal modulation, *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1968, vol. 180, pp. 283–285 (in Russian).
2. Vorotnikov V. I., Martysenko Yu. G. To Problem of Partial Stability of Nonlinear Discrete-Time Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 371–375 (in Russian).
3. Dikuser Yu. G., Kuznetsova N. I. The study of the absolute sustainability of nonlinear discrete automatic control systems, *Energy Installations and Technologies*, 2017, no. 3, pp. 20–25 (in Russian).
4. Faldin N. V., Feofilov S. V., Kozyr A. V. On a method of linearization of control systems operating in PWM, *Izvestiya Tulgu. Technical Science*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 61–64 (in Russian).
5. Abramov S. S. Assessment of the stability of the latitude and pulse system by the method of approximate analysis, *Bulletin of TSTU*, 2010, vol. 16, no. 3, pp. 528–532 (in Russian).
6. Helig A. Kh., Churilov A. N. Frequency methods in the theory of stability of control systems with pulse modulation, *Automatic. and Telemeh.*, 2006, vol. 11, no. 11, pp. 60–76 (in Russian).
7. Mouton H. du T., Cox S. M., McGrath B., Risbo L., Putzeys B. Small-Signal Analysis of Naturally-Sampled Single-Edge PWM Control Loops, *Power Electronics IEEE Transactions on*, 2018, vol. 33, no. 11, pp. 51–64.
8. He Sh., Chunjiang Q., Yunlei Z. Analysis of a Chain of Integrators with Pulse-Width-Modulation Controller, *American Control Conference (ACC)*, 2020, pp. 3653–3658.
9. Bordry F., Dupaquier A. High Current, Low Voltage Power Converters for LHC. Present development Directions, *Proc. of the EPAC-96*, 1996, vol. 3, pp. 2314.
10. Tsapkin Ya. Z. Theory of nonlinear impulse systems, Moscow, Nauka, 1973. 416 p (in Russian).
11. Urman E. L. On the transfer function of the DC motor controlled by a change in excitation voltage, *Avtomat. and Telemeh.*, 1958, vol. 6, no. 19, pp. 609–613 (in Russian).
12. Zhits M. Z. Transient processes in DC, Moscow, Energia, 1974, 112 p. (in Russian).
13. Merkel B., Thirumalai K., Tarlton J. E., Sch fer V. M., Balance C., Harty T. P., Lucas D. M. Magnetic field stabilization system for atomic physics experiments, *The Review of scientific instruments*, 2019, vol. 90, iss. 4, pp. 044702.
14. Zhang Z., Han H., Zhao Q., Ye L. Stability Analysis of Pulse-Width-Modulated Feedback Systems with Time-Varying Delays, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, Vol. 2014, Article ID 686389, 7 p.
15. Andean P. E. Analysis of pulse duration sampled data systems with linear elements, *IRE Trans. Automat. Contr.*, 1960. Sept., vol. 9, pp. 17–22.
16. Nease R. E. Analysis and design of non linear sampled date control systems, *Mars. Inst. Techn. Cambridge W. A. D.C., Techn. note*, 1957, June, pp. 57–162.
17. Lur'e M. S. Research the possibility of linearization of systems with pulse modulation (PWM), *LPI works*, 1976, no. 355, pp. 28–32 (in Russian).
18. Kovachin S. A., Lur'e M. S. Approximate study of the dynamic modes of automatic control systems with pulse modulation, *Automation of production: Interunion. Sat*, 1979, vol. 2, pp. 67–76 (in Russian).

М. В. Левский, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., levskii1966@mail.ru,  
Научно-исследовательский институт космических систем имени А. А. Максимова —  
филиал ГКНПЦ им. М. В. Хруничева

## Динамическая задача оптимального управления ориентацией космического аппарата с ограничением на фазовые переменные

*Представлено аналитическое решение задачи оптимального управления переориентацией космического аппарата (КА) из произвольного начального углового положения в требуемое конечное угловое положение при наличии ограничений как на управляющие функции, так и на фазовые переменные (ограничены силовой момент и угловая скорость). Минимизируется время разворота. Рассматривается случай, когда существенным ограничением является максимально допустимая кинетическая энергия вращения. Построение оптимального управления разворотом основано на принципе максимума и кватернионных переменных и моделях. Показано, что оптимальным является кусочно-непрерывное управление, при котором во время вращения КА направление кинетического момента постоянно относительно инерциальной системы координат, при выполнении оптимального разворота момент сил параллелен прямой, неподвижной в инерциальном пространстве. В зависимости от заданных начального и конечного положений и моментов инерции КА возможны два типа оптимального управления — релейное управление с одной точкой переключения, когда на всем интервале управления действует максимально возможный управляющий момент (участки разгона и торможения), и релейное управление с двумя точками переключения, включающее интенсивный разгон, движение по инерции с выключенным моментом и выходом на ограничение по энергии вращения, а затем финальным торможением с максимальным управляющим моментом. Записаны аналитические уравнения и соотношения для нахождения оптимальной программы управления. Даны расчетные формулы для определения временных характеристик маневра и вычисления длительности разгона и торможения. Предложенный алгоритм управления позволяет максимально быстро осуществлять переориентацию КА с ограниченной кинетической энергией вращения. Для динамически симметричного твердого тела (космического аппарата) поставленная задача оптимального управления решается до конца — получены зависимости как явные функции времени для управляющих переменных и соотношения для расчета ключевых параметров закона управления. Приводятся численный пример и результаты математического моделирования движения КА при оптимальном управлении, демонстрирующие практическую реализуемость разработанного метода управления ориентацией КА.*

**Ключевые слова:** космический аппарат, ориентация, кватернион, энергия вращения, принцип максимума, управляющая функция, релейное управление

### Введение

Исследуется динамическая задача оптимального по времени управления разворотом космического аппарата (КА) из произвольного начального положения покоя в заданное конечное положение покоя, когда ограничены не только управляющие функции, но и фазовые переменные (ограничения наложены на силовой момент и угловую скорость). Пространственное движение КА относительно центра масс описывается кватернионом [1]. Построение оптимальной программы вращения основано на кватернионных моделях, принципе максимума и универсальных переменных [2].

Вопросы управляемого движения твердого тела вокруг центра масс исследовались неоднократно [1—14] (в том числе с помощью гиро-

динов [3—5]). Многие авторы отмечают [6, 7], что аналитическое решение задачи оптимального разворота в замкнутой форме, если бы оно было найдено, имело бы большой практический интерес, так как позволяет применять на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории движения КА. Немало работ исследуют проблемы наискорейшего разворота [1, 5—10]. Некоторые решения получены для осесимметричных КА [9—11] (причем в работе [11] дано лишь численное решение краевой задачи принципа максимума путем замены переменных и сведением ее к краевой задаче разворота сферически-симметричного тела). Однако аналитическое решение задачи пространственного разворота для КА с произвольным распределением масс при произвольных граничных

условиях по угловому положению КА не найдено; известны лишь некоторые особые случаи решения задачи разворота (например, [1, 12]).

Проблема создания высокоэффективных алгоритмов управления ориентацией КА остается актуальной и сегодня. Предлагаемое ниже решение позволяет максимально быстро разворачивать КА с ограниченной кинетической энергией вращения, что крайне важно для практики космических полетов. Вопросы быстрой реализации маневров при экономном управлении движением КА остаются до сих пор актуальными, поэтому решаемая задача является практически важной.

### Уравнения углового движения и постановка задачи управления

Полагаем, что управление угловым положением КА осуществляется посредством исполнительных механизмов, создающих вращающие моменты относительно всех трех главных центральных осей инерции КА. Угловое движение КА как твердого тела описывается динамическими уравнениями Эйлера [1]

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1; \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2; \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned} \quad (1)$$

и кинематическим уравнением, записанным в кватернионной форме [1],

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \quad (2)$$

где  $J_i$  — главные центральные моменты инерции КА;  $\omega_i$  — проекции вектора  $\omega$  абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса  $E_{КА}$ , образованного главными центральными осями эллипсоида инерции КА;  $M_i$  — проекции главного момента  $M$  сил на оси связанного базиса  $E_{КА}$  ( $i = \overline{1, 3}$ );  $\Lambda$  — кватернион [1], задающий движение связанного базиса  $E_{КА}$  относительно инерциального базиса  $I$ . Считается, что область допустимых управлений  $M$  описывается условием [10]

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leq u_0^2, \quad (3)$$

где  $u_0 > 0$  — некоторая положительная величина, характеризующая мощность исполнительных органов системы ориентации КА. Далее

полагаем, что для допустимых движений кинетическая энергия вращения КА не должна превышать некоторой положительной величины  $E_{доп}$ , т. е. управление ограничено условием

$$J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 \leq 2E_{доп}, \quad (4)$$

где  $E_{доп}$  — максимально допустимая энергия вращения. Практическое значение имеют задачи, когда разворот выполняется из положения покоя в положение покоя относительно опорного базиса  $I$  (и угловые скорости в начальный и конечный моменты времени равны нулю, так как базис  $I$  не вращается); рассматривается задача разворота с закрепленными левым и правым концами траектории движения. Поэтому уравнения (1), (2) имеют следующие краевые условия:

$$\Lambda(0) = \Lambda_H, \quad \omega(0) = 0; \quad (5)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_K, \quad \omega(T) = 0, \quad (6)$$

где  $T$  — время окончания маневра переориентации. Кватернионы  $\Lambda_H$  и  $\Lambda_K$  имеют произвольные наперед заданные значения, для которых  $\Lambda_K \neq \pm \Lambda_H$  и  $\|\Lambda_H\| = \|\Lambda_K\| = 1$  (кватернион  $\Lambda$  принят нормированным [1] для удобства). Задачу оптимального управления сформулируем следующим образом: необходимо перевести КА из состояния (5) в состояние (6) в соответствии с уравнениями (1), (2) и ограничениями (3), (4) за минимальное время  $T$ . Оптимальное решение  $M(t)$  ищется в классе кусочно-непрерывных функций.

### Математическая формулировка необходимых условий оптимальности

В соответствии с принципом максимума [15] введем сопряженные переменные  $\varphi_j$ , соответствующие угловым скоростям  $\omega_j$ . Вместо сопряженных переменных  $\psi_j$ , соответствующих компонентам  $\lambda_j$  кватерниона  $\Lambda$  ( $j = \overline{0, 3}$ ), используем универсальные переменные  $r_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) [2], поскольку критерий оптимальности не содержит позиционных координат (элементов кватерниона ориентации  $\Lambda$ ). Запишем гамильтониан задачи оптимального управления (1)–(6) [2]:

$$\begin{aligned} H = & -1 + \varphi_1(M_1 + (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3)/J_1 + \\ & + \varphi_2(M_2 + (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3)/J_2 + \\ & + \varphi_3(M_3 + (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2)/J_3 + \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3. \end{aligned}$$

Оптимальные функции  $r_i$  как компоненты вектора  $r$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3; \\ \dot{r}_2 &= \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1; \\ \dot{r}_3 &= \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения для сопряженных функций  $\varphi_i$  имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \omega_3 \varphi_2 (J_1 - J_3) / J_2 + \omega_2 \varphi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_1; \\ \dot{\varphi}_2 &= \omega_3 \varphi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \varphi_3 (J_2 - J_1) / J_3 - r_2; \\ \dot{\varphi}_3 &= \omega_2 \varphi_1 (J_3 - J_2) / J_1 + \omega_1 \varphi_2 (J_1 - J_3) / J_2 - r_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Гамильтониан  $H$  составлен без учета ограничения  $\|\Lambda\| = 1$  для фазовых переменных в силу равенства  $\|\Lambda(0)\| = 1$ , о чем договорились выше. Вектор  $\mathbf{r}$  неподвижен относительно инерциального базиса  $\mathbf{I}$ , из-за чего  $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$ . Решение  $\mathbf{r}(t)$  системы (7) определяется начальным  $\Lambda_n$  и конечным  $\Lambda_k$  положениями КА. Оптимальная функция  $\mathbf{r}(t)$  вычисляется через кватернион  $\Lambda(t)$  [1, 2]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda,$$

где  $\mathbf{c}_E = \text{const} = \Lambda_n \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_n$  (составляющие вектора  $\mathbf{c}_E$  — проекции вектора  $\mathbf{r}$  на оси инерциального базиса  $\mathbf{I}$ ). Система уравнений (7), (8) совместно с требованием максимальной гамильтониана  $H$  дает необходимые условия оптимальности. Обозначим

$$E(t) = (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) / 2.$$

Для нахождения максимума гамильтониана запишем функцию  $H$  в виде

$$H = M_1 \varphi_1 / J_1 + M_2 \varphi_2 / J_2 + M_3 \varphi_3 / J_3 + H_{inv},$$

где  $H_{inv}$  не зависит явно от управляющих функций  $M_i$ . Пусть  $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$  — вектор сопряженных переменных  $\varphi_i$ . Нетрудно видеть, что в случае  $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$  максимум функции  $H$  для управлений  $M_i(t)$  при ограничении (3) достигается, если

$$M_i = \frac{u_0 \varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2 / J_1 + \varphi_2^2 / J_2 + \varphi_3^2 / J_3}}. \quad (9)$$

В начале и в конце разворота ограничение (4) несущественно, оно переходит в строгое неравенство, так как угловые скорости в начальный и конечный моменты времени равны нулю:  $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ . Поэтому в интервалах движения, когда  $E(t) < E_{\text{доп}}$ , оптимальное решение определяется замкнутой системой уравнений (1), (2), (7)—(9) с учетом требований (5), (6). Системе (1), (7)—(9) удовлетворяют функции  $\varphi_i$ , пропорциональные  $r_i$ . С учетом условий разворота

$\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$  система уравнений (1), (7)—(9) имеет единственное решение, в котором  $\varphi_i$  и угловые скорости  $\omega_i$  связаны с переменными  $r_i$  зависимостями

$$\varphi_i = a(t) r_i; \quad (10)$$

$$\omega_i = b(t) r_i / J_i, \quad (11)$$

где  $b(t)$  — скалярная функция времени;  $a(t) = a(0) - t$  (значение  $a(0)$  определяется временными параметрами разворота). Подставив равенства (10), (11) в систему (8) с учетом уравнений (1), (7), (9) получим три тождества, что доказывает истинность решения (10), (11). Значение  $\mathbf{r}(0)$  такое, чтобы в результате интегрирования уравнений (1), (2), (7), (11) с начальными условиями  $\Lambda(0) = \Lambda_n$  для траектории движения  $\Lambda(t)$  выполнялось равенство  $\Lambda(T) = \Lambda_k$ .

Разворот КА совершается максимально быстро, если в каждый момент времени  $t$  угловая скорость максимальна, насколько это позволяют ограничения (3) и (4). Если  $E(t) < E_{\text{доп}}$ , то оптимальным является управление (9), и  $\mathbf{M} \neq 0$ , если  $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$ . При условии  $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$  область возможных значений вектора  $\mathbf{u}$  с компонентами  $u_i = M_i / \sqrt{J_i}$  сокращается из шара  $|\mathbf{u}| \leq u_0$  до плоского круга, ограниченного окружностью, образованной пересечением сферы с плоскостью, перпендикулярной вектору, компонентами которого являются  $\omega_i \sqrt{J_i}$  (поскольку для выполнения  $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$  должно выполняться  $\dot{E} = 0$  и, следовательно,  $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ ; знак умножения "•" означает скалярное произведение векторов). Оптимальный момент  $\mathbf{M}$  обязан находиться внутри сечения эллипсоида (3) плоскостью, перпендикулярной угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$ , с тем, чтобы  $\dot{E} = 0$ , пока не наступит момент начала остановки вращения (а он существует, поскольку  $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$ ).

При разгоне (начиная с момента  $t = 0$ ), когда  $E(t) < E_{\text{доп}}$  и кинетическая энергия вращения  $E(t)$  возрастает, имеем  $a(t) > 0$  и  $\mathbf{M} \neq 0$  и, как следствие,

$$M_i = \frac{u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2}} \quad (12)$$

(управляющий момент (12) делает раскрутку максимально быстрой [13]). На участке торможения (в интервале времени слева от момента  $t = T$ ), когда  $E(t) < E_{\text{доп}}$  и кинетическая энергия вращения  $E(t)$  уменьшается,  $a(t) < 0$  и  $\mathbf{M} \neq 0$ , чтобы  $\dot{E} < 0$ , т.е.

$$M_i = \frac{-u_0 J_i \omega_i}{\sqrt{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2}} \quad (13)$$

(слева от момента  $t = T$  управляющий момент  $\mathbf{M}$  и кинетический момент  $\mathbf{L}$  имеют противоположные направления, и длительность остановки вращения минимальна [13]). На участках разгона и торможения, когда  $E(t) < E_{\text{доп}}$ , кинетическая энергия вращения изменяется в соответствии с уравнением  $\dot{E} = \pm u_0 \sqrt{2E}$  ("+" соответствует разгону, "-" — торможению). Поэтому для участка разгона  $E(t) = u_0^2 t^2 / 2$ , а для участка торможения  $E(t) = u_0^2 (T - t)^2 / 2$ . Поскольку в момент начала торможения кинетическая энергия такая же, как в момент окончания разгона, то длительности разгона и торможения одинаковы и равны  $\tau = t_p = \sqrt{2E_{\text{max}}}/u_0$ , где  $E_{\text{max}} = E(T/2)$  — максимальная энергия вращения.

Найдем, каким будет оптимальное управление  $\mathbf{M}$ , чтобы удовлетворялось условие  $\dot{E} = 0$  с одновременной максимизацией гамильтониана  $H$ . При вращении с постоянной кинетической энергией  $E(t) = E_{\text{доп}}$  необходимо, чтобы

$$M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3 = 0. \quad (14)$$

Для решения уравнений (10), (11) при условии  $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$  имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1 M_1 / J_1 + \varphi_2 M_2 / J_2 + \varphi_3 M_3 / J_3 = \\ = a(t)(M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 + M_3 \omega_3) / b(t) = 0, \end{aligned}$$

и поэтому

$$H = \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 - 1 \quad (15)$$

(очевидно,  $b(t) \neq 0$ , когда  $E(t) = E_{\text{доп}}$ ). Угловые скорости  $\omega_i$ , при которых достигается максимум гамильтониана  $H$  (с учетом  $E(t) = E_{\text{доп}}$ ), будут следующими:

$$\omega_i = \frac{r_i \sqrt{2E_{\text{доп}}}}{J_i \sqrt{r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3}}. \quad (16)$$

При выполнении соотношений (10), (11) гамильтониан  $H$  равен

$$\begin{aligned} H = -1 + a(M_1 r_1 / J_1 + M_2 r_2 / J_2 + M_3 r_3 / J_3) + \\ + b(r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3). \end{aligned}$$

Подставив зависимости (16) для оптимальных угловых скоростей  $\omega_i$  в динамические уравнения (1) с учетом уравнений (7) для оптимальных функций  $r_i$ , получим оптимальный силовой момент  $\mathbf{M} = 0$  для моментов времени,

когда  $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$  (на участке между разгоном и торможением), при этом  $\dot{H} = 0$ , так как на этапе разгона оптимальный момент  $\mathbf{M}$  и вектор  $\boldsymbol{\varphi}$  имеют одинаковое направление и в момент окончания разгона  $r_i = J_i \omega_i / b$ . Легко убедиться, что

$$r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3 = \text{const},$$

Поскольку  $|\mathbf{r}| \neq 0$  и  $H = \text{const}$  внутри отрезка времени, на котором  $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$  (так как  $\dot{H} = 0$ ), то

$$b = \text{const} = (1 + H) / (r_1^2 / J_1 + r_2^2 / J_2 + r_3^2 / J_3).$$

Это означает, что в оптимальном развороте в интервале времени, когда  $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ , будет  $|\mathbf{L}| = \text{const}$ , что подтверждает вывод об оптимальности значения  $\mathbf{M} = 0$  в моменты времени, когда  $E(t) = \text{const}$ . Вращение по инерции есть частный случай закономерности (11) с учетом (7). На момент достижения равенства  $E(t) = E_{\text{доп}}$  направления оптимального вектора  $\boldsymbol{\varphi}$  и кинетического момента  $\mathbf{L}$  совпадают, поэтому единственным решением системы (1), (7), (8) в интервале времени, когда  $E(t) = \text{const}$ , являются зависимости (10), в которых  $\dot{a} = -1$ . Из свойства непрерывности функции  $a(t)$  следует, что  $a(t) = a(0) - t$  для любого момента времени  $t$ , пока  $a(t) \geq 0$ . Как только  $a(t) < 0$ , так управление (9) становится оптимальным, потому что  $\boldsymbol{\varphi} \neq 0$  и силовой момент (9) (а значит, и (13)) не нарушает требования (4), поскольку при таком управлении будут выполняться условия  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{L} < 0$  и  $\dot{E} < 0$ . Следовательно, решение (10), (11), в котором  $a(t) = a(0) - t$ , справедливо для всего интервала управления  $t \in [0, T]$ . В оптимальном решении  $a(0) > 0$  и  $a(T) < 0$ .

### Структура оптимального управления

В зависимости от условий разворота (сочетания значений  $\Lambda_n$ ,  $\Lambda_k$  и  $J_1, J_2, J_3, u_0$ ) в оптимальном движении из начального положения  $\Lambda_n$  в конечное положение  $\Lambda_k$  максимальная кинетическая энергия вращения может быть меньше  $E_{\text{доп}}$ , а может возникнуть необходимость вращения в течение какого-то времени с выполнением равенства  $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ . Определим условия, когда оптимальное управление исключает наличие моментов времени, в которые КА вращается с постоянной кинетической энергией. Для того чтобы  $\dot{E} \neq 0$  на всем отрезке времени  $t \in [0, T]$ , время  $T$  долж-

но быть меньше, чем  $2\sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0$ . Чтобы рассчитать время оптимального разворота  $T$ , используем значение функционала пути [14]

$$S = \int_0^T \sqrt{J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2} dt, \quad (17)$$

которое не зависит от характера изменения скалярной функции  $b(t)$ , если движение КА удовлетворяет уравнениям (7), (11) [14]. Исходя из соотношений  $T\sqrt{2E_{\text{макс}}} = 2S$ ,  $E_{\text{макс}} = u_0^2\tau^2/2$  и  $T = 2\tau$  получаем  $T = 2\sqrt{S}/u_0 = T_{\text{fast}}$  — минимально возможное время разворота при ограничении (3) даже без учета требования (4) к кинетической энергии вращения. Для оптимального управления с одной точкой переключения в момент времени  $t = T/2$  необходимо выполнение условия  $T_{\text{fast}} \leq 2\sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0$ . Если  $u_0S \leq 2E_{\text{доп}}$ , то во время максимально быстрого разворота вращение КА в режиме  $E(t) = \text{const}$  невозможно. Если  $u_0S > 2E_{\text{доп}}$ , то наличие участка движения КА с постоянной кинетической энергией вращения неизбежно; разница  $S - 2E_{\text{доп}}/u_0$  определяет длительность участка движения по инерции.

Таким образом, в зависимости от значения функционала пути (17), вычисленного для движения в соответствии с уравнениями (7), (11), реализуется один из двух вариантов оптимального управления: если  $u_0S \leq 2E_{\text{доп}}$ , то оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения, при котором  $a(T) = -a(0)$ , а если  $u_0S > 2E_{\text{доп}}$ , то оптимальным является релейное управление с двумя точками переключения, при котором  $a(0) > -a(T)$ . Рис. 1 отражает оптимальное управление, при котором существует отрезок времени с  $E(t) = \text{const}$

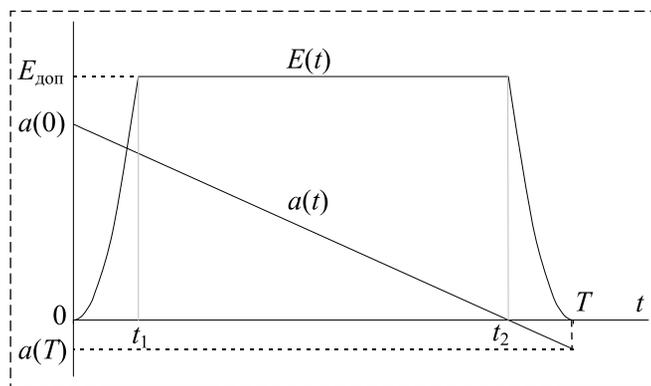


Рис. 1. К определению точек переключения  
Fig. 1. For determining the points of switching

(при выполнении условия  $S > 2E_{\text{доп}}/u_0$  для значения (17));  $t_1$  — ближайший к началу разворота момент достижения равенства  $E(t) = E_{\text{доп}}$ ;  $t_2$  — момент смены знака скалярной функции  $a(t)$  (начиная с момента времени  $t = t_2$  функция  $a(t)$  удовлетворяет условию  $a(t) < 0$ ). Для  $t > t_2$  имеем  $a(t) < 0$ , и оптимальным является управление (9), потому что при таком силовом моменте будет выполняться условие  $\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = \dot{E} < 0$  и ограничение (4) несущественно вплоть до  $t = T$ . В интервалах  $t < t_1$  и  $t > t_2$  оптимальным управлением является (9), при котором будет выполнено условие  $|\mathbf{M}| = \text{const} = u_0/C$ , где  $C = \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3} = \text{const}$ ,  $p_i = r_i / r_0$ ,  $r_0 = \text{const} = |\mathbf{r}| \neq 0$ .

На участке вращения с максимально допустимой кинетической энергией оптимальный момент  $\mathbf{M}$  определяется из трех условий: из ограничения (3), требования (14) и условия, что в каждый текущий момент времени  $t$ , пока  $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ , гамильтониан  $H$  принимает максимальное значение. Из структуры гамильтониана (15) следует, что во время вращения КА с постоянной максимально допустимой кинетической энергией оптимальным является такое управление  $\mathbf{M}$ , при котором в каждый текущий момент времени  $t$  (пока  $E(t) = \text{const} = E_{\text{доп}}$ ) угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  удовлетворяет соотношениям (16).

Требование (14) привело к структуре (15), при которой гамильтониан  $H$  не зависит явным образом от силового момента  $\mathbf{M}$ . Оптимальное значение  $\mathbf{M}$  вычисляем путем подстановки оптимальных угловых скоростей (16) в уравнения (1) с учетом (7) для переменных  $r_i$  и проверки выполнения условий (3), (14) (т. е. проверяем, чтобы момент  $\mathbf{M}$  находился внутри области допустимых значений). В результате получим  $\mathbf{M} = 0$ . Очевидно, что найденное управление удовлетворяет (3), (14). Таким образом, структура оптимального управления полностью определена:

$$\mathbf{M}(t) = \begin{cases} \frac{u_0 \text{sign} a(t)}{\sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}} \mathbf{r}, & \text{если } E(t) < E_{\text{доп}} \text{ или } a(t) < 0; \\ 0, & \text{если } E(t) = E_{\text{доп}} \text{ и } a(t) \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что вращение по инерции полностью соответствует (10), (11) ((16) является частным случаем (11) и не противоречит (10)). Поэтому найденное оптимальное решение (10),

(11) справедливо на всем интервале управления  $t \in [0, T]$ .

Константу  $r_0$  определим из условия трансверсальности  $H(T) = 0$  (так как время окончания оптимального процесса не фиксировано). Найдем  $H(T)$  с учетом (10):

$$\begin{aligned} H(T) &= \\ &= -1 + a(T)(-u_0\sqrt{r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3}) = \\ &= -1 - u_0 a(T) r_0 C. \end{aligned}$$

Значение  $a(T)$  оптимальной функции  $a(t)$  в конечный момент времени равно  $a(T) = -1/(u_0 r_0 C)$ . При любом типе оптимального управления (с одной или с двумя точками переключения)  $a(T) = -\tau$  (напомним,  $\tau$  — длительность разгона и торможения). Поэтому  $r_0 = 1/(u_0 \tau C)$ . Отсюда оптимальное значение  $r_0$  равно  $r_0 = 1/(C\sqrt{2E_{\text{доп}}})$ , если присутствует участок вращения с постоянной максимально допустимой кинетической энергией  $E_{\text{доп}}$ . Для оптимального управления с одной точкой переключения  $\tau = \sqrt{S/u_0}$ , поэтому  $r_0 = 1/(C\sqrt{u_0 S})$ .

Время оптимального разворота  $T$  рассчитывается на основании функционала пути (17). Поскольку оптимальное движение КА удовлетворяет уравнениям (7), (11), то значение  $S$  не зависит от характера изменения скалярной функции  $b(t)$  и является минимально возможным [14]. Если  $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$ , то имеет место участок вращения КА с  $E(t) = \text{const}$ , а время оптимального разворота  $T$ , длительности разгона  $\tau$  и неуправляемого вращения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} T &= S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} + \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0, \quad \tau = \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0, \\ t_{\text{св}} &= S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} - \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0. \end{aligned}$$

Если  $u_0 S \leq 2E_{\text{доп}}$ , то в оптимальном движении не существует моментов времени, когда  $E(t) = \text{const}$  ( $t_{\text{св}} = 0$ ), и время оптимального разворота равно  $T = 2\sqrt{S/u_0} = T_{\text{fast}}$ .

Уравнения (7), (11) удовлетворяются на всем отрезке времени  $t \in [0, T]$ , поэтому оптимальное движение определяется зависимостями

$$\mathbf{M} = m_0[\text{sign}(t_p - t) + \text{sign}(t_T - t)]\tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_p \circ \Lambda/2; \quad (18)$$

$$J_{i\omega_i} = m_0(t_p + t_T - |t - t_p| - |t - t_T|)p_i/2, \quad (19)$$

где  $m_0 = u_0/C$ ,  $p_i$  — компоненты вектора  $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ ,  $t_p$  — время окончания разгона;  $t_T$  — момент начала торможения,  $\mathbf{c}_p = \text{const} = \Lambda_{\text{H}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{H}}$ ,  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$ :

$$t_p = \min(\sqrt{S/u_0}, \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0),$$

$$t_T = \max(\sqrt{S/u_0}, S/\sqrt{2E_{\text{доп}}}),$$

$$\mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda_{\text{H}} \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_{\text{H}} \circ \Lambda.$$

Зависимости (7), (18), (19) с учетом равенств  $r_i = r_0 p_i$  — единственное решение задачи оптимального управления (1)–(6). Из (7), (18) и соотношений  $r_i = r_0 p_i$  видно, что при оптимальном управлении момент  $\mathbf{M}$  действует вдоль прямой, неподвижной в инерциальной системе координат. Оптимальным (в смысле минимума времени  $T$ ) будет разворот КА, при котором направление кинетического момента остается неизменным относительно инерциальной системы координат (векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{L}$  коллинеарны). На всем отрезке времени  $t \in [0, T]$  отношение кинетической энергии вращения  $E$  к квадрату модуля кинетического момента КА постоянно:

$$E/|\mathbf{L}|^2 = 0,5(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)/|r|^2 = \text{const}.$$

Для функций  $a(t)$ ,  $b(t)$  оптимального решения справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} a(0) &= T - 1/(u_0 r_0 C), \quad a(T) = -1/(u_0 r_0 C), \\ b(t) &= u_0(T - |t - t_p| - |t - t_T|)/(2r_0 C). \end{aligned}$$

Время разворота  $T$  и оптимальное значение  $r_0$  равны

$$\begin{aligned} T &= \max(2\sqrt{S/u_0}; S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} + \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0), \\ r_0 &= \max(1/\sqrt{u_0 S}, 1/\sqrt{2E_{\text{доп}}})/C. \end{aligned}$$

Максимальный модуль кинетического момента  $L_{\text{max}} = \sqrt{\min(u_0 S, 2E_{\text{доп}})}/C$ . Максимальная энергия вращения за время оптимального разворота  $E_{\text{max}} = \min(u_0 S/2, E_{\text{доп}})$ .

Если  $u_0 S \leq 2E_{\text{доп}}$ , то в законах (18), (19)  $t_T = t_p = T/2 = \sqrt{S/u_0}$  (оптимальным является релейное управление с одной точкой переключения); при этом  $E_{\text{max}} = u_0 S/2$ , и ограничение (4) несущественно. Время оптимального разворота составляет  $T = 2\sqrt{S/u_0}$ . Если  $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$ , то  $t_T > t_p$  ( $t_p = \tau$ ,  $t_T = T - \tau$ ), в оптимальном развороте имеется участок вращения по инерции (реализуется релейное управление с двумя точками переключения и  $t_{\text{св}} \neq 0$ ). Решение задачи оптимального по времени разворота с ограничением на фазовые переменные (4) подчиняется уравнениям (7), (10), (11), а управ-

ляющие переменные  $M_i$  и угловые скорости  $\omega_i$  изменяются в соответствии с законами (18), (19). Решение (18), (19) оптимально, потому что оно — единственное; только оно одно (и никакое другое) удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Оптимальный вектор  $\mathbf{p}_0$  рассчитывается в результате решения краевой задачи принципа максимума. Константы  $S$ ,  $C$ ,  $m_0$  полностью определяют программу движения при оптимальном законе управления пространственным разворотом КА.

### Частный случай оптимального управления разворотом КА

Задача построения оптимального управления  $\mathbf{M}(t)$  состоит главным образом в нахождении такого вектора  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$  (и значения  $S$ ), чтобы в результате движения в соответствии с уравнениями (2), (7), (11) и начальными условиями (5) выполнялись равенства (6). Указанная система имеет аналитическое решение только для динамически симметричного и сферического тел.

Для динамически симметричного КА (например, когда  $J_2 = J_3$ ) задача оптимального управления разворотом решается до конца. Оптимальное движение представляет собой одновременное вращение КА как твердого тела вокруг своей продольной оси  $OX$  и вокруг вектора  $\mathbf{p}$ , неподвижного в инерциальном пространстве и составляющего с продольной осью КА определенный постоянный угол. Угловые скорости относительно осей  $OX$  и  $\mathbf{p}$  изменяются пропорционально, и поэтому для оптимального решения  $\mathbf{p}(t)$  справедливы уравнения

$$\Lambda_K = \Lambda_H \circ \mathbf{e}^{\mathbf{p}_0\beta/2} \circ \mathbf{e}^{\mathbf{e}_1\alpha/2},$$

$$p_1 = p_{10}, p_2 = p_{20}\cos\kappa + p_{30}\sin\kappa,$$

$$p_3 = -p_{20}\sin\kappa + p_{30}\cos\kappa, \kappa = \frac{J_2 - J_1}{J_2} \int_0^t \omega_1(t) dt,$$

где  $p_{i0} = p_i(0)$ ;  $\mathbf{e}_1$  — орт продольной оси КА;  $\alpha$ ,  $\beta$  — углы поворота КА вокруг продольной оси  $OX$  и вокруг вектора  $\mathbf{p}$  соответственно ( $|\alpha| \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ ); продольная угловая скорость  $\omega_1(t)$  вычисляется по формулам (19) с учетом  $p_1 = p_{10}$ . Зависимость  $p_{i0}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  от  $\Lambda_H$  и  $\Lambda_K$  определяется значением  $\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda_K$  из системы

$$\alpha = \frac{J_2 - J_1}{J_1} p_{10}\beta; \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - p_{10}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = v_0;$$

$$\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + p_{10}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = v_1;$$

$$p_{20}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + p_{30}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = v_2;$$

$$-p_{20}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + p_{30}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = v_3,$$

где  $v_0, v_1, v_2, v_3$  — компоненты кватерниона разворота  $\Lambda_p$ ;  $-\pi \leq \alpha \leq \pi$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ . Существование решения  $\mathbf{p}_0$  для любых значений кватерниона разворота  $\Lambda_p$  доказано ранее в работе [10]. Программные значения функций  $\omega_i$  рассчитываются по формулам (19). В явном виде оптимальное решение  $M_i(t)$  запишем следующим образом:

$$M_1 = m(t)p_{10}, M_2 = m(t)\sqrt{1 - p_{10}^2} \sin(\kappa + \gamma),$$

$$M_3 = m(t)\sqrt{1 - p_{10}^2} \cos(\kappa + \gamma),$$

где

$$m(t) = m_0[\text{sign}(t_p - t) + \text{sign}(t_t - t)]/2;$$

$$t_p = \min(\sqrt{J_2\beta/m_0}, \sqrt{2E_{\text{доп}}/u_0});$$

$$t_t = \max(\sqrt{J_2\beta/m_0}, J_2\beta C/\sqrt{2E_{\text{доп}}});$$

$$\gamma = \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2}), \text{ если } p_{30} \geq 0,$$

$$\text{или } \gamma = \pi - \arcsin(p_{20}/\sqrt{1 - p_{10}^2}),$$

$$\text{если } p_{30} < 0 (|p_{10}| \neq 1);$$

случай  $|p_{10}| = 1$  не рассматривается, так как он соответствует плоскому вращению вокруг продольной оси  $OX$ . В любой текущий момент времени  $t$  кватернион ориентации  $\Lambda$  описывается функцией

$$\Lambda(t) = \Lambda_H \circ \mathbf{e}^{\rho\theta/2} \circ \mathbf{e}^{\mathbf{e}_1\rho/2},$$

где  $\rho = (J_2 - J_1)p_{10}\theta/J_1$ ;  $\theta = \frac{1}{J_2} \int_0^t |\mathbf{L}(t)| dt$ , или  $\theta = \frac{m_0}{2J_2} \int_0^t (t_p + t_m - |t - t_p| - |t - t_t|) dt$ .

Для несимметричного КА (когда  $J_1 \neq J_2 \neq J_3$ ) решение системы уравнений (2), (7), (11) находится только численными методами, например, методом последовательных приближений (в частности, [12, 16]). Как было показано раньше [14], оптимальное значение  $\mathbf{p}_0$  не зависит от характера изменения модуля кинетического момента  $|\mathbf{L}|$  в процессе разворота, если КА вращается по траектории с наименьшим значением интеграла (17), описываемой уравнениями (7), (11). Следовательно, краевую задачу прин-

ципа максимума можно решить с помощью метода итераций, подробно описанного в предыдущей работе [12].

### Компьютерная апробация алгоритма оптимального управления

Приведем численный пример решения задачи оптимального управления. Рассмотрим разворот на  $180^\circ$  из исходного положения  $\Lambda_H$ , при котором оси КА совпадают по направлению с осями опорного базиса  $I$ , в заданное конечное положение  $\Lambda_K$ ; элементы кватерниона  $\Lambda_K$  равны:  $\lambda_0 = 0$ ;  $\lambda_1 = 0,707107$ ;  $\lambda_2 = 0,39$ ;  $\lambda_3 = 0,59$ . Моменты инерции КА:  $J_1 = 25603 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_2 = 91495 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ,  $J_3 = 80662 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ , а  $u_0 = 0,07077 \text{ Н}\cdot\text{кг}^{-1/2}$ ,  $E_{\text{доп}} = 5 \text{ Дж}$ . После решения краевой задачи принципа максимума получили следующие значения:  $\mathbf{p}_0 = \{0,455215; -0,347544; 0,819751\}$  и  $S = 665 \text{ м}\cdot\text{кг}^{1/2}$ . Исходя из рассчитанного  $\mathbf{p}_0$  получили  $m_0 = 16,8 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Так как  $u_0 S > 2E_{\text{доп}}$ , то опти-

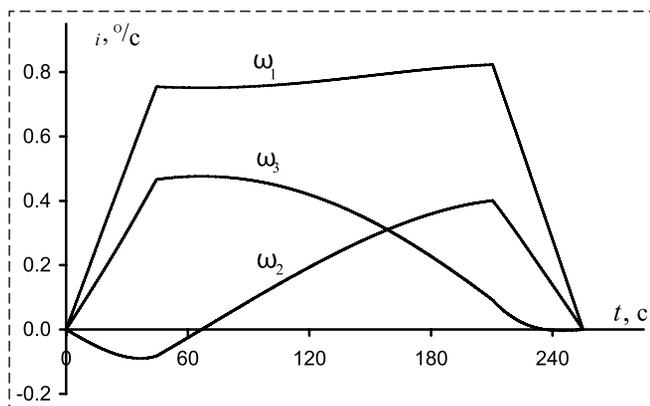


Рис. 2. Изменение угловых скоростей во время оптимального разворота  
Fig. 2. Changing the angular velocities during optimal slew maneuver

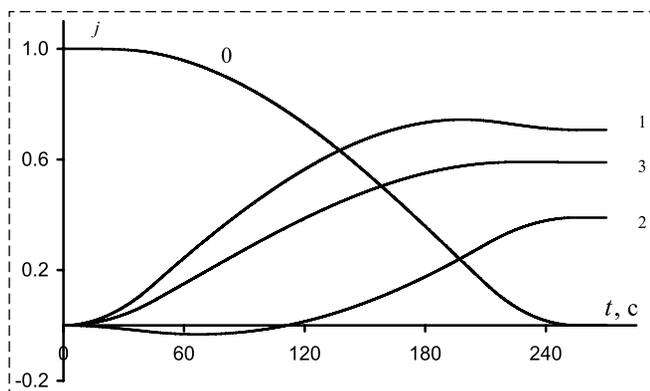


Рис. 3. Изменение компонент кватерниона  $\Lambda$  во время оптимального разворота  
Fig. 3. Changing the components of quaternion  $\Lambda$  during optimal slew maneuver

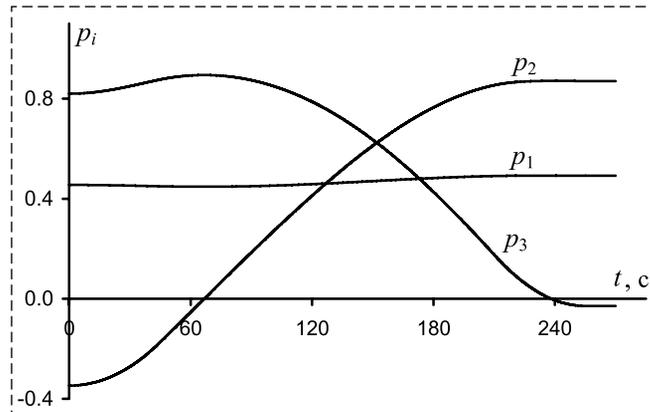


Рис. 4. Изменение компонент единичного вектора  $\mathbf{p}$  во время оптимального разворота  
Fig. 4. Changing the components of the unit vector  $\mathbf{p}$  during optimal slew maneuver

мальное управление имеет две точки переключения с участком вращения по инерции. Время достижения максимально допустимой кинетической энергии  $E_{\text{доп}}$  составляет  $t_p = \sqrt{2E_{\text{доп}}}/u_0 = 44,7 \text{ с}$ , а момент начала торможения  $t_T = S/\sqrt{2E_{\text{доп}}} = 210,3 \text{ с}$ . Время разворота  $T = 255 \text{ с}$ , и  $r_0 = 1/(C\sqrt{2E_{\text{доп}}}) = 75 \text{ с}$ .

Результаты численного моделирования движения КА во время оптимального разворота представлены на рис. 2—4. Из рис. 2 четко видны все три фазы — раскрутка, неуправляемое вращение, торможение до  $\omega = 0$ . Максимальная величина кинетического момента составила  $L_{\text{max}} = 750,7 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$ . В отличие от угловых скоростей переменные  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $p_1, p_2, p_3$  — гладкие функции времени.

### Заключение

Исследуется задача оптимального по времени разворота КА с учетом ограничений на управляющий момент и кинетическую энергию вращения. Нахождение оптимальной по быстродействию программы переориентации КА с кинетической энергией вращения, не превышающей допустимого уровня, весьма актуально. Ограниченность максимальной кинетической энергии вращения позволяет в экстренных случаях погасить угловую скорость за время, не превышающее заданного значения (в том числе в нештатной ситуации, когда требуется срочно прекратить маневр и максимально быстро стабилизировать КА).

Представлено аналитическое решение предложенной задачи. Доказано, что двухимпульсное управление, когда между разгоном и тор-

можением КА вращается по инерции, является оптимальным. Показано, что в течение всего интервала управления направление кинетического момента постоянно в инерциальной системе координат, и КА вращается вдоль "траектории свободного движения". Выписаны формализованные уравнения и расчетные выражения для построения оптимальной программы разворота. Приведены выражения для нахождения временных характеристик маневра. Для длительности разгона и торможения даны аналитические формулы. Приведены пример и результаты математического моделирования движения КА при оптимальном управлении, которые подтверждают практическую реализуемость описанного метода управления.

Рассмотренная задача достаточно актуальна. Значение и важность состоят в том, что искомое управление и соответствующее ему движение ограничено максимально допустимой энергией вращения. Наличие ограничений как на управляющие функции, так и на фазовые переменные — принципиальное отличие предложенной задачи относительно известных работ; задача оптимального разворота включает ограничения на силовой момент и угловую скорость КА, что придает полученному решению существенную новизну. Наличие готовых формул для синтеза оптимальной программы движения во время поворотного маневра делает выполненное исследование практически значимым и пригодным для непосредственного применения в практике космических полетов.

#### Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

2. Левский М. В. Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 53—59.

3. Левский М. В. Особенности управления ориентацией космического аппарата, оборудованного инерционными исполнительными органами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 3. С. 188—195.

4. Levskii M. V. Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators // Computer science applications and information technology. 2017. Vol. 2, N. 4. P. 1—9.

5. Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh. Time-optimal re-orientation for rigid satellite with reaction wheels // International journal of control. 2012. Vol. 85, N. 10. P. 1—12.

6. Scrivener S., Thompson R. Survey of time-optimal attitude maneuvers // Guidance, control and dynamics. 1994. Vol. 17, N. 2. P. 225—233.

7. Liu S., Singh T. Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers // Guidance. 1996. Vol. 20, N. 2. P. 394—397.

8. Reshmin S. A. The threshold absolute value of a relay control bringing a satellite to a gravitationally stable position in optimal time // Doklady physics. 2018. Vol. 63, N. 6. P. 257—261.

9. Shen H., Tsiotras P. Time-optimal control of axis-symmetric rigid spacecraft with two controls // AIAA Guidance, control and dynamics. 1999. Vol. 22, N. 5. P. 682—694.

10. Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22, Вып. 3. С. 352—360.

11. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 152—165.

12. Левский М. В. Применение принципа максимума Л. С. Понтрягина к задачам оптимального управления ориентацией космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 6. С. 144—157.

13. Левский М. В. К вопросу оптимального успокоения космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1, с. 340. С. 147—161.

14. Levskii M. V. Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method // Mechanics of solids. 2009. Vol. 44, N. 2. P. 169—183.

15. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

16. Левский М. В. Система управления пространственным разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2006431 // Бюллетень "Изобретения. Заявки и патенты". 1994. № 2. С. 49—50.

## Dynamic Problem of Optimal Control of Spacecraft Attitude under Restriction on Phase Variables

M. V. Levskii, levskii1966@mail.ru,

Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, The Moscow region, Russian Federation

Corresponding author: Levskii Mikhail V., Ph.D., Leading Researcher, Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, The Moscow region, Russian Federation, e-mail: levskii1966@mail.ru

Accepted on February 19, 2021

### Abstract

An analytical solution to the optimal control problem of spacecraft reorientation from an arbitrary initial angular position into a required final angular position under the restrictions on control functions and phase variables is presented (the controlling moment and angular velocity are restricted). Time of slew maneuver is minimized. The specific case was considered when maximum admissible kinetic energy of rotation is significant restriction. Constructing the optimal control of reorientation is based on Pontryagin's maximum principle and the quaternionic variables and models. It is shown that optimal mode is piecewise-continuous control when a direction of spacecraft's angular momentum is constant relative to the inertial coordinate system during rotation of a spacecraft; for a performing an optimal turn, the moment of forces is parallel to a straight line fixed in inertial space. Two types of optimal control are possible depending on the given initial and final positions and spacecraft's moments of inertia — relay control with one switching point when the controlling moment is maximal over the entire time interval of control (segments of acceleration and braking), and relay control with two switching point consisting of intensive acceleration, motion by inertia with the absented moment and an exit onto restriction of rotation energy, and then final braking with the maximum controlling moment. The analytical equations and relations for a finding the optimal control program are written down. The calculation formulas for determining the time characteristics of maneuver and computing a duration of acceleration and braking are given. The proposed algorithm of control provides maximally fast implementation of spacecraft reorientation under the limited kinetic energy of rotation. For an axially symmetric solid body (spacecraft), the optimal control problem, in dynamical statement, was solved completely — we obtained the dependences as explicit functions of time for the control variables, and relations for calculating the key parameters of the law of control are derived. The numerical example and results of mathematical simulation of spacecraft motion under the optimal control are presented, demonstrating the practical feasibility of the developed method for control of spacecraft attitude.

**Keywords:** spacecraft, attitude, quaternion, energy of rotation, maximum principle, control function, relay control

For citation:

**Levskii M. V.** Dynamic Problem of Optimal Control of Spacecraft Attitude under Restriction on Phase Variables, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 321–330.

DOI: 10.17587/mau.22.321-330

### References

1. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** The use of quaternions in problems of orientation of a rigid body, Moscow, Publishing center "Nauka", 1973, 320 p. (in Russian).
2. **Levskii M. V.** The use of universal variables in problems of optimal control concerning spacecrafts orientation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 1, pp. 53–59 (in Russian).
3. **Levskii M. V.** Features of attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no.3, pp. 188–195 (in Russian).
4. **Levskii M. V.** Special aspects in attitude control of a spacecraft, equipped with inertial actuators, *Computer Science Applications and Information Technology*, 2017, vol. 2, no. 4, pp. 1–9.
5. **Zhou H., Wang D., Wu B., EK Poh.** Time-optimal reorientation for rigid satellite with reaction wheels, *International Journal of Control*, 2012, vol. 85, no. 10, pp. 1–12.
6. **Scrivener S., Thompson R.** Survey of time-optimal attitude maneuvers, *Guidance, Control and Dynamics*, 1994, vol. 17, no. 2, pp. 225–233.
7. **Liu S., Singh T.** Fuel/time optimal control of spacecraft maneuvers, *Guidance*, 1996, vol. 20, no. 2, pp. 394–397.
8. **Reshmin S. A.** The threshold absolute value of a relay control bringing a satellite to a gravitationally stable position in optimal time, *Doklady Physics*, 2018, vol. 63, no. 6, pp. 257–261.
9. **Shen H., Tsiotras P.** Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls, *AIAA Guidance, Control and Dynamics*, 1999, vol. 22, no. 5, pp. 682–694.
10. **Branets V. N., Chertok M. B., Kaznacheev Yu. V.** Optimal rotation of a rigid body with one symmetry axis, *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1984, vol. 22, no. 3, pp. 352–360 (in Russian).
11. **Molodnikov A. V., Sapunkov Ya. G.** A solution of the optimal turn problem of an axially symmetric spacecraft with bounded and pulse control under arbitrary boundary conditions, *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2007, no. 2, c. 340, pp. 152–165 (in Russian).
12. **Levskii M. V.** Pontryagin's maximum principle in optimal control problems of orientation of a spacecraft, *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2008, no. 6, pp. 144–157 (in Russian).
13. **Levskii M. V.** Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method, *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 2, pp. 169–183.
14. **Levskii M. V.** On optimal spacecraft damping, *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2011, no. 1, pp. 147–161 (in Russian).
15. **Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** The mathematical theory of optimal processes, Moscow, Publishing center "Nauka", 1983, 392 p. (in Russian).
16. **Levskii M. V.** A system of controlling a spatial turn of spacecraft. The patent for the invention of the Russian Federation no. 2006431, *Byulleten' "Izobreteniya. Zayavki i patenty"*, 1994, no. 2, pp. 49–50.

Н. Е. Зубов, д-р техн. наук, проф., nezubov@bmstu.ru,  
 В. Н. Рябченко, д-р техн. наук, проф., ryabchenko.vn@yandex.ru,  
 Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,  
 ПАО РКК "Энергия" им. С. П. Королева, г. Королев МО

## Инвариантность управления боковым движением вертолета по углу крена. Аналитический синтез

Для линеаризованной модели четвертого порядка изолированного бокового движения одновинтового вертолета как МИМО-системы, содержащей два входа, аналитически синтезировано управление, которое обеспечивает инвариантность движения по углу крена при наличии возмущений в каналах управления, а также требуемое размещение полюсов замкнутой системы, заданных любыми конкретными значениями из области их устойчивости. Подход к синтезу инвариантного управления заключается в поиске матрицы коэффициентов обратной связи линейной системы, которая удовлетворяет условиям инвариантности, представляющим собой систему степенных матричных уравнений определенной конструкции. В основе синтеза лежит применение теорем, основанных на использовании условия регуляризации матричного уравнения и условий инвариантности при возмущениях в каналах управления, а также теорем, позволяющих с использованием оригинальной декомпозиции объекта управления размещать полюса МИМО-системы. Под регуляризацией матричного уравнения понимается решение задачи обеспечения заданного множества сингулярных значений у обращаемой симметричной квадратной матрицы. Инвариантность МИМО-системы рассматривается по отношению к неизмеряемым возмущениям в каналах управления. Использование такого подхода к синтезу инвариантного управления позволило получить аналитическое решение, которое обладает универсальностью и может быть применено на различных режимах полета одновинтовых вертолетов, имеющих различные динамические свойства. Показаны результаты численного синтеза бокового движения одновинтового вертолета с использованием полученных законов инвариантного управления, подтверждающие достоверность аналитических выражений.

**Ключевые слова:** инвариантность, возмущения в каналах управления, МИМО-система, декомпозиция, размещение полюсов, аналитический синтез, боковое движение одновинтового вертолета, полюса динамической системы

### Введение

Современное развитие методов инвариантного управления [1–3], управления линейными системами на основе точного размещения полюсов (pole placement, eigenvalue assignment, modal control) [4–9] позволяет осуществлять эффективный синтез законов стабилизации, в том числе аналитически, динамических систем с многими входами и многими выходами (МИМО-систем) не только по каждому из подходов в отдельности, но и комплексно, когда обеспечивается как инвариантность по отношению к какому-либо возмущению, так и заданное размещение полюсов. В данной статье применение такого подхода в варианте аналитического синтеза рассматривается по отношению к боковому движению одновинтового вертолета (ОВ).

### Постановка задачи

ОВ как объект управления будем рассматривать в форме Коши в виде взаимосвязанного бокового движения (крен—рысканье). В форме "вход—состояние" ОВ имеет вид [1, 2]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где матрицы кусочно-постоянных коэффициентов равны

$$A = \begin{pmatrix} a_{V_z}^{V_z} & a_{V_z}^{\omega_x} & a_{V_z}^{\omega_y} & a_{V_z}^{\gamma} \\ a_{\omega_x}^{V_z} & a_{\omega_x}^{\omega_x} & a_{\omega_x}^{\omega_y} & 0 \\ a_{\omega_y}^{V_z} & a_{\omega_y}^{\omega_x} & a_{\omega_y}^{\omega_y} & 0 \\ 0 & 1 & a_{\gamma}^{\omega_y} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{V_z}^{u_z} & b_{V_z}^{u_{PB}} \\ b_{\omega_x}^{u_z} & b_{\omega_x}^{u_{PB}} \\ b_{\omega_y}^{u_z} & b_{\omega_y}^{u_{PB}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а векторы состояния и управления, соответственно, равны

$$x = \begin{pmatrix} \Delta V_z \\ \Delta \omega_x \\ \Delta \omega_y \\ \Delta \gamma \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \Delta u_z \\ \Delta u_{PB} \end{pmatrix},$$

где  $\Delta V_z$  — отклонение боковой скорости;  $\Delta \omega_x$  — отклонение угловой скорости крена;  $\Delta \omega_y$  — отклонение угловой скорости рыскания;  $\Delta \gamma$  — отклонение угла крена;  $\Delta u_z$  — угол отклонения конуса несущего винта в поперечном направлении и  $\Delta u_{PB}$  — шаг рулевого винта.

Параметры модели

$$a_{V_z}^{V_z}, a_{V_z}^{\omega_x}, a_{V_z}^{\omega_y}, a_{V_z}^{\gamma}, a_{\omega_x}^{V_z}, a_{\omega_x}^{\omega_x}, a_{\omega_x}^{\omega_y}, a_{\omega_x}^{V_z}, \\ a_{\omega_y}^{\omega_x}, a_{\omega_y}^{\omega_y}, a_{\gamma}^{u_z}, b_{V_z}^{u_z}, b_{V_z}^{u_{PB}}, b_{\omega_x}^{u_z}, b_{\omega_x}^{u_{PB}}, b_{\omega_y}^{u_z}, b_{\omega_y}^{u_{PB}}$$

являются коэффициентами линеаризации [1, 2, 9–12].

Для унификации записи уравнений в дальнейших исследованиях введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{V_z}^V, & a_{12} &= a_{V_z}^{\omega_x}, & a_{13} &= a_{V_z}^{\omega_y}, & a_{14} &= a_{V_z}^\gamma, \\ a_{21} &= a_{\omega_x}^V, & a_{22} &= a_{\omega_x}^{\omega_x}, & a_{23} &= a_{\omega_x}^{\omega_y}, \\ a_{31} &= a_{\omega_y}^V, & a_{32} &= a_{\omega_y}^{\omega_x}, & a_{33} &= a_{\omega_y}^{\omega_y}, & a_{43} &= a_{\omega_y}^\gamma, \\ b_{11} &= b_{V_z}^u, & b_{12} &= b_{V_z}^{u_{PB}}, & b_{21} &= b_{\omega_x}^u, & b_{22} &= b_{\omega_x}^{u_{PB}}, \\ & & b_{31} &= b_{\omega_y}^u, & b_{32} &= b_{\omega_y}^{u_{PB}}, \end{aligned}$$

тогда ОВ как объект управления в развернутом виде запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{V}_z \\ \Delta \dot{\omega}_x \\ \Delta \dot{\omega}_y \\ \Delta \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_z \\ \Delta \omega_x \\ \Delta \omega_y \\ \Delta \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_z \\ \Delta u_{PB} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Полагая, что все компоненты вектора состояния полностью наблюдаемы, синтезируем управление, инвариантное по крену к возмущениям в каналах управления с заданным размещением полюсов, которые в аналитическом виде запишем обобщенно в виде

$$\text{eig}(A_c) = \{s_1 \ s_2 \ s_3 \ s_4\} \quad (3)$$

(здесь и далее заданные полюса могут принимать любые значения, определяемые теми или иными тактико-техническими требованиями).

Матрица  $C$ , определяющая контролируемую координату для нашей задачи, имеет вид

$$C = (0 \ 0 \ 0 \ 1), \quad (4)$$

а условие инвариантности выхода у динамической МИМО-системы (2), заданной в пространстве состояний относительно входного возмущения  $w$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + w(t)), \\ u(t) &= Fx(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $y$  — вектор выхода;  $F$  — матрица коэффициентов обратной связи, в соответствии с работой [3] имеет вид системы степенных матричных уравнений

$$\begin{cases} CB = 0; \\ C(A + BF)B = 0; \\ C(A + BF)^2 B = 0; \\ C(A + BF)^3 B = 0; \\ C(A + BF)^4 B = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Для обеспечения условий (6) требуется найти такую матрицу  $F$ , что выполняются все равенства из системы уравнений (6), функционально зависящие от этой матрицы.

### Аналитический синтез инвариантного управления

В работе предлагается решение сформулированной задачи на основе подхода, изложенного в работе [3]. В общем случае вместо системы (4) рассмотрим МИМО-систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BFx(t) + LB^T x(t) + Bw(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $L$  — матрица наблюдателя состояния, или, в соответствии с работой [3], матрица инъекции Морса.

Тогда справедлива следующая теорема [3].

**Теорема.** Для системы (5), где имеют место равенства  $CB = 0$

$$L = B^{+T} \Sigma_0 - AB^{+T}; \quad (8)$$

$$A = \Sigma_0 B^+ - B^+(A + (B^{+T} \Sigma_0 - AB^{+T})B^T) \quad (9)$$

выполняются условия инвариантности

$$\begin{cases} C(A + LB^T + BF)B = 0; \\ C(A + LB^T + BF)^2 B = 0; \\ C(A + LB^T + BF)^3 B = 0; \\ C(A + LB^T + BF)^4 B = 0. \end{cases} \quad (10)$$

При этом выполняется включение для множеств собственных значений (полюсов)

$$\text{eig}(A + LB^T + BF) \supset \text{eig}(\Sigma_0). \quad (11)$$

Здесь  $\Sigma_0$  — матрица, определяющая собственные значения (полюса) замкнутой системы [3].

Условие (9) можно назвать спектральным условием, поскольку оно определяет спектральные свойства замкнутой системы. На фигурирующую в соотношениях (7), (8) матрицу  $\Sigma_0$  могут накладываться различные условия в зависимости от дополнительных требований. Например, это может быть требование устойчивости, устойчивости с заданным запасом и др.

С учетом (1), (4) проверим выполнение первого условия (6):  $CB = 0$ .

Отметим, что для (6) также справедливы неравенства

$$CAB \neq 0, CA^2 B \neq 0, CA^3 B \neq 0, CA^4 B \neq 0.$$

Вычислим далее псевдообратную матрицу

$$B^+ = \begin{pmatrix} b_p^{11} & b_p^{12} & b_p^{13} & 0 \\ b_p^{21} & b_p^{22} & b_p^{23} & 0 \end{pmatrix},$$

где при условии неравенства нулю

$$\Delta_b = (b_{11}^2 b_{22}^2 + b_{11}^2 b_{32}^2 - 2b_{11} b_{12} b_{21} b_{22} - 2b_{11} b_{12} b_{31} b_{32} + b_{12}^2 b_{21}^2 + b_{12}^2 b_{31}^2 + b_{21}^2 b_{32}^2 - 2b_{21} b_{22} b_{31} b_{32} + b_{22} b_{31}^2),$$

компоненты псевдообратной матрицы определяются выражениями

$$\begin{aligned} b_p^{11} &= (b_{11} b_{22}^2 - b_{12} b_{21} b_{22} + b_{11} b_{32}^2 - b_{12} b_{31} b_{32}) / \Delta_b; \\ b_p^{12} &= (b_{21} b_{12}^2 - b_{11} b_{22} b_{12} + b_{21} b_{32}^2 - b_{22} b_{31} b_{32}) \Delta_b; \\ b_p^{13} &= (b_{31} b_{12}^2 - b_{11} b_{32} b_{12} + b_{31} b_{22}^2 - b_{21} b_{32} b_{22}) / \Delta_b; \\ b_p^{21} &= (b_{12} b_{21}^2 - b_{11} b_{22} b_{21} + b_{12} b_{31}^2 - b_{11} b_{32} b_{31}) / \Delta_b; \\ b_p^{22} &= (b_{22} b_{11}^2 - b_{12} b_{21} b_{11} + b_{22} b_{31}^2 - b_{21} b_{32} b_{31}) / \Delta_b; \\ b_p^{23} &= (b_{32} b_{11}^2 - b_{12} b_{31} b_{11} + b_{32} b_{21}^2 - b_{22} b_{31} b_{21}) \Delta_b. \end{aligned}$$

С учетом множества (3) назначим матрицу заданного размещения полюсов  $\Sigma_0$  в следующем простом (диагональном) виде:

$$\Sigma_0 = \text{diag}(s_1, s_2).$$

В соответствии с выражением (9) вычислим матрицу обратной связи

$$F = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} k_{11} &= b_{11}^p s_1 + b_{11}^p (b_{11} (a_{11} b_{11}^p + a_{12} b_{12}^p + a_{13} b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - a_{11} + b_{12} (a_{11} b_{21}^p + a_{12} b_{22}^p + a_{13} b_{23}^p - b_{21}^p s_2)) + \\ &+ b_{12}^p (b_{11} (a_{21} b_{11}^p + a_{22} b_{12}^p + a_{23} b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - a_{21} + b_{12} (a_{21} b_{21}^p + a_{22} b_{22}^p + a_{23} b_{23}^p - b_{22}^p s_2)) + \\ &+ b_{13}^p (b_{11} (a_{31} b_{11}^p + a_{32} b_{12}^p + a_{33} b_{13}^p - b_{13}^p s_1) - a_{31} + b_{12} (a_{31} b_{21}^p + a_{32} b_{22}^p + a_{33} b_{23}^p - b_{23}^p s_2)); \\ k_{12} &= b_{12}^p s_1 + b_{11}^p (b_{21} (a_{11} b_{11}^p + a_{12} b_{12}^p + a_{13} b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - a_{12} + b_{22} (a_{11} b_{21}^p + a_{12} b_{22}^p + a_{13} b_{23}^p - b_{21}^p s_2)) + \\ &+ b_{12}^p (b_{21} (a_{21} b_{11}^p + a_{22} b_{12}^p + a_{23} b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - a_{22} + b_{22} (a_{21} b_{21}^p + a_{22} b_{22}^p + a_{23} b_{23}^p - b_{22}^p s_2)) + \\ &+ b_{13}^p (b_{21} (a_{31} b_{11}^p + a_{32} b_{12}^p + a_{33} b_{13}^p - b_{13}^p s_1) - a_{32} + b_{22} (a_{31} b_{21}^p + a_{32} b_{22}^p + a_{33} b_{23}^p - b_{23}^p s_2)); \\ k_{13} &= b_{13}^p s_1 + b_{11}^p (b_{31} (a_{11} b_{11}^p + a_{12} b_{12}^p + a_{13} b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - a_{13} + b_{32} (a_{11} b_{21}^p + a_{12} b_{22}^p + a_{13} b_{23}^p - b_{21}^p s_2)) + \\ &+ b_{12}^p (b_{31} (a_{21} b_{11}^p + a_{22} b_{12}^p + a_{23} b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - a_{23} + b_{32} (a_{21} b_{21}^p + a_{22} b_{22}^p + a_{23} b_{23}^p - b_{22}^p s_2)) + \\ &+ b_{13}^p (b_{31} (a_{31} b_{11}^p + a_{32} b_{12}^p + a_{33} b_{13}^p - b_{13}^p s_1) - a_{33} + b_{32} (a_{31} b_{21}^p + a_{32} b_{22}^p + a_{33} b_{23}^p - b_{23}^p s_2)); \\ k_{14} &= -a_{14} b_{11}^p; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{21} &= b_{21}^p s_2 + b_{21}^p (b_{11} (a_{11} b_{11}^p + a_{12} b_{12}^p + a_{13} b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - a_{11} + b_{12} (a_{11} b_{21}^p + a_{12} b_{22}^p + a_{13} b_{23}^p - b_{21}^p s_2)) + \\ &+ b_{22}^p (b_{11} (a_{21} b_{11}^p + a_{22} b_{12}^p + a_{23} b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - a_{21} + b_{12} (a_{21} b_{21}^p + a_{22} b_{22}^p + a_{23} b_{23}^p - b_{22}^p s_2)) + \\ &+ b_{23}^p (b_{11} (a_{31} b_{11}^p + a_{32} b_{12}^p + a_{33} b_{13}^p - b_{13}^p s_1) - a_{31} + b_{12} (a_{31} b_{21}^p + a_{32} b_{22}^p + a_{33} b_{23}^p - b_{23}^p s_2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{22} &= b_{22}^p s_2 + b_{21}^p (b_{21} (a_{11} b_{11}^p + a_{12} b_{12}^p + a_{13} b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - a_{12} + b_{22} (a_{11} b_{21}^p + a_{12} b_{22}^p + a_{13} b_{23}^p - b_{21}^p s_2)) + \\ &+ b_{22}^p (b_{21} (a_{21} b_{11}^p + a_{22} b_{12}^p + a_{23} b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - a_{22} + b_{22} (a_{21} b_{21}^p + a_{22} b_{22}^p + a_{23} b_{23}^p - b_{22}^p s_2)) + \\ &+ b_{23}^p (b_{21} (a_{31} b_{11}^p + a_{32} b_{12}^p + a_{33} b_{13}^p - b_{13}^p s_1) - a_{32} + b_{22} (a_{31} b_{21}^p + a_{32} b_{22}^p + a_{33} b_{23}^p - b_{23}^p s_2)). \end{aligned}$$

Используя соотношение (8), найдем далее матрицу инъекции Морса [3]:

$$L = \begin{pmatrix} b_{11}^p s_1 - a_{12} b_{12}^p - a_{13} b_{13}^p - a_{11} b_{11}^p & b_{21}^p s_2 - a_{12} b_{22}^p - a_{13} b_{23}^p - a_{11} b_{21}^p \\ b_{12}^p s_1 - a_{22} b_{12}^p - a_{23} b_{13}^p - a_{21} b_{11}^p & b_{22}^p s_2 - a_{22} b_{22}^p - a_{23} b_{23}^p - a_{21} b_{21}^p \\ b_{13}^p s_1 - a_{32} b_{12}^p - a_{33} b_{13}^p - a_{31} b_{11}^p & b_{23}^p s_2 - a_{32} b_{22}^p - a_{33} b_{23}^p - a_{31} b_{21}^p \\ -b_{12}^p - a_{43} b_{13}^p & -b_{22}^p - a_{43} b_{23}^p \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В результате матрица замкнутого управлением ОВ  $A_c = A + LB^T + BF$  принимает следующий вид:

$$A_c = \begin{pmatrix} a_{11}^c & a_{12}^c & a_{13}^c & a_{14}^c \\ a_{21}^c & a_{22}^c & a_{23}^c & a_{24}^c \\ a_{31}^c & a_{32}^c & a_{33}^c & a_{34}^c \\ a_{41}^c & a_{42}^c & a_{43}^c & 0 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}^c &= a_{11} + b_{11} k_{11} + b_{12} k_{21} - b_{11} (a_{11} b_{11}^p + a_{12} b_{12}^p + a_{13} b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - b_{12} (a_{11} b_{21}^p + a_{12} b_{22}^p + a_{13} b_{23}^p - b_{21}^p s_2); \\ a_{12}^c &= a_{12} + b_{11} k_{12} + b_{12} k_{22} - b_{21} (a_{11} b_{11}^p + a_{12} b_{12}^p + a_{13} b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - b_{22} (a_{11} b_{21}^p + a_{12} b_{22}^p + a_{13} b_{23}^p - b_{21}^p s_2); \\ a_{13}^c &= a_{13} + b_{11} k_{13} + b_{12} k_{23} - b_{31} (a_{11} b_{11}^p + a_{12} b_{12}^p + a_{13} b_{13}^p - b_{11}^p s_1) - b_{32} (a_{11} b_{21}^p + a_{12} b_{22}^p + a_{13} b_{23}^p - b_{21}^p s_2); \\ a_{14}^c &= a_{14} + b_{11} k_{14} + b_{12} k_{24}; \\ a_{21}^c &= a_{21} + b_{21} k_{11} + b_{22} k_{21} - b_{11} (a_{21} b_{11}^p + a_{22} b_{12}^p + a_{23} b_{13}^p - b_{12}^p s_1) - b_{12} (a_{21} b_{21}^p + a_{22} b_{22}^p + a_{23} b_{23}^p - b_{22}^p s_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{22}^c &= a_{22} + b_{21}k_{12} + b_{22}k_{22} - \\
&- b_{21}(a_{21}b_{11}^p + a_{22}b_{12}^p + a_{23}b_{13}^p - b_{12}^ps_1) - \\
&- b_{12}(a_{21}b_{21}^p + a_{22}b_{22}^p + a_{23}b_{23}^p - b_{22}^ps_2); \\
a_{23}^c &= a_{23} + b_{21}k_{13} + b_{22}k_{23} - \\
&- b_{31}(a_{21}b_{11}^p + a_{22}b_{12}^p + a_{23}b_{13}^p - b_{12}^ps_1) - \\
&- b_{32}(a_{21}b_{21}^p + a_{22}b_{22}^p + a_{23}b_{23}^p - b_{22}^ps_2); \\
a_{24}^c &= b_{21}k_{14} + b_{22}k_{24}; \\
a_{31}^c &= a_{31} + b_{31}k_{11} + b_{32}k_{21} - \\
&- b_{11}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^ps_1) - \\
&- b_{12}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^ps_2); \\
a_{32}^c &= a_{32} + b_{31}k_{12} + b_{32}k_{22} - \\
&- b_{21}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^ps_1) - \\
&- b_{22}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^ps_2); \\
a_{33}^c &= a_{33} + b_{31}k_{13} + b_{32}k_{23} - \\
&- b_{31}(a_{31}b_{11}^p + a_{32}b_{12}^p + a_{33}b_{13}^p - b_{13}^ps_1) - \\
&- b_{32}(a_{31}b_{21}^p + a_{32}b_{22}^p + a_{33}b_{23}^p - b_{23}^ps_2); \\
a_{34}^c &= b_{31}k_{14} + b_{32}k_{24}; \\
a_{41}^c &= -b_{11}(b_{12}^ps_1 + a_{43}b_{13}^p) - b_{12}(b_{22}^ps_2 + a_{43}b_{23}^p); \\
a_{42}^c &= 1 - b_{22}(b_{22}^ps_2 + a_{43}b_{23}^p) - b_{21}(b_{12}^ps_1 + a_{43}b_{13}^p); \\
a_{43}^c &= a_{43} - b_{31}(b_{12}^ps_1 + a_{43}b_{13}^p) - b_{32}(b_{22}^ps_2 + a_{43}b_{23}^p).
\end{aligned}$$

Проверка условий инвариантности (8) показывает, что они действительно выполняются. При этом собственные значения матрицы  $A_c$  не соответствуют требованию заданного размещения полюсов (3). Для разрешения данной проблемы скорректируем полученную матрицу инъекции Морса. Для этих целей воспользуемся декомпозиционным методом модального синтеза, который ранее многократно применялся авторами для решения различных задач синтеза [13–16].

С учетом соотношений размерностей вектора состояния (четыре) и вектора управления (два) при декомпозиции рассматриваемой ММО-системы будут иметь место только два уровня декомпозиции: нулевой и первый. Зададим собственные значения по уровням декомпозиции в виде скаляров (скалярных матриц) следующего вида:

$$\Sigma_1 = s_3, \quad \Sigma_2 = s_4.$$

Для первого уровня декомпозиции необходимые матрицы для расчета коррекции матрицы инъекции Морса определяются следующими выражениями [13]:

$$A_{c1} = (C_R^\perp)^T A_c C_R^\perp; \quad C_1 = C A_c A_R^\perp, \quad (15)$$

где  $C_R^\perp$  — правый делитель нуля (аннулятор) матрицы  $C$ . Аналитические значения указанных в формулах (15) матриц имеют вид

$$C_R^\perp = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_{c1} = \begin{pmatrix} a_{22}^c & a_{23}^c & -a_{21}^c \\ a_{32}^c & a_{33}^c & -a_{31}^c \\ -a_{12}^c & -a_{13}^c & a_{11}^c \end{pmatrix};$$

$$C_{c1} = (a_{42}^c \quad a_{43}^c \quad -a_{41}^c).$$

При этом скорректированная матрица инъекции Морса может быть вычислена по формулам

$$L = C^- \Sigma_1 - A_c C^-; \quad (16)$$

$$C^- = C^T - C_R^\perp (C_1^+ \Sigma_2 - A_{c1} C_1^+), \quad (17)$$

где помимо приведенных ранее матриц из формул (15) фигурирует псевдообратная матрица

$$C_1^+ = \begin{pmatrix} a_{42}^c / (a_{41}^c + a_{42}^c + a_{43}^c) \\ a_{43}^c / (a_{41}^c + a_{42}^c + a_{43}^c) \\ -a_{41}^c / (a_{41}^c + a_{42}^c + a_{43}^c) \end{pmatrix}.$$

В результате вычислений согласно (16), (17), при условии, что

$$l_{11}^1 = -(a_{21}^c a_{41}^c + a_{22}^c a_{42}^c + a_{23}^c a_{43}^c - a_{42}^c s_4) / (a_{41}^c + a_{42}^c + a_{43}^c);$$

$$l_{21}^1 = -(a_{31}^c a_{41}^c + a_{32}^c a_{42}^c + a_{33}^c a_{43}^c - a_{43}^c s_4) / (a_{41}^c + a_{42}^c + a_{43}^c);$$

$$l_{31}^1 = (a_{11}^c a_{41}^c + a_{12}^c a_{42}^c + a_{13}^c a_{43}^c - a_{41}^c s_4) / (a_{41}^c + a_{42}^c + a_{43}^c),$$

имеем

$$C^- = (l_{31}^1 \quad -l_{11}^1 \quad -l_{21}^1 \quad 1)^T;$$

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} a_{12}^c l_{11}^1 - a_{14}^c + a_{13}^c l_{21}^1 - a_{11}^c l_{31}^1 + l_{31}^1 s_3 \\ a_{22}^c l_{11}^1 - a_{24}^c + a_{23}^c l_{21}^1 - a_{21}^c l_{31}^1 + l_{11}^1 s_3 \\ a_{32}^c l_{11}^1 - a_{34}^c + a_{33}^c l_{21}^1 - a_{31}^c l_{31}^1 + l_{21}^1 s_3 \\ s_3 + a_{42}^c l_{11}^1 - a_{41}^c l_{31}^1 + a_{43}^c l_{21}^1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Окончательно матрица замкнутой ММО-системы, вычисленная по формуле

$$\hat{A}_c = A_c + \hat{L} C,$$

с учетом (16) примет вид

$$\hat{A}_c = \begin{pmatrix} a_{11}^c & a_{12}^c & a_{13}^c & a_{12}^c l_{11}^1 + a_{13}^c l_{21}^1 - a_{11}^c l_{31}^1 + l_{31}^1 s_3 \\ a_{21}^c & a_{22}^c & a_{23}^c & a_{22}^c l_{11}^1 + a_{23}^c l_{21}^1 - a_{21}^c l_{31}^1 + l_{11}^1 s_3 \\ a_{31}^c & a_{32}^c & a_{33}^c & a_{32}^c l_{11}^1 + a_{33}^c l_{21}^1 - a_{31}^c l_{31}^1 + l_{21}^1 s_3 \\ a_{41}^c & a_{42}^c & a_{43}^c & s_3 + a_{42}^c l_{11}^1 - a_{41}^c l_{31}^1 + a_{43}^c l_{21}^1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

При этом собственные значения матрицы  $\hat{A}$  оказываются равными заданным

$$\text{eig}(\hat{A}_c) = \{s_1, s_2, s_3, s_4\},$$

$$\hat{A}_c = 10^3 \begin{pmatrix} -0,0001197 & -0,0000008278 & -0,00001823 & -3,76857 \\ 0,000024149 & -0,0019583 & 0,0012295 & 0,003086 \\ -0,0000192 & 0,0000325 & -0,0010413 & 0,078637 \\ -0,00000018586 & -0,000000007 & -0,000000018 & -0,01188 \end{pmatrix},$$

т. е. поэлементно совпадают с множеством (3). Окончательная проверка условий инвариантности (8) для случая  $A_c = \hat{A}_c$  также подтверждает получение требуемого результата.

### Результаты численных исследований

Вспользуемся следующими числовыми значениями матриц коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} -0,1520 & 0,4226 & 0,9063 & 0,0960 \\ -18,6430 & -1,0600 & -1,6000 & 0 \\ -1,7570 & -0,1530 & -0,1360 & 0 \\ 0 & 1 & -0,4663 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -0,0320 & -0,0010 \\ -1,8740 & -8,9660 \\ -1,4600 & 0,3040 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Назначим полюса замкнутой системы в соответствии с (3) в виде

$$\text{eig}(A_c) = \{-1, -2, -5, -7\}. \quad (20)$$

Используя аналитическое выражение (10) и (11), получим

$$F = \begin{pmatrix} -1,5663 & 0,7870 & 0,0060 & 0,0013 \\ -1,7500 & -0,1628 & -0,0915 & -0,0003 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0,6156 & -0,0842 \\ -1,3066 & 0,3716 \\ 0,5394 & -0,2671 \\ -0,2837 & -0,2837 \end{pmatrix}.$$

При этом матрица замкнутой системы (12) равна

$$A_c = \begin{pmatrix} -0,1197 & -0,0008 & -0,0182 & 0,0960 \\ 0,0241 & -1,9583 & 1,2295 & -0,0001 \\ -0,0192 & 0,0325 & -1,0413 & -0,0020 \\ 0,0089 & -0,0000 & -0,0002 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверка соблюдения условий инвариантности (10) дает положительный результат, а собственные значения равны

$$\text{eig}(A_c) = \{-1, -2, -0,1261, 0,0068\},$$

что не соответствует условию (20).

Коррекция инъекции Морса, осуществленная по описанной выше методике на основании применения выражения (18), с учетом  $s_3 = -5$ ,  $s_4 = -7$  дает

что соответствует собственным значениям (18) и условиям инвариантности (8).

### Заключение

Для линеаризованной модели изолированного бокового движения одновинтового вертолета, рассматриваемой как ММО-система, получены аналитические выражения законов стабилизации, обеспечивающие условия инвариантности по углу крена при возмущениях в каналах управления и заданное размещение полюсов. Приведены результаты численного решения задачи управления боковым движением ОБ с использованием полученных аналитических соотношений.

### Список литературы

1. Мисриханов М. Ш. Инвариантное управление многомерными системами. Алгебраический подход. М.: Наука, 2007.
2. Микрин Е. А., Zubov Н. Е., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Инвариантное управление маловысотным полетом одновинтового вертолета // Автоматизация. Современные технологии. 2015. № 6. С. 3–8.
3. Zubov Н. Е., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Условия инвариантности динамической системы на основе регуляризации // ДАН. 2015. Т. 465, № 1. С. 20–23.
4. Dion J. M., Commault C. Feedback decoupling of structured systems // IEEE Trans. on Automat. Contr. 1993. AC-38. P. 1132–1135.
5. Van der Woude J. W., Murota K. Disturbance decoupling with pole placement for structured systems; a graph theoretic approach // SIAM J. on Matr. Anal. and Appl. 1995. 16(3). P. 922–942.
6. Wang Q. G. Decoupling Control. Springer-Verlag, 2003.
7. Zubov Н. Е., Микрин Е. А., Рябченко В. Н. Матричные методы в теории и практике систем автоматического управления летательных аппаратов. М.: Изд-во МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2016. 666 с.
8. Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V. Complete Pole Placement Method for Linear Mimo Systems // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2018. Vol. 19, N. 1. P. 11–18.
9. Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Sorokin I. V. Synthesis of Stabilization Laws of a Single-Airscrew Helicopters Lateral Motion for Lack of Information about its Lateral Speed: Analytical Solution // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2018. Vol. 19, N. 4. P. 273–281.
10. Zubov Н. Е., Рябченко В. Н., Сорокин И. В. Управление по выходу спектром продольного движения одновинтового вертолета // Изв. высш. учеб. завед. Авиац. техн. 2020. № 2. С. 70–79.
11. Романенко Л. Г., Романенко А. Г., Самарова Г. Г. Управление продольным движением летательного аппарата при отсутствии в автопилоте сигнала по углу тангажа // Изв. вузов. Авиационная техника. 2014. № 4. С. 25–29.
12. Романенко Л. Г., Самарова Г. Г., Романенко А. Г. Управление боковым движением летательного аппарата при отсутствии в автопилоте сигнала по углу крена // Изв. вузов. Авиационная техника. 2014. № 2. С. 19–23.
13. Zubov Н. Е., Микрин Е. А., Олейник А. С., Рябченко В. Н. Оценка угловой скорости космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерений датчика местной вертикали // Вестник МГТУ. Приборостроение. 2014. № 5. С. 3–15.
14. Zubov Н. Е., Микрин Е. А., Рябченко В. Н., Пролетарский А. В. Аналитический синтез законов управления боковым движением летательного аппарата // Изв. высш. учеб. завед. Авиац. техн. 2015. № 3. С. 14–20.
15. Zubov Н. Е., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш., Олейник А. С., Рябченко В. Н. Терминальное релейно-импульсное управление линейными стационарными динамическими системами // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 3. С. 134–149.

# Lateral Motion Control Invariance Helicopter on the Roll Angle. Analytical Synthesis

**N. E. Zubov**, nezubov@bmstu.ru, **V. N. Ryabchenko**, Ryabchenko.vn@yandex.ru,  
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation,  
PJSC Korolev Rocket and Space Corporation, Korolev, Russian Federation

Corresponding author: **Zubov Nikolay E.**, Ph.D., Professor, Bauman State University,  
Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: nezubov@bmstu.ru

Accepted on November 29, 2020

## Abstract

For the linearized fourth-order model of the isolated lateral motion of a single-rotor helicopter as a MIMO system containing two inputs, the control is analytically synthesized, which ensures the invariance of the roll angle motion in the presence of disturbances in the control channels, as well as the required placement of the poles of the closed-loop system, given any specific values from the area of their stability. The approach to the synthesis of invariant control consists in finding a matrix of feedback coefficients of a linear system that satisfies the invariance conditions, which are a system of power matrix equations of a certain design. The synthesis is based on the application of theorems based on the use of the regularization condition of the matrix equation and the invariance conditions under disturbances in the control channels, as well as theorems that make it possible to place the poles of the MIMO system using the original decomposition of the control object. Regularization of a matrix equation is understood as a solution to the problem of providing a given set of singular values for an inverted symmetric square matrix. The invariance of the MIMO system is considered with respect to unmeasured disturbances in the control channels. The use of such an approach to the synthesis of invariant control made it possible to obtain an analytical solution that is versatile and can be applied in various flight modes of single-rotor helicopters with different dynamic properties. The results of the numerical synthesis of the lateral motion of a single-rotor helicopter using the obtained laws of invariant control, which confirm the reliability of the analytical expressions, are shown.

**Keywords:** invariance, disturbances in control channels, MIMO system, decomposition, pole placement, analytical synthesis, side motion of a single-rotor helicopter, poles of a dynamic system

For citation:

**Zubov N. E., Ryabchenko V. N.** Lateral Motion Control Invariance Helicopter on the Roll Angle. Analytical Synthesis, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 331–336.

DOI: 10.17587/mau.22.331-336

## References

1. **Misrikhanov M. S.** Invariant Control of Multidimensional Systems: Algebraic Approach, Moscow, Nauka, 2007.
2. **Mikrin E. A., Zubov N. E., Misrikhanov M. S., Ryabchenko V. N.** Invariant control of low-altitude flight of a single-rotor helicopter, *Automation. Modern Technologies*, 2015, no. 6, pp. 3–8.
3. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. S., Ryabchenko V. N.** Invariance conditions for MIMO systems based on regularization, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 92, no. 3, pp. 664–666.
4. **Dion J. M., Commault C.** Feedback decoupling of structured systems, *IEEE Trans. on Automat. Contr.*, 1993, AC-38, pp. 1132–1135.
5. **Van der Woude J. W., Murota K.** Disturbance decoupling with pole placement for structured systems; a graph theoretic approach, *SIAM J. on Matr. Anal. and Appl.*, 1995, vol. 16, no. 3, pp. 922–942.
6. **Wang Q. G.** Decoupling Control, Springer-Verlag, 2003.
7. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N.** Matrix Methods in the Theory and Practice of Automatic Control Systems for, Moscow, MGTU Im. N. E. Baumana, 2016, 666 p.
8. **Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V.** Complete Pole Placement Method For Linear MIMO Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 11–18.
9. **Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Sorokin I. V.** Synthesis Of Stabilization Laws Of A Single-Aircrew Helicopters Lateral Motion For Lack Of Information About Its Lateral Speed: Analytical Solution, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 4, pp. 273–281.
10. **Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Sorokin I. V.** Output Control of the Longitudinal Motion Spectrum of a Single-Rotor Helicopter, *Russian Aeronautics*, 2020, vol. 63, no. 2, pp. 249–259.
11. **Romanenko L. G., Romanenko A. G., Samarova G. G.** Aircraft Longitudinal Control Without a Pitch Command in the Autopilot, *Russian Aeronautics*, 2014, vol. 57, no. 4, pp. 25–29.
12. **Romanenko L. G., Samarova G. G., Romanenko A. G.** Aircraft Lateral-Directional Control without a Roll Command in the Autopilot, *Russian Aeronautics*, 2014, vol. 57, no. 2, pp. 19–23.
13. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Oleinik A. S., Ryabchenko V. N.** The spacecraft angular velocity estimation in the orbital stabilization mode by the results of the local vertical sensor measurements, *Vestn. MGTU, Priborostr.*, 2014, no. 5, pp. 3–15.
14. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N., Proletarskii A. V.** Analytical synthesis of control laws for lateral motion of aircraft, *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, no. 3, pp. 263–270.
15. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. S., Oleinik A. S., Ryabchenko V. N.** Terminal bang-bang impulsive control of linear time invariant dynamic systems, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53(3), pp. 430–444.

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5510, (499) 269-5397

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *М. Ю. Безменова*.

Сдано в набор 29.03.2021. Подписано в печать 17.05.2021. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН621. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".  
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: [www.aov.ru](http://www.aov.ru)

Рисунки к статье  
 А. А. Кабанова, С. А. Дубовика  
 «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ  
 РЕДКИХ СОБЫТИЙ  
 В НЕЛИНЕЙНЫХ  
 СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ»

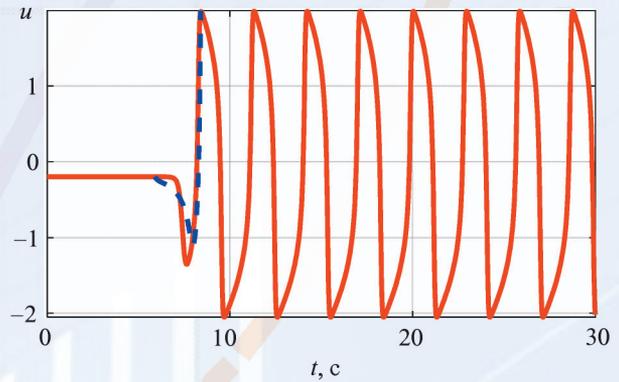
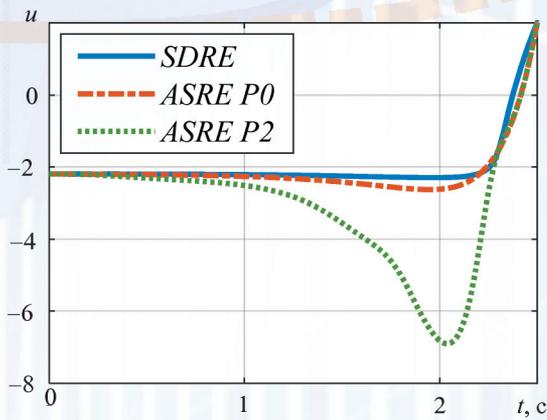
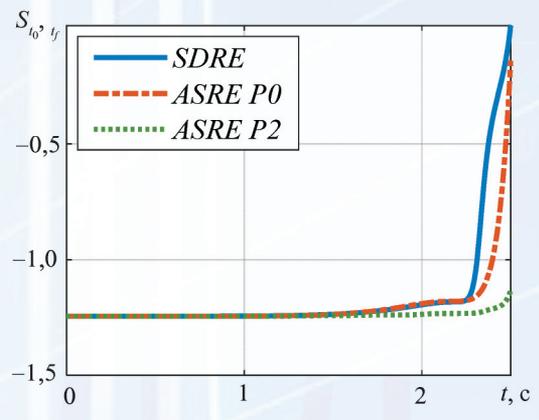


Рис. 3. Оптимальный путь активатора по сравнению с колебаниями исходной модели ФХН

Fig. 3. Optimal activator path compared with the oscillations of the original FHN model



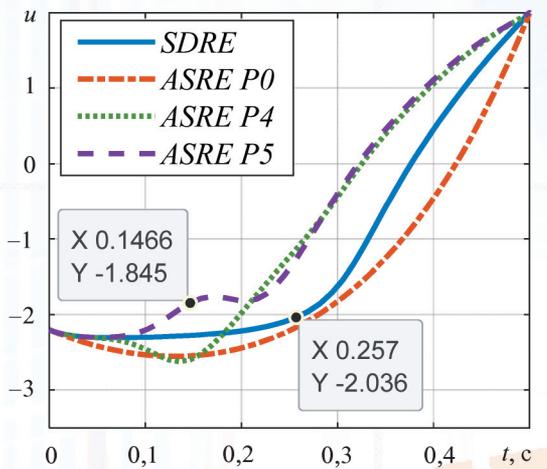
a)



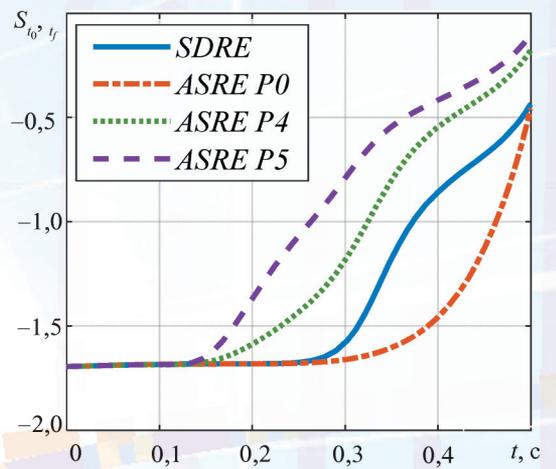
б)

Рис. 4. Случай 2: динамика активатора (а) и функционала действия (б)

Fig. 4. Case 2: dynamics of the activator (a) and the action functional (б)



a)



б)

Рис. 5. Случай 3: динамика активатора (а) и функционала действия (б)

Fig. 5. Case 3: dynamics of the activator (a) and the action functional (б)



*Главному редактору журнала “Мехатроника, автоматизация, управление”, профессору МГУ им. М. В. Ломоносова, главному научному сотруднику ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, доктору технических наук*

## **Николаю Борисовичу ФИЛИМОНОВУ исполнилось 70 лет!**

Н. Б. Филимонов – известный специалист в области автоматизации процессов управления, представитель отечественной научной школы технической кибернетики В. В. Солодовникова, видный ученый и преподаватель. Н. Б. Филимоновым сформировано новое перспективное научное направление – теория полиэдральной оптимизации дискретных динамических процессов управления и наблюдения. Он внес заметный вклад в развитие ряда ключевых направлений современной теории автоматического управления: проблемы динамического качества процессов управления, принципа динамической развязки многоконтурных систем регулирования, концепции многорежимного управления сложными динамическими объектами, методов анализа и синтеза систем терминального управления.

Николай Борисович Филимонов стоял у истоков образования журнала «Мехатроника, автоматизация, управление», когда определялась его тематика, формировалась редакционная коллегия. С 2012 г. он – главный редактор журнала. На этом посту он достойно продолжил дело своих предшественников – профессора М. М. Аршанского и чл. корр. АН СССР и РАН Е. Д. Теряева. В этом качестве ему удалось сформировать сильный международный совет и редколлегию, добиться включения журнала в МБД Scopus, сохранить выпуск журнала в прежнем объеме и периодичность в период пандемии.

Отметим, что связь Николая Борисовича с издательством «Новые технологии» не ограничилась работой только в одном журнале. Он – ответственный секретарь объединенной редакции Издательства, заместитель главного редактора журнала «Информационные технологии».

Высокий профессионализм, широчайшая эрудиция, чуткость и отзывчивость снискали большое уважение учеников и коллег!

***Уважаемый Николай Борисович!***

***Редакционная коллегия и редакция журнала поздравляют Вас с юбилеем и желают Вам крепкого здоровья, большого счастья и новых творческих успехов в Вашей многогранной деятельности!***