

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 21

2020

№ 1

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Главный редактор:**  
ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

**Заместители главного редактора:**  
БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.  
ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.  
ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

**Ответственный секретарь:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционный совет:**  
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН  
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН  
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН  
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН  
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН  
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН  
КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН  
МИКРИН Е. А., акад. РАН  
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН  
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН  
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН  
СИГОВ А. С., акад. РАН  
СОЙФЕР В. А., акад. РАН  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН  
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН  
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН  
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН  
ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН  
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

**Редколлегия:**  
DANIELE Z., PhD, Италия  
DORANTES D. J., PhD, Турция  
GROOMPOS P. P., PhD, Греция  
ISIDORI A., PhD, Италия  
KATALINIC B., PhD, Австрия  
LIN CH.-Y., PhD, Тайвань  
MASON O. J., PhD, Ирландия  
ORTEGA R. S., PhD, Франция  
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США  
STRZELECKI R. M., PhD, Польша  
SUBUDHI B. D., PhD, Индия  
АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан  
ГАРАШЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина  
ТРОФИМЕНКО Е. Е., д.т.н., Беларусь  
БОЦОВ А. А., д.т.н.  
БУКОВ В. Н., д.т.н.  
ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.  
ЖУКОВ И. А., д.т.н.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.  
ЛОХИН В. М., д.т.н.  
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д.ф.-м.н.  
ПУТОВ В. В., д.т.н.  
ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.  
РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.  
СЕРГЕЕВ С. Ф., д.пс.н.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.  
ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.  
ФУРСОВ В. А., д.т.н.  
ЮРЕВИЧ Е. И., д.т.н.

**Редакция:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Директор издательства:**  
АНТОНОВ Б. И.

## СОДЕРЖАНИЕ

### СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

- Карабутов Н. Н.** Применение структур для оценки характеристических показателей Ляпунова систем с периодическими коэффициентами ..... 3
- Гайворонский С. А., Езангина Т. А., Хожаев И. В.** Параметрический синтез робастного регулятора на основе метода доминирующих полюсов ..... 14
- Жирабок А. Н., Зуев А. В., Бобко Е. Ю., Филатов А. Л.** Решение задачи аккомодации в нелинейных системах с использованием линейных методов ..... 21

### РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Карташев В. А., Карташев В. В.** Управление траекторией торможения манипулятора с неисправным приводом методом задержек включения тормозов ..... 28
- Лавровский Э. К., Письменная Е. В.** О походках оператора в пассивном экзоскелете нижних конечностей при использовании режима закрепленного колена ..... 34

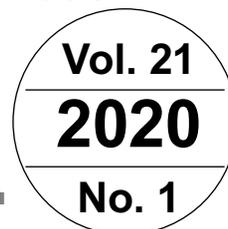
### ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

- Муслимов Т. З., Мунасыпов Р. А.** Децентрализованное групповое нелинейное управление строем беспилотных летательных аппаратов самолетного типа ..... 43
- Кабанов С. А., Зимин Б. А., Митин Ф. В.** Разработка и исследования математических моделей раскрытия подвижных частей трансформируемых космических конструкций. Часть I ..... 51

*Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

# MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



## MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Editor-in-Chief**

FILIMONOV N. B.

**Deputy Editors-in-Chief:**

BOLSHAKOV A. A.

PODURAEV Yu. V.

YUSCHENKO A. S.

**Responsible Secretary:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Editorial Board:**

ANSHAKOV G. P.

BOLOTNIK N. N.

CHENTSOV A. G.

CHERNOUSKO F. L.

FEDOROV I. B.

KALYAEV I. A.

KURZHANSKI A. B.

KUZNETSOV N. A.

MIKRIN E. A.

PESHEKHONOV V. G.

REZCHIKOV A. F.

SCHERBATYUK A. F.

SEBRYAKOV G. G.

SIGOV A. S.

SOJFER V. A.

SOLOMENTSEV Yu. M.

VASSILYEV S. N.

YUSUPOV R. M.

ZHELTOV S. Yu.

**Editorial Council:**

ALIEV T. A., Azerbaijan

DANIELE Z., PhD, Italy

DORANTES D. J., PhD, Turkey

GARASCHENKO F. G., Ukraine

GROUMPOS P. P., PhD, Greece

ISIDORI A., PhD, Italy

KATALINIC B., PhD, Austria

LIN CH.-Y., PhD, Taiwan

MASON O. J., PhD, Ireland

ORTEGA R. S., PhD, France

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA

STRZELECKI R. M., PhD, Poland

SUBUDHI B. D., PhD, India

TROFIMENKO Ye. Ye., Belarus

BOBTSOV A. A.

BUKOV V. N.

ERMOLOV I. L.

FILARETOV V. F.

FRADKOV V. L.

FURSOV V. A.

ILYASOV B. G.

KOROSTELEV V. F.

LEBEDEV G. N.

LOKHIN V.M.

PAVLOVSKY V. E.

PUTOV V. V.

PSHIKHOPOV V. Kh.

RAPOPORT E. Ya.

SERGEEV S. F.

YUREVICH E. I.

ZHUKOV I. A.

**Editorial Staff:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Director of the Publishing House:**

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

## CONTENTS

### SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

Karabutov N. N. Frameworks Application for Estimation of Lyapunov Exponents for Systems with Periodic Coefficients ..... 3

Gayvoronskiy S. A., Ezangina T. A., Khozhaev I. V. Parametric Synthesis of a Robust Controller Based on the Method of Dominant Poles ..... 14

Zhirabok A. N., Zuev A. V., Bobko E. Yu., Filatov A. L. Solution of Fault Accommodation Problem in Nonlinear Systems by Methods of Linear Algebra ..... 21

### ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

Kartashev V. A., Kartashev V. V. Emergency Braking Trajectory Control for Manipulator in the Case of Driver Failure ..... 28

Lavrovsky E. K., Pismennaya E. V. About the Operator's Gaits in the Passive Exoskeleton of the Lower Extremities when Using the Fixed Knee Mode ..... 34

### DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

Muslimov T. Z., Munasyrov R. A. Decentralized Nonlinear Group Control of Fixed-Wing UAV Formation ..... 43

Kabanov S. A., Zimin B. A., Mitin F. V. Development and Research of Mathematical Models of Deployment of Mobile Parts of Transformable Space Construction. Part I ..... 51

Information about the journal is available online at:  
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

Н. Н. Карабутов, д-р техн. наук, проф., kn22@yandex.ru,  
МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва

## Применение структур для оценки характеристических показателей Ляпунова систем с периодическими коэффициентами

*Рассмотрена задача идентификации характеристических показателей Ляпунова динамических систем с периодическими коэффициентами в условиях неопределенности. Идентификация характеристических показателей Ляпунова выполнена на основе анализа специального класса структур, описывающих динамику их изменения. Описан метод получения структур. Введено понятие адекватности полученных оценок характеристических показателей Ляпунова. Критерий адекватности основан на анализе области определения структур. Получено решение задачи определения области, которой принадлежит множество оценок характеристических показателей Ляпунова. Предложен метод оценки порядка системы. Он основан на анализе свойств почти периодических функций по Бору и предложенных структур. Рассмотрен случай, когда линеалы, соответствующие характеристическим показателям Ляпунова, могут пересекаться. Это приводит к бесконечному спектру характеристических показателей Ляпунова. Определена верхняя оценка для наименьшего показателя и граница подвижности для старшего показателя, и получено множество показателей системы. Предложен графический критерий, основанный на анализе свойств специального класса структур, для оценки адекватности оценок характеристических показателей Ляпунова. Для проверки множества полученных оценок применен метод гистограмм. Дано расширение почти периодических функций по Бору для решения рассматриваемой задачи. Получена оценка порядка системы на основе анализа структуры.*

**Ключевые слова:** структура, динамическая система с периодическими коэффициентами, характеристический показатель Ляпунова, почти периодические функции по Бору

### Введение

Характеристические показатели Ляпунова (ХПЛ) широко применяются для анализа качественного поведения динамических систем. Они позволяют оценить поведение траекторий различных объектов в физике [1], медицине [2], экономике [3], астрономии [4]. ХПЛ чаще всего определяют на основе анализа временных рядов. Предполагается, что известна априорная информация о структуре системы. В работе [5] представлен обзор вычисления наибольшего ХПЛ для различных классов систем. Алгоритм оценки ХПЛ для неизвестной динамической системы предложен в работе [6]. Он позволяет вычислить все ХПЛ и основан на применении сетей с многомерным упреждением. Базисом сети является множество монотонных сигмоидальных функций. Решение задачи сведено к подбору параметров функций, аппроксимирующих временной ряд по квадратичному критерию.

Для вычисления наибольшего ХПЛ нестационарных систем по экспериментальным данным используются различные алгоритмы.

Большинство из них основано на теореме Такенса [7]. Ф. Такенс показал, что фазовый портрет (аттрактор) системы можно реконструировать на основе одного временного ряда (экспериментальных данных). Следовательно, теорема может служить основой для вычисления различных показателей динамической системы. Для определения наибольшего ХПЛ широко применяются методы Вольфа [8], Розенштейна и Бенеттина [9] и их модификации. Многие авторы обобщают и развивают эти методы. Так, в работе [10] предложены алгоритмы вычисления наибольшего характеристического показателя Ляпунова на основе логарифмирования и интерполяции членов временного ряда, а также на основе выделения логарифма. Показано, что наилучшие результаты для стационарных систем дает применение метода Розенштейна и интерполяции. Применение интерполяции обеспечивает наилучшие результаты для нестационарных систем. Также предложена модель, имеющая форму произведения экспоненты и синусоиды с фазовым сдвигом, для компенсации нестационарной составляющей во вре-

менном ряде данных. Такой подход позволяет исключить нестационарную составляющую из временного ряда. Эта процедура не применима для идентификации ХПЛ нестационарной системы, так как она убирает слой ценной информации. Заметим, что реализация метода Розенштейна представляет собой трудоемкую процедуру, связанную с выбором и уточнением ряда параметров системы.

Существуют два основных метода оценки ляпуновских показателей по временному ряду [11]. Применение этих методов основано на анализе аттрактора, предварительно восстановленного в фазовом пространстве некоторой размерности методом Такенса. Первый метод [8] определяет две близкие траектории в восстановленном фазовом пространстве и отслеживает их поведение на некотором временном интервале (алгоритм Бенеттина). Идентификация спектра ляпуновских показателей происходит аналогично оценке по исходной системе уравнений вместе с уравнениями в вариациях. Достоинством этого метода является относительная простота, а недостатком — трудность идентификации всего спектра ляпуновских показателей, так как определяющую роль при рассмотрении двух близких траекторий играет старший ляпуновский показатель. Второй метод [12, 13] основан на использовании якобиана, так как ХПЛ можно определить как собственные числа матрицы Якоби для системы, которая сгенерировала рассматриваемую реализацию. Достоинством этого метода является возможность оценки спектра неотрицательных ляпуновских показателей по достаточно короткой реализации, а недостатком является высокая чувствительность к шумам и ошибкам, для уменьшения которой применяются различные приемы и алгоритмы.

Применение теоремы Такенса зависит от свойств имеющегося временного ряда [14]. Естественно, это влияет на эффективность критериев, применяемых для оценки упорядоченности системы (аттрактора). Этим можно объяснить сложность реализации многих методов идентификации ХПЛ.

Итак, различные модификации методов Розенштейна, Бенеттина, Вольфа и теорема Такенса широко применяются для идентификации ХПЛ стационарных систем. Свойства временного ряда, описывающего изменение переменных системы, оказывают существенное влияние на точность получаемых оценок ХПЛ. Различные

модификации, которые учитывают имеющуюся априорную информацию, используются для упрощения указанных методов. Эти подходы применяются для оценки ХПЛ нестационарных систем. Как правило, рассматриваемые методы позволяют находить старший (первый, наибольший) показатель Ляпунова. В подавляющем числе публикаций анализируются системы, в которых может возникать хаос. Нестационарные системы имеют свою специфику [15, 16]. В частности, они могут содержать спектр показателей Ляпунова. Как правило, большинство публикаций посвящено оценке старшего ХПЛ, а спектр показателей Ляпунова практически не удается идентифицировать. Поэтому требуется дальнейшая модификация рассмотренных выше подходов и методов для оценки ХПЛ. Не всегда предлагаются критерии и процедуры для проверки полученных решений.

В работах [17, 18] предложен подход к идентификации показателей Ляпунова, основанный на анализе специального класса структур. Структуры описывают динамику изменения ХПЛ стационарных динамических систем в условиях неопределенности. Они не требуют применения рассмотренных выше процедур и методов. Ниже дается обобщение метода на класс периодических систем.

### Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A(t)X + BU; \\ Y &= CX + W_U U, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $X \in R^m$  — вектор состояния;  $U \in R^k$ ,  $Y \in R^n$  — вход и выход системы;  $A(t) \in R^{m \times m}$ ,  $W_U \in R^{n \times k}$ ,  $B \in R^{m \times k}$ ,  $C \in R^{n \times m}$ .

Пусть матрица  $A(t)$  удовлетворяет следующим условиям:

А1.  $A(t)$  является непрерывной матрицей Фробениуса и ограниченной

$$\|A(t)\| \leq \alpha_A, \quad (2)$$

где  $\alpha_A > 0$ ,  $\|\cdot\|$  — норма матрицы.

А2.  $A(t)$  является почти периодической, т. е. из любой последовательности [17]

$$A_i(t) = A_i(t - \tau_i) \quad (3)$$

можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на всей оси к некоторой почти периодической матрице  $A(t)$ .

А3. Матрица  $A(t)$  является гурвицевой для почти всех  $t \geq 0$ .

Экспериментальная информация для системы (1) имеет вид

$$I_o = \{Y(t), U(t), t \in J = [t_0, t_1]\}. \quad (4)$$

Запишем решение системы (1) в виде

$$X(t) = \chi(t_0, U, t), \quad (5)$$

где  $\chi$  — оператор, однозначно определяемый матрицами  $A, B$ .

Из соотношения (5) получаем решение системы (1) при  $X_0 = X(t_0)$ :

$$X(t) = X_g(t) + X_q(t), \quad (6)$$

где  $X_q(t)$  — частное решение системы (1) с  $U \in I_o$ ;  $X_g(t)$  — общее решение системы (1) с  $U(t) = 0$  при неизвестном  $X_0 \in I_o$ .

Пусть  $X_g(X_0, t)$  — общее решение системы (1) с  $X_0 = X_0(Y_0) \in I_o$ .

**Задача:** определить оценки решения  $X_g(t) = X_g(X_0, X_0, t)$  на множестве  $I_o$  и принять решение о спектре собственных чисел и порядке системы (1).

### Оценка общего решения системы

Применим операцию  $\{X(t)\} \setminus \{X_q(t)\}$  и сформируем множество  $\{X_g(t)\}$  для оценки ХПЛ. Воспользуемся подходом, предложенным в работе [18].

Изложим метод решения задачи на примере системы (1) второго порядка с одним входом и выходом,  $W_U = 0$ . Введем обозначения:  $y = Y$ ,  $y \in R$ ,  $u = U$ ,  $u \in R$ ,  $D_y(\omega)$ ,  $D_u(\omega)$  — частотные спектры  $u, y$ ,  $|y(t)| < \infty$ ,  $|u(t)| < \infty$ . Так как матрица  $A(t)$  удовлетворяет условию А3, то  $D_y(\omega) \neq D_u(\omega)$ , т. е. система (1) является нестационарной. Система (1) является динамической, поэтому она вносит запаздывание выхода относительно входа. Предлагаемый ниже подход к построению модели исключает это запаздывание.

Представим  $I_o$  в виде

$$I_o = I_o^q(J_q) \cup I_o^g(J_g),$$

где  $J_q \cup J_g = J \subseteq R$ ;  $I_o^q, I_o^g$  — множества, содержащие информацию о  $X_q$  и  $X_g$ .

Определим оценку частного решения системы (1) на множестве  $I_o^q(J_q)$ . Так как  $x_1 = y$ ,  $y \in R$ , то применим операцию дифференцирования переменной  $y$  и получим оценку компонент  $x_2 = \dot{x}_1$  вектора  $X \in R^2$ . Обозначим  $x_2 = \dot{y}$ .

**Утверждение 1** [18]. Модель

$$\widehat{X}_q(t) = \widehat{A}_q W(t), \quad \forall t \in J_q \quad (7)$$

применима для идентификации  $X_q(t)$  на множестве  $I_o^q$ , где  $\widehat{A}_q \in R^{2 \times 2}$  — матрица параметров модели,  $W = [u \ u']^T$ .

Свойства модели (7) зависят от выбора интервала  $J_q \subset J$ . Модель (7) применима и для случая  $m > 2$ .

Найдем оценку частного решения  $\widehat{X}_q(t)$  системы на множестве  $I_o^g$ , используя модель (7). Затем получим оценку общего решения

$$\widehat{X}_g(t) = X(t) - \widehat{X}_q(t), \quad \forall t \in J_g,$$

где  $\widehat{X}_g(t) = [\widehat{y}_g(t) \ \dot{\widehat{y}}_g(t)]^T$ .

Предложенный подход обобщается на многомерный случай.

Далее рассматривается система (1) с одним входом  $u$  и выходом  $y$ . Предполагается, что система (1) является идентифицируемой. Для проверки этого условия применим подход, предложенный в работе [19].

### Характеристические показатели Ляпунова и коэффициент структурности системы

Применим ХПЛ [15] для оценки свойств системы (1). ХПЛ для действительной функции  $h(t)$  определяются как

$$\chi[h] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln|h(t)|}{t}, \quad (8)$$

где  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty}$  — верхний предел.

ХПЛ  $\chi_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) ненулевого решения стационарной системы (1) совпадают с действительными частями собственных чисел  $\lambda_i$  матрицы  $A$ .

Пусть известна оценка общего решения  $X_g(t) \forall t \in J_g$  для системы (1) и выполняется условие А3. Применим (8) к  $\widehat{y}_g(t)$ :

$$\chi[\widehat{y}_g] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\ln|\widehat{y}_g(t)|}{t}, \quad (9)$$

где  $\bar{t} \in J_g$  — верхняя граница  $t$  на интервале  $J_g \subset J$ .

Соотношение (9) определяет наибольший ХПЛ. Если предел (8) существует, то  $\chi[\widehat{y}_g]$  является оценкой максимального собственного числа матрицы  $A$ . Следовательно,  $\chi[\widehat{y}_g]$  является

показателем степени устойчивости системы (1). Если  $m = 2$ , то на основе  $\hat{y}_g$  можно получить

$$\chi[\hat{y}_g] = \lim_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\ln |\hat{y}_g|}{t}. \quad (10)$$

Иногда применяют показатель

$$\eta[h] = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |h(t)|}{t}, \quad (11)$$

где  $\lim_{t \rightarrow \infty}$  — нижний предел. Это нижний показатель Перрона [15].

Идея применения ХПЛ в задачах идентификации изложена в работе [19]. Предлагаемый подход основан на анализе коэффициента структурности (КС) [20]. Покажем связь между КС и ХПЛ.

Рассмотрим показатель

$$\rho(\hat{y}_g) = \rho_g = \ln |\hat{y}_g(t)|, \forall t \in \bar{J}_g \subset J_g, \quad (12)$$

где  $\bar{J}_g = [t_0, \bar{t}]$  определяется в соответствии с (9), и систему с входом  $t$  и выходом  $\rho(\hat{y}_g)$ . Тогда КС для оценки структурных свойств этой системы имеет вид

$$k_s(t, \rho) = \frac{\rho(\hat{y}_g(t))}{t}. \quad (13)$$

$k_s(t, \rho)$  является основной переменной для вычисления показателя  $\chi[\hat{y}_g]$  на интервале  $\bar{J}_g$ .

Итак, показана взаимосвязь между ХПЛ  $\chi[\hat{y}_g]$  и КС  $k_s(t, \rho)$  на информационном множестве  $I_\rho = \{\rho(\hat{y}_g(t)), t \in \bar{J}_g\}$ .

Рассмотрим множество

$$I_g(\hat{y}_g, t) = \{\hat{y}_g(t), t \in J_g\} = I_{\hat{X}_g} \setminus \{\hat{y}_g(t), t \in J_g\}. \quad (14)$$

Предположим, что система (1) является устойчивой, т. е.  $\text{Re}(\lambda_i(t)) \leq 0$ ,  $i = 1, m$ ,  $\forall t > 0$ , где  $\lambda_i(t) \in \sigma(A)$  —  $i$ -е собственное число матрицы состояния.

**Задача:** оценить спектр  $\sigma(A)$  характеристических показателей матрицы  $A$  системы (1) и ее порядок на основе анализа множеств  $I_\rho$ ,  $I_g$ .

Так как множество (14) формируется на основе модели (7), то получаемая оценка  $\hat{y}_g$  будет содержать ошибки  $\varepsilon$ . Поэтому функция  $\hat{y}_g(t)$  будет почти "периодической". Рассмотрим более подробно этот вопрос.

### Почти периодические функции по Бору

Рассмотрим класс почти периодических функций по Бору.

**Определение 1** [21]. Числовое множество  $\Xi = \{\xi\}$  называется относительно плотным на действительной оси  $-\infty < x < \infty$ , если существует такое число  $l > 0$ , что каждый отрезок  $a \leq x \leq a + l$  длины  $l$  содержит хотя бы один элемент нашего множества, т. е. при любом  $a$  имеем

$$[a, a + l] \cap \Xi \neq \emptyset.$$

**Определение 2** [21]. Число  $T = T_f(\delta)$  называется почти периодом функции  $f(x)$  с точностью до  $\delta$  (или  $\delta$ -почти периодом или  $\delta$ -смещением), если неравенство

$$|f(x + T_f) - f(x)| < \delta, \delta > 0 \quad (15)$$

имеет место для любого  $x \in (-\infty, \infty)$ .

**Определение 3** [21]. Функция  $f(x) \in (-\infty, \infty)$  называется почти периодической в смысле Бора ( $\mathcal{BF}$ -функцией), если относительно плотное множество почти периодов  $T_f$  функции  $f(x)$  с точностью до  $\delta$  существует, т. е. существует такое положительное число  $l = l(\delta)$ , что любой отрезок  $[a, a + l]$  содержит, по меньшей мере, одно число  $T_f$ , для которого справедливо

$$|f(x + T_f) - f(x)| < \delta \text{ при } x \in (-\infty, \infty).$$

Функция  $\hat{y}_g(t)$  принадлежит к классу экспоненциально-синусоидальных функций. Поэтому условие (15) может не выполняться. Обеспечим принадлежность  $\hat{y}_g(t)$  к  $\mathcal{BF}$ -функции. Выполним следующие действия. Рассмотрим некоторую точку  $t \in R$  и ее окрестность  $O_t$ . Определим среднее значение  $\hat{y}_g(t) \forall t \in O_t$ :

$$\alpha = \bar{y}_{g, O_t} = \frac{1}{N_t} \sum_i \hat{y}_i,$$

где  $N_t$  — число точек в  $O_t$ ,  $t_i \in O_t$  — текущее покрытие интервала  $O_t$  с шагом  $\tau$ .

Для  $t \in R$ , принадлежащих окрестности  $O_{t+T_{\hat{y}_g}}$ , получим

$$\pi = \bar{y}_{g, O_{t+T_{\hat{y}_g}}} = \frac{1}{N_{t+T_{\hat{y}_g}}} \sum_i \hat{y}_i.$$

**Определение 4.** [22] Функция  $\hat{y}_g(t) \in (0, \infty)$  называется  $\alpha\pi$ -почти периодической в смысле Бора ( $\mathcal{BF}_{\alpha\pi}$ -функцией), если для любого  $\delta > 0$  существует относительно плотное множество почти периодов  $T_f$  функции  $\hat{y}_g(t)$  с точностью до  $\delta$ , т. е. существует положительное число  $l = l(\delta)$  такое, что любой отрезок  $[a, a + l]$  со-

держит, по меньшей мере, одно число  $T_f$ , для которого выполнено неравенство

$$\left| \frac{\hat{y}_g(t + T_f)}{\pi} - \frac{\hat{y}_g(t)}{\alpha} \right| < \delta \text{ при } t \in [0, \infty).$$

### Структуры для оценки характеристических показателей Ляпунова

Изложим подход к оценке ХПЛ на основе анализа специального класса структур. Рассмотрим множества

$$I_{k_s} = \{k_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), t \in \bar{J}_g\};$$

$$I_{k'_s} = \{k'_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), t \in \bar{J}_g\}.$$

Определим на  $I_{k_s}, I_{k'_s}$  отображение  $S_{k_s, \rho} \rightarrow I_{k_s} \times I_{k'_s}$ . Структура  $S_{k_s, \rho}$  отражает динамику изменения показателей, зависящих от ХПЛ. Рассмотрим на множестве  $I_{k'_s}$  функцию

$$\Delta k'_s(t) = k'_s(t, \rho(\hat{y}_g(t + \tau))) - k'_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), \quad (16)$$

описывающую изменение первой разности КС  $k'_s(t, \rho(\hat{y}_g(t)))$ , где  $\tau > 0$ .

Сформируем множество  $I_{\Delta k'_s} = \{\Delta k'_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), t \in \bar{J}_g\}$  и рассмотрим структуру  $S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$ , определенную на  $I_{k_s, \rho} \times I_{\Delta k'_s, \rho}$ . Введем преобразование, соответствующее структуре  $S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$ :

$$\mathcal{L}S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho} \rightarrow I_{k_s, \rho} \times B(I_{\Delta k'_s, \rho}), \quad (17)$$

где  $B(I_{\Delta k'_s, \rho}) \subset \{-1; 1\}$ . Определим элементы бинарного множества  $B(I_{\Delta k'_s, \rho})$  в виде

$$b(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta k'_s(t) \geq 0, \\ -1, & \text{если } \Delta k'_s(t) < 0, \end{cases} \quad t \in \bar{J}_g.$$

*Замечание 1.* Границы верхнего предела в выражении (9) можно выбрать на основе анализа изменения  $S_{k_s, \rho}$  для некоторого класса систем.

*Замечание 2.* Выбор области значений функции  $b(t)$  определяется удобством ее графического анализа.  $b(t)$  можно задать на бинарном множестве  $\{0; 1\}$ .

Изложенный подход был предложен для класса стационарных систем. Некоторая модификация этого подхода требуется при анализе  $\alpha$ -почти периодических систем. В частности, структура  $\mathcal{L}S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$  эффективно работает для случая стационарных систем.  $\mathcal{L}S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$  является неэффективной для периодических систем, так как функция  $b(t)$  отражает все изменения в структуре  $S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$ .

### Оценка порядка системы

Результаты, излагаемые далее, относятся к системе (1) с матрицей Фробениуса,  $y \in R$ ,  $W_U = 0$ ,  $U = u$ ,  $u \in R$ . Считаем, что матрица  $A$  удовлетворяет условиям А1–А3.

Рассмотрим критерий оценки порядка системы. Он основан на модификации теоремы 1 [18] для учета специфики рассматриваемой системы.

Рассмотрим структуру  $S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$ , определенную на  $I_{k_s, \rho} \times I_{\Delta k'_s, \rho}$  и описываемую функцией  $f_{sk}(t) : k_s \rightarrow \Delta k_s$ . Функция  $f_{sk}(t)$  является  $\mathcal{BF}_{\alpha\pi}$ -функцией. Поэтому  $f_{sk}(t)$  содержит области  $\mathcal{D}_{sk}$ , которые имеют резко изменяющуюся амплитуду.

*Определение 5.* Область  $\mathcal{D}_{sk}$  функции  $f_{sk}$  называется  $\alpha\pi$ -областью на интервале  $J_{sk} = [t, t + T]$  ( $T > 0$ ) изменения  $t$ , если она соответствует изменению  $\mathcal{BF}_{\alpha\pi}$ -функции  $k_s(t)$  на этом интервале.

**Теорема 1.** Пусть система (1) удовлетворяет условиям А1–А3. Тогда система (1) имеет порядок  $m$ , если функция  $f_{sk}(t)$  на интервале  $[t_0, t^*] \subset \bar{J}_g$  ( $t^* \leq \bar{t}$ ) содержит не менее  $m$  областей  $\mathcal{D}_{sk}$ .

*Доказательство теоремы 1.* Рассмотрим случай простых действительных корней. Система (1) является устойчивой. Пусть собственные числа системы расположены в порядке убывания:  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$ .  $\lambda_i(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) является периодической функцией. Функция  $\exp(\lambda_i(t)t) \in \hat{y}_g$ , является  $\alpha\pi$ -почти периодической на некотором подинтервале  $J_{\lambda_i} \subset J$ .  $\exp(\lambda_i(t)t)$  соответствует ХПЛ  $\chi_{\lambda_i}$ , принадлежащий линеалу  $\mathcal{L}^i(t)$ , а  $\chi_{\lambda_i}$  соответствует области  $\mathcal{D}_{sk}^i$  на структуре  $S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$ . Область  $\mathcal{D}_{sk}^i$  конгруэнтна в пространстве решений системы (1) линеалу  $\mathcal{L}^{m-i}(t)$  (см. определение в работе [15]). Переход между линеалами может выполняться  $m - 1$  раз. Функция  $\rho(\hat{y}_g(t))$  зависит от  $\hat{y}_g(t)$ , поэтому каждый такой переход будет приводить к изменению свойств структуры  $S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$ . ■

*Замечание 3.* Так как собственные числа  $\lambda_i(t)$  матрицы  $A$  являются периодическими функциями времени, то линеалы  $\mathcal{L}^i(t)$  и  $\mathcal{L}^{i+1}(t)$  могут пересекаться. Этот случай может приводить к бесконечному спектру характеристических показателей Ляпунова. Эта особенность отмечена в работе [15].

*Замечание 4.* Если частотные спектры линеалов  $\mathcal{L}^i(t)$  и  $\mathcal{L}^{i+1}(t)$  пересекаются, то для системы (1), согласно замечанию 3, можно построить пирамиду [15], соответствующую ступенчатому набору линеалов

$$0 \equiv \mathcal{L}^0(t) \subset \mathcal{L}^1(t) \subset \dots \subset \mathcal{L}^n(t) \equiv \mathcal{L}^m(t)$$

с почти гладкими гранями. Такое представление влияет на спектр получаемых характеристических показателей Ляпунова.

### Структурный подход к оценке характеристических показателей Ляпунова

Изложим подход, который не требует обработки множества  $I_{k_s}$  для идентификации характеристических показателей Ляпунова. Он предложен в работе [17] и основан на анализе свойств структур, введенных в разделе "Структуры для оценки ХПЛ". Подход базируется на анализе изменения структуры  $S$ , отражающей свойства системы в специальном пространстве.

Известно [17], что ХПЛ системы влияют на характер изменения  $S$ . Рассмотрим структуры  $S_{k_s,p}$  и  $S_{k_s,p}^i$  ( $i > 1$ ) как пример структуры  $S$ .

Введем структуру  $S_{k_s,p}^i$ , которая определена на множестве  $I_{k_s} \times I_{k_s}^i$ , и структуру  $S_{\Delta k_s,p}^i$ , где  $i$  обозначает  $i$ -ю производную  $\hat{y}_g(t)$ ,

$$I_{k_s}^i = \{k_s(t, \rho(\hat{y}_g^{(i)}(t))), t \in \bar{J}_g\}. \quad (18)$$

Структура  $S_{k_s,p}^i$ , как показано в работе [17], отражает изменение ХПЛ. Характеристические показатели  $\chi_i[\hat{y}_g]$  соответствуют локальным минимумам  $S_{k_s,p}^i$ .  $\chi_m$  соответствует глобальному минимуму, а  $\chi_1$  соответствует максимуму функции, описывающей изменение  $S_{k_s,p}^i$ .

**Теорема 2** [17]. Если система (1) является устойчивой и содержит простые собственные числа, то структуры  $S_{k_s,p}^i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , содержат информацию о характеристических показателях Ляпунова.

Расположение локальных минимумов на  $S_{k_s,p}^i$  совпадает с областями  $\mathcal{D}_{sk}$  структуры  $S_{\Delta k_s,p}^i$ . Анализ  $\mathcal{D}_{sk}^i$  позволяет выделить множество  $\mathcal{M}_{LE}$ , содержащее оценки показателей системы (1). Мощност  $\mathcal{M}_{LE}$  может не совпадать с числом характеристических показателей системы.  $\mathcal{M}_{LE}$  характеризует доступное множество линеалов системы (1).

Выбор времени  $\bar{t}$  в (10) осуществляется на основе анализа изменения структуры  $S_{\Delta k_s,p}^i$ .

**Замечание 5.** Структура  $S_{\Delta k_s,p}^i$ , где  $i > 1$ , может применяться для принятия решения о ХПЛ.

Предлагаемый подход дает оценки наименьшего ХПЛ  $\eta_i[\hat{y}_g]$ . В этом состоит основное от-

личие данного подхода от процедур, предлагаемых в литературе. Если структура  $S_{\Delta k_s,p}^i$  содержит единичное резкое изменение значения, то это является признаком того, что  $S_{k_s,p}^i$  содержит оценку  $\eta_m[\cdot]$ . Так как  $|\eta_m[\cdot]| > |\chi_i[\cdot]|$ , где  $i = \overline{1, m-1}$ , то  $\eta_m[\cdot]$  обозначим через  $\kappa_m$  и будем называть верхней оценкой наименьшего ХПЛ. Объясняется это тем, что соответствующий линеал  $\mathcal{L}^m(t)$  имеет минимальную область определения. Функция  $\hat{y}_g(t)$  на  $\mathcal{L}^m(t)$  не является  $\alpha$ -почти периодической, так как ее параметры  $\alpha$ ,  $\pi$  быстро убывают на  $\mathcal{L}^m(t)$ . Следовательно, условие (15) не выполняется. Поэтому линеал  $\mathcal{L}^m(t)$  содержит только одно значение, которое соответствует  $\kappa_m$ . Итак, справедливо следующее утверждение:

**Утверждение 2.** Пусть система (1) удовлетворяет условиям А1—А3 и структура  $S_{\Delta k_s,p}^i$  содержит точку М, в которой резко изменяется значение функции, описывающей изменение  $S_{\Delta k_s,p}^i$ . Тогда глобальный минимум соответствует точке М на структуре  $S_{k_s,p}^i$ , и значение глобального минимума является верхней оценкой  $\kappa_m$  наименьшего  $\eta_i[\hat{y}_g]$ .

**Замечание 6.** Так как решение принимается на основе нескольких структур  $S_{k_s,p}^i$  ( $i \geq 1$ ), то выберем верхнюю границу из  $\kappa_{m,i}$  и обозначим ее  $\kappa_m$ .

Множество  $\mathcal{M}_{LE}$  оценок спектра ХПЛ формируется на основе анализа минимумов  $S_{k_s,p}^i$  и замечания 5.

Рассмотрим задачу определения области, которой принадлежит множество  $\mathcal{M}_{LE}$ . Связано это с тем, что мощност множества  $\mathcal{M}_{LE}$  может быть большой (см. замечание 3). Определим допустимую область для  $\mathcal{M}_{LE}$  и число, определяющее подвижност старшего показателя Ляпунова. Эта область ограничена показателем  $\kappa_m$  снизу. При выборе данных параметров можно ограничиться временным диапазоном  $[0, \bar{t}]$ , где  $\bar{t}$  выбирается согласно (9). Осуществим выбор области изменения  $\chi_1$  на основе анализа структуры  $S_{\Delta k_s,p}^i$ . Область  $\mathcal{D}_{sk}^1 \subset S_{\Delta k_s,p}^i$  является индикатором наличия  $\chi_1$ . Фрагмент  $\mathcal{V}_{k_s,p}^1$  на структуре  $S_{k_s,p}^i$ , который изменяется на интервале  $J_{k_s,p}^1$ , соответствует области  $\mathcal{D}_{sk}^1$ . Следовательно,  $\chi_1 \in J_{k_s,p}^1$ . Тогда допустимая граница подвижности старшего показателя  $\chi_1$  определяется в виде

$$\chi_1 \leq \sup J_{k_s,p}^1. \quad (19)$$

Неравенство (19) дает допустимую границу (границу подвижности [15]) изменения  $\chi_1$  в условиях неопределенности. Области подвижности для  $\chi_i, i > 1$ , определяются аналогично.

Рассмотрим критерии для оценки элементов множества  $M_{LE}$  и (19). Понятие адекватности, принятое в теории параметрической идентификации, в данном случае неприменимо. Как следует из раздела "Введение", подавляющее большинство публикаций посвящено вычислению показателей Ляпунова. Вопросы проверки качества полученных оценок не рассматривались. Такие теоретические показатели, как прочность, достижимость не поддаются проверке в условиях неопределенности. Поэтому далее предлагается метод для проверки так называемой  $\chi$ -адекватности полученных оценок ХПЛ. Он основан на анализе структур, рассмотренных выше, и учете свободного движения системы.

Рассмотрим структуру  $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ , описываемую функцией  $f_{\hat{y}_g, \hat{y}_g} : \hat{y}_g \rightarrow \hat{y}_g$  в пространстве  $\mathcal{R}_y = (\hat{y}_g, \hat{y}_g)$ . Так как система (1) удовлетворяет условиям А1—А3, то  $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$  содержит области, которые отражают  $\alpha\pi$ -почти периодическое поведение системы. Рассмотрим структуры  $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$  и  $SL_{k_{s,p}^i}$ , которые описываются функциями

$$f_{SL_{k_{s,p}^i}} : \hat{y} \rightarrow k_{s,p}^i, \quad f_{SL_{\Delta k_{s,p}^i}} : \hat{y} \rightarrow \Delta k_{s,p}^i. \quad (20)$$

**Определение 6.** Оценки характеристических показателей Ляпунова  $\chi_i$  являются  $\chi$ -адекватными в пространстве  $\mathcal{R}$ , если области их определения совпадают с областями  $\alpha\pi$ -почти периодичности структуры  $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ .

Рассмотрим фрагменты  $\mathcal{D}_{sl}^j \subset SL_{\Delta k_{s,p}^i}$  ( $j \geq 1$ ) по аналогии с  $\mathcal{D}_{sk} \subset SK_{\Delta k_{s,p}^i}$  в пространстве  $\mathcal{R}_y$ . Обозначим области определения  $\mathcal{D}_{sl}^j$  через  $\text{dom } \mathcal{D}_{sl}^j$ .

**Теорема 3.** Если области определения фрагментов  $\mathcal{D}_{sl}^j$  структуры  $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$  совпадают с областями  $\alpha\pi$ -почти периодичности структуры  $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ , то оценки  $\chi_i$  являются  $\chi$ -адекватными областям  $\alpha\pi$ -почти периодичности  $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ .

**Доказательство теоремы 3.** Функция  $f_{sk}(t)$  содержит не менее  $m$  областей  $\mathcal{D}_{sk}^j$  согласно теореме 1. Структуры  $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$  и  $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$  имеют одинаковую область значений. Данное утверждение справедливо и для  $\mathcal{D}_{sk}^j, \mathcal{D}_{sl}^j$ , которые определяют изменение ХПЛ. Конгруэнтность областей значений  $\mathcal{D}_{sk}^j, \mathcal{D}_{sl}^j$  следует из равенства областей значений  $\mathcal{D}_{sk}^j, \mathcal{D}_{sl}^j$ . Если область

определения фрагмента  $\mathcal{D}_{sl}^j$  структуры  $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$  и область  $\alpha\pi$ -почти периодичности  $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$  совпадают, то при существовании зависимости между функциями  $f_{SL_{k_{s,p}^i}}$  и  $f_{SL_{\Delta k_{s,p}^i}}$  получаем, что некоторая совокупность элементов множества  $M_{LE}$  покрывает соответствующую  $\alpha\pi$ -почти периодическую область  $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ . Следовательно, оценки  $\chi_i$  являются  $\chi$ -адекватными в пространстве  $\mathcal{R}_y$ . ■

В работах [17, 18] предложен метод гистограмм для проверки полученных оценок характеристических показателей (типа корней) стационарных систем. Ниже даются примеры его применения.

## Примеры

Пусть выполняются требования к системе (1), изложенные в разделе "Постановка задачи", и известно множество (4).

1. Рассмотрим систему, фазовый портрет которой показан на рис. 1. Вход  $u(t) = 5 + 2\sin(0,2\pi t)$ . Рис. 1 показывает, что в системе присутствуют колебания.

Применим модель (7) для выделения общего решения из  $y(t)$  на временном интервале [5; 40] с. Модель (7) имеет вид  $\hat{y}_q(t) = \hat{A}_q [1 \ u(t) \ \dot{u}(t)]^T$ , где  $\hat{A}_q = [0,302; 0,189; -0,203]^T$ . Коэффициент детерминации равен 0,95. Далее получена оценка для  $\hat{y}_g(t) = y(t) - \hat{y}_q(t)$ . Оценка для  $\dot{y}_g(t)$  определяется аналогично, а модель (7) имеет вид

$$\hat{y}_q(t) = [-0,17; -0,89; 0,27][1 \ u(t) \ \dot{u}(t)]^T. \quad (21)$$

Коэффициент детерминации модели (21) равен 0,99. Построим портрет системы в пространстве  $\mathcal{R}_y$ , чтобы убедиться, что система (1) принадлежит к классу систем с периодическими коэффициентами. Он показан на рис. 2.

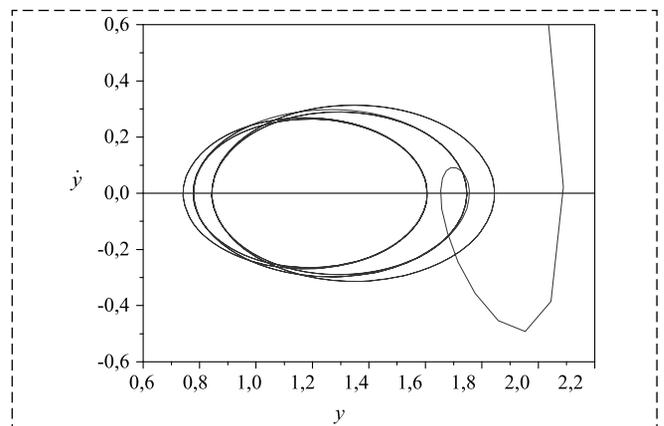


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1)  
Fig. 1. Phase portrait of the system (1)

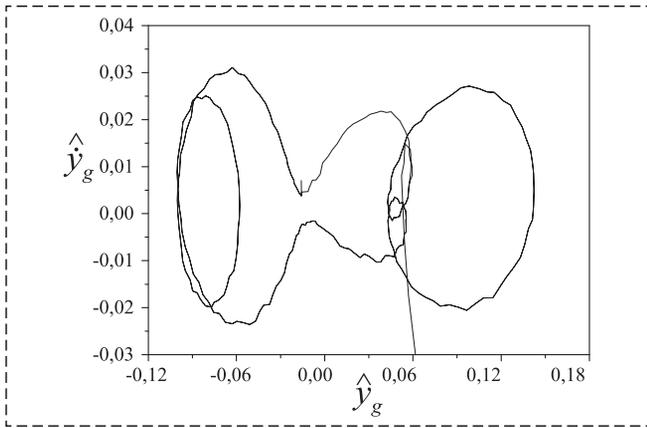


Рис. 2. Фазовый портрет системы в пространстве  $\mathcal{R}_y$   
Fig. 2. Phase portrait of system (1) in space  $\mathcal{R}_y$

Результаты идентификации ХПЛ показаны на рис. 3–6. Изменение структур  $S\mathcal{K}_{\Delta k'_{s,\rho}}$  и  $S_{k'_{s,\rho}}^1$  представлено на рис. 3, где  $\Delta k'_s$  имеет вид (16),  $k_s$  описывается выражением (13), а

$$k_s^1(t, \rho) = \frac{\rho(\hat{y}_g(t))}{t}. \quad (22)$$

Множество ХПЛ  $\mathcal{M}_{LE} = \{-1,8; [-1,21; -0,88]\}$  определяем на основе анализа  $S\mathcal{K}_{\Delta k'_{s,\rho}}$ . Применяв теорему 1, получим, что порядок системы равен 2. Верхняя оценка для наименьшего ХПЛ равна  $\kappa_m = -1,8$ .

Допустимая граница подвижности старшего показателя  $\chi_1$  равна  $-0,8$ . Еще одно множество ХПЛ имеем на интервале  $k_s \in [-0,2; -0,13]$ , что подтверждает вывод, сделанный в замечании 3.

На рис. 4, 5 показаны результаты оценки  $\chi$ -адекватности множества ХПЛ. Оценки  $\chi$ -адекватности в пространствах  $\mathcal{R}_y$  и  $\mathcal{R}_{\Delta} = (\hat{y}_g, \Delta k'_{s,\rho})$  на временном интервале [3; 55]с представлены на рис. 4.

Области  $\mathcal{D}_{sk}^i$  функции  $f_{sk}$  совпадают с областями  $\alpha$ -почти периодичности структуры  $S_{k'_{s,\rho}}^1$ , что подтверждает  $\chi$ -адекватность оценок ХПЛ.

Рис. 5 представляет результаты  $\chi$ -адекватности оценок ХПЛ в пространствах  $\mathcal{R}_y$  и  $\mathcal{R}_{k^1} = (\hat{y}_g, k_{s,\rho}^1)$ . Они коррелируют с результатами, представленными на рис. 4. Структуры отражают состояние системы идентификации ХПЛ, начиная с  $t \geq 3$  с.

Метод гистограмм [17, 18] подтверждает полученные оценки  $\chi_i$ . Гистограмма дает спектр показателей Ляпунова. Пример распределения ХПЛ на основе анализа параметра (22) показан на рис. 6, где  $n$  — число попаданий  $\chi_i$  в заданный интервал.

Вернемся к исходной системе (1). Система второго порядка (1) имеет следующие параметры:

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) \end{bmatrix};$$

$$a_1(t) = -3 + 0,2 \sin(0,02\pi t);$$

$$a_2(t) = -4 + 0,3 \sin(0,04\pi t).$$

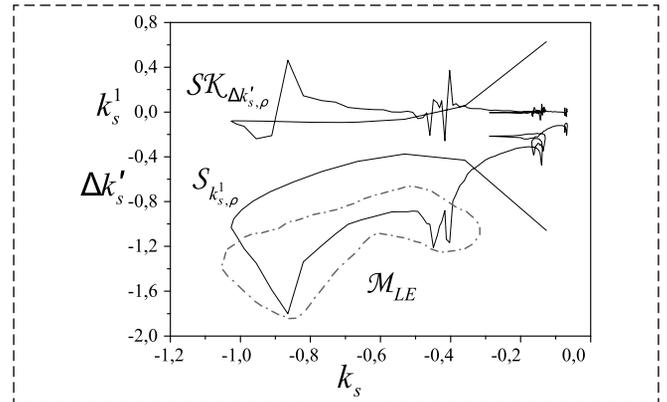


Рис. 3. Множество ХПЛ  
Fig. 3. Set of Lyapunov exponents

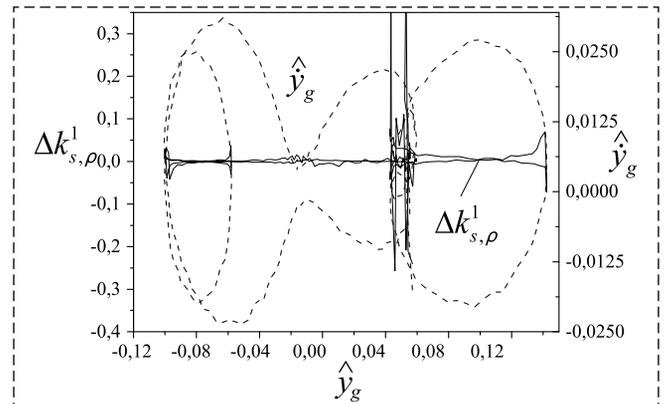


Рис. 4. Результаты оценки  $\chi$ -адекватности в пространствах  $\mathcal{R}_y$  и  $\mathcal{R}_{\Delta}$   
Fig. 4. Estimation results of  $\chi$ -adequacy in spaces  $\mathcal{R}_y$  and  $\mathcal{R}_{\Delta}$

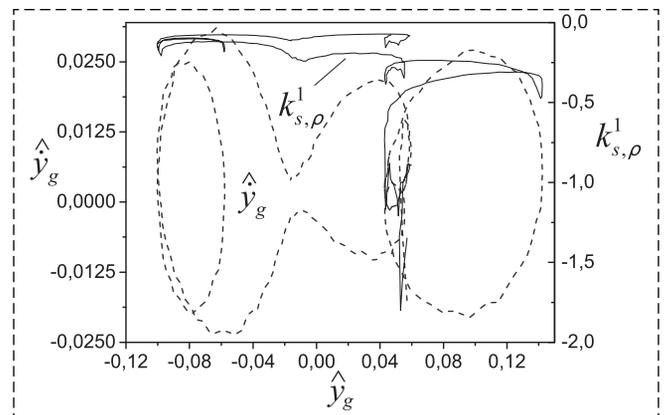


Рис. 5. Результаты оценки  $\chi$ -адекватности в пространствах  $\mathcal{R}_y$  и  $\mathcal{R}_{k^1}$   
Fig. 5. Estimation results of  $\chi$ -adequacy in spaces  $\mathcal{R}_y$  and  $\mathcal{R}_{k^1}$

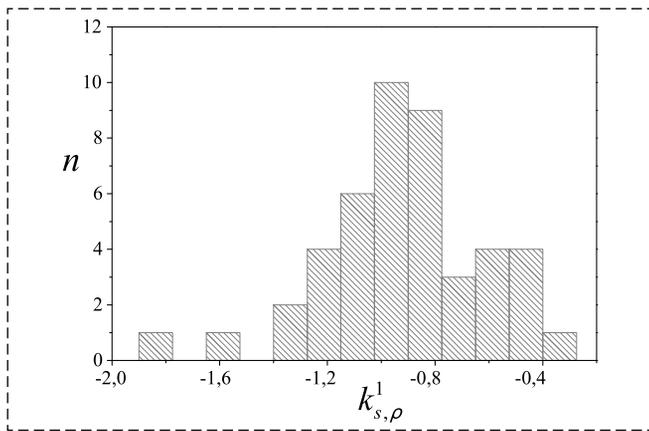


Рис. 6. Распределение показателей Ляпунова  
Fig. 6. Distribution of Lyapunov exponents

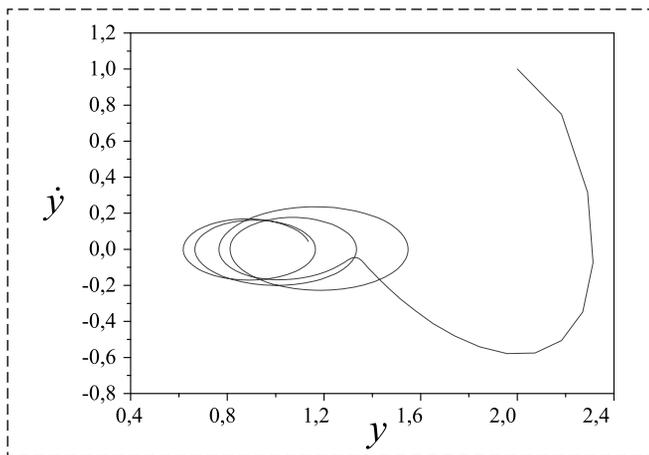


Рис. 7. Фазовый портрет системы  
Fig. 7. Phase portrait of the system

Собственные числа матрицы  $A$  изменяются в диапазонах:  $\lambda_1(t) \in [-1,325; -0,819]$ ,  $\lambda_2(t) \in [-2,37; -3,48]$ . Результаты моделирования показывают, что предлагаемый подход позволяет получить оценки ХПЛ.

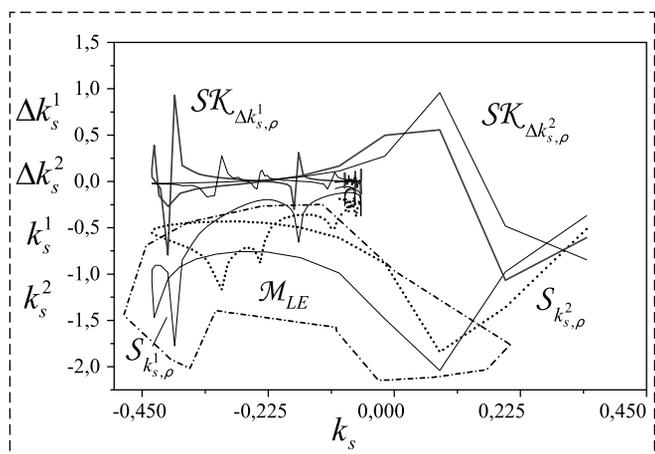


Рис. 8. Множество ХПЛ  
Fig. 8. Set of Lyapunov exponents

2. Рассмотрим систему, фазовый портрет которой показан на рис. 7. Известно информационное множество (4) для системы. Вход  $u(t) = 5 + 2\sin(0,2\pi t)$ . Из рис. 7 следует, что в системе присутствуют колебания. Вход имеет только одну частоту. Поэтому наличие в структуре колебаний с другими частотами говорит о том, что система может относиться к классу периодических систем.

Применим для идентификации ХПЛ подход, изложенный в первой части этого раздела. Построим модель (7) для получения общего решения для  $y, \dot{y}$ . Выполним операцию численного дифференцирования для вычисления  $\dot{y}$ . Модели (7) имеют вид

$$\hat{y}_q(t) = [0,75; 0,07; -0,22][1 u(t) \dot{u}(t)]^T;$$

$$\hat{\dot{y}}_q(t) = [-0,394; -0,059; 0,078][1 u(t) \dot{u}(t)]^T.$$

Коэффициенты детерминации для этих моделей равны 0,99. Далее находим оценки свободного движения системы.

Рассмотрим структуры  $SK_{\Delta k_{s,\rho}^1}$ ,  $S_{k_{s,\rho}^1}$ , представленные на рис. 8, и на основе их анализа оценим порядок системы. Результаты анализа показывают, что система имеет третий порядок. Получено множество показателей Ляпунова  $M_{LE} = \{-2,04; -1,842; -1,77; -1,167; -0,878\}$  на основе анализа  $SK_{\Delta k_{s,\rho}^1}$  и  $SK_{\Delta k_{s,\rho}^2}$ . Верхняя оценка для наименьшего ХПЛ равна  $\kappa_m = -2,04$ . Допустимая граница подвижности старшего показателя  $\chi_1$  равна  $-0,8$ .

Результаты проверки  $\chi$ -адекватности ХПЛ представлены на рис. 9, 10. Из рисунков следу-

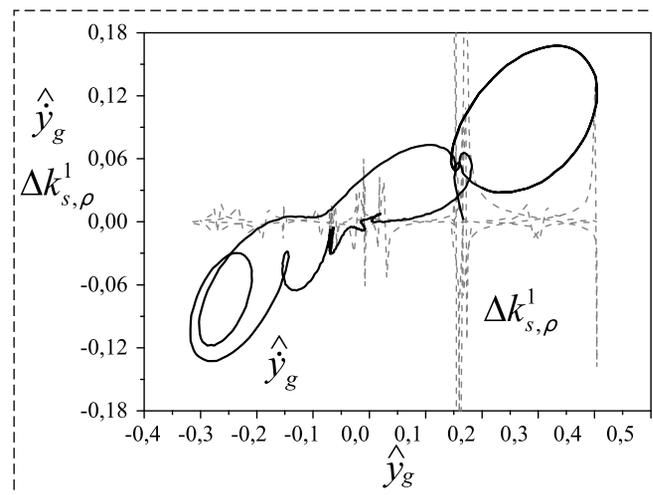


Рис. 9. Результаты оценки  $\chi$ -адекватности в пространствах  $\mathcal{R}_y$  и  $\mathcal{R}_\Delta$   
Fig. 9. Estimation results of  $\chi$ -adequacy in spaces  $\mathcal{R}_y$  and  $\mathcal{R}_\Delta$

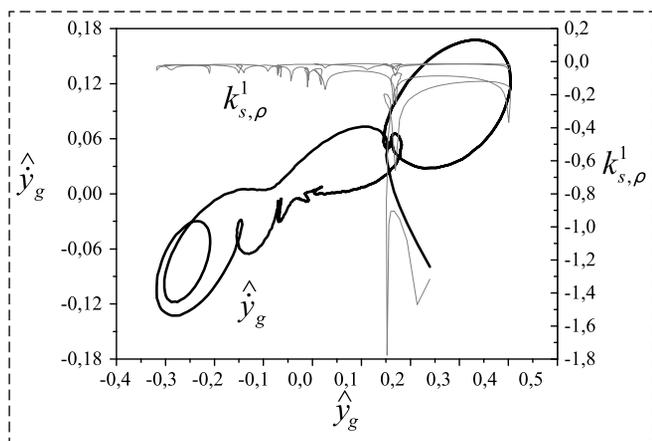


Рис. 10. Результаты оценки  $\chi$ -адекватности в пространствах  $\mathcal{R}_y$  и  $\mathcal{R}_{k^1}$

Fig. 10. Estimation results of  $\chi$ -adequacy in spaces  $\mathcal{R}_y$  and  $\mathcal{R}_{k^1}$

ет, что ХПЛ-оценки являются  $\chi$ -адекватными. Рис. 10 представляет распределение показателей Ляпунова. Оно совпадает с полученным множеством  $\mathcal{M}_{LE}$ . Форма структуры  $\mathcal{S}_{\hat{y}, \hat{y}}$  (см. рис. 8, 9) определяется параметрами системы (1).

Исходная система имеет следующие собственные числа матрицы состояния:

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) &= -1 + 0,2\sin(0,02\pi t); \\ \lambda_2(t) &= -2 + 0,3\sin(0,04\pi t); \\ \lambda_3(t) &= -3 + 0,2\sin(0,06\pi t).\end{aligned}$$

### Заключение

Предложен подход к оценке ХПЛ, принятый в задачах нелинейной динамики. Он отличается от большинства существующих подходов, основанных на анализе временного ряда и теореме Такенса. Решение задачи базируется на формировании массива, содержащего информацию об общем решении системы. Строится виртуальная геометрическая структура, анализ которой позволяет сделать заключение о свойствах системы. Введено понятие  $\alpha$ -почти периодической функции в смысле Бора, так как рассматриваемые процессы не являются периодическими в общепринятом смысле. Предложены структуры, отражающие динамику изменения характеристических показателей Ляпунова. На основе этих структур сформирован массив ХПЛ. Получены верхняя оценка наименьшего показателя и граница подвижности для старшего показателя, а также множество показателей системы. Предложен графический критерий, основанный на анализе свойств специального класса структур,

для оценки адекватности полученных оценок показателей. Применен метод гистограмм для проверки множества полученных оценок.

Результаты моделирования подтвердили работоспособность предложенных методов и алгоритмов.

### Список литературы

1. **Thamilmaran K., Senthilkumar D. V., Venkatesan A., Lakshmanan M.** Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit // *Physical Review E*. 2006. Vol. 74, N. 9. P. 036205.
2. **Porcher R., Thomas G.** Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series // *Physical Review E*. 2001. Vol. 64, N. 1. P. 010902(R).
3. **Holyst J. A., Urbanowicz K.** Chaos control in economical model by time-delayed feedback method // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2000. Vol. 287, N. 3–4. P. 587–598.
4. **Macek W. M., Redaelli S.** Estimation of the entropy of the solar wind flow. *Physical Review E*. 2000. Vol. 62, N. 5. P. 6496–6504.
5. **Skokos Ch.** The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation // *Lect. Notes Phys.* 2010. Vol. 790. P. 63–135.
6. **Gencay R., Dechert W. D.** An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system // *Physica D*. 1992. Vol. 59. P. 142–157.
7. **Takens F.** Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics* /Eds D. A. Rand, L.-S. Young. Berlin: Springer-Verlag, 1980. Vol. 898. P. 366–381.
8. **Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.** Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D*. 1985. N. 16. P. 285–301.
9. **Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J.** A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets Source // *Physica D*. 1993. Vol. 65, Iss. 1-2. P. 117–134.
10. **Беспалов А. В., Поляхов Н. Д.** Сравнительный анализ методов оценки первого показателя Ляпунова // *Современные проблемы науки и образования*. 2016. № 6. 8 с.
11. **Передерий Ю. А.** Метод оценки спектра ляпуновских показателей по временной реализации // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. 2012. Т. 20, № 1. С. 99–104.
12. **Moskalenko O., Koronovskii A. A., Hramov A. E.** Lyapunov exponent corresponding to enslaved phase dynamics: Estimation from time series // *Physical review E*. 2015. P. 012913.
13. **Cvitanović P., Artuso R., Mainieri R., Tanner G., Vattay G.** *Chaos: Classical and Quantum*. ChaosBook.org version16.0. 2017.
14. **Филатов В. В.** Структурные характеристики аномалий геофизических полей и их использование при прогнозе // *Геофизика, геофизическое приборостроение*. 2013. № 4(16). С. 34–41.
15. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*. М.: Наука, 1966. 576 с.
16. **Москаленко О. И., Павлов А. С.** Способ оценки нулевого условного показателя Ляпунова по временному ряду // *Письма в ЖТФ*. 2014. Т. 40. Вып. 12. С. 66–72.
17. **Karabutov N.** Structural methods of estimation Lyapunov exponents linear dynamic system // *International journal of intelligent systems and applications*. 2015. Vol. 7, N. 10. P. 1–11.
18. **Карабутов Н. Н.** Структуры в задачах идентификации: Построение и анализ. М.: URSS/Ленанд. 2018. 312 с.
19. **Karabutov N.** About structural identifiability of nonlinear dynamic systems under uncertainty // *Global journal of science frontier research: (A) Physics and Space Science*. 2018. Vol. 18, Iss. 11. P. 51–61.
20. **Карабутов Н. Н.** Структурная идентификация статических объектов: Поля, структуры, методы. М.: URSS. 2011. 152 с.
21. **Демидович Б. П.** *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967. 472 с.
22. **Karabutov N.** About Lyapunov exponents identification for systems with periodic coefficients // *International journal of intelligent systems and applications*. 2018. Vol. 10, N. 11. P. 1–10.

# Frameworks Application for Estimation of Lyapunov Exponents for Systems with Periodic Coefficients

N. N. Karabutov, kn22@yandex.ru,

MIREA — Russian Technological University, Moscow, MSAWT, 119454, Russian Federation

Corresponding author: Karabutov Nikolay N., DTS, Professor,  
MIREA — Russian Technological University, Moscow, 119454, Russian Federation,  
e-mail: kn22@yandex.ru

Accepted on October 06, 2019

## Abstract

The identification problem of Lyapunov exponents is considered for dynamic systems with periodic coefficients under uncertainty. Indexes identification is based on the analysis of a special class of frameworks describing dynamics of indexes change. The method of frameworks obtaining is described. The adequacy concept of obtained estimations Lyapunov exponents is introduced. The adequacy criterion is based on the analysis of the structure definition domain. The domain which belongs to the set of Lyapunov exponents estimates is determined. The method proposed for the order estimation of the system. The method is based on the properties analysis of almost periodic to Bohr functions and proposed frameworks. The case when lineals for Lyapunov exponents are crossed is considered. WE obtain to an infinite spectrum of Lyapunov exponents. Upper bound for the smallest index and mobility limit for the large index are obtained and the index set of the system is determined. The graphics criteria based on the analysis of framework properties are proposed for the adequacy estimation of obtained indexes. The histogram method is applied to check of estimations set. It is shown that a dynamic system with periodic coefficients can have a set of Lyapunov exponents. The extension of almost periodic functions on Bohr is proposed to the problem solve of Lyapunov exponents evaluation. The system order estimation is obtained on the basis of the framework property analysis.

**Keywords:** framework, nonlinear dynamic system, phase portrait, structural identification, nonlinearity, synchronizability, almost periodic function on Bohr For citation:

Karabutov N. N. Frameworks Application for Estimation of Lyapunov Exponents for Systems with Periodic Coefficients, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 3–13.

DOI: 10.17587/mau.21.3-13

## References

1. **Thamilmaran K., Senthilkumar D. V., Venkatesan A., Lakshmanan M.** Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit, *Physical Review E.*, 2006, vol. 74, no. 9, pp. 036205.
2. **Porcher R., Thomas G.** Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series. *Physical Review E.*, 2001, vol. 64, no. 1, pp. 010902(R).
3. **Holyst J. A., Urbanowicz K.** Chaos control in economical model by time-delayed feedback method. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2000, vol. 287, no. 3–4, pp. 587–598.
4. **Macek W. M., Redaelli S.** Estimation of the entropy of the solar wind flow, *Physical Review E.*, 2000, vol. 62, no. 5, pp. 6496–6504.
5. **Skokos Ch.** The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation, *Lect. Notes Phys.*, 2010, vol. 790, pp. 63–135.
6. **Gencay R., Dechert W. D.** An algorithm for the  $n$  Lyapunov exponents of an  $n$ -dimensional unknown dynamical system, *Physica D.*, 1992, vol. 59, pp. 142–157.
7. **Takens F.** Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical Systems and Turbulence. Lecture Notes in Mathematics*, Eds D. A. Rand, L.-S. Young. Berlin, Springer-Verlag, 1980, vol. 898, pp. 366–381.
8. **Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.** Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica 16D*, 1985, no. 16, pp. 285–301.
9. **Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J.** A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets Source, *Physica D.*, 1993, vol. 65, iss. 1–2, pp. 117–134.
10. **Bespalov A. V., Polyakhov N. D.** Comparative analysis of methods for estimating the first Lyapunov exponent, *Modern problems of science and education*, 2016, no. 6, 8 p. (in Russian).
11. **Perederiy Y. A.** Method for calculation of lyapunov exponents spectrum from data series, *Izvestiya VUZ. Applied nonlinear dynamics*, 2012, iss. 20, no. 1, pp. 99–104 (in Russian).
12. **Moskalenko O., Koronovskii A. A., Hramov A. E.** Lyapunov exponent corresponding to enslaved phase dynamics: Estimation from time series, *Physical review E* 92, 2015, pp. 012913.
13. **Cvitanović P., Artuso R., Mainieri R., Tanner G., Vattay G.** *Chaos: Classical and Quantum*. ChaosBook.org version 16.0. 2017.
14. **Filatov V. V.** Structural characteristics of geophysical fields anomalies and their use in forecasting, *Geophysics*, 2013, no. 4(16), pp. 34–41.
15. **Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytsky V. V.** *Theory of Lyapunov indexes and its application to stability problems*, Moscow, Nauka, 1966 (in Russian).
16. **Moskalenko O., Pavlov A. S.** A method of evaluating zero conditional Lyapunov exponent time serie, *Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 2014, vol. 40, no. 12, pp. 66–72.
17. **Karabutov N.** Structural methods of estimation Lyapunov exponents linear dynamic system, *International journal of intelligent systems and applications*, 2015, vol. 7, no. 10, pp. 1–11.
18. **Karabutov N.** *Frameworks in identification problems: Design and analysis*, Moscow, URSS/Lenand, 2018, 306 p. (in Russian).
19. **Karabutov N.** About structural identifiability of nonlinear dynamic systems under uncertainty, *Global journal of science frontier research: (A) Physics and Space Science*, 2018, vol. 18, iss. 11, pp. 51–61.
20. **Karabutov N. N.** *Structural identification of static objects: Fields, frameworks, methods*, Moscow, URSS/Lenand, 2011, 152 p. (in Russian).
21. **Demidovich B. P.** *Lektion on mathematical stability theory*, Moscow, Nauka, 1967.
22. **Karabutov N.** About Lyapunov exponents identification for systems with periodic coefficients, *International journal of intelligent systems and applications*, 2018, vol. 10, no. 11, pp. 1–10.

С. А. Гайворонский, канд. техн. наук, доц., saga@tpu.ru,  
 Т. А. Езангина, канд. техн. наук, науч. сотр., eza-tanya@yandex.ru,  
 И. В. Хожаев, аспирант, мл. науч. сотр., ivh1@tpu.ru,  
 Национальный исследовательский Томский политехнический университет

## Параметрический синтез робастного регулятора на основе метода доминирующих полюсов\*

*Рассматривается линейная система управления, представленная характеристическим полиномом с интервальными коэффициентами, в которые линейно входят параметры робастного регулятора. Решается задача их определения в целях сохранения в системе гарантируемой динамики в условиях интервальной неопределенности параметров объекта. При параметрическом синтезе регулятора предлагается использовать корневые показатели качества — минимальную степень устойчивости и максимальную степень колебательности. Для их обеспечения параметрический синтез регулятора проводится на основе метода доминирующих полюсов. Применение данного метода предусматривает задание пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов, определяющих желаемые значения степени робастной устойчивости и робастной колебательности системы, а также правой границы области локализации всех остальных (свободных) полюсов. Для применения метода доминирующих полюсов используется свойство степени устойчивости и степени колебательности линейной интервальной системы определяться теми ее полюсами, которые являются образами определенных вершин многогранника коэффициентов интервального характеристического полинома. Параметры регулятора предлагается разделить на зависимые и свободные. Первые должны обеспечить заданное расположение доминирующих полюсов в одной из вершин многогранника коэффициентов (в доминирующей вершине). Свободные параметры регулятора призваны обеспечить требуемое удаление свободных полюсов от доминирующих. Для определения координат доминирующей вершины и проверочных вершин для локализации свободных полюсов проведено интервальное расширение основного фазового уравнения теории корневого годографа. В результате получены двойные интервальные фазовые неравенства, решение которых позволяет определить координаты искомого вершин многогранника коэффициентов характеристического полинома. Знание доминирующего вершинного полинома и заданных доминирующих полюсов позволяет выразить зависимые параметры регулятора через свободные. Полученные выражения используются для локализации свободных полюсов интервальной системы в заданной области. Для этого в каждой из найденных проверочных вершин проводится D-разбиение по свободным параметрам регулятора. После выбора значений свободных параметров из общей для всех D-разбиений области рассчитываются зависимые параметры регулятора. Приводится числовой пример параметрического синтеза ПИД регулятора, гарантирующего корневые робастные показатели качества интервальной системы четвертого порядка.*

**Ключевые слова:** линейная интервальная система, доминирующие полюсы, свободные полюсы, проверочные вершины, параметры регулятора, D-разбиение

### Введение

Реальные системы автоматического управления имеют параметры, которые неточно заданы или изменяются в определенных пределах по заранее неизвестным законам. Полиномы их передаточных функций могут быть приведены к интервальному виду (полиномы с интервальными коэффициентами). Согласно работе [1] такие системы классифицируются как линейные интервальные динамические системы (ЛИДС). Известно, что динамические свойства ЛИДС определяются ее доминирующими полюсами, так как влияние остальных (свободных) полюсов оказывается незначительным из-за их удаленности от доминирующих [2].

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 18-79-00264).

Коэффициенты характеристического полинома ЛИДС имеют фиксированные пределы изменения, и поэтому полюсы ЛИДС локализируются в замкнутых областях. Желаемое расположение робастным регулятором доминирующих и свободных полюсов ЛИДС предполагает, что области их локализации не должны выходить за допустимые границы при любых значениях интервальных параметров.

Решение задачи размещения полюсов ЛИДС рассматривается в работах [3, 4]. Однако предлагаемые в этих работах методы синтеза регуляторов предусматривают, что все элементы вектора состояния доступны для измерения. В связи с этим желательнее более простое с точки зрения реализуемости размещение полюсов ЛИДС регулятором пониженного порядка по выходу системы.

Для стационарных систем такая задача решена в работах [5, 6]. Особенностью подхода, пред-

ложенного в работе [6], является возможность не только обеспечить требуемое расположение доминирующих полюсов, но и размещать свободные полюсы в желаемой области. Интервальное расширение такого подхода для ЛИДС проводится в работах [7, 8]. Оно позволяет расположить желаемым образом доминирующие полюсы ЛИДС, но не гарантирует, что области локализации свободных полюсов не выйдут за заданную границу и тем самым не нарушится принцип доминирования. Поэтому представляет интерес параметрический синтез линейного регулятора по выходу, который обеспечивал бы желаемое расположение областей локализации доминирующих и свободных полюсов ЛИДС.

### Постановка задачи

Пусть интервальный характеристический полином (ИХП) ЛИДС имеет вид

$$D(s, k) = \sum_{i=0}^n [d_i(k)] s^i, \quad (1)$$

где  $[d_i(k)]$  — интервальные коэффициенты ( $\underline{d}_i(k) \leq d_i(k) \leq \overline{d}_i(k)$ ), образующие многогранник с  $2^{n+1}$  вершинами;  $k$  — вектор параметров регулятора, линейно входящих в коэффициенты ИХП (1). Так как доминирующие полюсы определяют минимальную степень устойчивости и максимальную колебательность ЛИДС, то области их локализации могут быть ограничены усеченным сектором  $G$ , как показано на рис. 1. На этом же рисунке указана и граница области  $\Gamma$  расположения свободных полюсов ЛИДС.

Задачей параметрического синтеза линейного регулятора является нахождение таких

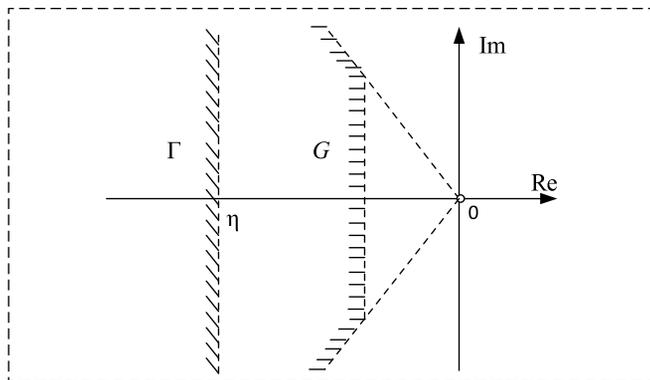


Рис. 1. Области локализации доминирующих и свободных полюсов

Рис. 1. Areas of dominant and unrestricted poles allocation

значений его параметров  $k_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, r$ , которые при возможных вариациях коэффициентов ИХП (1) гарантировали бы расположение доминирующих полюсов ЛИДС в усеченном секторе  $G$  одновременно с локализацией свободных полюсов в заданной области  $\Gamma$  (рис. 1).

### Интервальные углы выхода реберных ветвей из доминирующего полюса

Отображение ребер многогранника коэффициентов ИХП на корневую плоскость образует многопараметрический интервальный корневой годограф (МИКГ). Исходя из угловых свойств корневого годографа [9] угол выхода реберной ветви МИКГ из комплексного полюса  $P_1$  можно найти по формуле

$$\Theta_1^i = \pi r_i - \sum_{p=2}^n \Theta_p + i\Theta_0, \quad i = \overline{0, n}, \quad (2)$$

где  $\Theta_p$  и  $\Theta_0$  — углы между вещественной осью и векторами, направленными из комплексного полюса  $P_1$  соответственно к  $p$ -му полюсу и к  $i$ -м нулям с координатами  $(0; j0)$ ,  $r_i = 1$  при значении коэффициента  $d_i > \underline{d}_i$ ,  $r_i = 0$  при значении  $d_i < \overline{d}_i$ .

По условиям задачи задана пара комплексно-сопряженных доминирующих полюсов  $P_1$  и  $P_2$ , определяющих одновременно минимальную степень устойчивости ЛИДС и ее максимальную колебательность. Очевидно, что расположение доминирующих полюсов в заданных точках позволяет определить значение угла  $\Theta_0$  в выражении (2). Относительно углов полюсов  $\Theta_p$  заметим, что один угол, образованный сопряженным с  $P_1$  полюсом  $P_2$ , равен  $90^\circ$ , а остальные углы от свободных полюсов являются интервальными и зависят от их возможного расположения в области  $\Gamma$ . На этом основании к соотношению (2) применим интервальное расширение:

$$[\Theta_1^i] = \pi r_i - \sum_{p=2}^n [\Theta_p] + i[\Theta_0], \quad i = \overline{0, n}. \quad (3)$$

В выражении (3) интервал  $[\Theta_1^i]$  зависит от суммы углов свободных полюсов. Определим их сумму для двух характерных случаев, когда левее границы области  $\Gamma$  лежит пара свободных полюсов  $P_3$  и  $P_4$  (рис. 2, а, см. вторую сторону обложки) или один вещественный свободный полюс  $P_3$  (рис. 2, б, см. вторую сторону обложки).

Координаты доминирующих вершин  
*Coordinates of dominant vertices*

$\Theta_0$	$\alpha$	$m$	Координаты доминирующей вершины
120	8,8	1	$\overline{d_0, d_1, d_2, d_3}$
		2	$\overline{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4}$
135	5,6	1	$\overline{d_0, d_1, d_2, d_3}$
			$\overline{d_0, d_1, d_2, d_3}$
		2	$\overline{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4}$
			$\overline{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4}$
150	3,2	1	$\overline{d_0, d_1, d_2, d_3}$
		2	$\overline{d_0, d_1, d_2, d_3, d_4}$

Допуская возможность произвольного расположения свободных полюсов на рис. 2, а и 2, б, можно сделать следующие заключения.

1. Если пара комплексно-сопряженных полюсов  $P_3$  и  $P_4$  мигрирует в области, расположенной левее границы  $\Gamma$  (рис. 2, а), то сумма углов  $[\Theta_3]$  и  $[\Theta_4]$ , образованных полюсами  $P_3$  и  $P_4$  относительно полюса  $P_1$ , принадлежит интервалу  $[0^\circ; 2\alpha]$ , где  $\alpha = \angle P_1\eta_0$ .

2. Если вещественный полюс  $P_3$  мигрирует в отрезке, расположенном левее границы  $\Gamma$  (рис. 2, б), то угол  $[\Theta_3]$ , образованный полюсом  $P_3$  относительно полюса  $P_1$ , принадлежит интервалу  $[0^\circ; \alpha]$ , где  $\alpha = \angle P_1\eta_0$ .

На основании этих заключений можно сделать вывод: сумма углов для произвольного числа  $m$  свободных полюсов ЛИДС лежит в интервале  $[0^\circ; \alpha m]$ . Таким образом, выражение (3) может быть записано в виде

$$[\Theta_1^i] = \pi r_i - [0^\circ; \alpha m] - 90^\circ + i\Theta_0, \quad i = \overline{0, n}. \quad (4)$$

**Определение доминирующей вершины на основе двойных интервальных угловых неравенств**

Для того чтобы полюс  $P_1$  в доминирующей вершине  $V$  определял степень устойчивости ЛИДС, следует наложить ограничения на углы выхода  $[\Theta_1^i]$  реберных ветвей МИКГ из  $P_1$ . С учетом (4) запишем:

$$90^\circ \leq \pi r_i - [0^\circ; \alpha m] - 90^\circ + i\Theta_0 \leq 270^\circ, \quad i = \overline{0, n}. \quad (5)$$

Если же необходимо, чтобы  $P_1$  определял степень колебательности ЛИДС, то

$$\Theta_0 \leq \pi r_i - [0^\circ; \alpha m] - 90^\circ + i\Theta_0 \leq \Theta_0 + 180^\circ, \quad i = \overline{0, n}. \quad (6)$$

Очевидно, что условием определения полюсом  $P_1$  одновременно степени устойчивости и степени колебательности ЛИДС является составленное на основе (5) и (6) двойное неравенство

$$\Theta_0 \leq \pi r_i - [0^\circ; \alpha m] - 90^\circ + i\Theta_0 \leq 270^\circ, \quad i = \overline{0, n}. \quad (7)$$

Для выполнения неравенства (7) при изменении любого из коэффициентов  $d_i$  из доминирующей вершины  $V$  необходимо в (7) для коэффициента  $r_i$  выбрать значение 0 или 1:  $r_i = 0$  не меняет угол выхода ветви МИКГ по реб-

ру  $d_i$ , а при  $r_i = 1$  угол изменяется на  $180^\circ$ . Для выбора  $r_i$  преобразуем (7) к более удобному виду:

$$\Theta_0(1-i) + 90^\circ \leq [-\alpha m; 0^\circ] \pm \pi r_i \leq 360^\circ - \Theta_0 i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (8)$$

Решениями (8) для всех  $i$  является набор значений  $r_i$ , задающих пределы  $d_i$  и, следовательно, координаты доминирующей вершины  $V$  многогранника коэффициентов ИХП. Определим такую вершину для различных вариантов расположения доминирующих полюсов ЛИДС третьей и четвертой степеней. Согласно условию (8) исходной информацией для этого являются углы  $\Theta_0$  и  $\alpha$ , а также число  $m$  свободных полюсов. Заметим, что  $\alpha$  определяется углом  $\Theta_0$  и степенью  $p$  доминирования. Данная степень находится как отношение расстояния от заданной пары доминирующих полюсов до границы области  $\Gamma$  к расстоянию от доминирующих полюсов до мнимой оси. Результаты расчетов сведены в табл. 1.

Из табл. 1 следует, что в координатах доминирующей вершины предел коэффициента  $d_3$  ИХП при переходе от  $\Theta_0 = 120^\circ$  к  $\Theta_0 = 135^\circ$  изменяется с максимального на минимальный. Однако при  $\Theta_0 = 135^\circ$  он может быть как  $\overline{d_3}$ , так и  $\underline{d_3}$ , т. е. следует рассматривать две возможные доминирующие вершины.

**Определение граничных вершин для локализации свободных полюсов**

Так как степень устойчивости ЛИДС определяется корнями ИХП в вершинах многогранника его коэффициентов, то можно за-

ключить, что правая вертикальная граница области локализации свободного полюса проходит через образ одной из вершин многогранника. Учитывая это, выберем вершины, образы которых лежат на границе области  $\Gamma$  и все выходящие из них реберные ветви МИКГ направлены внутрь этой области. Назовем такие вершины граничными.

Очевидно, что если граничные вершины лежат в области  $\Gamma$ , то это гарантирует локализацию в ней всех свободных полюсов ЛИДС. Решим задачу выбора граничных вершин также с использованием угловых неравенств. Для этого рассмотрим рис. 3, а и 3, б (см. вторую сторону обложки), где вместе с заданными доминирующими полюсами показано возможное расположение свободных полюсов ЛИДС.

На рис. 3, а граничным свободным полюсом является вещественный полюс  $P_3$ , левее которого могут располагаться другие комплексно-сопряженные и вещественные свободные полюса ЛИДС. Сумма углов, определяемых относительно  $P_3$  свободными и доминирующими полюсами, равна нулю. Поэтому выражение для углов выхода из  $P_3$  реберных ветвей МИКГ имеет вид

$$\Theta_3^i = \Theta_0 i = 180^\circ i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (9)$$

Для того чтобы все реберные ветви МИКГ выходили из  $P_3$  строго влево по вещественной оси, все углы (9) должны быть равны  $180^\circ$ . Запишем это условие в виде уравнений:

$$180^\circ i \pm \pi r_i = 180^\circ, \quad (10)$$

решением которых является набор значений  $r_i$  и соответствующие ему координаты одной из граничных вершин многогранника интервальных коэффициентов.

Рассмотрим далее второй случай (рис. 3, б), когда на границу области  $\Gamma$  попадает пара комплексно-сопряженных свободных полюсов  $P_3$  и  $P_4$ . Пусть эти полюсы могут принимать произвольные значения на вертикальной прямой. Тогда сумма углов всех других полюсов относительно полюса  $P_3$  определяется выражением

$$\sum_{p=2}^n [\Theta_p] = 90^\circ + [180^\circ, 360^\circ] + [0^\circ, 90^\circ](m-2), \quad (11)$$

где  $90^\circ$  — угол от полюса  $P_4$ ;  $[180^\circ, 360^\circ]$  — интервал суммы углов от пары комплексно-сопряженных доминирующих полюсов;  $m$  —

число свободных полюсов ЛИДС ( $m \geq 2$ ). Если допустить, что комплексные свободные полюсы  $P_3$  и  $P_4$  могут принимать любые значения на вертикальной границе области  $\Gamma$ , то сумма углов, определяемых относительно  $P_3$   $i$  нулями  $(0, j)$  реберных передаточных функций, определяется интервальным выражением

$$[\Theta_0]i = [90^\circ, 180^\circ]i, \quad i = \overline{0, n}.$$

С учетом этого и в результате замены в выражении (11) интервала  $[180^\circ, 360^\circ]$  на  $2 \cdot [90^\circ, 180^\circ]$  получим выражения углов выхода реберных ветвей МИКГ из  $P_3$  в виде

$$[\Theta_3^i] = [90^\circ, 180^\circ]i - 90^\circ - [180^\circ, 360^\circ] - [0^\circ, 90^\circ](m-2), \quad i = \overline{0, n}. \quad (12)$$

Чтобы определить координаты граничных вершин для локализации свободных полюсов ЛИДС, зададим в соотношении (12) для интервала  $[\Theta_3^i]$  нижний и верхний пределы (соответственно  $90^\circ$  и  $270^\circ$ ). После преобразований получим систему двойных интервальных угловых неравенств:

$$180^\circ \leq [90^\circ, 180^\circ](i-2) - [0^\circ, 90^\circ](m-2) \leq 360^\circ, \quad (13)$$

$$i = \overline{0, n}.$$

На основе решений (10) и (13) получены и приведены в табл. 2 координаты граничных вершин для локализации в области  $\Gamma$  свободных полюсов ЛИДС третьего и четвертого порядков.

Таблица 2  
Table 2

Координаты граничных вершин  
Coordinates of boundary vertices

$n$	$m$	Координаты граничных вершин
3	1	$\underline{d}_0, \overline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3$
4	2	$\underline{d}_0, \overline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3, \underline{d}_4$
		$\underline{d}_0, \overline{d}_1, \underline{d}_2, \overline{d}_3, \overline{d}_4$
		$\underline{d}_0, \overline{d}_1, \overline{d}_2, \underline{d}_3, \overline{d}_4$

### Основные соотношения для параметрического синтеза линейного регулятора

Зададим передаточную функцию интервального объекта управления ЛИДС в виде  $W_{Oy}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ , где  $A(s) = \sum_{i=0}^m a_i s^i$ ,  $B(s) = \sum_{j=0}^n b_j s^j$ ,

$\overline{a_i} \leq a_i \leq \overline{a_i}$ ,  $\overline{b_j} \leq b_j \leq \overline{b_j}$ ,  $n \geq m$ . Для обеспечения в ЛИДС гарантируемой динамики, определяемой парой доминирующих полюсов, используем ПИД регулятор с передаточной функцией

$$W_{\text{РЕГ}}(s) = \frac{k_0 + k_1s + k_2s^2}{s},$$

где  $k_0$ ,  $k_1$  и  $k_2$  — настраиваемые параметры. Разделим их на зависимые параметры  $k_1$ ,  $k_2$  и свободный параметр  $k_0$ . Зададим пару доминирующих полюсов  $s_1 = -\alpha + j\beta$ ,  $s_2 = -\alpha - j\beta$  и на основе решения интервальных фазовых неравенств (8) определим доминирующую вершину  $V$  многогранника интервальных коэффициентов ЛИДС. По соответствующим этой вершине пределам коэффициентов ИХП сформируем вершинный полином

$$D^V(s, k) = d_n^V(k)s^n + d_{n-1}^V(k)s^{n-1} + \dots + d_0^V(k). \quad (14)$$

Подставив в (14) значение корня  $s_1$  и выделив в уравнении вещественную и мнимую части, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{Re} D^V(\alpha, \beta, k_0, k_1, k_2) = 0; \\ \operatorname{Im} D^V(\alpha, \beta, k_0, k_1, k_2) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Из уравнений системы (15) найдем зависимости  $k_1 = f_1(\alpha, \beta, k_0, k_2)$ ;  $k_2 = f_2(\alpha, \beta, k_0, k_2)$ , на основании которых выразим зависимые параметры  $k_1$ ,  $k_2$  регулятора через свободный параметр  $k_0$ . Подставив  $k_1(k_0)$ ,  $k_2(k_0)$  в (1), получим ИХП с одним параметром  $k_0$ :

$$D(s, k_1) = [d_n(k_0)]s^n + [d_{n-1}(k_0)]s^{n-1} + \dots + [d_0(k_0)].$$

Далее, используя выражения (10) и (13), определим набор граничных вершин для локализации свободных полюсов ЛИДС и в них проведем  $D$ -разбиение по параметру  $k_0$ . После выбора свободного параметра  $k_0$  из области пересечения отрезков устойчивости всех вершинных  $D$ -разбиений рассчитываются значения зависимых параметров  $k_1$  и  $k_2$  ПИД регулятора по полученным выше выражениям.

#### Методика размещения полюсов интервальной системы

В результате проведенных исследований разработана методика размещения полюсов ЛИДС. Она содержит следующие этапы:

1. Выбирается линейный регулятор с тремя или четырьмя настраиваемыми параметрами, которые разделяются на два зависимых (для двух доминирующих полюсов) и свободные (не больше двух параметров, необходимых для  $D$ -разбиения).

2. Записывается ИХП ЛИДС в виде (1).

3. Задаются координаты доминирующих полюсов ЛИДС, определяющие желаемую границу области  $G$ , а также граница области  $\Gamma$ .

4. Составляются интервальные неравенства (8), и на основании их решения формируется доминирующий вершинный полином (14).

5. В полином (14) подставляются координаты доминирующего полюса и находятся выражения зависимых параметров регулятора через свободные.

6. С использованием полученных в п. 5 зависимостей ИХП (1) приводится к виду, содержащему только свободные параметры регулятора.

7. На основании решений (10) и (13) формируются граничные вершинные полиномы для локализации свободных полюсов ЛИДС в области  $\Gamma$ .

8. Для всех полученных в п. 7 полиномов проводится  $D$ -разбиение по свободным параметрам регулятора. Их значения выбираются из области пересечения областей устойчивости всех  $D$ -разбиений.

9. По полученным в п. 5 выражениям при выбранных значениях свободных параметров вычисляются два зависимых параметра регулятора.

#### Пример

Пусть объект управления ЛИДС задан интервальной передаточной функцией:

$$W_0(p) = \frac{100}{[1; 1, 5]s^3 + [40; 80]s^2 + [150; 200]s + [1024; 1200]}.$$

Тогда ИХП системы с ПИД регулятором  $W_{\text{РЕГ}}(s) = \frac{k_0 + k_1s + k_2s^2}{s}$  и единичной обратной связью имеет вид

$$\begin{aligned} D(s, k_0, k_1, k_2) = & \\ = & [1; 1, 5]s^4 + [40; 80]s^3 + ([150; 200] + 100k_2)s^2 + \\ & + ([1024; 1200] + 100k_1)s + 100k_0. \end{aligned}$$

Желаемая степень робастной устойчивости и степень робастной колебательности ЛИДС

задана ее доминирующими полюсами в точках  $s_1 = -1 + j2$  и  $s_2 = -1 - j2$ . Задана также граница свободных полюсов ЛИДС  $X(j\beta) = -9 + j\beta$ ,  $-\infty < \beta < \infty$ .

Параметры регулятора разделены на свободный  $k_0$  и зависимые  $k_1$  и  $k_2$ . В результате решения интервального неравенства (8) определены координаты доминирующей вершины  $V(\bar{d}_0, \bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, \bar{d}_4)$  и соответствующий ей доминирующий вершинный полином

$$D^V(s, k_0, k_1, k_2) = s^4 + 80s^3 + (200 + 100k_2)s^2 + (1024 + 100k_1)s + 100k_0. \quad (16)$$

После подстановки  $s_1 = -1 + j2$  в (16) получена система уравнений вида (15), из которой определены зависимости  $k_1(k_0) = 0,4k_0 - 634$  и  $k_2(k_0) = 0,2k_0 - 39$ . На основании этих зависимостей сформирован ИХП, содержащий только свободный параметр  $k_0$  регулятора:

$$D(s, k_0) = [1; 1, 5]s^4 + [40; 80]s^3 + ([150; 200] + 100k_2(k_0))s^2 + ([1024; 1200] + 100k_1(k_0))s + 100k_0. \quad (17)$$

Для локализации свободных полюсов ЛИДС левее вертикальной прямой, проходящей через точку  $(-9; j0)$ , на основании ИХП (17) сформированы три вершинных полинома для трех граничных вершин из табл. 1:

$$D_1(s, k_0) = s^4 + 80s^3 + (150 + 100k_2(k_0))s^2 + (1200 + 100k_1(k_0))s + 100k_0;$$

$$D_2(s, k_0) = 1,5s^4 + 40s^3 + (150 + 100k_2(k_0))s^2 + (1200 + 100k_1(k_0))s + 100k_0;$$

$$D_3(s, k_0) = 1,5s^4 + 40s^3 + (200 + 100k_2(k_0))s^2 + (1200 + 100k_1(k_0))s + 100k_0.$$

Для каждого из этих полиномов определена своя область  $D$ -разбиения параметра  $k_0$  и затем найдена общая область  $k_0 \geq 35,25$ . Значение свободного параметра  $k_0$  выбрано на левой границе этой области. После подстановки  $k_0 = 35,25$  в выражения зависимых параметров регулятора получены следующие их значения:  $k_1 = 7,76$ ,  $k_2 = 6,66$ . При найденных значениях параметров ПИД регулятора построен и показан на рис. 4 (см. вторую сторону обложки) МИКГ рассматриваемой ЛИДС.

Из рис. 4 видно, что расположение доминирующих и свободных полюсов системы гарантирует в ЛИДС заданные корневые показатели.

## Заключение

В результате проведенных исследований разработана методика желаемого размещения областей локализации доминирующих и свободных полюсов ЛИДС в условиях интервальности коэффициентов ее характеристического полинома. Границы областей полюсов определяют в ЛИДС минимально допустимую степень устойчивости и максимально допустимую колебательность. Основой методики является нахождение у многогранника коэффициентов полинома доминирующей и граничных вершин, образы которых определяют границы областей локализации соответственно доминирующих и свободных полюсов. Для выбора этих вершин проведено интервальное расширение основного фазового уравнения теории корневого годографа. В результате получены условия для углов выхода реберных ветвей МИКГ из образов указанных вершин в виде интервальных фазовых неравенств. Их решениями являются координаты вершин и соответствующие им вершинные полиномы ЛИДС. На основе этих полиномов и метода  $D$ -разбиения проведен параметрический синтез линейного регулятора, обеспечивающего в ЛИДС гарантируемую динамику.

## Список литературы

1. Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Техническая кибернетика. 1991. № 1. С. 3—30.
2. Райцын Т. М. Синтез систем автоматического управления методом направленных графов. Л.: Энергия, 1970. 96 с.
3. Хлебалин Н. А. Синтез интервальных регуляторов в задаче модального управления // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. научн. сб. Саратов: Саратовский политех. ин-т. 1988. С. 26—30.
4. Захаров А. В., Шокин Ю. И. Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // ДАН СССР. 1988. Т. 299, № 2. С. 292—295.
5. Скворцов Л. М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов // Изв. РАН. ТиСУ. 1996. № 4. С. 10—13.
6. Вадутов О. С., Гайворонский С. А. Решение задачи размещения полюсов системы методом  $D$ -разбиения // Изв. РАН. ТиСУ. 2004. № 5. С. 23—27.
7. Замятин С. В., Гайворонский С. А. Решение задачи размещения полюсов линейной интервальной динамиче-

## Parametric Synthesis of a Robust Controller Based on the Method of Dominant Poles

**S. A. Gayvoronskiy**, [saga@tpu.ru](mailto:saga@tpu.ru), **T. A. Ezangina**, [eza-tanya@yandex.ru](mailto:eza-tanya@yandex.ru), **I. V. Khozhaev**, [ivh1@tpu.ru](mailto:ivh1@tpu.ru),  
National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, 634050, Russian Federation

Corresponding author: **Ezangina Tatiana Al.**, Ph. D., Researcher, National Research Tomsk Polytechnic University, 634050, Tomsk, Russian Federation, e-mail: [eza-tanya@yandex.ru](mailto:eza-tanya@yandex.ru)

Accepted on June 21, 2019

### Abstract

*In the paper a linear control system described by its characteristic polynomial with interval coefficients including parameters of controller linearly is considered. Problem of the research is finding parameters of a controller guaranteeing dynamic characteristics of a system despite interval parametric uncertainty of its object. It is proposed to base a controller synthesis on root quality indices: minimal stability degree and maximal oscillability degree. Desired values of these indices will be provided with the help of dominant poles method. Applying this method consists in placing a pair of complex-conjugate dominant poles; all other poles — unrestricted poles — will be placed by defining a right border of their allocation area on a complex plane. To apply dominant poles method, a feature of stability degree and oscillability degree to be determined by images of certain vertices of a parametric polytope was used. To synthesize a controller, it is proposed to divide its parameters in two groups: dependent ones and unrestricted ones. The first group of controller parameters is to provide desired allocation of dominant poles in one of vertices of parametric polytope (a dominant vertex). Unrestricted parameters of a controller are to provide desired distance between dominant poles and allocation area of unrestricted poles. To find coordinates of a dominant vertex and verifying vertices providing unrestricted poles allocation, an interval extension of basic phase equation of a root locus theory was developed. This resulted in interval phase inequalities, whose solution allows finding coordinates of desired vertices of characteristic polynomials coefficients polytope. Knowing a dominant vertex polynomial and dominant poles allows expressing dependent parameters of a controller from unrestricted ones. Obtained expressions allow placing unrestricted poles in a desired area of a complex plane. To do this, a  $D$ -partition by unrestricted parameters of a controller is performed in all verifying vertices of parametric polytope of a system. After choosing values of unrestricted parameters from intersection of all stability domains obtain during  $D$ -partition, dependent parameters of a controller can be calculated. An example of synthesizing a PID-controller guaranteeing desired values of dynamics characteristics for an interval control system of the fourth order is provided.*

**Keywords:** linear interval dynamic system, dominant poles, unrestricted poles, dominant vertex, controller synthesis,  $D$ -partition inequalities

**Acknowledgements:** This article was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research (project 18-58-00045 Bel\_a).

For citation:

**Gayvoronskiy S. A., Ezangina T. A., Khozhaev I. V.** Parametric Synthesis of a Robust Controller Based on the Method of Dominant Poles, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 14–20.

DOI: 10.17587/mau.21.14-20

### References

1. **Gusev Yu. M., Efanov V. N., Krymskiy V. G.** Analysis and synthesis of linear interval dynamic systems (problem condition). Analysis with the help of interval characteristic polynomials, *Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1991, no. 1, pp. 3–30 (in Russian).
2. **Rajcyn T. M.** Control system synthesis on a base of directed graph method grafov, Leningrad, Energiya, 1970, 96 p. (in Russian).
3. **Xlebalin N. A.** Synthesis of control systems considering interval uncertainty of their mathematical models parameters,

*Analiticheskie metody' sinteza regulyatorov*, Mezhdvuz. nauchn. sb. Saratov, Saratovskij politex. in-t, 1988, pp. 26–30 (in Russian).

4. **Zaxarov A. V., Shokin Yu. I.** Synthesis of interval controllers as a problem of modal control, *DAN SSSR*, 1988, vol. 299, no. 2, pp. 292–295 (in Russian).

5. **Skvorczov L. M.** Synthesizing SISO-controllers by placing dominant poles with the help of interpolation method, *Izv. RAN. TiSU*, 1996, no. 4, pp. 10–13 (in Russian).

6. **Vadutov O. S., Gayvoronskiy S. A.** Placing poles of a control system with the help of  $D$ -partition method, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, *Izv. RAN. TiSU*, 2004, no. 5, pp. 23–27 (in Russian).

7. **Zamyatin S. V., Gayvoronskiy S. A.** Placing poles of linear interval dynamic system in a desired sector, *Izvestiya Tomskogo politexnicheskogo universiteta*, 2006, vol. 309, no. 5, pp. 16–20 (in Russian).

8. **Zamyatin S. V.** Providing desired control quality by placing allocation areas of dominant poles of interval control system, *Izvestiya Tomskogo politexnicheskogo universiteta*, 2006, vol. 309, no. 7, pp. 10–12 (in Russian).

9. **Uderman E. G.** Root locus method in control theory, Moscow, Nauka, 1972. 448 p. (in Russian).

**А. Н. Жирабок**, д-р техн. наук, проф., zhirabok@mail.ru, **А. В. Зуев**, канд. техн. наук, доц.,  
**Е. Ю. Бобко**, ст. преподаватель,  
 Дальневосточный федеральный университет, Владивосток,  
**А. Л. Филатов**, аспирант,  
 Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Владивосток

## Решение задачи аккомодации в нелинейных системах с использованием линейных методов\*

*Рассматривается задача аккомодации к дефектам в системах, описываемых нелинейными моделями, с использованием линейных методов. Для решения, основанного на полной развязке от дефектов, используется логико-динамический подход, позволяющий нелинейные системы анализировать линейными методами. Теоретические результаты иллюстрируются примером.*

**Ключевые слова:** нелинейные системы, отказоустойчивость, аккомодация, развязка, логико-динамический подход

### 1. Введение

Известны различные подходы к достижению отказоустойчивости [1]. Один из них заключается в формировании специального управления, которое позволяет при появлении дефекта сохранять важнейшие характеристики системы, возможно, в ущерб второстепенным. Данный подход принято называть аккомодацией к дефектам, для реализации которой разработан ряд методов, в частности, на основе оптимального управления,  $H_\infty$ -оптимизации, слежения за эталонной моделью, адаптивного управления [1]. Особенностью всех этих методов является необходимость оперативного оценивания искажаемых дефектами параметров системы и формирования нового закона управления на основе полученных оценок.

В целях повышения эффективности аккомодации в настоящей работе предлагается использовать метод полной развязки от воздействий, вызываемых дефектами. Реализация этого метода не требует предварительного оценивания параметров, но гарантирует не искажаемое дефектами движение системы лишь в некотором подпространстве ее пространства состояния.

Известно решение задачи развязки [2, 3] для нелинейных систем, описываемых моделью

$$x(t+1) = f(x(t), u(t), d(t)), \quad y(t) = h(x(t)), \quad (1.1)$$

где  $f$  и  $h$  — произвольные нелинейные функции, функция  $d(t)$  отражает дефекты в сис-

теме: при их отсутствии  $d(t) = 0$ , при появлении дефектов  $d(t)$  становится неизвестной функцией времени. Задача полной развязки ставится следующим образом: для заданной функции  $y_*(t) = h_*(x(t))$  построить компенсатор  $S_0$ , описываемый моделью

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &= f_0(x_0(t), u(t), y(t)); \\ u(t) &= g_0(x_0(t), y(t), v(t)), \end{aligned} \quad (1.2)$$

так чтобы значения  $y_*(t)$  при  $t \geq 0$  в замкнутой системе были независимы от функции  $d(t)$ , где  $v(t)$  — новое управление.

Коротко опишем решение этой задачи [2, 3]. Напомним, что функция  $\alpha$  называется  $(h, f)$ -инвариантной, если  $\alpha(f(x, u, d)) = f_*(\alpha(x), h(x), u, d)$  для некоторой функции  $f_*$ ; функция  $\alpha$  называется  $f$ -инвариантной, если  $\alpha(f(x, u, d)) = f_{**}(\alpha(x), u, d)$  для некоторой функции  $f_{**}$ ; функция  $\alpha$  называется контролируемо инвариантной, если она  $f$ -инвариантна в замкнутой системе с компенсатором (1.2). Для формулировки главного результата введем векторную функцию  $\alpha^0$  с максимальным числом компонент, такую что  $\alpha^0(f(x, u, d))$  не зависит от переменной  $d$ .

**Теорема** [2, 3]. Переменная  $y_*(t)$  системы (1.1) может быть развязана от функции  $d(t)$  с помощью компенсатора (1.2), если существуют  $(h, f)$ -инвариантная функция  $\alpha$  и контролируемо инвариантная функция  $\xi$ , такие что

$$\alpha^0 \leq \alpha \leq \xi \leq h_*, \quad (1.3)$$

где запись  $\beta \leq \gamma$  означает, что существует функция  $\delta$  такая, что  $\delta(\beta(x)) = \gamma(x)$  для всех  $x$  [4].

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 16-09-00046-П).

В работах [2, 3] предложен способ определения функций  $\alpha$  и  $\xi$  и построения компенсатора (1.2) с вектором состояния  $x_0 = \alpha(x)$ .

На основе полученного решения полной развязки решается задача аккомодации [3, 5], в которой для системы (1.1) находится функция  $h_*$  с максимальным числом компонент, такая что с помощью компенсатора (1.2) переменная  $y_*(t) = h_*(x(t))$  может быть развязана от  $d(t)$ . Получение такой функции обеспечивает максимизацию размерности подпространства, в котором происходит не искажаемое дефектами движение системы.

Для решения задачи используется математический аппарат алгебры функций, который требует выполнения ряда специальных операций с нелинейными функциями, поэтому ниже для решения используется логико-динамический подход (ЛДП) [6], в котором функция  $\alpha$  ищется в классе линейных функций и решение может быть получено линейными методами.

## 2. Решение задачи развязки на основе логико-динамического подхода

**Полная развязка для линейной части.** Напомним, что для применения ЛДП исходная система должна быть приведена к виду

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + Dd(t) + \\ &+ C \begin{pmatrix} \varphi_1(A_1x(t), u(t)) \\ \dots \\ \varphi_q(A_qx(t), u(t)) \end{pmatrix}; \\ y(t) &= Hx(t), \quad y_*(t) = H_*x(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь  $F$  и  $G$  — матрицы, описывающие линейную часть системы;  $H$ ,  $H_*$ ,  $C$  и  $D$  — постоянные матрицы;  $\varphi_1, \dots, \varphi_q$  — произвольные нелинейные (возможно, негладкие) функции;  $A_1, \dots, A_q$  — матрицы-строки. Предполагается, что компенсатор  $S_0$  описывается моделью

$$\begin{aligned} x_0^+ &= F_0x_0 + G_0u + J_0y + C_0 \begin{pmatrix} \varphi_1(A_{01}z_0, u) \\ \dots \\ \varphi_q(A_{0q}z_0, u) \end{pmatrix}; \\ u &= g_0(x_0, y, v), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $x_0$  — вектор состояния;  $F_0, G_0, J_0, C_0, A_{01}, \dots, A_{0q}$  — матрицы, подлежащие определению;  $z_0 = (x_0^T y^T)^T$ . Для упрощения здесь и далее бу-

дут использоваться обозначения  $x^+$  и  $x$  вместо  $x(t+1)$  и  $x(t)$ , аналогично — для других переменных.

Напомним основные шаги ЛДП: 1) замена нелинейной системы (2.1) ее линейной частью; 2) решение проблемы для полученной линейной системы с дополнительными ограничениями; 3) преобразование найденного решения для линейной системы путем добавления преобразованной нелинейной части в модель, построенную на шаге 2.

Решение рассматриваемой задачи будет состоять в нахождении для системы (2.1) матриц, соответствующих функциям в (1.3), для которых выполняются отношения также в соответствии с (1.3).

Нетрудно видеть, что аналогом функции  $\alpha^0$ , для которой  $\alpha^0(f(x, u, d))$  не зависит от переменной  $d(t)$ , служит матрица  $D^0$  максимального ранга, такая что  $D^0D = 0$ . Аналогом векторной функции  $\alpha$  служит матрица  $\Phi$ , для которой справедливы следующие уравнения, соответствующие введенному понятию  $(h, f)$ -инвариантности и условию  $\alpha^0 \leq \alpha$ :

$$\Phi F = F_0\Phi + J_0H, \quad G_0 = \Phi G, \quad \Phi D = 0. \quad (2.3)$$

Также известно [6], что для нелинейной части справедливы два дополнительных отношения

$$C_0 = \Phi C, \quad A = A_0(\Phi^T H^T)^T; \quad (2.4)$$

матрицы  $F_0, J_0, G_0, A_0, C_0$  подлежат определению.

Последнее выражение в (2.4) является дополнительным ограничением на матрицу  $\Phi$ , которое учитывается на шаге 2 ЛДП. Равенство (2.4) выполняется, если и только если строки матрицы  $A$  линейно зависят от строк матриц  $\Phi$  и  $H$ , что эквивалентно равенству

$$\text{rank}(\Phi^T H^T) = \text{rank}(\Phi^T H^T A^T). \quad (2.5)$$

Если модель (2.1) содержит несколько нелинейностей, матрица  $A$  в соотношениях (2.4) и (2.5) заменяется на  $A_i, i = 1, \dots, q$ .

Отметим, что из  $D^0D = 0$  и  $\Phi D = 0$  следует, что  $\Phi_1 = QD^0$  для некоторой матрицы  $Q$ . Матрицы  $Q$  и  $J_0$  ищутся как решения уравнения [7]

$$(Q - J_{01} \dots - J_{0k})(V^{(k)} B^{(k)}) = 0, \quad (2.6)$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} D^0 F^k \\ HF^{k-1} \\ \dots \\ H \end{pmatrix};$$

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & D^0 FD & D^0 F^2 D & \dots & D^0 F^{k-1} D \\ 0 & HD & HFD & \dots & HF^{k-2} D \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения системы  $S_0$  примем  $k := n - p$  и проверим условие

$$\text{rank}(V^{(k)} B^{(k)}) < l(k + 1). \quad (2.7)$$

Если оно выполняется, то существует такая строка  $(Q - J_{01} \dots - J_{0k})$ , что (2.6) имеет решение. Тогда строки матрицы  $\Phi$  могут быть найдены из соотношения (2.3),  $G_0 = \Phi G$ , матрица  $F_0$  ищется в каноническом виде [7]. В результате линейная часть системы  $S_0$ , инвариантная к  $d(t)$ , построена.

Если равенство (2.5) не выполняется, положим  $k := k - 1$  и повторим проверку условия (2.7). Если (2.5) не выполняется для всех  $k$ , проблема аккомодации не может быть решена.

Таким образом, предложенный подход позволяет найти решение для линейной части. Более детальный анализ требуется для учета нелинейной составляющей.

**Полная развязка с учетом нелинейной составляющей.** Рассмотрим множество всех линейно независимых решений уравнения (2.6) для некоторого  $k$ , представленных в виде

$$(Q^{(1)} - J_{01}^{(1)} \dots - J_{0k}^{(1)}), \dots, (Q^{(N)} - J_{01}^{(N)} \dots - J_{0k}^{(N)}), \quad (2.8)$$

$N$  — число таких решений.

**Теорема [7].** Пусть матрицы  $\Phi^{(1)}, \dots, \Phi^{(N)}$ , полученные на основе уравнений (2.3), описывают множество линейно независимых решений задачи для линейной части. Тогда произвольная линейная комбинация решений из выражений (2.8) с весовыми коэффициентами  $v_1, \dots, v_N$  дает матрицу  $\Phi = v_1 \Phi^{(1)} + \dots + v_N \Phi^{(N)}$ , которая также описывает некоторое решение этой задачи.

Предположим, что значение  $k$  максимальное и удовлетворяет условию (2.7), а множество всех решений представлено в виде (2.8). Чтобы

найти вектор  $v = (v_1, \dots, v_N)$  с учетом нелинейной части, перепишем (2.4) в виде

$$A = A_{01} \begin{pmatrix} v \Phi_1^\Sigma \\ \dots \\ v \Phi_k^\Sigma \end{pmatrix} + A_{02} H, \quad (2.9)$$

где

$$A_0 = (A_{01} \ A_{02}),$$

$$\Phi_1^\Sigma = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} \\ \dots \\ \Phi_1^{(N)} \end{pmatrix}, \dots, \Phi_k^\Sigma = \begin{pmatrix} \Phi_k^{(1)} \\ \dots \\ \Phi_k^{(N)} \end{pmatrix}, \Phi^\Sigma = \begin{pmatrix} \Phi_1^\Sigma \\ \dots \\ \Phi_k^\Sigma \end{pmatrix}.$$

По аналогии с (2.4) уравнение (2.9) имеет решение, если

$$\text{rank}((\Phi^\Sigma)^T H^T) = \text{rank}((\Phi^\Sigma)^T H^T A^T). \quad (2.10)$$

Предполагая, что условие (2.10) выполняется, рассмотрим для простоты случай, когда  $A$  — матрица-строка. Здесь (2.9) можно представить в виде  $A = (a_1 v \dots a_k v) \Phi^\Sigma + A_{02} H$ , где  $A_{01} = (a_1 \dots a_k)$ , или в виде  $A = A_v \Phi^\Sigma + A_{02} H$ , где  $A_v$  считается неизвестной матрицей. Решим это алгебраическое уравнение и найдем матрицы  $A_v$  и  $A_{02}$ . Если  $A_v$  может быть представлена в виде  $A_v = (a_1 v \dots a_k v)$  для некоторых коэффициентов  $a_1, \dots, a_k$  и вектора  $v = (v_1, \dots, v_N)$ , то поиск решения закончен, в результате получают матрицы  $A_{01} = (a_1 \dots a_k)$  и  $A_{02}$  и вектор  $v$  весовых коэффициентов. Матрицы  $Q$ ,  $J_0$  и  $\Phi$  можно найти из равенств

$$Q = \sum_{i=1}^N v_i Q^{(i)}, \quad J_{0j} = \sum_{i=1}^N v_i J_{0j}^{(i)}, \quad \Phi_j = \sum_{i=1}^N v_i \Phi_j^{(i)},$$

$$j = 1, 2, \dots, k;$$

$$G_0 = \Phi G, \quad C_0 = \Phi C.$$

В результате динамическая часть компенсатора, описываемого моделью (2.2), построена.

Так как размерность  $k$  — максимальная, лучшим вариантом для функции  $\alpha$  в (1.3) будет  $\alpha(x) = \Phi x$ .

### 3. Построение аналога функции $\xi$

Для построения матрицы  $\Phi_*$  — аналога функции  $\xi$  — введем новую матрицу  $C^*$ : если

$C(i, j) \neq 0$  и функция  $\varphi_j$  содержит компоненты вектора управления  $u$ , полагаем  $C^*(i, j) = 1$ , в противном случае  $C^*(i, j) = 0$ .

Обозначим  $r'_i$  — минимальное целое  $p$ , такое что  $H_{*i}F^{p-1}G \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ ;  $w_i$  — минимальное целое  $p$ , такое что  $H_{*i}F^{p-1}D \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ ;  $r_i^*$  — минимальное целое  $p$ , такое что  $H_{*i}F^{p-1}C^* \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ ;  $L$  — размерность вектора  $u_*$  в системе (2.1). Нетрудно видеть, что  $r'_i$  и  $r_i^*$  представляют собой относительные степени переменной  $y_{*i}$  для управления  $u$ , связанные с линейным и нелинейным вхождением этого управления в динамику системы. Положим  $r_i = \min(r'_i, r_i^*)$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ . По аналогии с работой [2] будем считать, что  $w_i > r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ , так как в противном случае решение не существует.

Для ограничения класса функций  $\xi$  линейными функциями сделаем допущение.

**Допущение А1.**  $r_i = r'_i$  для всех  $i = 1, 2, \dots, L$ , т.е. относительные степени переменной  $y_{*i}$  для управления  $u$  связаны только с линейным вхождением управления в динамику системы.

Положим  $y_{*1} = H_{*1}x$ , ...,  $y_{*1}^{r_1} = H_{*1}F^{r_1-1}x$ ; ясно, что переменная

$$y_{*1}^{r_1+} = H_{*1}F^{r_1-1}x^+ = H_{*1}F^{r_1-1}(Fx + Gu + \Psi(x, u)) = H_{*1}F^{r_1}x + H_{*1}F^{r_1-1}Gu + \psi_1(x)$$

зависит от управления; здесь  $\psi_1(x) = H_{*1}F^{r_1-1}\Psi(x, u)$  — нелинейная функция, не зависящая от управления в силу допущения А1.

Рассмотрим множество уравнений

$$\begin{aligned} H_{*1}F^{r_1}x + H_{*1}F^{r_1-1}Gu + \psi_1(x) &= v_1; \\ &\dots \\ H_{*L}F^{r_L}x + H_{*L}F^{r_L-1}Gu + \psi_L(x) &= v_L. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Введем матрицы

$$H_*^{(i)} = \begin{pmatrix} H_{*i} \\ \dots \\ H_{*i}F^{r_i-1} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, L; \quad \widehat{H}_* = \begin{pmatrix} H_{*1}F^{r_1-1}G \\ \dots \\ H_{*L}F^{r_L-1}G \end{pmatrix}.$$

Анализ ранга матрицы  $\widehat{H}_*$  позволяет рассмотреть различные варианты решения уравнений (3.1). Для простоты рассмотрим случай, когда этот ранг равен  $L$ .

Положим далее

$$\Phi_* = \begin{pmatrix} H_*^{(1)} \\ \dots \\ H_*^{(L)} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что матрица  $\Phi_*$  служит аналогом функции  $\xi$ , и эта матрица является  $F$ -инвариантом линейной части замкнутой системы.

По аналогии с (2.5) выполнение равенства

$$\text{rank}(\Phi_*) = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi_* \\ A \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

означает, что в линейную систему, построенную на основе матрицы  $\Phi_*$ , можно добавить нелинейную составляющую.

Аналогом условия  $\alpha \leq \xi$  в (1.3) служит равенство, подобное (3.2):

$$\text{rank}(\Phi) = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi_* \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Если оно выполняется, проблема аккомодации имеет решение, в противном случае решение не существует. Ниже будем полагать, что условия (3.2) и (3.3) выполняются. Из (3.3) следует, что  $\Phi_* = Q\Phi$  для некоторой матрицы  $Q$ .

Так как ранг матрицы  $\widehat{H}_*$  равен  $L$ , система уравнений (3.1) может быть решена относительно компонент вектора управления  $u(t)$  в виде  $u(t) = g'(x(t), v(t))$  для некоторой функции  $g'$ . Поскольку матрица  $\Phi$  является аналогом  $(h, f)$ -инвариантной функции  $\alpha$  и  $\Phi_* = Q\Phi$ , то переменная  $x(t)$  в функции  $u(t) = g'(x(t), v(t))$  может быть выражена в терминах состояния  $x_0(t) = \Phi x(t)$  и вектора выхода  $y(t)$ , в результате чего эта функция принимает вид статической части компенсатора (2.2). В предположении, что ранг матрицы  $H_*$  равен  $L$ , можно получить явное выражение для функции  $g_0$  путем обращения этой матрицы в (3.1).

Отметим, что если допущение А1 не выполняется, для поиска решения необходимо использовать методы, изложенные в работе [8].

#### 4. Решение задачи аккомодации

На основе полученных результатов задача аккомодации формулируется следующим образом. Найти матрицу  $H_*$  максимальной размерности такую, чтобы задача аккомодации стала разрешимой.

**Алгоритм** (решение задачи аккомодации)

**Шаг 1.** Найти матрицу  $\Phi$  и положить  $H_* := \Phi$ .

**Шаг 2.** Для переменной  $y_* := H_*x$  найти относительные степени  $r'_i$ ,  $w_i$  и  $r_i^*$ . Полагая, что  $r'_i = r_i^*$ , проверить неравенство  $w_i > r_i$ ; если оно не выполняется, удалить  $i$ -ю строку из матрицы  $H_*$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ . Обозначить полученную в результате этих действий матрицу также  $H_*$ ,  $L$  — число ее компонент.

**Шаг 3.** Найти матрицу  $H_*^{(i)}$  и проверить условие

$$\text{rank}(\Phi) = \text{rank}(\Phi^T H_*^{(i)T}).$$

Если оно не выполняется, удалить  $i$ -ю строку из матрицы  $H_*$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ . Обозначим полученную в результате матрицу также  $H_*$ ,  $L$  — число ее компонент.

**Шаг 4.** Вычислить матрицу  $\Phi_*$ ; можно показать, что для нее выполняется условие (3.3). Проверить условие (3.2). Если оно не выполняется, задача не имеет решения.

**Шаг 5.** На основе полученной на шаге 3 матрицы  $H_*$  построить матрицу  $\widehat{H}_*$  и проверить условие  $\text{rank}(\widehat{H}_*) = L$ . Если оно выполняется, перейти к шагу 6, в противном случае найти  $M \times L$  матрицу  $P$ , такую что  $\text{rank}(P\widehat{H}_*) = M$  и принять  $\widehat{H}_* := P\widehat{H}_*$  (матрица  $P$  отбирает линейно независимые строки матрицы  $\widehat{H}_*$ ).

**Шаг 6.** Построить статическую часть компенсатора, решая уравнения (3.1) относительно переменной  $u(t)$  в форме  $u(t) = g'(x(t), v(t))$  и затем — в искомом виде  $u(t) = g_0(x_0(t), y(t), v(t))$ .

Еще одним элементом решения задачи аккомодации является система  $S_*$ , используемая следующим образом. Когда дефект возник и обнаружен, то проблема управления исходной системой решается на основе системы  $S_*$ , результатом чего является управление  $v(t)$ , далее с помощью функции  $g_0$  рассчитывается управление  $u(t)$ . Поскольку система  $S_*$  не содержит неизвестную функцию  $d(t)$ , достигается эффект аккомодации к дефектам [3, 5].

Для построения системы  $S_*$  полагаем  $x_* := \Phi_*x$  и преобразуем правую часть выражения  $x_*^+ = \Phi_*x^+$  к виду  $x_*^+ = f_*(x_*, v)$ ; последнее возможно в силу того, что матрица  $\Phi_*$  является аналогом управляемо инвариантной функции. Пример решения одной из задач теории управления (задачи терминального управления) на основе предложенного подхода рассмотрен в работе [4].

## 5. Пример

Рассмотрим систему управления

$$x_1^+ = x_3 + x_6 + x_4 + u_3 + d_1;$$

$$x_2^+ = \text{sign}(x_3) + x_6 + u_1;$$

$$x_3^+ = -x_3x_4;$$

$$x_4^+ = x_4 + x_5 + u_1;$$

$$x_5^+ = x_3 + x_4 + d_2;$$

$$x_6^+ = x_2^2 + x_1 + u_2;$$

$$y_1 = x_1; \quad y_2 = x_5.$$

В соответствии с правилами реализации ЛДП [5] скорректируем исходную модель путем введения некоторых формальных членов следующим образом: член  $(x_3 - x_3)$  введем во второе уравнение,  $(x_3 + x_4 - x_3 - x_4)$  — в третье и  $(x_2 - x_2)$  — в пятое. В результате мы получим следующие матрицы и нелинейности, описывающие систему:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T;$$

$$\varphi_1(x, u) = \text{sign}(x_3) - x_3; \quad A_1 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0);$$

$$\varphi_2(x, u) = x_3x_4 + x_3 + x_4; \quad A_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0);$$

$$\varphi_3(x, u) = x_2^2 - x_2; \quad A_3 = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0).$$

Найдем матрицу

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что матрица  $\Phi$ , являющаяся аналогом функции  $\alpha$ , совпадает с  $D^0$ .

На шаге 2 принимаем  $H_* := \Phi$ , так как нелинейности не содержат управление, полагаем

$C^* := 0$ , Нетрудно проверить, что  $L = 4$ ,  $r'_1 = r'_3 = r'_4 = 1$ ,  $r'_2 = 2$ ,  $r^*_1 = r^*_2 = r^*_3 = r^*_4 = \infty$  и  $w_1 = w_2 = 3$ ,  $w_3 = w_4 = 2$ . Так как  $w_i > \min(r_i, r^*_i)$  для всех  $i$ , допущение А1 выполняется.

По построению

$$\Phi_* = \begin{pmatrix} H_{*1} \\ H_{*2} \\ H_{*2}F \\ H_{*3} \\ H_{*4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку условия (3.2) и (3.3) выполняются, нелинейную составляющую можно добавить в линейную модель, и рассматриваемая проблема имеет решение. Далее,

$$\widehat{H}_* = \begin{pmatrix} H_{*1}F^{r_1-1}G \\ \dots \\ H_{*L}F^{r_L-1}G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

поскольку  $\text{rank}(\widehat{H}_*) = 2 < 4$ , на шаге 5 найдем матрицы

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \widehat{H}_* := P\widehat{H}_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что уравнения (3.1) с  $\widehat{H}_*$  имеют решение для  $u_1$  и  $u_2$ . Примем

$$v_1 := x_4 + x_5 + u_1, \quad v_2 := x_2^2 + x_1 + u_2. \quad (5.1)$$

Поскольку  $x_0 = \Phi x$ , примем

$$(x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04})^T := (x_2, x_3, x_4, x_6)^T$$

и построим динамическую часть компенсатора:

$$\begin{aligned} x_{01}^+ &= \text{sign}(x_{02}) + x_{04} + u_1; \\ x_{02}^+ &= -x_{02}x_{03}; \\ x_{03}^+ &= x_{03} + y_2 + u_1; \\ x_{04}^+ &= x_{02}^2 + y_1 + u_2. \end{aligned}$$

После замены  $(x_2, x_3, x_4, x_6)$  на  $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{04})$  в (5.1) получаем  $v_1 := x_{03} + y_2 + u_1$  и  $v_2 := x_{02}^2 + y_1 + u_2$ , статическая часть компенсатора имеет следующий вид:

$$u_1 = v_1 - x_{03} - y_2, \quad u_2 = v_2 - x_{02}^2 - y_1, \quad u_3 = v_3.$$

Так как третья строка матрицы  $\Phi_*$  линейно выражается через остальные, удалим ее, положим

$$(x_{*1}, x_{*2}, x_{*3}, x_{*4})^T := (x_2, x_3, x_4, x_6)^T$$

и получим описание системы  $S_*$ :

$$\begin{aligned} x_{*1}^+ &= \text{sign}(x_{*2}) + x_{*4} + v_1 - x_{*3} - y_2; \\ x_{*2}^+ &= -x_{*2}x_{*3}; \quad x_{*3}^+ = v_1; \quad x_{*4}^+ = v_2. \end{aligned}$$

## 6. Заключение

В работе предложен метод решения задачи аккомодации к дефектам для систем, описываемых нелинейными моделями, с использованием линейных методов. Особенность этого метода состоит в том, что его реализация не требует предварительного оценивания параметров, но гарантирует не искажаемое дефектами движение системы лишь в некотором подпространстве ее пространства состояния. Для решения задачи в работе был использован логико-динамический подход, позволяющий решить задачу для нелинейных систем с использованием только линейных методов.

### Список литературы

1. Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. Diagnosis and fault tolerant control. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
2. Kaldmae A., Kotta U., Shumsky A., Zhirabok A. Measurement feedback disturbance decoupling in discrete-time nonlinear systems // Automatica. 2013. Vol. 49. P. 2887–2891.
3. Kaldmae A., Kotta U., Jiang B., Shumsky A., Zhirabok A. Faulty plant reconfiguration based on disturbance decoupling methods // Asian Journal of Control. 2016. Vol. 8, N. 3. P. 858–867.
4. Жирабок А. Н., Шумский А. Е. Алгебраические методы анализа нелинейных динамических систем. Владивосток: Дальнаука, 2008.
5. Шумский А. Н., Жирабок А. Н. Метод аккомодации нелинейных динамических систем к дефектам // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 4. С. 62–70.
6. Жирабок А. Н., Усольцев С. А. Линейные методы при диагностировании нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 149–159.
7. Жирабок А. Н., Шумский А. Е., Павлов С. В. Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом // Автоматика и телемеханика. 2017. № 7. С. 3–21.
8. Бобко Е. Ю., Жирабок А. Н., Шумский А. Е. Методы аккомодации к дефектам в технических системах // Известия РАН. Теория и системы управления. 2016. № 5. С. 58–72.

# Solution of Fault Accommodation Problem in Nonlinear Systems by Methods of Linear Algebra

A. N. Zhirabok, zhirabok@mail.ru, A. V. Zuev, alvzuev@gmail.com, E. Yu. Bobko, Evgbobko@gmail.com, A. L. Filatov, filatov@mail.ru,  
Far Eastern Federal University, Vladivostok, 690950, Russian Federation

Corresponding author: **Zhirabok A. N.**, Dr. of Sci., Professor, Far Eastern Federal University, Vladivostok, 690950, Russian Federation, e-mail: zhirabok@mail.ru

Accepted on August 16, 2019

## Abstract

*Solution of the problem of fault accommodation in nonlinear dynamic systems is related to constructing the control law which provides full decoupling with respect to fault effects. The possibility of this solution is strictly limited by the demand on the system state vector availability (this vector is immediately included into control law description). As a rule, not all components of the state vector are immediately measurable at practice. Also, it is impossible to estimate full state vector for the system with unknown (affected by the faults) dynamics. The purpose of this article is to solve the problem of full decoupling by constructing a compensator that is independent of the fault effects and is based on a new control law. A solution is based on so-called logic-dynamic approach using only linear methods to solve the problem for nonlinear systems. The implementation of this method does not require a preliminary estimation of the parameters. It is assumed that fault detection and isolation procedure is performed by known methods. Assume the fault occurred and detected, then a solution of the control problem is performed on the basis of additional system that corresponding in a definite sense to the initial model. To solve the problem of accommodation, an efficient algorithm based on a logical-dynamic approach is presented, as a result of which a compensator is constructed. Additional system does not contain unknown vector that describes defects. As a result, fault accommodation effect is achieved. Theoretical results are demonstrated by illustrative and illustrative example.*

**Keywords:** nonlinear systems, fault tolerance, accommodation, decoupling, logical-dynamic approach

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Scientific Foundation, project no. 16-19-00046-П.

For citation:

Zhirabok A. N., Zuev A. V., Bobko E. Yu., Filatov A. L. Solution of Fault Accommodation Problem in Nonlinear Systems by Methods of Linear Algebra, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 21–27.

DOI: 10.17587/mau.21.21-27

## References

1. Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. Diagnosis and fault tolerant control, Berlin, Springer-Verlag, 2003.
2. Kaldmae A., Kotta U., Shumsky A., Zhirabok A. Measurement feedback disturbance decoupling in discrete-time nonlinear systems, *Automatica*, 2013, vol. 49, pp. 2887–2891.

3. Kaldmae A., Kotta U., Jiang B., Shumsky A., Zhirabok A. Faulty plant reconfiguration based on disturbance decoupling methods, *Asian Journal of Control*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 858–867.
4. Zhirabok A. N., Shumsky A. Ye. Algebraic methods for analyzing nonlinear dynamic systems, Vladivostok, Dal'nauka, 2008 (in Russian).
5. Shumsky A. Ye., Zhirabok A. N. The method of accommodation of nonlinear dynamic systems to defects, *Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2009, no. 4, pp. 62–70 (in Russian).
6. Жи́рабок А. Н., Усо́льцев С. А. Linear methods in the diagnosis of nonlinear systems, *Avtomatika i telemekhanika*, 2000, no. 7, pp. 149–159 (in Russian).
7. Zhirabok A. N., Shumsky A. Ye., Pavlov S. V. Diagnosing linear dynamic systems by nonparametric method, *Avtomatika i telemekhanika*, 2017, no. 7, pp. 3–21 (in Russian).
8. Bobko E. Yu., Zhirabok A. N., Shumsky A. Ye. The method of fault accommodation in technical systems, *Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2016, no. 5, pp. 58–72 (in Russian).

В. А. Карташев, проф., вед. науч. сотр., kart@list.ru, В. В. Карташев, мл. науч. сотр.,  
ФИЦ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН

## Управление траекторией торможения манипулятора с неисправным приводом методом задержек включения тормозов

*Исследование движения робота в нештатных ситуациях является важным новым направлением робототехники. Его практическая значимость состоит в учете на этапе проектирования комплексов и разработке управления ими отказов и случаев некорректной работы оборудования в целях минимизации возможного ущерба.*

*При возникновении аварийной ситуации система управления манипуляционного робота автоматически останавливает манипулятор, отключая приводы и активируя тормоза. Аварийное торможение манипулятора является неуправляемым и может привести к существенным отклонениям от программной траектории. Непредсказуемость вектора отклонения чревата столкновениями с оборудованием, находящимся в рабочей зоне робота.*

*В работе рассматривается устройство, позволяющее формировать траекторию аварийного торможения методом задержек включения тормозов. Устройство обеспечивает включение тормозов каждой степени подвижности независимо друг от друга. Задержки рассчитываются таким образом, чтобы минимизировать отклонение траектории торможения от программной траектории.*

*Дано теоретическое решение математической задачи минимизации отклонения от программной траектории. Решение сведено к конечным формулам, зависящим от скоростей в шарнирах робота в момент активации аварийного торможения и интенсивности замедления тормозом каждой степени подвижности.*

*Приводится сравнение предлагаемого способа формирования траектории аварийного торможения с описанным ранее, в котором приводы степеней подвижности отключаются с рассчитанными задержками и затем включаются тормоза. Достоинством такого способа является уменьшение амплитуды отклонения на порядок.*

*В предложенном способе все приводы отключаются одновременно, и на первом этапе торможения происходит только за счет сил трения в редукторах. По истечении некоторого рассчитанного в начале торможения интервала времени, своего для каждой степени подвижности, включаются тормоза. Аналитические оценки показывают, что во всех случаях такой способ обеспечивает меньшие отклонения от программной траектории. Кроме того, он применим даже в случае возникновения неисправности хотя бы одного из приводов.*

**Ключевые слова:** манипуляционный робот, аварийное торможение, формирование траектории торможения

### Введение

Проблеме обеспечения устойчивости работы при отказах оборудования традиционно уделяется достаточно много внимания разработчиками сложных аппаратов [1, 2], технологических процессов [3] и систем управления ими. Для этой цели применяются различные методы повышения отказоустойчивости аппаратуры [1] и алгоритмы прогнозирования отказов [2].

Направление, связанное с разработкой управления роботом в нештатных ситуациях, возникло сравнительно недавно. Его практическая значимость состоит в учете на этапе проектирования возможных отказов и некорректной работы оборудования в целях минимизации ущерба [4], определении границ возможных нагрузок [5], разработке алгоритмов своевременного выявления отказов и реакции на них систем управления [6].

При обнаружении нештатной ситуации система управления останавливает манипулятор путем отключения приводов и приведения в действие тормозов. Такой способ аварийного торможения используют все современные манипуляционные роботы [7, 8].

Примером нештатной ситуации является возникновение неисправности в приводе манипулятора. Это может стать причиной непредсказуемого отклонения от программной траектории в силу того, что оказывается невозможной реализация заданного движения степени подвижности. Применение аварийного останова позволяет уменьшить вероятность опасных столкновений с предметами в рабочей зоне.

Известная проблема аварийного останова состоит в том, что скорости степеней подвижности изменяются независимо друг от друга, в результате чего манипулятор уводит от программ-

ной траектории. Отклонение можно уменьшить за счет увеличения интенсивности торможения. Для этого в дополнение к тормозам можно использовать двигатели с закороченными на время торможения с помощью реле обмотками [9], создавать дополнительный тормозной момент двигателями [10] и корректировать траекторию торможения в сторону программной траектории с помощью двигателей [11] путем перехода на программу управления торможением в управляющем контроллере.

Следует также учитывать, что интенсивность торможения с применением тормозов существенно больше, чем за счет торможения двигателями, поэтому использование двигателей не способно существенно увеличить эффективность торможения и уменьшить отклонение от программной траектории. Кроме этого, применимость всех рассмотренных способов ограничена случаями полностью исправного оборудования робота. При неисправности хотя бы одного датчика положения применить его нельзя. Необходимо принять также во внимание, что отказы оборудования, которые являются существенными для обеспечения безопасности движения манипулятора, могут быть выявлены в масштабе реального времени. Решение этой задачи приведено в работе [6].

В статье [12] описан способ формирования траектории аварийного торможения, в котором приводы отключаются с некоторой задержкой. Задержки вычисляются перед началом торможения с тем, чтобы минимизировать отклонения траектории торможения от программной. Полученные оценки показывают, что таким способом амплитуда отклонения может быть уменьшена почти на порядок. В работах [13, 14] описано устройство и способ его подключения к системе управления, которое делает возможным реализацию способа.

Рассматриваемый алгоритм формирования траектории предполагает исправность всех приводов. Это условие не позволяет применять его в случае отказа хотя бы одного привода в силу того, что после отключения питания скорость движения степени подвижности не будет постоянной и станет уменьшаться за счет трения в редукторе.

В данной работе рассматривается способ формирования траектории аварийного торможения, в котором все приводы выключаются одновременно, а каждый тормоз приводится в действие с некоторой задержкой.

## Постановка задачи

В современных манипуляционных роботах электромагнитные тормоза включаются одновременно при выключении их шины питания. Техническая реализация предлагаемого способа управления траекторией торможения предполагает, что система управления может включить тормоз любой степени подвижности независимо от других. Эта возможность может быть достигнута путем подключения к системе управления рассматриваемого ниже устройства. Оно обеспечивает включение тормозов в требуемой последовательности и с необходимыми задержками.

## Устройство управления аварийным торможением

На рис. 1 показана структурная схема рассматриваемого устройства и подключение его к системе управления манипуляционного робота. На рис. 1 обозначены:  $1$  — манипулятор,  $11i$  — тормоз  $i$ -й степени подвижности манипулятора,  $12i$  — двигатель,  $13i$  — датчик положения,  $14i$  — электронная схема включения/выключения тормоза,  $15i$  — ее устройство управления,  $2$  — система управления роботом,  $21$  — управляющая ЭВМ системы управления роботом,  $22$  — устройство включения/выключения тормозов по сигналам управляющей

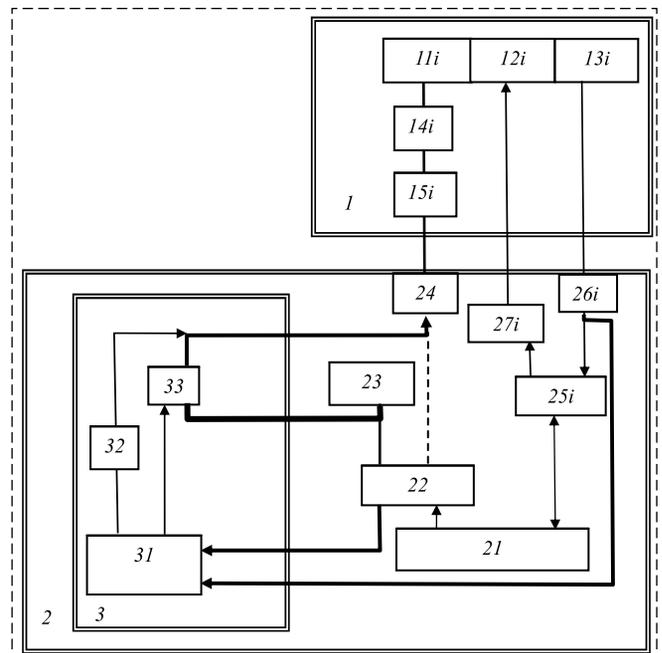


Рис. 1  
Fig. 1

ЭВМ, 23 — блок питания тормозов, 24 — разъем управления тормозами, 25*i* — контроллер *i*-й степени подвижности манипулятора, 26*i* — разъем сигналов от датчиков положения манипулятора, 27*i* — блок управления двигателем от сигналов контроллера, 3 — устройство управления задержками включения тормозов, 31 — контроллер устройства, 32 — передатчик сигнала включения/выключения тормозов по линии питания, 33 — устройство включения/выключения питания тормозов.

Соединения, которые в системе управления должны быть исключены, отмечены на схеме штриховой линией, те, которые должны быть установлены при подключении, отмечены утолщенной линией.

Устройство работает следующим образом. При необходимости аварийно остановить манипулятор контроллер робота 21 с помощью блока 22 штатно включает все тормоза путем снятия напряжения, поступающего на них от источника питания 23. В результате на выходе блока 22 оказывается низкий уровень напряжения. Напряжение на шине питания подается на информационный вход контроллера 31.

При появлении низкого уровня на входе контроллер рассчитывает моменты времени, в которые должны быть включены тормоза каждой степени подвижности. Они зависят от текущих скоростей степеней, которые вычисляются по показаниям датчиков положения 13*i*. Показания датчиков поступают в стойку управления через входы 27*i*. При движении манипулятора по программной траектории текущие скорости степеней подвижности совпадают с программными скоростями.

При наступлении момента включения тормоза очередной степени подвижности *i* контроллер 31 с помощью устройства 32 передает по линии питания тормозов команду о включении тормоза контроллеру 15*i*, который выполняет ее посредством блока 14*i*. После включения тормозов последней степени подвижности контроллер 31 с помощью блока 33 одновременно отключает линию питания тормозов, что гарантирует их включение даже при отказе блоков 14*i* и 15*i*.

Из приведенного описания работы подключаемого устройства можно сделать вывод, что его контроллер позволяет включать тормоза каждой степени подвижности независимо от других. В результате оказывается возможным формировать траекторию манипулятора по-

средством выбора моментов начала торможения каждой степени подвижности с использованием тормозов, в том числе и для того, чтобы обеспечить близость траектории торможения к программной траектории.

Опишем алгоритм вычисления задержек для манипуляционного робота, имеющего *n* степеней подвижности.

### Алгоритм вычисления задержек

При переходе в режим аварийного торможения контроллер рассматриваемого устройства прогнозирует длительности торможения всех степеней подвижности:

$$T_i = \frac{V_i}{w_{ib}}, i = \overline{1, n}.$$

Здесь  $V_i$  — текущие скорости, которые вычисляются контроллером по показаниям датчиков положения;  $w_{ib}$  — ускорения торможения степеней подвижности за счет тормозов.

На основе вычисленных величин контроллер находит такую степень, длительность торможения которой наибольшая. Не ограничивая общности, будем считать, что она имеет номер 1. Затем для каждой степени подвижности *i* контроллер определяет ускорения  $w_{ip}$ , при которых обеспечивается торможение манипулятора вдоль программной траектории:  $w_{ip} = V_i/T_1$ , и сравнивает найденную величину с ускорением  $w_{ig}$  торможения силами трения в редукторе. Если  $w_{ig} \geq w_{ip}$ , то тормоз степени подвижности *i* включается только после ее полной остановки.

Если  $w_{ig} < w_{ip}$ , то контроллер приводит в действие тормоза с задержкой  $T_{id}$ :

$$T_{id} = \frac{T_i - T_1}{\sqrt{2(1 - w_{ig}/w_{ip})} + 1 - w_{ig}/w_{ib}}, i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

### Решение задачи минимизации отклонения от программной траектории

Опишем кратко решение задачи минимизации отклонения от программной траектории. Для этого рассмотрим рис. 2. На нем приняты следующие обозначения:  $O$  — момент отключения питания приводов;  $1$  — индекс степени подвижности с наибольшей длительностью торможения; изменение ее скорости дается линией  $V_1 T_1$ ;  $V_1$  — скорость в начале аварийного

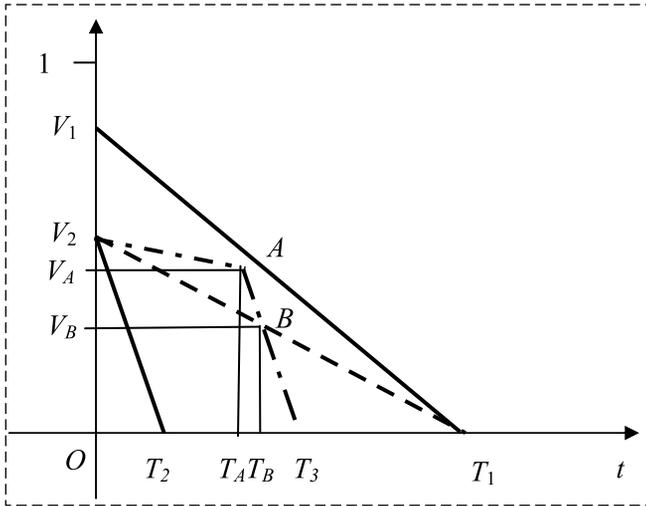


Рис. 2  
Fig. 2

торможения;  $T_1$  — длительность торможения тормозом;  $V_2$ ,  $T_2$  — те же величины для второй степени подвижности; значения скоростей каждой степени подвижности изображаются в относительных единицах к их максимальным значениям; 1 на вертикальной оси означает максимальную скорость.

Штриховой линией обозначено изменение скорости второй степени подвижности при ее движении по программной траектории. Нетрудно показать, что в точке останова отклонение второй степени подвижности от программной траектории пропорционально площади треугольника  $V_1T_1T_2$ , которую обозначим  $S\Delta V_1T_1T_2$ .

Штрихпунктирная линия показывает изменение скорости второй степени подвижности, когда траектория торможения формируется с помощью предлагаемого алгоритма. До момента времени  $T_A$  торможение происходит за счет трения в редукторе. Рис. 2 соответствует случаю, при котором ускорение торможения силами трения редуктора второй степени подвижности  $w_{2g}$  меньше, чем ускорение  $w_{2p}$ , необходимое для движения по программной траектории.

Затем включается тормоз, и степень подвижности останавливается в момент времени  $T_3$ . На интервале  $OT_B$  (точка  $B$  — точка пересечения отрезков  $V_2T_1$  и  $AT_3$ ) вторая степень подвижности движется с опережением по отношению к программной траектории. На интервале  $T_BT_1$  скорость второй степени меньше, чем требуется для движения по программной траектории.

В момент времени  $T_B$  отклонение от программной траектории пропорционально  $S\Delta V_2AB$ , после остановки — пропорционально  $|S\Delta V_2AB -$

$S\Delta BT_1T_3|$ . Максимальное отклонение равно  $\max(S\Delta V_2AB, |S\Delta V_2AB - S\Delta BT_1T_3|)$ .

Минимальным отклонение будет при выполнении условия

$$S\Delta V_2AB(T_A) = |S\Delta V_2AB(T_A) - S\Delta BT_1T_3(T_A)|,$$

которое равносильно условию  $2S\Delta V_2AB(T_A) = S\Delta BT_1T_3(T_A)$ .

Аналитическое решение этого уравнения приводит к формуле (1).

### Случай малого значения начальной скорости

При малом значении начальной скорости второй степени подвижности ускорение  $w_{2p}$  движения вдоль программной траектории может оказаться настолько малым, что оно окажется меньше замедления трением в редукторе  $w_{2g}$  (рис. 3). В этом случае до полной остановки торможение должно обеспечиваться силами трения в редукторе и только затем следует включить тормоз.

При оценке отклонения от программной траектории следует иметь в виду, что ускорение торможения за счет трения в редукторе кратно меньше, чем ускорение  $w_{2b}$  при использовании электромагнитного тормоза. Рассматриваемый случай имеет место только в том случае, когда ускорение торможения по программной траектории  $w_{2p}$  достаточно мало. Нетрудно показать, что отклонение от программной траектории, пропорциональное  $S\Delta V_2AT_1$ , удовлетворяет соотношению

$$\frac{S(\Delta V_2AT_1)}{S(\Delta V_1OT_1)} = \frac{w_{2g}}{4w_{1b}} \ll \frac{1}{4}.$$

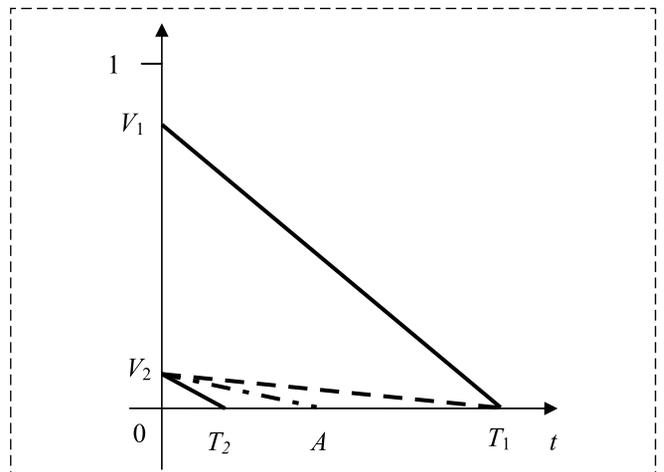


Рис. 3  
Fig. 3

Из приведенного неравенства следует, что отклонение пренебрежимо мало по сравнению с выбегом манипулятора при торможении  $S\Delta V_1 OT_1$ .

### Сравнение способов формирования траектории

Важным свойством рассматриваемого способа формирования траектории (в нем питание приводов отключается сразу, и на первом этапе торможение осуществляется за счет сил трения в редукторе) является тот факт, что он позволяет обеспечить меньшее отклонение от программной траектории, чем предложенный ранее способ, основанный на задержке отключения приводов. Справедливость сформулированного свойства основана на следующих соображениях.

Пусть  $T_A$  — решение задачи минимизации отклонения для рассматриваемого алгоритма. Следовательно, для него выполнено условие

$$2S\Delta V_2 AB(T_A) = S\Delta BT_1 T_3(T_A).$$

В рассмотренном ранее алгоритме после активации аварийного режима торможения до момента отключения приводов (т. е. в течение десятых долей секунды) скорость степени подвижности практически не меняется. На интервале  $OT_A$  ее график дается горизонтальной линией, проходящей через точку  $OV_2$ .

Если в момент времени  $T_A$  включить тормоз, то график изменения скорости окажется на прямой  $AT_A$ . Обозначим  $A^*$  точку пересечения горизонтальной линии и прямой  $AT_A$ ;  $A^* = (T_A, V_2)$ . Нетрудно установить, что

$$S\Delta V_2 A^* B(T_A) > S\Delta V_2 AB(T_A) \\ \text{и } 2S\Delta V_2 A^* B(T_A) > S\Delta BT_1 T_3(T_A).$$

Из этих неравенств следует, что наименьшее отклонение для предложенного ранее алгоритма достигается при включении тормоза в момент времени  $T_A^* < T_A$ , т. е. несколько раньше, чем в рассматриваемом алгоритме. В этом случае верно неравенство  $S\Delta BT_1 T_3(T_A^*) > S\Delta V_2 AB(T_A)$ , которое означает, что отклонение от программной траектории в прежнем алгоритме, пропорциональное  $S\Delta BT_1 T_3(T_A^*)$ , больше, чем в новом.

Доказанное свойство показывает, что одновременное отключение питания всех приводов позволяет сформировать траекторию аварий-

ного торможения с меньшим отклонением от программной траектории, чем рассмотренный ранее способ, в котором приводы отключаются с некоторыми задержками.

### Заключение

При обнаружении неисправности система безопасности манипуляционного робота должна немедленно его остановить. Для того чтобы избежать неуправляемого движения на этапе торможения и связанного с этим ухода от программной траектории, предлагается формировать траекторию аварийного торможения путем включения тормозов с некоторыми задержками, предоставляя возможность какое-то время тормозиться силами трения в редукторах.

Предложенный способ управления торможением схож с рассмотренным ранее в работе [12], в котором выключение каждого привода и одновременная активация тормоза степени подвижности осуществляются с некоторой задержкой. При этом удается кратно уменьшить отклонение от программной траектории. В настоящем исследовании показано, что в предложенном новом способе формирования траектории торможения отклонения во всех случаях оказываются меньшими, чем в исходном.

Существенным преимуществом нового способа является также тот факт, что в момент возникновения опасности происходит одновременное отключение питания всех приводов. Это отличие позволяет применять его даже в случае отказа хотя бы одного из приводов.

### Список литературы

1. Заведеев А. И. Построение бортовой системы управления космическим аппаратом повышенной отказоустойчивости с применением адаптивной логики в алгоритмах диагностики и контроля // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 10. С. 664—672.
2. Большаков А. А., Кулик А. А., Сергушов И. В., Скрипаль Е. Н. Метод прогнозирования авиационного происшествия летательного аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 6. С. 416—423.
3. Щербаков М. А., Кушников В. А. Модели и алгоритмы системы управления аварийными ситуациями при производстве стекла // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. № 2 (55). С. 196—199.
4. Резчиков А. Ф., Кушников В. А., Иващенко В. А., Фоминых Д. С., Богомолов А. С., Филимонок Л. Ю. Минимизация ущерба от нарушения технологического процесса в сварочных роботизированных технологических комплексах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 5. С. 328—332.

5. **Кодяков А. С., Павлюк Н. А., Будков В. Ю.** Исследование устойчивости конструкции антропоморфного робота Антарес при воздействии внешней нагрузки // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2017. Т. 18, № 5. С. 321–327.

6. **Карташев В. А., Сафронов В. В.** Система автоматического контроля безопасности перемещений манипуляционного робота // *Изв. РАН. ТИСУ*. 2017. № 2. С. 162–167.

7. **User manual of UR3/CB3 robot.** СПб.: Universal Robots, 2015. 147 с

8. **KUKA Robots KR 5 arc Specification.** Augsburg, KUKA Roboter GmbH, 2011. 67 p.

9. **Ho S. J., Rak K. S.** Emergency Stop Method of Industrial Robot. Pat. KR20120045766 (A), 2012-05-09.

10. **Hofmann J., Schwarz R., Marx S.** Industrial Robot Having Redundant Emergency Brake Circuit. US8736219 — 2014-05-27.

11. **Bosga S.** A Robot with at least two Separate Brake Devices and a Method of Controlling such a Robot. Pat. WO 2008037799.

12. **Карташев В. А., Карташев В. В.** Способ формирования траектории аварийного торможения манипулятора // *Изв. РАН. ТИСУ*. 2018. № 4. С. 162–168.

13. **Карташев В. А., Карташев В. В.** Формирование траектории аварийного торможения манипулятора методом последовательного отключения приводов // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2018. Т. 19, № 8. С. 536–541.

14. **Карташев В. А., Карташев В. В.** Устройство управления аварийным торможением манипулятора. Патент РФ № 2 658589.

## Emergency Braking Trajectory Control for Manipulator in the Case of Driver Failure

V. A. Kartashev, kart@list.ru, V. V. Kartashev, vsevolod.kartashev@gmail.com,  
FRC Keldysh Institute for Applied Mathematics RAS, Russia, 125047, Moscow

Corresponding author: **Kartashev Vladimir A.** Full Professor, Doctor of Math., Leading Research Fellow,  
FRC Keldysh Institute for Applied Mathematics RAS, 125047, Moscow, Russian Federation,  
e-mail: kart@list.ru

Accepted on September 02, 2019

### Abstract

*In emergency situation robot control system stops the manipulator by shutting down drivers and activating brakes. This mode is used in all cases of equipment failure detection or while alarm button is pressed on control panel. Emergency braking is uncontrolled motion. As result manipulator movement deviates from program trajectory as the relations between velocities in joints differ significantly. This creates danger of collisions with objects in robot work space. The paper describes device that can be connected to control system. Connection needs insignificant changing in hardware architecture of robot control system. Device consists of controller and individual electronic schemes that are able to activate brakes of each degree of freedom regardless from other one. This feature allows to design braking trajectory by activating brakes in specific sequence and calculated delays. Mathematical solution for deviation minimization problem of braking trajectory from program one is presented. The solution is reduced to mathematical formulas which depend of the temporary velocities and values of braking decelerations in manipulator joints. The considered way of control differs from similar one described earlier by that in emergency situation drivers turn off immediately. On the first stage manipulator brakes by friction forces in gear boxes. Theoretical evaluations show that in all cases this reduces deviations from program trajectory. Additionally the new way can be used even if fault takes place at least one of drivers.*

**Keywords:** manipulation robot, emergency braking, braking trajectory designing

For citation:

**Kartashev V. A., Kartashev V. V.** Emergency Braking Trajectory Control for Manipulator in the Case of Driver Failure, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 28–33.

DOI: 10.17587/mau.21.28-33

### References

1. **Zavedeev A. I.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 10, pp. 664–672 (in Russian).

2. **Bolshakov A. A., Kulik A. A., Sergushov I. V., Scripal E. N.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 6, pp. 416–423 (in Russian).

3. **Scherbakov M. A., Kushnikov V. A.** *Vestnik of Saratov University*, 2011, no. 2, pp. 196–199 (in Russian).

4. **Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivaschenko V. A., Fominnykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Y.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 328–332 (in Russian).

5. **Kodyakov A. S., Pavliuk N. A., Budkov V. Y.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 321–327 (in Russian).

6. **Kartashev V. A., Safronov V. V.** *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2017, vol. 56, no. 2, pp. 328–333.

7. **User manual of UR3/CB3 robot- C-II.** *Universal Robots*, 2015, 147 p.

8. **KUKA Robots KR 5 arc Specification.** Augsburg, KUKA Roboter GmbH, 2011, 67 p.

9. **Ho S. J., Rak K. S.** Emergency Stop Method of Industrial Robot, Pat. KR20120045766 (A), 2012-05-09.

10. **Hofmann J., Schwarz R., Marx S.** Industrial Robot Having Redundant Emergency Brake Circuit, US8736219 — 2014-05-27.10.

11. **Bosga S.** A Robot with at least two Separate Brake Devices and a Method of Controlling such a Robot, Pat. WO 2008037799.

12. **Kartashev V. A., Kartashev V. V.** *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, no. 4, pp. 666 (in Russian).

13. **Kartashev V. A., Kartashev V. V.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol.19, no. 8, pp. 536–541 (in Russian).

14. **Kartashev V. A., Kartashev V. V.** Device for manipulator emergency braking, Pat. RF2658589 (in Russian).

Э. К. Лавровский, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., lavrov@imec.msu.ru,  
Е. В. Письменная, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., epismen@yandex.ru,  
НИИ механики МГУ, Москва

## О походках оператора в пассивном экзоскелете нижних конечностей при использовании режима закрепленного колена

*Рассмотрена динамическая модель движения в сагиттальной плоскости пассивного экзоскелета нижних конечностей, интегрированной с аналогичной моделью человека-оператора, определяющего движение всей конструкции. Экзоскелет призван помочь оператору в перемещении дополнительного точечного груза, размещенного в "рюкзаке" на спине. Конструкция экзоскелета не имеет активных движительных элементов в шарнирах, он наделен только полуавтоматической системой запирания или освобождения коленных суставов на отдельных этапах движения, которые, однако, влияют на общий рисунок походки. Изучаются энергетические затраты и пиковые значения управляющих моментов, которые человек-оператор применяет в процессе перемещения экзоскелета на некоторых типах регулярных, плоских, одноопорных походок. Полученные результаты позволяют оценить эффективность режима запирания-освобождения коленного сустава, используемого такими аппаратами. Были исследованы как случаи безударных переходов в режим запертого колена, так и переходы, сопровождающиеся возникновением ударных воздействий в динамической системе. При математическом моделировании масс-инерционные характеристики тела человека учитывались в соответствии с данными, принятыми в антропологии.*

**Ключевые слова:** пассивный экзоскелет, регулярные режимы движения, энергетические затраты, максимумы управляющих моментов

### Введение

Результаты фундаментальных исследований, полученные в последнее время в области биомехатроники, позволяют разработать новые классы технических устройств, интегрированных с биологическими организмами. Одним из таких устройств является экзоскелет, дублирующий опорно-двигательный аппарат человека и существенно расширяющий его физические возможности. Известные разработки экзоскелетов [1–5] в своем большинстве сосредоточены на экзоскелетах нижних конечностей.

В данной работе рассматривается модельная задача о движении "пассивной" модификации экзоскелета вместе с человеком-оператором. Ее активный элемент способен только запиравать или освобождать в некоторые моменты времени коленный сустав человека; в остальном процесс перемещения реализуется за счет мускульных усилий оператора. Исследуется вопрос о том, в какой степени такая система способна снизить нагрузку на опорно-двигательный аппарат человека при регулярной ходьбе, при переноске тяжелых грузов по ровной, горизонтальной поверхности. Основные рассматриваемые критерии это — энергозатраты на один шаг и максимальные значения управляющих моментов, прикладываемые человеком-оператором. Основным аппаратом исследова-

ния — численный метод. В случае упрощающего предположения о невесомости ног та же задача рассматривалась ранее в работе [5], данная работа эти результаты дополняет.

### Постановка задачи

Работа посвящена описанию и оценке результатов математического моделирования плоской, одноопорной, регулярной ходьбы человека-оператора, на которого надет пассивный экзоскелет, при наличии в его "рюкзаке" дополнительного тяжелого груза. Все численные исследования проводили при следующих средних антропоморфных параметрах тела человека: общая масса 73,4 кг, рост около 1,75 м при длине ног 0,916 м. Масс-инерционные параметры нижней половины тела соответствуют приведенным в работе [6]. Корпус рассматривался как однородный стержень длиной 0,74 м и массой 47,6 кг. В случае, когда оператор несет груз, считалось, что его масса равна 50 или 100 кг, и он располагается в легком "рюкзаке" на высоте 0,45 м выше таза. Экзоскелет имеет "каркас" массой 5 кг, соединяющий рюкзак с "поясом", закрепленным на талии оператора. К поясу прикреплены две металлические ноги общей массой 10 кг, конструкция аппарата повторяет форму тела человека-оператора.

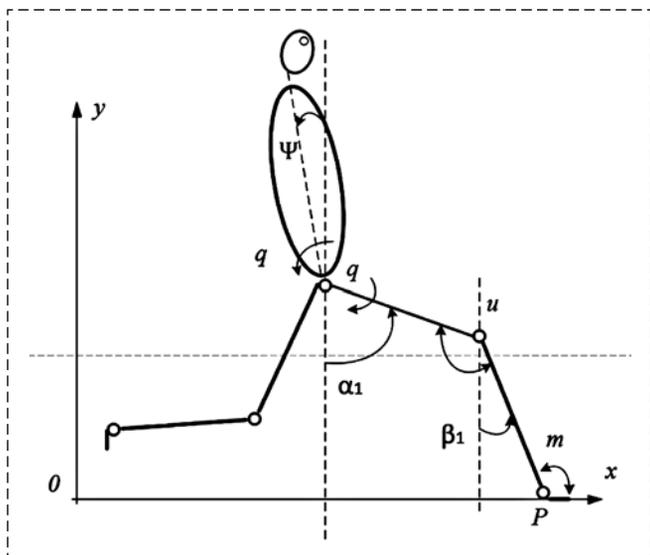


Рис. 1. Схема углов звеньев аппарата и управляющих моментов  
 Fig. 1. The diagram of the angles of the links of the apparatus and control moments

Схема аппарата — тела человека с надетым на него экзоскелетом — в процессе плоской одноопорной ходьбы представлена на рис. 1. Аппарат опирается на горизонтальную поверхность в точке  $P$ . Вторая нога находится в фазе переноса. Ноги крепятся к корпусу в шарнире тазобедренного сустава. Голень и бедро соединяются в коленном суставе — также плоском шарнире. Углы отклонения корпуса от вертикали  $\psi$  и соответственно углы отклонения бедра и голени опорной ноги от вертикали  $\alpha$  и  $\beta$  показаны на рис. 1,  $x$  и  $y$  — декартовы координаты тазобедренного сустава.

Аппарат управляется моментами  $q_i$ ,  $u_i$ ,  $m_i$  ( $i = 1, 2$ , здесь и далее  $i = 1$  для опорной ноги,  $i = 2$  — для переносимой ноги) соответственно в тазобедренном суставе, коленном и голеностопном. В случае пассивного экзоскелета управляющие моменты  $q$ ,  $m$  суть исключительно мышечные усилия человека-оператора, в то время как момент  $u$  при свободном колене — также мышечный, а если колено запирается, то этот момент обеспечивается за счет механизма экзоскелета. Систему динамических уравнений одноопорной ходьбы аппарата нетрудно получить с помощью метода Лагранжа 2-го рода [7, 8]:

$$B(z) \|\ddot{z}\| + D(z) \|\dot{z}^2\| + Ag \|\sin z\| = Q_z, \quad (1)$$

где  $\|z\| = \|x, y, \psi, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2\|$  — вектор пространства переменных;  $B(z)$ ,  $D(z)$ ,  $A$  — некоторые матрицы;

$$Q_z = \|Q_x, Q_y, Q_\psi, Q_{\alpha_1}, Q_{\beta_1}, Q_{\alpha_2}, Q_{\beta_2}\|^T,$$

$$Q_x = R_{1x}, \quad R_{2x} = 0, \quad Q_y = R_{1y} - Mg,$$

$$R_{2y} = 0, \quad m_2 = 0, \quad Q_\psi = q_1 + q_2,$$

$$Q_{\alpha_i} = -u_i - q_i + 2a(R_{ix} \cos \alpha_i + R_{iy} \sin \alpha_i),$$

$$Q_{\beta_i} = u_i + 2b(R_{ix} \cos \beta_i + R_{iy} \sin \beta_i) + m_i, \quad i = 1, 2.$$

Здесь обозначено:  $R_{ix}$  и  $R_{iy}$  ( $i = 1, 2$ ) — горизонтальная и вертикальная составляющие силы реакции в опорной и переносной ногах,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $M$  — суммарная масса аппарата с грузом.

Число переменных, описывающих одноопорные походки, переопределено. Поэтому систему (1) приходится дополнять за счет учета дважды продифференцированных условий связей по переменным, относящимся к опорной ноге. Расширенная система (1) — это девять соотношений, содержащих в левых частях семь вторых производных вектора  $z$ , их правые части содержат семь ненулевых компонент силы реакции опоры и управляющих моментов.

Математическое моделирование целиком опирается на приведенные выше динамические условия (1). Основными целями математического моделирования является ответ на следующие вопросы: 1) в какой момент в течение периода шага  $T$  целесообразно запирает колено опорной ноги; 2) какова энергетика тех или иных походок человека-оператора в экзоскелете, каков возможный минимум энергетика при заданных кинематических параметрах шага; 3) каков рисунок управляющих моментов, которые человеку необходимо приложить для осуществления тех или иных походок, и каковы максимальные значения этих моментов. Ответ на первые два вопроса дается в рамках исследования энергетических затрат человека на реализацию одного шага из последовательности шагов при периодической ходьбе.

Для оценки этих затрат рассматривали функционал

$$W = \int_0^T \sum_{i=1}^2 \{ |q_i(\dot{\psi} - \dot{\alpha}_i)| + |u_i(\dot{\alpha}_i - \dot{\beta}_i)| + |m_i \dot{\beta}_i| \} dt. \quad (2)$$

Отметим, что на этапе движения в режиме запертого колена величина  $u$  в подынтегральной функции (2) как момент, прикладываемый человеком к механизму, равен нулю и потому не влияет на значение вычисляемого интеграла  $W$ .

## Энергетика и динамические эффекты безударных походок

При запирации коленного сустава в некоторый момент времени  $\tau$  в механической системе, описываемой системой (1), происходит наложение связи, которое сопровождается, вообще говоря, нежелательными скачками угловых и линейных скоростей аппарата, а также импульсными воздействиями на систему за счет реакций опоры и моментов в сочленениях. Так как после наложения связи в момент времени  $t = \tau + 0$  тазобедренный сустав движется по окружности с центром в точке пятки  $P(x_p, y_p)$ , то

$$\dot{x}^+(x - x_p) + \dot{y}^+(y - y_p) = 0.$$

Используя уравнения (1), нетрудно показать, что аналогичное условие при  $t = \tau - 0$

$$\dot{x}^-(x - x_p) + \dot{y}^-(y - y_p) = 0 \quad (3)$$

гарантирует построение безударной траектории движения. Иными словами, если в момент  $t = \tau - 0$ , предшествующий запираению коленного сустава опорной ноги, межзвенная угловая скорость в этом суставе  $\beta_1 - \alpha_1 = 0$ , то при запираении коленного сустава не происходит скачков скоростей, и нежелательное явление удара отсутствует. Освобождение колена ударными явлениями не сопровождается.

### Несимметричные безударные походки

Рассмотрим один из приемов построения безударной походки. На рис. 2 показана в пло-

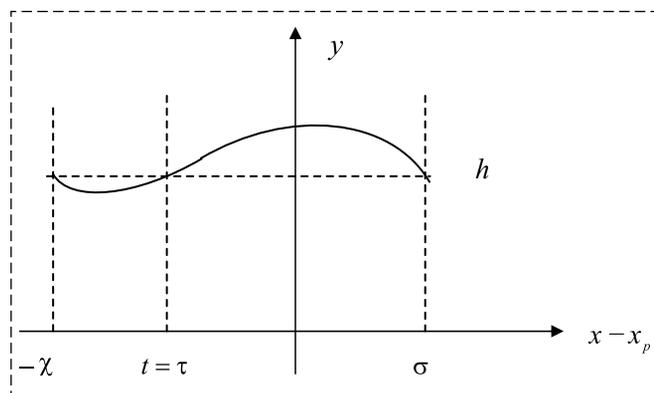


Рис. 2. Схема траектории таза при безударной несимметричной походке

Fig. 2. The diagram of the trajectory of the pelvis with an un-stressed asymmetric gait

скости  $(x, y)$  траектория тазобедренного сустава на шаговом цикле, начинающаяся при  $t = 0$  в точке  $x = x_p - \chi, y = h$  и заканчивающаяся при  $t = T$  в точке  $x = x_p + \sigma, y = h$ . Таким образом,  $[-\chi, \sigma]$  является опорным отрезком ноги. В дальнейшем будут рассматриваться только симметричные в смысле выноса ноги вперед-назад походки, при которых  $\chi = \sigma$ . При  $t \in [0, \tau)$  коленный сустав свободен, при  $t = \tau$  он запирается и остается запертым на промежутке  $t \in (\tau, T]$ , при этом тазобедренный сустав движется по окружности. Будем считать, что это движение происходит с некоторой (например, постоянной) угловой скоростью  $\dot{\varphi} = \omega$ , тогда

$$\begin{aligned} x - x_p &= \rho \cos \varphi(t), \quad y - y_p = \rho \sin \varphi(t), \\ \varphi(t) &= \omega t + \delta \equiv \left( 2 \arccos \frac{\sigma}{\rho} - \pi \right) t / T + \left( \pi - \arccos \frac{\sigma}{\rho} \right), \\ \rho &= \sqrt{\sigma^2 + h^2}, \quad \cos \delta = -\frac{\sigma}{\rho}, \quad \sin \delta = \frac{h}{\rho}. \end{aligned}$$

Поскольку ходьба — процесс периодический, то на участке движения при незапертом коленном шарнире экзоскелета должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} x(0) &= -\sigma, \quad \dot{x}(0) = -h\omega = \dot{x}(T), \\ y(0) &= h, \quad \dot{y}(0) = \sigma\omega = \dot{y}(T). \end{aligned} \quad (4)$$

В момент  $t = \tau$  ввиду условия (3) должны выполняться условия согласования по положению и скоростям тазобедренного сустава:

$$\begin{aligned} x(\tau - 0) &= x(\tau + 0) = \rho \cos \varphi(\tau); \\ \dot{x}(\tau - 0) &= \dot{x}(\tau + 0) = -\rho\omega \sin \varphi(\tau); \\ y(\tau - 0) &= y(\tau + 0) = \rho \sin \varphi(\tau); \\ \dot{y}(\tau - 0) &= \dot{y}(\tau + 0) = \rho\omega \cos \varphi(\tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, согласно соотношениям (4), (5) каждая из функций  $x(t), y(t)$  на интервале  $t \in [0, \tau)$  должна дополнительно удовлетворять четырем условиям. Удобнее рассматривать их, например, в виде полиномов третьего порядка — каждый с четырьмя неизвестными постоянными коэффициентами, подлежащими выбору:

$$\begin{aligned} x &= A_x t^3 + B_x t^2 + C_x t + D_x; \\ y &= A_y t^3 + B_y t^2 + C_y t + D_y. \end{aligned}$$

В результате возникают две системы линейных алгебраических уравнений четвертого порядка (относительно коэффициентов  $A_x, B_x,$

$C_x, D_x, A_y, B_y, C_y, D_y$ ). Момент времени  $\tau$  является величиной свободной и может подбираться из условия оптимизации того или иного функционала.

Возможны различные постановки задач в целях исследования движения человека в экзоскелете. Выберем в качестве закона изменения углового положения корпуса решение, возникающее в линеаризованной задаче так называемой "комфортабельной" ходьбы человека [8], характеризующееся движением таза на постоянной высоте с равномерной скоростью:

$$\psi(t) = \frac{ML}{2k_r} \left( \operatorname{ch}(\Omega t) - \frac{1 + \operatorname{ch}(\Omega T)}{\operatorname{sh}(\Omega T)} \cdot \operatorname{sh}(\Omega t) \right) + \frac{M(Vt - L/2)}{k_r}; \quad (6)$$

$$L = \sigma + \chi, V = L/T, \Omega^2 = gk_r / (J + hk_r).$$

Здесь  $J, k_r, L, V$  — соответственно моменты инерции и статический момент его корпуса, длина шага, скорость движения. Это соотношение замыкает задачу — требуется найти оптимальное по энергетике (2) значение  $\tau$ , когда все прочие параметры ходьбы заданы, учтена масса переносимого груза и конструкция экзоскелета.

Ниже приведены результаты некоторых расчетов, которые были выполнены при  $L = 0,5$  м,  $T = 0,7$  м,  $h = 0,85$  м. В табл. 1 представлены результаты расчета "комфортабельного" режима ходьбы [9] человека без дополнительного веса

на номинальном режиме; его данные содержатся в первой строке. Отметим, что данный "комфортабельный" режим реализуется, в отличие от работы [9], при ненулевых значениях голеностопного момента  $m$ . Далее в табл. 1 указаны значения энергии  $W$ , модули максимальных значений необходимых моментов сил в опорной ноге и энергетические затраты в соответствующих суставах при положительных и отрицательных значениях этих моментов; из них складывается общее значение  $W$ . Вторая строка относится к случаю дополнительного груза массой 100 кг в "легком" рюкзаке (масса экзоскелета при этом не учитывается).

Обращает на себя внимание тот факт, что при ходьбе человека около половины энергетических затрат приходится на коленный сустав, причем последний работает исключительно на расправление сустава. Именно эту часть затрат по замыслу должен принять на себя пассивный экзоскелет. Если человек не нагружен, то передвигается легко, и пиковые значения моментов порядка 100...150 нм, по-видимому [9], для него не вызывают слишком больших трудностей. При дополнительной нагрузке пиковые нагрузки моментов достигают значения уже порядка 300 Н·м. Поэтому при анализе различных походок человека с экзоскелетом следует отмечать те из них, для которых пиковые нагрузки не превышают значения порядка 150...200 нм.

В табл. 2 представлены данные некоторых безударных походок для человека с надетым

Таблица 1

$V, \text{ м/с}$	$L, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$W, \text{ Дж}$	$ q_1 _{\max}, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$ u_1 _{\max}, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$ m_1 _{\max}, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$Wq_1^+, \text{ Дж}$ $Wq_1^-, \text{ Дж}$	$Wu_1^+, \text{ Дж}$ $Wu_1^-, \text{ Дж}$	$Wm_1^+, \text{ Дж}$ $Wm_1^-, \text{ Дж}$
0,5/0,7 = 0,7143	0,5	0,85	86,6	99,6	105,9	41,0	9,94 12,03	43,7 0	12,43 0
0,5/0,7	0,5	0,85	184,5	183,5	281,4	40,9	15,9 31,7	116,7 0	12,5 1,5

Таблица 2

$V, \text{ м/с}$	$L, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$\tau, \text{ с}$	$W, \text{ Дж}$	$ q_1 _{\max}, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$ u_1 _{\max}, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$ m_1 _{\max}, \text{ Н}\cdot\text{м}$
0,5/0,7	0,5	0,85	0,09	83,5	238,9	350,0	111,3
...	...	...	0,12	84,0	190,7	269,8	85,0
...	...	...	0,14	84,8	155,4	235,4	74,1
...	...	...	0,09	*118,2	265,5	617,7	341,6
...	...	...	0,18	*123,7	140,9	342,7	175,9
...	...	...	0,2	*125,7	132,6	315,2	159,3
...	...	...	0,09	**154,2	292,5	884,7	571,5
...	...	...	0,24	**169,4	172,3	397,3	222,5
...	...	...	0,28	**174,6	166,0	356,2	192,6

экзоскелетом. Рисунок этих походок отвечает рис. 2, назовем их несимметричными. Первые три строки отвечают ходьбе без груза, последующие — с грузом (для одной звездочки в столбце энергетики  $W$  масса груза составляла 50 кг, для двух звездочек — 100 кг). В отличие от табл. 1 данная таблица содержит информацию о моменте времени  $\tau$ , при котором гладко сочетаются две фазы — свободной ходьбы, задаваемой с помощью полиномов, и движения с закрепленным коленом. Представленные результаты относятся к случаю движения с постоянной угловой скоростью по углу  $\phi$  в фазе закрепленного колена.

Минимуму энергии всюду отвечает значение  $\tau = 0,09$  с. Из табл. 2 вытекает, что при использовании экзоскелета формально экономится до 17...20 % энергозатрат, невзирая на то, что масса конструкции увеличивает общую массу. Однако особенно при наличии груза пиковые нагрузки на управляющие моменты здесь недопустимо велики: до 400...500 Н·м и выше. По пиковым нагрузкам данный режим движения превышает даже заведомо неоптимальный "комфортабельный" режим ходьбы. Это обстоятельство заставляет рассматривать также и неоптимальные значения  $\tau$ . Экономия по энергетике здесь заметно меньше, но пиковые значения моментов уже примерно те же, что и в отмеченном выше "комфортабельном" режиме. Попытки использования дополнительных возможностей модели в виде отказа от постоянства угловой скорости  $\dot{\phi}$  или рассмотрения в более общем виде характера изменения угла  $\psi(t)$  к существенному улучшению характеристик не привели.

походки, назовем их симметричными, показаны на рис. 3. Здесь имеются два значения гладкого сочленения этапов  $\tau$ . На интервале  $t \in (\tau_1, T - \tau_2)$  экзоскелет движется в режиме закрепленного колена; на интервалах  $t \leq \tau_1$  и  $t \geq T - \tau_2$  коленный сустав свободен. Использовались те же модели полиномов на свободных участках и та же модель участка с закрепленным коленом опорной ноги. Результаты расчетов отражены в табл. 3, данные по пиковым нагрузкам в переносной ноге не приводятся — как и ранее, они незначительны.

Представленные в табл. 3 данные по наиболее важным характеристикам походок, включая пиковые нагрузки по голеностопному суставу опорной ноги, заметно лучше, чем соответствующие им в табл. 2. Даже на уровне пиковых нагрузок "комфортабельного" режима ходьбы они дают экономию по энергетике в сравнении с ним до 30 %. Что же касается пиковых нагрузок голеностопа, то здесь они реально приходятся на очень короткий миг в самом конце опорной фазы, когда у человека-оператора на поверхности опоры находятся обе ноги. По этой причине принимать всерьез обнаруженные большие пиковые нагрузки голеностопа в этом режиме, видимо, не стоит.

Расчеты в целом подтвердили обнаруженную ранее тенденцию [5]: с ростом длительности этапов с закрепленным коленом энергозатраты падают, а пиковые нагрузки по управляющим моментам растут. Эти расчеты выявили также еще одну тенденцию при оптимизации энергозатрат — стремление к активным импульсным воздействиям в начале и конце шага с целью обеспечить периодичность режима

### Симметричные безударные походки

В схеме походки, изображенной на рис. 2, этап со свободным коленом предшествует этапу с коленом закрепленным. Интуитивно очевидно, что этап с закреплением колена следует размещать в центральной части временного отрезка  $t \in (0, T)$ , где нагрузки на опорную ногу наибольшие, а края этого интервала, примыкающие как к началу, так и к концу опорной фазы, в равной степени могут быть этапами движения со свободным коленом. Такие

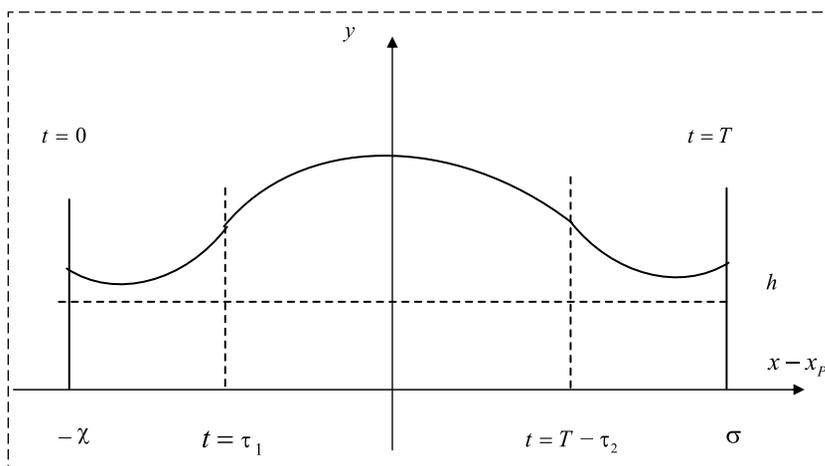


Рис. 3. Схема траектории таза при безударной симметричной походке  
Fig. 3. The diagram of the trajectory of the pelvis with an unstressed symmetrical gait

$V$ , м/с	$L$ , м	$h$ , м	$\tau_1$ , с	$\tau_2$ , с	$W$ , Дж	$ q_1 _{\max}$ , Н·м	$ u_1 _{\max}$ , Н·м	$ m_1 _{\max}$ , Н·м
0,5/0,7	0,5	0,85	0,1	0,65	68,1	288,4	188,5	230,2
"_"	"_"	"_"	0,12	0,65	73,8	119,9	143,2	214,2
"_"	"_"	"_"	0,12	0,65	*87,4	186,6	328,3	420,0
"_"	"_"	"_"	0,12	0,61	*91,6	157,8	221,0	378,2
"_"	"_"	"_"	0,12	0,60	*92,3	157,8	208,5	355,6
"_"	"_"	"_"	0,1	0,65	**106,1	257,8	470,3	513,5
"_"	"_"	"_"	0,15	0,55	**121,3	209,9	276,3	323,2
"_"	"_"	"_"	0,2	0,5	**129,6	207,0	278,8	276,5

ходьбы. Энергозатраты на активных импульсных участках при этом можно учитывать по приближенной формуле, предложенной в работе [10]. В ранее упомянутой работе [5] приведены результаты исследования некоторых подобных режимов, которые формально заметно более экономны по энергетике, но требуют нереальных резких пиковых силовых воздействий со стороны человека.

### Некоторые симметричные ударные походки

Исследуем теперь возможности нежелательных, в принципе, для человека-оператора походов, которые сопровождаются возникновением разного рода ударных явлений, но таких, что они не требуют при этом от человека-оператора запредельных нагрузок — их ударное воздействие приходится скорее на конструкцию экзоскелета. От рассмотренных в предыдущем разделе симметричных безударных походов данные походки, тоже симметричные, отличаются только одним обстоятельством — в момент  $\tau_1$  здесь не происходит безударного перехода в режим с закрепленным коленом. В результате неупругого удара в динамической системе происходит перераспределение угловых и линейных скоростей; их скачки описываются видоизмененной системой уравнений, вытекающей из расширенной системы (1):

$$B(z) \|\dot{z}\| = EQ_z, EQ_z = \|EQ_x, EQ_y, EQ_\psi, EQ_{\alpha_1}, EQ_{\beta_1}, EQ_{\alpha_2}, EQ_{\beta_2}, 0, 0\|, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} EQ_x &= ER_{1x}, ER_{2x} = 0, EQ_y = ER_{1y}, ER_{2y} = 0, \\ Eu_2 &= 0, Em_2 = 0, EQ_\psi = 0, \\ EQ_{\alpha_i} &= -Eu_i + 2a(ER_{ix} \cos \alpha_i + ER_{iy} \sin \alpha_i), \\ EQ_{\beta_i} &= Eu_i + 2b(ER_{ix} \cos \beta_i + ER_{iy} \sin \beta_i), i = 1, 2. \end{aligned}$$

Значком в квадратных скобках здесь обозначены скачки соответствующих скоростей, а значком  $E$  — импульсы моментов сил и реакций, в частности,  $Eu_1$  — это импульсное воздействие конструкции экзоскелета на процесс ходьбы, связанное с переходом в режим закрепленного колена. Чтобы получить замкнутую алгебраическую систему условий относительно семи неизвестных скачков и трех импульсов, к системе (7) в момент наложения связи  $\tau_1$  необходимо добавить еще соотношение

$$\begin{aligned} [\dot{x}](x - x_p) + [\dot{y}](y - y_p) &= \\ = -\{\dot{x}^-(x - x_p) + \dot{y}^-(y - y_p)\} \end{aligned}$$

с известной ненулевой правой частью, которое позволяет в следующий момент времени перейти в режим движения с закрепленным коленом

$$\begin{aligned} x - x_p &= \rho \cos \varphi(t), y - y_p = \rho \sin \varphi(t), \\ \varphi(t) &= \omega t + \delta \end{aligned}$$

со специально подобранными параметрами  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\delta$ .

При численных исследованиях использовалась та же параметрическая модель процесса ходьбы, что и в предыдущем разделе, но с одним существенным дополнением — она содержала одну дополнительную степень свободы, описывающую переход с ударом в режим движения с закрепленным коленом. Данные расчетов здесь не приводятся, поскольку они несущественно улучшают картину, представленную в табл. 3. Причина этого, видимо, связана с тем, что в результате удара в динамической системе теряется энергия, и без добавления ее со стороны человека-оператора эффективно использовать дополнительную степень свободы модели не удастся. Ниже рассматривается еще один тип ударных походов, где данная идея была успешно реализована.

### Специальный тип ударных походок человека-оператора в пассивном экзоскелете

Как отмечалось выше, интерес представляют, прежде всего, те из походок, которые не требуют от человека-оператора запредельных нагрузок и где ударные явления возникают лишь на границе между окончанием предыдущего и началом нового шага, поскольку такие походки реально протекают в условиях двухопорной фазы ходьбы, а потому менее сложны для (приближенной) реализации человеком-оператором. Рассмотрим один из типов таких походок с ударным импульсом за счет конструкции аппарата в конце шага. В принципе на интервале  $t \in [0, T)$  мы имеем здесь также некоторое движение безударного типа с тем или иным значением  $\tau$ . Однако пусть для простоты  $\tau = 0$ , т. е. весь временной интервал  $(0, T)$  отвечает движению с закрепленным коленом. Общая схема движения показана на рис. 4.

Начальное положение аппарата на текущем шаге изображено слева. Пунктиром показано начальное положение опорной ноги и расположение прямой, связывающей пятку опорной ноги и точку таза; стрелочкой условно показана скорость таза в начальный момент, которая перпендикулярна этой прямой. Движение на интервале  $t \in [0, T)$  совершается с некоторой переменной угловой скоростью  $\dot{\varphi}(t)$ , в результате чего аппарат переходит в правое положение; изображена скорость таза  $\vec{v}_f$  в этот момент; она перпендикулярна к возникшему финаль-

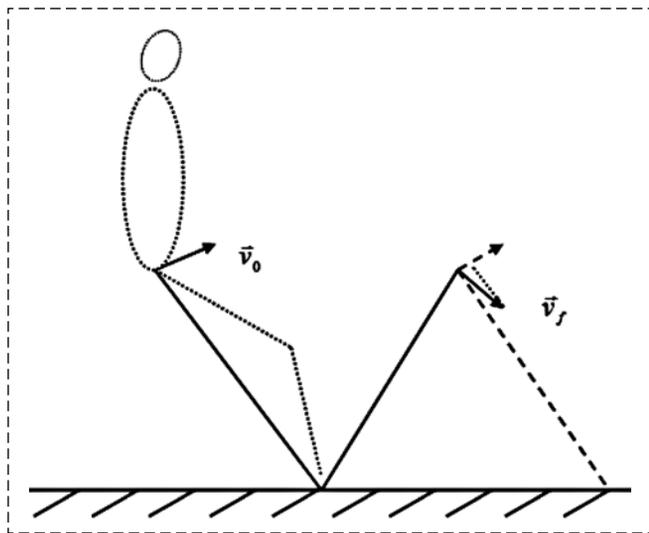


Рис. 4. Схема движения аппарата в режиме с ударным импульсом, обеспечиваемый конструкцией

Fig. 4. The movement pattern of the apparatus in the shock pulse mode provided by the design

ному положению той же прямой пятка-таз, оба ее положения показаны сплошными прямыми. В момент  $t = T$  "старая" опорная нога мгновенно освобождается, а "новая" опорная нога мгновенно закрепляется, штриховой линией показано "новое" положение прямой пятка-таз.

Однако точка таза на "новом" шаге не может двигаться с тем же вектором скорости, которая возникла в конце "старого" шага, поскольку любое ее дальнейшее движение возможно только со скоростью, которая перпендикулярна новому направлению опорной ноги. Это означает, что в механической системе произойдет удар (пусть неупругий), погасится составляющая скорости, направленная по новому направлению опорной ноги, и на "новом" шаге начнется движение со скоростью, представляющей собой проекцию "старой" скорости на перпендикуляр к новому направлению опорной ноги. Все это показано на рис. 4.

Модуль "новой" начальной скорости в случае постоянной  $\dot{\varphi}$  не может равняться "старой" начальной скорости. Изменение угла  $\varphi$  за шаг определяется формулой  $|\Delta\varphi| = \pi - 2\arctg(h/\sigma)$ . Таким же будет и угол между единичными направлениями скоростей в начале и в конце на "старом" шаге. Но прямые пятка-таз в начале шага на "старом" и "новом" шагах параллельны. Значит, и между единичными направлениями скоростей в конце "старого" и начальной скоростью "нового" шага возникнет тот же угол. Отсюда вытекает, что модуль начальной скорости на "новом" шаге равен

$$v|\cos[\pi - 2\arctg(h/\sigma)]| = v\{\cos^2(\arctg(h/\sigma)) - \sin^2(\arctg(h/\sigma))\} = v\frac{h^2 - \sigma^2}{h^2 + \sigma^2},$$

если он равнялся  $v$  в конце "старого" шага.

При подстановке сюда параметров вблизи принятого номинального режима ходьбы получаем, что модуль начальной скорости на "новом" шаге составляет на номинале около 0,8...0,9 от скорости в конце "старого" шага. Во столько же раз должна уменьшиться и "новая" угловая скорость  $\dot{\varphi}$ . Однако периодические решения возможны и здесь, если в течение интервала  $t \in (0, T)$  человек-оператор за счет активной работы моментов  $q_1, m_1$  будет осуществлять процедуру разгона аппарата по углу  $\varphi$ : тогда в конце "старого" шага будет достигнута более высокая угловая скорость  $\dot{\varphi}$ , чем в на-

$V$ , м/с	$L$ , м	$h$ , м	$W_{\min}$ , Дж	$ q_1 _{\max}$ , Н·м	$ u_1 _{\max}$ , Н·м	$ m_1 _{\max}$ , Н·м	$W/L$ , Дж/м
0,5/0,7 = 0,7143	0,5	0,85	55,2	137,7	0,	54,1	110,4
0,7143	0,4	"_"	"_"	"_"	"_"	"_"	118,0
"_"	0,5	"_"	*69,8	165,7	"_"	75,9	139,1
"_"	0,4	"_"	"_"	"_"	"_"	"_"	140,1
"_"	0,5	"_"	**87,0	190,5	"_"	111,5	174,1
"_"	0,4	"_"	"_"	"_"	"_"	"_"	162,7
"_"	0,3	"_"	"_"	"_"	"_"	"_"	180,2

чале, что способно компенсировать ее падение в результате удара и перехода на "новый" шаг.

Далее использовалась модель кубической зависимости угла  $\varphi$  по времени на этапе разгона; условиям

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \omega = [\varphi(T) - \varphi_0]/T,$$

$$\dot{\varphi}(0)/\dot{\varphi}(T) = (h^2 - \sigma^2)/(h^2 + \sigma^2) \equiv \mu$$

удовлетворяет решение

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \lambda\omega t + (t^2/T)[-2\omega\lambda + 3\omega - \lambda\omega/\mu] + (t^3/T^2)[\lambda\omega/\mu - 2\omega + \lambda\omega],$$

где  $\lambda > 0$  — свободный параметр. Незначительным колебаниям угловой скорости  $\dot{\varphi}$ , а значит, и меньшим энергозатратам отвечают величины  $\lambda \approx 1$ . Некоторые результаты расчетов такой походки представлены в табл. 4.

В табл. 4 представлен тот же диапазон дополнительных нагрузок — с массой до 100 кг. Режимы рассматриваемого типа заметно выгоднее в смысле энергозатрат и обладают еще тем преимуществом, что не требуют от человека-оператора запредельных усилий по управляющим моментам на этапе движения с закрепленным коленным суставом с переменной угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ . Крайний правый столбец таблицы содержит информацию, которую можно использовать для выбора оптимальной длины шага при постоянной средней скорости передвижения. Видно, что с ростом массы дополнительной нагрузки в этом режиме ходьбы выгоднее переходить на несколько укороченный шаг.

### Заключение

На основе представленной выше информации, можно сделать следующие выводы:

1) переход к этапу с закрепленным коленным следует выполнять в самом начале фазы

опоры, возможно, даже сразу в начале опоры; аналогичным образом следует проводить в самом конце шага освобождение закрепленного колена;

2) энергетически и в смысле пиковых нагрузок по управляющим моментам безударные походки примерно эквивалентны походкам ударного типа, если последние совершаются без увеличения кинетической энергии динамической системы за счет действий человека-оператора; следует различать походки ударного типа, связанные с активным импульсным воздействием человека, и походки за счет возникновения ударов в силу конструкции экзоскелета. Последние не требуют от человека-оператора резких, запредельных нагрузок;

3) сравнение результатов, полученных на математической модели со всеми весомыми элементами тела человека и (нереальной, но более простой) модели с весомым тазом и невесомыми ногами [5], показывает, что за счет применения режимов ходьбы с закреплением коленного сустава в этом последнем случае удастся добиться заметно лучших результатов;

4) в случае увеличении массы дополнительного груза при ходьбе с некоторой заданной скоростью движения выгоднее, как в смысле энергетики, так и пиковых нагрузок на управляющие моменты делать более частые шажки;

5) реализация "выгодных" походок требует высокой координации как со стороны человека-оператора, обеспечивающего движение, так и со стороны алгоритма запираания-освобождения колена в экзоскелете.

### Список литературы

1. Vukobratovic M., Stepanenco J. On the stability of anthropomorphic systems // *Mathematical Biosciences*. Oct. 1972. Vol. 15, Iss. 1–2. P. 1–37.
2. Zoss A., Kazerooni H. On the Mechanical Design of the Berkeley Lower Extremity Exoskeleton (BLEEX) // *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. 2005. P. 3132–3139.

3. **Dollar A. M., Herr H.** Lower Extremity Exoskeletons and Active Orthoses: Challenges and State-of-the-Art // *IEEE Trans. On Robotics*. 2008. Vol. 24, N. 1. P. 1–15.

4. **Aguirre-Ollinger G., Colgate J. E., Peshkin M. A., Goo-swani A.** Inertia Compensation Control of a One-Degree-of Freedom Exoskeleton for Lower-Limb Assistance: Initial Experiments // *IEEE Trans. of Neural Systems and rehabilitation Engineer.* 2012. N.1. P. 68–77.

5. **Lavrovskii E. K.** On the Energetics of the Walking Gait of Human Operator Using a Passive Exoskeleton // *Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 50, N. 1. P. 6–18.

6. **Воронов А. В., Лавровский Э. К.** Определение масс-инерциальных характеристик ноги человека // *Физиология человека*. 1998. № 2. С. 91–101.

7. **Белецкий В. В.** Двунюгая ходьба. М.: Наука, 1984, 286 с.

8. **Белецкий В. В.** Плоские линейные модели двуногого шагания // Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР. 1973. № 95.

9. **Белецкий В. В., Лавровский Э. К.** Модельные задачи двуногой ходьбы // *Известия РАН. Механика твердого тела*. 1981. № 2. С. 156–165.

10. **Формальский А. М.** Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1982. 368 с.

## About the Operator's Gaits in the Passive Exoskeleton of the Lower Extremities when Using the Fixed Knee Mode

**E. K. Lavrovsky**, lavrov@imec.msu.ru, **E. V. Pismennaya**, epismen@yandex.ru,  
Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation

*Corresponding authors: Lavrovsky Edward K.,* Leading Researcher,  
Institute of Mechanics of Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation,  
e-mail: lavrov@imec.msu.ru

*Accepted on September 02, 2019*

### Abstract

*A dynamic model of motion in the sagittal plane of the passive exoskeleton of the lower extremities, integrated with a similar model of a human operator that determines the movement of the whole structure, is considered. The exoskeleton is designed to help the operator to move additional point load, placed in the "backpack" on the back. The design of the exoskeleton does not have active propulsive elements in the joints; it is endowed with only a semi-automatic system for locking or releasing the knee joints at certain stages of movement, which, however, affect the overall gait pattern. The energy costs and peak values of the control torques that the human operator applies in the process of moving the exoskeleton on certain types of regular, flat, single-support walkings are studied. The results obtained allow us to estimate the effectiveness of the mode of locking-releasing the knee joint used by such devices. Both cases of impact-free transitions to the locked knee mode and transitions accompanied by the occurrence of shock effects in a dynamic system were investigated. In mathematical modeling, the mass inertial characteristics of the human body were taken into account in accordance with the data adopted in anthropology.*

**Keywords:** *passive exoskeleton, regular modes of movement, energy costs, maximums of control points*

*For citation:*

**Lavrovsky E. K., Pismennaya E. V.** About the Operator's Gaits in the Passive Exoskeleton of the Lower Extremities when Using the Fixed Knee Mode. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 34–42.

DOI: 10.17587/mau.21.34-42

### References

1. **Vukobratovic M., Stepanenco J.** On the stability of anthropomorphic systems, *Mathematical Biosciences*, Oct. 1972, vol. 15, iss. 1–2, pp. 1–37.

2. **Zoss A., Kazerooni H.** On the Mechanical Design of the Berkeley Lower Extremity Exoskeleton (BLEEX), *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005, pp. 3132–3139.

3. **Dollar A. M., Herr H.** Lower Extremity Exoskeletons and Active Orthoses: Challenges and State-of-the-Art, *IEEE Trans. On Robotics*, 2008, vol. 24, no. 1, pp. 1–15.

4. **Aguirre-Ollinger G., Colgate J. E., Peshkin M. A., Goo-swani A.** Inertia Compensation Control of a One-Degree-of Freedom Exoskeleton for Lower-Limb Assistance: Initial Experiments, *IEEE Trans. of Neural Systems and rehabilitation Engineer.* 2012, vol. 20, no. 1, pp. 68–77.

5. **Lavrovskii E. K.** On the Energetics of the Walking Gait of Human Operator Using a Passive Exoskeleton, *Mechanics of Solids*. 2015, vol. 50, no. 1, pp. 6–18.

6. **Voronov A. V., Lavrovskii E.** Finding of mass-inertia parameters for human legs, *Physiology of Human*. 1998, no. 2, pp. 91–101 (in Russian).

7. **Beletsky V. V.** Biped walking, Moscow, Nauka, 1984, 286 p. (in Russian).

8. **Beletsky V. V.** Flat linear models of bipedal deviation, Preprint Instituta prikladnoy matematiki im. M. V. Keldisha AN SSSR, 1973, no. 95 (in Russian).

9. **Beletsky V. V., Lavrovskii E. K.** Model problems of bipedal walking, *Mechanics of Solids*. 1981, no. 2, pp. 156–165 (in Russian).

10. **Formalsky A. M.** About displacement of antropomorphic mechanisms, Moscow, Nauka, 1984, 368 p. (in Russian).

Т. З. Муслимов, аспирант, tagir.muslimov@gmail.com,  
Р. А. Мунасыпов, д-р техн. наук, проф., rust40@mail.ru,  
Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа

## Децентрализованное групповое нелинейное управление строем беспилотных летательных аппаратов самолетного типа\*

*Предлагается метод управления группой автономных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) самолетного типа для формирования и поддержания строя в полете с заранее заданными относительными положениями между аппаратами. Рассмотренный подход обеспечивает построение и дальнейшее сохранение любой выбранной геометрической формы строя при выходе на прямолинейную траекторию с заданным курсом при произвольных начальных положениях БПЛА. Отличительной особенностью предлагаемого метода является учет нелинейной структуры системы "автопилот—летательный аппарат", проявляющейся как в существовании ограничений на входные команды автопилота, так и в неголономной динамике аппарата. Кроме того, благодаря децентрализации обеспечивается возможность неограниченной масштабируемости строя. При этом принимается во внимание необходимость и сохранения минимальной скорости полета БПЛА не ниже скорости сваливания, и получения конечной скорости строя, равной крейсерской скорости данного типа аппаратов. Синтезированные с помощью прямого метода Ляпунова нелинейные законы группового управления основаны на архитектуре взаимодействия изначально разработанного для линейных агентов децентрализованного консенсуса, в котором предполагается, что каждый аппарат взаимодействует только с соседними с ним аппаратами. Доказана асимптотическая устойчивость в целом для предлагаемых законов управления, вследствие чего БПЛА могут иметь любые положения в пространстве в начальный момент работы алгоритмов формирования строя. Таким образом, законами управления определяется неоднородное векторное поле следования пути для каждого из аппаратов, норма вектора которого в каждой точке пространства полета группы БПЛА задает команду скорости, а направление — команду курсового угла. Качество переходных траекторий в процессе формирования строя может быть изменено с помощью настраиваемых коэффициентов, входящих в состав законов управления. Работоспособность и эффективность предложенного подхода была проверена в среде MATLAB/Simulink с использованием реалистичных нелинейных моделей БПЛА с 12 состояниями и 6 степенями свободы. Моделирование полета группы из четырех БПЛА показало успешное построение заданной геометрической формы строя и ее поддержание в процессе дальнейшего полета.*

**Ключевые слова:** беспилотный летательный аппарат, строй БПЛА, групповое управление БПЛА, нелинейное управление строем, консенсус, децентрализованное управление

### Введение

В последние годы высокий интерес исследователей всего мира привлекают проблемы группового управления автономными беспилотными летательными аппаратами (БПЛА), поскольку группа БПЛА способна решать значительное число задач, выполнить которые одиночный летательный аппарат не способен [1], причем вышесказанное относится как к гражданским, так и к военным миссиям [2]. При этом одной из актуальных проблем, требующих решения, по-прежнему остается задача формирования и

поддержания строя (формации) БПЛА с заранее заданными относительными положениями аппаратов в группе, что является стандартной стратегией поведения автономных БПЛА во многих типах миссий, таких как разведка, картографирование, поиск, геодезические и метеорологические задачи, совместное наведение на цели, построение траекторий ложных целей, создание антенных решеток из БПЛА и др. Для повышения надежности системы в целом, а также для возможности неограниченного масштабирования необходима децентрализация законов группового управления.

В качестве наиболее часто встречающихся в публикациях методов управления строем БПЛА можно назвать подход "лидер (веду-

\*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-08-01299.

ший)—ведомые" и использование потенциальных функций. Например, в работе [3] получены линейные законы управления в рамках взаимодействия "лидер—ведомый", причем динамика каждого аппарата рассматривается в виде двойного интегратора в предположении линеаризации. Недостатками метода являются уязвимость к потере "лидера" и отсутствие обратной связи от "ведомых" к "лидеру".

Одним из подходов к децентрализованному управлению формациями мобильных роботов является "консенсус" [4, 5, 11]. Однако данная стратегия изначально разрабатывалась для линейных агентов в виде одиночного или двойного интеграторов и исследовалась методами линейной алгебры. Соответственно, подход на основе консенсуса в применении к реальным системам "автопилот—летательный аппарат" вследствие неголономной динамики и интегрального насыщения работает лишь в области, достаточно близкой к положению равновесия, либо со значительным ухудшением быстродействия при выборе малых коэффициентов усиления. Например, в статье [6] получен линейный закон управления формой строя миниатюрных БПЛА на основе консенсуса, не учитывающий ограничений на входные сигналы. В методе потенциальных функций, применяемом для управления строями как мобильных наземных роботов [7, 8], так и БПЛА [9, 10] обычно предполагается, что каждый агент взаимодействует с каждым, и итоговая форма строя получается равноудаленной под воздействием средневзвешенного всех сил взаимодействия. Кроме того, в данном случае вследствие большого числа связей становится проблематичным масштабирование системы.

В нашей работе на основе архитектуры взаимодействия децентрализованного консенсуса прямым методом Ляпунова синтезируются нелинейные законы группового управления, учитывающие особенности нелинейной динамики БПЛА самолетного типа и позволяющие неограниченно масштабировать систему строя аппаратов.

### Предварительные замечания и модель БПЛА

Для краткости рассматривается движение только в двумерной плоскости в предположении, что каждому аппарату дана команда выдерживать заданную высоту полета. В соответ-

ствии со статьей [11] будем исследовать формацию (строй) БПЛА как многоагентную систему, состоящую из  $N$  агентов, где  $N \geq 2$ . Изначально аппараты могут находиться в любой точке двумерного пространства, при этом конфигурацию их взаимодействия можно без потери общности представить как сильно связный граф

$$G \triangleq (Q, E), \quad (1)$$

где множеством вершин графа  $\eta_i \in Q$  является  $i$ -й агент-БПЛА, а каждая дуга в множестве  $E$ , ведущая из вершины  $\eta_i$  в вершину  $\eta_j$ , означает, что агент  $\eta_i$  получает данные об относительном положении агента  $\eta_j$ . Следовательно, множество дуг  $E$  показывает заданные правила взаимодействия между агентами-БПЛА:

$$E = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2), (2, 1), (2, 3), \dots, \\ (N - 1, N), (N, N - 1) \end{array} \right\}.$$

Таким образом, архитектура взаимодействия представляет собой "открытую цепь". При выборе другой архитектуры (например, "замкнутой цепи") все дальнейшие рассуждения проводятся аналогично.

*Допущение 1.* Динамика группового движения строя БПЛА исследуется в предположении, что каждый из БПЛА оснащен достаточно быстродействующим автопилотом, синтезированным на основе метода последовательного замыкания контура (Successive Loop Closure) [12]. Таким образом, контуры управления угловым положением замкнуты внутри контуров управления центром масс, к которым относятся контуры выдерживания скорости, курсового угла и высоты полета.

Данное допущение применимо на практике, поскольку частота угловых движений БПЛА значительно выше частоты изменения параметров движения центра масс аппарата.

*Допущение 2.* БПЛА могут получать информацию об относительном положении соседних аппаратов в инерциальной системе координат (ИСК) с достаточной точностью с помощью глобальных, либо локальных систем навигации.

Хотя численное испытание предложенного подхода в среде MATLAB/Simulink проводится на реалистичных моделях БПЛА, в случае, если БПЛА оснащен настроенным автопилотом [13], для аналитического исследования модель системы "автопилот—летательный аппарат" может быть приближенно представлена

системой второго порядка в предположении, что контур выдерживания скорости обладает достаточным быстрым действием:

$$\dot{x} = v^c \sin \chi, \quad \dot{y} = v^c \cos \chi, \quad \dot{\chi} = a_\chi (\chi^c - \chi),$$

где  $x$  — значение координаты БПЛА вдоль оси, указывающей на восток в ИСК;  $y$  — значение координаты БПЛА вдоль оси, указывающей на север в ИСК;  $\chi$  — текущий курсовой угол;  $\chi^c$  — задаваемый курсовой угол;  $v^c$  — входной сигнал контура выдерживания путевой скорости (в предположении отсутствия ветра);  $a_\chi$  — положительная константа, зависящая от реализации автопилота и аппаратных характеристик БПЛА.

Динамика БПЛА в случае практической реализации при этом предполагает следующие ограничения на входные команды:

$$U \triangleq \{v^c, \dot{\chi}^c \mid 0 < v_{\min} \leq v^c \leq v_{\max}, -\dot{\chi}_{\max} \leq \dot{\chi}^c \leq \dot{\chi}_{\max}\}. \quad (2)$$

Если команды выходят за пределы ограничений (2), для предотвращения эффекта интегрального насыщения в автопилоте реализован метод обратного счета (back-calculation).

Финальный прямолинейный путь строя БПЛА для краткости задается только желаемым курсом  $\chi^q$ , хотя может быть реализовано следование пути на заданных расстояниях от фиксированной в пространстве прямолинейной траектории.

*Постановка задачи.* Для группы агентов-БПЛА, взаимодействие которых описывается графом (1), получить децентрализованные асимптотически устойчивые в целом законы управления, обеспечивающие выход всех аппаратов на прямолинейную траекторию, задаваемую желаемым курсом  $\chi^q$ , и дальнейшее движение по ней с поддержанием заданной с помощью относительных расстояний между аппаратами геометрической формы строя вне зависимости от их начального положения с учетом ограничений (2).

### Метод неоднородного векторного поля для формирования строя БПЛА

Введем в рассмотрение следующий вектор управляющих воздействий  $\mathbf{e}$ , определяемый через элементы вектора всех возможных ошибок относительных положений:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e \otimes [1 \ 0]^T + \mathbf{e}^n \otimes [0 \ 1]^T = ((e_i^e \ e_i^n)^T)_{i=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^{2N \times 1},$$

где  $\otimes$  — произведение Кронекера;  $\mathbf{e}^e \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  — подвектор управления в направлении оси ИСК, указывающей на восток, причем  $\mathbb{R}^{N \times 1}$  — пространство матриц размера  $N \times 1$  с компонентами из  $\mathbb{R}$ ;  $\mathbf{e}^n \in \mathbb{R}^{N \times 1}$  — подвектор управления в направлении оси ИСК, указывающей на север.

Рассмотрим вектор всех возможных ошибок относительных положений аппаратов  $\bar{\mathbf{e}} = (\hat{e}_{i,j}^s) \in \mathbb{R}^{2N(N-1) \times 1}$  в инерциальной системе координат, где  $\hat{e}_{i,j}^s$  — значение ошибки относительного положения для непосредственно взаимодействующих  $i$ -го и  $j$ -го агентов,  $s \in \{e, n\}$ . Верхний индекс  $s$  указывает на ошибку по осям координат в направлениях на восток ( $s = e$ ) и север ( $s = n$ ) соответственно.

Тогда, согласно статье [11], выберем метод вычисления вектора управляющих воздействий  $\mathbf{e}$  через элементы вектора  $\bar{\mathbf{e}}$  следующим образом:

$$\mathbf{e} \triangleq \begin{bmatrix} e_1^e \\ e_1^n \\ \vdots \\ e_k^e \\ e_k^n \\ \vdots \\ e_N^e \\ e_N^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_{12}^e \\ \hat{e}_{12}^n \\ \vdots \\ -\hat{e}_{k-1,k}^e + \hat{e}_{k,k+1}^e \\ -\hat{e}_{k-1,k}^n + \hat{e}_{k,k+1}^n \\ \vdots \\ -\hat{e}_{N-1,N}^e \\ -\hat{e}_{N-1,N}^n \end{bmatrix} = \quad (3)$$

$$= (\mathbf{M} \otimes \mathbf{I}_2) \mathbf{P} + \mathbf{D},$$

где  $\mathbf{I}_2$  — единичная матрица второго порядка;  $\mathbf{D} \triangleq -(\mathbf{M}\mathbf{H}^{-1} \otimes \mathbf{I}_2)(\mathbf{P}_d^T, \hat{\mathbf{P}})^T$  — вектор управления системой в пространстве относительных состояний [11];  $\mathbf{H}$  — матрица, назначающая, между какими агентами будут задаваться относительные расстояния, определяемая следующим образом:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \end{bmatrix}^T, \quad i < N, \quad \mathbf{q}_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^T,$$

при этом  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{1 \times N}$ , положение "1" и "-1" в  $\mathbf{q}_i$  определяется в соответствии со структурой графа (1);

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{P}_d^e \otimes [1 \ 0]^T + \mathbf{P}_d^n \otimes [0 \ 1]^T =$$

$$= ((p_{di}^e \ p_{di}^n)^T)_{i=1, \overline{N-1}} \in \mathbb{R}^{2(N-1) \times 1} \quad \text{— вектор же-}$$

лаемых относительных расстояний между БПЛА в строю;  $\hat{P} = \sum_{k=1}^N (p_k^e + p_k^n)$  — сумма текущих относительных расстояний;

$\mathbf{P} = \mathbf{P}_e \otimes [1 \ 0]^T + \mathbf{P}_n \otimes [0 \ 1]^T \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$  — вектор текущих координат БПЛА в ИСК;

$\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  — матрица взаимодействия, которая в случае децентрализованного взаимодействия "сосед с соседом" имеет вид

$$\mathbf{M} \triangleq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в соотношении (3) принимается во внимание, что для двух непосредственно взаимодействующих агентов выполняется равенство  $\hat{e}_{k-1, k}^s = -\hat{e}_{k, k-1}^s$ ,  $s \in \{e, n\}$ .

Введем вектор  $\mathbf{e}$  текущих ошибок относительного положения для непосредственно взаимодействующих  $i$ -го и  $(i+1)$ -го агентов через подвекторы  $\hat{\mathbf{e}}^e$  и  $\hat{\mathbf{e}}^n$  вдоль восточной и северной осей ИСК соответственно:

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}^e \otimes [1 \ 0]^T + \hat{\mathbf{e}}^n \otimes [0 \ 1]^T =$$

$$= ((\hat{e}_{i, i+1}^e \ \hat{e}_{i, i+1}^n)^T)_{i=1, \overline{N-1}} \in \mathbb{R}^{2(N-1) \times 1}. \quad (4)$$

Далее определим вектор  $\tilde{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$ , получаемый с помощью матрицы поворота  $\mathbf{M}_{\chi^q} = \begin{bmatrix} -\sin \chi^q & \cos \chi^q \\ \cos \chi^q & \sin \chi^q \end{bmatrix}$ , составленной с учетом конечного курсового угла полета строя  $\chi^q$ :

$$\tilde{\mathbf{e}} \triangleq (\mathbf{M}_{\chi^q} \otimes \mathbf{I}_N) \mathbf{e} = ((\tilde{e}_i^n \ \tilde{e}_i^e)^T)_{i=1, \overline{N}}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{I}_N$  — единичная матрица  $N$ -го порядка;  $\tilde{e}_i^n, \tilde{e}_i^e$  — компоненты управляющего вектора, причем верхний индекс "n" указывает на ошибку в боковом направлении по отношению к конечной траектории (далее —  $n$ -направление), а индекс "e" — в продольном направлении по отношению к конечной траектории (далее —  $e$ -направление).

В силу (3) и (5), вводя с использованием (4) обозначение

$$\tilde{\mathbf{e}} \triangleq (\mathbf{M}_{\chi^q} \otimes \mathbf{I}_{N-1}) \hat{\mathbf{e}},$$

можно получить:

$$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_1^n \\ \tilde{e}_1^e \\ \vdots \\ \tilde{e}_k^n \\ \tilde{e}_k^e \\ \vdots \\ \tilde{e}_N^n \\ \tilde{e}_N^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_{12}^n \\ \tilde{e}_{12}^e \\ \vdots \\ -\tilde{e}_{k-1, k}^n + \tilde{e}_{k, k+1}^n \\ -\tilde{e}_{k-1, k}^e + \tilde{e}_{k, k+1}^e \\ \vdots \\ -\tilde{e}_{N-1, N}^n \\ -\tilde{e}_{N-1, N}^e \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $\tilde{e}_{i, i+1}^n, \tilde{e}_{i, i+1}^e$  — элементы вектора ошибок относительных положений  $\tilde{\mathbf{e}} = ((\tilde{e}_{i, i+1}^n \ \tilde{e}_{i, i+1}^e)^T)_{i=1, \overline{N-1}} \in \mathbb{R}^{2(N-1) \times 1}$  для непосредственно взаимодействующих  $i$ -го и  $(i+1)$ -го агентов в  $n$ -направлении и  $e$ -направлении соответственно.

Выберем закон управления для скоростей БПЛА в таком виде с учетом (6):

$$\mathbf{v}^c = (v_i^c)_{i=1, \overline{N}} =$$

$$= \left( \sqrt{\left( v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n \tilde{e}_i^n) \right)^2 + \left( v + v_f^e \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^e \tilde{e}_i^e) \right)^2} \right)_{i=1, \overline{N}} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \quad (7)$$

где  $k_v^n, k_v^e$  — положительные константы, от которых зависит плавность выхода аппаратов на заданные относительные положения в  $n$ -направлении и  $e$ -направлении соответственно;  $v_f^n, v_f^e$  — максимальные значения нормы векторов дополнительной скорости  $\mathbf{v}_f^n$  и  $\mathbf{v}_f^e$  в  $n$ -направлении и  $e$ -направлении, которые должны быть выбраны согласно (2);  $v$  — крейсерская скорость строя, оптимальная с точки зрения аэродинамических характеристик БПЛА.

Выберем закон управления для курсовых углов БПЛА следующим образом с учетом (6):

$$\chi^c = \left( \chi^q + \arcsin \left( \frac{v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n \tilde{e}_i^n)}{v_i^c} \right) \right)_{i=1, \overline{N}} \in \mathbb{R}^{N \times 1}. \quad (8)$$

На рис. 1 в качестве примера показано определение символов для команд скорости и курсового угла при одном из возможных соотношений между  $\tilde{e}_i^n, \tilde{e}_i^e$  и  $\chi^q$ .

Определим вектор  $\mathbf{v}^g \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ , элементы которого являются путевыми скоростями БПЛА

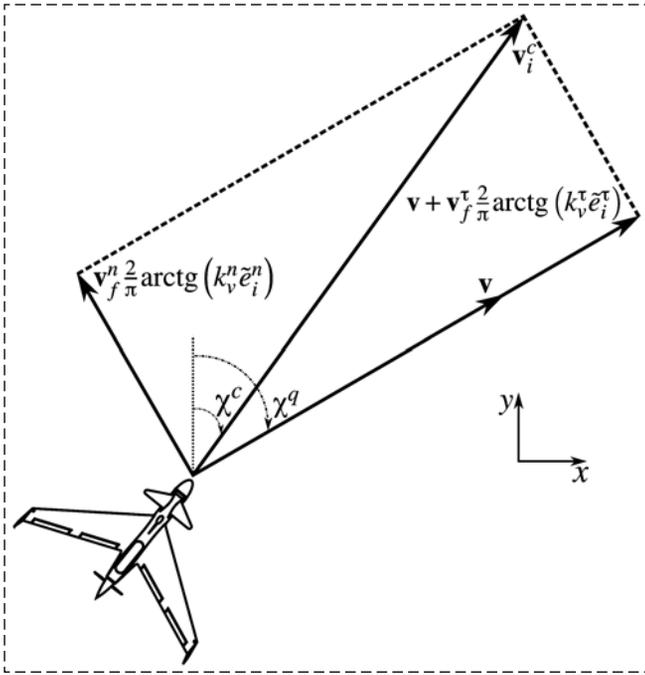


Рис. 1. Пример определения символов для законов управления скоростью и курсовым углом БПЛА

Fig. 1. Example of the symbol definition for the UAV speed and course angle commands

(а также и воздушными скоростями в предположении отсутствия ветра):

$$\mathbf{v}^g = [v_1^g \dots v_N^g]^T.$$

Далее зададим вектор  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$  в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{\sin} \otimes [1 \ 0]^T + \mathbf{X}_{\cos} \otimes [0 \ 1]^T, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\sin} &= (\sin(\chi_i - \chi^q))_{i=1, N} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \\ \mathbf{X}_{\cos} &= (\cos(\chi_i - \chi^q))_{i=1, N} \in \mathbb{R}^{N \times 1}, \end{aligned}$$

$\chi_i$  — курсовой угол  $i$ -го БПЛА.

Заметим, что для каждой пары взаимодействующих  $i$ -го и  $(i + 1)$ -го БПЛА выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & [\dot{\tilde{e}}_{i,i+1}^n \ \dot{\tilde{e}}_{i,i+1}^\tau]^T = \\ & = \begin{bmatrix} v_{i+1}^g \sin(\chi_{i+1} - \chi^q) - v_i^g \sin(\chi_i - \chi^q) \\ v_{i+1}^g \cos(\chi_{i+1} - \chi^q) - v_i^g \cos(\chi_i - \chi^q) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда вследствие соотношений (9) и (10) динамику вектора ошибок при выходе группы БПЛА на прямолинейную траекторию можно представить в следующем виде:

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = (\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_2)(\mathbf{X} \circ (\mathbf{v}^g \otimes \mathbf{I}_2)), \quad (11)$$

где  $\circ$  — произведение Адамара;  $\mathbf{I}_2$  — единичная матрица 2-го порядка,  $\mathbf{1}_2 = [1 \ 1]^T$ , а матрица  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$  определяется как

$$\mathbf{K} \triangleq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Теорема.** Если законы управления  $\mathbf{v}^c$  и  $\chi^c$  задаются согласно уравнениям (7) и (8) соответственно, то в динамической системе (11) точка равновесия  $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{0}$  асимптотически устойчива в целом.

**Доказательство.** Выберем следующую положительную квадратичную форму в качестве функции Ляпунова:

$$V(\tilde{\mathbf{e}}) = (1/2)\tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{e}}. \quad (12)$$

Производная данной функции может быть преобразована к виду:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) &= \tilde{\mathbf{e}}^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}} = (\tilde{\mathbf{e}}^T \otimes [1 \ 0])(\dot{\tilde{\mathbf{e}}} \otimes [1 \ 0]^T) + \\ &+ (\tilde{\mathbf{e}}^T \otimes [0 \ 1])(\dot{\tilde{\mathbf{e}}} \otimes [0 \ 1]^T). \end{aligned}$$

В предположении отсутствия ветра производную функции Ляпунова (12) вдоль траекторий системы (11) далее можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{e}}) &= \tilde{\mathbf{e}}^T \dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \underbrace{\tilde{e}_{i-1,i}^n \sum_{i=2}^N \left( -v_{i-1}^g \sin(\chi_{i-1} - \chi^q) + v_i^g \sin(\chi_i - \chi^q) \right)}_{\dot{V}_1(\tilde{\mathbf{e}}^n)} + \\ &+ \underbrace{\tilde{e}_{i-1,i}^\tau \sum_{i=2}^N \left( -v_{i-1}^g \cos(\chi_{i-1} - \chi^q) + v_i^g \cos(\chi_i - \chi^q) \right)}_{\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{e}}^\tau)}. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом соотношений (7) и (8) слагаемые  $\dot{V}_1(\tilde{\mathbf{e}}^n)$  и  $\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{e}}^\tau)$  в уравнении (13) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{e}}^n) &= \tilde{e}_{12}^n \left[ -v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n \tilde{e}_{12}^n) + v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n (-\tilde{e}_{12}^n + \tilde{e}_{23}^n)) \right] + \\ &+ \sum_{k=2}^{N-2} \left( \tilde{e}_{k,k+1}^n \left[ -v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n (-\tilde{e}_{k-1,k}^n + \tilde{e}_{k,k+1}^n)) + v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n (-\tilde{e}_{k,k+1}^n + \tilde{e}_{k+1,k+2}^n)) \right] \right) + \\ &+ \tilde{e}_{N-1,N}^n \left[ -v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n (-\tilde{e}_{N-2,N-1}^n + \tilde{e}_{N-1,N}^n)) + v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n (-\tilde{e}_{N-1,N}^n)) \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{\mathbf{e}}^\tau) = & \tilde{e}_{12}^\tau \left[ -\chi - v_f^\tau \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^\tau \tilde{e}_{12}^\tau) + \right. \\ & \left. + \chi + v_f^\tau \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^\tau (-\tilde{e}_{12}^\tau + \tilde{e}_{23}^\tau)) \right] + \\ & + \sum_{k=2}^{N-2} \left( \tilde{e}_{k,k+1}^\tau \left[ -\chi - v_f^\tau \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^\tau (-\tilde{e}_{k-1,k}^\tau + \tilde{e}_{k,k+1}^\tau)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \chi + v_f^\tau \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^\tau (-\tilde{e}_{k,k+1}^\tau + \tilde{e}_{k+1,k+2}^\tau)) \right] \right) + \\ & + \tilde{e}_{N-1,N}^\tau \left[ -\chi - v_f^\tau \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^\tau (-\tilde{e}_{N-2,N-1}^\tau + \tilde{e}_{N-1,N}^\tau)) - \right. \\ & \left. + \chi + v_f^\tau \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^\tau (-\tilde{e}_{N-1,N}^\tau)) \right]. \end{aligned}$$

Далее  $\dot{V}_1(\tilde{\mathbf{e}}^n)$  и  $\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{e}}^\tau)$  можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\tilde{\mathbf{e}}^n) = & \tilde{e}_{12}^n \left[ -v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n \tilde{e}_{12}^n) \right] + \\ & + \sum_{k=2}^{N-1} \left( (-\tilde{e}_{k-1,k}^n + \tilde{e}_{k,k+1}^n) \times \right. \\ & \left. \times \left[ -v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n (-\tilde{e}_{k-1,k}^n + \tilde{e}_{k,k+1}^n)) \right] \right) + \\ & + \tilde{e}_{N-1,N}^n \left[ -v_f^n \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^n (\tilde{e}_{N-1,N}^n)) \right] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\tilde{\mathbf{e}}^\tau) = & \tilde{e}_{12}^\tau \left[ -v_f^\tau \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^\tau \tilde{e}_{12}^\tau) \right] + \\ & + \sum_{k=2}^{N-1} \left( (-\tilde{e}_{k-1,k}^\tau + \tilde{e}_{k,k+1}^\tau) \times \right. \\ & \left. \times \left[ -v_f^\tau \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^\tau (-\tilde{e}_{k-1,k}^\tau + \tilde{e}_{k,k+1}^\tau)) \right] \right) + \\ & + \tilde{e}_{N-1,N}^\tau \left[ -v_f^\tau \frac{2}{\pi} \arctg(k_v^\tau \tilde{e}_{N-1,N}^\tau) \right]. \end{aligned}$$

Функция  $\dot{V}_1(\tilde{\mathbf{e}}^n)$  является отрицательно определенной, поскольку в силу того, что  $\arctg(\cdot)$  — нечетная функция на всей области определения,  $\dot{V}_1(\tilde{\mathbf{e}}^n) < 0$  для  $\forall \tilde{\mathbf{e}}^n \neq \mathbf{0}$ .

Также  $\lim_{\|\tilde{\mathbf{e}}^n\| \rightarrow \infty} V_1(\tilde{\mathbf{e}}^n) \rightarrow \infty$ , значит  $V_1(\tilde{\mathbf{e}}^n)$  — радиально неограниченная функция.

Вместе с тем  $V_1(\tilde{\mathbf{e}}^n)$  является положительно определенной функцией, так как  $\dot{V}_1(\tilde{\mathbf{e}}^n) > 0$  для  $\forall \tilde{\mathbf{e}}^n \neq \mathbf{0}$ .

Учитывая вышесказанное, можно заключить, что точка равновесия системы  $\tilde{\mathbf{e}}^n = \mathbf{0}$  асимптотически устойчива в целом, т. е. траектории решений  $\tilde{\mathbf{e}}^n \rightarrow \mathbf{0}$  асимптотически при  $t \rightarrow \infty$  в случае любых начальных состояний системы.

Аналогичные рассуждения справедливы также для  $\dot{V}_2(\tilde{\mathbf{e}}^\tau)$  и  $V_2(\tilde{\mathbf{e}}^\tau)$ , следовательно,  $\tilde{\mathbf{e}}^\tau \rightarrow \mathbf{0}$  асимптотически при  $t \rightarrow \infty$ . ■

Значит, соотношения (7) и (8) определяют во всем, в нашем случае двумерном, пространстве полета группы БПЛА неоднородное векторное поле следования пути  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (подобное рассматриваемому в работе [14] для одиночного БПЛА в случае следования траекториям) каждого из аппаратов, норма вектора которого в конкретной точке пространства является командой скорости для находящегося в этой точке аппарата, а направление — командой курсового угла.

## Результаты моделирования

Проверку эффективности и работоспособности законов управления производили с помощью модели группы из четырех БПЛА самолетного типа "летающее крыло" Zagi UAV с реалистичной нелинейной динамикой с 6 степенями свободы и 12 состояниями в среде MATLAB/Simulink, причем для каждого аппарата также была синтезирована и настроена модель автопилота.

Каждый из четырех БПЛА группы выдерживал одну и ту же заданную высоту полета, при этом начальные положения аппаратов в инерциальной системе координат были выбраны следующим образом:

$$\mathbf{p}_1 = [150 \ 1500 \ 100]^T;$$

$$\mathbf{p}_2 = [450 \ 950 \ 100]^T;$$

$$\mathbf{p}_3 = [850 \ 500 \ 100]^T;$$

$$\mathbf{p}_4 = [1100 \ 450 \ 100]^T.$$

Желаемые конечные относительные положения БПЛА в инерциальной системе координат:

$$\mathbf{P}_d = [0 \ -20 \ 20 \ 0 \ 0 \ 20]^T.$$

Одновременно с этим конечный курсовой угол для строя БПЛА был выбран равным  $\chi^d = 45^\circ$ . Коэффициенты плавности:  $k_v^n = k_v^\tau = 0,05$ . Максимальные нормы векторов дополнительных скоростей:  $v_f^n = 6$  м/с,  $v_f^\tau = 1$  м/с. Конечная крейсерская скорость строя БПЛА  $v = 13$  м/с. Начальное значение скорости каждого из аппаратов было выбрано таким же.

На рис. 2 (см. третью сторону обложки) показаны переходные траектории формирования

строю для каждого из четырех БПЛА группы, а также векторное поле следования пути для БПЛА № 1 и положение строя в момент времени  $t = 200$  с.

На рис. 3 и 4 показано, как меняются элементы управляющего вектора  $\tilde{e}$  для  $n$ -направления и  $\tau$ -направления, соответственно, с течением времени. Нижний индекс каждого элемента совпадает с порядковым номером БПЛА, для которого формируется команда управления с помощью этого элемента (см. рис. 2 на третьей стороне обложки).

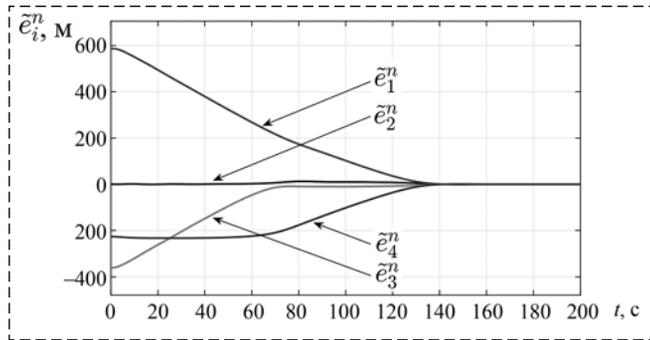


Рис. 3. Изменение элементов управляющего вектора  $\tilde{e}$  в  $n$ -направлении с течением времени

Fig. 3. Elements of the control vector  $\tilde{e}$  in  $n$ -direction changing with time

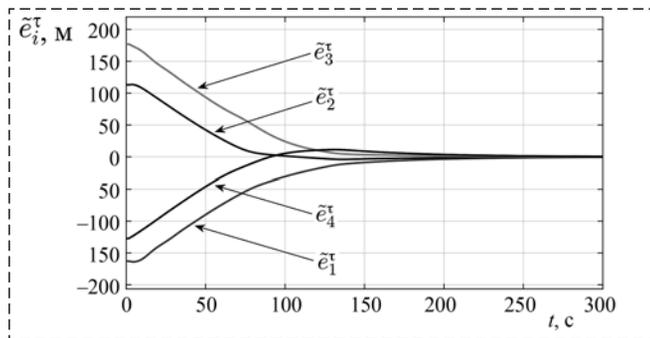


Рис. 4. Изменение элементов управляющего вектора  $\tilde{e}$  в  $\tau$ -направлении с течением времени

Fig. 4. Elements of the control vector  $\tilde{e}$  in  $\tau$ -direction changing with time

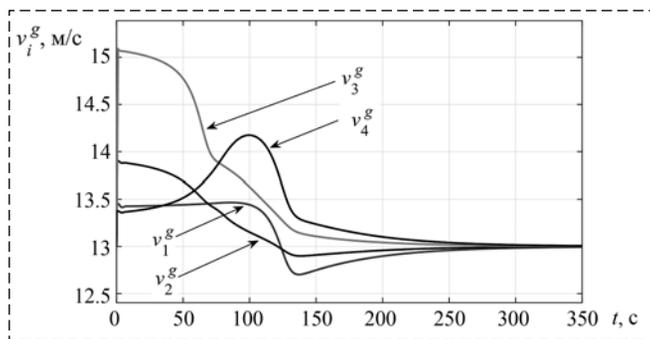


Рис. 5. Изменение скоростей каждого из БПЛА в процессе формирования строя

Fig. 5. UAVs speeds changing with time during shape formation

На рис. 5 изображено изменение скоростей БПЛА в процессе формирования строя, при этом нижний индекс в обозначении каждого графика соответствует порядковому номеру БПЛА на рис. 2 (см. третью сторону обложки).

## Заключение

По результатам моделирования можно заключить, что цель управления достигнута. Таким образом, взаимодействующие в рамках полностью децентрализованной архитектуры БПЛА группы выстраивают и сохраняют заданную геометрическую форму, причем начальное положение аппаратов может быть произвольным в плоскости полета в силу асимптотической устойчивости в целом полученных законов управления.

При этом наличие коэффициентов плавности и норм векторов дополнительных скоростей в качестве настраиваемых параметров позволяет менять характер переходных траекторий.

Поскольку для краткости рассматривалось движение с сохранением заданной высоты полета, целью дальнейшей работы будет также получение законов управления для формирования заданных превышений и траекторий движения с меняющейся высотой полета строя БПЛА.

## Список литературы

1. Maza I., Ollero A., Casado E., Scarlatti D. Classification of multi-UAV architectures. In: K. P. Valavanis, G. J. Vachtsevanos (Eds.), Handbook of unmanned aerial vehicles. Dordrecht; Heidelberg; New York; London: Springer, 2015. P. 953–975.
2. Нестеров В. А., Кадыров Я. Р. Управление группой беспилотных летательных аппаратов в режиме радиомолчания // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. № 6. С. 419–425.
3. Chang K., Xia Y., Huang K. UAV formation control design with obstacle avoidance in dynamic three-dimensional environment // SpringerPlus. 2016. Vol. 5 (1). P. 1124.
4. Ren W., Beard R. W., Atkins E. M. A survey of consensus problems in multi-agent coordination // Proceedings of the IEEE American Control Conference. 2005. P. 1859–1864.
5. Yamaguchi H., Arai T., Beni G. A distributed control scheme for multiple robotic vehicles to make group formations // Robotics and autonomous systems. 2001. Vol. 36 (4). P. 125–147.
6. Ren W., Chen Y. Q. Leaderless formation control for multiple autonomous vehicles // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit. 2006. P. 6069.
7. Elkaim G. H., Kelbley R. J. A lightweight formation control methodology for a swarm of non-holonomic vehicles // IEEE Aerospace Conference. 2006. P. 1–8.
8. Barnes L., Fields M. A., Valavanis K. Unmanned ground vehicle swarm formation control using potential fields // IEEE Mediterranean Conference on Control & Automation. 2007. P. 1–8.
9. Nakai K., Uchiyama K. Vector fields for UAV guidance using potential function method for formation flight // AIAA Guidance, Navigation and Control (GNC) Conference. 2013. P. 4626.

10. Garcia R., Barnes L. Multi-UAV simulator utilizing X-Plane // *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. 2010. Vol. 57. P. 393–406.

11. Мунасыпов Р. А., Муслимов Т. З. Групповое управление беспилотными летательными аппаратами на основе метода пространства относительных состояний // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2018. № 2. С. 120–125.

12. How J. P., Frazzoli E., Chowdhary G. V. Linear flight control techniques for unmanned aerial vehicles. In: K. P. Vala-

vanis, G. J. Vachtsevanos (Eds.), *Handbook of unmanned aerial vehicles*. Dordrecht; Heidelberg; New York; London: Springer, 2015. P. 529–574.

13. Ren W., Beard R. W. Trajectory tracking for unmanned air vehicles with velocity and heading rate constraints // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. Vol. 12 (5). 2004. P. 707–716.

14. Nelson D. R., Barber D. B., McLain T. W., Beard R. W. Vector field path following for miniature air vehicles // *IEEE Transactions on Robotics*. 2007. Vol. 23 (3). P. 519–529.

## Decentralized Nonlinear Group Control of Fixed-Wing UAV Formation

T. Z. Muslimov, tagir.muslimov@gmail.com, R. A. Munasypov, rust40@mail.ru,  
Ufa State Aviation Technical University, 450000, Ufa, Russian Federation

Corresponding author: Muslimov Tagir Z., Graduate Student, Ufa State Aviation Technical University,  
450000, Ufa, Russian Federation, e-mail: tagir.muslimov@gmail.com

Accepted on June 30, 2019

### Abstract

The article proposes a control method for autonomous unmanned aerial vehicles (UAVs) group of a fixed-wing type intended to both implement and support flight in formation with predetermined relative distances between the vehicles. The suggested approach provides any selected geometric formation shape construction and further preservation when UAVs enter a straight-line trajectory described by a given course with arbitrary initial positions of UAVs in the horizontal plane. The proposed method feature is "autopilot—UAV" system's nonlinear structure consideration, manifesting itself in both the autopilot input commands restrictions existence as well as nonholonomic UAV dynamics. In addition, there is an unlimited multi-UAV system scalability available due to decentralization. We take into account the need to maintain a minimum flight speed of not less than the stall speed and the final speed of the formation equal to the cruising speed of this type of UAV. The nonlinear group control laws synthesized using Lyapunov's direct method are based on the decentralized consensus interaction topology, initially developed for linear agents, which implies each vehicle to interact with its neighboring vehicles only. Global asymptotic stability for the current control laws has been proved. As a result, proposed control laws determine a non-uniform path-following vector field for each vehicle in the whole UAV group flight space (currently two-dimensional space). The suggested field vector norm at a certain space point is the airspeed command for the vehicle at that point while the vector direction is the course angle command. The proposed approach effectiveness has been successfully tested in the MATLAB/Simulink while using realistic nonlinear six degree-of-freedom (DOF) 12-states fixed-wing UAV models. High fidelity simulation results confirm the suggested approach effectiveness.

**Keywords:** unmanned aerial vehicle, UAV formation, UAV swarm, formation flight, UAV group control, nonlinear formation control, consensus, decentralized control

**Acknowledgements:** The reported study was funded by RFBR according to the research project № 18-08-01299.

For citation:

Muslimov T. Z., Munasypov R. A. Decentralized Nonlinear Group Control of Fixed-Wing UAV Formation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 43–50.

DOI: 10.17587/mau.21.43-50

### References

1. Maza I., Ollero A., Casado E., Scarlatti D. Classification of multi-UAV architectures, In: K. P. Valavanis, G. J. Vachtsevanos (Eds.), *Handbook of unmanned aerial vehicles*, Dordrecht; Heidelberg; New York; London, Springer, 2015, pp. 953–975.

2. Nesterov V. A., Kadyrov J. R. The group management of unmanned aerial vehicles in the radio silence mode, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 6, pp. 419–425 (in Russian).

3. Chang K., Xia Y., Huang K. UAV formation control design with obstacle avoidance in dynamic three-dimensional environment, *SpringerPlus*, 2016, vol. 5 (1), p. 1124.

4. Ren W., Beard R. W., Atkins E. M. A survey of consensus problems in multi-agent coordination, *Proceedings of the IEEE American Control Conference*, 2005, pp. 1859–1864.

5. Yamaguchi H., Arai T., Beni G. A distributed control scheme for multiple robotic vehicles to make group formations, *Robotics and autonomous systems*, 2001, vol. 36 (4), pp. 125–147.

6. Ren W., Chen Y. Q. Leaderless formation control for multiple autonomous vehicles, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, 2006, p. 6069.

7. Elkaim G. H., Kelbley R. J. A lightweight formation control methodology for a swarm of non-holonomic vehicles, *IEEE Aerospace Conference*, 2006, pp. 1–8.

8. Barnes L., Fields M. A., Valavanis K. Unmanned ground vehicle swarm formation control using potential fields, *IEEE Mediterranean Conference on Control & Automation*, 2007, pp. 1–8.

9. Nakai K., Uchiyama K. Vector fields for UAV guidance using potential function method for formation flight, *AIAA Guidance, Navigation and Control (GNC) Conference*, 2013, p. 4626.

10. Garcia R., Barnes L. Multi-UAV simulator utilizing X-Plane, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 2010, vol. 57, pp. 393–406.

11. Munasypov R. A., Muslimov T. Z. UAVs group control based on the relative state space method, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 2, pp. 120–125 (in Russian).

12. How J. P., Frazzoli E., Chowdhary G. V. Linear flight control techniques for unmanned aerial vehicles, In: K. P. Valavanis, G. J. Vachtsevanos (Eds.), *Handbook of unmanned aerial vehicles*, Dordrecht; Heidelberg; New York; London, Springer, 2015, pp. 529–574.

13. Ren W., Beard R. W. Trajectory tracking for unmanned air vehicles with velocity and heading rate constraints, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 12 (5), 2004, pp. 707–716.

14. Nelson D. R., Barber D. B., McLain T. W., Beard R. W. Vector field path following for miniature air vehicles, *IEEE Transactions on Robotics*, 2007, vol. 23 (3), pp. 519–529.

С. А. Кабанов, д-р техн. наук, проф., kaba-sa@mail.ru,

Б. А. Зимин, канд. физ.-мат. наук, доц., bazimin@mail.ru, Ф. В. Митин, аспирант, fedor28@list.ru,  
Балтийский государственный технический университет "ВОЕНМЕХ" им. Д. Ф. Устинова, г. Санкт-Петербург

## Разработка и исследования математических моделей раскрытия подвижных частей трансформируемых космических конструкций.

### Часть I

*Рассмотрен процесс раскрытия элементов конструкции крупногабаритного трансформируемого рефлектора космического базирования с использованием вантовой системы поддержания формы. Процесс развертывания можно разбить на отдельные этапы. На каждом этапе движение происходит за счет воздействия на конструкцию актюаторов — исполнительного устройства системы управления. Энергия для развертывания элементов рефлектора производится за счет приводов, в частности электрической машины. Применение данного вида актюатора позволяет управлять процессом раскрытия. Ввиду того что в настоящее время достигнут огромный процесс в компьютерной технике, позволяющий выполнять объемные вычислительные операции за короткое время, особо актуальным становится применение алгоритмов оптимального управления. Для двух видов движения — вращательного и поступательного — получены математические модели раскрытия рефлектора на основе уравнений Лагранжа II рода. В данных математических моделях учтены как диссипативность, так и продольная и поперечная деформации. В моделях предусмотрено наличие упора и фиксатора, в качестве исполнительного элемента при развертывании выбран бесколлекторный двигатель постоянного тока. Все сделанные замечания позволяют сформулировать задачу плавной постановки раскрываемых элементов на упор с учетом минимизации колебаний конструкции. Разработанные модели позволяют проанализировать и собственных частот колебаний. Проведено моделирование с различными параметрами модели. Проанализированы показатели переходного процесса спицы при раскрытии первого звена с вложенными в нее стальными звеньями и при полностью раскрытой спице. Показано, что в зависимости от массогабаритных параметров происходит значительное изменение динамики. Для этапа выдвигания спицы массогабаритные характеристики незначительно влияют на динамику раскрытия. Затухающие продольные колебания тем больше, чем меньше модуль Юнга и плотность материала. Проведено моделирование данного этапа при спице, изготовленной из разных материалов. Предложены различные методы, позволяющие сократить время раскрытия на всех этапах и минимизировать поперечные и продольные колебания. Показана возможность применения разработанных математических моделей для широкого круга задач.*

**Ключевые слова:** математическая модель, вращательное движение, поступательное движение, раскрытие, моделирование, крупногабаритный трансформируемый рефлектор

### Введение

Работы по созданию крупногабаритных конструкций космических аппаратов проводились еще в 80-х годах XX века. Однако их широкое внедрение в космические телекоммуникационные системы начинается только сейчас.

Основными показателями трансформируемой системы являются ее стабильное состояние в процессе всего периода эксплуатации и надежность раскрытия.

Анализируя существующие разрабатываемые виды больших космических антенн [1, 2], можно сделать вывод, что одним из перспективных направлений является создание крупногабаритного трансформируемого рефлектора космического базирования с использованием тросовой системы поддержания формы рефлектора.

Рассмотрим конструкцию крупногабаритного трансформируемого рефлектора (КТР) с использованием тросовой (вантовой) системы

поддержания формы рефлектора (рис. 1, см. третью сторону обложки). Отличительными чертами такой конструкции являются компактность при транспортировке, большое отношение объемов в раскрытом и сложенном состоянии.

КТР космического базирования с использованием вантовой системы состоит из космического аппарата (КА) 1, относительно которого разворачиваются все элементы солнечных батарей 2, обеспечивающих энергией установку, системы 3, облучающей отражающую поверхность. Также в состав рефлектора входит штанга 4, выдвигающая рефлектор 5 на необходимое расстояние, и сетеполотно 6, формирующее необходимую диаграмму направленности (рис. 1).

Процесс раскрытия рефлектора можно разбить на восемь отдельных этапов:

- 1) раскрытие спиц рефлектора;
- 2) доворот рефлектора;
- 3) раскрытие штанги;
- 4) выдвигание штанги;
- 5) выдвигание звеньев спиц;
- 6) раскрытие концевых звеньев спиц;
- 7) настройка

формы отражающей поверхности; 8) настройка орбитального положения рефлектора.

В общем виде задача раскрытия КТР на каждом этапе решается за счет воздействия на конструкцию актюаторов — исполнительного устройства системы управления. В настоящее время разворачивание различных видов крупногабаритных рефлекторов (ферменных, зонтичных, кольцевых и др.) осуществляется за счет энергии пружин или деформированных упругих элементов [3, 4]. Очевидные недостатки данного способа: невозможность управления процессом раскрытия, необходимость создания макета и проведения дополнительных расчетов для определения степени сжатия пружин или закручивания элементов, наличие колебаний и прогибов конструкции.

Альтернативой классическим системам раскрытия могут являться автоматические системы, в которых энергия для разворачивания элементов рефлектора производится за счет приводов, в частности электрической машины. Применение данного вида актюатора позволит управлять процессом раскрытия, уменьшить колебания и прогибы конструкции КТР.

Использование таких приводов требует наличия системы управления, базирующейся на использовании информации о состоянии системы. Поэтому дополнительно встает вопрос о датчиках обратной связи, их числе, точности и периодичности работы, вследствие чего может возникнуть задача фильтрации данных, задача программирования или синтеза управления. Как итог, на основе численного моделирования необходимо выработать стратегию управления раскрытием КТР.

Следует отметить, что особую актуальность вопросу придает тот факт, что за последнее десятилетие достигнут огромный прогресс в компьютерной технике, который позволяет выполнять объемные вычислительные операции за короткое время. Вследствие этого целесообразно для разворачивания КТР применять алгоритмы оптимального управления [5—9].

Для корректного функционирования рефлектора на орбите требуется разворачивание системы с минимально возможными колебаниями каждой из частей. Во время вывода на орбиту КТР находится в сложенном состоянии для удобства транспортировки на ракетоносителе. После выведения рефлектора в заданную точку и отделения его от ракетоносителя начинается процесс раскрытия. Ввиду того что

конструкция состоит из нескольких узлов, раскрытие происходит поэтапно. На каждом этапе решается своя задача, и соответственно каждый этап описывается различными дифференциальными уравнениями.

### Раскрытие спиц рефлектора

Рассмотрим первый этап. Примем, что один актюатор разворачивает только одну спицу в одной плоскости (рис. 2). Спица одним концом жестко закреплена за силовой каркас рефлектора. Необходимо развернуть спицу рефлектора космического базирования длиной  $a$  и массой  $m$  из начального транспортировочного положения  $\varphi_0$  в конечное заданное  $\varphi_k$ .

Спица одним концом прикреплена к КА. В точке закрепления имеется шарнирное соединение, такое что система имеет одну степень свободы, и ее положение определяется углом разворачивания  $\varphi$ . Раскрытие происходит за счет изменения момента  $M$ , приложенного к закрепленному концу.

Точку закрепления примем за начало системы координат, при этом оси  $Ox$  и  $Oy$  остаются неподвижными, и ось  $Oy$  совпадает с начальным углом разворачивания спицы  $\varphi_0$ . Поскольку в дальнейшем предполагается находить переменные, зависящие от расстояния от начала координат до точки на спице, то введем подвижную ось  $O'l$ , совпадающую с центральной осью самой спицы.

В рассматриваемой задаче необходимо управлять системой разворачивания и поддержания

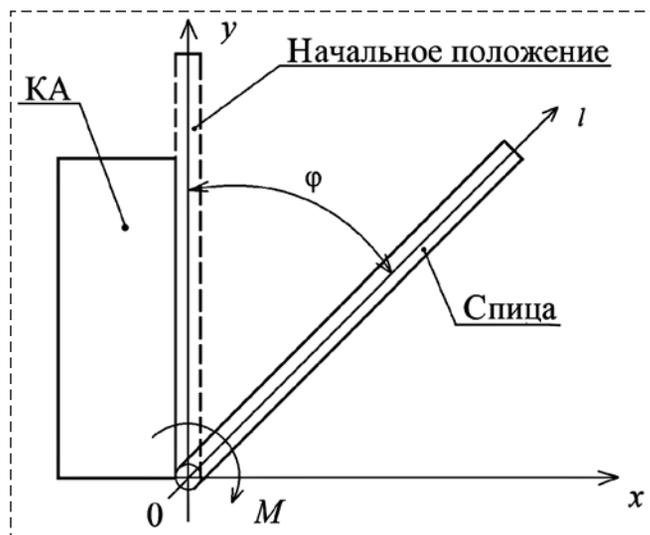


Рис. 2. Раскрытие спицы рефлектора  
Fig. 2. Disclosure of the spokes of the reflector

формы КТР без учета его пространственного положения, а также принимая тот факт, что момент инерции спицы  $I$  много меньше момента инерции КА. Поэтому будем считать, что согласно третьему закону Ньютона момент силы, действующий на КА в сторону, противоположную приложенному моменту силы  $M$ , несоизмеримо мал, и его можно не учитывать.

Конструктивно спица имеет цилиндрическую форму радиуса  $R$  и изготовлена из материала с плотностью  $\rho$  и модулем упругости  $E$ . Примем, что спица  $I$  имеет телескопическую структуру и внутри себя содержит вложенные звенья 2, 3, которые выдвигаются одно из другого (рис. 3). В сложенном состоянии звенья жестко закреплены. Тогда можно допустить, что формой спицы является сплошной цилиндр, и никаких дополнительных перемещений звеньев относительно друг друга не происходит.

Первое звено шарнирно соединено с основанием и фиксируется при достижении максимального угла раскрытия, второе звено находится внутри первого, совершает поступательное движение в процессе раскрытия и фиксируется по окончании. Третье и четвертое звенья телескопически уложены во второе звено. Звенья имеют возможность поступательного перемещения относительно второго звена и возможность фиксации окончательного положения.

Поскольку на первом этапе разворачивается только корневое звено с убранными в него оставшимися звеньями, то люфтами в соединениях можно пренебречь и считать спицу единым телом.

При достижении спицей конечного положения для гашения скорости разворачивания предусмотрен механизм упора, физически состоящего из упругого и демпфирующего элементов, например, пружины и вибропрокладки. Во избежание отскакивания спицы от упора установлен механизм фиксатора, также состоящего из упругого и демпфирующего элементов.

Рассмотрим случай разворачивания спицы в космическом пространстве, т. е. примем, что КТК обладает общим нулевым уровнем потенциальной энергии сил всемирного тяготения  $\Pi_{\text{тяг}} = 0$  [10].

Одной из проблем, возникающих при раскрытии КТК, является наличие колебаний конструкции при движении (рис. 4), постановке на упор и последующей фиксации. В рассматриваемом случае учтем только изгиб спицы  $h$ , как имеющий наибольшее значение при



Рис. 3. Телескопическая структура спицы  
Fig. 3. The telescopic structure of spokes

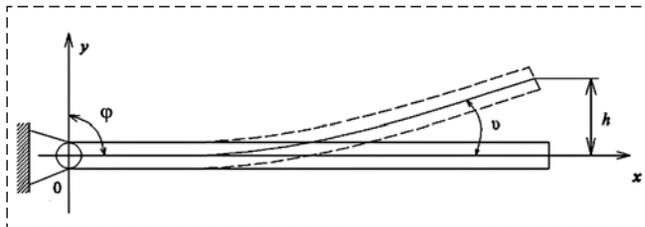


Рис. 4. Изгиб спицы  
Fig. 4. Bending of spoke

данном виде движения. Таким образом, деформации сдвига, кручения, растяжения-сжатия не учитываются. Для удобства изображения изгиба ось  $Ox$  совпадает с осью  $OI$ .

Для получения уравнений вращательного движения воспользуемся обобщенным уравнением Лагранжа II рода с учетом диссипативных сил [11, 12]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где  $q$  — обобщенные координаты;  $L$  — функция Лагранжа, определяемая равенством  $L = T - \Pi$ , где  $T$  — кинетическая энергия системы,  $\Pi$  — потенциальная энергия системы. В дальнейшем для удобства будем использовать точку над переменной, понимая под этим производную по времени, а знак "''" над переменной — как производную по длине. Для вращательного движения в качестве обобщенной координаты  $q$  выступает угол раскрытия  $\varphi$ .

Кинетическая энергия для вращательного движения имеет вид

$$T_B = \frac{I \dot{\varphi}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия для вращательного движения  $\Pi_B$ , которым обладает система при совершении поворота на угол  $\varphi$  при действии момента  $M$ , равна

$$\Pi_B = M\varphi.$$

Как отмечалось выше, при достижении конечного угла разворачивания на спицу действуют механизмы упора и фиксации. Таким образом, общий момент  $M$  будет определяться как

$$M = M_{\text{п}} - M_{\text{тр}} - M_{\text{упор}} - M_{\text{ф}},$$

где  $M_{\text{п}}$  — полезный момент;  $M_{\text{тр}}$  — момент трения;  $M_{\text{упор}}$  — момент, создаваемый упором;  $M_{\text{ф}}$  — момент, создаваемый фиксатором.

Для создания полезного момента вращения  $M_{\text{п}}$  выбран бесколлекторный (вентильный) двигатель постоянного тока. Он обладает большим сроком службы, обеспечивает высокие моменты, высокую эффективность и низкое тепловыделение, что является важным в космическом пространстве.

Вращающий момент, создаваемый бесколлекторной машиной, равен [13, 14]

$$M_{\text{п}} = \frac{m_{\text{э}} p E_0 U_1}{\omega_1 X_{\text{с}}} \sin \vartheta, \quad (2)$$

где  $m_{\text{э}}$  — число фаз ротора;  $p$  — число пар полюсов магнитного поля;  $E_0$  — действующее значение ЭДС на обмотке статора;  $U_1$  — напряжение питания;  $X_{\text{с}}$  — синхронное сопротивление ( $X_{\text{с}} = X_{\text{с}} + X_{\text{а}}$ , где  $X_{\text{с}}$  и  $X_{\text{а}}$  — индуктивные сопротивления рассеяния и реакции якоря соответственно);  $\omega_1$  — угловая скорость вращения ротора двигателя;  $\vartheta$  — угол рассогласования (между  $U_1$  и  $E_0$ , для двигателя находится в пределах  $[0, \pi/2]$ ).

Для точного расчета момента трения должны быть учтены четыре разных источника [15]:

$$M_{\text{тр}} = \varphi_{\text{ish}} \varphi_{\text{rs}} M_{\text{rr}} + M_{\text{sl}} + M_{\text{seal}} + M_{\text{drag}}, \quad (3)$$

где  $\varphi_{\text{ish}}$  — коэффициент уменьшения за счет нагрева смазочного материала;  $\varphi_{\text{rs}}$  — коэффициент уменьшения в режиме кинематического голодания;  $M_{\text{rr}}$  — момент трения качения;  $M_{\text{sl}}$  — момент трения скольжения;  $M_{\text{seal}}$  — момент трения уплотнений;  $M_{\text{drag}}$  — момент трения за счет сопротивления смазки, взбалтывания, разбрызгивания и пр.

Для описания механизмов упора и фиксации допустим, что оба этих устройства могут быть представлены в виде упругого  $M_{\text{у}}$  и демпфирующего  $M_{\text{д}}$  элементов с соответствующими характеристиками [16, 17]. Учитывая, что раскрывающийся элемент задействует упор только при достижении угла  $\varphi_{\text{к}}$ , общую модель упора можно записать следующим образом:

$$M_{\text{упор}} = (k_{\text{у.упор}} \Delta\varphi + c_{\text{д.упор}} \dot{\varphi}) H_{\text{упор}}(\Delta\varphi), \quad (4)$$

где  $k_{\text{у.упор}}$  — коэффициент жесткости упругой компоненты модели упора;  $c_{\text{д.упор}}$  — коэффициент демпфирования вязкой компоненты модели упора;  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_{\text{к}}$  — относительный угол, соответствующий моменту  $t_f$  установки на упор спицы при достижении конечного угла раскрытия  $\varphi_{\text{к}}$ ;  $H_{\text{упор}}(\Delta\varphi)$  — функция, которая принимает значение 1 (при  $\Delta\varphi > 0$ ) или 0 (при  $\Delta\varphi < 0$ ).

Аналогично модели упора (4) запишем общую модель фиксатора [16, 17]:

$$M_{\text{ф}} = (k_{\text{у.ф}} \Delta\varphi + c_{\text{д.ф}} \dot{\varphi}) H_{\text{ф}}(\Delta\varphi), \quad (5)$$

где  $H_{\text{ф}}(\Delta\varphi)$  — функция, которая принимает значение 1 (при  $\Delta\varphi < 0$ ) или 0 (при  $\Delta\varphi > 0$ ) при условии, что спица уже достигла  $\varphi_{\text{к}}$ , т. е.  $H_{\text{упор}}(\Delta\varphi)$  был равен 1.

Помимо обобщенных координат, в качестве которых выступает угол поворота  $\varphi$ , при изгибе  $h$  (рис. 4) движение совершается не отдельными дискретными точками, а всеми точками непрерывной среды, так как происходит "смещение слоев" в стержне, за счет чего собственно и происходит изгиб спицы. Для того чтобы применить к описанию движения таких систем принцип наименьшего действия, необходимо вместо непрерывной системы ввести близкую ей дискретную систему.

Грубой моделью может служить система бесконечного числа точек одинаковой массы, равноудаленных друг от друга и связанных между собой невесомыми упругими пружинами. Предполагается, что эти точки могут двигаться только вдоль прямой, на которой они расположены.

Выражения для кинетической и потенциальной энергии легко получить в приближении малых колебаний [18]:

$$T_{\text{п}} = \frac{1}{2} \rho S \int_0^a \dot{h}^2 dl,$$

где  $\rho$  — плотность материала;  $S$  — площадь поперечного сечения.

Определим зависимость между касательной к изогнутой оси балки и осью  $0l$  (рис. 4) как  $\text{tg} \upsilon = \partial h / \partial l$ . Ввиду малости углов перемещений можем считать, что угол прогиба  $\upsilon = \partial h / \partial l$ .

Потенциальная энергия системы  $\Pi$  будет определяться из потенциальной энергии из-

гиба [18] и энергии, которой обладает система при совершении изгиба на угол  $\partial h/\partial l$  при действии полного момента  $M$ :

$$\Pi_{\text{изг}} = \frac{EI_{\text{изг}}}{2} \int_0^a \left( \frac{\partial^2 h}{\partial l^2} \right)^2 dl + M \int_0^a \frac{\partial h}{\partial l} dl,$$

где  $I_{\text{изг}}$  — изгибающий (поперечный) момент инерции. При изгибе инерция в спице возникает не относительно оси вращения, а относительно поперечных слоев, которые стремятся сдвинуться.

Отметим, что изгиб  $h$  является функцией координаты  $l$  и времени  $t$ . Изгиб является в данном случае обобщенной координатой. Кроме того, в отличие от функции (1) в функцию Лагранжа непрерывной системы наряду с обобщенной координатой  $h$  и ее производной по времени  $\dot{h}$  входит также производная по координате  $h'$ . Таким образом, здесь  $l$  и  $t$  входят как равноправные параметры функции Лагранжа [19]:

$$L = T - \Pi = \int_0^a \frac{1}{2} \left[ \rho S \dot{h}^2 - EI_{\text{изг}} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial l^2} \right)^2 - 2M \frac{\partial h}{\partial l} \right] dl.$$

С учетом вышесказанного уравнение движения (1) запишется как [19]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dl} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial q_i}{\partial l} \right)} \right] - \frac{d^2}{dl^2} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial^2 q_i}{\partial l^2} \right)} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d^2}{dl^2} \left[ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \right] = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Рассмотрим диссипативные силы, т. е. силы, которые при деформации первоначального тела преобразуют его энергию в теплоту постепенно, необратимо поглощая и рассеивая ее. К таким силам относятся: 1) силы внутреннего трения; 2) силы внешнего трения. Поскольку разворот спицы предполагается в безвоздушном космическом пространстве, то будем учитывать только первый вид сил.

Эта рассеивающаяся часть энергии системы может быть описана с помощью так называемой диссипативной функции (функции рассеивания)  $D$ . Понятие о диссипативной функции было введено Рэлеем в его классическом труде "Теория звука" (1878 г.) [20].

Силы, вызывающие затухания, будут зависеть от материала балки и силы неупругого внутреннего сопротивления. Известны схемы

сопротивления в виде вязкого и сухого трения [21], а также внутреннего сопротивления по гипотезе Максвелла [21]. Наиболее распространенной является гипотеза Фойгта, согласно которой материал балки рассматривается как упруго-вязкое тело, в котором напряжение зависит не только от деформации, но и от скорости изменения деформации во времени [21].

Гипотеза Фойгта не всегда соответствует опытными данным, но ее можно взять за основу простейшего учета внутренних сил сопротивления. При этом возможны два случая сопротивления [22]:

1) система может иметь слабое демпфирование, откуда следует, что колебания происходят с уменьшающейся амплитудой и с частотой собственных колебаний. При этом начальное значение амплитуды и начальную фазу колебаний находят из начальных условий;

2) система может иметь сильное демпфирование, при этом движение не является периодическим.

Примем, что спица имеет слабое демпфирование и собственная частота колебаний с затуханием близка к собственной частоте без затухания. Тогда диссипацию изгиба  $D_{\text{изг}}$  можно учесть как [23]

$$D_{\text{изг}} = \frac{1}{2} \gamma EI_{\text{изг}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial l^2} \right) \right)^2, \quad (7)$$

где  $\gamma$  — коэффициент затухания.

Уравнение (6) с учетом проделанных вычислений примет вид:

$$\rho S \ddot{h} + EI_{\text{изг}} \frac{\partial^4 h}{\partial l^4} - 2 \frac{\partial M}{\partial l} + \gamma EI_{\text{изг}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^4 h}{\partial l^4} \right) = 0. \quad (8)$$

Из уравнения (8) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно времени для определения прогиба спицы  $h$  при ее повороте на угол  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega; \\ \dot{\omega} &= \frac{M_{\text{п}} - M_{\text{тр}} - M_{\text{упор}} - M_{\text{ф}}}{I}; \\ \dot{h} &= V_{\text{изг}}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{V}_{\text{изг}} = - \frac{EI_{\text{изг}}}{\rho S} \frac{\partial^4 h}{\partial l^4} - \gamma \frac{EI_{\text{изг}}}{\rho S} \frac{\partial^4 V_{\text{изг}}}{\partial l^4} + \frac{2}{\rho S} \frac{\partial M}{\partial l},$$

где  $V_{\text{изг}}$  — линейная скорость изгиба спицы. Для решения данной системы уравнений не-

обходимо выполнить интегрирование системы как по времени, так и по длине.

Для определения  $\partial M/\partial l$  примем, что полный момент силы  $M$  создается на радиусе вала двигателя  $R_{дв}$ , приводящего систему в движение.

### Выдвижение спиц рефлектора

Следующим этапом разворачивания КТР является выдвижение спицы (рис. 5). В данном случае имеет место поступательное движение, направленное в одной плоскости вдоль главной оси штанги. Спица одним концом жестко закреплена за силовой каркас рефлектора.

Примем, что один актюатор выдвигает звенья спицы только в одной плоскости (рис. 5). Спица одним концом жестко закреплена за силовой каркас рефлектора. Исходя из вышеизложенного рассмотрим выдвижение второго звена.

Необходимо выдвинуть спицу рефлектора космического базирования длиной  $x_{выдв}$  и массой  $m_{выдв}$  из начального транспортировочного положения  $x_0$  в конечное заданное  $x_k$ .

Как видно из рис. 5, на спицу действуют следующие силы: сила трения  $F_{тр}$ , толкающая сила  $F_{п}$ .

Сила трения  $F_{тр}$  будет зависеть от конкретного способа выдвижения спицы. Если предположить, что выдвижение штанги осуществляется по направляющим, скользящим по роликам [24—26], то необходимо помимо трения качения учитывать трение осей подшипников.

Поскольку в рассматриваемой задаче необходимо управлять системой разворачивания и поддержания формы КТР без учета его пространственного положения, а также принимая во внимание тот факт, что масса спицы много меньше массы КА и выдвижение спиц происходит одновременно в противоположные стороны, будем считать, что согласно третьему закону Ньютона сила, действующая на КА в сторону, противоположную приложенной

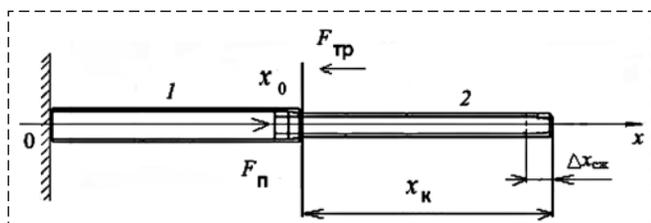


Рис. 5. Выдвижение спицы  
Fig. 5. Push of spoke

полезной силе  $F_{п}$ , несоизмеримо мала, и ее можно не учитывать.

Для получения уравнений поступательного движения спицы также воспользуемся уравнением Лагранжа II рода (1). Для вывода уравнений диссипативных сил и потенциальной энергии воспользуемся выводами, полученными для вращательного движения. Таким образом, КТР обладает общим нулевым уровнем потенциальной энергии сил всемирного тяготения  $\Pi_{тяг} = 0$  [10]. В рассматриваемом случае движение происходит вдоль одной оси. Примем, что полезную толкающую силу  $F_{п}$  задает электрический двигатель, аналогичный рассмотренному при вращательном движении.

Вследствие этого для описания  $F_{п}$  можно использовать уравнение, аналогичное (2). Помимо этого для создания  $F_{п}$  необходимо учитывать конструкцию передачи, например, цепную, зубчатую и т. д., что само по себе является отдельной технической задачей. Для полного описания также необходимо учитывать люфты и "мертвые" зоны механизма. С учетом вышесказанного уравнение для  $F_{п}$  будет состоять из уравнения типа (2), умноженного на коэффициент  $k_f$ , который отвечает за преобразование вращающего момента в толкающую силу:

$$F_{п} = k_f M_{п}. \quad (10)$$

Кинетическая энергия поступательного движения

$$T_{п} = \frac{m_{выдв} \dot{x}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия поступательного движения  $\Pi_{п}$ , которым обладает система при выдвижении на длину  $x$  при действии силы  $F$ , равняется

$$\Pi_{п} = Fx.$$

Запишем выражение для функции Лагранжа:

$$L = T_{п} - \Pi_{п} = \frac{m_{выдв} \dot{x}^2}{2} - Fx.$$

Как отмечалось выше, при достижении конечной длины раскрытия на спицу действуют механизмы упора и фиксации. Таким образом, общая сила  $F$  будет определяться как

$$F = F_{п} - F_{тр} - F_{упор} - F_{ф},$$

где  $F_{п}$  — полезная сила;  $F_{тр}$  — сила трения;  $F_{упор}$  — сила, создаваемая упором;  $F_{ф}$  — сила, создаваемая фиксатором.

Аналогично моделям (4) и (5) необходимо учитывать воздействие механизмов фиксации, которые при линейных зависимостях упругого и вязкого элементов [16, 17] будут определяться зависимостями для сил  $F_y$  и  $F_d$ .

При сделанных допущениях, а также учитывая, что раскрывающийся элемент задевает упор только при достижении длины  $x_k$ , общую модель упора можно записать следующим образом [16, 17]:

$$F_{\text{упор}} = (k_{y,\text{упор}}\Delta x + c_{d,\text{упор}}\dot{x})H_{\text{упор}}(\Delta x), \quad (11)$$

где  $k_{y,\text{упор}}$  — коэффициент жесткости упругой компоненты;  $c_{d,\text{упор}}$  — коэффициент демпфирования вязкой компоненты;  $\Delta x = x - x_k$  — относительное перемещение, соответствующее моменту установки на упор спицы при достижении конечной длины раскрытия  $x_k$ ;  $H_{\text{упор}}(\Delta x)$  — функция, которая принимает значение 1 (при  $\Delta x > 0$ ) или 0 (при  $\Delta x < 0$ ).

Аналогично модели упора (11) запишем общую модель фиксатора:

$$F_{\text{ф}} = (k_{y,\text{ф}}\Delta x + c_{d,\text{ф}}\dot{x})H_{\text{ф}}(\Delta x), \quad (12)$$

где  $H_{\text{ф}}(\Delta x)$  — функция, которая принимает значение 1 (при  $\Delta x < 0$ ) или 0 (при  $\Delta x > 0$ ) при условии, что спица уже достигла  $x_k$ , т. е.  $H_{\text{упор}}(\Delta x)$  был равен 1.

Помимо обобщенных координат, в качестве которых выступает длина выдвигения  $x$ , при выдвигении спицы в ней возникает продольная деформация  $\Delta x_{\text{сж}}$  (рис. 5). Предположим, что все точки любого поперечного сечения стержня смещаются в направлении оси спицы на одинаковую величину  $\Delta x_{\text{сж}}$ . Перемещения точек являются функциями координаты  $x$  и времени  $t$ :  $\Delta x_{\text{сж}} = \Delta x_{\text{сж}}(x, t)$ . Это означает, что для определения перемещений точек спицы достаточно определить перемещение точек оси спицы, так как перемещение любой точки спицы совпадает с перемещением точки оси спицы, лежащей в том же сечении.

Для получения уравнений продольных колебаний одномерной системы воспользуемся обобщенным уравнением Лагранжа [11, 12] с учетом диссипативных сил (6):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial q_i}{\partial x} \right)} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dx} \left[ \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \right] = 0, \quad (13)$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Выражения для кинетической и потенциальной энергии легко получить в приближении малых колебаний [18]:

$$T_{\text{прод}} = \frac{1}{2} \rho S \int_0^{x_{\text{выдв}}} (\Delta \dot{x}_{\text{сж}})^2 dx,$$

где  $\rho$  — плотность материала;  $S$  — площадь поперечного сечения.

Потенциальная энергия системы  $\Pi_{\text{прод}}$  будет определяться из потенциальной энергии сжатия [18] и энергии, которой обладает система при совершении сжатия на длину  $\frac{\partial \Delta x_{\text{сж}}}{\partial x}$  при действии полной силы  $F$  при условии, что относительное удлинение или деформация растяжения-сжатия  $\varepsilon = \frac{d\Delta x_{\text{сж}}}{dx} = \text{const}$  и  $ES = \text{const}$ :

$$\Pi_{\text{прод}} = \frac{ES}{2} \int_0^{x_{\text{выдв}}} \left( \frac{\partial \Delta x_{\text{сж}}}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{\sigma \varepsilon}{2},$$

где  $\sigma = \frac{F}{S}$  — механическое напряжение;  $\varepsilon = \frac{\Delta x_{\text{сж}}}{x_{\text{выдв}}}$  — относительное удлинение.

Отметим, что сжатие  $\Delta x_{\text{сж}}$  является функцией координаты  $x$  и времени  $t$ .

Запишем функцию Лагранжа [19] данной системы:

$$L = T_{\text{прод}} - \Pi_{\text{прод}} = \int_0^{x_{\text{выдв}}} \frac{1}{2} \left[ \rho S (\Delta \dot{x}_{\text{сж}})^2 - ES \left( \frac{\partial \Delta x_{\text{сж}}}{\partial x} \right)^2 - \sigma \frac{\partial \Delta x_{\text{сж}}}{\partial x} \right] dx.$$

Рассмотрим диссипативные силы аналогично вращательному движению. Спица имеет слабое демпфирование, и собственная частота колебаний с затуханием близка к собственной частоте без затухания. Тогда продольную диссипацию внутренних сил можно учесть следующим образом [23] (диссипация внешних сил равна нулю, так как выдвигение звеньев спицы происходит в безвоздушном пространстве):

$$D_{\text{прод}} = \frac{1}{2} \gamma ES \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Delta x_{\text{сж}}}{\partial l} \right) \right)^2. \quad (14)$$

Запишем уравнение (13) с учетом проделанных вычислений:

$$\rho S \Delta \ddot{x}_{\text{сж}} + ES \frac{\partial^2 \Delta x_{\text{сж}}}{\partial x^2} + \gamma ES \frac{\partial^2 \Delta x_{\text{сж}}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

Из уравнения (15) и учитывая, что  $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = F$ , получим следующую систему обыкновенных

дифференциальных уравнений первого порядка относительно времени для определения продольной деформации спицы  $\Delta x_{сж}$  при ее выдвигении на длину  $x$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V; \\ \dot{V} &= \frac{F_{п} - F_{тр} - F_{упор} - F_{ф}}{m_{выдв}}; \\ \Delta \dot{x}_{сж} &= V_{сж}; \\ \dot{V}_{сж} &= -\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \Delta x_{сж}}{\partial x^2} - \gamma \frac{E}{\rho} \frac{\partial V_{сж}}{\partial x} - \frac{F}{\rho S}. \end{aligned} \quad (16)$$

### Результаты численных исследований

Система дифференциальных уравнений, описывающая поведение системы при вращательном раскрытии спицы, имеет вид (9).

Начальное и конечное значения угла поворота  $\varphi$  определяются заданием угла поворота спицы. Ввиду того что спица разворачивается из начального транспортировочного положения, примем начальное значение угла поворота  $\varphi_0 = 0$ . Спица фиксируется при достижении заданного угла поворота  $\varphi_k = \pi/2$ . Поскольку спица в начальном положении находится в состоянии покоя, то соответственно угловая скорость  $\omega_0 = 0$ , прогиб  $h_0 = 0$ , скорость изгиба

$$V_{изг0} = 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^4 h}{\partial l^4} \right) = 0.$$

За исполнительный двигатель был взят A2212 Brushless Inrunner (1000 kv) [27] со следующими характеристиками:  $m_3 = 1$  (число фаз ротора),  $p = 1$  (число пар полюсов магнитного поля),  $E_0 = 5$  В (действующее значение ЭДС на обмотке статора),  $X_c = 22 \cdot 10^{-3}$  Ом (синхронное сопротивление),  $\vartheta$  (угол рассогласования) примем равным  $\pi/10$  при любой нагрузке,  $U_1$  (напряжение питания) выберем в качестве управления и будем изменять его значения для достижения конечного угла раскрытия.

Момент трения (3) рассчитывается динамически в процессе моделирования системы.

Для задания моментов упора  $M_{упор}$  (4) и фиксатора  $M_{ф}$  (5) необходимо определить коэффициенты  $k_{у,упор}$  и  $c_{д,упор}$ . Исходя из экспериментальных данных примем  $k_{у,упор} = k_{у,ф} = 100$ ,  $c_{д,упор} = 30$ ,  $c_{д,ф} = 25$ .

Для вычисления момента инерции  $I$  спицы необходимо знать ее массогабаритные параметры. Были выбраны следующие параметры спицы при моделировании: материал

АБС пластик QNF-0140: плотность материала  $\rho = 1600$  кг·м<sup>3</sup>, модуль упругости (Юнга)  $E = 1,2 \cdot 10^{11}$  Па, длина спицы  $a = 9,75$  м, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , масса спицы (всех вложенных звеньев)  $m = 32$  кг. Рассматривается круглое сечение спицы. Таким образом, момент инерции  $I$  будет равняться  $I \approx 1150,8$  кг·м<sup>2</sup>.

Вычислим изгибной момент инерции  $I_{изг}$ . Для этого примем, что спица является тонкостенным кольцом в плоскости изгиба. При этом будем вычислять суммарный момент инерции всех звеньев, так как было принято допущение, что в сложенном состоянии звенья жестко закреплены, и никаких дополнительных перемещений звеньев относительно друг друга не происходит. В результате получаем  $I_{изг} \approx 7,35 \cdot 10^{-4}$ .

Значение коэффициента затухания  $\gamma$  выберем исходя из таблиц, приведенных в работах [28, 29]:  $\gamma = 0,04$ .

При моделировании будем считать первую форму колебаний на самом конце спицы, так как первая форма вносит самый большой вклад в амплитуду колебаний, а на конце спицы они максимальны. Поэтому предварительно вычислим первую собственную частоту колебаний для случая закрепленного левого и свободного правого концов [30]  $\omega_{с,изг1} = (1,875)^2 / l^2 \sqrt{(EI_{изг}) / (\rho S)} = 14,465$  Гц.

С учетом функций Крылова [30] определим значения  $\partial^4 h / \partial l^4$  исходя из граничных условий при  $l = 0$  и  $l = a$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 h}{\partial l^4} &= \frac{\rho S \omega_{с,изг1}^2}{EI_{изг}} \sin(\omega_{с,изг1} l) = \\ &= 0,00014 \sin(\omega_{с,изг1} l). \end{aligned}$$

Моделирование системы дифференциальных уравнений (9) с оговоренными выше параметрами осуществлялось методом Эйлера с шагом интегрирования, равным 0,001. Наибольший интерес вызывает случай, когда спица достигает конечного положения и задействует упор и фиксатор (рис. 6). В таком случае становятся задействованными все члены, входящие в систему.

На рис. 6, а представлена динамика  $\varphi(t)$  и  $\omega(t)$  при повороте сложенной спицы при подаче напряжения  $U_1 = 12$  В длительностью 26 с, начиная с пятой секунды. Поскольку раскрытие происходит в космическом пространстве, то единственным моментом, тормозящим

систему, является момент трения  $M_{тр}$ . Этим объясняется длительное торможение спицы, начиная с 31-й секунды до 310-й секунды, пока спица не ударяется об упор и не зажимается фиксатором. Вследствие этого, начиная с 310-й с, наблюдаются затухающие колебания  $\varphi(t)$ ,  $\omega(t)$  (рис. 6, а) и изгиба  $h(t)$  (рис. 6, б). Максимальный изгиб спицы  $h = 0,13$  мм. Затухания объясняются учетом диссипативных сил  $D_{изг}$  (7).

Промоделируем систему с другими параметрами. Примем, что необходимо повернуть полностью раскрытую спицу, т. е. не только первое звено со вложенными частями. При поставленной задаче изменится длина, момент инер-

ции, собственная частота спицы:  $a = 29,01$  м,  $I \approx 8978$  кг·м<sup>2</sup>,  $\omega_{с.изг1} = 1,432$  Гц. На двигатель также подается напряжение питания  $U_1 = 12$  В длительностью 26 с, начиная с пятой секунды. В этом случае ввиду значительного возрастания момента инерции спицы  $I$  не удастся поставить спицу на упор и зафиксировать ее, так как  $\varphi(t_k) = 0,23$  рад вместо требуемого значения  $\varphi(t_k) = \pi/2$  рад, где  $t_k$  — конечное время моделирования (рис. 7, а). Максимально значение изгиба спицы достигает значения  $h = 88$  мм (рис. 7, б), при этом наблюдаются затухающие колебания изгиба. Время затухания колебаний при снятии напряжения питания с двигателя составляет порядка 120 с.

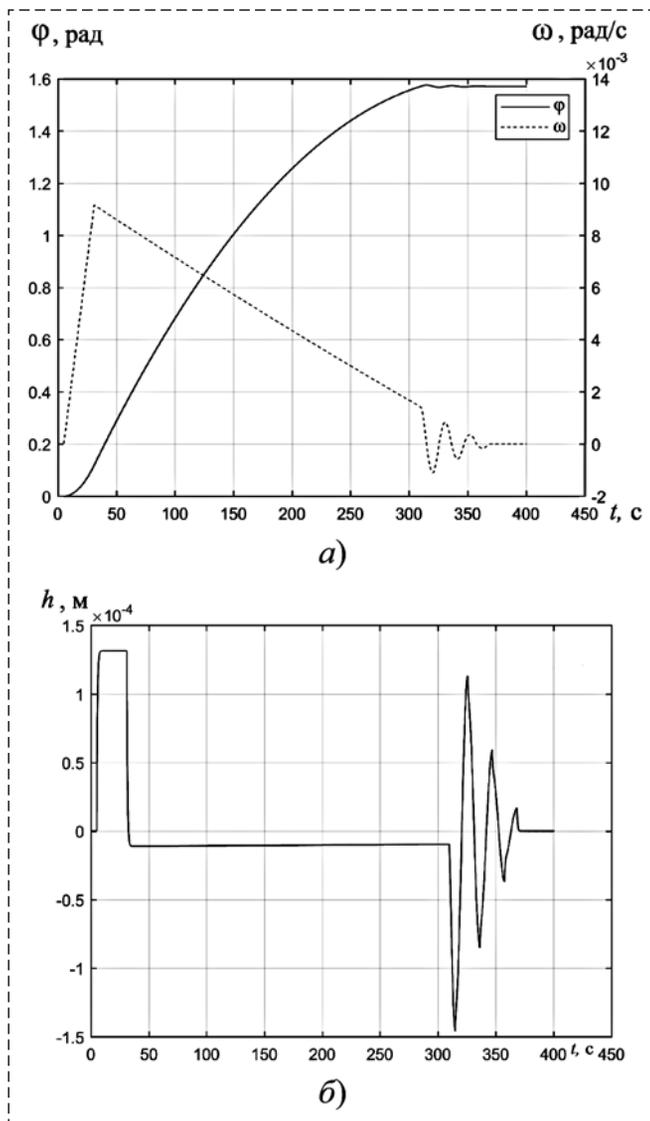


Рис. 6. Динамика угла, угловой скорости (а) и прогиба (б) спицы  
Fig. 6. Dynamics of angle, angular velocity (a) and deflection (b) the spoke

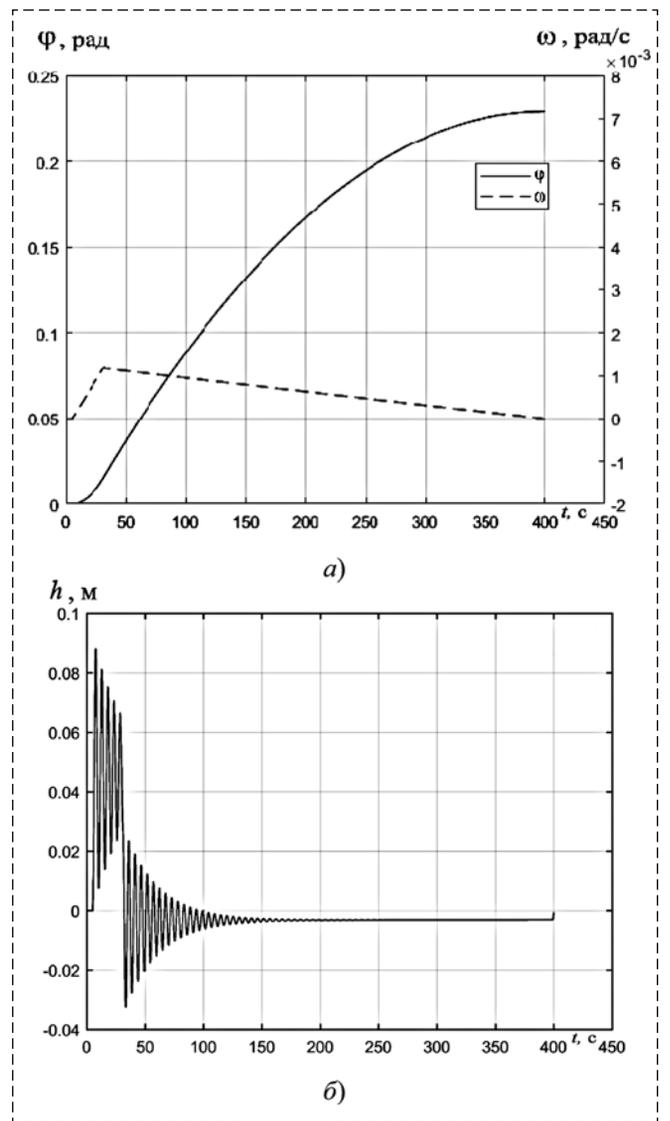


Рис. 7. Динамика угла, угловой скорости (а) и прогиба (б) спицы  
Fig. 7. Dynamics of angle, angular velocity (a) and deflection (b) the spoke

Данные результаты позволяют сделать выводы о корректности предполагаемой математической модели раскрытия спиц КТР космического базирования.

На практике важным является задача уменьшения колебательных процессов в системе. Снижению колебаний способствует процесс раскрытия, оптимально управляемый таким образом, чтобы к моменту выхода спицы на упоры ее перемещение стремилось к нулю. Этого можно добиться, например, используя релейную структуру управляющего воздействия с оптимальной коррекцией момента переключения [7, 9, 33].

Система дифференциальных уравнений, описывающая поведение системы при вращательном раскрытии спицы, имеет вид (16).

Согласно (10) уравнение для  $F_{\pi}$  будет состоять из уравнения типа (2), умноженного на коэффициент  $k_f$ , который отвечает за преобразование вращающего момента в толкающую силу. Коэффициент  $k_f$  примем для рассматриваемого случая равным 1.

Силу трения  $F_{тр}$  примем равной константе.

Для задания сил упора  $F_{упор}$  (11) и фиксатора  $F_{ф}$  (12) необходимо определить коэффициенты  $k_{у,упор}$  и  $c_{д,упор}$ . Исходя из экспериментальных данных примем  $k_{у,упор} = k_{у,ф} = 100$ ,  $c_{д,упор} = 50$ ,  $c_{д,ф} = 15$ .

Параметры спицы были определены в предыдущем разделе. Примем, что необходимо выдвинуть второе звено, совместно с вложенными в него третьим и четвертым звеньями, из первого звена.

При моделировании будем считать первую форму колебаний на самом конце спицы, так как первая форма вносит самый большой вклад в амплитуду колебаний, а на конце спицы они максимальны. Поэтому предварительно вычислим первую собственную частоту колебаний для случая закрепленного левого и свободного правого концов [30]  $\omega_{с,прод1} = \pi/(2x)\sqrt{E/\rho} = 4157$  Гц.

Значение коэффициента затухания  $\gamma$  выберем исходя из таблиц, приведенных в работах [28, 29]:  $\gamma = 0,04$ .

С учетом функций Крылова [30] определим значения  $\partial^2 \Delta x_{сж} / \partial x^2$  исходя из граничных условий при  $x = 0$  и  $x = x_{выдв}$ :

$$\frac{\partial^2 \Delta x_{сж}}{\partial x^2} = 5,543 \cdot 10^{-5} \sin(\omega_{с,прод1} t).$$

Моделирование системы дифференциальных уравнений (16) с оговоренными выше па-

раметрами осуществлялось методом Эйлера с шагом интегрирования, равным 0,001. Наибольший интерес вызывает случай, когда спица достигает конечного положения и задействует упор и фиксатор (рис. 8). В таком случае становятся задействованными все члены, входящие в систему.

На рис. 8, а представлена динамика  $x(t)$  и  $V(t)$  при подаче напряжения  $U_1 = 12$  В длительно-стью 30 с, начиная с пятой секунды. Поскольку раскрытие происходит в космическом пространстве, то единственной силой, тормозящей систему, является сила трения  $F_{тр}$ . Ввиду того что помимо сил трения в двигателе при выдвигании спицы присутствует сила трения, зависящая от принципа вложения спиц, телеско-

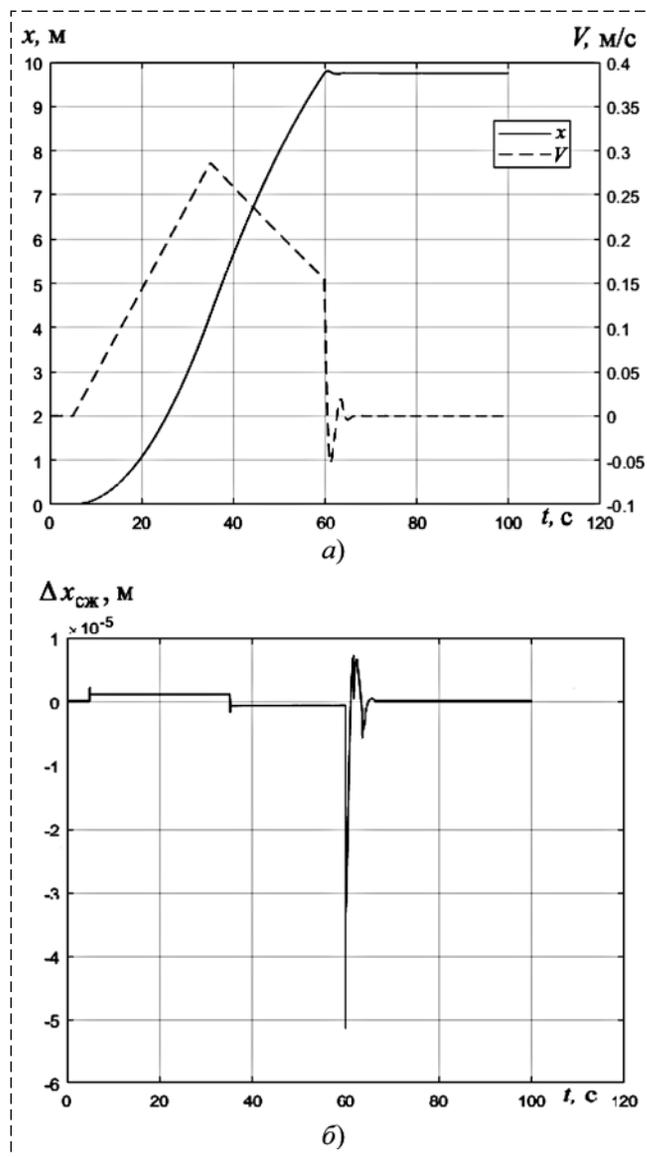


Рис. 8. Динамика длины, скорости (а) и сжатия (б) спицы  
Fig. 8. Dynamics of length, speed (a) and compression (b) the spoke

пическое раскрытие происходит быстрее, чем вращательное развертывание. Спица достигает упора и фиксируется на 60-й секунде. Вследствие этого, начиная с 60-й секунды наблюдаются затухающие колебания  $x(t)$ ,  $V(t)$  (рис. 8, а) и сжатия  $\Delta x_{сж}(t)$  (рис. 8, б). Максимальное сжатие спицы составило  $\Delta x_{сж} = 5,14 \cdot 10^{-5}$  м, или  $\Delta x_{сж} = 0,0514$  мм. Затухания объясняются учетом диссипативных сил  $D_{прод}$  (14).

При рассмотрении  $\Delta x_{сж}$  на интервале  $t \in [5; 5,5]$  (рис. 9) видно, что при начале движения спицы возникают высокочастотные затухающие колебания. Аналогичная картина наблюдается и в момент, когда выключается двигатель.

Уменьшения сжатия можно добиться путем изменения характеристик упора и фиксатора для данного вида этих устройств. Более подробно данная проблема разобрана в работах [16, 17, 31, 32].

Промоделируем систему с другими параметрами. Поскольку собственная частота колебаний спицы  $\omega_{с прод k}$  и  $\frac{\partial^2 \Delta x_{сж}}{\partial x^2}$  зависят больше от материала спицы, то интерес представляет моделирование выдвигания спицы из другого материала. Результаты же динамики раскрытия 3-го и 4-го звеньев оказываются аналогичными представленным на рис. 8 и 9.

Для примера и верификации полученной математической модели рассмотрим резиновую спицу с габаритными параметрами, аналогичными спице из АБС пластик QNF-0140, и плотностью материала  $\rho = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^3$ , модулем упругости (Юнга)  $E = 0,9 \cdot 10^9$  Па, массой спицы (выдвигаемых звеньев)  $m_{выдв} = 15$  кг.

При поставленной задаче собственная частота спицы  $\omega_{с.прод1} = 104,97$  Гц. На двигатель также подается напряжение питания  $U_1 = 12$  В длительностью 30 с начиная с пятой секунды.

При изменении параметров раскрываемой конструкции характер динамики раскрытия значительно изменяется (рис. 10). Во-первых, ввиду уменьшения массы  $m_{выдв}$  спица достигает упора и фиксируется быстрее (рис. 10, а) — за 36 с. Максимально значение сжатия спицы достигает значения  $\Delta x_{сж} = 25$  мм, при этом наблюдаются затухающие колебания. Время затухания колебаний при снятии напряжения питания с двигателя составляет порядка 50 с.

Данные результаты позволяют сделать выводы о корректности предполагаемой математической модели раскрытия спиц КТР космического базирования.

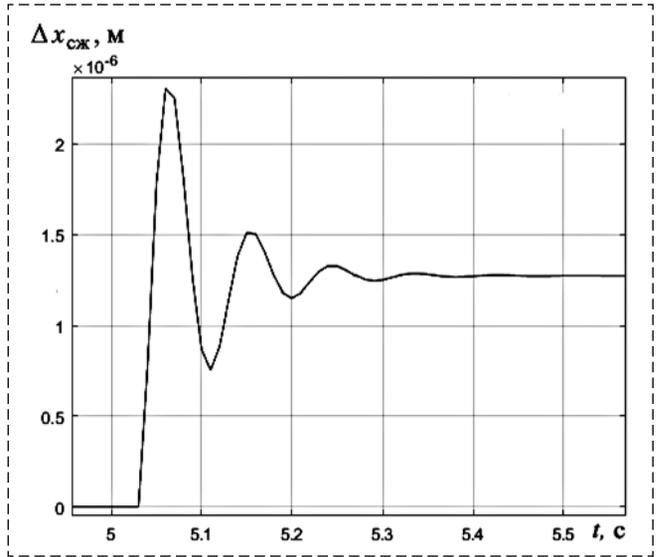


Рис. 9. Сжатие спицы  
Fig. 9. Spoke compression

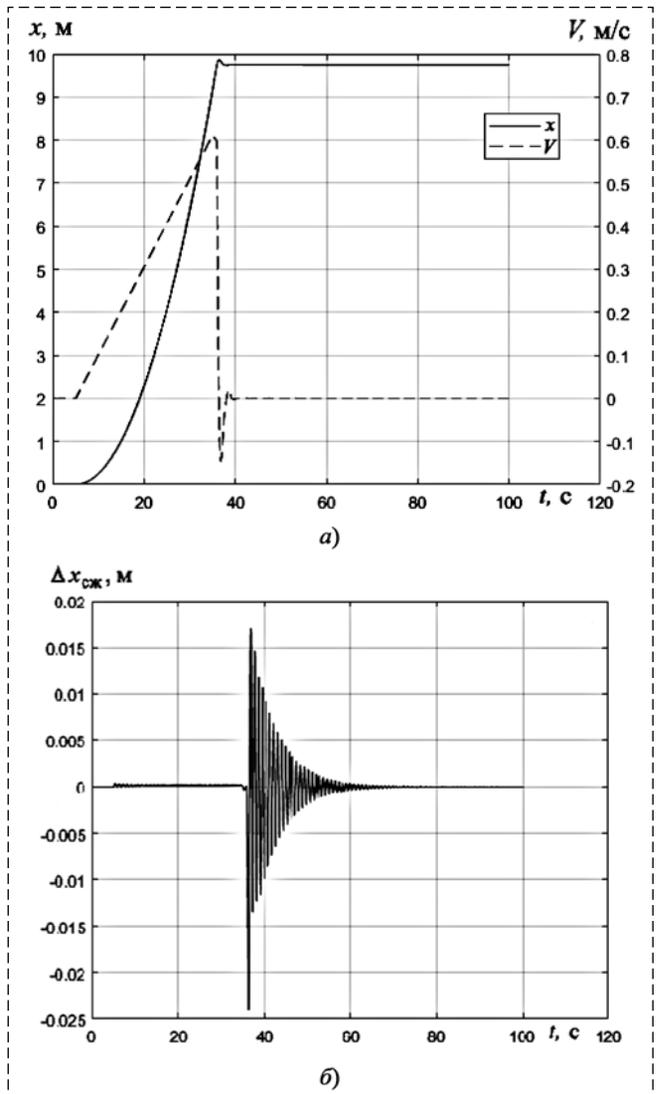


Рис. 10. Динамика длины, скорости (а) и сжатия (б) спицы  
Fig. 10. Dynamics of length, speed (a) and compression (b) the spoke

Оптимизация управления  $U_1(t)$  позволяет сократить время разведения спиц и уменьшает зависимость переходных процессов от влияния упоров и фиксаторов [7, 9, 33].

Совместное раскрытие спиц и выдвижение звеньев сокращает время вывода конструкции в конечное положение [31, 32].

### Заключение

В результате разработки математической модели раскрытия подвижных частей трансформируемых космических конструкций были получены модели вращательного и поступательного движения.

Системы дифференциальных уравнений, описывающие раскрытие КТР, возможно применять для конструкций с различными параметрами, от изменения материала, массы, габаритных размеров до выбора управляющего органа. Таким образом, она является универсальной и может применяться при решении широкого круга задач.

Данные модели позволяют рассматривать сколь угодно много собственных частот колебаний спицы, а также находить изгиб  $h$  и сжатие  $\Delta x_{сж}(t)$  в любой точке спицы за счет разделения этих переменных в зависимости от длины и времени.

Моделирование показало, что совместное раскрытие спиц и выдвижение звеньев сокращает время вывода конструкции в конечное положение [31, 32].

При использовании спиц с не круглым сечением необходимо рассматривать колебания в трех плоскостях и дополнительно учитывать крутильные колебания.

Исходя из полученных результатов для конкретной рассмотренной задачи важной остается проблема минимизации изгибов и сжатий конструкции. Предполагается для решения данной задачи использовать алгоритмы оптимального управления. Как было показано в работах [31, 33], применение алгоритма с коррекцией параметров структуры управления [5–9] позволяет минимизировать необходимые параметры и решать эту проблему в режиме реального времени.

При решении задачи синтеза управления отдельно встает задача обработки результатов измерений.

1. Пономарев С. В. Трансформируемые рефлекторы антенн космических аппаратов // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2011. № 4. С. 110–119.
2. Лопатин А. В., Рутковская М. А. Обзор конструкции современных трансформируемых космических антенн (часть 1) // Вестник СибГАУ. 2007. № 2.
3. Гриневич Д. В. Исследование динамики раскрывающихся протяженных конструкций // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. 2013. Т.134. С. 37–42.
4. Кабдулин Г. В., Комков В. А., Мельников В. М., Харлов Б. Н. Динамика управляемого раскрытия центробежными силами космических конструкций с компенсацией кинетического момента // Космонавтика и ракетостроение. 2009. С. 189–198.
5. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
6. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
7. Малышев В. В., Кабанов Д. С. Алгоритм коррекции структуры управления автоматическим подводным аппаратом для построения области достижимости // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55, № 7. С. 21–27.
8. Кабанов С. А. Управление системами на прогнозирующих моделях. СПб.: СПбГУ, 1997. 200 с.
9. Кабанов С. А., Кабанов Д. С. Задачи управления с оптимизацией параметров прогнозирующих моделей. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т. 2017. 110 с.
10. Зубов В. Г. Механика. М.: Наука, 1978. 352 с.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10 т. Т. V. Статистическая физика: Учеб. пособие. 4-е изд., испр. и доп. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 575 с.
12. Шмуглер Э. Основные принципы классической механики и классической теории поля. М.: Мир, 1976. 155 с.
13. Вольдек А. И. Электрические машины: Учебник для студентов высш. техн. заведений. 3-е изд., перераб. Л.: Энергия, 1978. 832 с.
14. Kundur P. Power system stability and control. Mc. Graw-Holl, Inc, 1994. 1176 p.
15. Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 337 с.
16. Зимин В. Н. Механика трансформируемых структурных космических конструкций // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. Механика. 2007. № 4(54). С. 105–114.
17. Крылов А. В., Чурилин С. А. Моделирование раскрытия солнечных батарей различных конфигураций // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана, Сер. Машиностроение. 2011. № 1. С. 106–112.
18. Заславский Б. В. Краткий курс сопротивления материалов: Учебник для авиационных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 1986. 328 с.
19. Богущ А. А., Мороз Л. Г. Введение в теорию классических полей. М.: Едиториал УРСС, 2004. 384 с. 2-е изд.
20. Стретт Дж. В. Теория звука. Том 1. (The Theory of Sound, 1926) Перевод с третьего английского издания П. Н. Успенского и С. А. Каменецкого / Под общей редакцией С. М. Рытова и К. Ф. Теодорчика. (Москва — Ленинград: Гостехиздат, 1940).
21. Биргер И. А., Мавлюгов Р. Р. Сопротивление материалов: Учеб. пособ. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 560 с.
22. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем: Пер. с нем. М.: Мир, 1982. 304 с.
23. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1981. Т. 6. Защита от вибрации и ударов / Под ред. К. В. Фролова. 1981, 456 с.
24. Патент РФ № 2005131232/11, 11.10.2005. Терешин В. Н. Устройство для выдвижения полезной нагрузки из косми-

ческого аппарата // Патент России № 2302981. 2007. Бюл. № 20.

25. Патент РФ № 2007122219/11, 13.06.2007. Тестовод Н. А., Халиманович В. И., Шипилов Г. В., Романенко А. В., Шальков В. В., Величко А. И., Акчурин В. П. Развертываемый крупногабаритный рефлектор космического аппарата // Патент России № 2350519. 2009.

26. Патент РФ № 2009109598/11, 18.02.2009. Толмачев С. М., Туголуков А. В., Соин В. И. Устройство выдвижения и отделения полезной нагрузки // Патент России № 2387586. 2010.

27. Hot Deals (503)708-2214 [Электронный ресурс]: 400 Size Brushless Outrunner Motor A2212/13T Technical Data. URL: <http://www.rchotdeals.com/400-size-brushless-outrunner-motor-a2212-13t-technical-data/> (дата обращения 16.02.2019).

28. Постнов В. А., Калинин В. С., Ростовцев Д. М. Вибрация корабля. Л.: Судостроение, 1983. 248 с.

29. Тарануха Н. А., Журбин О. В., Журбина И. Н. Математическое и экспериментальное моделирование колебаний стержневых судовых конструкций с учетом сопротивления

внешней среды различной плотности // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2010. № IV—1(4). С. 81—91.

30. Крылов А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании. М.: Академия наук СССР, 1931. 80 с.

31. Кабанов С. А., Кривушов А. И., Митин Ф. В. Моделирование совместного раскрытия элементов крупногабаритного трансформируемого рефлектора космического базирования // Труды СПИИРАН. 2017. Вып. 5(54). С. 130—151.

32. Mitin F., Krivushov A. (2017). Control deployment of mobile units of large-sized spacecraft, Proceedings of the 28th DAAAM International Symposium, pp. 0773-0779, B. Katalinic (Ed.), Published by DAAAM International, ISBN 978-3-902734-11-2, ISSN 1726-9679, Vienna, Austria DOI: 10.2507/28th.daaam.proceedings109.

33. Кабанов С. А., Емельянов В. Ю., Митин Ф. В. Оптимизация динамики системы создания формы крупногабаритных трансформируемых антенн космического базирования // Вопросы радиоэлектроники. 2016. Серия ОТ. Вып. 8. С. 54—58.

## Development and Research of Mathematical Models of Deployment of Mobile Parts of Transformable Space Construction. Part I

S. A. Kabanov, kaba-sa@mail.ru, B. A. Zimin, bazimin@mail.ru, F. V. Mitin, fedor28@list.ru, BSTU "VOENMEH" named after D. F. Ustinov, 190005, Saint-Petersburg, Russian Federation

Corresponding author: Mitin Fedor V., Ph. D. Student, Baltic State Technical University "VOENMEH" named after D. F. Ustinov, 190005, Saint-Petersburg, Russian Federation, e-mail: fedor28@list.ru

Accepted on June 01, 2019

### Abstract

The process of deployment elements of constructions and adjustment of the radio-reflecting network of large-sized transformable space-based reflector with the use of a cable-stayed form maintenance system is considered. The deployment process can be broken down into separate phases. At each stage, the movement is due to the impact on the design of the actuator — the element of the control system. Energy for the deployment of the reflector elements is produced by drives, in particular an electric machine. The use of this type of actuator allows you to control the process of disclosure. Due to the fact that currently achieved a huge process in computer technology that allows you to perform three-dimensional computing operations in a short time, it is particularly important to use optimal control algorithms. When deployment the reflector for two types of motion — rotational and translational — mathematical models based on Lagrange equations of the II-kind are obtained. These mathematical models take into account such parameters as dissipation, the presence of longitudinal and transverse deformation. The models provide for the presence of a stop and a lock, as an Executive element in the deployment selected brushless DC motor. All the observations made allow us to formulate a smooth statement disclose items on the stop with minimum oscillation of the structure. The developed models allow to analyze the  $n$ -th number of natural oscillation frequencies. Modeling with different parameters of the model is carried out. The parameters of the transition process of the spoke at the opening of the first link with the other links embedded in it and at the fully covered spoke are analyzed. It is shown that depending on the mass-dimensional parameters there is a significant change in the dynamics. For the spoke extension stage, the weight and size characteristics have little effect on the opening dynamics. The smaller the Young's modulus and density of the material, the greater the damped longitudinal oscillations. The simulation of this stage with a spoke made of different materials is carried out. Various methods are proposed to reduce the opening time at all stages and minimize transverse and longitudinal oscillations. The possibility of application of the developed mathematical models for a wide range of tasks is shown.

**Keywords:** mathematical model, rotational motion, translational motion, deployment, modeling, large-sized transformable reflector

For citation:

Kabanov S. A., Zimin B. A., Mitin F. V. Development and Research of Mathematical Models of Deployment of Mobile Parts of Transformable Space Construction. Part I, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 1, pp. 51—64.

DOI: 10.17587/mau.21.51-64

### References

1. Ponomarev S. V. Transformable reflectors of spacecraft antennas, *Vestn. Tom. gos. un-ta. Matematika i mehanika*, 2011, no. 4(16), pp. 110—119 (in Russian).
2. Lopatin A. V., Rutkovskaja M. A. Overview of the designs of modern transformed space antennas (Part 1), *Vestnik SibGAU*, 2007, no. 2, pp. 78—81 (in Russian).

3. **Grinevich D. V.** Investigation of the dynamics of unfolding extended structures, *Voprosy jelectromehaniki. Trudy VNIIEJEM*, 2013, vol. 134, pp. 37–42 (in Russian).
4. **Kabdulin G. V., Komkov V. A., Mel'nikov V. M., Harlov B. N.** Dynamics of controlled opening by centrifugal forces of cosmic structures with compensation of the kinetic moment, *Zhurnal "Kosmonavtika i raketostroenie"*, 2009, no. 1(54), pp. 189–198 (in Russian).
5. **Krasovskii A. A.** ed. Handbook on the theory of automatic control, Moscow, Nauka, 1987, 712 p. (in Russian).
6. **Fedorenko R. P.** Approximate solution of optimal control problems, Moscow, Nauka, 1978, 488 p. (in Russian).
7. **Malyshev V. V., Kabanov D. S.** The algorithm for the correction of the control structure of the automatic underwater vehicle to build a reachable area, *Izv. Vuzov. Priborostroenie*, 2012, vol. 55, no. 7, pp. 21–27 (in Russian).
8. **Kabanov S. A.** Systems control on predictive models, S. Peterburg, Publishing house of S. Peterburgskii universitet, 1997, 200 p. (in Russian).
9. **Kabanov S. A., Kabanov D. S.** Control problems with the optimization of the parameters of predictive models, S. Peterburg, Publishing house of Balt. gos. tehn. un-t, 2017, 110 p. (in Russian).
10. **Zubov V. G.** [Mechanics, Moscow, Nauka, 1978, 352 p. (in Russian).
11. **Landau L. D., Lifshic E. M.** Theoretical physics. In 10 vol. Vol V. Statistical Physics: Proc. Allowance, Moscow, Nauka., Gl. red. fiz.-mat. lit., 1987, 575 p. (in Russian).
12. **Shmutcer Je.** Basic principles of classical mechanics and classical field theory, Moscow, Mir, 1976, 155 p. (in Russian).
13. **Voldek A. I.** Electric machines. Textbook for high school students. tech. institutions, Leningrad, Jenergiija, 1978, 832 p. (in Russian).
14. **Kundur P.** *Power system stability and control*, Mc. Graw-Holl, Inc, 1994, 1176 p.
15. **Markeev A. P.** Dynamics of the body in contact with a solid surface, Moscow, Nauka, 1992, 337 p. (in Russian).
16. **Zimin V. N.** Mechanics of transformable structural space structures, *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvennonauchnaja serija. Mehanika*, 2007, № 4(54), pp. 105–114 (in Russian).
17. **Krylov A. V., Churilin S. A.** Modeling the deployment of solar cells of various configurations, *Vestnik MGTU im. N. Je. Bauman, Ser. Mashinostroenie*, 2011, no. 1, pp. 106–112 (in Russian).
18. **Zaslavskij B. V.** Short course of resistance of materials. Textbook for aviation specialties universities, Moscow, Mashinostroenie, 1986, 328 p. (in Russian).
19. **Bogush A. A., Moroz L. G.** Introduction to the theory of classical fields, Moscow, Editorial URSS, 2004, 384 p. (in Russian).
20. **Strett Dzh. V.** The Theory of Sound, Moscow — Leningrad, Gostehizdat, 1940 (in Russian).
21. **Birger I. A., Mavljutov R. R.** Resistance Materials: Tutorial, Moscow, Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1986, 560 p. (in Russian).
22. **Magnus K.** Introduction to the study of oscillatory systems. Translated from German, Moscow, Mir, 1982, 304 p. (in Russian).
23. **Vibrations** in the technique: a Handbook, Moscow, Mashinostroenie, 1981. Vol. 6. Zashhita ot vibracii i udarov, K. V. Frolov ed. 1981, 456 p. (in Russian).
24. **Patent RF № 2005131232/11**, 11.10.2005. Tereshin V. N. Device for extending the payload from the spacecraft, Patent Rossii № 2302981. 2007. Bjul. № 20 (in Russian).
25. **Patent RF № 2007122219/11**, 13.06.2007. Testoedov N. A., Halimanovich V. I., Shipilov G. V., Romanenko A. V., Shal'kov V. V., Velichko A. I., Akchurin V. P. Deployable large spacecraft reflector, Patent Rossii № 2350519. 2009 (in Russian).
26. **Patent RF № 2009109598/11**, 18.02.2009. Tolmachev S. M., Tugolukov A. V., Soin V. I. Device extension and separation of the payload, Patent Rossii № 2387586. 2010 (in Russian).
27. **Hot Deals (503)708-2214** [Electronic resource]: 400 Size Brushless Outrunner Motor A2212/13T Technical Data, available at: <http://www.rchotdeals.com/400-size-brushless-outrunner-motor-a2212-13t-technical-data/> (date of the application 16.02.2019).
28. **Postnov V. A., Kalinin V. S., Rostovcev D. M.** Ship vibration, Leningrad, Sudostroenie, 1983, 248 p. (in Russian).
29. **Taranuha N. A., Zhurbin O. V., Zhurbina I. N.** Mathematical and experimental modeling of oscillations of rod ship structures taking into account the resistance of the external environment of different density, *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta*, 2010, no. IV–1(4), pp. 81–91 (in Russian).
30. **Krylov A. N.** On the calculation of beams lying on an elastic foundation, Moscow, Akademija nauk SSSR, 1931, 80 p. (in Russian).
31. **Kabanov S. A., Krivushov A. I., Mitin F. V.** Modeling of joint deployment of units of the large-sized transformable reflector of space basing, *SPIIRAS Proceedings*, 2017, vol 5(54), pp. 130–151 (in Russian).
32. **Mitin F., Krivushov A.** (2017). Control deployment of mobile units of large-sized spacecraft, *Proceedings of the 28th DAAAM International Symposium*, pp. 0773-0779, B. Katalinic (Ed.), Published by DAAAM International, ISBN 978-3-902734-11-2, Vienna, Austria, DOI: 10.2507/28th.daaam.proceedings109.
33. **Kabanov S. A., Emel'janov V. Ju., Mitin F. V.** Optimization of the dynamics of the system for creating the shape of large-size transformed space-based antennas, *Voprosy Radiojelektroniki*, 2016, no. 8, Ser. OT, iss. 6, pp. 54–58 (in Russian).

---



---

## Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5510, (499) 269-5397**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *Е. В. Комиссарова*.

Сдано в набор 30.10.2019. Подписано в печать 06.12.2019. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН120. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций  
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".  
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: [www.aov.ru](http://www.aov.ru)