

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 21

2020

№ 4

Издаётся с 2000 года ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online) DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Главный редактор:**  
ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

**Заместители главного редактора:**  
БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.  
ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.  
ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

**Ответственный секретарь:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционный совет:**  
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН  
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН  
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН  
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН  
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН  
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН  
КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН  
МИКРИН Е. А., акад. РАН  
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН  
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН  
СЕБРИКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН  
СИГОВ А. С., акад. РАН  
СОЙФЕР В. А., акад. РАН  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН  
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН  
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН  
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН  
ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН  
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

**Редколлегия:**  
DORANTES D. J., PhD, Турция  
GROUMPOS P. P., PhD, Греция  
ISIDORI A., PhD, Италия  
KATALINIC B., PhD, Австрия  
LIN CH.-Y., PhD, Тайвань  
MASON O. J., PhD, Ирландия  
ORTEGA R. S., PhD, Франция  
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США  
STRZELECKI R. M., PhD, Польша  
SUBUDHI B. D., PhD, Индия  
АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан  
ГАРАШЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина  
ТРОФИМЕНКО Е. Е., д.т.н., Беларусь  
БОБЦОВ А. А., д.т.н.  
БУКОВ В. Н., д.т.н.  
ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.  
ЖУКОВ И. А., д.т.н.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.  
ЛОХИН В. М., д.т.н.  
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д.ф.-м.н.  
ПУТОВ В. В., д.т.н.  
ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.  
РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.  
СЕРГЕЕВ С. Ф., д.пс.н.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.  
ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.  
ФУРСОВ В. А., д.т.н.  
ЮРЕВИЧ Е. И., д.т.н.

**Редакция:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Директор издательства:**  
АНТОНОВ Б. И.

## СОДЕРЖАНИЕ

### СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

- Фуртат И. Б., Гушин П. А., Перегудин А. А.** Подавление возмущений с минимизацией эллипсоидов, ограничивающих фазовые траектории системы в переходном и установившемся режимах ..... 195
- Рзаев Т. Г.** Оптимальное управление переходными процессами объектов по быстродействию в многокритериальной среде ..... 200
- Куцый А. П., Куцый Н. Н., Маланова Т. В.** Определение области робастной устойчивости системы на основе теоремы В. Л. Харитонова ..... 208

### АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

- Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф., Газызаде Б. И.** Технологии мониторинга динамики развития повреждений на буровых установках с использованием моментов высоких порядков помехи ..... 213
- Шемакин А. Н., Рачков М. Ю., Соловьев Н. Г., Якимов М. Ю.** Управление мощностью излучения технологического CO<sub>2</sub>-лазера с несамостоятельным тлеющим разрядом путем изменения частоты импульсов ионизации ..... 224

### РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Ворочаева Л. Ю., Савин С. И., Яцун А. С.** Исследование работы системы корректировки длины корпуса в процессе изменения конфигурации трехзвенного ползающего робота ..... 232

### ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

- Do Quang Thong.** Synthesis of High-Precision Missile Homing System Using Proportional Guidance Method ..... 242
- Заведеев А. И.** Повышение надежности системы управления космическим аппаратом на основе грубых моделей диагностики и принципа разделения в пространстве паритетов ..... 249

*Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

# MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL

Vol. 21

2020

No. 4

## MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Editor-in-Chief**

FILIMONOV N. B.

**Deputy Editors-in-Chief:**

BOLSHAKOV A. A.

PODURAEV Yu. V.

YUSCHENKO A. S.

**Responsible Secretary:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Editorial Board:**

ANSHAKOV G. P.

BOLOTNIK N. N.

CHENTSOV A. G.

CHERNOUSKO F. L.

FEDOROV I. B.

KALYAEV I. A.

KURZHANSKI A. B.

KUZNETSOV N. A.

MIKRIN E. A.

PESHEKHONOV V. G.

REZCHIKOV A. F.

SCHERBATYUK A. F.

SEBRYAKOV G. G.

SIGOV A. S.

SOJFER V. A.

SOLOMENTSEV Yu. M.

VASSILYEV S. N.

YUSUPOV R. M.

ZHELTOV S. Yu.

**Editorial Council:**

ALIEV T. A., Azerbaijan

DORANTES D. J., PhD, Turkey

GARASCHENKO F. G., Ukraine

GROUMPOS P. P., PhD, Greece

ISIDORI A., PhD, Italy

KATALINIC B., PhD, Austria

LIN CH.-Y., PhD, Taiwan

MASON O. J., PhD, Ireland

ORTEGA R. S., PhD, France

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA

STRZELECKI R. M., PhD, Poland

SUBUDHI B. D., PhD, India

TROFIMENKO Ye. Ye., Belarus

BOBTSOV A. A.

BUKOV V. N.

ERMOLOV I. L.

FILARETOV V. F.

FRADKOV V. L.

FURSOV V. A.

ILYASOV B. G.

KOROSTELEV V. F.

LEBEDEV G. N.

LOKHIN V. M.

PAVLOVSKY V. E.

PUTOV V. V.

PSHIKHOPOV V. Kh.

RAPOPORT E. Ya.

SERGEYEV S. F.

YUREVICH E. I.

ZHUKOV I. A.

**Editorial Staff:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Director of the Publishing House:**

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and perspectives development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

## CONTENTS

### SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

- Furtat I. B., Gushchin P. A., Peregudin A. A.** Disturbance Attenuation with Minimization of Ellipsoids Restricting Phase Trajectories in Transition and Steady State ..... 195
- Rzaev T. G.** Optimal Control of Transition Processes of Objects on Quick-Speed in a Multi-Criteria Environment ..... 200
- Kutsyi A. P., Kutsyi N. N., Malanova T. V.** Determination of the Area of Robust Stability of the System on the Basis of V. L. Kharitonov's Theorem ..... 208

### AUTOMATION AND CONTROL TECHNOLOGICAL PROCESSES

- Aliev T. A., Musaeva N. F., Gazizade B. I.** Technologies for Monitoring the Dynamics of Damage Development in Drilling Rigs Using High-Order Moments of the Noise ..... 213
- Shemyakin A. N., Rachkov M. Yu., Solov'ev N. G., Yakimov M. Yu.** Radiation power control of the industrial CO<sub>2</sub> laser excited by a nonself-sustained glow discharge by changing the frequency of ionization pulses ..... 224

### ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

- Vorocheva L. Yu., Savin S. I., Yatsun A. S.** Study of the Work of the Length Correction System for a Crawling Robot Changing its Configuration ..... 232

### DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

- Do Quang Thong.** Synthesis of High-Precision Missile Homing System Using Proportional Guidance Method ..... 242
- Zavedeev A. I.** Increasing of Reliability of Spacecraft Control System on Base of Robust Diagnostic Models and Division Principle in Parity Space ..... 249

Information about the journal is available online at:  
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

И. Б. Фуртат, д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр., cainenash@mail.ru,

П. А. Гущин, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., guschin.p@mail.ru,

А. А. Перегудин, аспирант, zeeless@mail.ru,

Институт проблем машиноведения РАН, Университет ИТМО, Санкт-Петербург

## Подавление возмущений с минимизацией эллипсоидов, ограничивающих фазовые траектории системы в переходном и установившемся режимах<sup>1</sup>

*Предложен новый метод подавления внешних неизвестных ограниченных возмущений в линейных динамических системах с известными параметрами. В отличие от известных результатов разработанный статический закон управления обеспечивает нахождение фазовых траекторий системы в эллипсоиде, который достаточно близок к шару, в котором находятся начальные условия, а также обеспечивает наилучшую точность регулирования в установившемся режиме. Для решения задачи используется аппарат функций Ляпунова и техника линейных матричных неравенств. Дополнительно к разрешимости линейных матричных неравенств предложена схема поиска матрицы, которая обеспечивает наименьший эллипсоид в переходном режиме с малой погрешностью. Предложенная схема управления расширяется на управление линейными системами в условиях больших возмущений, для подавления которых используется интегральный закон управления. Приведены сравнительные примеры предложенного метода и метода инвариантных эллипсоидов. Показано, что при определенных условиях фазовые траектории замкнутой системы, полученные на базе метода инвариантных эллипсоидов, находятся недалеко от границ наименьшего эллипсоида для переходного режима, в то время как полученный закон управления гарантирует сходимость фазовых траекторий к наименьшему эллипсоиду в установившемся режиме.*

**Ключевые слова:** подавление возмущений, оптимизация, линейное матричное неравенство

### Введение

Несмотря на то что проблема подавления возмущений насчитывает несколько десятилетий, и ей посвящено достаточно большое число решений, до сих пор она является одной из центральных в теории автоматического управления. С одной стороны, интерес к данной задаче вызван множеством практических задач, которые связаны с управлением в условиях негативного действия внешней среды на процесс. С другой стороны, непрерывное развитие фундаментальных наук приводит к разработке новых и эффективных методов в теории управления. Одним из таких методов является метод линейных матричных неравенств (ЛМН) [1, 2].

<sup>1</sup>Исследование в разделе "Метод решения" выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в ИПМаш РАН. Исследование в разделе "Управление при больших возмущениях" выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00246) в ИПМаш РАН. Исследование в разделе "Примеры" выполнено в рамках гранта Президента Российской Федерации (МД-1054.2020.8) в ИПМаш РАН.

Для задач подавления возмущений метод ЛМН позволил перейти от качественных условий устойчивости к количественным и решить ряд оптимизационных задач. Так, в работе [1] ищется решение задачи с минимизацией точности регулирования в установившемся режиме. Однако качество переходных процессов в работе [1] не затрагивается. В работах [3, 4] решена задача обеспечения переходных процессов в наименьшем эллипсоиде (осуществлялась минимизация следа матрицы эллипсоида). Однако точность регулирования в установившемся режиме в работах [3, 4] не рассматривалась. В данной работе будет предложен новый метод подавления возмущений, который будет учитывать качество переходных процессов и точность регулирования в установившемся режиме. Дополнительно будет исследована задача подавления неограниченных возмущений. В конце статьи будут приведены сравнительные примеры моделирования предложенного алгоритма и алгоритма, построенного на базе метода инвариантных эллипсоидов.

## Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, модель которого описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + Df, \quad (1)$$

где  $x = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$  — вектор состояния;  $u = u(t) \in R^m$  — сигнал управления;  $f = f(t) \in R^l$  — внешнее возмущение и  $|f(t)| \leq \gamma$ ;  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$  и  $D \in R^{n \times l}$  — известные матрицы, пара  $(A, B)$  — управляема.

Рассмотрим шар, ограничивающий начальные условия (1) и заданный в виде

$$E_0 = \{x \in R^n: x^T x \leq R_0^2\}, \quad (2)$$

где  $R_0^2 \geq x^T(0)x(0)$ . Также рассмотрим эллипсоид, в котором находятся решения (1):

$$E = \{x \in R^n: x^T P^{-1} x \leq x_0^T P^{-1} x_0 + \delta\}, \quad (3)$$

где матрица  $P = P^T > 0$  и точность регулирования  $\delta > 0$ , обусловленная наличием возмущений, будут определены в теореме 1. Требуется разработать алгоритм управления, который обеспечит устойчивость замкнутой системы и выполнение целевого условия

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [x^T(t) P^{-1} x(t)] \leq \delta. \quad (4)$$

При этом разработанный алгоритм должен обеспечить минимизацию значения  $\delta$ , а траектории (1) не должны выходить из эллипсоида (3), который должен быть достаточно близок к шару (2). Под достаточной близостью эллипсоида (3) к шару (2) понимается минимизация величины  $\|P - I\|$ .

Поясним более подробно идею поставленной задачи. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = x^T Q x, \quad Q = P^{-1}. \quad (5)$$

Пусть  $f \equiv 0$  и выполнено условие  $\dot{V} \leq 0$  вдоль решений уравнения замкнутой системы при  $P = I$ . Следовательно, функция  $V = x^T x$  невозрастающая, причем максимальное значение  $V$  соответствует значению  $V(0) = x^T(0)x(0)$ . Значит, траектории, начавшиеся в шаре (2), никогда его не покинут. Однако не всегда существует решение задачи в виде  $P = I$ , поэтому ставится задача поиска такой матрицы  $P$ , чтобы  $\|P - I\| \rightarrow \min$ . Если  $f \neq 0$ , то траектории, начавшиеся в шаре (2), могут покинуть его, а в установившемся режиме решения (1) не будут асимптотически стремиться к началу координат. Поэто-

му требуется дополнительно минимизировать величину  $\delta$ , которая связана с наличием возмущенной составляющей в решении (1). Значение величины  $\delta$  будет определено в теореме 1.

Вкратце рассмотрим отличие поставленной задачи от существующих решений. В работе [4] значение  $\delta$  не определено, но отмечается, что оно может быть уменьшено за счет соответствующего выбора параметров алгоритма управления на этапе моделирования. В работах [5–7] приведена зависимость величины  $\delta$  от параметров в замкнутой системы. В работе [1] ставилась задача минимизации величины  $\delta$ , однако качество переходных процессов при этом не учитывалось, вследствие чего могли происходить большие отклонения регулируемой величины от положения равновесия. В работах [3, 4] предложенный алгоритм обеспечивал принадлежность решений (1) наименьшему эллипсоиду (минимизировался след матрицы эллипсоида), однако значение  $\delta$  не регулировалось, поэтому оно могло принимать любые значения внутри эллипсоида. В отличие от работ [1, 3–6] в настоящей статье будет разработан алгоритм, обеспечивающий нахождение траекторий (1) в эллипсоиде (3) и обеспечивающий наилучшую точность регулирования в установившемся режиме.

## Метод решения

Зададим статический регулятор в форме

$$u = Kx, \quad (6)$$

где  $K^T \in R^n$ , и перепишем уравнение замкнутой системы в виде

$$\dot{x} = (A + BK)x + Df. \quad (7)$$

**Теорема 1.** Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1) и закона управления (4). Пусть для заданного числа  $\alpha > 0$  существует положительно определенная матрица  $P$  и число  $\beta > 0$  такие, что

$$\beta + \|P - I\| \rightarrow \min; \quad (8)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} PA^T + AP + Y^T B^T + BY + \alpha P & D \\ * & -\beta I \end{bmatrix} \leq 0; \quad (9)$$

$$K = YP^{-1}. \quad (10)$$

Здесь "\*" обозначает симметричный блок симметричной матрицы. Тогда траектории (1),

начавшиеся в шаре (2), не будут покидать эллипсоид (3), а при  $t \rightarrow \infty$  траектории системы будут стремиться к предельному эллипсоиду (4), где

$$\delta = \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}. \quad (11)$$

**Доказательство.** Для исследования устойчивости замкнутой системы выберем функцию Ляпунова вида (5). Найдем условия, при которых будет выполнено неравенство

$$\dot{V} + \alpha V - \beta f^T f \leq 0. \quad (12)$$

Принимая во внимание соотношения (4) и (7), перепишем неравенство (12) в виде

$$[x^T \ f^T] \begin{bmatrix} (A+BK)^T Q + Q(A+BK) + \alpha Q & QD \\ * & -\beta I \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} \leq 0. \quad (13)$$

Умножив матрицу в (13) слева и справа на  $\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ * & I \end{bmatrix}$ , получим матрицу  $\Psi$ . Тогда неравенство (13) будет выполнено, если выполнено условие (9). Следовательно, неравенство (12) также будет выполнено. Найдем решение (12) в виде

$$V \leq V(0)e^{-\alpha t} + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}). \quad (14)$$

Принимая во внимание (5) и оценку  $V \leq V(0) + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}$ , получим оценку  $x^T P^{-1} x \leq x^T(0)P^{-1}x(0) + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}$ , которая определяет эллипсоид (3) с  $\delta = \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}$ . Вместе с тем, из неравенства (14) следует, что  $\limsup_{t \rightarrow \infty} [x^T(t)P^{-1}x(t)] \leq \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}$ . Это означает, что условие (4) выполнено, причем для заданных чисел  $\alpha$  и  $\gamma$  минимальное значение  $\beta$  обеспечивает наименьшее значение  $\delta$  в (3) и (4). В свою очередь, минимизация второго слагаемого в условии (8) обеспечивает "близость" эллипсоида (3) к шару (2). Теорема 1 доказана.

**Замечание.** В некоторых случаях результаты переходных процессов в замкнутой системе могут быть улучшены при замене (8) на условие  $\beta \rightarrow \min$  и поиске матрицы  $P$  из следующих неравенств:

$$(1 + \varepsilon)[I - P] \geq 0 \text{ и } (1 - \varepsilon)[I - P] \leq 0, \quad (15)$$

где  $\varepsilon \in [0; 1]$ .

## Управление при больших возмущениях

Далее найдем решение поставленной задачи, если закон управления задан в виде

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 \int_0^t x(s_1) ds_1 + K_2 \int_0^t \int_0^{s_1} x(s_2) ds_1 ds_2 + \\ + \dots + K_v \int_0^t \dots \int_0^{s_{v-1}} x(s_v) ds_1 \dots ds_v. \quad (16)$$

В отличие от (6) такой закон управления позволяет улучшить качество переходных процессов в замкнутой системе, если возмущение  $f$  неограниченно вместе с его  $v - 1$  производными или возмущение принимает большие значения, в то время как его  $v - 1$  производные принимают малые значения.

Обозначим:

$$z_1 = \int_0^t \dots \int_0^{s_{v-1}} x(s_v) ds_1 \dots ds_v, \\ z_2 = \int_0^t \dots \int_0^{s_{v-2}} x(s_{v-1}) ds_1 \dots ds_{v-1}, \dots, \\ z_{v-1} = \int_0^t x(s_1) ds_1, \quad z_v = x(t), \quad z_{v+1} = \dot{x}(t), \\ z = [z_1, z_2, \dots, z_v]; \\ A_p = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A \end{bmatrix}; \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B \end{bmatrix}; \\ K_p = [K_v \quad \dots \quad K_2 \quad K_1]; \quad D_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ D \end{bmatrix}.$$

Подставив соотношение (16) в (1), перепишем результат в виде

$$\dot{z} = (A_p + B_p K_p)z + D_p f. \quad (17)$$

**Теорема 2.** Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1) и закона управления (16). Пусть для заданного числа  $\alpha > 0$  существуют положительно определенная матрица  $P$  и число  $\beta > 0$  такие, что выполнены условия (8) и

$$\Psi = \begin{bmatrix} PA_p^T + A_p P + Y^T B_p^T + B_p Y + \alpha P & D_p \\ * & -\beta I \end{bmatrix} \leq 0; \quad (18)$$

$$K_p = YP^{-1}. \quad (19)$$

Тогда траектории (1), начавшиеся в шаре (2), не будут покидать эллипсоид (3), а при  $t \rightarrow \infty$  траектории системы будут стремиться к предельному эллипсоиду (4) с  $\delta$ , заданной условием (14).

В силу идентичности структур уравнений (7) и (17) доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

### Примеры

*Пример 1.* Рассмотрим объект управления (1) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; B = D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и  $f = 0,5 + 0,5 \cos t$ .

На рис. 1 приведены результаты, полученные с помощью алгоритма из работы [4] и предложенного метода.

Из рис. 1 видно, что траектория системы, полученная с помощью алгоритма [4], не стремится к началу координат, а остается в эллипсе 1. Траектория системы, полученная с помощью разработанного метода, сходится в расчетную область с  $\delta = 2,9 \cdot 10^{-4}$ . Отметим также, что след матрицы эллипса 1 составляет 6,8, а след матрицы эллипса 3 составляет 2,0.

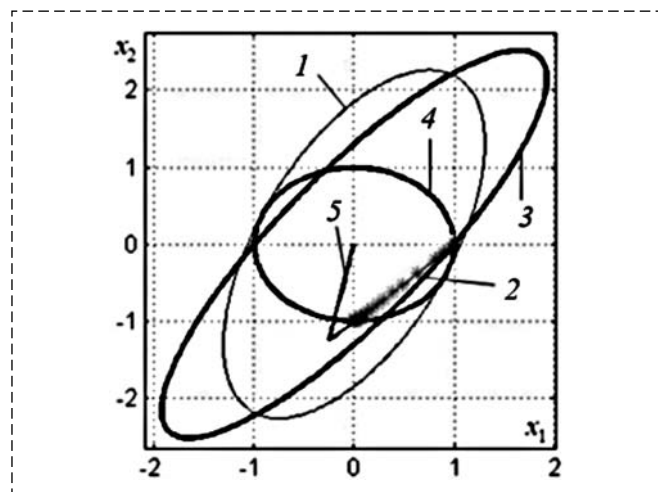


Рис. 1. Эллипс, полученный с помощью метода [4] (1); фазовая траектория системы, полученная с помощью метода [4] (2 (см. "\*" )); эллипс, полученный с помощью предложенного метода (3); окружность, ограничивающая начальные условия (4); траектория системы, полученная с помощью предложенного метода (5)

Fig. 1. The ellipse obtained by method [4] (1); the phase trajectory of the system obtained by method [4] (2 (see "\*" )); the ellipse obtained by the proposed method (3); the circle bounding the initial conditions (4); the system trajectory obtained by the proposed method (5)

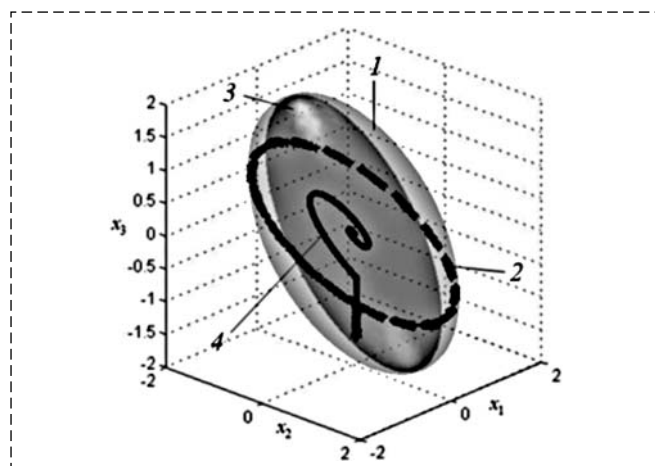


Рис. 2. Эллипсоид, полученный с помощью метода [4] (1); траектория системы, полученная с помощью метода [4] (2); эллипсоид, полученный с помощью предложенного метода (3); траектория системы, полученная с помощью предложенного метода (4)

Fig. 2. The ellipsoid obtained by method [4] (1); the trajectory of the system obtained by method [4] (2); the ellipsoid obtained by the proposed method (3); the system trajectory obtained by the proposed method (4)

*Пример 2.* Рассмотрим объект управления (1) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; B = D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

и  $f = 0,5 + 0,5 \cos t$ .

На рис. 2 приведены результаты, полученные с помощью алгоритма из работы [4] и с помощью предложенного метода.

Из рис. 2 видно, что траектория системы, полученная с помощью алгоритма [4], образует цикл. Траектория системы, полученная с помощью разработанного метода, сходится в расчетную область с точностью  $\delta = 1,4 \cdot 10^{-4}$ . Отметим также, что след матрицы эллипсоида 1 составляет 5, в то время как след матрицы эллипсоида 3 равен 2,8.

### Закключение

Разработан новый метод подавления внешних неизвестных ограниченных возмущений в линейных динамических системах с обеспечением нахождения фазовых траекторий системы в эллипсоиде, достаточно близком к шару, в котором находятся начальные условия. Дополнительно обеспечивается наилучшая точность регулирования в установившемся режи-

ме. Получены достаточные условия устойчивости в виде разрешимости линейных матричных неравенств. Примеры моделирования показали эффективность предложенного метода по сравнению с методом инвариантных эллипсоидов.

#### Список литературы

1. Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities // System And Control Theory. Vol. 15 of SIAM studies in applied mathematics. SIAM, Philadelphia, 1994.
2. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

3. Abedor J., Nagpal K., Poola K. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 1996. Vol. 6. P. 899—927.

4. Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 106—125.

5. Цыкунов А. М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. 2007. № 7. С. 103—115.

6. Фуртат И. Б. Алгоритм управления нелинейными системами в условиях возмущений и помех измерения // Автоматика и телемеханика. 2018. № 7. С. 41—58.

7. Furtat I. B. Control of nonlinear systems with compensation of disturbances under measurement noises // International Journal of Control. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1503723>.

## Disturbance Attenuation with Minimization of Ellipsoids Restricting Phase Trajectories in Transition and Steady State

I. B. Furtat, cainenash@mail.ru, P. A. Gushchin, guschin.p@mail.ru, A. A. Peregudin, zeekless@mail.ru, Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, 199178, St. Petersburg, Russia, ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia

Corresponding author: Furtat Igor B., Professor, Doctor of Technical Sciences, Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 199178, Russian Federation, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation, e-mail: cainenash@mail.ru

Accepted on September 6, 2019

#### Abstract

A new method for attenuation of external unknown bounded disturbances in linear dynamical systems with known parameters is proposed. In contrast to the well known results, the developed static control law ensures that the phase trajectories of the system are located in an ellipsoid, which is close enough to the ball in which the initial conditions are located, as well as provides the best control accuracy in the steady state. To solve the problem, the method of Lyapunov functions and the technique of linear matrix inequalities are used. The linear matrix inequalities allow one to find optimal controller. In addition to the solvability of linear matrix inequalities, a matrix search scheme is proposed that provides the smallest ellipsoid in transition mode and steady state with a small error. The proposed control scheme extends to control linear systems under conditions of large disturbances, for the attenuation of which the integral control law is used. Comparative examples of the proposed method and the method of invariant ellipsoids are given. It is shown that under certain conditions the phase trajectories of a closed-loop system obtained on the basis of the invariant ellipsoid method are close to the boundaries of the smallest ellipsoid for the transition mode, while the obtained control law guarantees the convergence of phase trajectories to the smallest ellipsoid in the steady state.

**Keywords:** disturbance attenuation, optimization, linear matrix inequality

**Acknowledgements:** The research in Section "Design method" was performed in IPME RAS and was supported by the Russian Science Foundation, project no. 18-79-10104. The research in Section "Control under large disturbances" was performed in IPME RAS and was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-08-00246. The research in Section "Examples" was performed in IPME RAS and was supported by the grant of President of Russian Federation (МД-1054.2020.8).

For citation:

Furtat I. B., Gushchin P. A., Peregudin A. A. Disturbance Attenuation with Minimization of Ellipsoids Restricting Phase Trajectories in Transition and Steady State, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 195—199.

DOI: 10.17587/mau.21.195-199

#### References

1. Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities, *In System And Control Theory. Vol. 15 of SIAM studies in applied mathematics*, SIAM, Philadelphia, 1994.

2. Balandin D. V., Kogan M. M. Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities, Moscow, Fizmatlit, 2007 (in Russian).

3. Abedor J., Nagpal K., Poola K. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 1996, vol. 6, pp. 899—927.

4. Nazin S. A., Polyak B. T., Topunov M. V. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 3, pp. 467—486.

5. Tsykunov A. M. Robust control algorithms with compensation of bounded perturbations, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 7, pp. 1213—1224.

6. Furtat I. B. An Algorithm to Control Nonlinear Systems in Perturbations and Measurement Noise, *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 7, pp. 1207—1221.

7. Furtat I. B. Control of nonlinear systems with compensation of disturbances under measurement noises, *International Journal of Control*, available: <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1503723>.

Т. Г. Рзаев, д-р техн. наук, проф., rzayev.tg@gmail.com,  
Азербайджанский технический университет, г. Баку

## Оптимальное управление переходными процессами объектов по быстродействию в многокритериальной среде

Статья посвящена анализу известных задач оптимального управления по быстродействию (ОУБ) и методам их решения. Показано, что использование в этих задачах единственного критерия — критерия быстродействия — недостаточно отражает реальные ситуации, так как решение задачи ОУБ в реальных ситуациях приводит к отклонению от номинальных или собственно оптимальных значений ряда других показателей, в частности, к увеличению затрат ресурсов для реализации оптимального управления, ухудшению количественных и качественных характеристик некоторых из выходных переменных рассматриваемого объекта и т.п. Исходя из этого рассмотрено обобщение задачи ОУБ с учетом других показателей как критерия оптимального управления. В этом аспекте проведен анализ трех обобщенных постановок задачи ОУБ, где в первой постановке задача ОУБ расширена с учетом дополнительных ограничений на другие показатели; во второй постановке в качестве критериев наряду с критерием быстродействия также использованы другие показатели; а в третьей постановке рассмотрено расширение второй постановки с введением ограничений также на сами критерии, сформированные из других учетных показателей. В последних двух многокритериальных задачах принимается, что критерии быстродействия имеют предпочтительность перед другими критериями и, разумеется, что степень такой предпочтительности в каждом конкретном случае определяется лицом, принимающим решение, или экспертным путем.

В статье в качестве предмета исследования рассмотрена третья многокритериальная задача и проведено обобщение (свертка) критериев при известных числовых значениях коэффициентов относительной важности (предпочтительности) последних. С исследованием обобщенного критерия рассматриваемая многокритериальная задача представлена как однокритериальная и получено необходимое условие оптимальности этой задачи в виде принципа максимума. Показано, что оптимальное управление, найденное из этого условия, в отличие от решения традиционной задачи оптимального управления по быстродействию, наряду с сопряженными переменными также зависит от коэффициентов относительной важности критериев, что проиллюстрировано на примере.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, критерии, весовые коэффициенты, компромисс, быстродействие, ограничение, многокритериальное, обобщенный критерий, множители Лагранжа, сопряженные переменные

### Введение

Задача быстродействия в открытых системах была одной из важных в вариационном исчислении, созданном еще в XVII—XVIII веках. Однако в системах управления (в системах программного управления с обратной связью) она начала свое бурное развитие с середины XX века. В этом существенную роль сыграли результаты научных исследований сотрудника института "Автоматики и телемеханики" СССР проф. А. А. Фельдбаума. В 1953 г. А. А. Фельдбаум в своем докладе на II Всесоюзной конференции по теории регулирования и в 1954 г. в нескольких докладах на семинаре, организованном Л. С. Понтрягиным, сформулировал некоторые задачи оптимального управления линейными объектами по быстродействию с ограничениями на управление в виде позиционных ограничений. Таким образом, было положено начало новому направлению — теории современных оптимальных систем управления [1, 2]. В этих работах А. А. Фельдбаум вначале рассматривал задачу оптимального быстродействия переходных процессов в объ-

ектах с двойным интегратором, представленную в виде

$$T \rightarrow \min \quad (1)$$

при

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u; \quad x(0) = x^{(0)}; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^{(0)}; \quad (2)$$

$$x(T) = x^{(T)}; \quad \dot{x}(T) = \dot{x}^{(T)}; \quad u \leq u \leq \bar{u}, \quad (3)$$

где  $T$  — нефиксированное время переходного процесса в объекте;  $x$  — фазовая переменная объекта;  $u$  — скалярное управляющее воздействие;  $\underline{u}, \bar{u}$  — ограничения на  $u$ ;  $\bar{x}^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, \bar{x}^{(T)}, \dot{x}^{(T)}$  — начальные и граничные значения  $x(t), \dot{x}(t)$  соответственно.

В дальнейших исследованиях модель объекта постепенно усложнялась. Вначале она представлялась как модель механического колебания без трения:

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_0 x = u, \quad (4)$$



с трением

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = u \quad (5)$$

и, наконец, как модель более общего вида

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = u. \quad (6)$$

Во всех случаях имело место позиционное ограничение на  $u$ . При расширении задачи быстрогодействия и реализации полученного решения использовалось представление уравнений (2)–(6) в виде уравнений Коши, т.е. в виде системы уравнений первого порядка, число которых соответствует старшему порядку исходного уравнения.

Основные результаты, полученные в работе А. А. Фельдбаума [1, 3], можно представить так:

- 1) оптимальное управление в линейных системах — знакопостоянная функция;
- 2) оптимальная траектория при использовании моделей (2), (4), (5) после определенного момента времени сходится к скользящему режиму;
- 3) теорема об  $n$  интервалах, где  $n$  — высший порядок производных в модели. Эта теорема утверждает, что знак знакопостоянного управления за период  $T$  меняется  $n - 1$  раз. Следовательно, при использовании моделей (2), (4), (5) — один раз.

Доказательство этой теоремы основывалось на инженерной интуиции и логике.

Появление принципа максимума Понтрягина [4] создало благоприятное условие для бурного развития работ в данном направлении. Первая работа по принципу максимума, опубликованная в 1956 г. [5], содержала (в форме гипотезы) принцип, ведущий к решению общей задачи оптимально-программного управления по быстромудействию. В работе [10] Г. В. Гамкрелидзе более строго математически доказал теорему об  $n$  интервалах. Работы в этом направлении интенсивно развивались как в теоретическом, так и в прикладном аспекте.

Авторов, занимающихся теоретическими аспектами задач быстрогодействия, в основном интересуют вопросы выявления новых свойств, особенностей развития и обобщения данной задачи, усовершенствование имеющихся, разработка новых, более эффективных методов, алгоритмов их анализа и синтеза и т.п. В этом направлении большие заслуги имеют известные ученые Р. Габасов, Ю. М. Ермолов, Ф. М. Кириллова, В. Ф. Кротов и их учени-

ки. А авторов прикладных работ больше всего интересуют возможности использования полученных научных достижений в управлении конкретными объектами. В таких работах эффект от управления по быстромудействию определяется в виде сокращения времени  $\Delta T_\delta$ :

$$\Delta T_\delta = T_n - T_\delta, \quad (7)$$

где  $T_\delta$  — период управления по быстромудействию;  $T_n$  — период переходного процесса при обычном (нормальном) режиме управления.

Публикация работ Дубовицкого, Милюткина в шестидесятых годах XX века [7, 8] сыграла важную роль в развитии и расширении области применения задач оптимального управления, в том числе быстрогодействия на основе принципа максимума. В этих работах был разработан и обоснован метод учета ограничений на текущие значения фазовых переменных в оптимальном управлении.

Несмотря на популярность задачи ОУБ и достигнутые успехи по анализу такой задачи [3–6], [9–15], в опубликованных работах недостаточное внимание уделяют обоснованию экономического эффекта такого управления. Следовательно, не обосновывается экономическая целесообразность постановки и решения задач быстрогодействия в каждой конкретной ситуации. Это связано с тем, что во многих ситуациях задача быстрогодействия не обладает абсолютной предпочтительностью перед другими задачами оптимального управления по другим показателям. Объекты управления характеризуются многими показателями, такими как, например, энергетические, метрологические, надежностные, экологические и т.п.; показателями переходных процессов — перерегулированием, степенью затухания колебаний, статическими и динамическими ошибками, временем переходных процессов и т.д. Существует ряд таких показателей, которые находятся в компромиссе между собой. Поэтому попытка оптимального управления по каждому из указанных показателей, в том числе по быстромудействию, приводит к отклонению от собственно оптимальных или номинальных значений других показателей, следовательно, к определенным потерям. Таким образом, ОУБ каждым объектом сопровождается определенными потерями в ряде других показателей. Поэтому известные задачи ОУБ применимы лишь при их абсолютной предпочтительности перед задачами оптимального управления по другим показателям. Такие обстоятельства возникают

при управлении некоторыми стратегическими объектами, особенно в экстремальных ситуациях, например, атомным реактором при его остановке в аварийных ситуациях, летательными аппаратами при военных операциях, пуском и выводом на орбиту спутника и т.д. При ОУБ такими объектами потери по другим показателям не принимаются во внимание. Однако в подавляющем большинстве случаев, например, в производственных, технических, информационных и других системах приходится учитывать и потери по другим показателям, полученные при ОУБ, и для таких систем задача ОУБ не обладает абсолютной предпочтительностью. Следовательно, экономический эффект, рассчитанный по  $\Delta T_8$ , будет завышенным.

Одним из эффективных путей учета имеющихся потерь по другим показателям при ОУБ является рассмотрение такой задачи в многокритериальной среде. Здесь под термином "многокритериальная среда" понимается задача многокритериального оптимального управления (ЗМОУ) с учетом и других показателей, в которых задача ОУБ имеет предпочтение перед задачами управления по другим показателям. В таком случае ЗМОУ можно называть обобщенной задачей ОУБ. В случае, когда степень предпочтения (важности) задачи ОУБ не превосходит наибольшую степень предпочтения задач оптимального управления по другим показателям, обобщенная задача ОУБ приобретает смысл обычной традиционной ЗМОУ.

Наряду с вышесказанным также следует отметить, что учет в традиционных задачах ОУБ только лишь позиционных ограничений вида (4) на управляющие воздействия снижает ее практическую значимость, так как реализация такой задачи ориентируется на свободное использование ресурсов для управления рассматриваемым объектом при условии (4), например, из складов (емкостей), сетей, трубопроводов и т.п. В то же время на практике часто имеются ограничения как на общие затраты ресурсов для реализации управляющих воздействий и других ресурсов на период управления, так и на количества некоторых продуктов, получаемых на данном объекте за этот период. А учет таких ограничений способствует значительному усложнению задачи ОУБ и снижает ее реализуемость.

В связи с вышесказанным обобщение и решение задачи ОУБ с ее неабсолютной предпочтительностью перед задачами оптимального управления по другим показателям представ-

ляются актуальными как в теоретическом, так и в прикладном аспектах.

## Постановка задачи

Для математической формализации обобщенной задачи ОУБ с учетом вышесказанного принимается, что как период управления, так и рассматриваемые другие показатели объекта в общем случае зависят от переменных состояния (фазовых переменных)  $x_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , управляющих  $u_j$ ,  $j = \overline{1, r}$ , и контролируемых возмущающих  $z_l$ ,  $l = \overline{1, h}$ , воздействий объекта. Показатели, подлежащие оптимизации, обозначим  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, M}$ , где  $M$  — число показателей, причем  $Q_1$  — период управления. Очевидно, что все показатели имеют определенные экономические значимости.

Учет показателей  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ , в задаче быстрогодействия отвечает системным требованиям и делает ее многокритериальной. Такую задачу можно представить в следующих трех формах.

1. Однокритериальное представление задачи, где в качестве критерия используется период управления. В такой задаче экспертным путем либо исходя из определенного соображения, либо из регламентов нормального ведения процессов в объекте определяются ограничения на другие показатели  $Q_\alpha$ :  $Q_\alpha \geq \underline{Q}_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ , следовательно, сохраняется однокритериальность задачи быстрогодействия. Кстати, так поступали до появления теории многокритериальной оптимизации.

2. Многокритериальное представление задачи с явным предпочтением  $Q_1$  перед  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ :

$$Q_\alpha \rightarrow \min, \alpha = \overline{1, M}, \quad (8)$$

при условиях (3), (6) и  $\rho_1 > \rho_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ , где  $\rho_\alpha$  — относительная важность (весовой коэффициент)  $Q_\alpha$ , причем  $\sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha = 1$ ,  $\rho_\alpha \geq 0$ .

3. Многокритериальное представление задачи с одновременным предъявлением ограничений на некоторые или все критерии (показатели)  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ , т.е. задачи вида:

$$Q_\alpha \rightarrow \min, \alpha = \overline{1, M}, \quad (9)$$

при условии (3), (6),  $\rho_1 > \rho_\alpha$  и

$$Q_\alpha \geq \underline{Q}_\alpha, \alpha = \overline{2, M}, \quad (10)$$

где  $\underline{Q}_\alpha$  — ограничение на  $Q_\alpha$  снизу. Такие ограничения позволяют учитывать желания лица,

принимаящего решения (ЛПР), относительно нижних предельных значений  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ .

Из представленных задач наиболее общей и адекватной реальности является третья задача.

Из-за наличия компромисса между  $Q_1$  и некоторыми из показателей  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ , при любой форме учета показателей в представленных задачах справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Время  $T_\delta(Q_\alpha)$  управления по быстрдействию при учете показателей  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ , не меньше оптимального значения времени управления по быстрдействию  $T_\delta$ :

$$T_\delta(Q_\alpha) \geq T_\delta. \quad (11)$$

**Теорема 2.** При существовании множества компромиссов (множество Парето) компромиссно-оптимальное значение времени управления по быстрдействию строго больше его оптимального значения:

$$T_\delta(Q_\alpha) > T_\delta. \quad (11')$$

### Доказательство теорем

В первой задаче предъявление ограничений на показатели  $Q_\alpha$  в общем случае сужает область управления по быстрдействию, следовательно, при этом справедливо отношение (11).

Во второй задаче наличие компромисса между  $Q_1$  и  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ , при  $\rho_\alpha < 1$  приводит к увеличению оптимального значения  $Q_1$ , следовательно, исходное множество сужается до множества компромиссов (Парето). Таким образом, в данном случае справедливо отношение (11').

В третьей задаче, помимо компромисса между  $Q_1$  и  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ , также существуют ограничения на эти показатели, определяемые исходя из технико-экономических требований. Эти ограничения только лишь могут усиливать утверждение по второй задаче.

Из теорем при соответствующих ограничениях в задачах 1—3 вытекает следующее следствие:

$$T_\delta^{(1)} \leq T_\delta^{(2)} \leq T_\delta^{(3)}, \quad (12)$$

где верхние индексы соответствуют номерам рассматриваемых форм представления многокритериальной задачи, т.е. обобщенных задач ОУБ.

При отсутствии контролируемых возмущающих воздействий в объекте  $z_l$ ,  $l = \overline{1, h}$ , или при известном прогнозе последних при их наличии обобщенную задачу быстрдействия с учетом показателей  $Q_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{2, M}$ , ограниче-

ний на эти и на другие показатели данного объекта управления можно представить в следующем общем виде:

$$Q_\alpha = \int_{t_0}^T F_\alpha(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad \alpha = \overline{1, M}, \quad (13)$$

при условиях

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x^{(0)}, \quad x(T) = x^{(T)}; \quad (14)$$

$$Q_\alpha = \int_{t_0}^T F_\alpha(x(t), u(t)) dt \geq b_\alpha, \quad \alpha = \overline{2, M}; \quad (15)$$

$$Q_i = \int_{t_0}^T g_i(x(t), u(t)) dt \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} l(x(t), u(t)) &\leq b_l(t), \quad i = \overline{1, m_t}, \\ |u(t)| &\leq \bar{u}(t); \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha = 1, \quad \rho_\alpha \geq 0, \quad \alpha = \overline{1, M}, \quad \rho_1 > \rho_\alpha, \quad \alpha = \overline{2, M}, \quad (18)$$

где  $x$ ,  $u$  —  $n$ -,  $r$ -мерные векторы,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^r$ ;  $f(\cdot)$  —  $n$ -мерная непрерывная вектор-функция. Для линейного стационарного объекта

$$f(x(t), u(t)) = Ax + Bu,$$

в которой  $A$ ,  $B$  —  $n \times n$ -,  $n \times r$ -мерные матрицы;  $F_\alpha$ ,  $g_i$  — непрерывные функции своих аргументов, из которых  $g_i$  выражают другие показатели объекта ( $i \neq \alpha$ );  $b_\alpha$ ,  $b_i$  — ограничения на интегралы функций  $F_\alpha(\cdot)$ ,  $g_i(\cdot)$ ,  $l(\cdot)$  — функции локальных ограничений;  $b_l(t)$  — ограничения на эти функции;  $x^{(0)}$  — начальное значение  $x(t)$ .

Уравнение (14) является векторным представлением системы дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка Коши рассматриваемого объекта.

### Методы решения задачи

Для решения поставленной задачи более эффективным представляется принцип максимума. Для решения задачи (13)—(17) с применением принципа максимума удобно ее представить в виде задачи Майера. С этой целью вводятся новые переменные

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= \int_{t_0}^t F_\alpha(x(t), u(t)) dt, \quad \alpha = \overline{1, M}; \\ x_i(t) &= \int_{t_0}^t g_i(x(t), u(t)) dt, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (19)$$

и соответствующие дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= F_\alpha(x(t), u(t)), x_\alpha(0) = x_\alpha^{(0)}, \alpha = \overline{1, M}; \\ \frac{dx_i}{dt} &= g_i(x(t), u(t)), x_i(0) = x_i^{(0)}, i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $x_\alpha^{(0)}, x_i^{(0)}$  — начальные значения  $x_\alpha, x_i$  соответственно.

С учетом новых переменных задача Майера представляется в виде

$$x_\alpha(T) \rightarrow \min, \alpha = \overline{1, M}, \quad (21)$$

при условиях (14), (17), (20) и

$$x_\alpha(T) \geq b_\alpha, \alpha = \overline{2, M}, x_i(T) \leq b_i, i = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Для простоты изложения целесообразно объединить дифференциальные уравнения (15), (20) и представить их в виде одной системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x(t), u(t)), x_i(0) = x_i^{(0)}, \\ i &= \overline{1, \tilde{n}}, \tilde{n} = n + m + M. \end{aligned} \quad (23)$$

Важным этапом в решении многокритериальной задачи (13)—(17) является обобщение критериев  $Q_\alpha$  и сведение ее к однокритериальной. А способы обобщения критериев зависят от вида априорной информации об относительной важности критериев. По этому признаку можно выделить следующие ситуации [17, 18].

1. Известны весовые коэффициенты критериев —  $\rho_\alpha$ , где

$$\sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha = 1, \rho_\alpha \geq 0.$$

2. Известны интервалы изменения  $\rho_\alpha$ :  $[\rho_\alpha, \bar{\rho}_\alpha]$ .

3. Известно, что критерии равнозначны:

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_M = \frac{1}{M}.$$

4. Известно ранжирование критериев:  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \dots > \rho_M$ .

5. Известно бинарное отношение предпочтения критериев:  $\mu_{\alpha\alpha'}, \alpha, \alpha' = \overline{1, M}$ .

6. Отсутствует информация об относительной важности критериев.

Каждый из указанных видов информации, в свою очередь, по характеру информации можно разделить на следующие группы: детерминированную, стохастическую, нечеткую информацию.

Все указанные в п. 1—5 виды информации в основном определяются либо экспертным путем, либо с использованием аналитических выражений  $Q_\alpha$  (функций полезности), либо

в диалоговом режиме с привлечением аналитических методов.

Как следует из вышеизложенного, в обобщенной задаче быстрогодействия (13)—(17) в обобщенном критерии по каждому виду информации имеется в виду, что наиболее предпочтительным является первый критерий:  $Q_1 = T_\delta$ . На примере обобщенного критерия по первому виду информации это означает, что  $\rho_1 > \rho_\alpha, \alpha = \overline{2, M}$ . Усиливая это отношение, можно усилить степень важности управления по быстромудействию, например  $\rho_1 \geq \sum_{\alpha=2}^M \rho_\alpha$ . При  $\rho_1 = 1$  получаем традиционную задачу ОУБ, т.е. задачу управления по единственному критерию  $Q_1 = T$ . Таким образом, изменяя соотношения между  $\rho_1$  и  $\rho_\alpha, \alpha = \overline{2, M}$ , можно получить задачу управления по быстромудействию с любой степенью предпочтения. А это является главным достоинством представления задачи оптимального управления по быстромудействию в среде многокритериальной оптимизации, т.е. обобщенной задачи ОУБ.

Существуют способы обобщения (свертки) критериев  $Q_\alpha, \alpha = \overline{1, M}$ , при указанных видах информации [16, 18]. Однако как при анализе многокритериальных задач оптимального управления (МЗОУ), так и в их практических приложениях широко используют аддитивный обобщенный критерий, составленный по первому виду информации о  $\rho_\alpha$ . Это связано, с одной стороны, с тем, что довольно часто удается экспертным путем определить числовые значения  $\rho_\alpha, \alpha = \overline{1, M}$ , а с другой — такой обобщенный критерий имеет структуру, удобную для анализа соответствующих оптимизационных задач.

Обобщенный критерий, составленный по первому виду информации, представляется в виде

$$Q = \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha Q_\alpha \quad (24)$$

с учетом условий (18).

С использованием обобщенного критерия (24) многокритериальная задача (13)—(17) представляется как однокритериальная вида

$$Q = \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha Q_\alpha \rightarrow \min \quad (25)$$

при условиях (15)—(17), (23).

Соответствующая однокритериальная задача Майера имеет вид

$$x(T) = Q = \int_{t_0}^T \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha x_\alpha(T) \rightarrow \min \quad (26)$$

при условиях (17), (23) и

$$x_\alpha(T) \geq b_\alpha, \alpha = \overline{2, M}, x_i(T) \leq b_i, i = \overline{1, m}, \quad (27)$$

где  $x(T)$  является интегрированным значением за период  $\overline{t_0, T}$  обобщенной фазовой переменной:

$$x(t) = \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha x_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha F_\alpha(x(t), u(t)) dt. \quad (28)$$

Уравнение движения по обобщенной фазовой переменной имеет вид

$$\dot{x} = \sum_{\alpha=1}^M \dot{x}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha F_\alpha(x(t), u(t)). \quad (29)$$

Из условия аддитивности уравнения (29) можно получить уравнение движения по составляющим  $x_\alpha$ :

$$\dot{x}_\alpha = \rho_\alpha F_\alpha(x(t), u(t)), \alpha = \overline{1, M}, \quad (30)$$

т.е. соответствующие уравнения в соотношениях (20), где  $F_1(x), u(t) = 1$ .

Для решения рассматриваемой задачи, приведенной к виду задачи Майера, составляется обобщенная функция Лагранжа:

$$\begin{aligned} J(x, \psi, \lambda, u) = & \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha x_\alpha(T) + \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \rho_i \psi_i(t) (\dot{x}_i - f_i(x(t), u(t))) + \\ & + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - x_i(T)) + \sum_{\alpha=2}^M \lambda_\alpha (x_\alpha(T) - b_\alpha) \end{aligned} \quad (31)$$

и ставится задача

$$J(x, \psi, \lambda, u) \rightarrow \min_{u(t)} \max_{\psi(t), \lambda} \quad (32)$$

при условиях (17), где  $\psi_i$  — сопряженные переменные, которые в соотношении (31) выступают как множители Лагранжа, учитывающие ограничения вида дифференциальных уравнений (23);  $\lambda_i, \lambda_\alpha$  — множители Лагранжа, учитывающие граничные условия на  $x_i, i = \overline{1, m}$ , и  $x_\alpha, \alpha = \overline{2, M}$ , т.е. ограничение (27).

Для общности под второй суммой выражения (31) для всех индексов  $x_i, i = \overline{1, \tilde{n}}$ , введены множители  $\rho_i$ . Однако при этом имеется в виду, что  $\rho_i = 1$  для индексов  $i = \overline{1, n+m}$ ;  $\rho_i = \rho_\alpha$  для индексов  $i = \overline{n+m+1, \tilde{n}}$ .

Учитывая, что в выражении (31)  $u(t)$  зависит только лишь от функций  $f_i$  и эти функции входят в (31) аддитивно, задачу (32) при ограничениях (17) можно представить в виде последовательности более простых статических

задач оптимизации со своими специфическими особенностями:

$$\begin{aligned} H(x, \psi, u^0) = & \max_{u(t)} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \rho_i \psi_i(t) f_i(x(t), u(t)), \\ & t = \overline{t_0, T}, \end{aligned} \quad (33)$$

которые выражают необходимые условия оптимальности принципа максимума в соответствующие моменты времени, где  $u^0$  — значение  $u$ , максимизирующее  $H$  (гамильтониан); сопряженные переменные  $\psi_i$  определяются из решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = \frac{\partial J}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, i = \overline{1, \tilde{n}}. \quad (34)$$

При граничных условиях:

$$\psi_i(T) = \frac{\partial J}{\partial x_i(T)}$$

для индексов  $i = \overline{n+1, n+m+M}$ ,

$$\psi_i(T) = 0 \text{ для индексов } i = \overline{1, n}, \quad (35)$$

$$\psi_i(T) = -1 \text{ для индексов } i = \alpha = \overline{1, M}. \quad (36)$$

В общем случае оптимальное значение управления —  $u(t)$ , доставляющее максимум функции  $H$  в (33), будет зависеть от значений  $\rho_\alpha, x(t), \psi(t)$ :  $u^0(t) = \mu(\rho_\alpha, x(t), \psi(t))$ . Такая зависимость представляет собой закон оптимального управления в обобщенной однокритериальной задаче (26).

**Пример.** Рассмотрим линейную задачу многокритериального оптимального управления следующего вида:

$$\begin{aligned} Q_1 = & \int_0^T dt = T \rightarrow \min; \\ Q_2 = & \int_0^T (cx(t) + du(t)) dt \rightarrow \min; \\ Q_3 = & \int_0^T u(t) dt \rightarrow \min \end{aligned} \quad (37)$$

при условиях

$$\dot{x} = ax(t) + bu(t), x(0) = x^{(0)}, \quad (38)$$

$$\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t), \quad (39)$$

где  $u(t), x(t)$  — скалярные переменные;  $c, d, a, b$  — известные числа.

Необходимое условие оптимальности (33) для этой задачи имеет следующий вид:

$$H(x, \psi, u^0) = \max[\psi_0(t)Q + \psi_1(t)\rho_1 + \psi_2(t)\rho_2(cx(t) + du(t)) + \psi_3(t)\rho_3u(t) + \psi(t)(ax(t) + bu(t))]. \quad (40)$$

Учитывая, что в (40)  $\psi_0 = -1$ , и группируя слагаемые с  $u(t)$ , получим

$$H(x, \psi, u^0) = \max[-Q + \psi_1(t)\rho_1 + \psi_2(t)\rho_2cx(t) + \psi(t)ax(t) + (\psi_2(t)\rho_2d + \psi_3(t)\rho_3 + \psi(t)b)u(t)]. \quad (41)$$

Закон оптимального управления исходя из (41) можно записать в виде

$$u^0(t) = \text{sign}(-\psi_2(t)\rho_2d + \psi_3(t)\rho_3 + \psi(t)b) = \begin{cases} \bar{u}(t), & \text{если } (\psi_2(t)\rho_2d + \psi_3(t)\rho_3 + \psi(t)b) > 0; \\ \underline{u}(t), & \text{если } (\psi_2(t)\rho_2d + \psi_3(t)\rho_3 + \psi(t)b) < 0. \end{cases} \quad (42)$$

Здесь  $\psi_2(t)$ ,  $\psi_3(t)$ ,  $\psi(t)$  определяются из решения следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_2 &= -\rho_2\psi_2(t), \quad \psi_2(T) = \lambda_2; \\ \dot{\psi}_3 &= 0, \quad \psi_3(T) = \lambda_3; \\ \dot{\psi} &= a\psi(t), \quad \psi(T) = 0, \end{aligned}$$

где  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  — множители Лагранжа, учитывающие ограничения на  $Q_2$  и  $Q_3$  соответственно в обобщенной функции Лагранжа (31), составленной для данного примера.

Из рассмотрения соотношения (42) можно заметить, что закон оптимального управления, полученный для многокритериальной задачи, в отличие от однокритериальной, наряду с  $\psi(t)b$  также зависит от  $\psi_2(t)\rho_2d$ ,  $\psi_3(t)\rho_3$ , следовательно, момент переключения управления из одного в другое граничное значение будет отличаться от момента переключения в однокритериальной задаче. В связи с этим оптимальное значение  $T$  будет отклоняться от его собственно оптимального значения, что будет приводить к потере оптимальности по  $T$ .

### Заключение

Рассмотрены и проанализированы традиционные задачи ОУБ. Показано, что использование абсолютной предпочтительности критерия быстрогодействия во многих реальных ситуациях не оправдывает себя и приводит к завышенной оценке эффективности от такого управления. Предлагается обобщение традиционных задач ОУБ путем учета других показателей при рас-

смотрении задачи ОУБ как многокритериальной задачи при условиях, что степень важности задачи ОУБ больше степеней важности задач оптимального управления по другим показателям. Такое обобщение способствует повышению адекватности и качества задачи ОУБ.

### Список литературы

1. Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1953. Т. 14, № 6. С. 712–728.
2. Фельдбаум А. А. О синтезе оптимальных систем автоматического регулирования. Труды II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. М.: АН СССР, 1955. С. 325–360.
3. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1963. 552 с.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. С. 393.
5. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов // Доклады АН СССР. 1958. Т. 22, № 1.
6. Гамкрелидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Известия. АН СССР, Серия математических наук. 1958. Т. 22, № 4. С. 449–472.
7. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задача на экстремум при наличии ограничений // ДАН СССР, 1963. Т. 149, № 4. С. 759.
8. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журнал выч. мат. и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 52–58.
9. Габасов Р., Кириллова Ф. М. и др. Методы оптимизации: Учеб. пособ. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
10. Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в пяти томах // Под редакцией К. А. Пупкова, Н. Д. Екупова. Т. 4. Теория оптимизации систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. 743 с.
11. Афанасьев Б. Н., Колмоновский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1987. 447 с.
12. Atassi A. N., Khalil M. K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE. Trans. Automat. Control. 1999. Vol. 44, N. 9. P. 1672–1687.
13. Constantinescu D., Croft E. A. Smooth and Time — Optimal Trajectory Planning for Industrial Manipulators along Specified Paths // Journal of Robotic Systems. University of British Columbia, Vancouver, BC. Canada V6T1Z4. 2000. January 21. 17(5). P. 233–249.
14. Lipra Th., Boydb S. Minimum—time speed optimization over a fixed path // Mechanical Engineering. Stanford University. CA. USA. Electrical Engineering. Stanford University. CA. USA. December 2013. P. 1–15.
15. Hartl R. E., Sethi S. P., Vikson R. G. A survey of maximum principle with state constants // SIAM Rev. 2013. Vol. 37. P. 181.
16. Абдуллаев А. А., Рзаев Т. Г. Оптимизация оперативного и календарного планирования в интегрированных АСУ предприятиями. Баку: Элм, 1983. 235 с.
17. Рзаев Т. Г. Многокритериальная структурная идентификация производственных процессов // Известия НАН Азерб., серия физико-технических и математических наук. 2005. Т. 14, № 8. С. 120–126.
18. Рзаев Т. Г. Идентификация систем. I часть. Баку: Элм, 2007. 518 с.
19. Рзаев Т. Г. Современные проблемы управления // Материалы республиканской конференции "Современные проблемы автоматизации и управления". Баку, 2012. С. 16–34.
20. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 488 с.

# Optimal Control of Transition Processes of Objects on Quick-Speed in a Multi-Criteria Environment

T. G. Rzaev, rzayev.tg@gmail.com

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

Corresponding author: **Rzaev Tofik Heydar**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Automation and Control of the Azerbaijan Technical University, Azerbaijan, Baku, AZ 1065, e-mail: rzayev.tg@gmail.com

Accepted on January 10, 2020

## Abstract

We analyze the known problems of optimal control of speed (OCS) and methods for their solution. It is shown that the use of the one criteria in these tasks (the speed criterion) does not sufficiently reflect real situations. The solution of the OCS problem in real situations leads to a deviation from the nominal or optimal values of a number of other indicators. Proceeding from this, a generalization of the OCS problem is considered taking into account other indicators as a criterion for optimal control. In this aspect, three generalized statements of the OCS problem are analyzed, where in the first formulation, the OCS task is expanded with additional constraints on other indicators; in the second setting, other indicators were used as criteria alongside with the performance criterion; and in the third formulation, the expansion of the formulation is considered with the introduction of restrictions also on the criteria themselves, formed from other measured indicators. In the article, the most general — the third multicriteria problem is considered as the subject of research and the necessary condition for optimality of its solution in the form of the maximum principle is obtained. A traditional and iterative scheme for solving the generalized by OCS problem is presented, based on the obtained necessary optimality condition, in contrast to the traditional criteria, which are also dependent on the degree of preference.

**Keywords:** optimum control, criteria, weight coefficients, compromise, limitation, quickness, multicriterion generalized criterion, Lagrange multipliers, conjugate variables

For citation:

**Rzaev T. G.** Optimal Control of Transition Processes of Objects on Quick-Speed in a Multi-Criteria Environment, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 200—207.

DOI: 10.17587/mau.21.200-207

## References

1. Feldbaum A. A. Optimal processes in systems of automatic control, *Automation and Telemekhanics*, 1953, vol. 14, no. 6, pp. 712—728 (in Russian).
2. Fieldbaum A. A. On the synthesis of optimal automatic control systems. Proceedings of the II All-Union meeting on the theory of automatic control, Moscow, Academy of Sciences of the USSR, 1955, pp. 325—360 (in Russian).
3. Feldbaum A. A., Pontryagin L. S., Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. Fundamentals of the theory of optimal automatic systems, Moscow, Fizmatgiz, 1963, 552 p. (in Russian).
4. Pontryagin L. S., Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. The mathematical theory of optimal processes. Moscow, Nauka, 1961, pp. 393 (in Russian).
5. Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Pontryagin L. S. To the theory of optimal processes, *Reports of Academy of science of the USSR*, 1958, vol. 22, no. 1, pp. 10 (in Russian).
6. Gamkrelidze R. V. The theory of speed-optimal processes in linear systems. News, *USSR Academy of Sciences, a series of mathematical sciences*, 1958, vol. 22, no. 4, pp. 449—472.
7. Dubovitsky A. Y., Milyutin A. A. The problem of extremum in the presence of restrictions, *DAS USSR*, 1963, vol. 149, no. 4, pp. 759 (in Russian).
8. Dubovitsky A. Y., Milyutin A. A. Tasks for an extremum in the presence of restrictions, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1965, vol. 5, no. 3, pp. 52—58 (in Russian).
9. Gabasov R., Kirillova F. M. and etc. Optimization methods. Tutorial, Minsk, Four quarters, 2011, 472 p. (in Russian).
10. Pupkov K. A., Ekupov N. D. Methods of the classical and modern theory of automatic control. The textbook in five volumes, vol. 4. Theory of optimization of automatic control systems, Publishing House MSTU Bauman, 2004, 743 p. (in Russian).
11. Afanasyev B. N., Kolmonovsky V. B., Nosov V. R. The mathematical theory of designing control systems, Moscow, Higher school, 1987, 447 p. (in Russian).
12. Atassi A. N., Khalil M. K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems, *IEEE. Trans. Automat. Control*, 1999, vol. 44, no. 9, pp. 1672—1687.
13. Constantinescu D., Croft E. A. Smooth and Time — Optimal Trajectory Planning for Industrial Manipulators along Specified Paths, *Journal of Robotic Systems*. University of British Columbia, Vancouver. BC. Canada V6T1Z4. January 21, 2000, vol. 17(5), pp. 233—249.
14. Lippa Th., Boydb S. Minimum—time speed optimization over a fixed path, *Mechanical Engineering*. Stanford University. CA. USA. *Electrical Engineering*. Stanford University. CA. USA. December, 2013, pp. 1—15.
15. Hartl R. E., Sethi S. P., Vikson R. G. A survey of maximum principle with state constants, *SIAM Rev.*, 2013, vol. 37, pp. 181.
16. Abdullaev A. A., Rzaev T. G. Optimization of operational and scheduling in integrated automated control systems by enterprises, Baku, Elm, 1983, 235 p. (in Russian).
17. Rzaev T. G. Multicriteria structural identification of production processes. Izvestiya NAS Azer., A series of physical, technical and mathematical sciences, 2005, vol. 14, no. 8, pp. 120—126 (in Russian).
18. Rzaev T. G. System identification. I part. Baku, Elm, 2007, p. 518 (in Russian).
19. Rzaev T. G. Modern management issues, *Materials of the republican conference "Modern problems of automation and control"*, Baku, 2012, pp. 16—34 (in Russian).
20. Fedorenko R. P. An approximate solution to optimal control problems, Moscow, Science, Main Edition of the Physics and Mathematics Literature, 1978, 488 p. (in Russian).

А. П. Куцый<sup>1,2</sup>, ассистент, e-mail: tosha1993irk@yandex.ru,

Н. Н. Куцый<sup>1</sup>, д-р техн. наук, проф., e-mail: kucyi@cyber.istu.irk.ru,

Т. В. Маланова<sup>1</sup>, канд. техн. наук, доц., e-mail: malanova\_tanya@mail.ru,

<sup>1</sup>Иркутский национальный исследовательский технический университет,

<sup>2</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения

## Определение области робастной устойчивости системы на основе теоремы В. Л. Харитонова

*Параметры объекта регулирования в процессе эксплуатации в силу различных причин могут изменяться. Эти изменения могут привести к изменению показателей качества работы автоматической системы, а также ее устойчивости. В данной статье предложен подход для определения области допустимых значений параметров объекта регулирования автоматической системы с ПИД регулятором, в которой система будет сохранять устойчивость. Таким образом, возникает задача анализа автоматической системы регулирования, заданной не единственной моделью с четко заданными параметрами, а семейством моделей, принадлежащих заданному множеству — задача робастного регулирования. Поиск диапазонов, в которых параметры объекта регулирования могут изменяться, в настоящей работе основывается на решении задачи нелинейного программирования. Представлен вывод целевой функции и системы ограничений с применением теоремы В. Л. Харитонова о робастной устойчивости линейных систем. Основная идея заключается в том, что каждый параметр объекта регулирования может изменяться на некоторую величину  $h_{i1}$  в сторону уменьшения и на  $h_{i2}$  — в сторону увеличения. Заменяя обозначения, используемые в теореме В. Л. Харитонова, нижних и верхних границ изменения параметров на суммы и разности номинальных значений параметров и соответствующих  $h_{i1}$ ,  $h_{i2}$ , мы получаем систему ограничений. При этом для устойчивости полиномов Харитонова наиболее удобно использовать критерий Ляпуна—Шипара. Чем больше значения  $h_{i1}$ ,  $h_{i2}$ , тем шире диапазоны изменения параметров и тем меньше обратная сумма этих значений. Исходя из этого утверждения формулируется целевая функция. Следует отметить, что условие для рассматриваемой автоматической системы, на котором основан предлагаемый подход, является достаточным, но не необходимым, так как коэффициенты полинома взаимозависимые. Рассмотрен пример, с помощью которого демонстрируется предложенный подход. Данный подход можно применить и для других линейных систем, для которых выполняются условия теоремы В. Л. Харитонова.*

**Ключевые слова:** системы с ПИД регулятором, синтез малочувствительных систем, функции чувствительности, параметрическая оптимизация, теорема Харитонова, устойчивость систем, критерий Ляпуна—Шипара, системы автоматического регулирования

### Введение

Параметры систем автоматического регулирования (САР) с течением времени в силу таких причин, как старение, износ, нагрев, деформация и прочее, могут изменяться. Кроме того, при разработке регуляторов параметры объекта могут быть определены не достаточно точно. В общем случае традиционные методы анализа и синтеза систем автоматического регулирования предполагают, что при рассмотрении конкретной САР с заданными номинальными значениями параметров малые изменения этих параметров не изменяют существенно характер движения. Однако не всегда параметры могут изменяться в достаточно малых пределах. Тогда возникает необходимость в исследовании САР на сохранение ее заданных свойств при всех значениях параметров, определенных в каких-либо пределах. В этом случае говорят об анализе робастности рассматриваемого свойства САР [1–3]. Наиболее важным среди свойств САР является ее устойчивость [4–6]. Таким образом, в настоящей работе речь идет о робастной устойчивости САР [7, 8]. В усло-

виях изменения параметров объекта регулирования возможны следующие задачи.

**Первая задача.** Наряду с известной моделью САР с ее номинальными параметрами известны максимальные отклонения реальных параметров объекта регулирования. Определить, как изменение параметров отразится на устойчивости САР.

**Вторая задача.** Известна модель САР. Необходимо определить, в каких диапазонах возможно изменение параметров объекта регулирования при условии, чтобы САР сохраняла устойчивость. Здесь важно определить, на основе какого критерия рассматривается устойчивость. Так, например, рассматривая критерий Найквиста, необходимо исследовать поведение АФЧХ. Применение корневого критерия предполагает исследование взаимного расположения корней и полюсов передаточной функции и т.д. Также с практической точки зрения необходимо помнить, что поиск диапазонов изменения параметров объекта регулирования не ограничивается лишь критериями устойчивости. На значение допусков на параметры вносит свои коррективы в решение данной задачи. С одной стороны, значения этих допусков не должны



быть малыми, так как это требует точного обору-  
дования, а с другой стороны, большие допу-  
ски не смогут обеспечить взаимозаменяемость  
деталей. Не следует забывать и о показателях  
качества переходного процесса (перерегулиро-  
вание, время регулирования и т.д.).

Единого подхода к анализу робастной  
устойчивости систем автоматического регу-  
лирования не существует, в зависимости от  
характера исследуемой системы и типа возму-  
щений задача решается по-разному. В общем  
случае можно выделить следующие подходы:

- корневой, основанный на взаимном распо-  
ложении нулей и полюсов [9];
- частотный, связанный с построением ча-  
стотных характеристик [10];
- алгебраический, например, метод, основан-  
ный на полиномах В. Л. Харитонова [2];
- с применением методов теории чувстви-  
тельности [11],
- с применением понятия грубости системы  
в фазовом пространстве [10];
- с применением Н-теории [12, 13].

В данной работе решается задача опреде-  
ления области значений параметров объекта  
регулирования, в которой САР должна быть  
робастно устойчивой. Среди множества под-  
ходов, перечисленных выше, выбран как наи-  
более простой подход, основанный на теореме  
В. Л. Харитонова, определившей в целом ста-  
новление теории робастности.

Рассмотрим данный подход на конкретном  
примере — системе с ПИД регулятором.

### Описание исследуемой системы

Рассмотрим систему автоматического регу-  
лирования со следующей структурной схемой,  
приведенной на рис. 1 [14—16].

Здесь  $k_{им}$ ,  $k_{об}$  — коэффициенты усиления  
звеньев объекта регулирования;  $T_{об1}$ ,  $T_{об2}$  —  
постоянные времени;

$$G_{рег}(p) = k_{п} + k_{и} \frac{1}{p} + k_{д} p,$$

где  $p$  — оператор дифференцирования;  $k_{п}$ ,  $k_{и}$ ,  
 $k_{д}$  — параметры ПИД регулятора.

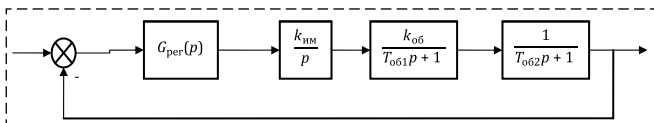


Рис. 1 Структурная схема САР с ПИД регулятором  
Fig. 1 The block diagram of the ACS with a PID controller

Передаточная функция замкнутой системы  
с ПИД регулятором имеет вид

$$W(p) = \frac{(k_{п}p + k_{и} + k_{д}p^2)k_{им}k_{об}}{p^2(T_{об1}p + 1)(T_{об2}p + 1) + (k_{п}p + k_{и} + k_{д}p^2)k_{им}k_{об}}. \quad (1)$$

Характеристический полином рассматрива-  
емой САУ:

$$Q(p) = T_{об1}T_{об2}p^4 + (T_{об1} + T_{об2})p^3 + (k_{д}k_{им}k_{об} + 1)p^2 + k_{п}k_{им}k_{об}p + k_{и}k_{им}k_{об}.$$

Пусть  $p = j\omega$ , тогда

$$Q(j\omega) = T_{об1}T_{об2}\omega^4 - j(T_{об1} + T_{об2})\omega^3 - (k_{д}k_{им}k_{об} + 1)\omega^2 + jk_{п}k_{им}k_{об}\omega + k_{и}k_{им}k_{об}.$$

Отсюда мнимая и действительная части  
 $Q(j\omega)$  соответственно равны:

$$u = T_{об1}T_{об2}\omega^4 - (k_{д}k_{им}k_{об} + 1)\omega^2 + k_{и}k_{им}k_{об};$$

$$v = -(T_{об1} + T_{об2})\omega^3 + k_{п}k_{им}k_{об}\omega.$$

Найдем диапазоны, в которых параметры  
объекта регулирования могут меняться:

$$\begin{aligned} \underline{T}_{об1} < T_{об1} < \bar{T}_{об1}; \\ \underline{T}_{об2} < T_{об2} < \bar{T}_{об2}; \\ \underline{k}_{об} < k_{об} < \bar{k}_{об}; \\ \underline{k}_{им} < k_{им} < \bar{k}_{им}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда коэффициенты полинома  $Q(j\omega)$ , учи-  
тывая положительность всех параметров объек-  
та регулирования (необходимое условие устой-  
чивости), изменяются в следующих диапазонах

$$\begin{aligned} \underline{T}_{об1}\underline{T}_{об2} < T_{об1}T_{об2} < \bar{T}_{об1}\bar{T}_{об2}; \\ \underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2} < T_{об1} + T_{об2} < \bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}; \\ (k_{д}\underline{k}_{им}\underline{k}_{об} + 1) < (k_{д}k_{им}k_{об} + 1) < (k_{д}\bar{k}_{им}\bar{k}_{об} + 1); \\ k_{п}\underline{k}_{им}\underline{k}_{об} < k_{п}k_{им}k_{об} < k_{п}\bar{k}_{им}\bar{k}_{об}; \\ k_{и}\underline{k}_{им}\underline{k}_{об} < k_{и}k_{им}k_{об} < k_{и}\bar{k}_{им}\bar{k}_{об}. \end{aligned}$$

Отсюда нижние и верхние границы измене-  
ния мнимой и действительной частей характе-  
ристического полинома выражаются формулами

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{T}_{об1}\underline{T}_{об2}\omega^4 - (\bar{k}_{д}\bar{k}_{им}\bar{k}_{об} + 1)\omega^2 + k_{и}\underline{k}_{им}\underline{k}_{об}; \\ \underline{v} &= -(\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2})\omega^3 + k_{п}\underline{k}_{им}\underline{k}_{об}\omega; \\ \bar{u} &= \bar{T}_{об1}\bar{T}_{об2}\omega^4 - (k_{д}\underline{k}_{им}\underline{k}_{об} + 1)\omega^2 + k_{и}\bar{k}_{им}\bar{k}_{об}; \\ \bar{v} &= -(\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2})\omega^3 + k_{п}\bar{k}_{им}\bar{k}_{об}\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Составим полиномы Харитонова [4]

$$\begin{aligned} Q_1 &= \bar{u} + jv; \\ Q_2 &= \bar{u} + \bar{v}; \\ Q_3 &= \underline{u} + \bar{v}; \\ Q_4 &= \underline{u} + \underline{v}. \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая соотношения (3) и (4), получим

$$\begin{aligned} Q_1(\lambda) &= k_u \bar{k}_{им} \bar{k}_{об} + k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} \lambda + (k_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) \lambda^2 + \\ &\quad + (\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}) \lambda^3 + \bar{T}_{об1} \bar{T}_{об2} \lambda^4; \\ Q_2(\lambda) &= k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} \lambda + (k_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) \lambda^2 + \\ &\quad + (\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2}) \lambda^3 + \bar{T}_{об1} \bar{T}_{об2} \lambda^4; \\ Q_3(\lambda) &= k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} \lambda + (\bar{k}_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) \lambda^2 + \\ &\quad + (\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2}) \lambda^3 + \underline{T}_{об1} \underline{T}_{об2} \lambda^4; \\ Q_4(\lambda) &= k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} \lambda + (\bar{k}_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) \lambda^2 + \\ &\quad + (\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}) \lambda^3 + \underline{T}_{об1} \underline{T}_{об2} \lambda^4. \end{aligned}$$

Для робастной устойчивости системы достаточно, чтобы были устойчивыми полиномы Харитонова. По определению полином называется устойчивым полиномом, если все его нули находятся в левой полуплоскости на комплексной плоскости [2].

Воспользуемся матрицами Гурвица и запишем их для каждого полинома (4):

$$\begin{aligned} \Delta_{Q_1} &= \begin{pmatrix} (\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}) & k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 & 0 \\ \bar{T}_{об1} \bar{T}_{об2} & (k_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) & k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 \\ 0 & (\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}) & k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 \\ 0 & \bar{T}_{об1} \bar{T}_{об2} & (k_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) & k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} \end{pmatrix}; \\ \Delta_{Q_2} &= \begin{pmatrix} (\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2}) & k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 & 0 \\ \bar{T}_{об1} \bar{T}_{об2} & (k_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) & k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 \\ 0 & (\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2}) & k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 \\ 0 & \bar{T}_{об1} \bar{T}_{об2} & (k_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) & k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} \end{pmatrix}; \\ \Delta_{Q_3} &= \begin{pmatrix} (\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2}) & k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 & 0 \\ \underline{T}_{об1} \underline{T}_{об2} & (\bar{k}_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) & k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 \\ 0 & (\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2}) & k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 \\ 0 & \underline{T}_{об1} \underline{T}_{об2} & (\bar{k}_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) \lambda^2 & k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} \end{pmatrix}; \\ \Delta_{Q_4} &= \begin{pmatrix} (\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}) & k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 & 0 \\ \underline{T}_{об1} \underline{T}_{об2} & (\bar{k}_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) & k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 \\ 0 & (\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}) & k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} & 0 \\ 0 & \underline{T}_{об1} \underline{T}_{об2} & (\bar{k}_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) & k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку коэффициенты полиномов положительные, то для устойчивости полиномов Харитонова достаточно применить критерий Ляпуна—Шипара, по которому необходимо и достаточно выполнения следующих неравенств:

$$\begin{aligned} &((\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2})(k_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) - \\ &\quad - \bar{T}_{об1} \bar{T}_{об2} k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}}) k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} - \\ &\quad - (\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}) k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} (\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}) > 0; \\ &((\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2})(k_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) - \\ &\quad - \bar{T}_{об1} \bar{T}_{об2} k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}}) k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} - \\ &\quad - (\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2}) k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} (\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2}) > 0; \\ &((\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2})(k_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) - \\ &\quad - \underline{T}_{об1} \underline{T}_{об2} k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}}) k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} - \\ &\quad - (\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2}) k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} (\underline{T}_{об1} + \underline{T}_{об2}) > 0; \\ &((\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2})(k_{д\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} + 1) - \\ &\quad - \underline{T}_{об1} \underline{T}_{об2} k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}}) k_{п\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} - \\ &\quad - (\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}) k_{и\bar{k}_{им} \bar{k}_{об}} (\bar{T}_{об1} + \bar{T}_{об2}) > 0. \end{aligned}$$

Выполним замену. Пусть

$$\begin{aligned} \underline{T}_{об1} &= T_{об1} - h_{T11}; \quad \bar{T}_{об1} = T_{об1} + h_{T12}; \\ \underline{T}_{об2} &= T_{об2} - h_{T21}; \quad \bar{T}_{об2} = T_{об2} + h_{T22}; \\ \underline{k}_{об} &= k_{об} - h_{kob1}; \quad \bar{k}_{об} = k_{об} + h_{kob2}; \\ \underline{k}_{им} &= k_{им} - h_{kim1}; \quad \bar{k}_{им} = k_{им} + h_{kim2}, \end{aligned}$$

где

$$h_{T11}, h_{T12}, h_{T21}, h_{T22}, h_{kob1}, h_{kob2}, h_{kim1}, h_{kim2} \geq 0. \quad (5)$$

В результате получаем систему неравенств:

$$\begin{aligned} &((T_{об1} + h_{T12} + T_{об2} + h_{T22})(k_{д}(k_{им} - h_{kim1}) \times \\ &\quad \times (k_{об} - h_{kob1}) + 1) - (T_{об1} + h_{T12})(T_{об2} + h_{T22}) \times \\ &\quad \times k_{п}(k_{им} - h_{kim1})(k_{об} - h_{kob1})) k_{п}(k_{им} - h_{kim1}) \times \\ &\quad \times (k_{об} - h_{kob1}) - (T_{об1} + h_{T12} + T_{об2} + h_{T22})^2 \times \\ &\quad \times k_{и}(k_{им} + h_{kim2})(k_{об} + h_{kob2}) > 0; \\ &((T_{об1} - h_{T11} + T_{об2} - h_{T21})(k_{д}(k_{им} - h_{kim1}) \times \\ &\quad \times (k_{об} - h_{kob1}) + 1) - (T_{об1} + h_{T12})(T_{об2} + h_{T22}) \times \\ &\quad \times k_{п}(k_{им} + h_{kim2})(k_{об} + h_{kob2})) k_{п}(k_{им} + h_{kim2}) \times \\ &\quad \times (k_{об} + h_{kob2}) - (T_{об1} - h_{T11} + T_{об2} - h_{T21})^2 \times \\ &\quad \times k_{и}(k_{им} + h_{kim2})(k_{об} + h_{kob2}) > 0; \\ &((T_{об1} - h_{T11} + T_{об2} - h_{T21})(k_{д}(k_{им} + h_{kim2}) \times \\ &\quad \times (k_{об} + h_{kob2}) + 1) - (T_{об1} - h_{T11})(T_{об2} - h_{T21}) \times \\ &\quad \times k_{п}(k_{им} + h_{kim2})(k_{об} + h_{kob2})) k_{п}(k_{им} + h_{kim2}) \times \\ &\quad \times (k_{об} + h_{kob2}) - (T_{об1} - h_{T11} + T_{об2} - h_{T21})^2 \times \\ &\quad \times k_{и}(k_{им} - h_{kim1})(k_{об} - h_{kob1}) > 0; \\ &((T_{об1} + h_{T12} + T_{об2} + h_{T22})(k_{д}(k_{им} + h_{kim2}) \times \\ &\quad \times (k_{об} + h_{kob2}) + 1) - (T_{об1} - h_{T11})(T_{об2} - h_{T21}) \times \\ &\quad \times k_{п}(k_{им} - h_{kim1})(k_{об} - h_{kob1})) k_{п}(k_{им} - h_{kim1}) \times \\ &\quad \times (k_{об} - h_{kob1}) - (T_{об1} + h_{T12} + T_{об2} + h_{T22})^2 \times \\ &\quad \times k_{и}(k_{им} - h_{kim1})(k_{об} - h_{kob1}) > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Далее введем целевую функцию

$$I = (h_{T11} + h_{T12} + h_{T21} + h_{T22} + h_{kob1} + h_{kob2} + h_{kim1} + h_{kim2})^{-1}.$$

Так как задача поиска диапазонов (2) сводится к тому, чтобы найти максимальные значения  $h_{T11}$ ,  $h_{T12}$ ,  $h_{T21}$ ,  $h_{T22}$ ,  $h_{kob1}$ ,  $h_{kob2}$ ,  $h_{kim1}$ ,  $h_{kim2}$  с учетом ограничений (5) и (6), то получаем задачу минимизации функции  $I$  при указанных ограничениях:

$$\min_{h_{T11}, h_{T12}, h_{T21}, h_{T22}, h_{kob1}, h_{kob2}, h_{kim1}, h_{kim2}} I. \quad (8)$$

Таким образом, чтобы определить диапазоны изменения параметров объекта регулирования автоматической системы с ПИД регулятором, достаточно решить задачу нелинейного программирования (8), (7), (6), (5).

### Проведение эксперимента

Пусть исходная автоматическая система с ПИД регулятором задается параметрами, определенными в табл. 1.

Переходный процесс для данной системы представлен на рис. 2.

Решив задачу (8), (7), (6), (5), получим границы изменения параметров объекта регулирования, которые представлены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что нижние границы коэффициентов усиления равны нулю. Это объясня-

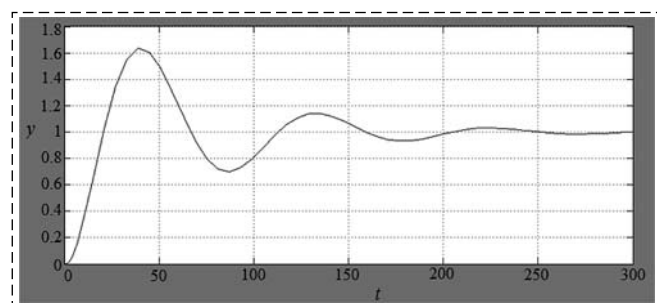


Рис. 2 Переходный процесс автоматической системы с ПИД регулятором

Fig. 2 The transient process of the automatic system with a PID controller

Таблица 1  
Table 1

Параметр	$k_{им}$	$k_{об}$	$T_{об1}$	$T_{об2}$	$k_p$	$k_i$	$k_d$
Значение	0,1	1	3	2	0,5	0,04	0,01

Таблица 2  
Table 2

Параметр	Нижняя граница	Верхняя граница
$k_{им}$	0	0,1000
$k_{об}$	0	1,0000
$T_{об1}$	1,1779	9,4802
$T_{об2}$	0	2,0000

ется тем, что, чем меньше коэффициент усиления, тем меньше колебаний. При значениях параметров, соответствующих верхним границам, система находится на границе устойчивости.

### Заключение

Таким образом, разработан подход для определения допустимых значений параметров объекта регулирования, при которых автоматическая система будет робастно устойчивой. Подход основан на сведении исходной задачи к задаче нелинейного программирования. Система ограничений получена на основе теоремы В. Л. Харитонова о робастной устойчивости.

Условие для рассматриваемой системы, на котором основан подход, носит достаточный, но не необходимый характер, так как коэффициенты полинома взаимозависимые.

В целом любая САР должна не только удовлетворять требованию к устойчивости, но и отвечать ряду других критериев качества. В этом случае можно добавить к задаче (8), (7), (6), (5) какой-либо критерий качества и, решив многокритериальную задачу, получить решения с учетом и других характеристик переходного процесса.

### Список литературы

1. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления: Пер. с англ. Б. И. Копылова. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2012. 832 с.
2. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Том 1. Линейные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 288 с.
3. Ошепков А. Ю. Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB: учеб. пособ. СПб.: Лань, 2013. 208 с.
4. Lukyanov A. V., Krakovsky Yu. M., Arshinsky L. V., Kutsy N. N. The development of software for controlling a safety system of the machines using vibration analysis // *Far East Journal of Mathematics 1 Sciences (EJMS)*. 2018. Vol. 103, N. 2. P. 441–450.
5. Kucyi N. N., Lukyanov A. V., Kargapol'cev S. K., Tikhii I. I. Training of neural network based PWM controllers // *Advances and Applications in Discrete Mathematics*. 2018. Vol. 19, N. 4. P. 359–371.
6. Galyaev A. A., Lysenko P. V. Energy-Optimal Control of Harmonic Oscillator // *Automation and Remote Control*. 2019. Vol. 80, N. 1. P. 16–29.
7. Kogan M. M. Design of optimal and robust control with  $H_\infty$  performance criterion // *Automation and Remote Control*. 2016. Vol. 77, N. 8. P. 1317–1333.
8. Zhirabok A. N., Suvorov A. Yu. A method for constructing robust diagnostic observers // *Automation and Remote Control*. Vol. 75, N. 2. 2014. P. 208–218.
9. Ефимов С. В., Замятин С. В., Суходоев М. С., Гайворонский С. А. Определение желаемой области расположения доминирующих полюсов замкнутой системы с учетом ее нулей // *Известия Томского политехнического университета*. 2008. Т. 312. № 5. С. 57–61.
10. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физ-мат литература, 1959. 916 с.
11. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении / Под ред. Е. Н. Розенвассера, Р. М. Юсупова. Л.: Энергия, 1971. 345 с.

12. **Методы** классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. Т. 3: Методы современной теории автоматического управления / Под ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 748 с.

13. **Методы** робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: Учебник / Под ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. 744 с.

14. **Kutsyi N. N., Livshits A. V.** Searchless algorithm for parametrics optimization of a PI-controller with semi-permant

integration // *Advanee des in Differential Equation and Control Processes*. 2018. Vol. 19, N. 2. P. 69—82.

15. **Morozov M. V.** On Small Perturbations of a Periodic Homogeneous Differential Inclusion with an Asymptotically Stable Set // *Automation and Remote Control*. Vol. 80, N. 5. 2019. P. 834—839.

16. **Aleksandrov A. G.** Design of Controllers by Indices of Precision and Speed. III. Control-Stable Multidimensional Plants // *Automation and Remote Control*. Vol. 79, N. 2. 2018. P. 241—257.

## Determination of the Area of Robust Stability of the System on the Basis of V. L. Kharitonov's Theorem

**A. P. Kutsyi**<sup>1,2</sup>, tosha1993irk@yandex.ru, **N. N. Kutsyi**<sup>1</sup>, kucyi@cyber.istu.irk.ru,  
**T. V. Malanova**<sup>1</sup>, malanova\_tanya@mail.ru,

<sup>1</sup>Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, 664074, Russian Federation,

<sup>2</sup>Irkutsk State Transport University, Irkutsk, 664074, Russian Federation

Corresponding author: **Malanova Tatiana V.**, Ph.D. in Engineering Science, Associate Professor, Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, 664074, Russian Federation, e-mail: malanova\_tanya@mail.ru

Accepted on January 15, 2020

### Abstract

The parameters of the object of regulation during operation due to various reasons may vary. These changes can lead to a change in the performance indicators of the automatic system, as well as its stability. This article proposes an approach to determine the range of acceptable values of the parameters of the control object of an automatic system with a PID controller, in which the system will remain stable. Thus, the problem arises of analyzing an automatic control system given not only by a single model with clearly defined parameters, but by a family of models belonging to a given set — the task of robust regulation. The search for ranges in which the parameters of the regulated object can change is based on the solution of the nonlinear programming problem in this paper. The conclusion of the objective function and constraint system using the theorem of V. L. Kharitonova on the robust stability of linear systems. The main idea is that each parameter of the regulatory object can be changed by some value  $h_{i1}$  in the direction of decrease and by  $h_{i2}$  — in the direction of increase. Replacing the notation used in the theorem of V. L. Kharitonov, the lower and upper boundaries of the change of parameters by the sum and difference of the nominal values of the parameters and the corresponding  $h_{i1}$ ,  $h_{i2}$ , we get a system of restrictions. Moreover, for the stability of Kharitonov polynomials, it is most convenient to use the Lienar-Shipar criterion. The larger the values of  $h_{i1}$ ,  $h_{i2}$ , the wider the ranges of variation of the parameters, and the smaller the inverse of the sum of these values. Based on this statement, the objective function is formed. It should be noted that the condition for the considered automatic system on which the proposed approach is based is sufficient, but not necessary, since the coefficients of the polynomial are interdependent. An example with the help of which the proposed approach is demonstrated is considered. This approach can also be applied to other linear systems for which the conditions of V. L. Kharitonova.

**Keywords:** systems with a PID controller, synthesis of low-sensitivity systems, sensitivity functions, parametric optimization, Kharitonov theorem, stability of systems, Lienard-Shipar criterion, automatic control system

For citation:

**Kutsyi A. P., Kutsyi N. N., Malanova T. V.** Determination of the Area of Robust Stability of the System on the Basis of V. L. Kharitonov's Theorem, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 208—212.

DOI: 10.17587/mau.21.208-212

### References

1. **Dorf R., Bishop R.** Modern control systems, Moscow, Laboratory of Basic Knowledge Publ., 2012, 832 p. (in Russian).
2. **Kim D. P.** The theory of automatic control. Vol. 1. Linear systems, Moscow, FIZMATLIT Publ., 2003, 288 p. (in Russian).
3. **Oshchepkov A. Yu.** Automatic control systems: theory, application, modeling in MATLAB, St. Petersburg, Lan' Publ., 2013, 208 p. (in Russian).
4. **Lukyanov A. V., Krakovsky Yu. M., Arshinsky L. V., Kutsyi N. N.** The developmnt of software for controlling a safety system of the machines using vibration analysis, *Far East Journal of Mathematic 1 Sciences (EJMS)*, 2018, vol. 103, no. 2, pp. 441—450.
5. **Kucyi N. N., Lukyanov A. V., Kargapol'cev S. K., Tikhii I. I.** Training of neural network based PWM controllers, *Advances and Applications in Discrete Mathematics 2018*, 2018, vol. 19, no. 4, pp. 359—371.
6. **Galyaev A. A., Lysenko P. V.** Energy-Optimal Control of Harmonic Oscillator, *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 1, pp. 16—29.
7. **Kogan M. M.** Design of optimal and robust control with  $H_{\infty}/\gamma$  0 performance criterion, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 8, pp. 1317—1333.

8. **Zhirabok A. N., Suvorov A. Yu.** A method for constructing robust diagnostic observers, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 2, pp. 208—218.

9. **Efimov S. V., Zamyatin S. V., Sukhodoev M. S., Gaivoronsky S. A.** Determination of the desired location region of the dominant poles of a closed system taking into account its zeros, *The News of Tomsk Polytechnic University*, 2008, vol. 312, no. 5, pp. 57—61 (in Russian).

10. **Andronov A. A., Witt A. A., Khaikin S. E.** Theory of oscillations, Moscow, Fiz.-mat. literatura Publ., 1959, 916 p. (in Russian).

11. **Rosenwasser E. N., Yusupov R. M.** ed. Methods of the theory of sensitivity in automatic control, Leningrad, Energiya Publ., 1971, 345 p. (in Russian).

12. **Egupov N. D.** ed. Methods of classical and modern theory of automatic control. A textbook in 3 vols. Vol. 3: Methods of the modern theory of automatic control, Moscow, Bauman MGTU, 2000, 748 p. (in Russian).

13. **Egupov N. D.** ed. Methods of robust, neuro-fuzzy and adaptive control, Moscow, Bauman MGTU, 2011, 744 p. (in Russian).

14. **Kutsyi N. N., Livshits A. V.** Searchless algorithm for parametrics optimization of a PI-controller with semi-permant integration, *Advanee des in Differential Equation and Control Processes*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 69—82.

15. **Morozov M. V.** On Small Perturbations of a Periodic Homogeneous Differential Inclusion with an Asymptotically Stable Set, *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 5, pp 834—839.

16. **Aleksandrov A. G.** Design of Controllers by Indices of Precision and Speed. III. Control-Stable Multidimensional Plants, *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 2, pp. 241—257.

Т. А. Алиев<sup>1,2</sup>, д-р техн. наук, академик, telmancyber@gmail.com,

Н. Ф. Мусаева<sup>2</sup>, д-р техн. наук, musanaila@gmail.com,

Б. И. Газызаде<sup>1</sup>, диссертант, behruz.qazizade@gmail.com

<sup>1</sup>Институт систем управления НАН Азербайджана, г. Баку

<sup>2</sup>Азербайджанский архитектурно-строительный университет, г. Баку

## Технологии мониторинга динамики развития повреждений на буровых установках с использованием моментов высоких порядков помехи<sup>1</sup>

Статья посвящена разработке алгоритмов вычисления моментов высоких порядков помехи зашумленных сигналов и их применению для анализа технического состояния промышленных объектов. Показано, что для мониторинга и контроля начала аварийной ситуации объектов нефтедобычи используются случайные вибрационные сигналы, которые, помимо помехи от внешних факторов в момент зарождения неисправности, также содержат дополнительную помеху. Характеристики этой помехи несут в себе определенную информацию о техническом состоянии бурильного станка. Ранее были разработаны алгоритмы вычисления дисперсии, среднего квадратического отклонения, функции плотности распределения помехи, которую невозможно отделить от зашумленного сигнала. В данной работе показано, что моменты высоких порядков помехи можно использовать как диагностический индикатор для определения наличия и степени развития повреждений буровых установок во времени в скрытом периоде зарождения.

Проведен анализ возможных вариантов вычисления моментов высоких порядков помехи. Разработаны рекуррентные алгоритмы, выражающие моменты высших порядков нормально распределенной помехи через ее дисперсию. Показана возможность вычисления моментов высоких порядков помехи также через функции плотности распределения.

Составлена матрица, состоящая из оценок моментов высоких порядков помехи (noise-моментов), вычисленных в различные моменты времени. Показано, что на первом этапе по значениям элементов матрицы удастся определить наличие и степень зародившегося повреждения. На втором этапе находится интенсивность развития повреждения в результате сравнения значений характеристик помехи в различные моменты времени. Вычисления проводятся для всех сигналов, которые поступают от датчиков. Проводится обучение, и по значениям моментов высших порядков ставятся в соответствие определенная степень и интенсивность развития повреждения.

Показана возможность использования предложенных алгоритмов и технологий в системе контроля помех (noise-контроля) начала развития и динамики аварий на буровых установках. Отмечено, что в процессе бурения, если даже оценки моментов высоких порядков суммарных зашумленных вибросигналов меняются в большом диапазоне, их noise-моменты высоких порядков не превышают заданной величины при отсутствии неисправности. При возникновении неисправности оценки моментов помехи становятся больше заданного порогового уровня и по мере развития дефекта их значения также изменяются. Если неблагоприятные процессы стабилизируются, измерение во времени этих оценок прекращается, причем в зависимости от степени и интенсивности стабилизации технического состояния буровой установки поочередно прекращается измерение оценок моментов, начиная от самого высокого до самого низкого или наоборот. Эта специфика оценок noise-моментов высоких порядков вибрационных сигналов позволяет определить начало и контролировать динамику развития скрытого периода аварийного состояния процесса бурения.

**Ключевые слова:** зашумленный сигнал, помеха, характеристики помехи, моменты высокого порядка помехи, буровая установка, система контроля

### Введение

Известно, что аварии, которые происходят при бурении нефтяных скважин, приводят не только к огромному материальному, но и к экологическому ущербу. Поэтому возникает необходимость в разработке эффективных тех-

нологий и систем повышения степени безопасности процесса бурения [1].

В настоящее время применяется вращательное бурение, при котором породоразрушающий инструмент получает вращение через колонну бурильных труб от специального механизма (шпинделя вращателя или ротора) или от забойного двигателя.

Для эффективного протекания процесса бурения создаются системы мониторинга, контроля, диагностики и управления. Все эти системы в реальном масштабе времени осуществляют сбор и обработку информации, получаемой

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-го Фонда Государственной Нефтяной Компании Азербайджанской Республики "SOCAR" в рамках научного проекта: "Разработка системы, обеспечивающей адекватность идентификации и раннюю диагностику нефтяных установок на основе позиционно-бинарной технологии".

с соответствующих датчиков, осуществляют непрерывный контроль и управление полным технологическим циклом строительства скважины, выполняют прогнозирование для своевременно-го предотвращения аварийных ситуаций [1, 2].

Основными параметрами, которые необходимо контролировать при бурении глубоких скважин, являются: вес на крюке, давление промывочной жидкости на входе в скважину, плотность промывочной жидкости на входе в скважину, крутящий момент ротора, расход промывочной жидкости на выходе из скважины, расход промывочной жидкости на входе в скважину, скорость спускоподъемных операций, механическая скорость бурения, температура на выходе из скважины и т.д. [1, 2].

Несмотря на использование вышеуказанных систем, число аварий в настоящее время не уменьшается. Это связано с тем, что механизм возникновения аварий при бурении скважин имеет такие специфические особенности, как скоротечность, труднодоступность для инструментального контроля, размытость и неоднозначность наблюдаемых симптомов, региональная зависимость [1–5]. Кроме того, на технологический процесс бурения влияют случайные внешние воздействия, которые искажают результаты измерений параметров. Искажения значений полезных сигналов помехой происходят из-за разнообразия геологических условий бурения, вследствие появления нагрузки на крюке, изменения крутящего момента, затрат мощности, механической скорости бурения и др. [1].

Отсюда следует, что основные технологические параметры бурения представляют собой случайные функции. В то же время применяемые на сегодняшний день на практике методы, алгоритмы и технологии анализа стохастических процессов не всегда обеспечивают своевременное предупреждение о возможности аварий при бурении скважин и нуждаются в совершенствовании. Поэтому считается, что эффективность и безопасность бурения при применении существующих систем в значительной степени зависят от квалификации мастера-бурильщика, а также состояния его здоровья, усталости, утомляемости и даже настроения. Например, анализ статистики времени аварии показывает, что многие катастрофы на буровых установках происходили в ночное время, когда мастер-бурильщик находился в бессонном и утомленном состоянии. Поэтому необходимо создание новых алгоритмов и технологий, которые позволили бы выявить начало скрытого периода возникновения дефекта, предшествующего возник-

новению аварии, определить степень возникшей неисправности и динамику ее развития. Своевременная сигнализация и оповещение мастера о возникшей опасности позволят обеспечить высокую надежность и безопасность процесса бурения независимо от квалификации и состояния здоровья бурильщика [1].

### Постановка задачи

Для контроля состояния бурильной установки можно предложить три варианта контроля информативных параметров [1–5].

В *первом варианте* для широко распространенного вращательного бурения в качестве контролируемых параметров процесса бурения выбираются частота вращения долота, крутящий момент на шпинделе вращателя бурильного станка, крутящий момент на роторе бурильного станка, механическая скорость бурения и осевая нагрузка на долото. В традиционных системах контроля информация об этих параметрах, получаемая от соответствующих датчиков, как правило, используется для предотвращения аварийных ситуаций.

Проведенные экспериментальные исследования показали, что те процессы, которые являются причинами отклонений от нормального режима бурения, также косвенно отражаются на вибрационном состоянии таких основных частей установки бурения, как стол ротора, верх буровой вышки, середина каркаса станка и т.д. Высококвалифицированные опытные мастера-бурильщики практически безошибочно на ощупь, по вибрационному состоянию этих частей буровой установки, определяют начало возможных аварий. Поэтому для контроля начала аварийной ситуации во *втором варианте* используются вибрационные сигналы, получаемые от датчиков, установленных на указанных узлах бурильного станка.

В *третьем варианте* решения этой задачи предлагается совмещать первые два варианта, благодаря чему достигается большая надежность и достоверность результатов определения возможной аварийной ситуации [1–5]. В данной работе предлагается алгоритм решения задачи выявления раннего скрытого периода возникновения аварийной ситуации, основанный на контроле и анализе вибрационных сигналов бурильной установки, отмеченных во втором варианте.

В работах [1–10] отмечено, что в процессе эксплуатации оборудование подвергается различным видам повреждений и разрушений на-

пример, механическим, коррозионным, тепловым и т.д. При этом повреждениями считаются трещины, поломки, пробоины, деформации и т.д. В начальный период времени эти повреждения имеют микроскопические размеры. Но со временем эти трещины распространяются вглубь, охватывают значительную часть оборудования. В этом случае следует оценить интенсивность появления и развития дефектов. Иначе говоря, необходимо определить динамику развития повреждений, сделать соответствующие выводы о том, как развивается повреждение (например, повреждение возрастает неравномерно, повреждение развивается с небольшой равномерной интенсивностью, повреждение характеризуется интенсивным развитием и т.д.), и вовремя принять соответствующие меры. Это позволит избежать перехода бурильного оборудования к предельному состоянию, при котором дальнейшее его применение недопустимо или нецелесообразно [1–10].

Поэтому возникает задача обнаружения раннего скрытого периода появления повреждений бурильного оборудования и определения динамики их развития. В работах [1, 2] было показано, что в системах мониторинга, контроля, диагностики, прогноза, управления, идентификации и т.д. сигналы, которые поступают от соответствующих датчиков, помимо помехи  $\varepsilon_1(t)$  от внешних факторов в момент зарождения неисправности содержат также дополнительную помеху  $\varepsilon_2(t)$ , которая добавляется к  $\varepsilon_1(t)$ :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t).$$

Помеха  $\varepsilon(t)$  накладывается на полезный сигнал  $x(t)$ , и в результате от датчика, который расположен в информативных узлах оборудования, поступает зашумленный сигнал  $g(t) = x(t) + \varepsilon(t)$ . В работах [1–13] было отмечено, что характеристики помехи несут в себе определенную информацию о техническом состоянии бурильного станка. Поэтому в качестве информативных признаков для определения начала скрытого периода возникновения аварийной ситуации бурильной установки можно использовать характеристики помехи  $\varepsilon(t)$ .

Поэтому ранее в работах [1–13] были разработаны алгоритмы вычисления дисперсии, среднего квадратического отклонения, функции плотности распределения помехи  $\varepsilon(t)$ , которую невозможно отделить от зашумленного сигнала  $g(t)$  [14, 15].

В данной работе показано, что моменты высоких порядков помехи можно использовать для прослеживания динамики развития повреждения буровых установок на ранней ста-

дии. Поэтому ниже предлагаются алгоритмы вычисления моментов высокого порядка помехи как диагностического индикатора определения наличия и степени развития повреждений буровых установок во времени в скрытом периоде зарождения.

## 1. Анализ возможных вариантов вычисления моментов высоких порядков помехи

На временном интервале  $0 \leq t \leq T$  наблюдается непрерывный случайный стационарный эргодический зашумленный нефильтрованный сигнал  $g(t)$ , состоящий из суммы случайной полезной составляющей  $x(t)$  и случайной помехи  $\varepsilon(t)$ , которые также являются стационарными эргодическими сигналами, и их невозможно выделить из  $g(t)$ . Случайный сигнал  $g(t)$  может подчиняться различным законам распределения, и для него можно вычислить выборочные оценки таких характеристик, как математическое ожидание  $m_g$ , дисперсия  $D_g$ , среднее квадратическое отклонение  $\sigma_g$ , корреляционная функция  $R_{gg}(\tau)$ , по формулам [16–18]:

$$m_g = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt;$$

$$D_g = \frac{1}{T} \int_0^T (g(t) - m_g)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{g}^2(t) dt;$$

$$\sigma_g = \sqrt{D_g};$$

$$R_{gg}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{G}(t) \dot{G}(t + \tau) dt,$$

где  $\dot{g}(t) = g(t) - m_g$ ,  $\tau = 0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$  — временной сдвиг.

При этом полезная составляющая  $x(t)$  оценивает текущее состояние исследуемого процесса. Априори известно, что в системе мониторинга, контроля, диагностики, прогноза, управления, идентификации и т.д. суммарная помеха  $\varepsilon(t)$  содержит помеху  $\varepsilon_1(t)$ , которая возникла в результате внешнего воздействия (внешняя составляющая), и помеху  $\varepsilon_2(t)$ , которая появилась в результате возникновения повреждений, дефектов, неисправностей, неполадок и т.д. (дефектная составляющая) [1–15, 20, 21].

Помеха  $\varepsilon_1(t)$  измеряется соотношением сигнал/шум, и ее дисперсия, как правило, колеблется в пределах  $0 < D_{\varepsilon_1} \ll 1$ . При этом дисперсия суммарной помехи  $\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$  для буровых установок в большинстве случаев  $D_{\varepsilon} > 1$ . При появлении неисправности для нефильтрованного сигнала дисперсия суммарной помехи  $\varepsilon(t)$  колеблется в пределах  $1 < D_{\varepsilon} \leq 10$  [1–15].

В случае если сигнал фильтрован, значение суммарной дисперсии помехи может находиться в пределах  $0 < D_\varepsilon \ll 1$ , но подобные значения не являются информативными, и тогда дисперсию помехи нельзя использовать как носитель информации [1–15].

Кроме того, известно, что время корреляции шума  $\varepsilon(t)$  много меньше времени корреляции полезного сигнала  $x(t)$ .

Априори также известно, что помеха имеет нормальное распределение  $N(\varepsilon; m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  и нулевое среднее  $m_\varepsilon = 0$ . Так как стационарная случайная помеха  $\varepsilon(t)$  является эргодической, то ее математическое ожидание  $m_\varepsilon$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma_\varepsilon$  имеют одно и то же значение для любой из случайных функций, входящих в совокупность. Поэтому функцию плотности нормального распределения  $N(\varepsilon; m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) = N(\varepsilon)$  помехи представим в виде

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon - m_\varepsilon)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}.$$

Учитывая, что математическое ожидание помехи равно нулю, ее начальные и центральные моменты совпадают:  $v_{\varepsilon q} = \mu_{\varepsilon q}$ .

Следует отметить, что начальный момент первого порядка — математическое ожидание  $m_\varepsilon$ , центральный момент второго порядка — дисперсия  $D_\varepsilon$  помехи  $\varepsilon(t)$ , среднее квадратическое отклонение помехи:  $\sigma_\varepsilon = \sqrt{D_\varepsilon}$ .

Известно, что нечетные центральные моменты нормального распределения равны нулю [14, 15]. В то же время четные моменты высоких порядков помехи являются достаточно чувствительными диагностическими индикаторами определения динамики развития повреждения. Это связано с тем, что при изменении дисперсии (центрального момента второго порядка) помехи на незначительную величину по сравнению с исходным значением, которое больше единицы, моменты четвертого, шестого, восьмого и т.д. порядков изменяются на величины, которые в зависимости от порядка момента изменяются на более существенную величину. Тогда по порядку момента и его значению можно определить степень и динамику развития повреждения. Знание значений этих индикаторов дает возможность предотвратить переход буровых установок в неработоспособное или предельное состояние.

В теории вероятностей известно простое рекуррентное соотношение, выражающее моменты высших порядков через дисперсию  $D_\varepsilon = \mu_{\varepsilon 2}$  нормального распределения [18, 19]:

$$\mu_{\varepsilon 0} = 1; \mu_{\varepsilon q} = (q-1)\sigma_\varepsilon^2 \mu_{\varepsilon(q-2)}, q = 2, 4, 6, \dots, \quad (1)$$

т. е.

$$\mu_{\varepsilon 4} = 3\sigma_\varepsilon^4, \mu_{\varepsilon 6} = 15\sigma_\varepsilon^6, \mu_{\varepsilon 8} = 105\sigma_\varepsilon^8, \dots \quad (2)$$

Таким образом, для вычисления четных моментов высших порядков нормально распределенной помехи следует сначала вычислить момент второго порядка — дисперсию помехи.

Однако в общем случае, когда помеха имеет произвольное распределение, для вычисления моментов высоких порядков необходимо знать функцию плотности распределения, так как в общем виде используется выражение

$$v_{\varepsilon q} = \mu_{\varepsilon q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3)$$

где  $f(\varepsilon)$  — функция плотности распределения.

Например, когда дефект приобретает явно выраженную форму, помеха не может быть описана нормальным распределением. В таких случаях помеха подчиняется логнормальному распределению.

Для нормального закона распределения выражение (3) представляется в виде

$$v_{\varepsilon q} = \mu_{\varepsilon q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q N(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon - m_\varepsilon)^2}{2\sigma_\varepsilon^2}} d\varepsilon. \quad (4)$$

Так как в данной работе рассматривается только ранний период возникновения неисправности, то ниже предлагаются алгоритмы вычисления моментов высоких порядков нормально распределенной помехи  $\varepsilon(t)$ , которую невозможно отделить от зашумленного сигнала  $j(t)$ , а также показана возможность использования этих моментов для определения степени образовавшегося повреждения буровых установок и интенсивности его развития на начальной стадии.

## 2. Цифровые алгоритмы вычисления моментов высоких порядков помехи

Из выражений (1)–(4) очевидно, что для вычисления моментов высоких порядков необходимо сначала вычислить дисперсию  $D_\varepsilon$  помехи.

Пусть от датчика, размещенного в зоне действия влияющих на оборудование факторов, поступает зашумленный цифровой сигнал  $g(\Delta t)$ , состоящий из полезного сигнала  $x(\Delta t)$  и аддитивной помехи  $\varepsilon(\Delta t)$ . Сигнал  $g(\Delta t)$  дискретизирован шагом  $\Delta t$ , выбранным исходя из конечного времени корреляции  $\tau_{\text{end}}$  помехи. Тогда интервал времени  $T$  состоит из  $N$  малых интервалов  $\Delta t$ , т. е.  $T = N\Delta t$ , и сигнал  $x(t)$  мало



изменяется на протяжении интервала  $t + \Delta t$ . Придадим  $t$  и  $\tau$  дискретные значения, кратные  $\Delta t$ , т. е.  $t = v\Delta t$ ,  $v = 1, 2, \dots$ ;  $\tau = \mu\Delta t$ ,  $\mu = 0, 1, \dots$ , и введем обозначения  $R_{gg}(\mu\Delta t) = R_{gg}(\mu)$ ,  $R_{xx}(\mu\Delta t) = R_{xx}(\mu)$ ,  $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu\Delta t) = R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)$ . Вычислим оценки корреляционных функций  $R_{gg}(\mu)$  зашумленного сигнала  $G(t)$  [16–19]:

$$R_{gg}(\mu) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{G}(i\Delta t) \overset{\circ}{G}((i + \mu)\Delta t), \quad (5)$$

где  $\overset{\circ}{g}(t) = g(t) - m_g$ ;  $m_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G(i\Delta t)$  — математическое ожидание  $G(t)$ .

Учитывая, что полезный сигнал  $x(t)$  и помеха  $\varepsilon(t)$  некоррелированы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(i\Delta t) \overset{\circ}{\varepsilon}((i + \mu)\Delta t) &= 0; \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{\varepsilon}(i\Delta t) x((i + \mu)\Delta t) &= 0, \end{aligned}$$

можно записать

$$R_{gg}(\mu) = R_{xx}(\mu) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu).$$

Таким образом, корреляционная функция  $R_{gg}(\mu)$  зашумленного сигнала  $g(t)$  состоит из суммы корреляционных функций  $R_{xx}(\mu)$  и  $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)$  соответственно полезного сигнала  $x(t)$  и помехи  $\varepsilon(t)$ .

При этом на практике для инфранизкочастотных медленно протекающих технологических процессов, когда  $\tau = \Delta t$  значительно (многократно) мало по сравнению с временем наблюдения  $T$ , помеха  $\varepsilon(t)$  формируется из высокочастотных спектров вследствие возникновения таких повреждений, как трещины, поломки, пробоины, деформации и т.д., в результате износа, коррозии, нагарообразования, накипи и т.д. и имеет более высокий спектр, чем сама полезная составляющая  $x(t)$ . Значение же полезной составляющей за промежуток времени  $\Delta t$  не успевает измениться, и  $x(t + \Delta t)$  совпадает со значением  $x(t)$ , т. е.

$$x(t + \Delta t) = x(t). \quad (6)$$

Это равенство выполняется для случаев, когда  $T$  составляет, например, 10...20 ч, а  $\Delta t$  — секунды или минуты (в зависимости от специфики исследуемого процесса). В этом случае шаг дискретизации  $\Delta t$  выбирается исходя из конечного времени корреляции  $\tau_{\text{end}}$  помехи  $\varepsilon(t)$  с полезным сигналом.

Очевидно, что такое строгое равенство справедливо не для всех реальных процессов, а для таких, например, как нефтепереработка, нефтехимия и др. Для остальных технологических

процессов допустимо приближенное равенство. Тогда для указанных производственных объектов при выполнении условия (6) отношение  $\frac{R_{xx}(\Delta t)}{R_{xx}(0)}$  равно единице, т. е.  $R_{xx}(\Delta t) = R_{xx}(0)$ .

В то же время в силу того, что для случайного процесса  $g(t)$  шаг дискретизации  $\Delta t$  выбран исходя из конечного времени корреляции  $\tau_{\text{end}}$  помехи, то корреляционную функцию  $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)$  можно представить в виде [1–15]

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu) = \begin{cases} R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu) & \text{при } \mu = 0; \\ 0 & \text{при } \mu \geq \Delta t. \end{cases}$$

Поэтому, если по формуле (5) вычислить оценки корреляционной функции  $R_{gg}(\mu)$  зашумленного сигнала при  $\mu = 0$  и достаточно малом по сравнению со временем наблюдения  $T$  временном интервале  $\tau_{\text{end}} = \Delta t$  и найти их разницу, то получим

$$R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t) = R_{\varepsilon\varepsilon}(0).$$

Тогда оценка дисперсии  $D_{\varepsilon}^*$  помехи  $\varepsilon(t)$  зашумленного сигнала  $g(t)$  будет иметь вид

$$D_{\varepsilon} = R_{\varepsilon\varepsilon}(0) = R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t)$$

или

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon} = R_{\varepsilon\varepsilon}(0) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{g}(i\Delta t) \overset{\circ}{g}(i\Delta t) - \\ &- \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{g}(i\Delta t) \overset{\circ}{g}((i + 1)\Delta t). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, дисперсию  $D_{\varepsilon}$  помехи  $\varepsilon(t)$  можно вычислить, определив разность оценок автокорреляционной функции  $R_{gg}(\mu)$  зашумленного сигнала при  $\mu = 0$  и достаточно малом  $\mu = \Delta t$  временном сдвиге, равном времени корреляции  $\tau_{\text{end}}$  помехи.

Однако в работах [1–15] была выведена также формула вычисления дисперсии помехи для случая, когда шаг дискретизации  $\Delta t$  сигнала  $g(t)$  выбран исходя из частотной полосы спектра помехи  $\varepsilon(t)$ , а не полезной составляющей  $x(t)$ , т. е.  $\Delta t = 1/(2f_{\varepsilon})$ , где  $f_{\varepsilon}$  — частота среза помехи (Гц):

$$D_{\varepsilon} = R_{gg}(0) - 2R_{gg}(\Delta t) + R_{gg}(2\Delta t)$$

или

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{G}(i\Delta t) \overset{\circ}{G}(i\Delta t) - \\ &- 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{G}(i\Delta t) \overset{\circ}{G}((i + 1)\Delta t) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overset{\circ}{G}(i\Delta t) \overset{\circ}{G}((i + 2)\Delta t). \end{aligned} \quad (8)$$

Принимая во внимание рекуррентные соотношения (1), (2), получаем

$$\mu_{\varepsilon 4} = 3(D_{\varepsilon})^2, \mu_{\varepsilon 6} = 15(D_{\varepsilon})^3, \mu_{\varepsilon 8} = 105(D_{\varepsilon})^4, \dots \quad (9)$$

или

$$\mu_{\varepsilon q} = \begin{cases} (q-1)(R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t))\mu_{\varepsilon(q-2)} \\ \text{для идеального случая;} \\ (q-1)(R_{gg}(0) - 2R_{gg}(\Delta t) + R_{gg}(2\Delta t))\mu_{\varepsilon(q-2)} \\ \text{для реального объекта.} \end{cases}$$

Кроме того, с использованием выражений (7), (8) моменты высоких порядков нормально распределенной помехи можно вычислить по формуле

$$\begin{aligned} \nu_{\varepsilon q} = \mu_{\varepsilon q} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{\varepsilon}}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2D_{\varepsilon}}} d\varepsilon = \\ &= \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q \frac{1}{\sqrt{2\pi(R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t))}}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2(R_{gg}(0) - R_{gg}(\Delta t))}} d\varepsilon \\ \text{для идеального случая;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^q \frac{1}{\sqrt{2\pi(R_{gg}(0) - 2R_{gg}(\Delta t) + R_{gg}(2\Delta t))}}} \times \\ \times e^{-\frac{\varepsilon^2}{2(R_{gg}(0) - 2R_{gg}(\Delta t) + R_{gg}(2\Delta t))}} d\varepsilon \\ \text{для реального объекта.} \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

Таким образом, показана возможность вычисления моментов высокого порядка помехи.

Ниже будет показано, что моменты высоких порядков могут быть использованы в системах мониторинга как диагностический признак определения интенсивности развития повреждений буровых установок.

### 3. Использование моментов высоких порядков как диагностического признака определения динамики развития повреждения буровых установок

Для определения степени развития повреждений буровой установки предлагается технология использования моментов высоких порядков как диагностического признака. Для этого следует для каждого информативного сигнала, поступающего от соответствующего датчика, составить матрицу, состоящую из оценок средних квадратических отклонений  $\sigma_{\varepsilon}$ , а также моментов высоких порядков помехи  $\nu_{\varepsilon 2} = D_{\varepsilon}$ ,  $\nu_{\varepsilon 4}$ ,  $\nu_{\varepsilon 6}$ ,  $\nu_{\varepsilon 8}$ , ..., полученных в различные моменты времени  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$

После этого следует провести анализ и сравнение вычисленных оценок для каждого сигнала в следующей последовательности.

Первый этап — определение наличия и степени зародившегося повреждения.

1. Если значение среднего квадратического отклонения помехи  $\sigma_{\varepsilon}$  находится в интервале  $0 < \sigma_{\varepsilon} < 1$ , то это означает, что оборудование не имеет повреждений в той части, от которой поступает информативный сигнал.

2. Если в какой-то момент времени  $t_i$  значение среднеквадратического отклонения больше единицы:  $\sigma_{\varepsilon_{ii}} > 1$ , то это свидетельствует о зародившемся повреждении. Причем, если  $\sigma_{\varepsilon_{ii}}$  сильно отличается от единицы, то повреждение существенное. В этом случае следует найти и устранить повреждение незамедлительно.

Если среднеквадратическое отклонение  $\sigma_{\varepsilon_{ii}}$  отличается от единицы незначительно, то это тоже является информативным признаком начала скрытого периода зарождения повреждения. Только в этом случае повреждение несущественное.

Затем для определения степени развития повреждения следует вычислить моменты второго  $\nu_{\varepsilon 2_{ii}}$  (дисперсию помехи  $D_{\varepsilon_{ii}}$ ), четвертого  $\nu_{\varepsilon 4_{ii}}$ , шестого  $\nu_{\varepsilon 6_{ii}}$ , восьмого  $\nu_{\varepsilon 8_{ii}}$  и т.д. порядков.

Второй этап — определение динамики развития повреждения.

Чтобы определить динамику развития повреждения, следует вычислить те же самые характеристики в следующий момент времени  $t_{i+1}$ .

1. Если оценки среднего квадратического отклонения помехи в момент времени  $t_i$  и в момент времени  $t_{i+1}$  не совпадают:  $\sigma_{\varepsilon_{ii}} \neq \sigma_{\varepsilon_{t(i+1)}}$ , то повреждение находится в состоянии развития. При этом интенсивность развития повреждения после обучения определяется степенью различия  $\sigma_{\varepsilon_{ii}}$  и  $\sigma_{\varepsilon_{t(i+1)}}$ . Если  $\sigma_{\varepsilon_{t(i+1)}} \gg \sigma_{\varepsilon_{ii}}$ , то повреждение находится в состоянии очень интенсивного развития.

Если оценки среднего квадратического отклонения помехи в момент времени  $t_i$  и в момент времени  $t_{i+1}$  совпадают:  $\sigma_{\varepsilon_{ii}} = \sigma_{\varepsilon_{t(i+1)}}$ , то повреждение существует, но не находится в состоянии развития.

Если же вместо строгого равенства выполняется приближенное равенство  $\sigma_{\varepsilon_{ii}} \approx \sigma_{\varepsilon_{t(i+1)}}$ , то возможно, что повреждение находится в состоянии развития. Тогда для уяснения ситуации следует сравнить моменты второго порядка — дисперсии.

2. Если оценки дисперсии помехи в момент времени  $t_i$  и в момент времени  $t_{i+1}$  не совпадают:  $D_{\varepsilon_{ii}} \neq D_{\varepsilon_{t(i+1)}}$ , то повреждение находится

в состоянии развития. Интенсивность развития определяется после соответствующего обучения. Если  $D_{\varepsilon_{t(i+1)}} > D_{\varepsilon_{ti}}$  или  $D_{\varepsilon_{t(i+1)}} \gg D_{\varepsilon_{ti}}$ , то повреждение находится в состоянии интенсивного развития.

Если оценки дисперсии помехи в момент времени  $t_i$  и в момент времени  $t_{i+1}$  совпадают:  $D_{\varepsilon_{ti}} = D_{\varepsilon_{t(i+1)}}$ , то повреждение имеется, но не находится в состоянии развития.

Если же вместо строгого равенства выполняется приближенное равенство  $D_{\varepsilon_{ti}} \approx D_{\varepsilon_{t(i+1)}}$ , то, возможно, повреждение находится в состоянии развития. Тогда следует сравнить моменты четвертого порядка.

3. Если оценки моментов четвертого порядка помехи в момент времени  $t_i$  и в момент времени  $t_{i+1}$  не совпадают:  $v_{\varepsilon 4_{ti}} \neq v_{\varepsilon 4_{t(i+1)}}$ , то повреждение находится в состоянии развития, интенсивность которого определяется после соответствующего обучения.

Если оценки моментов четвертого порядка помехи в момент времени  $t_i$  и в момент времени  $t_{i+1}$  совпадают:  $v_{\varepsilon 4_{ti}} = v_{\varepsilon 4_{t(i+1)}}$ , то в техническом состоянии оборудования не произошло никаких изменений.

Если же вместо строгого равенства выполняется приближенное равенство  $v_{\varepsilon 4_{ti}} \approx v_{\varepsilon 4_{t(i+1)}}$ , то, возможно, имеются изменения. Тогда следует сравнить моменты шестого порядка.

4. Аналогично сравниваются моменты шестого, восьмого и т.д. порядков помехи.

5. В зависимости от выполнения вышеуказанных условий (моменты совпадают, не совпадают, приближенно равны) делаются соответствующие выводы: повреждение развивается "очень быстро", "достаточно быстро", "быстро", "недостаточно быстро", "медленно", "очень медленно".

Вычисления, описанные в первом и втором этапах, следует выполнить для всех сигналов, которые поступают от датчиков. Затем следует провести обучение и установить соответствие между значениями моментов высокого порядка и видом, степенью и интенсивностью развития этого повреждения. После этого система мониторинга, анализируя результаты первого и второго этапов оценки состояния оборудования, может выдавать сообщения типа: 1 — повреждение незначительное и возрастает неинтенсивно и неравномерно; 2 — повреждение осязаемое и развивается с небольшой равномерной интенсивностью; 3 — повреждение сильное и характеризуется интенсивным развитием.

#### 4. Система noise-контроля начала и динамики развития аварий на буровых установках

В настоящее время на буровых установках управление процессом бурения осуществляется бурильщиком с помощью системы контроля установки (СКУ). Буровому мастеру с помощью этой системы удается своевременно получить всевозможную информацию и оперативно управлять процессом бурения. Однако СКУ в начальном скрытом периоде возникновения аварийного состояния не обеспечивает бурильщика адекватной информацией, и этот момент устанавливается буровым мастером интуитивно. Таким образом, вероятность возникновения аварии в определенной степени зависит от его квалификации. Поэтому для исключения возможных ошибок необходимо обеспечить мастера-бурильщика инструментарием, позволяющим облегчить его интуитивную деятельность [1].

В работе для этой цели создан экспериментальный вариант подсистемы Noise-контроля начала и динамики развития неисправностей. Кроме того, для проведения полунатурных экспериментов также построен действующий макет установки бурения. Noise-система состоит из трех вибрационных датчиков  $DV_1$ ,  $DV_2$ ,  $DV_3$  типа Accutech AM20, приемной антенны типа BeanGateway controller и компьютера типа Getac A770. Датчики  $DV_1$ ,  $DV_2$ ,  $DV_3$  установлены (прикреплены) соответственно на столе ротора, наверху буровой вышки и середине каркаса станка. Они осуществляют измерение и передачу вибрационных сигналов  $gv_1(t)$ ,  $gv_2(t)$ ,  $gv_3(t)$  по радиоканалу на расстоянии до 650 м. Антенна BeanGateway controller принимает эти сигналы и осуществляет их ввод на компьютер.

В процессе бурения от возникновения крутильной, осевой и боковой вибраций формируется суммарный вибрационный процесс, который с помощью датчиков  $DV_1$ ,  $DV_2$ ,  $DV_3$  преобразуется в зашумленные вибрационные сигналы  $gv_1(t)$ ,  $gv_2(t)$ ,  $gv_3(t)$ , которые по радиоканалу передаются в компьютер, где в программных модулях  $M_1$ , ...,  $M_5$  на основе алгоритмов (7)–(10) вычисляются комбинации информативных признаков, состоящих из оценок моментов высоких порядков  $\sigma_\varepsilon$ ,  $v_{\varepsilon 2} = D_\varepsilon$ ,  $v_{\varepsilon 4}$ ,  $v_{\varepsilon 6}$ ,  $v_{\varepsilon 8}$ , которые отражают техническое состояние бурильной установки и динамику его изменения (рис. 1). Затем система мониторинга, анализируя результаты вычислений оценок моментов высоких порядков, выдает сообщения о степени возникшего повреждения и динамике его развития.

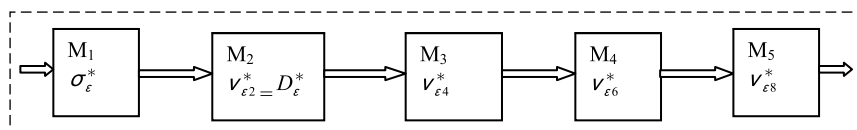


Рис. 1. Этапы вычисления моментов

Fig. 1. Stages of the calculation of the moments

Эксперименты показали, что в процессе бурения в периоды времени, когда не имеет место аварийная ситуация, если даже оценки моментов высоких порядков суммарных зашумленных вибросигналов  $gv_1(t)$ ,  $gv_2(t)$ ,  $gv_3(t)$  меняются в большом диапазоне, их noise-моменты высоких порядков не превышают заданное значение. Однако с момента, когда в процессе бурения возникают неисправности, эти оценки моментов помехи становятся больше заданного порогового уровня, и по мере развития дефекта их значения также увеличиваются. Если неблагоприятные процессы стабилизируются, изменение во времени этих оценок прекращается, причем в зависимости от степени и интенсивности стабилизации технического состояния буровой установки очередно прекращается изменение оценок моментов, начиная от самого высокого до самого низкого или наоборот. Эта специфика оценок noise-моментов высоких порядков вибрационных сигналов позволяет определить начало и контролировать динамику развития скрытого периода аварийного состояния процесса бурения. Представление данной информации буровому мастеру дает возможность принимать оптимальное решение путем выбора наиболее выгодного времени для принятия необходимых мер предотвращения аварий.

Как показали результаты многочисленных экспериментов, чем выше порядок момента, значение которого превышает экспериментально установленный уровень, тем меньшей опасности подвергается буровая установка. Если динамика изменения этой оценки момента мед-

ленная или умеренная, то мастер может, "не впадая в панику", найти и устранить возникший дефект. Если же порядок момента низкий, а его значение значительно превышает пороговую величину и интенсивно увеличивается, то это

свидетельствует о высокой степени динамики развития аварийного состояния. Тогда буровой мастер не имеет права ждать появления информации об аварийном состоянии процесса на табло СКУ и должен незамедлительно принимать экстренные меры для предотвращения аварийной ситуации или же вызвать аварийную службу.

Когда же увеличение оценок noise-моментов высоких порядков прекращается, он может продолжать процесс бурения в обычном режиме.

На рис. 2 и в табл. 1—4 для одного параметра представлены результаты многочисленных экспериментов, отражающих следующие случаи:

1) повреждение незначительное и возрастает неинтенсивно и неравномерно; в этом случае за период времени  $\Delta T = t_{i+1} - t_i$  значительное изменение ощущается только для оценки момента восьмого порядка, который увеличивается с 113,7 до 123,024; буровой мастер может спокойно заблаговременно планировать комплекс мер для ее устранения (табл. 1);

2) повреждение неощутимое и развивается с небольшой интенсивностью; в этом случае за период времени  $\Delta T$  значительное изменение ощущается для оценки момента начиная с шестого порядка, который увеличивается с 15,923 до 34,696; буровой мастер может приступить к устранению причин возникновения аварий, не дожидаясь соответствующей информации от СКУ (табл. 2);

3) повреждение ощутимое и развивается ускоренно; в этом случае за период времени  $\Delta T$  значительное изменение ощущается уже для оценки момента начиная с четвертого порядка,

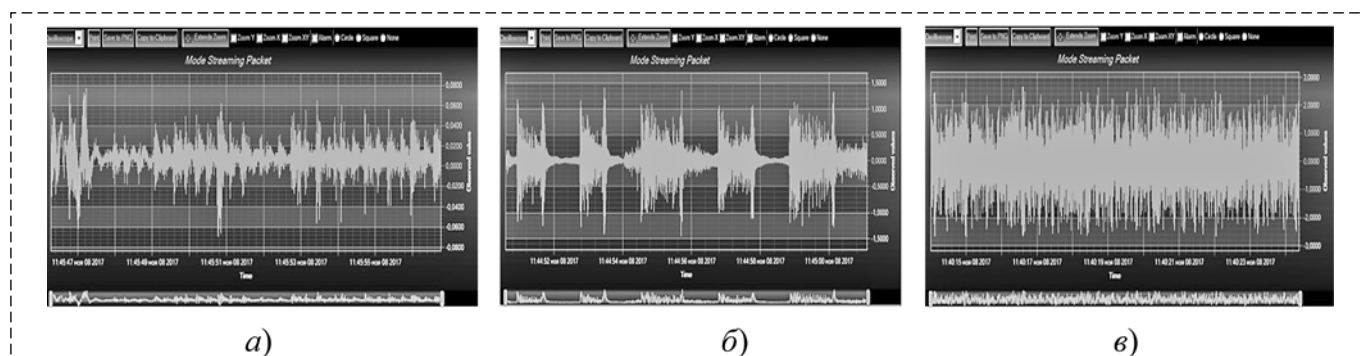


Рис. 2. Этапы развития неисправности

Fig. 2. Stages of malfunction development

который увеличивается с 3,122 до 15,188; буровой мастер должен принимать меры незамедлительно, так как ожидание и подтверждение достоверности этой информации СКУ могут оказаться запоздалыми, что может быть причиной аварии (табл. 3);

4) повреждение сильное и характеризуется интенсивным развитием; в этом случае за период времени  $\Delta T$  момент второго порядка увеличился с 1,02 до 7,29; буровой мастер может не справиться с устранением возникшей неисправности самостоятельно и должен вызвать аварийную службу на помощь (табл. 4).

Таблица 1  
Table 1

Результаты экспериментов для случая, когда повреждение незначительное и возрастает неинтенсивно и неравномерно

*Results of the experiment for the case when damage is insignificant and increases slowly and unevenly*

$\Delta T$ , мин	$\sigma_{\varepsilon}$	$v_{\varepsilon 2} = D_{\varepsilon}$	$v_{\varepsilon 4}$	$v_{\varepsilon 6}$	$v_{\varepsilon 8}$
1	1,01	1,02	3,122	15,923	113,7
5	1,02	1,04	3,247	16,892	123,024

Таблица 2  
Table 2

Результаты экспериментов для случая, когда повреждение неощутимое и развивается с небольшой интенсивностью

*Results of the experiment for the case when damage is imperceptible and develops with low intensity*

$\Delta T$ , мин	$\sigma_{\varepsilon}$	$v_{\varepsilon 2} = D_{\varepsilon}$	$v_{\varepsilon 4}$	$v_{\varepsilon 6}$	$v_{\varepsilon 8}$
1	1,01	1,02	3,122	15,923	113,7
5	1,15	1,323	5,247	34,696	321,197

Таблица 3  
Table 3

Результаты экспериментов для случая, когда повреждение ошутимое и развивается ускоренно

*Results of the experiment for the case when damage is perceptible and develops rapidly*

$\Delta T$ , мин	$\sigma_{\varepsilon}$	$v_{\varepsilon 2} = D_{\varepsilon}$	$v_{\varepsilon 4}$	$v_{\varepsilon 6}$	$v_{\varepsilon 8}$
1	1,01	1,02	3,122	15,923	113,7
5	1,5	2,25	15,188	170,859	2691,035

Таблица 4  
Table 4

Результаты экспериментов для случая, когда повреждение сильное и характеризуется интенсивным развитием

*Results of the experiment for the case when damage is severe and characterized by intensive development*

$\Delta T$ , мин	$\sigma_{\varepsilon}$	$v_{\varepsilon 2} = D_{\varepsilon}$	$v_{\varepsilon 4}$	$v_{\varepsilon 6}$	$v_{\varepsilon 8}$
1	1,01	1,02	3,122	15,923	113,7
5	2,7	7,29	159,432	5811,307	296551,013

Отметим, что в начале аварийной ситуации на экран монитора noise-системы передается информация об оценках моментов высоких порядков помех всех параметров. Тогда по комбинациям оценок этих характеристик для сигналов, полученных от всех трех датчиков DV1, DV2, DV3, система контроля выдает соответствующее сообщение о техническом состоянии буровой установки.

В системе предусмотрено, что буровой мастер после появления первой строки, т.е. после получения предупредительной информации, сам определяет промежуток времени  $\Delta T$ , который он считает достаточным для контроля динамики развития аварийного процесса. При этом он имеет возможность последовательно построчно получить информацию с шагом  $\Delta T = 1$ ,  $\Delta T = 5$  мин и т.д. После установки целесообразного интервала времени  $\Delta T$  система представляет ему очередную строку во всех четырех таблицах с указанием динамики увеличения оценок по сравнению с предыдущей строкой. Таким образом, мастер с начала аварийного процесса получает информацию как о начале скрытого периода аварийного процесса, так и о динамике ее развития.

Заключение

Проведенные исследования показали, что моменты высоких порядков помехи позволяют не только определить наличие и степень зародившегося повреждения на ранней стадии, но и проследить интенсивность развития повреждения в скрытом периоде. Это достигается за счет вычисления значений оценок моментов высоких порядков помех, полученных в различные моменты времени  $t_i$  и  $t_i + 1$ . Предложенные теоретические положения были применены для определения скрытого раннего периода зарождения неисправностей буровой установки. В работе для этой цели создан экспериментальный вариант подсистемы Noise-контроля начала и динамики развития неисправностей, а также для проведения полунатурных экспериментов построен действующий макет установки бурения. Предлагаемая подсистема Noise-контроля начала скрытого периода аварийного состояния может значительно облегчить работу бурового мастера при возникновении сомнительных ситуаций, когда информация, получаемая от традиционных систем контроля, недостаточна для принятия адекватных мер заблаговременного предотвращения аварии [1–15, 22].

1. **Telman Aliev.** Noise Control of the Beginning and Development Dynamics of Accidents. Springer, 2019, 201 p. DOI 10.1007/978-3-030-12512-7.
2. **Aliev T. A.** Digital Noise Monitoring of Defect Origin, Springer, New York, 2007, p. 223. DOI:10.1007/978-0-387-71754-8.
3. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T.** Density Function of Noise Distribution as an Indicator for Identifying the Degree of Fault Growth in Sucker Rod Pumping Unit (SRPU) // *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. Vol. 49. No. 4. P. 1—11. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i4.10.
4. **Aliev T. A., Nusratov O. G., Guluev G. A., Rzaev As. G., Pashaev F. G., Rezvan M. G.** Position-Binary Technology for Processing the Signals of a Load for Identification of the Technical State of Deep-Well Sucker-Rod Pumps // *Measurement Techniques*. Vol. 61. No. 9. 2018. P. 885—890. <https://doi.org/10.1007/s11018-018-1519-x>.
5. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф., Сулейманова М. Т., Газизаде Б. И.** Чувствительные алгоритмы выявления степени развития неисправности штанговой глубинной насосной установки // *Мехатроника, автоматизация, управление*. Т. 18. № 2. 2017. С. 94—102. DOI: 10.17587/mau.18.91-102.
6. **Aliev T. A., Musaeva N. F.** An algorithm for eliminating microerrors of noise in the solution of statistical dynamics problems // *Automation and remote control*. 1998. Vol. 59 (2). N. 5. P. 679—688.
7. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T., Gazizade B. I.** Analytic representation of the density function of normal distribution of noise. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47(8). N. 4. P. 24—40. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.30.
8. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T., Gazizade B. I.** Technology for calculating the parameters of the density function of normal distribution of the useful component in a noisy process // *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48. N. 4. P. 35—55. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v48.i4.50.
9. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Gazizade B. I.** Algorithms of building a model of the noisy process by correction of the law of its distribution // *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. Vol. 49. N. 9. P. 61—75. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v49.i9.50.
10. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T.** Algorithms for Indicating the Beginning of Accidents Based on the Estimate of the Density Distribution Function of the Noise of Technological Parameters // *Automatic Control and Computer Science*. 2018. Vol. 52, Iss. 3. P. 231—242. DOI: 10.3103/S0146411618030021.
11. **Musaeva N. F.** Robust method of estimation with "contaminated" coarse errors // *Automatic Control and Computer Sciences*. 2003. Vol. 37. N. 6. P. 50—63. <https://elibrary.ru/contents.asp?id=33405883>.
12. **Aliev T. A., Musaeva N. F.** Statistical identification with error balancing // *Journal of computer and systems sciences international*. 1996. Vol. 34, Iss. 5. P. 119—124.
13. **Aliev T. A., Musaeva N. F.** Algorithms for improving adequacy of statistical identification // *Journal of computer and systems sciences International*. 1997. Vol. 36, Iss. 3. P. 363—369. <https://www.tib.eu/en/search/id/olc%3A1518633188/Algorithms-for-Improving-Adequacy-of-Statistical>.
14. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Gazizade B. I.** Algorithm of application of high-order moments of the useful component as a diagnostic indicator of changes in the technical state // *Journal of Automation and Information Sciences*. Vol. 50. No. 11. 2018. P. 29—43. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i11.30>.
15. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Gazizade B. I.** Algorithms for calculating high-order moments of the noise of noisy signals // *Journal of Automation and Information Sciences*. Vol. 50. No. 6. 2018. P. 1—13. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i6.10>.
16. **Техническая кибернетика.** Книга 2 / Под ред. Солодовникова В. В. М.: Машиностроение, 1967. 682 с.
17. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. 5-е изд. М.: КНОРУС, 2013. 448 с.
18. **Пугачев В. С.** Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е изд., М.: Физматлит, 2002. 496 с.
19. **Иванова В. М., Калинина В. Н., Нешумова Л. А., Решетникова И. О.** Математическая статистика. М.: Высшая Школа, 1975. 398 с.
20. **Bila G. D.** Identification of a Nonparametric Signal Under Strongly Dependent Random Noise // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, Iss. 1. P. 160—172.
21. **Stoikova L. S.** Greatest Lower Bound of System Failure Probability on a Special Time Interval Under Incomplete Information About the Distribution Function of the Time to Failure of the System // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, Iss. 2. P. 217—224.
22. **Abbasov A. M., Mamedova M. H., Orujov G. H., Aliyev H. B.** Synthesis of the methods of subjective knowledge representations in problems of fuzzy pattern recognition // *Mechatronics*. 2001. N. 11. P. 439—449.

## Technologies for Monitoring the Dynamics of Damage Development in Drilling Rigs Using High-Order Moments of the Noise

**T. A. Aliev**<sup>1,2</sup>, [telmancyber@gmail.com](mailto:telmancyber@gmail.com), **N. F. Musaeva**<sup>2</sup>, [musanaila@gmail.com](mailto:musanaila@gmail.com),  
**B. I. Gazizade**<sup>1</sup>, [behruz.qazizade@gmail.com](mailto:behruz.qazizade@gmail.com),

<sup>1</sup>Institute of Control Systems (Azerbaijan National Academy of Sciences), AZ1141, Baku, Republic of Azerbaijan

<sup>2</sup>Azerbaijan University of Architecture and Construction, AZ1073, Baku, Republic of Azerbaijan

Corresponding author: **Musaeva Naila F.**, Doctor of Engineering,  
Azerbaijan University of Architecture and Construction, AZ1073, Baku, Republic of Azerbaijan,  
e-mail: [musanaila@gmail.com](mailto:musanaila@gmail.com)

Accepted on September 20, 2019

### Abstract

The paper deals with the development of algorithms for calculating the high-order moments of the noise of noisy signals and their use in the analysis of the technical condition of industrial facilities. It is shown that for monitoring and controlling the onset of an emergency at oil production facilities, random vibration signals are used, which, in addition to the noise caused by external factors at the time of the initiation of the malfunction, also contain additional noise. The characteristics of this noise contain certain information about the technical condition of the drilling rig. Earlier, algorithms were developed for calculating the variance, standard deviation, and density distribution function of the noise that cannot be separated from the noisy signal. In this paper, it is shown that high-order moments of the noise can be used as a diagnostic indicator

for determining the presence and degree of damage development in drilling rigs during the latent period of damage initiation. Possible options for calculating the high-order moments of the noise are analyzed. Recursive algorithms are developed for expressing high-order moments of a normally distributed noise through its variance. The possibility of calculating the high-order moments of the noise through the distribution density functions is also shown. A matrix consisting of estimates of the high-order moments of the noise calculated at different instants of time is built. It is shown that at the first stage, it is possible to determine the presence and degree of the damage based on the values of the matrix elements. At the second stage, the intensity of damage development is determined by comparing the values of the noise characteristics at different instants of time. Calculations are performed for all signals coming from the sensors. Training is carried out and, the correspondence is established between the values of the high-order moments and degrees and intensity of damage development. The possibility of using the proposed algorithms and technologies in the system of noise control of the beginning and development dynamics of accidents at drilling rigs is shown. It is noted that even if the estimates of the high-order moments of the sum noisy vibration signals change within a wide range during drilling, their high-order noise moments do not exceed a predetermined value in the absence of a malfunction. In the event of a malfunction, the estimates of the high-order moments of the noise exceed the predetermined threshold level and, as the defect develops, their values also change. If adverse processes are stabilized, the variation of these estimates stops as well. Moreover, depending on the degree and intensity of stabilization of the technical condition of the drilling rig, the change in the estimates of the moments, starting from the highest to the lowest or vice versa, stops one by one. This specific feature of estimates of high-order noise moments of vibration signals allows us to identify the beginning and to control the development dynamics of the latent period of an emergency state of the drilling process.

**Keywords:** noisy signal, noise, noise characteristics, high-order moments of noise, drilling rig, monitoring system

**Acknowledgements:** The study has been carried out with the financial support of the Science Fund of the State Oil Company of the Azerbaijan Republic within the framework of the research project "Development of a system for adequate identification and early diagnostics on the basis of the position-binary technology".

For citation:

Aliev T. A., Musaeva N. F., Gazizade B. I. Technologies for Monitoring the Dynamics of Damage Development in Drilling Rigs Using High-Order Moments of the Noise, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 213–223.

DOI: 10.17587/mau.21.213-223

## References

1. Aliev T. Noise Control of the Beginning and Development Dynamics of Accidents, Springer, 2019, 201 p.
2. Aliev T. A. Digital Noise Monitoring of Defect Origin, Springer, New York, 2007, 223 p.
3. Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T. Density Function of Noise Distribution as an Indicator for Identifying the Degree of Fault Growth in Sucker Rod Pumping Unit (SRPU), *Journal of Automation and Information Sciences*, 2017, vol. 49, no. 4, pp. 1–11.
4. Aliev T. A., Nusratov O. G., Guliev G. A., Rzaev As. G., Pashaev F. G., Rezvan M. G. Position-Binary Technology for Processing the Signals of a Load for Identification of the Technical State of Deep-Well Sucker-Rod Pumps, *Measurement Techniques*, 2018, vol. 61, no. 9, pp. 885–890.
5. Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T., Gazizade B. I. Sensitive algorithms for detecting the degree of development of a malfunction of a sucker rod pumping unit, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, Moscow, 2017, vol. 18, no. 2, pp. 94–102 (in Russian).
6. Aliev T. A., Musaeva N. F. An algorithm for eliminating microerrors of noise in the solution of statistical dynamics problems, *Automation and Remote Control*, 1998, vol. 59 (2), no. 5, pp. 679–688.
7. Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T., Gazizade B. I. Analytic representation of the density function of normal distribution of noise, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2015, vol. 47 (8), no. 4, pp. 24–40.
8. Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T., Gazizade B. I. Technology for calculating the parameters of the density function of normal distribution of the useful component in a noisy process, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2016, vol. 48, no. 4, pp. 35–55.
9. Aliev T. A., Musaeva N. F., Gazizade B. I. Algorithms of building a model of the noisy process by correction of the law of its distribution, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2017, vol. 49, no. 9, pp. 61–75.
10. Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T. Algorithms for Indicating the Beginning of Accidents Based on the Estimate of the Density Distribution Function of the Noise of Technological Parameters, *Automatic Control and Computer Science*, 2018, vol. 52, no. 3, pp. 231–242.
11. Musaeva N. F. Robust method of estimation with "contaminated" coarse errors, *Automatic Control and Computer Sciences*, 2003, vol. 37, no. 6, pp. 50–63.
12. Aliev T. A., Musaeva N. F. Statistical identification with error balancing, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1996, vol. 34 no. 5, pp. 119–124.
13. Aliev T. A., Musaeva N. F. Algorithms for improving adequacy of statistical identification, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 1997, vol. 36, no. 3, pp. 363–369.
14. Aliev T. A., Musaeva N. F., Gazizade B. I. Algorithm of application of high-order moments of the useful component as a diagnostic indicator of changes in the technical state, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2018, vol. 50, no. 11, pp. 29–43.
15. Aliev T. A., Musaeva N. F., Gazizade B. I. Algorithms for calculating high-order moments of the noise of noisy signals, *Journal of Automation and Information Sciences*, Vol. 50, no. 6, 2018, p. 1–13.
16. **Technical Cybernetics**. Book 2. Edited by Solodovnikov V. V., Moscow, Mashinostroenie, 1967, 682 p. (in Russian).
17. Ventsel Y. S., Ovcharov L. A. The Theory of Random Processes and Its Engineering Applications, 5th ed., Moscow, KNORUS, 2013, 448 p. (in Russian).
18. Pugachev V. S. Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2nd ed., Moscow, Fizmatlit, 2002, 496 p. (in Russian).
19. Ivanova V. M., Kalinina V. N., Neshumova L. A., Reshetnikova I. O. Mathematical Statistics, Moscow, Vysshaya Shkola, 1975, 398 p. (in Russian).
20. Bila G. D. Identification of a Nonparametric Signal Under Strongly Dependent Random Noise, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 160–172.
21. Stoikova L. S. Greatest Lower Bound of System Failure Probability on a Special Time Interval Under Incomplete Information About the Distribution Function of the Time to Failure of the System, *Cybernetics and Systems Analysis*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 217–224.
22. Abbasov A. M., Mamedova M. H., Orujov G. H., Aliyev H. B. Synthesis of the methods of subjective knowledge representations in problems of fuzzy pattern recognition, *Mechatronics*, 2001, no. 11, pp. 439–449.

А. Н. Шемякин<sup>1</sup>, канд. техн. наук, shemyakin@lantanlaser.ru,  
М. Ю. Рачков<sup>2</sup>, д-р техн. наук, проф., michyur@gmail.com,  
Н. Г. Соловьев<sup>1</sup>, д-р физ.-мат. наук, solovyov@lantanlaser.ru,  
М. Ю. Якимов<sup>1</sup>, д-р физ.-мат. наук, yakimov@lantanlaser.ru,

<sup>1</sup> Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук, г. Москва,

<sup>2</sup> Московский политех, г. Москва

## Управление мощностью излучения технологического CO<sub>2</sub>-лазера с несамостоятельным тлеющим разрядом путем изменения частоты импульсов ионизации

Статья посвящена управлению в автоматическом режиме мощностью излучения технологических CO<sub>2</sub>-лазеров с несамостоятельным продольным тлеющим разрядом с импульсной емкостной ионизацией серии "Лантан". Данный способ организации разряда позволяет легко управлять мощностью лазерного излучения, обеспечивает высокую оптическую однородность активного объема, стабильность разряда и высокий КПД лазерной генерации. Приведена схема организации несамостоятельного тлеющего разряда с импульсной емкостной ионизацией, этапы создания и краткие характеристики лазеров серии "Лантан". Выбран способ управления мощностью лазерного излучения путем изменения частоты импульсов ионизации, что позволяет организовать работу лазера как в непрерывном, так и в импульсно-периодическом режимах с регулируемой скважностью и длительностью импульсов, а также обеспечивает возможность перехода из одного режима в другой. В непрерывном режиме управление мощностью излучения происходит путем изменения частоты импульсов ионизации, которые представляют собой высоковольтные импульсы напряжения длительностью 100 нс, подаваемые с частотой 1...5 кГц. Управление излучением в импульсном режиме осуществляется модуляцией импульсов ионизации, которая состоит в подаче импульсов пакетами. Частота импульсов в пакете определяет мощность излучения в импульсе, частота следования пакетов — частоту импульсного режима, длина пакета — длительность импульсов. На основе экспериментальных данных определена зависимость мощности излучения от частоты импульсов ионизации. Приведена схема эксперимента и определена точность измерения мощности лазерного излучения и частоты импульсов ионизации. Сбор данных и обработку результатов экспериментов проводили с помощью USB-устройства сбора данных NI 6008 в среде проектирования виртуальных приборов LabVIEW фирмы National Instruments. Для изучения зависимости мощности лазерного излучения от частоты импульсов ионизации применен метод регрессионного анализа. Проведенные исследования показали, что зависимость мощности лазерного излучения от частоты импульсов ионизации носит линейный характер в широком диапазоне параметров. Получено уравнение прямой регрессии, рассчитаны доверительные оценки параметров прямой регрессии и доверительные оценки отклонения теоретической прямой регрессии от эмпирической зависимости при доверительной вероятности 95 %.

**Ключевые слова:** технологический лазер, система управления, несамостоятельный тлеющий разряд, мощность излучения лазера, частота импульсов ионизации

### Введение

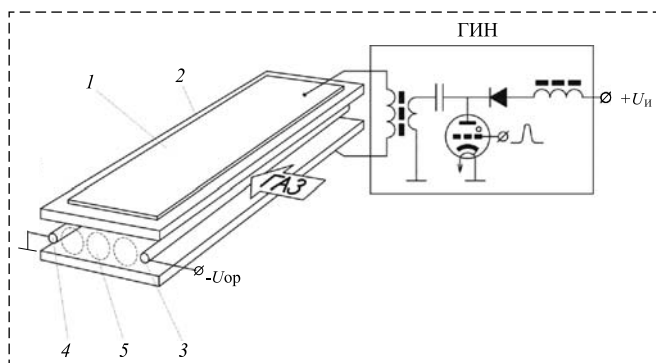
Мощные технологические CO<sub>2</sub>-лазеры серии "Лантан" предназначены для резки, сварки и модификации поверхности различных материалов в составе лазерного технологического комплекса. Это быстропотоочные лазеры с замкнутым газовым циклом и несамостоятельным продольным тлеющим разрядом с импульсной емкостной ионизацией [1]. Первые опыты по стабилизации мощного тлеющего разряда быстроповторяющимися импульсами были сделаны в работах Рейли [2] и Хилла [3]. Дальнейшее развитие этот способ организации разряда получил в работах [4—6]. В таком комбинированном разряде функции создания электрической проводимости газа (главным образом за счет свободных электронов) и вклада энергии в лазерную активную среду

разделены между двумя различными типами разрядов. Ионизация и связанная с ней проводимость обеспечиваются импульсно-периодическим емкостным разрядом, а вклад энергии в колебания молекул — прохождением тока основного разряда через плазму с концентрацией электронов, задаваемой ионизацией. Такой способ организации разряда позволяет легко управлять мощностью лазерного излучения, обеспечивает высокую оптическую однородность активного объема, стабильность разряда и высокий КПД лазерной генерации.

### Схема организации разряда

Схема организации несамостоятельного тлеющего разряда с импульсной емкостной ионизацией показана на рис. 1.





**Рис. 1. Схема организации несамостоятельного тлеющего разряда с импульсной емкостной ионизацией:**

1 — металлический электрод разряда импульсной емкостной ионизации; 2 — диэлектрическая пластина; 3 — катод несамостоятельного тлеющего разряда; 4 — анод несамостоятельного тлеющего разряда; 5 — зеркала многопроходного оптического резонатора; ГИН — генератор импульсного напряжения ионизации;  $-U_{ор}$  — напряжение питания источника основного разряда;  $U_{и}$  — напряжение питания ГИН

**Fig. 1. The scheme of a nonself-sustained glow discharge with ionization by periodic-pulsed capacitively coupled auxiliary discharge:**

1 — periodic-pulsed capacitively coupled discharge metal electrode; 2 — dielectric plate; 3 — cathode of a nonself-sustained glow discharge; 4 — anode of a nonself-sustained glow discharge; 5 — multipass optical resonator mirrors; ГИН — pulse ionization generator;  $-U_{ор}$  — main discharge power supply voltage;  $U_{и}$  — pulse ionization generator supply voltage

Разрядная камера представляет собой плоский канал прямоугольного сечения. Сверху и снизу разрядная камера ограничена электродами ионизации 1 (показан только верхний электрод), а с боковых сторон — стенками с отверстиями для прохода лазерного излучения к расположенным снаружи зеркалам резонатора 5. Каждый электрод емкостного разряда ионизации состоит из охлаждаемой водой металлической пластины 1, отделенной от объема разрядной камеры слоем диэлектрического материала 2. К электродам прикладывается высокое импульсное напряжение, и в объеме между ними возникает емкостной импульсный разряд, создающий свободные электроны. По окончании импульса концентрация электронов будет уменьшаться за счет процессов рекомбинации, прилипания, ухода на стенки и выноса потоком. Однако если импульсы ионизации подавать с частотой, превышающей характерную частоту (до потери электронов от предыдущего импульса), то в разрядном объеме установится некоторая средняя концентрация электронов. Электроды основного разряда 3, 4, выполненные в виде медных охлаждаемых водой трубок, расположены на входе и выходе из разрядной камеры. К ним прикладывается напряжение основного разряда  $-U_{ор}$ ,

которое меньше пробойного, и в камере возникает несамостоятельный тлеющий разряд с импульсной емкостной ионизацией.

На экспериментальном лазере "Циклон", разработанном в ИПМех РАН, впервые были проведены исследования несамостоятельного тлеющего разряда с импульсной емкостной ионизацией в камере большого объема в условиях мощной непрерывной лазерной генерации. В частности, было показано, что этот оригинальный способ организации разряда позволяет получить высококачественное одномодовое лазерное излучение мощностью до 10 кВт [1].

На основе исследований, проведенных на лазере "Циклон", были разработаны экспериментальный технологический лазер "Лантан-1", а затем технологический лазер "Лантан-2", предназначенный для промышленного выпуска [7]. Дальнейшим развитием метода импульсной емкостной ионизации стала разработка моноблочного автоматизированного технологического лазера "Лантан-3" [8] и экспериментального технологического лазера с быстрой осевой прокачкой [9], на котором было получено непрерывное излучение мощностью 4 кВт с высоким КПД.

### Выбор способа управления мощностью лазерного излучения

Существуют три способа управления мощностью излучения лазера с несамостоятельным тлеющим разрядом и импульсной емкостной ионизацией:

- путем изменения напряжения источника питания основного разряда;
- путем изменения напряжения источника питания ионизации;
- путем изменения частоты импульсов ионизации.

В работе [10] подробно проанализированы технические аспекты практической реализации этих способов управления, и предпочтение отдано управлению мощностью лазерного излучения путем изменения частоты импульсов ионизации.

Такой способ управления позволяет организовать работу лазера как в непрерывном, так и в импульсно-периодическом режиме с регулируемой скважностью и длительностью импульсов, а также обеспечивает возможность перехода из одного режима в другой.

В непрерывном режиме управление мощностью излучения происходит путем изменения частоты импульсов ионизации, которые представляют собой высоковольтные импульсы напряжения длительностью 100 нс, подаваемые с частотой 1...5 кГц.

Управление излучением в импульсном режиме осуществляется модуляцией импульсов ионизации, которая состоит в подаче импульсов пакетами. Частота импульсов в пакете определяет мощность излучения в импульсе, частота следования пакетов — частоту импульсного режима, длина пакета — длительность импульсов.

Для управления мощностью излучения лазера в автоматическом режиме необходимо на основе экспериментальных данных определить зависимость мощности излучения от частоты импульсов ионизации.

### Постановка эксперимента и обработка результатов

Эксперименты проводили на технологическом лазере "Лантан-3". Схема эксперимента приведена на рис. 2.

Система управления лазером задает мощность излучения  $W$ . Частота импульсов ионизации  $F$ , соответствующая заданной мощности, измеряется цифровым осциллографом TDS 2014 [11]. Лазерное излучение подается на термоэлектрическое зеркало-приемник с анизотропией термоЭДС [12], которое измеряет его мощность. Основными преимуществами выбранного приемника являются непосредственное измерение мощности широкоапертурного (диаметр 20...50 мм) высокоинтенсивного (до 1 кВт/см<sup>2</sup>) лазерного излучения и высокое быстродействие (не хуже 10<sup>-5</sup> с). Зеркало-при-

емник обладает линейной характеристикой в диапазоне мощности от 0 до 3 кВт [13].

После предварительного усиления сигнал с зеркала-приемника поступает на дифференциальный аналоговый вход USB-устройства сбора данных NI 6008 фирмы National Instruments [14].

Сбор данных и обработку результатов экспериментов проводились в среде проектирования виртуальных приборов LabVIEW фирмы National Instruments [15], [16].

Перед проведением основных экспериментов необходимо выполнить усреднение мощности лазерного излучения для устранения влияния амплитудных изменений мощности с частотой импульсов ионизации [17]. В работе [18] показано, что  $n = 100$  точек усреднения позволяет уменьшить флуктуацию мощности до величины менее 1 %, а именно  $\Delta W = \pm 0,68 \%$ , где

$$\Delta W = \pm \frac{2s_W}{\bar{W}} 100,$$

$s_W$  — эмпирическое стандартное отклонение мощности излучения;  $\bar{W}$  — эмпирическое среднее значение мощности излучения.

При проведении основных экспериментов исследовали зависимость мощности лазерного излучения от задаваемой частоты импульсов ионизации. USB-устройство сбора данных NI 6008 было запрограммировано на аналоговый ввод данных по дифференциальной схеме с диапазоном входного напряжения  $\pm 1$  В и частотой дискретизации 10 кГц. Каждую секунду программа сбора данных вводила 100 значений мощности лазерного излучения, усредняла эти значения и записывала их в компьютер. Было проведено два эксперимента. На рис. 3 показано характерное изменение мощности излучения во время проведения одного из экспериментов. На графике измеряемый сигнал умножен на коэффициент передачи зеркала-приемника 2320 Вт/В и переведен в ватты.

На технологическом лазере "Лантан-3" не реализована возможность задавать непосредственно частоту импульсов ионизации. Поэтому при проведении экспериментов задавалась мощность лазерного излучения, которая измерялась USB-устройством сбора данных NI 6008, а частота импульсов ионизации, соответствующая каждой ступеньке мощности, измерялась цифровым осциллографом TDS 2014.

Оценим точность измерения частоты, проводимого в режиме автоматического измере-

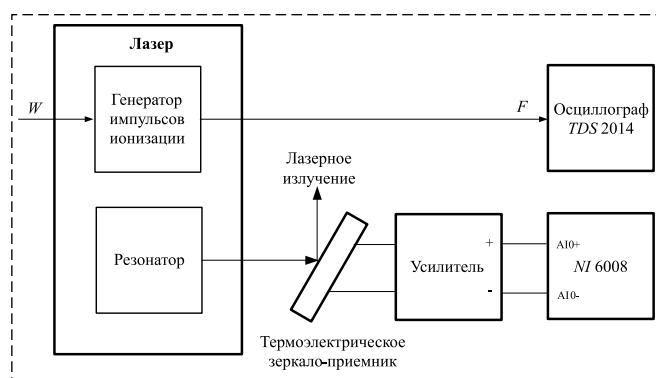


Рис. 2. Схема эксперимента  
Fig. 2. Experimental system



Рис. 3. Изменение мощности излучения  $W$  при проведении эксперимента

Fig. 3. Experimental radiation power change  $W$

ния. Для максимально измеренной частоты 2900 Гц (период  $T \sim 345$  мкс) скорость развертки  $V_p$  должна составлять  $V = 50$  мкс/деление, так как в режиме автоматического измерения хотя бы один период измеряемого сигнала должен поместиться на экран осциллографа ( $50 \text{ мкс} \cdot 10 \text{ делений экрана} = 500 \text{ мкс}$ ). В таком случае, согласно руководству пользователя [6], период дискретизации  $t_d$  равен  $t_d = V_p/250 = 50/250 = 0,2$  мкс, а погрешность измерения времени  $\Delta T$  составляет

$$\Delta T = \pm(t_d + 100 \cdot 10^{-6} T + 0,0006 \text{ мкс}). \quad (1)$$

#### Результаты предварительной обработки экспериментов

##### Results of experimental data pre-processing

№	Эксперимент 1		Эксперимент 2	
	Частота импульсов ионизации $F$ , Гц	Средняя мощность излучения $W$ , Вт	Частота импульсов ионизации $F$ , Гц	Средняя мощность излучения $W$ , Вт
1	2900	601	2820	597
2	2760	555	2700	550
3	2530	508	2590	504
4	2420	462	2440	458
5	2240	414	2290	411
6	2200	369	2200	364
7	2080	321	2100	316
8	1950	274	2030	269
9	1840	227	1900	222
10	1730	181	1820	176
11	1650	133	1690	127
12	1540	86	1580	81
13			1430	35

Подставив значения в соотношение (1), получим  $\Delta T = \pm 0,24$  мкс, что дает относительную точность измерения  $\pm(0,24/345) \cdot 100 = \pm 0,07 \%$ .

Такая высокая точность обусловлена малым периодом цифровой дискретизации осциллографа, который на данном временном диапазоне составляет всего 0,2 мкс.

Исходные данные, полученные в результате экспериментов, предварительно обработаны: компенсировано отрицательное смещение, убраны нулевые точки и вычислены средние значения ступеней мощности излучения. Результаты предварительной обработки представлены в таблице.

Для изучения зависимости мощности лазерного излучения от частоты импульсов ионизации применим метод регрессионного анализа [19].

Для аналитического представления зависимости  $W = f(F)$  применим линейную регрессию вида  $y = kx + c$ . Для расчета коэффициентов регрессии воспользуемся функцией *Linear Fit* среды проектирования *LabVIEW*. Уравнение линейной регрессии принимает вид

$$W = 0,402F - 530,3. \quad (2)$$

Точность коэффициентов регрессии выбрана таким образом, чтобы ошибка округления при вычислениях не превышала 1 %. Зависимость мощности излучения от частоты импульсов ионизации показана на рис. 4.

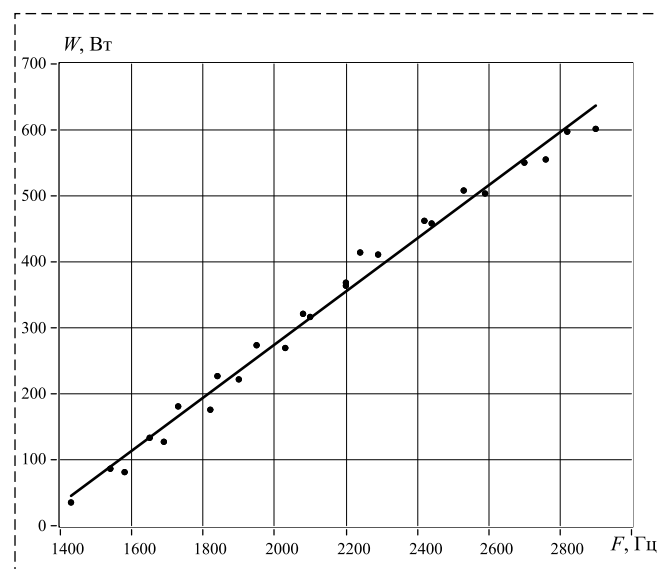


Рис. 4. Зависимость мощности излучения от частоты импульсов ионизации и прямая регрессии  $W$  на  $F$  по формуле (2)

Fig. 4. Dependence of radiation power on the frequency of ionization pulses and direct regression  $W$  on  $F$  according to (2)

Параметры этой линейной функции удовлетворяют принципу наименьших квадратов по  $W$ : сумма квадратов отклонений измеренных значений  $W_i$  от рассчитанных по уравнению прямой регрессии меньше, чем сумма квадратов отклонений их от любой другой прямой.

Квадрат коэффициента корреляции  $r^2$  между двумя множествами данных равен  $r^2 = 0,988$ .

Рост мощности излучения  $W$  с увеличением частоты импульсов ионизации  $F$  точно описывается линейной регрессией  $W$ . Однако следует отметить, что линейная зависимость  $W$  от  $F$  наблюдается только в рабочем диапазоне частот. При частоте, меньшей пороговой частоты генерации, лазерная генерация отсутствует и мощность излучения равна нулю. При частоте, большей максимально допустимой для данной модели лазера, происходит контракция разряда и срыв лазерной генерации.

Для дальнейших вычислений с помощью функции *Standard Deviation and Variance* среды проектирования *LabVIEW* рассчитаем эмпирические средние значения, дисперсии и стандартные отклонения  $W$  и  $F$  для  $n = 25$  измерений из таблицы.

Эмпирические средние значения

$$\bar{W} = \frac{1}{n} \sum_1^n W_i = 329,7, \quad \bar{F} = \frac{1}{n} \sum_1^n F_i = 2137,2.$$

Эмпирические дисперсии

$$s_W^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (W_i - \bar{W})^2 = 30\,002;$$

$$s_F^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n (F_i - \bar{F})^2 = 183\,013.$$

Эмпирические стандартные отклонения

$$s_W = 173,2, \quad s_F = 427,8.$$

Сумма квадратов отклонений измеренных значений  $W_i$  от рассчитанных по уравнению прямой регрессии  $W$  на  $F$  равна

$$\begin{aligned} s_{W|F} &= \sum_1^n [(W_i - \bar{W}) - k(F_i - \bar{F})]^2 = \\ &= (n-1)s_W^2(1-r^2) = 8760. \end{aligned}$$

Уравнение линейной регрессии (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} W - \bar{W} &= k(F - \bar{F}) \quad \text{или} \\ W &= \bar{W} + k(F - \bar{F}). \end{aligned}$$

Подставив значения, получим

$$W = 329,7 + 0,402(F - 2137,2).$$

Рассчитаем доверительные оценки параметров прямой регрессии  $W$  на  $F$  при доверительной вероятности  $P = 95\%$ . Если записать теоретическую прямую регрессии в виде

$$W = b + \beta_{W|F}(F - a),$$

где  $\beta_{W|F}$  — коэффициент теоретической регрессии  $W$  на  $F$ , то доверительными границами для  $b$  служат

$$\bar{W} \pm t \sqrt{\frac{s_{W|F}}{(n-2)n}} = 329,7 \pm 8,07,$$

а доверительными границами для  $\beta_{W|F}$  служат

$$k \pm t \sqrt{\frac{s_{W|F}}{n-2}} \frac{1}{s_F \sqrt{n-1}} = 0,402 \pm 0,019,$$

где  $t = t(P, m)$  — значение распределения Стьюдента [20] при доверительной вероятности  $P = 95\%$  и числе степеней свободы  $m = n - 2 = 23$

$$t = t(95\%, 23) = 2,069.$$

Перейдем к вычислению доверительной оценки отклонения теоретической прямой регрессии от эмпирической при доверительной вероятности  $P = 95\%$ . Для этого воспользуемся функцией *Linear Fit Intervals* среды проектирования *LabVIEW*. К сожалению, эта функция дает только визуальное представление доверительных границ теоретической прямой регрессии. Приведем аналитическое выражение для этих границ.

При фиксированном значении  $F = F_0$  доверительные границы для теоретической прямой регрессии определяются формулой

$$\bar{W} + k(F_0 - \bar{F}) \pm t \sqrt{\frac{s_{W|F}}{(n-2)n}} \sqrt{1 + \frac{n(F_0 - \bar{F})^2}{(n-1)s_F^2}}.$$

Для нашего случая

$$t \sqrt{\frac{s_{W|F}}{(n-2)n}} = 8,07; \quad \frac{n}{(n-1)s_F^2} = 5,69 \cdot 10^{-6}.$$

Тогда доверительные границы можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\pm t \sqrt{\frac{s_{W|F}}{(n-2)n}} \sqrt{1 + \frac{n(F_0 - \bar{F})^2}{(n-1)s_F^2}} = \\ &= \pm 8,07 \sqrt{1 + 5,69 \cdot 10^{-6}(F_0 - \bar{F})^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя значения  $F_0 = F_i$  из таблицы в уравнение эмпирической прямой регрессии  $W$  на  $F$  и в формулу для доверительных границ, можно вычислить значения эмпирической прямой регрессии с 95 %-ми доверительными границами для теоретической прямой регрессии.

Эмпирическая прямая регрессии  $W$  на  $F$  вместе с 95 %-ми доверительными границами

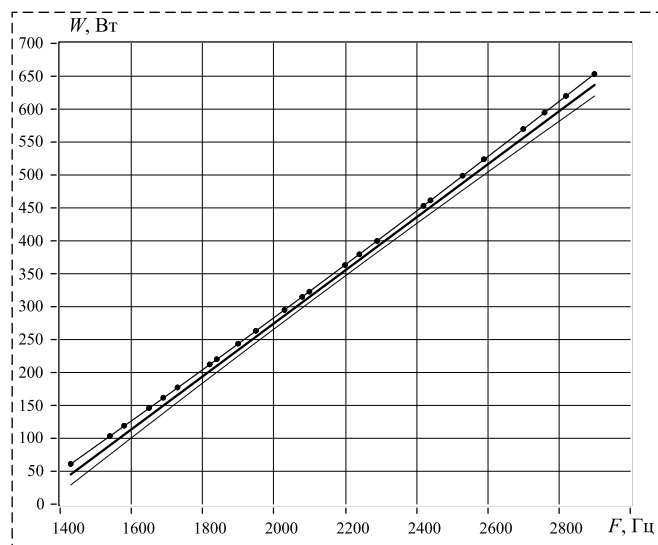


Рис. 5. Эмпирическая прямая регрессии  $W$  на  $F$  (2) вместе с 95 %-ми доверительными границами для теоретической прямой регрессии  $W$  на  $F$  по формуле (3)

Fig. 5. Empirical direct regression of  $W$  on  $F$  (2) together with 95 % confidence bounds for theoretical direct regression of  $W$  on  $F$  according to (3)

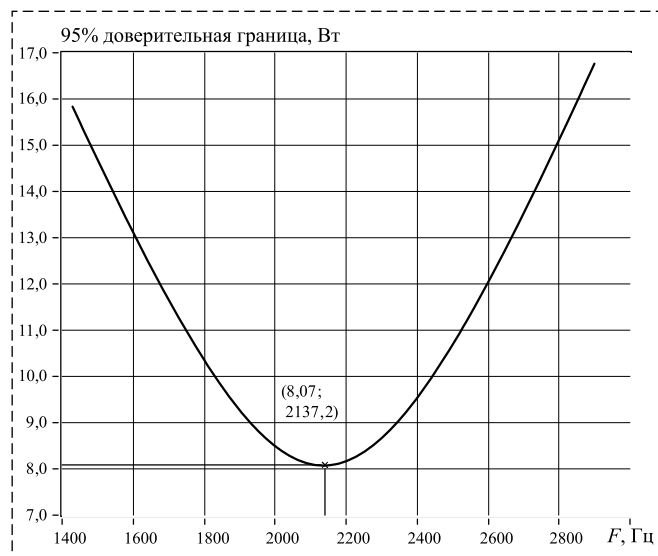


Рис. 6. Зависимость 95 %-й доверительной границы теоретической прямой регрессии  $W$  на  $F$  по формуле (3) от частоты импульсов ионизации  $F$

Fig. 6. Dependence of the 95 % confidence bound of the theoretical direct regression  $W$  on  $F$  according to (3) on the frequency of the ionization pulses  $F$

для теоретической прямой регрессии  $W$  на  $F$  показаны на рис. 5.

На верхней доверительной границе, полученной с помощью функции *Linear Fit Intervals* среды проектирования *LabVIEW*, точками показаны результаты аналитического расчета по формуле (3).

На рис. 6 изображена зависимость 95 %-ной доверительной границы теоретической прямой регрессии  $W$  на  $F$  от частоты импульсов ионизации  $F$ .

Видно, что отклонение теоретической прямой регрессии от экспериментальной минимально при  $F_i = \bar{F} = 2137,2$  Гц и равно

$$t \sqrt{\frac{s_{W|F}}{(n-2)n}} = 8,07 \text{ Вт.}$$

По мере удаления от среднего значения  $\bar{F}$  отклонение теоретической прямой регрессии от экспериментальной увеличивается.

## Заключение

Проведенные исследования показали, что зависимость мощности лазерного излучения  $W$  от частоты импульсов ионизации  $F$  носит линейный характер в широком диапазоне параметров. Вычислено уравнение прямой регрессии  $W$  на  $F$  и рассчитаны доверительные оценки параметров прямой регрессии и доверительные оценки отклонения теоретической прямой регрессии от эмпирической при доверительной вероятности  $P = 95$  %. Полученное уравнение прямой регрессии  $W$  на  $F$  позволяет управлять мощностью излучения лазеров с несамостоятельным тлеющим разрядом серии "Лантан" в автоматическом режиме.

## Список литературы

1. Генералов Н. А., Зимаков В. П., Косынкин В. Д. и др. Быстропроточный технологический  $\text{CO}_2$ -лазер комбинированного действия // Квантовая электроника. 1982. Т. 9. № 8. С. 1549—1557.
2. Reily J. P. Electrically excited flowing gas laser and method of operation // Patent US3721915A (1970).
3. Hill A. E. Uniform electrical excitation of large-volume high-pressure near sonic  $\text{CO}_2$ -N $_2$ -He flowstream // Applied Physics Letters. 1971. Vol. 18(5). P. 194—197.
4. Brown C. O., Davis J. W. Closed cycle performance of a high power electric discharge laser // Applied Physics Letters. 1972. Vol. 21. P. 480.
5. Christensen C. P. Pulsed transverse electrodeless discharge excitation of a  $\text{CO}_2$  laser // Applied Physics Letters. 1979. Vol. 34(3). P. 211—213.

6. Seguin H. J. J., Nam A. K., Tulip J. The photoinitiated impulse-enhanced electrically excited (PIE) discharge for high-power cw laser applications // *Applied Physics Letters*. 1978. Vol. 32. P. 418–420.
7. Богданов М. П., Верин В. М., Генералов Н. А., Зимаков В. П., Картавый С. К., Косынкин В. Д., Лаптев А. Р., Соловьев Н. Г., Штернин Л. А. Технологическая установка УЛГ-2.01 комбинированного действия: импульсно-периодического и непрерывного // Труды Всесоюзной конференции "Применение лазеров в народном хозяйстве". 1986. С. 50–53.
8. Generalov N. A., Gorbulyenko M. I., Solov'yov N. G., Yakimov M. Yu., Zimakov V. P. High-Power Industrial CO<sub>2</sub> Lasers Excited by a Non-self Sustained Glow Discharge // In W.J. Witteman and V.N. Ochkin (eds.), *Gas Lasers – Recent Developments and Future Prospects*. 1996. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. P. 323–341.
9. Generalov N. A., Shemyakin A. N., Solov'yov N. G., Yakimov M. Yu., Zimakov V. P. Application of the combined DC and capacitive periodic-pulsed discharge to the excitation of fast-axial-flow gas laser // In *Laser Optics 2006: High-Power Gas Lasers. Proc. SPIE Vol. 6611*, Oleg B. Danilov Ed. // Paper 66110K, 2007. 8 p.
10. Шемякин А. Н., Рачков М. Ю. Выбор способа управления мощностью излучения лазерного технологического комплекса с несамостоятельным тлеющим разрядом // *Известия МГИУ*. 2009. № 3 (16). С. 25–31.
11. Цифровые запоминающие осциллографы серии TDS1000 и TDS2000. Руководство пользователя. Tektronix, Inc. 190 с.
12. Глебов В. Н., Мананков В. М., Малютин А. М. и др. Термоэлектрическое зеркало-приемник лазерного излучения // *Известия РАН. Серия физическая*. 1993. Т. 57. № 12. С. 167–169.
13. Шемякин А. Н., Рачков М. Ю., Якимов М. Ю. Измерение мощности лазерного излучения технологического комплекса с несамостоятельным тлеющим разрядом // *Машиностроение и инженерное образование*. 2009. № 2 (19). С. 22–29.
14. USER GUIDE. NI USB-6008/6009 Bus-Powered Multi-function DAQ USB Device. URL: <http://www.ni.com/pdf/manuals/371303n.pdf> (дата обращения: 02.04.2019).
15. Трэвис Дж., Кринг Дж. LabVIEW для всех. М.: ДМК Пресс, 2008. 800 с.
16. Суранов А. Я. LabVIEW 8.20: Справочник по функциям. М.: ДМК Пресс, 2007. 536 с.
17. Шемякин А. Н., Рачков М. Ю., Соловьев Н. Г. Исследование характеристик мощности лазерного излучения технологического комплекса с несамостоятельным тлеющим разрядом // *Машиностроение и инженерное образование*. 2011. № 1 (26). С. 40–48.
18. Шемякин А. Н., Рачков М. Ю., Соловьев Н. Г. Исследование влияния деградации рабочей смеси газов на мощность излучения лазерного технологического комплекса с несамостоятельным тлеющим разрядом // *Известия МГИУ*. 2010. № 3 (20). С. 28–31.
19. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. М.: ИЛ, 1956. 664 с.
20. Дьяконов В. П. Mathcad 11/12/13 в математике. Справочник. М.: Горячая линия Телеком, 2007. 958 с.

## Radiation Power Control of the Industrial CO<sub>2</sub> Laser Excited by a Nonself-Sustained Glow Discharge by Changing the Frequency of Ionization Pulses

A. N. Shemyakin<sup>1</sup>, shemyakin@lantanlaser.ru, M. Yu. Rachkov<sup>2</sup>, michyur@gmail.com,  
N. G. Solov'ev<sup>1</sup>, solovyov@lantanlaser.ru, M. Yu. Yakimov<sup>1</sup>, yakimov@lantanlaser.ru,

<sup>1</sup> Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,  
119526, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Moscow Polytech, 107023, Moscow, Russian Federation

Corresponding author: Rachkov Michael Yu., DSc, Professor,  
Moscow Polytech, Moscow, 107023, Russian Federation, e-mail: michyur@gmail.com

Accepted on December 16, 2019

### Abstract

*The article describes radiation power control of industrial CO<sub>2</sub> lasers of Lantan series excited by a nonself-sustained glow discharge in the automatic mode. These lasers are closed-cycle fast gas-transport lasers excited by a nonself-sustained glow discharge with ionization by periodic-pulsed capacitively coupled auxiliary discharge. In this case, ionization and conductivity are provided by periodic-pulsed capacitively coupled discharge. The energy contribution to molecular oscillations is provided by the passage of the main discharge current through the plasma with electron density given by ionization. This permits easy laser power control, provides excellent optical homogeneity and stability of an active volume together with high laser efficiency. A system of a nonself-sustained glow discharge with ionization by periodic-pulsed capacitively coupled auxiliary discharge, the stages of creation and brief characteristics of the Lantan series lasers is presented. The method of controlling the power of laser radiation by changing the frequency of the ionization pulses is determined. This control method allows operating of the laser in continuous and in pulse-periodic modes with adjustable pulse ratio and pulse duration, and also provides switching from one mode to another. In the continuous mode, the radiation power is controlled by changing the frequency of ionization pulses, which are high voltage pulses with duration of 100 ns, given with the frequency of 1–5 kHz. Pulse-periodic radiation control is performed by modulating ionization pulses that consists of pulses being delivered in batches. The frequency of the pulses in a batch determines the radiation power in a pulse. The frequency of the batches following is the frequency of the pulse mode, and the length of the batch determines the pulses duration. Based on the experimental data, the dependence of the radiation power on the ionization pulses frequency was determined. An experimental system is presented and the measuring accuracy of the laser radiation power and the frequency of ionization pulses is determined. Data acquiring and processing of experimental results were performed using the NI 6008 USB data acquisition device in the LabVIEW programs of National Instruments. To study the dependence of the laser power on*

the frequency of the ionization pulses, a regression analysis method was applied. Studies have shown that the dependence of the laser power on the ionization pulses frequency is linear in a wide range of parameters. The equation of the direct regression is calculated. The confidence estimates of the coefficients of the direct regression and the confidence estimates of the deviation of the theoretical direct regression from the empirical one are calculated with a confidence level of 95%.

**Keywords:** industrial laser, control system, nonself-sustained glow discharge, laser radiation power, ionization pulses frequency.

For citation:

Shemyakin A. N., Rachkov M. Yu., Solov'yev N. G., Yakimov M. Yu. Radiation power control of the industrial CO<sub>2</sub> laser excited by a nonself-sustained glow discharge by changing the frequency of ionization pulses, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 224–231.

DOI: 10.17587/mau.21.224-231

## References

1. Generalov N. A., Zimakov V. P., Kosynkin V. D. et al. Rapid-flow combined-action industrial CO<sub>2</sub> laser, *Soviet Journal of Quantum Electronics*, 1982, vol. 9, no. 8, pp. 1549–1557 (in Russian).
2. Reily J. P. Electrically excited flowing gas laser and method of operation, Patent US3721915A (1970).
3. Hill A. E. Uniform electrical excitation of large-volume high-pressure near sonic CO<sub>2</sub>-N<sub>2</sub>-He flowstream, *Applied Physics Letters*, 1971, vol. 18(5), pp. 194–197.
4. Brown C. O., Davis J. W. Closed cycle performance of a high power electric discharge laser, *Applied Physics Letters*, 1972, vol. 21, pp. 480.
5. Christensen C. P. Pulsed transverse electrodeless discharge excitation of a CO<sub>2</sub> laser, *Applied Physics Letters*, 1979, vol. 34 (3), pp. 211–213.
6. Seguin H. J. J., Nam A. K., Tulip J. The photoinitiated impulse-enhanced electrically excited (PIE) discharge for high-power cw laser applications, *Applied Physics Letters*, 1978, vol. 32, pp. 418–420.
7. Bogdanov M. P., Verin V. M., Generalov N. A., Zimakov V. P., Kartavy S. K., Kosynkin V. D., Laptev A. R., Solov'yev N. G., Shternin L. A. Processing machine ULG-2.01 of combined action: periodic-pulsed and continuous wave, *Proceedings Soviet Conf. "Primenenie laserov v narodnom hozyaistve"*, Moscow, Nauka, 1986, pp. 50–53 (in Russian).
8. Generalov N. A., Gorbulenko M. I., Solov'yov N. G., Yakimov M. Yu., Zimakov V. P. High-Power Industrial CO<sub>2</sub> Lasers Excited by a Non-self Sustained Glow Discharge, In W.J. Witteman and V.N. Ochkin (eds.), *Gas Lasers – Recent Developments and Future Prospects*, 1996, Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, pp. 323–341.
9. Generalov N. A., Shemyakin A. N., Solov'yov N. G., Yakimov M. Yu., Zimakov V. P. Application of the combined DC and capacitive periodic-pulsed discharge to the excitation of fast-axial-flow gas laser, In *Laser Optics 2006: High-Power Gas Lasers. Proc. SPIE Vol. 6611*, Oleg B. Danilov, Ed., Paper 66110K, 2007, 8 p.
10. Shemyakin A. N., Rachkov M. Yu. The choice of the method of controlling the radiation power of an industrial laser processing machine with nonself-sustained glow discharge, *Izvestiya MGIIU*, 2009, no. 3 (16), pp. 25–31 (in Russian).
11. TDS1000-, TDS2000-series digital oscilloscope. User's manual. Tektronix, Inc. 190 p.
12. Glebov V. N., Manankov V. M., Malyutin A. M. and al. Thermoelectric mirror-detector for laser radiation, *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*, 1993, vol. 57, no. 12, pp. 167–169 (in Russian).
13. Shemyakin A. N., Rachkov M. Yu., Yakimov M. Yu. Laser radiation power measurements in an industrial laser processing machine with nonself-sustained glow discharge, *Mashinostroenie i Inzhenernoe Obrazovanie*, 2009, no. 2 (19), pp. 22–29 (in Russian).
14. USER GUIDE. NI USB-6008/6009 Bus-Powered Multi-function DAQ USB Device, available at: <http://www.ni.com/pdf/manuals/371303n.pdf> (date of the application: 02.04.2019).
15. Travis J., Kring J. LabVIEW for everyone, Moscow, DMK Press, 2008, 800 p. (in Russian).
16. Suranov A. Ya. LabVIEW 8.20: Functions Reference book, Moscow, DMK Press, 2007, 536 p. (in Russian).
17. Shemyakin A. N., Rachkov M. Yu., Solov'yov N. G. Investigation of laser power characteristics in an industrial laser processing machine with nonself-sustained glow discharge, *Mashinostroenie i Inzhenernoe Obrazovanie*, 2011, no. 1 (26), pp. 40–48 (in Russian).
18. Shemyakin A. N., Rachkov M. Yu., Solov'yov N. G. Investigation of the effect of working gas mixture degradation on the radiation power of an industrial laser processing machine with nonself-sustained glow discharge, *Izvestiya MGIIU*, 2010, no. 3 (20), pp. 28–31 (in Russian).
19. Hald A. Statistical theory with engineering applications, Moscow, IL, 1956, 664 p. (in Russian).
20. Dyakonov V. P. Mathcad 11/12/13 in mathematics. Reference book, Moscow, Goryachaya liniya Telekom, 2007, 958 p. (in Russian).

Л. Ю. Ворочаева<sup>1</sup>, доц., mila180888@yandex.ru, С. И. Савин<sup>2</sup>, ст. науч. сотр., s.savin@innopolis.ru,

А. С. Яцун<sup>1</sup>, доц., ayatsun@yandex.ru,

<sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет, г. Курск,

<sup>2</sup> Университет Иннополис, г. Иннополис

## Исследование работы системы корректировки длины корпуса в процессе изменения конфигурации трехзвенного ползающего робота<sup>1</sup>

*Рассматриваются вопросы движения трехзвенного ползающего робота по горизонтальной шероховатой поверхности, обеспечивающего изменение его конфигурации. Контакт робота с поверхностью осуществляется в четырех опорах, спроектированных таким образом, что коэффициент трения в них является управляемой величиной, что позволяет периодически фиксировать те или иные опоры на поверхности. Робот состоит из модулей, каждый из которых представляет собой поступательную пару, а между собой модули соединены двухкоординатными шарнирами. Предложено рассматривать эти модули как звенья переменной длины. Для данного устройства найдены основные кинематические соотношения, задан вектор обобщенных координат и описаны накладываемые в процессе движения связи. Изменение конфигурации робота происходит при фиксации на поверхности двух крайних опор за счет плоского движения звеньев из заданного начального в требуемое конечное положение. Реализация такого движения требует изменения длин звеньев (в самом простом случае достаточно изменения длины одного звена, в самом сложном — трех), для осуществления которого предложена оригинальная система корректировки. В работе рассматривается наиболее простой вариант корректировки, заключающийся в варьировании длины одного звена, в качестве которого выступает корпус робота, движения двух других звеньев определяются работой соответствующих приводов. В результате численного моделирования определен диапазон допустимых значений удлинения/укорочения корпуса робота при варьировании относительного угла между корпусом и одним из боковых звеньев в заданном диапазоне. Помимо этого, выявлены четыре интервала изменения относительного угла, на каждом из которых характер варьирования длины центрального звена отличается числом достигаемых максимумов и минимумов. Также построены зависимости изменения угла поворота бокового звена, при котором длина корпуса достигает своих максимального и минимального значений, от ранее указанного относительного угла и времени движения. Приведены и проанализированы временные законы изменения углов поворота звеньев.*

**Ключевые слова:** трехзвенный ползающий робот, управляемые движения, изменение конфигурации, блок управления походкой, блок формирования задающих воздействий, блок управления звеньями, система корректировки длин звеньев

### Введение

Разработка роботов для перемещения в сложных для человека условиях (включая туннели, естественные пещеры, трубопроводы, завалы, инженерные конструкции и т.д.) представляет как теоретический, так и прикладной интерес. Такие исследования требуют использования комбинации методов механики многозвенных систем с контактным взаимодействием (односторонними механическими связями) [1], теории управления многозвенными роботами с учетом действия сил трения,

методов планирования движения для систем с большим числом степеней свободы в условиях, когда пространство возможных движений существенно ограничено, и т.д. Сложность задачи повышается в связи с желанием использовать механизмы с анизотропным трением в опорах [2] или с использованием опор с переменным и управляемым трением [3], что обусловлено демонстрируемыми ими практическими преимуществами.

Современные исследования в области ползающих роботов во многом концентрируются на поиске оптимальных конструкций и допустимых локомоций для этих конструкций. Многие разрабатываемые конструкции биоморфны или биоинспирированы [4, 5]. При

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках Гранта Президента МК-200.2019.1.



этом многие новые конструкции ползающих роботов можно отнести к шагающим роботам [5]. Их отличительная черта, позволяющая относить их к ползающим конструкциям, может быть определена как богатство режимов их контактного взаимодействия с опорной поверхностью, включая режим качения в случае четырехногого робота Scorpio [5].

Еще одним интересным направлением в робототехнике ползающих роботов является оснащение их модулями дополнительной мобильности, например модулем для прыжков, как это сделано в работе [6]. Сходный прогресс наблюдается в области прыгающих и шагающих роботов, оснащаемых колесными модулями [7].

При всем многообразии работ в области поиска новых форм для ползающих роботов классическая последовательная структура, рассмотренная в работах Ф. Л. Черноусько и других исследователей [8, 9], представляет особый интерес в связи с возможностью получения полноценного формального описания движения таких роботов. В этой работе рассматривается робот, состоящий из звеньев переменной длины (пары твердых тел, соединенных линейным актуатором) с двухкоординатными активными шарнирами и опорами с переменным трением [10, 11]. Решается задача поиска походок, включая управляемое изменение длины звеньев робота для избегания перехода робота в особые положения, при которых дальнейшее перемещение устройства невозможно.

## Описание трехзвенного ползающего робота

### Конструкция и принцип движения

Исследуемый робот представляет собой цепочку из трех последовательно соединенных между собой звеньев  $K_i M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , с изменяемыми длинами  $l_i$  (рис. 1, а). Каждое звено можно рассматривать как поступательную пару, образованную двумя элементами (звеньями) постоянной длины, где длины этих элементов  $K_i P_i$  и  $D_i M_i$  равны  $l_{i1}$  и  $l_{i2}$ , их перемещение друг относительно друга обеспечивается приводами 4–6 (рис. 1, б). Звенья соединены между собой двухкоординатными шарнирами с установленными в них приводами, за счет которых осуществляются повороты звеньев друг относительно друга на углы  $\varphi_{21}$  и  $\varphi_{32}$  в горизонтальной плоскости (приводы 7 и 8) и углы  $\theta_{21}$  и  $\theta_{32}$  — в вертикальной плоскости (приводы 9 и 10).

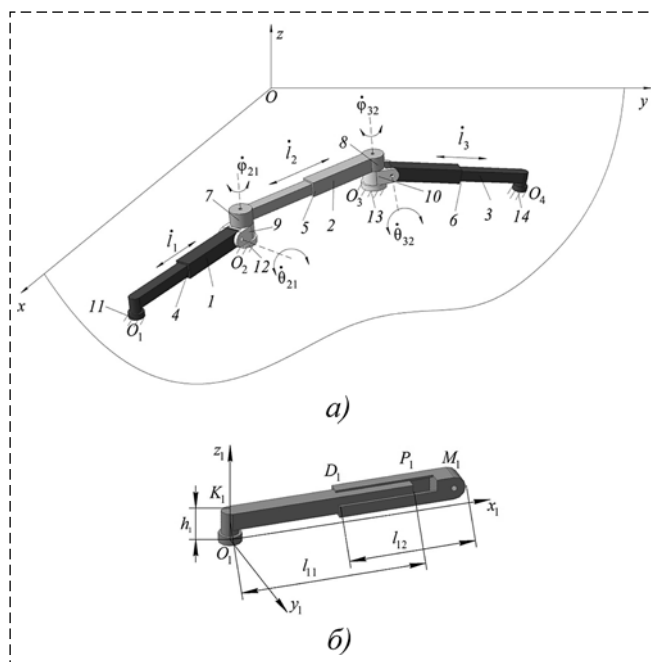


Рис. 1. Расчетная схема ползающего робота (а); схема звена 1 (б)  
Fig. 1. Diagram of the crawling robot (a); a scheme of the link 1 (b)

На концах звеньев расположены опорные элементы 11–14 (точки  $O_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ ) с управляемым коэффициентом трения  $f_j$ , одна из возможных конструкций которых и принцип работы описаны в работе [12]. Коэффициент трения в каждой опоре может принимать два значения: минимальное  $f_{\min}$  и максимальное  $f_{\max}$ . В рабочем режиме функционирования робота в случае минимального коэффициента опора движется по поверхности, а в случае максимального — располагается неподвижно:

$$x_{Oj} = \begin{cases} x_{Oj}, & f_j = f_{\min}, \\ \text{const}, & f_j = f_{\max}, \end{cases}$$

$$y_{Oj} = \begin{cases} y_{Oj}, & f_j = f_{\min}, \\ \text{const}, & f_j = f_{\max}. \end{cases}$$

Движение робота в пространстве  $Oxyz$  осуществляется путем реализации различных походок, при каждой из которых какие-либо две опоры устройства зафиксированы на поверхности:

- при  $f_1 = f_2 = f_{\max}$  и  $f_3 = f_4 = f_{\min}$  на поверхности неподвижно располагается звено 1;
- при  $f_2 = f_3 = f_{\max}$  и  $f_1 = f_4 = f_{\min}$  — неподвижно звено 2;
- при  $f_3 = f_4 = f_{\max}$  и  $f_1 = f_2 = f_{\min}$  — неподвижно звено 3;
- при  $f_1 = f_4 = f_{\max}$  и  $f_2 = f_3 = f_{\min}$  все звенья устройства движутся с учетом возможности осуществления перемещения.

При этом походки могут быть как плоскими (ни одна из опор не отрывается от плоскости  $Oxy$ ), так и пространственными. Первые из них более простые как с точки зрения их реализации, так и с точки зрения управления устройством. Но в случаях движения объекта в пространствах ограниченного объема (вентиляционные шахты, коридоры, узкие проходы) или при наличии на поверхности препятствий, которые устройство при плоских походках преодолеть не может, используются пространственные движения. Предложенная конструкция ползающего робота повышает его маневренность и проходимость по различным участкам поверхностей. Дополнительным преимуществом объекта является возможность управления длинами звеньев, что позволяет устройству адаптироваться к пространствам различного объема и разным по размерам препятствиям.

### Кинематическая математическая модель робота

Положение каждого звена в системе координат  $Oxyz$  определяется координатами точки  $O_j$ ,  $j = i$ , длиной  $l_i$ , а также абсолютными углами  $\varphi_i$  и  $\theta_i$ , задающими ориентацию звена в горизонтальной и вертикальной плоскостях относительно осей  $Oz$  и  $Oy_i$  (данная ось направлена перпендикулярно звену и расположена параллельно плоскости  $Oxy$ ). Будем считать, что все углы поворота отсчитываются против часовой стрелки. Тогда для их задания будем использовать соответствующие матрицы  $T_{\varphi i}$  и  $T_{\theta i}$ :

$$T_{\varphi i} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T_{\theta i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}.$$

При движении робота по плоской горизонтальной опорной поверхности любая его опора может быть зафиксирована на поверхности, это означает, что одно из его звеньев всегда располагается в плоскости  $Oxy$ . Для удобства описания кинематических соотношений будем считать, что это звено 1. Пусть опора  $O_1$  имеет координаты

$$\mathbf{r}_{O1} = (x_{O1}, y_{O1}, z_{O1})^T; z_{O1} = 0, \quad (1)$$

а ориентация звена 1 задана поворотом на угол  $\varphi_1$  вокруг оси  $Oz$  и на угол  $\theta_1 = 0$  вокруг оси

$O_1y_1$ . Координаты точки  $O_2$  (второй опоры звена 1) определяются с использованием матрицы поворота  $T_{\varphi i}$  следующим образом:

$$\mathbf{r}_{O2} = \mathbf{r}_{O1} + T_{\varphi 1} \mathbf{r}_{O1O2}^{(1)},$$

где  $\mathbf{r}_{O1O2}^{(1)} = (l_1, 0, 0)^T$  — относительный радиус-вектор в системе координат звена 1.

Пусть ориентация звена 2 задана углами  $\varphi_2$  и  $\theta_1 \geq 0$ . Тогда координаты точки  $O_3$  можно определить с использованием матриц поворота  $T_{\varphi i}$  и  $T_{\theta i}$ :

$$\mathbf{r}_{O3} = \mathbf{r}_{O1} + T_{\varphi 1} \mathbf{r}_{O1O2}^{(1)} + T_{\varphi 2} T_{\theta 2} \mathbf{r}_{O2O3}^{(2)},$$

где  $\mathbf{r}_{O2O3}^{(2)} = (l_2, 0, 0)^T$  — относительный радиус-вектор в системе координат звена 2.

Аналогичным образом определяются координаты точки  $O_4$ , для этого используются соответствующие матрицы поворота:

$$\mathbf{r}_{O4} = \mathbf{r}_{O1} + T_{\varphi 1} \mathbf{r}_{O1O2}^{(1)} + T_{\varphi 2} T_{\theta 2} \mathbf{r}_{O2O3}^{(2)} + T_{\varphi 3} T_{\theta 3} \mathbf{r}_{O3O4}^{(3)},$$

где  $\mathbf{r}_{O3O4}^{(3)} = (l_3, 0, 0)^T$  — относительный радиус-вектор в системе координат звена 3.

Вектор обобщенных координат  $\mathbf{q}$  можно записать в виде

$$\mathbf{q} = (\mathbf{r}_{O1}^T, \mathbf{l}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})^T,$$

где  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$  — вектор длин звеньев  $i = 1, 2, 3$ ;  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  — вектор углов поворота звеньев  $i = 1, 2, 3$  вокруг оси  $Oz$ ;  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  — вектор углов поворота звеньев  $i = 1, 2, 3$  вокруг осей  $Oy_i$ .

Высота опор звеньев робота ненулевая, причем боковые звенья расположены на высоте  $h_1 = h_3 = h$ , а центральное звено — на высоте  $h_2 = H$  в случае плоского движения механизма. При этом  $h < H$ , за счет чего боковые звенья могут совершать полный оборот относительно своих вертикальных осей, проходя под корпусом робота при условии, что его длина больше длины бокового звена.

Робот представляет собой шестимассовую конструкцию: элементы поступательных пар всех трех звеньев будем моделировать в виде стержней, центры масс которых — точки  $C_{i1}$  для элементов  $K_i P_i$  и точки  $C_{i2}$  для элементов  $D_i M_i$  — совпадают с центрами симметрии, массы элементов равны  $m_{i1}$  и  $m_{i2}$ . Радиус-векторы центров масс элементов можно записать следующим образом:

$$\mathbf{r}_{Ci1} = \mathbf{r}_{Oi} + T_{\varphi i} T_{\theta i} \mathbf{r}_{OiCi1}^{(i)};$$

$$\mathbf{r}_{Ci2} = \mathbf{r}_{Oi} + T_{\varphi i} T_{\theta i} \mathbf{r}_{OiCi2}^{(i)};$$

где относительные радиус-векторы равны

$$\mathbf{r}_{O_1C_{i1}}^{(i)} = (l_{i1}/2, 0, h_i)^T;$$

$$\mathbf{r}_{O_1C_{i2}}^{(i)} = ((l_i - l_{i2}/2), 0, h_i)^T.$$

Тогда координаты центров масс звеньев  $i = 1, 2, 3$  — точек  $C_i$  — будут определяться по следующим формулам:

$$x_{Ci} = \frac{m_{i1}x_{Ci1} + m_{i2}x_{Ci2}}{m_i};$$

$$y_{Ci} = \frac{m_{i1}y_{Ci1} + m_{i2}y_{Ci2}}{m_i};$$

$$z_{Ci} = \frac{m_{i1}z_{Ci1} + m_{i2}z_{Ci2}}{m_i},$$

где  $m_i = m_{i1} = m_{i2}$  — масса  $i$ -го звена.

### Описание движения робота

Будем рассматривать плоское движение робота при фиксации на поверхности двух крайних опор — точек  $O_1$  и  $O_4$ :

$$\begin{aligned} x_{O1} &= \text{const}, y_{O1} = \text{const}, \\ x_{O4} &= \text{const}, y_{O4} = \text{const}. \end{aligned}$$

Такой режим движения может использоваться для изменения конфигурации устройства при реализации той или иной походки. Вектор обобщенных координат можно записать следующим образом:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{l}, \boldsymbol{\varphi})^T.$$

Пусть в момент начала движения звенья располагаются под углами  $\varphi_1^{0n} = -\varphi^*$ ,  $\varphi_2^{0n} = 0$ ,  $\varphi_3^{0n} = 0$  (рис. 2, а). Во время движения происходит поворот звеньев 1 и 3 против и по часовой стрелке с угловыми скоростями  $\dot{\varphi}_1$  и  $\dot{\varphi}_3$  соответственно до тех пор, пока не будут справедливы условия:  $\varphi_1^{0k} = 0$ ,  $\varphi_2^{0k} = 0$ ,  $\varphi_3^{0k} = -\varphi^*$  (рис. 2, б). (Верхний индекс  $n$  обозначает начальный момент времени, верхний индекс  $k$  — конечный момент времени.) На рисунках поступательные пары не показаны, подразумевается, что звенья имеют переменную длину. Зафиксированные на поверхности опоры закрашены черным цветом.

Для реализации данного движения при фиксации на поверхности крайних опор требуется варьировать длины звеньев робота. Это обусловлено необходимостью исключения особых положений устрой-

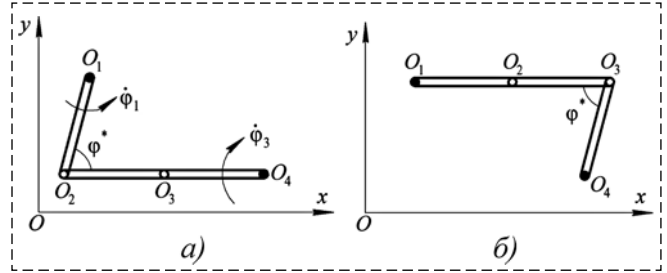


Рис. 2. Начальное (а) и конечное (б) положения робота  
Fig. 2. Initial position (a) and final position (b) of the robot

ства, после достижения которых перемещение его звеньев невозможно. В особых положениях длины звеньев робота достигают своих наибольших/наименьших значений и их дальнейшее удлинение/укорочение невозможно. В работе предлагается система корректировки длин звеньев, описанная ниже.

### Система управления роботом

Следует отметить, что система корректировки длин звеньев является частью системы управления движением ползающего робота, состоящей из трех блоков: блока управления походкой, блока формирования задающих воздействий (система корректировки) и блока управления звеньями (рис. 3).

Блок управления походкой, зная текущее расположение робота на плоскости  $(x_{O1}^{0n}, y_{O1}^{0n}, \varphi^{0n})$ , а также учитывая информацию о форме поверхности и расположенных на ней препятствиях, определяет конечное положение  $(x_{O1}^{0k}, y_{O1}^{0k}, \varphi^{0k})$ , в которое на этапе движения должен перейти объект. Блок формирования задающих воздействий генерирует требуемые законы изменения длин  $l_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , звеньев робота и углов  $\varphi_i^*$  их поворота, используя алгоритм работы системы корректировки. Данные законы являются задающими воздействиями для управления движением звеньев робота и должны быть реализованы блоком управления звеньями, на выходе которого формируются сигналы, соответствующие фак-

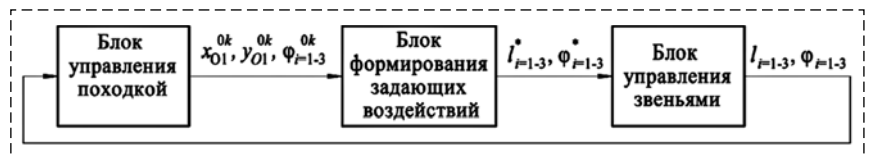


Рис. 3. Структурная схема системы управления ползающим роботом  
Fig. 3. Control system diagram for the crawling robot

тическим длинам  $l_i$  и углам  $\varphi_i$  поворота звеньев. Данные сигналы подаются в блок управления походкой, где фактическое расположение робота сравнивается с заданным конечным. При достижении роботом последнего этап движения завершается. Следует отметить, что работа блоков управления походкой и формирования задающих воздействий осуществляется до начала непосредственного движения устройства, а блок управления звеньями функционирует во время перемещения объекта в режиме реального времени.

### Система корректировки длин звеньев

В данной работе остановимся на рассмотрении работы системы корректировки длин звеньев. Пусть формируемые длины звеньев лежат в диапазонах

$$l_i^* \in [l_{i\min}, l_{i\max}],$$

где  $l_{i\min}$ ,  $l_{i\max}$  — минимально и максимально возможные длины звеньев:

$$l_{i\max} = l_i^0 + \Delta l_{i\max}, l_{i\min} = l_i^0 - \Delta l_{i\min},$$

$l_i^0$  — длины звеньев в момент начала движения,  $\Delta l_{i\max}$ ,  $\Delta l_{i\min}$  — предельные значения удлинения/укорочения звеньев.

Корректировка длин звеньев является последовательной. В самом простом случае требуется варьирование длины только одного звена — корпуса (звена 2). Если этого недостаточно для исключения особых положений, то требуется корректировка длины вначале одного бокового звена (например, звена 1), а затем при необходимости и второго (звена 3). Тогда алгоритм корректировки длин звеньев можно представить следующим образом.

Во время исследуемого движения крайние опоры зафиксированы на поверхности, координаты соответствующих точек равны  $O_1(x_{O1}^{0n}, y_{O1}^{0n})$ ,  $O_4(x_{O4}^{0n}, y_{O4}^{0n})$ , причем эти координаты связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} x_{O4}^{0n} &= x_{O1}^{0n} + l_1^0 \cos \varphi_1^{0n} + l_2^0 \cos \varphi_2^{0n} + l_3^0 \cos \varphi_3^{0n}; \\ y_{O4}^{0n} &= y_{O1}^{0n} + l_1^0 \sin \varphi_1^{0n} + l_2^0 \sin \varphi_2^{0n} + l_3^0 \sin \varphi_3^{0n}. \end{aligned}$$

Первый этап корректировки — изменение длины звена  $i = 2$ . Длины боковых звеньев рав-

ны  $l_1^* = l_1^0$ ,  $l_3^* = l_3^0$ , а требуемая длина звена  $i = 2$  задается формулой

$$l_i^* = \sqrt{(x_{O_{i+1}}^* - x_{O_i}^*)^2 + (y_{O_{i+1}}^* - y_{O_i}^*)^2}, \quad (2)$$

где  $x_{O_i}^*$ ,  $y_{O_i}^*$  и  $x_{O_{i+1}}^*$ ,  $y_{O_{i+1}}^*$  — требуемые координаты точек  $O_i$  и  $O_{i+1}$  (в данном случае — точек  $O_2$  и  $O_3$ ), движущихся по дугам окружностей относительно неподвижных опор  $O_1$  и  $O_4$  соответственно, радиусы этих окружностей равны  $l_1^0$  и  $l_3^0$ . Координаты точек  $O_2$  и  $O_3$  при этом должны быть равны

$$\begin{aligned} x_{O2}^* &= x_{O1}^{0n} + l_1^0 \cos \varphi_1^*; y_{O2}^* = y_{O1}^{0n} + l_1^0 \sin \varphi_1^*; \\ x_{O3}^* &= x_{O4}^{0n} - l_3^0 \cos \varphi_3^*; y_{O3}^* = y_{O4}^{0n} - l_3^0 \sin \varphi_3^*, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\varphi_1^*$ ,  $\varphi_3^*$  — требуемые углы поворота звеньев 1 и 3 во время движения с угловыми скоростями  $\dot{\varphi}_1^*$ ,  $\dot{\varphi}_3^*$ , генерируемыми приводами.

Требуемый угол поворота звена 2 определяется по формуле

$$\varphi_2^* = \arctg \left( \frac{y_{O3}^* - y_{O2}^*}{x_{O3}^* - x_{O2}^*} \right). \quad (4)$$

В случае если корректировки длины корпуса недостаточно, т.е. требуемая длина звена  $i = 2$  выходит за допустимые пределы, что задается условием

$$(l_i^* > l_{i\max}) \vee (l_i^* < l_{i\min}), \quad (5)$$

то начинается второй этап корректировки — изменение длины одного из боковых звеньев. Рассмотрим случай, когда вначале происходит изменение длины звена 1.

На этом этапе корректировки длина звена 2 равна  $(l_2^* = l_{2\min}) \vee (l_2^* = l_{2\max})$ , для удобства дальнейшего описания запишем  $l_2^* = l_{2m}$ , где  $l_{2m}$  — любое из двух возможных допустимых значений длины. Требуемые координаты точки  $O_3$  вычисляются по формулам (3), необходимый угол поворота звена 2 — по формуле (4). Координаты точки  $O_2$  при этом равны

$$\begin{aligned} x_{O2}^* &= x_{O4}^{0n} - l_3^0 \cos \varphi_3^* - l_{2m} \cos \varphi_2^*, \\ y_{O2}^* &= y_{O4}^{0n} - l_3^0 \sin \varphi_3^* - l_{2m} \sin \varphi_2^*. \end{aligned}$$

Тогда требуемая длина звена 1 определяется по формуле (2), где  $i = 1$ . Если и этой корректировки недостаточно, что описывается условием (5), где  $i = 1$ , то требуется третий этап корректировки — варьирование длины звена 3.

На этом этапе требуемые длины звеньев 1 и 2 равны  $l_1^* = l_{1m}$ ,  $l_2^* = l_{2m}$ , требуемый угол поворота звена 2 определяется по формуле (4), координаты точек  $O_2$  и  $O_3$  вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}x_{O2}^* &= x_{O1}^{0n} + l_{1m} \cos \varphi_1^*, & y_{O2}^* &= y_{O1}^{0n} + l_{1m} \sin \varphi_1^*, \\x_{O3}^* &= x_{O1}^{0n} + l_{1m} \cos \varphi_1^* + l_{2m} \cos \varphi_2^*, \\y_{O3}^* &= y_{O1}^{0n} + l_{1m} \sin \varphi_1^* + l_{2m} \sin \varphi_2^*,\end{aligned}$$

а для определения необходимой длины звена 3 используется формула (2), в которой  $i = 3$ . При недостаточности выполнения и третьего этапа корректировки, что соответствует выполнению условий (5), где  $i = 3$ , робот переходит в особое положение, при котором наблюдаются стопорение объекта и потеря всех степеней подвижности, его дальнейшее движение невозможно. В случае если условие (5) на каждом из этапов корректировки не выполняется, то осуществляется переход к предыдущему этапу (за исключением первого).

### Исследование корректировки длины корпуса

Будем рассматривать вариант корректировки длин звеньев, при котором варьирования длины звена 2 достаточно для реализации движения, вектор обобщенных координат при этом

$$\mathbf{q} = (l_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T.$$

Также будем считать, что боковые звенья 1 и 3 поворачиваются с угловыми скоростями, изменяющимися по законам, одинаковым по модулю, но противоположным по знаку:

$$\dot{\varphi}_1(t) = -\dot{\varphi}_3(t).$$

При моделировании примем длины звеньев в безразмерных величинах равными  $l_i = 1$ , а диапазон изменения угла  $\varphi^* \in [10^\circ, 170^\circ]$ .

В соответствии с принятым допущением максимально возможное значение удлинения/укорочения звена  $\Delta l_{2m}$  зависит от угла  $\varphi^*$  так, как показано на диаграмме рис. 4, а (см. вторую сторону обложки). Кривая соответствует зависимости  $\Delta l_{2m}(\varphi^*)$ , выше и ниже которой располагаются две области. Область 1 (выше кривой) представляет собой допустимый диапазон значений угла  $\varphi^*$  при том или ином значении удлинения/укорочения  $\Delta l_{2m}$ , когда дополнительной корректировки длин боковых звеньев

не требуется. Область 2 характеризует диапазоны значений  $\Delta l_{2m}$  и  $\varphi^*$ , при которых необходимо перейти ко второму этапу корректировки.

Все последующие исследования выполнены для значений  $\Delta l_{2m}$  и  $\varphi^*$ , расположенных в области 1.

### Характер изменения длины корпуса

При изменении  $\varphi^* \in [10^\circ, 170^\circ]$  можно выделить четыре участка  $n = 4$  (рис. 4, б, см. вторую сторону обложки), на каждом из которых функция  $l_2(\varphi_1)$  имеет свой характер, показанный на рис. 5 (см. вторую сторону обложки). Участки  $n$  выделяются в зависимости от сочетаний числа максимумов  $n_{\max}$  и минимумов  $n_{\min}$  функции  $l_2(\varphi_1)$ :

$$n = \begin{cases} 1, & (n_{\max} = 1) \wedge (n_{\min} = 2); \\ 2, & (n_{\max} = 3) \wedge (n_{\min} = 2); \\ 3, & (n_{\max} = 2) \wedge (n_{\min} = 2); \\ 4, & (n_{\max} = 2) \wedge (n_{\min} = 1). \end{cases}$$

Принцип выделения числа участков  $n$  от угла  $\varphi^*$  в соответствии с рис. 4 (см. вторую сторону обложки) можно записать следующим образом:

$$n = \begin{cases} 1, & \varphi^* \in [10^\circ, 60^\circ); \\ 2, & \varphi^* = 60^\circ; \\ 3, & \varphi^* \in (60^\circ, 90^\circ); \\ 4, & \varphi^* \in [90^\circ, 170^\circ]. \end{cases}$$

На рис. 5 (см. вторую сторону обложки) показан характер изменения функции  $l_2(\varphi_1)$  при четырех значениях  $\varphi^*$ , соответствующих четырем участкам  $n$ .

Красными точками на графиках показаны максимальные значения  $\max_{1..3}$  длины звена 2, а синими — минимальные  $\min_{1,2}$ , указанные индексы соответствуют порядковым номерам максимумов и минимумов.

По приведенным на рис. 5 графикам видно, что независимо от значения  $n$  длина корпуса вначале убывает, достигает минимума  $\min_1$ , а затем возрастает, причем ее убывание происходит из максимального значения  $\max_1$  при  $n = 2..4$ . Возрастание рассматриваемой функции происходит до максимального значения  $\max_1$  при  $n = 1$  или  $\max_2$  при  $n = 2, 4$ , а при  $n = 3$  функция при возрастании достигает локального максимума. Следует отметить, что достижение указанных максимумов при  $n = 4$  про-

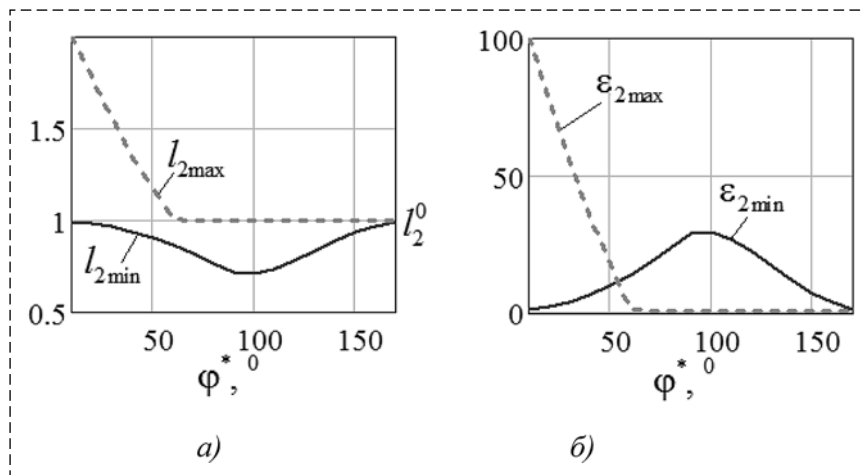


Рис. 6. Графики зависимостей:

$a - l_{2max}(\varphi^*), l_{2min}(\varphi^*)$ ;  $b - \varepsilon_{2max}(\varphi^*), \varepsilon_{2min}(\varphi^*)$

Fig. 6. Graphs of functions:

$a - l_{2max}(\varphi^*), l_{2min}(\varphi^*)$ ;  $b - \varepsilon_{2max}(\varphi^*), \varepsilon_{2min}(\varphi^*)$

исходит в момент завершения движения, а при  $n = 1, 2, 3$  — в момент достижения звеном 1 угла  $\varphi_1^s$ , являющегося серединой диапазона изменения этого угла в процессе движения:

$$\varphi_1^s = (\varphi^* - 180^\circ)/2.$$

Все графики  $l_2(\varphi_1)$  симметричны относительно значения  $\varphi_1^s$ . Помимо этого, по графикам видно, что при  $n = 1$  звено 2 и удлиняется, и укорачивается, а при всех остальных значениях  $n = 2, 3, 4$  длина звена 2 изменяется только в сторону уменьшения относительно начального значения  $l_2^0$ . По мере увеличения  $\varphi^*$  при  $n = 1$  максимальное значение длины корпуса убывает и достигает величины  $l_2^0$  при  $n = 2$ , что проиллюстрировано на рис. 6, а. Затем при  $n = 3$  наблюдается дальнейшее убывание величины  $l_2$  при  $\varphi_1 = \varphi_1^s$ , а при  $n = 4$  локальный максимум перестает существовать, вместо двух минимальных значений длины корпуса наблюдается только одно, и соответствует оно углу  $\varphi_1 = \varphi_1^s$ . Для большей наглядности на рис. 6, б приведены графики относительных приращений длины звена 2 при его удлинении  $\varepsilon_{2max}$  и укорочении  $\varepsilon_{2min}$ :

$$\varepsilon_{2max} = \frac{\Delta l_{2max}}{l_2^0} 100 \%,$$

$$\varepsilon_{2min} = \frac{\Delta l_{2min}}{l_2^0} 100 \%.$$

По данным графикам видно, что максимальное удлинение звена 2 наблюдается при минимально возможном угле  $\varphi^* = 10^\circ$  и составляет  $\varepsilon_{2max}(\varphi^* = 10^\circ) = 100 \%$ . А максимальное укорочение длины звена 2 соответствует  $\varphi^* = 90^\circ$  и равно  $\varepsilon_{2min}(\varphi^* = 90^\circ) = 30 \%$ .

Соответствие значений максимумов значениям угла  $\varphi_1$  может быть записано следующим образом (рис. 7, а, см. третью сторону обложки):

$$\left. \begin{aligned} \max_1 &= (\varphi^* - 180^\circ)/2, \quad n = 1; \\ \max_1 &= 0, \\ \max_2 &= (\varphi^* - 180^\circ)/2, \\ \max_3 &= (\varphi^* - 180^\circ), \end{aligned} \right\} n = 2;$$

$$\left. \begin{aligned} \max_1 &= 0, \\ \max_2 &= (\varphi^* - 180^\circ), \end{aligned} \right\} n = 3, 4.$$

а соответствие минимумов (рис. 7, б):

$$\left. \begin{aligned} \min_1 &= \varphi^* - 180^\circ + \Delta, \\ \min_2 &= -\Delta, \end{aligned} \right\} n = 1, 2, 3;$$

$$\min_1 = (\varphi^* - 180^\circ)/2, \quad n = 4,$$

где  $\Delta$  — некоторое значение угла  $\varphi_1$ , возрастающее по мере увеличения угла  $\varphi^*$ , как показано на графике рис. 8, а.

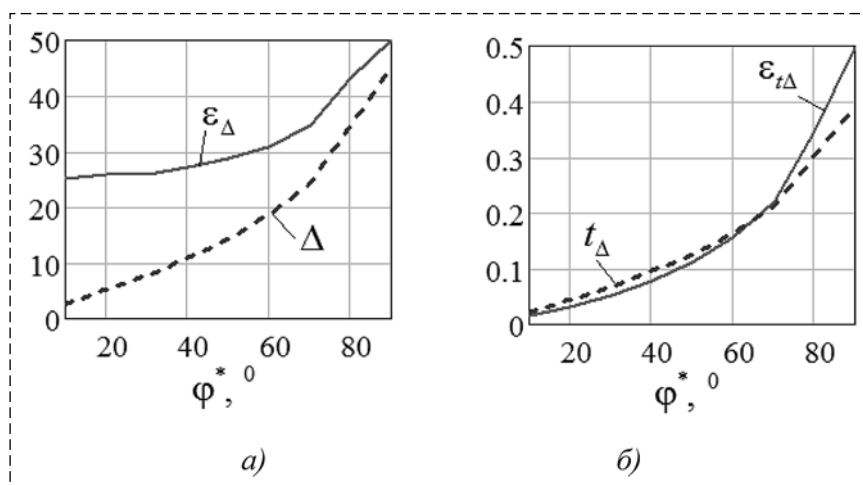


Рис. 8. Графики зависимостей:

$a - \Delta(\varphi^*), \varepsilon_\Delta(\varphi^*)$ ;  $b - t_\Delta(\varphi^*), \varepsilon_{t\Delta}(\varphi^*)$

Fig. 8. Graphs of functions:

$a - \Delta(\varphi^*), \varepsilon_\Delta(\varphi^*)$ ;  $b - t_\Delta(\varphi^*), \varepsilon_{t\Delta}(\varphi^*)$

На этом же рисунке показано относительное приращение величины  $\Delta$  в зависимости от угла  $\varphi^*$ :

$$\varepsilon_{\Delta} = \frac{\Delta}{\varphi^*} 100\%.$$

Обе кривые плавно возрастают и достигают своих максимумов при  $\varphi^* = 90^\circ$ . При этом  $\varepsilon_{\Delta} = 50\%$ , так как при данном значении  $\varphi^*$  наблюдается "слияние" двух минимумов функции  $l_2(\varphi^*)$  в один.

Зависимости моментов времени достижения максимальных  $t_{\max}$  и минимальных  $t_{\min}$  значений длины звена 2 от угла  $\varphi^*$  приведены на рис. 9 (см. третью сторону обложки).

Данные моменты времени описываются формулами:

$$\left. \begin{aligned} t_{\max 1} &= T/2, \quad n = 1; \\ t_{\max 1} &= 0, \\ t_{\max 2} &= T/2, \\ t_{\max 3} &= T, \end{aligned} \right\} n = 2;$$

$$\left. \begin{aligned} t_{\max 1} &= 0, \\ t_{\max 2} &= T, \end{aligned} \right\} n = 3, 4;$$

$$\left. \begin{aligned} t_{\min 1} &= t_{\Delta}, \\ t_{\min 2} &= T - t_{\Delta}, \end{aligned} \right\} n = 1, 2, 3;$$

$$t_{\min 1} = T/2, \quad n = 4,$$

где  $T$  — время движения;  $t_{\Delta}$  — время достижения значения  $t_{\min 1}$ , показанное на рис. 8, б.

Характер зависимостей, представленных на рис. 8, б для относительного приращения

$$\varepsilon_{t\Delta} = \frac{t_{\Delta}}{T},$$

аналогичен ранее построенным на рис. 8, а.

### Характер изменения углов поворота звеньев

Временные зависимости углов поворота всех звеньев для трех значений  $\varphi^*$  приведены на рис. 10 (см. третью сторону обложки). По ним видно, что углы поворота боковых звеньев изменяются пропорционально времени движения, причем угол звена 1 возрастает, а звена 3 — убывает. Кривая, по которой изменяется угол поворота корпуса, связывает между собой начальный угол звена 3 и конечный угол звена 1. Углы звеньев в момент начала  $t = 0$  и завершения  $t = T$  движения связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= \varphi_3(T), \quad \varphi_1(T) = \varphi_3(0), \\ \varphi_2(0) &= \varphi_3(0), \quad \varphi_1(T) = \varphi_2(T). \end{aligned}$$

Наибольший интерес представляет угол поворота звена 2, так как углы поворота боковых звеньев изменяются по законам, генерируемым соответствующими приводами. Этот угол вычисляется по формуле (4) и изменяется по некоторой кривой, близкой к параболе, ветви которой направлены вниз (рис. 11, а, б).

Максимального значения угол  $\varphi_2$  достигает при  $\varphi_1 = \varphi_1^s$  и  $t = T/2$ , т.е. на середине диапазо-

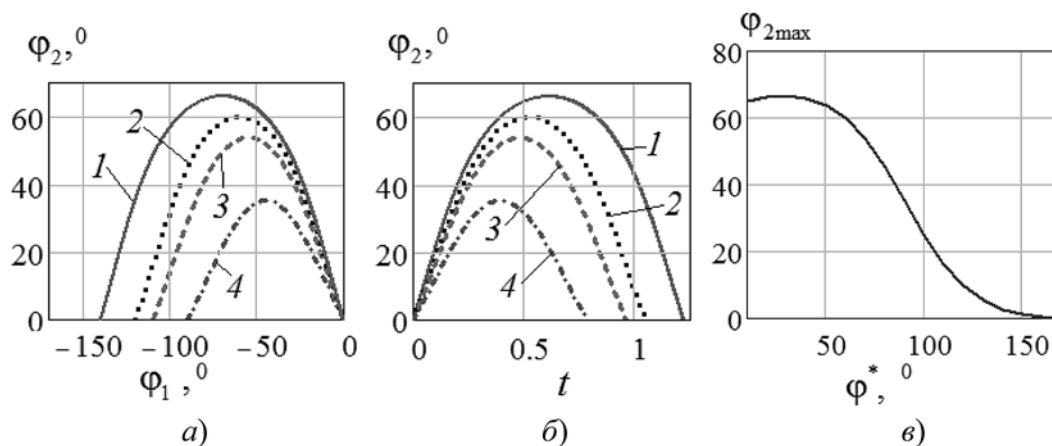


Рис. 11. Графики зависимостей:

а —  $\varphi_2(\varphi_1)$ ; б —  $\varphi_2(t)$ ; в —  $\varphi_{2\max}(\varphi^*)$ ; 1 —  $\varphi^* = 40^\circ$ , 2 —  $\varphi^* = 60^\circ$ , 3 —  $\varphi^* = 80^\circ$ , 4 —  $\varphi^* = 90^\circ$

Fig. 11. Graphs of functions:

а —  $\varphi_2(\varphi_1)$ ; б —  $\varphi_2(t)$ ; в —  $\varphi_{2\max}(\varphi^*)$ ; 1 —  $\varphi^* = 40^\circ$ , 2 —  $\varphi^* = 60^\circ$ , 3 —  $\varphi^* = 80^\circ$ , 4 —  $\varphi^* = 90^\circ$

на изменения угла  $\varphi_1$  и на середине интервала времени движения, причем наибольшее значение  $\varphi_{2\max}$  вначале плавно возрастает, а затем убывает по мере увеличения угла  $\varphi^*$  (рис. 11, в). Минимальное значение угла  $\varphi_{2\min} = 0$  наблюдается в начальной и конечной точках диапазона  $\varphi_1$  и  $t$ :

$$\varphi_2 = \begin{cases} \varphi_{2\max}, & \varphi_1 = \varphi_1^s; \\ \varphi_{2\min}, & (\varphi_1 = \varphi^* - 180^\circ) \vee (\varphi_1 = 0); \end{cases}$$

$$\varphi_2 = \begin{cases} \varphi_{2\max}, & t = T/2; \\ \varphi_{2\min}, & (t = 0) \vee (t = T). \end{cases}$$

### Заключение

В работе рассмотрено движение трехзвенного ползающего робота по горизонтальной шероховатой поверхности во время изменения его конфигурации при фиксации на поверхности двух крайних опор боковых звеньев. Для моделирования такого движения разработана кинематическая математическая модель устройства, предложена система управления устройством, описана система корректировки длин звеньев объекта, необходимая для исключения особых положений устройства и его стопорения.

Моделирование движения робота проведено численным способом, при этом рассмотрен случай, когда корректировки длины корпуса достаточно для перемещения устройства из начальной точки в конечную с приобретением соответствующей ориентации звеньев. Для этого построена диаграмма, по которой можно определить допустимые значения удлинения/укорочения корпуса  $\Delta l_{2m}$  и соответствующие им значения угла  $\varphi^*$ . В области допустимых значений  $\Delta l_{2m}(\varphi^*)$  выявлены законы изменения длины  $l_2$  корпуса и угла  $\varphi_2$  его поворота в зависимости от времени движения  $T$  и угла поворота звена 1 при различных значениях угла  $\varphi^*$ , обеспечивающие перемещение робота в конечное положение без стопорения.

Полученные в данной работе результаты могут быть в дальнейшем использованы при управлении движением опытного образца исследуемого робота и настройке работы системы корректировки длин его звеньев. Также следует отметить, что если конструктивно возможные значения удлинения/укорочения корпуса робота не будут попадать в установленный в ходе моделирования допустимый диапазон значений, то необходимо будет переходить

к следующему этапу корректировки — варьированию длины одного из боковых звеньев, что будет рассмотрено в последующих работах.

### Список литературы

1. Drumwright E., Trinkle J. C. Contact simulation // Humanoid Robotics: A Reference. 2016. P. 1–55.
2. Koh J. S., Cho K. J. Omega-shaped inchworm-inspired crawling robot with large-index-and-pitch (LIP) SMA spring actuators // IEEE/ASME Transactions On Mechatronics. 2012. Vol. 18, N. 2. P. 419–429.
3. Ворочаева Л. Ю., Савин С. И. Классификационные признаки роботов, перемещающихся по трубам // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2018. № 3. С. 89–100.
4. Sahai R., Avadhanula S., Groff R., Steltz E., Wood R., Fearing R. S. Towards a 3g crawling robot through the integration of microrobot technologies // Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (ICRA), Orlando, FL, USA. 2006. P. 296–302.
5. Tan N., Mohan R. E., Elangovan K. Scorpio: A biomimetic reconfigurable rolling–crawling robot // Intern. J. of Advanced Robotic Systems. 2016. Vol. 13, N. 5. P. 1–16.
6. Jung G. P., Casarez C. S., Jung S. P., Fearing R. S., Cho K. J. An integrated jumping–crawling robot using height-adjustable jumping module // Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (ICRA), Stockholm, Sweden. 2016. P. 4680–4685.
7. Ворочаева Л. Ю., Мальчиков А. В., Савин С. И. Определение диапазонов допустимых значений геометрических параметров колесного прыгающего робота // Известия Юго-Западного государственного университета. 2018. № 22(2). С. 76–84.
8. Черноусько Ф. Л. Управление движением многозвенников на шероховатой плоскости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2000. № 6(1). С. 277–287.
9. Черноусько Ф. Л. О движении трехзвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2001. Т. 65, Вып. 1. С. 15–20.
10. Ворочаева Л. Ю., Яцун А. С., Яцун С. Ф. Моделирование движения пятизвенного ползающего робота с управляемым трением по поверхности с препятствиями // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 3. С. 191–216.
11. Ворочаева Л. Ю., Пановко Г. Я., Савин С. И., Яцун А. С. Моделирование движения пятизвенного ползающего робота с управляемым трением // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 6. С. 12–19.
12. Ворочаева Л. Ю., Наумов Г. С., Яцун С. Ф. Моделирование движения трехзвенного робота с управляемыми силами трения по горизонтальной шероховатой поверхности // Известия РАН. ТиСУ. 2015. № 1. С. 156–170.
13. Vorochaeva L. Yu., Panovko G. Ya., Savin S. I., Yatsun A. S. Movement Simulation of a Five-Link Crawling Robot with Controlled Friction Forces // J. of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46, N. 6. P. 527–535.
14. Vorochaeva L. Yu., Yatsun A. S., Yatsun S. F. Simulation of the motion of a five-link crawling robot with controlled friction on a surface having obstacles // Intern. J. of Computer and Systems Sciences. 2017. Vol. 56, N. 3. P. 527–552.
15. Vorochaeva L. Yu., Naumov G. S., Yatsun S. F. Simulation of Motion of a Three-Link Robot with Controlled Friction Forces on a Horizontal Rough Surface // Intern. J. of Computer and Systems Sciences. 2015. Vol. 54, N. 1. P. 151–164.



# Study of the Work of the Length Correction System for a Crawling Robot Changing its Configuration

L. Yu. Vorochaeva<sup>1</sup>, mila180888@yandex.ru, S. I. Savin<sup>2</sup>, s.savin@innopolis.ru, A. S. Yatsun<sup>1</sup>, ayatsun@yandex.ru

<sup>1</sup>Southwest State University, Kursk,

<sup>2</sup>Innopolis University, Innopolis

Corresponding author: Vorochaeva Lyudmila Yu., Associate Professor, Southwest State University, Kursk, 305040, Russian Federation, e-mail: mila180888@yandex.ru

Accepted on September 26, 2019

## Abstract

The article discusses the movement of a three-link crawling robot on a horizontal rough surface, while changing its configuration. The robot contacts the surface in four points where active bearings are in place. The active bearings are designed in such a way that their dry friction coefficient is a controlled quantity, which allows periodically fixing these bearings to the surface. The robot consists of modules, each of which is a translational pair, and the modules are interconnected by two-axis hinges. It is proposed to consider these modules as links of variable length. In the paper, the basic kinematic relationships for this robot were found, a vector of generalized coordinates was specified, and the constraints imposed during the movement were described. The studied here motion corresponds to a scenario where two outer bearings are fixed on the surface, while links execute planar movements from a given initial to the desired final position. The implementation of such a movement requires a change in the lengths of the links (in the simplest case, a change in the length of one link is enough, in the most difficult case, all three are required to change length), for the implementation of which a correction system is proposed. The method considered in the work consists in varying the length of one link, which is the robot body, the movements of the other two links are determined by the operation of the corresponding drives. As a result of numerical simulation, the range of allowable values for the elongation / shortening of the robot body is determined by varying the relative angle between the body and one of the side links in a given range. In addition, four intervals of changes in the relative angles were revealed, at each of which the nature of the variation in the length of the central link differs in the number of maxima and minima achieved. Also, the dependences of the change in the angle of rotation of the side link, at which the length of the body reaches its maximum and minimum lengths, from the previously specified relative angle and time of movement, are constructed. The temporal laws of changes in the rotation angles of the links are given and analyzed.

**Keywords:** three-link crawling robot, controlled movements, configuration change, gait control unit, generation of control inputs, link control unit, link length adjustment system

**Acknowledgment:** This work was carried out as part of the Presidential Grant MK-200.2019.1.

For citation:

Vorochaeva L. Yu., Savin S. I., Yatsun A. S. Study of the Work of the Length Correction System for a Crawling Robot Changing its Configuration, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 232–241.

DOI: 10.17587/mau.21.232-241

## References

1. Drumwright E., Trinkle J. C. Contact simulation, *Humanoid Robotics: A Reference*, 2016, pp. 1–55.
2. Koh J. S., Cho K. J. Omega-shaped inchworm-inspired crawling robot with large-index-and-pitch (LIP) SMA spring actuators, *IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 419–429.
3. Vorochaeva L. Yu., Savin S. I. Klassifikatsionnye priznaki robotov, peremeshchayushchihsy po trubam, *Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V.G. Shuhova*, 2018, no. 3, pp. 89–100 (in Russian).
4. Sahai R., Avadhanula S., Groff R., Steltz E., Wood R., Fearing R. S. Towards a 3g crawling robot through the integration of microrobot technologies, *Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, Orlando, FL, USA, 2006, pp. 296–302.
5. Tan N., Mohan R. E., Elangovan K. Scorpio: A biomimetic reconfigurable rolling—crawling robot, *Intern. J. of Advanced Robotic Systems*, 2016, vol. 13, no. 5, pp. 1–16.
6. Jung G. P., Casarez C. S., Jung S. P., Fearing R. S., Cho K. J. An integrated jumping—crawling robot using height-adjustable jumping module, *Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, Stockholm, Sweden, 2016, pp. 4680–4685.
7. Vorochaeva L. Yu., Malchikov A. V., Savin S. I. Opredelenie diapazonov dopustimyh znachenij geometricheskikh parametrov kolesnogo prygayushchego robota, *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*, 2018, no. 22(2), pp. 76–84 (in Russian).
8. Chernous'ko F. L. Upravlenie dvizheniem mnogozvennikov na sherohovatoj ploskosti, *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 2000, no. 6(1), pp. 277–287 (in Russian).
9. Chernous'ko F. L. O dvizhenii trykhzvennika po gorizonttal'noj ploskosti, *PMM*, 2001, vol. 65, no. 1, pp. 15–20 (in Russian).
10. Vorochaeva L. Yu., Yatsun A. S., Yatsun S. F. Simulation of the motion of a five-link crawling robot with controlled friction on a surface having obstacles, *Intern. J. of Computer and Systems Sciences*, 2017, vol. 56, no. 3, pp. 527–552 (in Russian).
11. Vorochaeva L. Yu., Panovko G. Ya., Savin S. I., Yatsun A. S. Movement Simulation of a Five-Link Crawling Robot with Controlled Friction Forces, *J. of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, no. 6, pp. 527–535 (in Russian).
12. Vorochaeva L. Yu., Naumov G. S., Yatsun S. F. Simulation of Motion of a Three-Link Robot with Controlled Friction Forces on a Horizontal Rough Surface, *Intern. J. of Computer and Systems Sciences*, 2015, vol. 54, no. 1, pp. 151–164 (in Russian).
13. Vorochaeva L. Yu., Panovko G. Ya., Savin S. I., Yatsun A. S. Movement Simulation of a Five-Link Crawling Robot with Controlled Friction Forces, *J. of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, no. 6, pp. 527–535.
14. Vorochaeva L. Yu., Yatsun A. S., Yatsun S. F. Simulation of the motion of a five-link crawling robot with controlled friction on a surface having obstacles, *Intern. J. of Computer and Systems Sciences*, 2017, vol. 56, no. 3, pp. 527–552.
15. Vorochaeva L. Yu., Naumov G. S., Yatsun S. F. Simulation of Motion of a Three-Link Robot with Controlled Friction Forces on a Horizontal Rough Surface, *Intern. J. of Computer and Systems Sciences*, 2015, vol. 54, no. 1, pp. 151–164.

Do Quang Thong, Ph.D., doquangthong@yahoo.com,  
Le Quy Don Technical University

Corresponding author: Do Quang Thong, Ph.D.,  
Le Quy Don Technical University, e-mail: doquangthong@yahoo.com

Accepted on January 10, 2020

## Synthesis of High-Precision Missile Homing System Using Proportional Guidance Method

*Modern air targets are characterized by low visibility, high maneuverability and high survivability. In addition, for some specific targets, for instance ballistic missiles, in order to defeat them the missile need to be guided and carried out direct hit, i.e. "hit to kill". Therefore, in this paper, we present a high-precision missile homing system (MHS) using the proportional guidance method for firing at the highly maneuverable targets. Specifically, we propose a parametric optimization method for choosing a set of optimal parameters of the missile homing system for each dynamic parameter set of the missile. In addition, the paper gives the recommendations of choosing the initial conditions for the synthesis of missile homing system. In our experience, we should choose the small initial condition for synthesizing the missile homing system. Finally, the article also investigates the influence of systematic error in determining the speed, normal acceleration of missiles and the angular velocity of the line of sight of the missile and target on the accuracy of the missile homing system. We implement the proposed missile homing system and the parametric optimization method in Matlab. The experimental results illustrate that, using proposed system and the parametric optimization method, the missile can defeat the modern air targets with low visibility, high maneuverability and high survivability.*

**Keywords:** system synthesis, missile, missile homing system, proportional guidance method

For citation:

Do Quang Thong. Synthesis of High-Precision Missile Homing System Using Proportional Guidance Method, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 242—248.

DOI: 10.17587/mau.21.242-248

УДК 681.5.01

DOI: 10.17587/mau.21.242-248

До Куанг Тхонг, канд. техн. наук, преподаватель, doquangthong@yahoo.com,  
Технический Университет им. Лэ Куй Дон, Факультет техники управления, Ханой, Вьетнам

## Синтез высокоточной системы самонаведения ракеты с применением метода пропорционального наведения

*Современные воздушные цели характеризуются малой заметностью, высокой маневренностью и высокой живучестью. Кроме того, для уничтожения некоторых конкретных целей, например боевых частей баллистических ракет, необходимо обеспечить прямое попадание, т. е. "hit to kill". Поэтому в настоящей работе представлена высокоточная система самонаведения ракеты с использованием пропорционального метода наведения для стрельбы по высокоманевренным целям. В частности, предложен метод параметрической оптимизации системы самонаведения ракеты для каждого динамического набора параметров ракеты. Кроме того, даны рекомендации по выбору начальных условий для синтеза системы самонаведения ракеты. По нашему опыту, мы должны выбрать малое начальное условие для синтеза системы самонаведения ракеты. Наконец, в статье также исследуется влияние систематической погрешности определения скорости, нормального ускорения ракеты и угловой скорости линии визирования ракеты и цели на точность работы системы самонаведения ракеты.*

*Мы реализуем предложенную систему самонаведения ракеты и метод параметрической оптимизации в среде Matlab. Результаты экспериментов показывают, что с помощью предложенной системы и метода параметрической оптимизации ракета способна поражать современные воздушные цели с низкой видимостью, высокой маневренностью и высокой живучестью.*

**Ключевые слова:** синтез системы, ракета, система самонаведения ракеты, пропорциональный метод наведения

## Introduction

Several missile homing systems (MHS) have been proposed in the recent years. These systems can be divided into two groups including: (1) classical methods and (2) modern methods. The first group consists of the chase method, chase method with anticipation, direct guidance method, direct guidance method with anticipation, proportional guidance method, parallel guidance method, etc. While the modern methods includes the proportional guidance method with offset, the proportional guidance method with anticipation and the homing method an instantaneous miss, etc.

For borby with air targets, thank to the high accuracy and simplicity of technical implementation, some of the classical method-based missile homing systems are widely used in recent years. As a result, a number of MHS systems have been developed for missiles using classical methods [1–9]. The chase method is not actually applied to the MHS, because it only allows the missile to attack from the rear hemisphere of the target. Whereas, the direct guidance method with anticipation is most often used in anti-ship missile systems, to combat low-speed targets. The parallel guidance method-based MHS system provides highest performance in term of accuracy. Because, when firing at a non-maneuverable target, the missile using this method has a straight trajectory, and the missile has a trajectory with a smallest curvature, when firing at a maneuverable target. However, due to the complexity of the technical implementation, it is not applied in the real-world environments [1, 2]. The proportional guidance method is widely utilized, because of the sufficiently high accuracy, all-foreshortening, all-height, and simple technical implementation [9]. It is noted that, there are two kinds of equation are used to present for this method. In the vertical plane [1, 3–8] the proportional guidance method is presented as flows:

$$\dot{\Theta} = k_p \dot{\phi} \quad (1)$$

where,  $k_p$  is the proportional coefficient,  $\phi$  is the angle of the line of sight of the missile and target, and  $\Theta$  is the inclination angle of the trajectory of the missile. Whereas, in [9–12] the authors utilize Eq. 2 to present the proportional guidance method.

$$w = k_p v_a \dot{\phi} \quad (2)$$

where,  $w$  is the normal acceleration of the missile,  $v_a$  is the approaching speed of the missile to the

target. Multiplying the two sides of Eq. 1 by the velocity of the missile  $v$ , we get Eq. 3.

$$w = k_p v \dot{\phi}. \quad (3)$$

As presented in Eq. 2 and Eq. 3, the difference between the two equations is  $v_a$  and  $v$ . To measure the value of  $v_a$ , a locator of range (radio or laser) is needed. Therefore, the homing system is complex, heavy and expensive. Whereas, although the value of  $v$  is difficult to measure, we can utilize its program value in our homing system. In other words, the using  $v_a$  is more complicated than  $v$ . Therefore, in this study we utilize Eq. 1 in the proportional guidance method. As a results, the law of the guidance is presented as follows:

$$\sigma_g = k(k_p \dot{\phi} - \dot{\Theta}) \quad (4)$$

where,  $k$  is the coefficient, and  $k_p$  is the proportional coefficient. It is noted that, for the same values of  $k_p$  and  $\dot{\phi}$  when shooting towards the target, the system using equation (2) generates the normal acceleration greater than the system using equation (3). And when shooting in pursuit-less.

According to [9–12], in order to generate the control law  $\sigma_g$ , the coefficient  $k$  is not applied, and the value of  $k_p$  is choose in the range from 3 to 5. In addition, the authors in [9] also stated that, the MHS with such a small  $k_p$  value has large misses when shooting at highly maneuverable targets. Moreover, modern air targets are characterized by low visibility, high maneuverability, and high survivability. Therefore, to successfully combat them, it is necessary to improve the performance of the anti-aircraft missile systems. In [9], the authors describe a proportional guidance method with offset, which is necessary to determine the angular velocity of the line of sight of the missile-target without maneuvering targets, and increase in the angular velocity of the line of sight while maneuvering targets.

More recently, the modern method-based missile homing system, for instance the proportional guidance method with anticipation and the homing method on an instantaneous miss are described in [1, 2]. In this case, Eq. 5 are used to present the proportional guidance method with anticipation:

$$w_r = m(\tau)v(\omega_a + \omega_{n_x} + \omega_g + \omega_T) \quad (5)$$

where,  $w_r$  is the required acceleration of the missile;  $\omega_a$  is the projection of the angular velocity of the line of sight on the antenna coordination system, proportional to the angular misalignment, measured by the homing head; The compensation

components are calculated using on board computer including  $\omega_{n_x}$  is the component, which compensates the longitudinal acceleration;  $\omega_g$  is the component, which compensates the gravity;  $\omega_T$  is the component, which compensates the maneuver of the target; and  $m(\tau)$  is the coefficient of proportional navigation.

The equation represented the instantaneous miss homing method is illustrated as follows:

$$w_r = m(\tau)v\tau^2(\omega_a + \omega_{n_x} + \omega_g + \omega_T). \tag{6}$$

As presented in Eqs. 5 and 6, the technical implementation of these methods is complex, requiring further the determination of the values of  $\omega_a$ ,  $\omega_T$ . In addition, it is very difficult to estimate precisely the value of  $\omega_T$  on the missile, because it requires the determination of the normal acceleration of the target [2], and is computed as follows:

$$\omega_T = \frac{\omega_{Tn} \cos q_T + \dot{V} \sin q_T}{2v}.$$

Therefore, the objective of this study is to develop a methodology for the synthesis of MHS using the proportional guidance method, and to give recommendations on the choice of initial conditions (the distance between the missile and the target at the beginning time of the homing process) in the synthesis to improve its accuracy.

### Mathematical model of the conventional missile homing system

The conventional block diagram of MHS with the application of the proportional guidance method in a vertical plane [8, 13] is presented in Fig. 1.

In order to implement the guidance method, the missile homing system consists of a rudder actuator (RA), angular speed measuring device (ASMD), normal acceleration measuring device (NAMMD), compute tilt angular velocity of missile trajectory, gyrostabilized homing head (GHH), guidance law generator, stabilization law generator. The relative position of the missile and the target is shown in Fig. 2. A simplified scheme of GHH is presented in Fig. 3.

According to works presented in [3, 4, 8, 13], the mathematical model of the proportional gui-

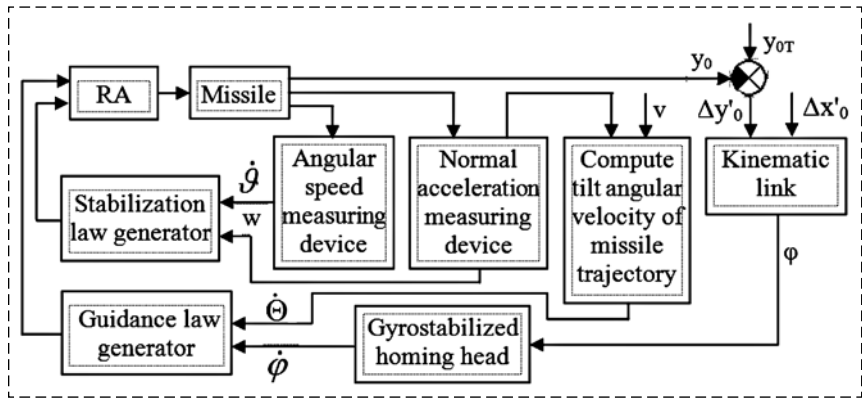


Fig. 1. The block diagram of the missile homing system

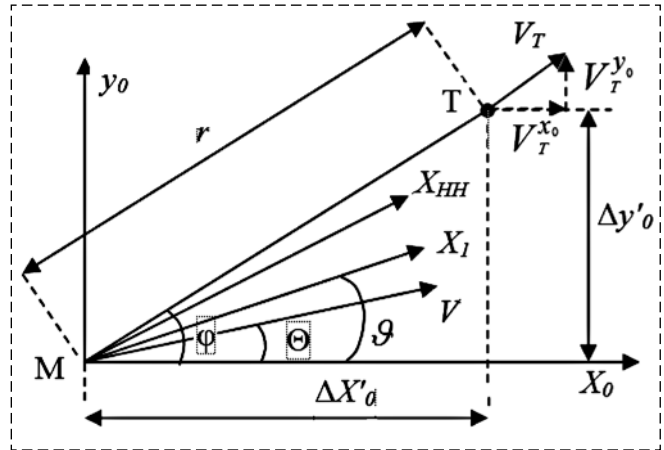


Fig. 2. The relative position of the missile and target

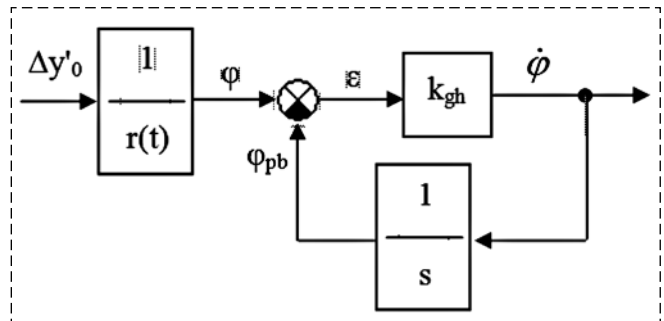


Fig. 3. Simplified scheme of gyrostabilized homing head

dance method-based MHS taking into account the dynamic properties of the measuring elements (RA in the first approximation is considered as an oscillatory link [1, 8], and the GHH is used) in the vertical plane is presented by a system of differential equations as follows:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_{z1} = -a_{11}\omega_{z1} - a_{12}\alpha - a_{13}\delta; \\ \dot{\vartheta} = \omega_{z1}; \\ \dot{\Theta} = a_{42}\alpha; \\ \alpha = \vartheta - \Theta; \\ w = va_{42}\alpha; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \sigma_s = (k_w u_{ak} + k_{\omega z_1} u_g); \\ \sigma_g = k \left( k_p k_{gh} \varepsilon - \frac{w}{v} \right); \\ \dot{u}_{ak1} = \frac{k_{ak}}{T_{ak}^2} w - \frac{1}{T_{ak}^2} u_{ak} - \frac{2\xi_{ak}}{T_{ak}} u_{ak1}; \\ \dot{u}_{ak} = u_{ak1}; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{g1} = \frac{k_g}{T_g^2} \omega_{z1} - \frac{1}{T_g^2} u_g - \frac{2\xi_g}{T_g} u_{g1}; \\ \dot{u}_g = u_{g1}; \\ u_r = \sigma_s - \sigma_g; \\ \dot{\delta}_1 = \frac{k_r}{T_r^2} u_r - \frac{1}{T_r^2} \delta - \frac{2\xi_r}{T_r} \delta_1; \\ \dot{\delta} = \delta_1; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}_{pb} = k_{gh} \varepsilon; \\ \varepsilon = \varphi - \phi_{pb}; \\ \dot{x}_0 = v \cos \Theta; \\ \dot{y}_0 = v \sin \Theta; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{0T} = v_T \cos \Theta_T; \\ \dot{y}_{0T} = v_T \sin \Theta_T; \\ \Delta x'_0 = x_{0T} - x_0; \\ \Delta y'_0 = y_{0T} - y_0; \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{\Delta x'^2_0 + \Delta y'^2_0}; \\ \varphi = 57,3 \arcsin \frac{\Delta y'_0}{r}; \\ 0 \leq t \leq T^* \end{cases} \quad (12)$$

where,  $\omega_{z1}$  is the angular velocity of the missile [degree/s];  $\alpha$  is the attack angle of the missile [degree];  $\delta$  is the angular velocity of rudder [degrees];  $\vartheta$  is the missile pitch angle [degree];  $\Theta$  is the inclination angle of the trajectory missile [degrees];  $w$  is the normal acceleration of the missile [m/s<sup>2</sup>];  $v$  is the speed of the missile [m/s];  $a_{11}$  is the natural damping coefficient [1/s];  $a_{12}$  is the wind direction coefficient [1/s<sup>2</sup>];  $a_{13}$  is the rudder efficiency coefficient [1/s<sup>2</sup>];  $a_{42}$  is the normal force coefficient [1/s];  $u_{ak}$  is output of the NAMD [v];  $k_{ak}$ ,  $\xi_{ak}$ ,  $T_{ak}$  [s] are the conversion coefficient, damping coefficient, time constant NAMD, respectively;  $u_g$  is the output of ASMD [v];  $k_g$ ,  $\xi_g$ ,  $T_g$  [s] are the conversion coefficient, damping coefficient, time constant ASMD, respectively;  $\sigma_s$  is the law of stabilization of normal acceleration;  $k_w$  is the feedback gain according to the normal acceleration;  $k_{\omega z1}$  is the feedback gain for the speed of angular velocity;  $\sigma_g$  is the law of guidance;  $k$  is the coefficient;  $k_p$  is the proportional

coefficient;  $u_r$  is the input of RA [v];  $k_r$ ,  $\xi_r$ ,  $T_r$  [s] are the conversion coefficient, damping coefficient, time constant RA, respectively;  $\varphi$  is the inclination angle of the line of sight of missiles and targets [degree];  $k_{gh}$  is the conversion coefficient of straight chain of GHH;  $x_0$ ,  $y_0$  are the coordinates of the missile on the horizontal and vertical axes [m];  $x_{0T}$ ,  $y_{0T}$  are the target coordinates on horizontal and vertical axes [m];  $v_T$  is the target speed [m/s];  $\Theta_T$  is the inclination angle of the target trajectory;  $\Delta x'_0$ ,  $\Delta y'_0$  are the difference between the coordinates of the missile and target [m];  $T^*$  is the guidance time [s].

### Synthesis of missile homing system under different initial conditions

Based on the dynamic parameters ( $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{42}$ ) and the velocity  $v$  of the missile, it is necessary to select the parameters ( $k_{\omega z1}$ ,  $k_w$ ,  $k$ ,  $k_p$ ) to ensure the smallest guidance error. For the sake of simplicity of the synthesis process, the guidance error is determined by the distance between the missile and the target at the end of the homing process; the movement of the target is assumed to be rectilinear at a constant speed; the speed missiles is considered as constant; and the blindness of the homing head is skipped. The synthesis process of the MHS is carried out by parametric optimization in Matlab. We scan the parameters ( $k_{\omega z1}$ ,  $k_w$ ,  $k$ ,  $k_p$ ) in the range ( $k_{\omega z1\min} \div k_{\omega z1\max}$ ,  $k_{w\min} \div k_{w\max}$ ,  $k_{\min} \div k_{\max}$ ,  $k_{p\min} \div k_{p\max}$ ) with scanning step  $dk_{\omega z1}$ ,  $dk_w$ ,  $dk$ ,  $dk_p$ , respectively. For each set of value ( $k_{\omega z1}$ ,  $k_w$ ,  $k$ ,  $k_p$ ) we integrate the systems using Eqs. 7–12 from the beginning to the end of the homing process to find the minimum of the guidance error. The optimal parameter set ( $k_{\omega z1\text{opt}}$ ,  $k_{w\text{opt}}$ ,  $k_{\text{opt}}$ ,  $k_{p\text{opt}}$ ) is selected, if  $k_{\omega z1\min} < k_{\omega z1\text{opt}} < k_{\omega z1\max}$ ,  $k_{w\min} < k_{w\text{opt}} < k_{w\max}$ ,  $k_{\min} < k_{\text{opt}} < k_{\max}$ ,  $k_{p\min} < k_{p\text{opt}} < k_{p\max}$ . Otherwise, we need to extend the scan range of the parameter set.

To reduce computational time, the following steps are carried out: Step 1 — We only integrate the system using Eqs. 7–12 when the values of parameters ( $k_{\omega z1}$ ,  $k_w$ ) providing the permissible stability margin of the stabilization circuit of the normal acceleration of the missile. In other words, the system satisfies the Hurwitz stability criterion and provide an oscillation index less than 1.7; Step 2 — From the beginning we do the pre-scan parameters ( $k_{\omega z1}$ ,  $k_w$ ,  $k$ ,  $k_p$ ) with a relatively "large" step ( $dk_{\omega z1}$ ,  $dk_w$ ,  $dk$ ,  $dk_p$ ). As a result, we get the rough "optimal" parameter set ( $k'_{\omega z1}$ ,  $k'_w$ ,  $k'$ ,  $k'_p$ ). The optimal parameter set will be near this point; Step 3 — We

scan the parameters ( $k_{\omega z1}$ ,  $k_w$ ,  $k$ ,  $k_p$ ) in the range ( $k'_{\omega z1} - dk_{\omega z1} \div k'_{\omega z1} + dk_{\omega z1}$ ,  $k'_w - dk_w \div k'_w + dk_w$ ,  $k' - dk \div k' + dk$ ,  $k'_p - dk_p \div k'_p + dk_p$ ) with a "smaller" step ( $dk_{\omega z1}/N_1$ ,  $dk_w/N_2$ ,  $dk/N_3$ ,  $dk_p/N_4$ ), ( $N_i > 5$ ) and integrate the systems using Eqs. 7–12 to find the real optimal parameters. The scanning step and the optimal parameters are selected when the guidance error is a few centimeters. Using such parametric optimization we can synthesize the MHS system on a personal laptop, built on the basis of the P6100 processor within 30 [s]. If we use a more modern laptop, built on the basis of an I5 or I7 processors, the synthesis time is even less.

According to [8], we assume  $a_{11} = 1,2$  [1/s];  $a_{12} = 20$  [1/s<sup>2</sup>];  $a_{13} = 30$  [1/s<sup>2</sup>];  $a_{42} = 1,5$  [1/s];  $v = 1300$  [m/s];  $k_r = 1$  [degree/V];  $\xi_r = 0,6$ ;  $T_r = 0,05$  [s];  $\delta_{\max} = \pm 20$  degree;  $k_g = 1$  [V/degree/s],  $\xi_g = 0,6$ ,  $T_g = 0,05$  [s];  $k_{ak} = 1$  [V/m/s<sup>2</sup>],  $\xi_{ak} = 0,6$ ,  $T_{ak} = 0,05$  [s];  $k_{gh} = 50$ ;  $k_{\omega z1} = 0,06 \div 0,4$ ;  $k_w = 0,001 \div 0,01$ ;  $k = 1 \div 20$ ;  $k_p = 20 \div 100$ . The shooting is conducted towards. We conducted two experiments corresponding to two case study: Case 1 — Small initial condition, and Case 2 — Large initial condition.

In the Case 1, the initial condition are set to  $x_{0T} = 7000$  [m],  $y_{0T} = 2000$  [m], and  $v_T = 800$  [m/s]. After implementation of the proposed parametric optimization in Matlab we get the optimal parameter set  $k_{\omega z1} = 0,2$ ;  $k_w = 0,002$ ,  $k = 12$ ,  $k_p = 45$ . As a result, the guidance error is 0.021[m] and the trajectory of the missile and the target are shown in Fig. 4.

We set the initial condition in the Case 2 are  $x_{0T} = 15\,000$  [m],  $y_{0T} = 5000$  [m], and  $v_T = 800$  [m/s]. The proposed MHS system provides the guidance

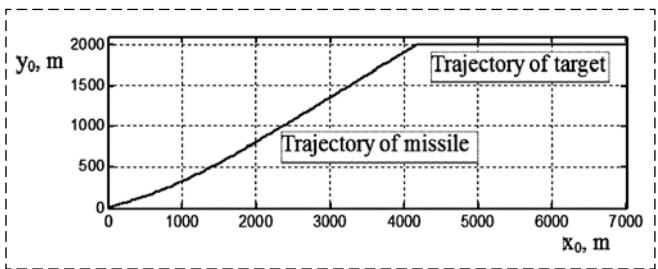


Fig. 4. The trajectories of missile and targets

error is 0,003[m], with the optimal parameter set is  $k_{\omega z1} = 0,1$ ;  $k_w = 0,001$ ,  $k = 6$ ,  $k_p = 59$ .

It is noted that, the performance of the MHS depends on the initial conditions. Therefore, it is necessary to check the possibility of using the synthesized MHS in different initial conditions. The guidance errors for different initial conditions are given in Table 1.

As presented in Table 1, if we select a small initial condition the proposed parametric optimization of MHS generate a set of optimal parameter, which can be used in all other initial conditions of the homing process. Because, it provides small guidance error in all initial conditions. In addition, this also helps to reduce the computational time in the synthesis of the MHS. In contrast, if we choose a large initial condition for parametric optimization of MHS, we can get a set of optimal parameter, however this parameter set can not be used in all other initial conditions.

### Study of the possibility of using the synthesized system for firing at highly maneuverable targets

In this section, we investigate the possibility of using synthesized MHS for firing at highly maneuverable targets. Assume that at the beginning of the guidance, the target has a coordinate  $x_{0T} = 15\,000$  [m],  $y_{0T} = 5000$  [m] and the speed  $v_T = 800$  [m/s]. Shooting is conducted towards. We conduct experiments with the acceleration of the target  $w_T = -50$  [m/s<sup>2</sup>], the optimal parameter set is  $k_{\omega z1} = 0,2$ ;  $k_w = 0,002$ ,  $k = 12$ ,  $k_p = 45$ , and the time  $t$  from the beginning homing process to the moment target start to maneuver, with  $t = 1s, 2s, 3s, 4s, 5s, 6s$ , or  $6,2s$ . Guidance errors for different moments of time  $t$  are given in Table 2. The trajectories of the missile and the target with the homing time  $t = 2s$  are shown in Fig. 5.

As presented in Table 2, the homing time is  $t = 5s$ ;  $t = 6s$  and  $t = 6,2s$ , the time from the beginning of the target maneuver to the end of the homing process is less than the transition time of the stabilization circuit of normal acceleration. There-

Table 1

$V_T = 800$ m/s										
$x_{0T}$ , m	7000	7000	7000	7000	7000	12 000	12 000	12 000	15 000	15 000
$y_{0T}$ , m	1000	2000	3000	4000	5000	5000	6000	7000	5000	6000
$k_{\omega z1} = 0,2$ ; $k_w = 0,002$ , $k = 12$ , $k_p = 45$	0,316 m	0,021 m	0,507 m	0,087 m	0,01 m	0,004 m	0,004 m	0,007 m	0,002 m	0,009 m
$k_{\omega z1} = 0,1$ ; $k_w = 0,001$ , $k = 6$ , $k_p = 59$	2,485 m	2,337 m	2,742 m	0,069 m	0,384 m	0,007 m	0,007 m	0,003 m	0,003 m	0,001 m

Table 2

$x_{0T} = 15\,000\text{ m}, y_{0T} = 5000\text{ m}, v_T = 800\text{ m/s}, w_T = -50\text{ m/s}^2$								
$t, \text{ s}$	1	2	3	4	5	5,5	6	6,2
$k_{\omega z1} = 0,2; k_w = 0,002, k = 12, k_p = 45$	0,006 m	0,008 m	0,006 m	0,006 m	0,043 m	0,596 m	0,503 m	4,114 m
$k_{\omega z1} = 0,1; k_w = 0,001, k = 6, k_p = 59$	0,0007 m	0,007 m	0,002 m	0,03 m	0,02 m	1,976 m	6,030 m	4,676 m

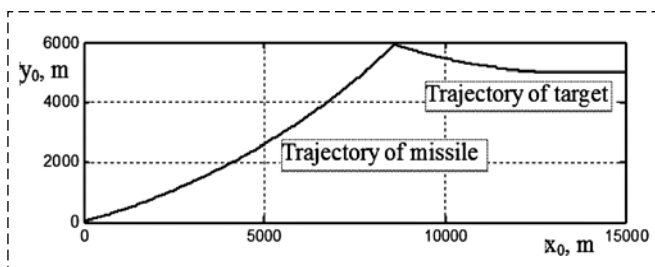


Fig. 5. Trajectories of missile and targets

fore, the guidance error increases dramatically. In contrast, if the time from the beginning of the target maneuver to the end of the homing process is greater than the transition time of the stabilization circuit of normal acceleration, the homing time is  $t = 1\text{ s}, 2\text{ s}, 3\text{ s},$  and  $4\text{ s}$ , then the accuracy of the MHS is ensured. As a results, the MHS obtained in the synthesis with a small initial condition is more accurate than the MHS obtained in the synthesis with a large initial condition.

#### Investigation of the influence of systematic error in determining inclination angular velocity of the missile trajectory on the accuracy of the missile homing system

Let us rewrite Eq. 4 as follows:

$$\sigma_g = k \left( k_p \dot{\phi} - \frac{w}{v} \right). \quad (13)$$

As can be seen in Eq. 13, to generate the guidance law, it is necessary to determine the angular velocity of the line-of-sight missiles-target, the normal acceleration of the missile, and the missile speed  $v$ . The angular velocity of the line of sight of

the missile-target is measured by GHH with sufficient accuracy. If we would like to improve its accuracy, the Kalman filter [1] can be applied. The normal acceleration of the missile is measured by a linear accelerometer. The speed of the missile could not be measured, thus we utilize the program value  $v_{\text{prog}}$ . We investigate simultaneously the influence of the systematic error of the linear accelerometer and the systematic error of determining the velocity of the missile on the accuracy of the MHS. In order to take into account the systematic error of the linear accelerometer and/or the difference between the program value and the real value of the missile speed, we propose an factor  $a$ . Then Eq. 13 is rewritten as follows:

$$\sigma_g = k \left( k_p \dot{\phi} - a \frac{w}{v} \right). \quad (14)$$

Let us rewrite Eq. 14 as follows:

$$\sigma_g = ka \left( \frac{k_p}{a} \dot{\phi} - \frac{w}{v} \right). \quad (15)$$

It can be seen that Eq. 15 and Eq. 13 has the same form, however the difference between them is that, there are new coefficient ( $ka$ ) and a new proportional coefficient ( $k_p/a$ ) in Eq. 15. We conduct experiments with the different values of the factor  $a$ , and the optimal parameter set is  $k_{\omega z1} = 0,2; k_w = 0,002, k = 12, k_p = 45$ . The guidance error are given in Table 3.

As a result, the guidance error does not depend much on the systematic error of the linear accelerometer and the error of the program value of missile velocity (i.e., the accuracy of determining the inclination angular velocity of the trajectory of the missile).

Table 3

$x_{0T} = 15000\text{ m}, y_{0T} = 5000\text{ m}, v_T = 800\text{ m/s}, w_T = -50\text{ m/s}^2, t = 2\text{ s}$									
$a$	0,001	0,005	0,01	0,5	0,8	1	1,1	1,2	1,5
Guidance error, m	0,005	0,002	0,007	0,002	0,0008	0,008	0,0017	0,0036	0,002

## Investigation of the influence of systematic error in determining the angular velocity of the line of sight of the target missile on the accuracy of the missile homing system

In equation 4, instead of using  $\dot{\phi}$  we utilize the measured value  $\dot{\phi}_m$ . We assume that  $\dot{\phi}_m = b\dot{\phi}$ , therefore Eq. 4 can be rewritten as follows:

$$\sigma_g = k(k_p b \dot{\phi} - \dot{\Theta}). \quad (16)$$

The form of Eq. 16 is the same as Eq. 4, however with a new proportional coefficient  $k_p b$ . We conduct experiments with the value of  $k_p = 45$ . The simulation results illustrate that, when  $k_p b$  changes in the range from 17 to 104, the accuracy of the system is ensured.

## Conclusion

In this paper, we have presented a high-precision missile homing system (MHS) using the proportional guidance method for firing at the highly maneuverable targets. Specifically, we propose a parametric optimization method for choosing a set of optimal parameters of the missile homing system for each dynamic parameter set of the missile. In addition, it is also advisable to choose a small distance between the missile and the target as an initial condition. Finally, the article also investigates the influence of systematic error in determining the speed, normal acceleration of missiles and the angular velocity of the line of sight of the missile and target on the accuracy of the missile homing system. The proposed missile homing system and the parametric optimization method are implemented in Matlab. The experimental results show that,

missile equipped with our proposed system can defeat the modern air targets with low visibility, high maneuverability and high survivability.

## Reference

1. **Pupkov K. A., Egupov N. D., Kolesnikov L. V.** etc. High-precision homing systems: calculation and design. Computational experiment, Moscow, FIZMATLIT, 2011, pp. 31–64, 291, 295 (in Russian).
2. **Arkhangelsk I. I., Afanasiev, P. P., Bolotov E. G., Golubev I. S., Matvienko A. M., Mizrahi V. Ya., Novikov V. N., Ostapenko S. N., Svetlov V. G.** Designing anti-aircraft guided missiles, Moscow, Publishing house MAI, 2001, pp. 326–344 (in Russian).
3. **Lebedev A. A., Karabanov V. A.** Dynamics of control systems of unmanned flying vehicles, Moscow, Mechanical Engineering, 1965, pp. 76–152, pp. 410–442 (in Russian).
4. **Lebedev A. A., Chernobrovkin L. S.** flight Dynamics of unmanned flying vehicles, Moscow, Mechanical Engineering, 1962, pp. 11–84, 394–479 (in Russian).
5. **Krynetskii E. I.** Homing System, Moscow, Mechanical Engineering, 1970, pp. 62–75, 134–142 (in Russian).
6. **Demidov V. P., Kutjev N. Sh.** Control of anti-aircraft missiles, Moscow, Military Publishing House, 1989, pp. 23–31 (in Russian).
7. **Neupokoev F. C.** Shooting anti-aircraft missiles, Moscow, Military Publishing House, 1991, pp. 91–116 (in Russian).
8. **Timofeev N. N., Shestun A. N.** Design of non-stationary dynamic control systems of aircraft, St. Petersburg, BSTU, 2001, pp. 9–43 (in Russian).
9. **Konashenkov A. I., Merkulov V. I.** Aviation radio control system. Vol. 2: Electronic homing systems, Moscow, Radio Engineering, 2003, pp. 23–30 (in Russian).
10. **Zarchan P.** Tactical and Strategic Missile Guidance, third edition. Vol. 157. Progress in Astronautics and Aeronautics, published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1801 Alexander Bell Drive, Reston, VA 20191–4344, sixth edition, p. 14.
11. **Siouris G. M.** Missile Guidance and Control Systems, Springer-Verlag New York, Inc. 2004, pp. 166, pp. 194–196.
12. **Yanushevsky R.** Modern missile guidance, Taylor & Francis Group, LLC CRC Press is an imprint of Taylor & Francis Group, an Informa business, 2008, pp. 10, 18.
13. **Do Quang Thong.** Synthesis of the missile homing system taking into account the dynamic characteristic of the measuring elements, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 4, pp. 251–255 (in Russian).



А. И. Заведеев, канд. техн. наук, доц., ark.zavedeev@gmail.com,  
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

## Повышение надежности системы управления космическим аппаратом на основе грубых моделей диагностики и принципа разделения в пространстве паритетов

Обсуждаются различные направления построения высоконадежной интегрированной системы управления космическим аппаратом на основе грубых моделей диагностики и принципа разделения возмущений в пространстве паритетов. Рассмотрены проблемы синтеза алгоритмов управления космическим аппаратом при неполной априорной и искаженной текущей информации, действии неконтролируемых и случайных факторов, потерях информации и отказах аппаратуры. Синтезирована структура бортовой системы управления ориентацией космического аппарата и выбраны алгоритмы управления, гарантирующие робастную устойчивость и отказоустойчивость при наличии возмущающих факторов и повреждений. Описываются приборный состав и режимы функционирования системы управления ориентацией. Приводятся методы исследования динамики, компьютерные технологии, особенности моделирования. Разработаны алгоритмы диагностики и реконфигурации бортового комплекса для связных, навигационных, геодезических спутников, спутников дистанционного зондирования Земли в режиме длительной эксплуатации в условиях космического полета. Процедура контроля включает два этапа: обнаружение и устранение повреждений. Заданная математическая модель системы исследуется в пространстве паритетов через разностные сигналы, которые возникают при появлении повреждений. По разностным сигналам с помощью решающих правил устанавливается характер отказа и принимаются меры по его устранению. Обсуждаются вопросы повышения отказоустойчивости бортовой системы управления космическим аппаратом на основе принципа реконфигурации с применением адаптивной логики в алгоритмах контроля и диагностики. Применение адаптации обеспечивает гибкую логику управления системой в условиях изменяющейся обстановки. Особое внимание уделено проблеме влияния подвижности жидкого топлива реактивных двигателей на динамические характеристики и точность бортовой системы управления ориентацией космического аппарата. Эффективность предложенных способов управления и алгоритмов подтверждена результатами математического моделирования для ряда конкретных технических систем. Даны рекомендации по их практическому применению.

**Ключевые слова:** космический аппарат, система управления ориентацией, контроль, диагностика, отказоустойчивость, избыточность, разностный сигнал, паритет, алгоритм

### Введение

Системы управления современными аэрокосмическими объектами в процессе эксплуатации подвержены воздействию таких факторов, как изменения условий функционирования, аномальные явления, приводящие к нештатным ситуациям, снижению основных динамических характеристик, а в отдельных случаях и к полной потере работоспособности системы. Причинами таких ситуаций могут являться нежесткость конструкции, перемещения подвижных элементов, столкновения с инородными телами, повреждения в системе управления ориентацией (СУО). Последние связаны с проблемами, возникающими в результате потерь при передаче измерительной информации, нелинейностей в приводах гиросиловых исполнительных органов, временного запаздывания при измерении углового положения объекта и формировании управляющих моментов. При разработке системы управления сложными техническими объектами повышенной отказоустойчивости для

поддержания динамических характеристик на допустимом уровне крайне важно, чтобы эти изменения немедленно фиксировались и диагностировались для принятия адекватных корректирующих действий в целях реконфигурации системы и ее адаптации к этим изменениям. Решению проблемы создания отказоустойчивых бортовых систем управления аэрокосмическими летательными аппаратами посвящены исследования, проводимые на кафедре "Системы автоматического и интеллектуального управления" МАИ [1].

### Постановка задачи

Разработка интегрированной системы управления современными и перспективными аэрокосмическими летательными аппаратами требует применения специальных средств для обеспечения их живучести в процессе эксплуатации.

Контроль, осуществляемый для обнаружения неисправностей, называют диагностикой отказов системы. Очевидно, надежность диа-

гностической системы должна превосходить надежность тестируемой системы. Система контроля должна решать две задачи: обнаружение неисправности и её исключение. Первая задача решается на основе принципа идентификации характеристик и сводится к принятию альтернативного решения о состоянии системы. Для решения второй задачи необходимо установить источник неисправности, найти поврежденный элемент и принять решение о способе реконфигурации системы. Диагностика осуществляется на основе математической модели контролируемой системы с применением принципа аналитического резервирования.

В настоящее время за рубежом уделяют большое внимание проблеме повышения отказоустойчивости аэрокосмических летательных аппаратов методами компьютерной диагностики на основе принципов функционального резервирования, аналитической избыточности и адаптивной реконфигурации [2—15].

В последнее время внимание исследователей привлекают грубые методы диагностики [2, 8, 9], которые позволяют выявлять неисправности системы на ранней стадии до того, когда они перерастут в "катастрофические" и потребуют оперативного вмешательства. Здесь уместно выделить методы адаптации [12, 13] и реконфигурации [4, 6, 10, 14, 15].

При использовании математических моделей можно выделить три группы методов, основанные на применении:

- пространства параметров (параметрическое оценивание, идентификация);
- пространства сигналов (анализ физических сигналов, предельный контроль);
- пространства соответствий или паритетов (формирование разностных векторов).

Наиболее разработанными являются методы первой группы, связанные с процедурой идентификации параметров системы [7]. Методы второй группы связаны с анализом физических сигналов и достаточно просты в реализации, однако процедура предельного контроля существенно зависит от действующих условий функционирования. Методы третьей группы позволяют преодолеть это ограничение благодаря генерированию вспомогательных разностных векторов, компоненты которых указывают на конкретные неисправности, инициируются в идеальном случае только ими и позволяют определить повреждение через фиксированное пороговое значение. Задача

диагностики здесь заключается в формировании пространства (вектора) соответствий согласно принятому алгоритму и анализу его элементов.

Разностные сигналы формируются на основе динамических уравнений, как правило, по сигналам с выхода датчиков и входа силовых приводов. В результате анализа разностных сигналов с помощью решающих функций и решающих правил устанавливается характер повреждения. По совокупности отличных от нуля разностных сигналов в соответствии с принятым алгоритмом принимается решение о характере сбоя и способе исключения повреждения.

### Формирование вектора паритетов

Главной проблемой на пути повышения надежности процесса диагностики является оценка грубости математической модели системы относительно ошибок моделирования, неопределенностей и повреждений. Влияние каждого из этих факторов оценивается через разностные сигналы, однако определить их воздействие в отдельности затруднительно. Возникает задача создания системы диагностики, обеспечивающей повышенную чувствительность к отказам и грубость относительно остальных факторов.

Рассмотрим модель контролируемой системы, в которой возмущающие факторы разделим на структурируемые неопределенности и сбой:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}_1\mathbf{d}(k) + \mathbf{R}_1\mathbf{f}(k); \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) + \mathbf{E}_2\mathbf{d}(k) + \mathbf{R}_2\mathbf{f}(k), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}(k) \in R^n$  — вектор состояния;  $\mathbf{y}(k) \in R^m$  — выходной вектор;  $\mathbf{u}(k) \in R^r$  — входной вектор (управление);  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  — известные матрицы соответствующих размерностей;  $\mathbf{d}(k) \in R^p$  — вектор неизвестных возмущений;  $\mathbf{f}(k) \in R^q$  — вектор повреждений с элементами  $f_i(k)$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ).

Характеристики неисправностей в системе (1) представляют собой неизвестные функции времени. Уравнение системы "вход—выход" в форме  $z$ -преобразования описывается выражением

$$\mathbf{y}(z) = \mathbf{G}_u(z)\mathbf{u}(z) + \mathbf{G}_d(z)\mathbf{d}(z) + \mathbf{G}_f(z)\mathbf{f}(z), \quad (2)$$

где  $\mathbf{G}_u(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ ;  $\mathbf{G}_d(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ ;  $\mathbf{G}_f(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ ;

$\mathbf{I}$  — единичная матрица соответствующей размерности. В отдельных случаях матрица  $\mathbf{E}_2$  может быть нулевой.

В общем случае формирователь разностей можно описать выражением

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{H}_u(z)\mathbf{u}(z) + \mathbf{H}_y(z)\mathbf{y}(z), \quad (3)$$

где  $\mathbf{H}_u(z)$ ,  $\mathbf{H}_y(z)$  — матрицы передаточных функций, реализуемые в линейных устойчивых системах.

Подставив  $\mathbf{y}(z)$  из соотношения (2) в (3) при  $\mathbf{E}_2 = 0$ , получим

$$\mathbf{r}(z) = \mathbf{H}_y(z)\mathbf{G}_f(z)\mathbf{f}(z) + \mathbf{H}_y(z)\mathbf{G}_d(z). \quad (4)$$

Если второе слагаемое в выражении (4) равно нулю, то возмущения в разностях разделяются и последние можно считать независимыми. Если это условие не выполняется, то оптимальное решение ищется из условия максимизации отказоустойчивости контролируемой системы в заданном диапазоне частот. В общем случае неопределенность является неструктурируемой и задача грубости значительно усложняется. При этом выходной и разностный сигналы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(z) &= \{\mathbf{G}_u(z) + \Delta\mathbf{G}_u(z)\}\mathbf{u}(z) + \{\mathbf{G}_f(z) + \Delta\mathbf{G}_f(z)\}\mathbf{f}(z); \\ \mathbf{r}(z) &= \mathbf{H}_y(z)\{\mathbf{G}_f(z) + \Delta\mathbf{G}_f(z)\}\mathbf{f}(z) + \mathbf{H}_y(z)\Delta\mathbf{G}_u(z)\mathbf{u}(z). \end{aligned}$$

В этом случае очень трудно обеспечить грубость при формировании разностных сигналов и следует обратиться к поиску способов структуризации возмущений.

### Формирование разностей с использованием принципа избыточности

Введем оператор  $\Phi$ , который из реального выходного  $\mathbf{y}$  и произвольного избыточного  $\tilde{\mathbf{y}}$  сигналов формирует разностный сигнал  $\mathbf{r}$  и при отсутствии сбоя в системе описывается выражением

$$\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = 0. \quad (5)$$

В простейшем случае оператор  $\Phi$  в формуле (5) соответствует исходной математической модели объекта при том же входном сигнале, а разностный сигнал представляет собой отклонение выходного сигнала дублированной системы относительно исходной. Заданные ха-

рактеристики разностных сигналов обеспечиваются посредством статического и динамического взвешивания.

При синтезе формирователя разностей можно воспользоваться методами пространства состояний и анализа соотношений "вход—выход" (методы наблюдателя и векторных соответствий). Здесь разностный сигнал представлен взвешенной ошибкой оценивания выходного сигнала. Можно использовать принцип контроля по группе гипотез с применением банка оценивающих устройств, настроенных на различные виды неисправностей. Применение метода векторных соответствий связано с математическими соотношениями "вход—выход" и наличием избыточной информации от измерителей.

Выражение избыточности, полученное из уравнений (1) при  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = 0$  с момента времени  $k - s$  до  $k$  при отсутствии повреждений, имеет вид

$$\begin{bmatrix} y(k-s) \\ y(k-s+1) \\ \dots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^s \end{bmatrix} \mathbf{x}(k-s) + \mathbf{H} \begin{bmatrix} u(k-s) \\ u(k-s+1) \\ \dots \\ u(k) \end{bmatrix},$$

где матрица  $\mathbf{H}$  соответствующей размерности формируется в треугольной форме из матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ , приведенных в выражении (1).

Вектор соответствий принимает вид:

$$\mathbf{r}(k) = \mathbf{V} \left\{ \begin{bmatrix} y(k-s) \\ y(k-s+1) \\ \dots \\ y(k) \end{bmatrix} - \mathbf{H} \begin{bmatrix} u(k-s) \\ u(k-s+1) \\ \dots \\ u(k) \end{bmatrix} \right\}, \quad (6)$$

где матрица  $\mathbf{V}$  в соответствии с выбором оператора  $\Phi$  должна удовлетворять требованию

$$\mathbf{V} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \dots \\ \mathbf{CA}^s \end{bmatrix} = 0.$$

Очевидно, вектор  $\mathbf{r}(k)$  в выражении (6) в случае исправной работы системы равен нулю и отличен от нуля при возникновении сбоев. Допустим,  $\mathbf{V} = [\alpha_s, \alpha_{s-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0]$  и  $\mathbf{VH} = -[\beta_s, \beta_{s-1}, \dots, \beta_1, \beta_0]$ , тогда уравнение (6) примет вид

$$\mathbf{r}(k) = \sum_{i=0}^s [\alpha_i y(k-i) + \beta_i u(k-i)]$$

или в форме  $z$ -преобразования

$$\mathbf{r}(z) = \sum_{i=0}^s [\alpha_i z^{-i} \mathbf{y}(z) + \beta_i z^{-i} \mathbf{u}(z)].$$

Из последних рекуррентных соотношений видна связь между группой сигналов  $\{\mathbf{u}(z), \mathbf{y}(z)\}$  и разностью  $\mathbf{r}(z)$ .

При использовании соотношения "вход—выход" в уравнение формирователя разностей вместо оператора  $\Phi$  вводится матрица передаточных функций  $\mathbf{G}_u(z)$ . Избыточный сигнал, связывающий выходной и разностный сигналы, является невязкой между действительным и моделируемым выходом

$$\mathbf{r}_1(z) = \mathbf{y}(z) - \mathbf{G}_u(z)\mathbf{u}(z). \quad (7)$$

Матрицу  $\mathbf{G}_u(z)$  в уравнении (7) представим в виде

$$\mathbf{G}_u(z) = \mathbf{Q}(z)/\varphi(z),$$

где  $\mathbf{Q}(z)$  — полиномиальная матрица по  $z^{-1}$ ,  $\varphi(z)$  — полином относительно  $z^{-1}$ .

Разностный сигнал запишем как

$$\mathbf{r}_2(z) = \varphi(z)\mathbf{r}_1(z) = \varphi(z)\mathbf{y}(z) - \mathbf{Q}(z)\mathbf{u}(z).$$

Из выражения (7) следует, что формирователь разностей для неустойчивой системы неустойчив. В этом случае для достижения грубых характеристик при изоляции неисправностей можно применить методику взвешивания предыдущих разностей с помощью матрицы  $\Omega(z)$  согласно выражению

$$\mathbf{r}(z) = \Omega(z)\mathbf{r}_i(z), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для обеспечения устойчивости формирователя разностей в выражении (7) можно применить принцип факторизации в форме

$$\mathbf{G}_u(z) = \mathbf{M}^{-1}(z)\mathbf{N}(z),$$

где передаточные матрицы  $\mathbf{M}(z)$ ,  $\mathbf{N}(z)$  соответствуют линейным устойчивым системам. В результате реализуемый формирователь разностей примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(z) &= \Omega(z)\mathbf{r}_3(z) = \Omega(z)[\mathbf{M}(z)\mathbf{r}_1(z)] = \\ &= \Omega(z)[\mathbf{M}(z)\mathbf{y}(z) - \mathbf{N}(z)\mathbf{u}(z)]. \end{aligned}$$

В результате проведенного исследования синтезирована структура и обоснованы пара-

метры дискретных алгоритмов фильтрации, управления, диагностики и реконфигурации бортового комплекса, которые обеспечивают робастную устойчивость гиросиловой СУО космического аппарата (КА) в режиме точной стабилизации объекта в орбитальной системе координат (ОСК), а также отказоустойчивость при наиболее тяжелых по последствиям повреждениях.

С учетом разгрузки силовых исполнительных гиросприборов и коррекции орбиты обеспечиваются гарантируемые минимальные ошибки по каналам в режиме точной стабилизации порядка  $5 \dots 10'$ .

### **Влияние перемещений подвижных элементов на динамику системы управления ориентацией космического аппарата**

Среди аномальных явлений и возмущающих факторов, существенно снижающих динамические характеристики СУО КА, следует выделить проблему влияния подвижности жидких компонентов в баках единой топливной системы двигательной установки ориентации (ДУО) на базе термokatалитических реактивных двигателей с широтно-импульсной модуляцией тяги.

Задача высокоточного определения углового положения КА в ОСК решается с применением прецизионного блока измерения скоростей и инерциального гироскопического блока, калибровка которого выполняется эпизодически с использованием отфильтрованных сигналов с земного и солнечного датчиков. В качестве исполнительных механизмов применяют силовые гироскопические приборы. С помощью БЦВМ реализуют алгоритмы управления, диагностирования, локализации и изоляции отказавших приборов, а также реконфигурации соответствующих контуров для решения целевых задач.

В полете на свободной поверхности жидкого топлива в баках ДУО появляются волны, которые, ударяясь о стенки бака, создают дополнительные нагрузки, влияющие на динамику углового положения КА в пространстве. Колебания на поверхности являются нелинейными и плохо поддаются аналитическому описанию.

При малой амплитуде эти колебания можно считать линейными. В данном колебательном процессе участвует не вся масса жидкости,

а лишь ее часть, примыкающая к свободной поверхности. Эти соображения положены в основу при выборе механической модели описанного явления. Колеблющаяся на поверхности жидкость представляется эквивалентным маятником с заданными массой, плечом и точкой подвеса относительно корпуса КА.

В случае нелинейных колебаний эквивалентная схема может быть представлена группой маятников, настроенных на свою гармонику, а их общее число определяется требуемой точностью.

Предлагаемая модель включает основное тело — космический аппарат и подвижный элемент — маятник, совершающий плоские угловые колебания с фиксированной точкой крепления в связанной с КА системе координат.

Процедура составления динамической модели СУО заключается в следующем. В правую часть дифференциального уравнения второго порядка, описывающего колебания эквивалентного маятника, через соответствующий коэффициент связи вводится со своим знаком управляющий момент по исследуемому каналу СУО. Затем составляется уравнение моментов для данного канала СУО с учетом реакции маятника и записывается передаточная функция (ПФ) СУО КА с эквивалентным маятником. В результате получим ПФ жесткого объекта и ПФ последовательно соединенного с ним форсирующе-инерционного эквивалентного звена второго порядка со смещенными частотами сопряжения.

Динамические свойства СУО определяют характеристиками КА по каждому каналу стабилизации как функциями абсолютной псевдочастоты в окрестности сопрягающих частот и зависят от декремента затухания. При сближении сопрягающих частот влияние колебаний жидкости снижается, однако фазовая характеристика может значительно деформироваться, и возникает потеря устойчивости.

Движение эквивалентного маятника можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\ddot{r}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{r}_i + \omega_i^2 r_i = c_{r_i} \ddot{\theta}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где  $r_i$  — угловое отклонение маятника;  $\omega_i$  — собственная частота колебаний маятника;  $\xi_i$  — декремент затухания, возрастающий с ростом амплитуды колебаний жидкости;  $c_{r_i}$  — коэффициент влияния углового движения КА на колебания маятника (знак зависит от положе-

ния точки подвеса);  $\theta$  — угловое отклонение КА в ОСК по соответствующему каналу стабилизации.

Уравнение моментов по исследуемому каналу с учетом реакции маятника (8) будет иметь вид

$$\ddot{\theta} + \omega_u^2 \theta + K \delta = \sum_i c_{\theta} \ddot{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где  $\omega_u$  — частота собственных колебаний КА;  $\delta$  — отклонение регулирующего органа исполнительного механизма, создающего управляющий момент;  $c_{\theta}$  — коэффициент влияния колебаний маятника на угловое движение КА;  $K$  — коэффициент эффективности управления.

Для случая одного бака и единственного маятника при  $\omega_u \approx 0$  на основании уравнений (8), (9) можно записать выражение ПФ СУО КА для одного канала стабилизации:

$$W_{\theta\delta}(s) = \frac{K}{s^2} \frac{(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2)}{(s^2 + 2\xi^* \omega^* s + \omega^{*2})}$$

$$\text{или} \quad W_{\theta\delta}(s) = \alpha^2 \frac{K}{s^2} \frac{(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)}{(T^{*2} s^2 + 2\xi^* T^* s + 1)}, \quad (10)$$

где  $T^* = \alpha T$ ,  $\alpha = \sqrt{1 - c_{r_i} c_{\theta}}$ .

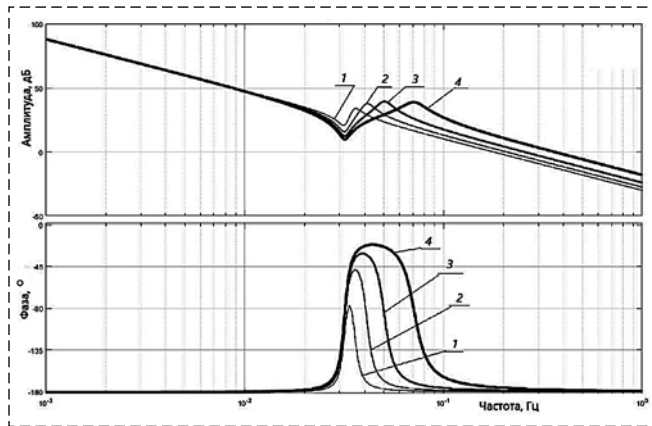
Передаточная функция (10) имеет две составляющие: ПФ КА как абсолютно твердого тела и ПФ последовательно соединенного элемента в виде инерционно-форсирующего звена второго порядка. Принятая физическая модель предполагает, что

$$0 < c_{r_i} c_{\theta} < 1,$$

поэтому частота сопряжения  $\omega^*$  и декремент затухания  $\xi^*$  инерционной составляющей больше соответственно  $\omega$  и  $\xi$  форсирующей составляющей.

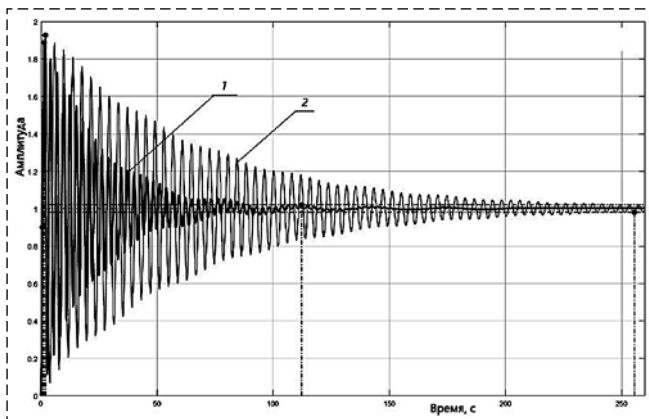
Моделирование проводили в соответствии с выражением ПФ (8) при значениях  $T = 5$  с,  $\xi = 0,01 \dots 0,10$  и различных коэффициентах влияния колебаний жидкости на корпус КА  $0 < \alpha < 1$ . Результаты моделирования фиксировались для четырех значений  $T^{*2} = 5^2, 10^2, 15^2, 20^2 c^2$ .

На рис. 1 приведены логарифмические амплитудная и фазовая частотные характеристики, из которых следует, что чем ближе расположены сопрягающие частоты  $\omega$  и  $\omega^*$  друг к другу, тем в меньшей степени проявляется влияние колебаний жидкости. Однако даже

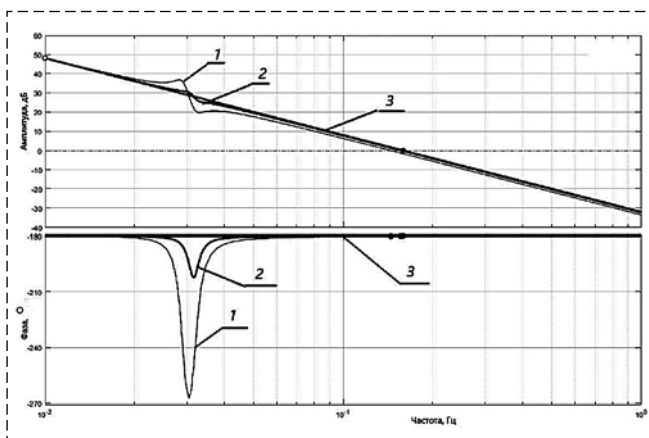


**Рис. 1. Логарифмические частотные характеристики:**  
 1 —  $T^{*2} = 20^2 c^2$ , 2 —  $T^{*2} = 15^2 c^2$ , 3 —  $T^{*2} = 10^2 c^2$ , 4 —  $T^{*2} = 5^2 c^2$

**Fig. 1. Logarithmic frequency characteristics:**  
 1 —  $T^{*2} = 20^2 c^2$ , 2 —  $T^{*2} = 15^2 c^2$ , 3 —  $T^{*2} = 10^2 c^2$ , 4 —  $T^{*2} = 5^2 c^2$



**Рис. 2. Переходные процессы для значений  $\alpha^2 = 0,2; 0,4$**   
**Fig. 2. Transitional processes for values  $\alpha^2 = 0,2; 0,4$**



**Рис. 3. Логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы на границе устойчивости:**  
 1 —  $T^{*2} = 30^2 c^2$ , 2 —  $T^{*2} = 28^2 c^2$ , 3 —  $T^{*2} = 25^2 c^2$

**Fig. 3. Logarithmic frequency characteristics for unclosed system on stability boundary:**

1 —  $T^{*2} = 30^2 c^2$ , 2 —  $T^{*2} = 28^2 c^2$ , 3 —  $T^{*2} = 25^2 c^2$

при малых значениях коэффициентов  $c_{r_i}$  и  $c_0$  фазовая частотная характеристика может приближаться к границе устойчивости и принимать значения  $\varphi < -\pi$ .

На рис. 2 представлены переходные процессы при  $\xi = 0,05$  и двух значениях  $\alpha^2 = 0,2; 0,4$ . На рис. 3 приведены частотные характеристики разомкнутой системы на границе устойчивости.

Результаты моделирования подтверждают тот факт, что колебания жидкости проявляются при смещении сопрягающих частот форсирующей и инерционной составляющих относительно друг друга и интенсивность этого явления возрастает при уменьшении декремента затухания.

Для компенсации или снижения влияния колебаний жидкости можно применить структурные или конструктивные меры. К первым следует отнести включение в контур СУО динамического звена с ПФ, обратной ПФ эквивалентного звена, а ко вторым — снабжение баков перегородками, уменьшающими скорость перетекающей жидкости и увеличивающими затухание.

## Заключение

Рассмотрены различные подходы к проблеме диагностики отказов, возникающих в интегрированной системе управления КА при длительной эксплуатации в условиях космического полета. Показано, что обнаружение и изоляция повреждений связаны, в основном, с моделью формирования разностных сигналов. Поиск рационального пути приводит к грубым методам в рамках пространства паритетов. При этом важным моментом является структуризация действующих неопределенностей. Ограничением предложенных алгоритмов является принятая модель "вход—выход" и требование полной информации о действующих сигналах. Особое внимание уделено проблеме влияния подвижности жидких компонентов в баках РД ДУО на динамические характеристики и точность СУО КА.

Предложенные алгоритмы диагностики реализованы в составе программного обеспечения бортовой системы управления КА и прошли летно-конструкторские испытания на связном КА "Экспресс-МД1". Система контроля и диагностики КА научного назначения серии "Спектр-Р" обеспечивает штатное функционирование в промежутках между сеансами связи. Полетная эксплуатация подтвердила

эффективность предложенных принципов для обеспечения требуемой точности, отказоустойчивости и экономичности СУО КА при сроках активного существования более 10 лет.

#### Список литературы

1. **Заведеев А. И.** Построение бортовой системы управления ориентацией космическим аппаратом повышенной отказоустойчивости с применением адаптивной логики в алгоритмах диагностики и контроля // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2018. Т. 19, № 10. С. 664–671.
2. **Dan Ye, Ju H. Park, Quan-Yong Fan.** Adaptive Robust Actuator Fault Compensation for Linear Systems Using a Novel Fault Estimation Mechanism // *Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2016. Vol. 26, N. 8. P. 1597–1614.
3. **Zhixing Liu, Chi Yuan, Xiang Yu, Youmin Zhang.** Fault-tolerant Formation Control of Unmanned Aerial Vehicles in the Presence of Actuator Faults and Obstacles // *Unmanned Systems*. 2016. Vol. 4, N. 3. P. 197–211.
4. **Qinxian Jia, Wen Chen, Yingchun Zhang, Huayi Li.** Integrated Design of Fault Reconstruction and Fault-tolerant Control Against Actuator Faults Using Learning observers // *International Journal of Systems Science*. 2016. Vol. 47, N. 16. P. 3749–3761.
5. **Dan Ye, Shengping Luo, Junlong Wang.** Two Step Fault-tolerant Controller Design for Linear Time-delay Systems with Adaptive Mechanism // *42-nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. IECON 2016*. P. 6812–6817.
6. **Xiang Yu, Yomin Zhang, Zhixiang Liu.** Fault-tolerant Flight Control Design with Explicit Consideration of Reconfiguration Transients // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 2016. Vol. 39, N. 3. P. 556–563.
7. **Kunfeng Lu, Yuanqing Xia, Mengyin Fu, Chunmei Yu.** Adaptive Finite-time Attitude Stabilization for Rigid Spacecraft with Actuator Faults and Saturation Constraints // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2016. Vol. 26, N. 1. P. 28–46.
8. **Afef Fekin.** Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control Design for Aerospace Systems: a Bibliographical Review // *American Control Conference*. 2014. P. 1286–1291.
9. **Chimpalthradi R Ashokkumar.** Reconfigurable Flight Control for Robust Transient Response. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part G: *Journal of Aerospace Engineering*. 2013. Vol. 227, N. 2. P. 405–411.
10. **Yuying Guo, Youmin Zhang, Bin Jiang, Zhenqwei Zhu.** Multiple-model-based Adaptive Reconfiguration Control of State Delayed Systems with Actuator Faults // *IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*. 2012. P. 397–402.
11. **Adel Belkadi, Zhixiang Liu, Laurent Ciarletta, Youmin Zhang, Didier Theilliol.** Flocking Control of a Fleet of Unmanned Ferial Vehicles // *Control Theory and Technology*. 2018. Vol. 16, N. 2. P. 82–92.
12. **Liu Zhixiang, Zhang Youmin, Yuan Chi, Luo Jun.** An Adaptive Linear Parameter Varying Fault Tolerant Control Scheme for Unmanned Surface Vehicle Steering Control // *34-th Chinese Control Conference*. 2015. P. 6197–6202.
13. **Z. X. Liu, C. Yuan, Y. M. Zhang.** Linear Parameter Varying Adaptive Control of an Unmanned Surface Vehicle // *IFAC-Papers On Line*. 2015. Vol. 48, N. 16. P. 140–145.
14. **Wei Ren, Tao Zhang, Zhen Huang, Jiemei Liang, Jian Gong, Bo Liu.** Real-time Simulation System of Satellite Attitude Reconfigurable Control Based on VxWorks. // *Proceedings of IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference*. 2014. P. 2577–2580.
15. **Daobo Wang, Xiaojun Tang, Yin Wang.** An Adaptive Control Allocation Method Based Reconfigurable Control System for Unmanned Aerial Vehicle // *Proceedings of the 33-rd Chinese Control Conference*. 2014. P. 168–173.

## Increasing of Reliability of Spacecraft Control System on Base of Robust Diagnostic Models and Division Principle in Parity Space

**A. I. Zavedeev**, ark.zavedeev@gmail.com

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russian Federation

Corresponding author: **Zavedeev Arkady I.**, Associate Professor,  
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russian Federation,  
e-mail: ark.zavedeev@gmail.com

Accepted on January 15, 2020

#### Abstract

Different directions of creation high reliability integrate spacecraft control system are discussed on base of robust diagnostic models and division principle in parity space. Problems of synthesis spacecraft control system algorithms are examined with incomplete apriory and distorted current information, action of uncontrolled and random factors, information losses and equipment failures. The structure of onboard attitude control system is synthesized and control algorithms are chosen, which guarantee robust stability and failure stability in presence indignant factors and obstacles. An instrumental structure and operational modes of spacecraft attitude control system are described. Methods of dynamic research, computer technology and modeling particularities are indicated. Diagnostic and reconfiguration algorithms for onboard complex of connection, navigation, geodesy satellites and earth inspectoral satellite in prolonged space flight utilization are proposed. Testing procedure is contains two stage: discovering and eliminating faults. Given mathematical system model is researched by means of difference signals, which forms with arise at fault emergence. The failure character is established by deciding rules on base difference signals and measures to it eliminating are took. Questions of onboard spacecraft control system failure stable improving are discussed on base principle reconfiguration with apply to adaptive logic in testing and diagnostic algorithms. The mathematical system model is researching with implementation of analytic reserving. Difference signals are formed, which arise at fault appearance. The adaptive approach to development testing and diagnostic systems provide for realization of flexible logic of control system function to take into account factual onboard equipment state. Special attention

is devote to problem influence liquid fuel reactive engine agility on spacecraft control attitude system dynamic characteristics and precision. The effectiveness of prepositional approaches and algorithms is confirmed by mathematical modeling results for several actual technical systems. Recommendations to their practical applications are given.

**Keywords:** spacecraft, control attitude system, testing, diagnostic, failure stable, excess, difference signal, parity, algorithm

For citation:

**Zavedeev A. I.** Increasing of Reliability of Spacecraft Control System on Base of Robust Diagnostic Models and Division Principle in Parity Space, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 249–256.

DOI: 10.17587/mau.21.249-256.

## References

1. **Zavedeev A. I.** Construction of highfailurestable spacecraft control system with apply to adaptive logic in diagnostic and testing algorithms *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 10, pp. 664–671 (in Russian).
2. **Dan Ye, Ju H. Park, Quan-Yong Fan.** Adaptive Robust Actuator Fault Compensation for Linear Systems Using a Novel Fault Estimation Mechanism, *Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, vol. 26, no. 8, pp. 1597–1614.
3. **Zhixing Liu, Chi Yuan, Xiang Yu, Youmin Zhang.** Fault-tolerant Formation Control of Unmanned Aerial Vehicles in the Presence of Actuator Faults and Obstacles, *Unmanned Systems*, 2016, vol. 4, no 3, pp. 197–211.
4. **Qinxian Jia, Wen Chen, Yingchun Zhang, Huayi Li.** Integrated Design of Fault Reconstruction and Fault-tolerant Control Against Actuator Faults Using Learning observers, *International Journal of Systems Science*, 2016, vol. 47, no. 16, pp. 3749–3761.
5. **Dan Ye, Shengping Luo, Junlong Wang.** Two Step Fault-tolerant Controller Design for Linear Time-delay Systems with Adaptive Mechanism, *42-nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society. IECON 2016*, pp. 6812–6817.
6. **Xiang Yu, Yomin Zhang, Zhixiang Liu.** Fault-tolerant Flight Control Design with Explicit Consideration of Reconfiguration Transients, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2016, vol. 39, no. 3, pp. 556–563.
7. **Kunfeng Lu, Yuanqing Xia, Mengyin Fu, Chunmei Yu.** Adaptive Finite-time Attitude Stabilization for Rigid Spacecraft with Actuator Faults and Saturation Constraints, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 28–46.
8. **Afef Fekin.** Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control Design for Aerospace Systems: a Bibliographical Review, *American Control Conference*, 2014, pp. 1286–1291.
9. **Chimpalthradi R Ashokkumar.** Reconfigurable Flight Control for Robust Transient Response. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part G, *Journal of Aerospace Engineering*, 2013, vol. 227, no. 2, pp. 405–411.
10. **Yuying Guo, Youmin Zhang, Bin Jiang, Zhenqwei Zhu.** Multiple-model-based Adaptive Reconfiguration Control of State Delayed Systems with Actuator Faults, *IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, 2012, pp. 397–402.
11. **Didier Theilliol.** Flocking Control of a Fleet of Unmanned Ferial Vehicles // *Control Theory and Technology*, 2018, vol. 16, no. 2, pp. 82–92.
12. **Liu Zhixiang, Zhang Youmin, Yuan Chi, Luo Jun.** An Adaptive Linear Parameter Varying Fault Tolerant Control Scheme for Unmanned Surface Vehicle Steering Control, *34-th Chinese Control Conference*, 2015, pp. 6197–6202.
13. **Z. X. Liu, C. Yuan, Y. M. Zhang.** Linear Parameter Varying Adaptive Control of an Unmanned Surface Vehicle, *IFAC-Papers On Line*, 2015, vol. 48, no. 16, pp. 140–145.
14. **Wei Ren, Tao Zhang, Zhen Huang, Jiemei Liang, Jian Gong, Bo Liu.** Real-time Simulation System of Satellite Attitude Reconfigurable Control Based on VxWorks, *Proceedings of IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conference*, 2014, pp. 2577–2580.
15. **Daobo Wang, Xiaojun Tang, Yin Wang.** An Adaptive Control Allocation Method Based Reconfigurable Cotrol System for Unmanned Aerial Vehicle, *Proceedings of the 33-rd Chinese Control Conference*, 2014, pp. 168–173.

---

---

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5510, (499) 269-5397

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *З. В. Наумова*.

Сдано в набор 27.01.2020. Подписано в печать 16.03.2020. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН420. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций  
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".  
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: [www.aov.ru](http://www.aov.ru)