

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 20

2019

№ 10

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

Заместители главного редактора:

БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.

ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.

ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционный совет:

АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН

БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН

ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН

ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН

КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН

КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН

КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН

МИКРИН Е. А., акад. РАН

ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН

РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН

СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН

СИГОВ А. С., акад. РАН

СОЙФЕР В. А., акад. РАН

СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН

ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН

ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН

ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН

ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН

ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

Редколлегия:

DANIELE Z., PhD, Италия

DORANTES D. J., PhD, Турция

GROUMPOS P. P., PhD, Греция

ISIDORI A., PhD, Италия

KATALINIC B., PhD, Австрия

LIN CH.-Y., PhD, Тайвань

MASON O. J., PhD, Ирландия

ORTEGA R. S., PhD, Франция

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США

STRZELECKI R. M., PhD, Польша

SUBUDHI B. D., PhD, Индия

АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан

ГАРАШЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина

ТРОФИМЕНКО Е. Е., д.т.н., Беларусь

БОБЦОВ А. А., д.т.н.

БУКОВ В. Н., д.т.н.

ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.

ЖУКОВ И. А., д.т.н.

ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.

КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.

ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.

ЛОХИН В. М., д.т.н.

ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д.ф.-м.н.

ПУТОВ В. В., д.т.н.

ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.

РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.

СЕРГЕЕВ С. Ф., д.пс.н.

ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.

ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.

ФУРСОВ В. А., д.т.н.

ЮРЕВИЧ Е. И., д.т.н.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Директор издательства:

АНТОНОВ Б. И.

СОДЕРЖАНИЕ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Твердохлебов В. А. Модели функциональных зависимостей элементов в последовательностях для решения задач контроля и управления 579

Онегин Е. Е. Оптимальная стабилизация квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами 589

РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Гулай А. В., Зайцев В. М. Интеллектуальная мехатронная система как адаптивная модель "управляемой конструкции" 600

Антипов А. С., Краснова С. А. Система стабилизации положения тележки крана с использованием сигмоидальной функции 609

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Кочковская С. С. Разработка алгоритма моделирования характеристик сталей в подсистеме управления производственными ресурсами сталеплавильного производства 615

ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G., Molodenkova T. V. The New Analytical Algorithm for Determining the Strapdown INS Orientation 624

Шавин М. Ю., Притыкин Д. А. Синтез системы управления квадрокоптером с поворотными роторами и наблюдение за подвижной целью 629

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:

<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL

Vol. 20

2019

No. 10

MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Editor-in-Chief

FILIMONOV N. B.

Deputy Editors-in-Chief:

BOLSHAKOV A. A.

PODURAEV Yu. V.

YUSCHENKO A. S.

Responsible Secretary:

BEZMENOVA M. Yu.

Editorial Board:

ANSHAKOV G. P.

BOLOTNIK N. N.

CHENTSOV A. G.

CHERNOUSKO F. L.

FEDOROV I. B.

KALYAEV I. A.

KURZHANSKI A. B.

KUZNETSOV N. A.

MIKRIN E. A.

PESHEKHONOV V. G.

REZCHIKOV A. F.

SCHERBATYUK A. F.

SEBRYAKOV G. G.

SIGOV A. S.

SOJFER V. A.

SOLOMENTSEV Yu. M.

VASSILYEV S. N.

YUSUPOV R. M.

ZHELTOV S. Yu.

Editorial Council:

ALIEV T. A., Azerbaijan

DANIELE Z., PhD, Italy

DORANTES D. J., PhD, Turkey

GARASCHENKO F. G., Ukraine

GROUMPOS P. P., PhD, Greece

ISIDORI A., PhD, Italy

KATALINIC B., PhD, Austria

LIN CH.-Y., PhD, Taiwan

MASON O. J., PhD, Ireland

ORTEGA R. S., PhD, France

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA

STRZELECKI R. M., PhD, Poland

SUBUDHI B. D., PhD, India

TROFIMENKO Ye. Ye., Belarus

BOBTSOV A. A.

BUKOV V. N.

ERMOLOV I. L.

FILARETOV V. F.

FRADKOV V. L.

FURSOV V. A.

ILYASOV B. G.

KOROSTELEV V. F.

LEBEDEV G. N.

LOKHIN V. M.

PAVLOVSKY V. E.

PUTOV V. V.

PSHIKHOPOV V. Kh.

RAPOPORT E. Ya.

SERGEEV S. F.

YUREVICH E. I.

ZHUKOV I. A.

Editorial Staff:

BEZMENOVA M. Yu.

Director of the Publishing House:

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and perspectives development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

Tverdokhlebov V. A. Models of Functional Dependencies of Elements in Sequences for Solving Problems of Control and Management 579

Oegin E. E. Optimal Stabilization Problem for the Quasilinear System with Controllable Parameters 589

ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

Gulay A. V., Zaitsev V. M. Intelligent Mechatronic System as an Adaptive Model Having "Controlled Construction" 600

Antipov A. S., Krasnova S. A. Stabilization System of Convey-Crane Position Via Sigmoidal Function 609

AUTOMATION AND CONTROL TECHNOLOGICAL PROCESSES

Kochkovskaya S. S. Development of Modeling Algorithm of the Characteristics of the Steels in the Subsystem of Management of the Production Resources of Steel Production 615

DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G., Molodenkova T. V. The New Analytical Algorithm for Determining the Strapdown INS Orientation 624

Shavin M., Pritykin D. Tilt-Rotor Quadrotor Control System Design and Mobile Object Tracking 629

Information about the journal is available online at:
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: mech@novtex.ru

В. А. Твердохлебов, д-р техн. наук, проф., TverdokhlebovVA@list.ru,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

Модели функциональных зависимостей элементов в последовательностях для решения задач контроля и управления

Разработан вариант основных положений, моделей и методов для постановок и решения задач контроля и диагностики процессов в системах, задач построения моделей процессов, в которых причинно-следственные связи событий преобразованы в функциональные зависимости между элементами в последовательностях, задач формализации правил управления процессами и т. п. Для этого расширено классическое рекуррентное определение последовательностей, в котором представлены функциональные зависимости элементов от непосредственно предшествующих им m элементов до вводимого Z -рекуррентного определения, в котором определяется функциональная зависимость между наборами элементов в последовательности. Порядки Z -рекуррентных форм имеют вид наборов чисел и удобны для точной и полной характеристики связей событий в процессах. Задачи контроля, диагностирования, построения новых моделей процессов, оценки сложности процессов и правил управления процессами могут ставиться и решаться с использованием числовых показателей Z -рекуррентных определений. Построены классификация Z -рекуррентных определений последовательностей и классификация процессов, разработан алгоритм проверки выполнимости определений Z -рекуррентной формы для заданных последовательностей формы. Z -рекуррентное определение последовательностей дополнено методом Z -рекуррентного определения образов последовательностей, включающим: введение линейного порядка на базовом множестве элементов последовательности, построение для рассматриваемой последовательности образа в форме последовательности выполняющихся или не выполняющихся отношений между элементами, представленных линейным порядком, и применение Z -рекуррентного определения к построенному образу последовательности. Задачей, на которой основывается решение рассматриваемых задач, является распознавание двух последовательностей по свойствам, которые определяются показателями Z -рекуррентных определений последовательностей, имеющими вид порядков Z -рекуррентных форм. Множества порядков в выполняющихся или не выполняющихся Z -рекуррентных формах характеризуют последовательности и анализируемые множества последовательностей, что позволяет ставить и решать задачи, связанные с управлением системами: задачи контроля и диагностирования процессов в системе, задачи построения моделей процессов, задачи формализации и оценки сложности правил управления процессами.

Ключевые слова: система, процесс, свойство, модель, метод, контроль, диагностирование, последовательность, рекуррентное определение, Z -рекуррентное определение

Введение

При решении задачи управления процессами в системе используются модели в форме последовательностей, представляющих свойства процессов, рассматриваемых как последовательности событий. Одними из таких основных свойств являются причинно-следственные связи событий в процессах, и эти связи представляются функциональными зависимостями элементов в последовательностях, соответствующих моделям процессов. В статье представлено развитие разработанного и предложенного в работах [1–3] Z -рекуррентного определения последовательностей, которое основывается на новой формализации причинно-следственных связей событий, составляющих процессы.

Исследуемая последовательность может уточняться методами интерполяции и экстраполяции, которые рассматриваются в работах [4, 5].

Направление исследований и разработок, в которых эффективно используются рекуррентные отношения между событиями в процессах различной природы, представлено, например, для процессов движения в работах [7, 8], для процессов управления в работах [6, 9, 10], для классификации объектов в работе [11] и для определения свойств процессов в работах [12, 13].

Функциональная зависимость распространяется на связи элементов в последовательностях, т. е. на отображение вида $\theta: N_n \rightarrow W$, где $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ и W — произвольное множество. Для этого последовательности $\xi = \langle w_1, w_2, \dots, w_C \rangle$

сопоставляется формальная структура вида $M = (\{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \dots, j_{n_2}\})$ со следующей интерпретацией: совокупность элементов $w_{i_1+t}, w_{i_2+t}, \dots, w_{i_{n_1}+t}$ последовательности рассматривается как аргумент, а совокупность элементов $w_{j_1+t}, w_{j_2+t}, \dots, w_{j_{n_2}+t}$ — как значение функции для значений t , согласованных с величиной C . Частный случай такой функциональной зависимости элементов в последовательности известен в случае классического рекуррентного определения последовательностей: последовательность $\xi = \langle w_1, w_2, \dots, w_C \rangle$ рекуррентно определяется рекуррентной формой F^m порядка m , если уравнение $x_{t+m+1} = F^m(x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+m})$ выполняется для всех равенств вида $w_{t+m+1} = F^m(w_{t+1}, w_{t+2}, \dots, w_{t+m})$. Математический аппарат Z -рекуррентного определения последовательностей позволяет:

- формально определять структуру функциональных зависимостей элементов в последовательности на основе взаиморасположения элементов;
- осуществлять преобразования содержательно представленных причинно-следственных связей событий в строгую математическую форму уравнений, неравенств, сетей, автоматов и т. п.;
- разрабатывать на основе показателей Z -рекуррентных определений последовательностей модели и методы для постановок и решений задач контроля, диагностирования, управления, оценки сложности функционирования систем и т. п.

Множество всех выполняющихся Z -рекуррентных определений последовательностей может рассматриваться как образ последовательности в классе последовательностей. В работах [1–3] рекуррентное определение последовательности принципиально расширяется до Z -рекуррентного определения последовательности, в котором Z -рекуррентная форма F^M порядка $M = (M_1, M_2) = (\{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \dots, j_{n_2}\})$ имеет вид

$$\begin{aligned} (x_{j_1+t}, x_{j_2+t}, \dots, x_{j_{n_2}+t}) = \\ = F^M(x_{i_1+t}, x_{i_2+t}, \dots, x_{i_{n_1}+t}) \end{aligned} \quad (1)$$

и представляет функциональную зависимость наборов элементов $(w_{j_1+t}, w_{j_2+t}, \dots, w_{j_{n_2}+t})$ от наборов элементов $(w_{i_1+t}, w_{i_2+t}, \dots, w_{i_{n_1}+t})$ при значениях t , согласованных с величиной C . Z -рекуррентное определение последователь-

ности отличается от рекуррентного определения не только по математической форме, но и по большим возможностям для прикладной интерпретации. Прикладная интерпретация Z -рекуррентного определения последовательности предполагает, что рассматриваемая последовательность является математической моделью процесса, состоящего из причинно-следственно связанных событий, в котором элементы последовательности соответствуют событиям, распределенным во времени в соответствии со структурой процесса. Отношение $\xi_1 \neq \xi_2$ для последовательностей одинаковой длины $\xi_1 = \langle a_1, a_2, \dots, a_C \rangle$ и $\xi_2 = \langle b_1, b_2, \dots, b_C \rangle$ и любой их интерпретации означает, что существует такой индекс $i, i \in \{1, 2, \dots, C\}$, для которого выполняется неравенство $a_i \neq b_i$. В таком классическом отношении неравенства последовательностей не представлено множество вариантов свойств последовательностей, следствием которых является классическое отношение неравенства последовательностей. Предлагаемый математический аппарат Z -рекуррентных определений позволяет во множестве отношений неравенства последовательностей выделить подмножества таких свойств функциональных связей элементов, следствиями которых являются неравенства последовательностей.

Целью исследования является разработка показателей функциональных связей элементов в последовательностях, с использованием которых могут решаться задачи распознавания последовательностей по соответствующим им порядкам выполняющихся и не выполняющихся Z -рекуррентных определений, задачи классификации последовательностей по свойствам функциональных зависимостей элементов в последовательностях, задачи формализации правил управления событиями в процессах и т. д. Результатами исследований являются разработка основных положений, математических моделей и методов, позволяющих получать показатели для причинно-следственных связей событий в процессах в виде формальных показателей функциональных зависимостей элементов в последовательностях, представляющих процессы в системе. Для этого вводится и классифицируется множество D порядков Z -рекуррентных форм, соответствующих Z -рекуррентным определениям последовательностей, которое для каждой последовательности ξ разбивается на два подмножества:

- D_{ξ}^1 — подмножество порядков Z -рекуррентных форм, выполняющихся для Z -рекуррентного определения последовательности ξ ;
- D_{ξ}^2 — подмножество порядков Z -рекуррентных форм, не выполняющихся для Z -рекуррентного определения последовательности ξ .

Для повышения эффективности вычисления разбиения множества D на подмножества D_{ξ}^1 и D_{ξ}^2 последовательность ξ преобразуется в последовательность $\psi(\xi)$, которую будем называть образом последовательности ξ , соответствующим линейному порядку элементов на множестве, составляющем последовательность ξ . На множестве $W_{\xi} = \{w_1, w_2, \dots, w_C\}$, используем в определении последовательности ξ отображением $\theta: N_n \xrightarrow{na} W_{\xi}$, вводим линейный порядок $e: w_1 < w_2 < \dots < w_C$. Отношение следования " $<$ " элементов множества W_{ξ} по линейному порядку e дополняем отношениями равенства элементов " $=$ " и невыполнением отношения следования " $>$ ". Например, образом $\psi(\xi)$ последовательности $\xi = \langle a, a, b, a, c, b, a, c, d \rangle$, соответствующим линейному порядку $e: a < b < c < d$ на множестве $W_{\xi} = \{a, b, c, d\}$ является последовательность $\psi(\xi) = \langle =, <, >, <, >, >, <, < \rangle$. Существенным свойством последовательности $\psi(\xi)$ оказывается то, что она характеризует связи взаиморасположения элементов в последовательности ξ без указания самих элементов, что позволяет рассматривать более общие классы последовательностей.

Классификация Z -рекуррентных определений

Полное и точное правило Z -рекуррентного определения последовательности $\xi = \langle w_1, w_2, \dots, w_C \rangle$ представляется порядком $M = (M_1, M_2) = (\{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \dots, j_{n_2}\})$ Z -рекуррентной формы F^M . Числовая форма порядка позволяет достаточно просто классифицировать Z -рекуррентные определения на основе классификации порядков Z -рекуррентных форм. В общем случае множество порядков Z -рекуррентных форм счетно-бесконечно, так как в каждом конкретном порядке совмещаются два конечных подмножества $\{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}\}$ и $\{j_1, j_2, \dots, j_{n_2}\}$ целых положительных чисел, ограничения на значение которых зависят от длины C анализируемой последовательности. Для таких совмещений введем следующие условия: $1 \in M_1$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$,

$1 \notin M_2$, и все элементы последовательности используются при Z -рекуррентном определении. Кроме этого, будем рассматривать классификации, ограниченные длиной c анализируемых последовательностей.

Пример 1. Счетно-бесконечное множество вариантов Z -рекуррентных определений последовательностей для каждой последовательности длины $C \in N^+$ существенно ограничивается конечным множеством применимых к последовательностям такой длины Z -рекуррентных определений. В табл. 1 для $C = 5$ приведена классификация порядков Z -рекуррентных форм, взаимно-однозначно соответствующих Z -рекуррентным определениям последовательностей. В столбцах 4, 5, 10, 11 перечислены коды, представляющие порядки Z -рекуррентных форм по правилу: номера мест вхождения в код буквы "а" составляют множество M_1 , номера мест вхождения в код буквы "b" составляют множество M_2 и номера мест вхождения в код буквы "d" соответствуют индексам, не включенным в порядок Z -рекуррентной формы вида $M = (M_1, M_2)$. Из 54 порядков Z -рекуррентных форм в столбцах 2 и 8 табл. 1 выделены 38 порядков Z -рекуррентных форм, имеющих интерпретацию для случая $C = 5$. Легко показать, что из 38 порядков с помощью нумерации, указанной в столбцах 3 и 9, выделены базовые порядки Z -рекуррентных форм. Пусть D^C — множество порядков Z -рекуррентных форм для последовательностей длины C и D_{ξ}^C — множество порядков Z -рекуррентных форм для конкретной последовательности ξ , состоящее из множества $D_{\xi 1}^C$ порядков, выполняющихся для ξ , и множества $D_{\xi 2}^C$ порядков, не выполняющихся для ξ .

Основной характеристикой, построенной для последовательности ξ с использованием Z -рекуррентных определений ξ , полагается пара $(D_{\xi 1}^C, D_{\xi 2}^C)$. Две последовательности ξ_1 и ξ_2 рассматриваются как неравные по Z -рекуррентному определению, если $(D_{\xi 1}^C, D_{\xi 2}^C)$.

Введем классификацию для специальных образов последовательностей. К последовательности $\xi = \langle w_{v_1}, w_{v_2}, \dots, w_{v_C} \rangle$, определенной отображением $\theta_{\xi}: N_n \xrightarrow{na} W_{\xi}$, имеющим естественный линейный порядок на множестве N_n , добавим линейный порядок $e: w_1 < w_2 < \dots < w_C$ на множестве W_{ξ} . Образ $\psi(\xi)$ последовательности ξ — это множество, в котором последовательность ξ заменяется последовательностью отношений в ней элементов в соответствии

Таблица классификации порядков Z-рекуррентных форм
Table of Z-recurrent forms orders classification

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1				aaaa		28	20	13	baaa		$\{(2, 3, 4), \{1\}\}$
2	1	1	aaab		$\{(1, 2, 3), \{4\}\}$	29	21		baab		$\{(2, 3), \{1, 4\}\}$
3				aaad		30	22	14	baad		$\{(2, 3), \{1\}\}$
4	2	2	aaba		$\{(1, 2, 4), \{3\}\}$	31	23		baba		$\{(2, 4), \{1, 3\}\}$
5	3		aabb		$\{(1, 2), \{3, 4\}\}$	32	24		babb		$\{(2), \{1, 3, 4\}\}$
6	4	3	aabd		$\{(1, 2), \{3\}\}$	33	25		babd		$\{(2), \{1, 3\}\}$
7				aada		34	26	15	bada		$\{(2, 4), \{1\}\}$
8	5	4	aadb		$\{(1, 2), \{4\}\}$	35	27		badb		$\{(2), \{1, 4\}\}$
9				aadd		36	28	16	badd		$\{(2), \{1\}\}$
10	6	5	abaa		$\{(1, 3, 4), \{2\}\}$	37	29		bbaa		$\{(3, 4), \{1, 2\}\}$
11	7		abab		$\{(1, 3), \{2, 4\}\}$	38	30		bbab		$\{(3), \{1, 2, 4\}\}$
12	8	6	abad		$\{(1, 3), \{2\}\}$	39	31		bbad		$\{(3), \{1, 2\}\}$
13	9		abba		$\{(1, 4), \{2, 3\}\}$	40	32		bbba		$\{(4), \{1, 2, 3\}\}$
14	10		abbb		$\{(1), \{2, 3, 4\}\}$	41				bbbb	
15	11		abbd		$\{(1), \{2, 3\}\}$	42				bbbd	
16	12	7	abda		$\{(1, 4), \{2\}\}$	43	33		bbda		$\{(4), \{1, 2\}\}$
17	13		abdb		$\{(1), \{2, 4\}\}$	44				bbdb	
18	14	8	abdd		$\{(1), \{2\}\}$	45				bbdd	
19				adaa		46	34	17	bdaa		$\{(3, 4), \{1\}\}$
20	15	9	adab		$\{(1, 3), \{4\}\}$	47	35		bdab		$\{(3), \{1, 4\}\}$
21				adad		48	36	18	bdad		$\{(3), \{1\}\}$
22	16	10	adba		$\{(1, 4), \{3\}\}$	49	37		bdba		$\{(4), \{1, 3\}\}$
23	17		adbb		$\{(1), \{3, 4\}\}$	50				bdbb	
24	18	11	adbd		$\{(1), \{3\}\}$	51				bdbd	
25				adda		52	38	19	bdda		$\{(4), \{1\}\}$
26	19	12	addb		$\{(1), \{4\}\}$	53				bddb	
27				addd		54				bddd	

с выполнением или нарушением линейного порядка e . Образ $\psi(\xi)$ является последовательностью вида $\psi(\xi) \in \{<, >, =\}^*$, где $\{<, >, =\}^*$ — множество последовательностей, полученное замыканием множества $\{<, >, =\}$ по операции конкатенации и исключением пустой последовательности.

Исходными базовыми классами образов последовательностей полагаются классы $K_1, K_2, \dots, K_7$: $K_1 = \{=\}^*$, $K_2 = \{<\}^*$, $K_3 = \{>\}^*$, $K_4 = K_1 \cdot K_2 = \{=\}^* \cdot \{<\}^*$, $K_5 = K_2 \cdot K_1 = \{<\}^* \cdot \{=\}^*$, $K_6 = K_1 \cdot K_3 = \{=\}^* \cdot \{>\}^*$, $K_7 = K_3 \cdot K_1 = \{>\}^* \cdot \{=\}^*$. Основным свойством классов K_1, K_2, K_3, K_5, K_7 является то, что последовательности из этих классов Z-рекуррентно определяются Z-рекуррентными формами F^M порядка $M = (M_1, M_2) =$

$= (\{1\}, \{2\})$. Для последовательностей из классов K_4, K_6 определяющие Z-рекуррентные формы F^M имеют порядок $M = (M_1, M_2) = (\{1, 2, \dots, m\}, \{m+1\})$, где m — число знаков равенства в последовательности ξ . Классы $K_8 = K_1 \cdot K_2 \cdot K_1 = K_4 \cdot K_1 = K_1 \cdot K_5 = \{=\}^* \cdot \{<\}^* \cdot \{=\}^*$ и $K_9 = K_1 \cdot K_3 \cdot K_1 = K_6 \cdot K_1 = K_1 \cdot K_7 = \{=\}^* \cdot \{>\}^* \cdot \{=\}^*$ Z-рекуррентно определяются Z-рекуррентными формами F^M , которые имеют порядок $M = (M_1, M_2) = (\{1, 2, \dots, m\}, \{m+1\})$, где m — число знаков равенства в префиксе последовательности ξ .

Классы $K_{10} = K_2 \cdot K_3 = \{<\}^* \cdot \{>\}^*$ и $K_{11} = K_3 \cdot K_2 = \{>\}^* \cdot \{<\}^*$ содержат последовательности, для которых Z-рекуррентное определение выполняется при порядке Z-рекуррентной формы F^M , где $M = (M_1, M_2) = (\{1, 2\}, \{3\})$. Следующие

классы K_{12} — K_{19} построены как произведения трех классов K_1 , K_2 , K_3 :

- $K_{12} = K_1 \cdot K_{10} = K_4 \cdot K_3 = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 = \{=\}^* \cdot \{<\}^* \cdot \{>\}^*$;
- $K_{13} = K_{10} \cdot K_1 = K_2 \cdot K_7 = K_2 \cdot K_3 \cdot K_1 = \{<\}^* \cdot \{>\}^* \cdot \{=\}^*$;
- $K_{14} = K_6 \cdot K_2 = K_1 \cdot K_{11} = K_1 \cdot K_3 \cdot K_2 = \{=\}^* \cdot \{>\}^* \cdot \{<\}^*$;
- $K_{15} = K_{11} \cdot K_1 = K_3 \cdot K_5 = K_3 \cdot K_2 \cdot K_1 = \{>\}^* \cdot \{<\}^* \cdot \{=\}^*$;
- $K_{16} = K_5 \cdot K_3 = K_2 \cdot K_6 = K_2 \cdot K_1 \cdot K_3 = \{<\}^* \cdot \{=\}^* \cdot \{>\}^*$;
- $K_{17} = K_7 \cdot K_2 = K_3 \cdot K_4 = K_3 \cdot K_1 \cdot K_2 = \{>\}^* \cdot \{=\}^* \cdot \{<\}^*$;
- $K_{18} = K_5 \cdot K_2 = K_2 \cdot K_4 = K_2 \cdot K_1 \cdot K_2 = \{<\}^* \cdot \{=\}^* \cdot \{<\}^*$;
- $K_{19} = K_7 \cdot K_3 = K_3 \cdot K_6 = K_3 \cdot K_1 \cdot K_3 = \{>\}^* \cdot \{=\}^* \cdot \{>\}^*$.

Для последовательностей из классов K_{12} , ..., ..., K_{19} также возможно сопоставление конкретных порядков выполняющихся Z -рекуррентных форм. Каждая конкретная последовательность допускает представление нескольких вариантов композиций классов K_1 , K_2 , ..., K_{19} для определения класса, которому принадлежит Z -рекуррентное определение последователь-

ности. Например, для последовательностей из классов K_{12} , K_{14} выполняется Z -рекуррентное определение Z -рекуррентной формой F^M порядка $M = (M_1, M_2) = (\{1, 2, \dots, m\}, \{m + 1\})$, где m — число знаков "=" в последовательности, если $m > 2$, и определение Z -рекуррентной формой порядка $M = (M_1, M_2) = (\{1, 2\}, \{3\})$, если в последовательности только один знак равенства. Число знаков равенства в суффиксе последовательности не влияет на порядок Z -рекуррентной формы.

Алгоритм проверки выполнимости Z -рекуррентного определения

Основное свойство, характеризующее Z -рекуррентное определение последовательности $\xi = \langle w_1, w_2, \dots, w_c \rangle$ Z -рекуррентной формой F^M порядка $M = (M_1, M_2) = (\{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \dots, j_{n_2}\})$, представляется следующей формулой:

$$\begin{aligned} & ((w_{i_1+t_1}, w_{i_2+t_1}, \dots, w_{i_{n_1}+t_1}) = \\ & = (w_{i_1+t_2}, w_{i_2+t_2}, \dots, w_{i_{n_1}+t_2})) \rightarrow \\ & \rightarrow ((w_{j_1+t_1}, w_{j_2+t_1}, \dots, w_{j_{n_2}+t_1}) = \\ & = (w_{j_1+t_2}, w_{j_2+t_2}, \dots, w_{j_{n_2}+t_2})) \end{aligned} \quad (2)$$

для всех значений t_1 и t_2 , имеющих смысл для последовательности ξ . На основании формулы (2) сформулируем алгоритм, который достаточно простыми действиями позволяет определить, выполняется ли Z -рекуррентное определение последовательности ξ с использованием Z -рекуррентной формы F^M заданного порядка M . Перед точной формулировкой алгоритма рассмотрим пример.

Пример 2. Для заданной последовательности $\xi = \langle a, a, b, c, c, b, a, b, b, c, b, d, d, a, b, d \rangle$ проверим выполнимость Z -рекуррентной формы порядка $M = (M_1, M_2) = (\{2, 4\}, \{7, 8\})$ с условием $1 \notin M_1$. Исходной информацией для алгоритма является таблица T_2 размерности 16×16 , представленная на рисунке заполненными клетками.

В таблице T_2 (см. рисунок) для элементов исходной последовательности второй, третьей и т. д. строками представлены предшествующие элементы. Выделенные две строки (вторая и чет-

T_2															
a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b	d	d	a	b	d
a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b	d	d	a	b	
a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b	d	d	a		
a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b	d	d			
a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b	d				
a	a	b	c	c	b	a	b	b	c	b					
a	a	b	c	c	b	a	b	b	c						
a	a	b	c	c	b	a	b	b							
a	a	b	c	c	b	a	b								
a	a	b	c	c	b	a									
a	a	b	c	c	b										
a	a	b	c												
a	a	b													
a	a														
a															
a															

T_3															
a	b	b	c	b	d	d	a	b	d						
b	a	b	b	c	b	d	d	a	b						
c	c	b	a	b	b	c	b	d	d						

T_4															
b	b	c	b	d	d	a	b	d							
a	b	b	c	b	d	d	a	b							
c	b	a	b	b	c	b	d	d							

Таблицы T_2 , T_3 и T_4 для анализа выполнимости Z -рекуррентных определений последовательности ξ Z -рекуррентными формами порядков $M^1 = (\{2, 4\}, \{7\})$, $M^2 = (\{2, 4\}, \{8\})$, $M^3 = (\{2, 4\}, \{7, 8\})$

Tables T_2 , T_3 and T_4 for analysis of executing of Z -recurrent definition of sequences ξ by Z -recurrent forms with orders $M^1 = (\{2, 4\}, \{7\})$, $M^2 = (\{2, 4\}, \{8\})$, $M^3 = (\{2, 4\}, \{7, 8\})$

вертая) требуются для анализа того, выполняется ли для последовательности Z -рекуррентная форма $M = (M_1, M_2) = (\{2, 4\}, \{7, 8\})$. Выделенные две строки, соответствующие числам 2, 4 и два столбца, соответствующие числам 7, 8, достаточны для анализа. Столбцы таблицы T_2 с номерами 1...6 и строки с номерами 7...16 исключаются.

Выполнение Z -рекуррентного определения с использованием порядка $(\{2, 4\}, \{7, 8\})$ Z -рекуррентной формы может быть эквивалентно представлено выполнением двух Z -рекуррентных определений F^{M^1} и F^{M^2} , где $M^1 = (\{2, 4\}, \{7\})$ и $M^2 = (\{2, 4\}, \{8\})$. Следовательно, в анализе последовательности таблица T_2 (см. рисунок) заменяется анализом таблиц T_3 и T_4 , представленных на рисунке.

Для анализа таблиц T_3 и T_4 рассматриваются предполагаемые функциональные зависимости f^1 и f^2 :

- $f^1(c, b) = f^1(b, d) = a, f^1(c, a) = f^1(b, b) = f^1(b, c) = f^1(d, a) = b, f^1(a, b) = c, f^1(b, b) = f^1(c, d) = f^1(d, b) = d$, определенные таблицей T_1 ;
- $f^2(b, b) = a, f^2(c, a) = f^2(b, b) = f^2(b, c) = f^2(d, a) = b, f^2(a, b) = c, f^2(b, b) = f^2(c, d) = f^2(d, b) = d$, определенные таблицей T_2 .

Вывод: для последовательности $\xi = \langle a, a, b, c, c, b, a, b, b, c, b, d, d, a, b, d \rangle$ выполняются Z -рекуррентные определения с использованием Z -рекуррентных форм порядков $M^1 = (\{2, 4\}, \{7\})$, $M^2 = (\{2, 4\}, \{8\})$ и $M^3 = (\{2, 4\}, \{7, 8\})$. Эти конкретные Z -рекуррентные определения являются частью общей точной и полной модели процесса, представленного последовательностью ξ , пригодной для построения других моделей, постановок и решений задач, связанных с управлением системами.

Алгоритм содержит следующие этапы.

Этап 1. Для заданных последовательности $\xi = \langle w_1, w_2, \dots, w_C \rangle$ и порядка $M = (M_1, M_2) = (\{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \dots, j_{n_2}\})$ Z -рекуррентной формы F^M строится таблица размерности $C \times C$ с первой строкой ξ и последующими строками, полученными последовательным сдвигом на одну позицию вправо. В таблице выделяются строки с номерами $\{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}\}$ и первая строка, остальные строки исключаются. Также исключаются столбцы, номера которых меньше k , где $k = \min(M_1 \cup M_2)$. Полученная таблица обозначается T_0 .

Этап 2. Из полученной на первом этапе таблицы T_0 строятся n_2 таблиц $T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0n_2}$

по правилу: таблица $T_{0v}, 1 \leq v \leq n_2$ получается из таблицы T_0 исключением столбцов, номера которых в таблице T_0 меньше j_v .

Этап 3. Таблицы $T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0n_2}$ анализируются на выполнение функциональной зависимости элементов из верхних строк таблиц от ниже расположенных в столбцах элементов. Если для всех таблиц $T_{01}, T_{02}, \dots, T_{0n_2}$ функциональная зависимость элементов из верхних строк таблиц от ниже расположенных элементов выполняется, то последовательность ξ Z -рекуррентно определяется Z -рекуррентной формой порядка $M = (M_1, M_2) = (\{i_1, i_2, \dots, i_{n_1}\}, \{j_1, j_2, \dots, j_{n_2}\})$. В противном случае последовательность ξ не определяется Z -рекуррентной формой порядка M .

Образы последовательностей по линейным порядкам элементов

Z -рекуррентное определение последовательностей характеризует функциональные связи между элементами последовательности на основе структур связей мест расположения элементов. В соответствии с этим показатели Z -рекуррентных определений последовательностей, различающиеся взаимно-однозначным переобозначением элементов, совпадают. Одни и те же показатели Z -рекуррентных определений последовательностей могут соответствовать различным последовательностям, которые связаны не только переобозначением элементов. Для того чтобы расширить классы последовательностей, представленные показателями Z -рекуррентных определений, перенесем Z -рекуррентное определение на образы последовательностей, построенные в форме цепочек новых отношений между элементами. Последовательность $\xi = \langle w_{v_1}, w_{v_2}, \dots, w_{v_C} \rangle$ и отображение $\theta: N_n \xrightarrow{na} W_\xi$ дополним линейным порядком $w_1 \prec w_2 \prec \dots \prec w_C$. Кроме последовательности ξ Z -рекуррентное определение будем применять к образу $\psi(\xi)$ и получать показатели функциональных зависимостей между элементами в последовательности ξ на основе функциональных зависимостей между элементами в последовательности $\psi(\xi)$.

Пример 3. С использованием Z -рекуррентных определений последовательностей можно получать характеристики классов последовательностей. Рассмотрим класс всех двоичных последовательностей длины 5 и соответствующий ему

класс образов последовательностей для линейного порядка $0 < 1$. В классе образов таких последовательностей 32 последовательности:

1. $\psi(0, 0, 0, 0, 0) = <=, =, =, =>$
2. $\psi(0, 0, 0, 0, 1) = <=, =, =, <>$
3. $\psi(0, 0, 0, 1, 0) = <=, =, <, >$
4. $\psi(0, 0, 0, 1, 1) = <=, =, <, =>$
5. $\psi(0, 0, 1, 0, 0) = <=, <, >, =>$
6. $\psi(0, 0, 1, 0, 1) = <=, <, >, <>$
7. $\psi(0, 0, 1, 1, 0) = <=, <, =, >$
8. $\psi(0, 0, 1, 1, 1) = <=, <, =, =>$
9. $\psi(0, 1, 0, 0, 0) = <<, >, =, =>$
10. $\psi(0, 1, 0, 0, 1) = <<, >, =, <>$
11. $\psi(0, 1, 0, 1, 0) = <<, =, <, =>$
12. $\psi(0, 1, 0, 1, 1) = <<, >, <, =>$
13. $\psi(0, 1, 1, 0, 0) = <<, =, >, =>$
14. $\psi(0, 1, 1, 0, 1) = <<, =, >, <>$
15. $\psi(0, 1, 1, 1, 0) = <<, =, =, >$
16. $\psi(0, 1, 1, 1, 1) = <<, =, =, =>$
17. $\psi(1, 0, 0, 0, 0) = <>, =, =, =>$
18. $\psi(1, 0, 0, 0, 1) = <>, =, =, <>$
19. $\psi(1, 0, 0, 1, 0) = <>, =, <, >$
20. $\psi(1, 0, 0, 1, 1) = <>, =, <, =>$
21. $\psi(1, 0, 1, 0, 0) = <>, <, >, =>$
22. $\psi(1, 0, 1, 0, 1) = <>, <, >, <>$
23. $\psi(1, 0, 1, 1, 0) = <>, <, =, >$
24. $\psi(1, 0, 1, 1, 1) = <>, <, =, =>$
25. $\psi(1, 1, 0, 0, 0) = <=, >, =, =>$
26. $\psi(1, 1, 0, 0, 1) = <=, >, =, <>$
27. $\psi(1, 1, 0, 1, 0) = <=, >, <, >$
28. $\psi(1, 1, 0, 1, 1) = <=, >, <, =>$
29. $\psi(1, 1, 1, 0, 0) = <=, =, >, =>$
30. $\psi(1, 1, 1, 0, 1) = <=, =, >, <>$
31. $\psi(1, 1, 1, 1, 0) = <=, =, =, >$
32. $\psi(1, 1, 1, 1, 1) = <=, =, =, =>$

Образ $\psi(\xi)$ последовательности ξ , рассматриваемый для определения класса последовательностей, значительно богаче, чем набор характеристик, соответствующий самой последовательности. Например, последовательность $<1, 1, 0, 0, 1>$ Z -рекуррентно определяется Z -рекуррентными формами порядков $(\{1\}, \{3\})$, $(\{1, 2\}, \{3\})$, $(\{2, 3\}, \{1\})$, $(\{1, 4\}, \{2\})$, $(\{2, 4\}, \{1\})$, $(\{3, 4\}, \{1\})$, $(\{1, 2, 3\}, \{4\})$, $(\{1, 3, 4\}, \{2\})$. Для образа $<=, >, =, <>$ последовательности

$<1, 1, 0, 0, 1>$ выполняются Z -рекуррентные определения с использованием Z -рекуррентных форм порядков $(\{1\}, \{3\})$, $(\{1, 2\}, \{3\})$, $(\{2, 3\}, \{1\})$ и с использованием таких Z -рекуррентных форм для последовательностей с большим базовым множеством, например, множеством $\{a, b, c\}$, порядком $a < b < c$ и последовательностью $<c, c, a, a, b>$. Выбор на базовом множестве линейного порядка, с использованием которого определяется образ последовательности, является существенным, так как последовательности могут соответствовать несколько различных образов в зависимости от выбора линейного порядка: последовательности $<1, 1, 0, 0, 1>$ и линейному порядку $1 < 0$ соответствует образ $<=, <, =, >>$.

Предположим, что каждый из процессов определяется значениями показателей по k свойствам $R_1, R_2, \dots, R_k$ с множествами $U_1, U_2, \dots, U_k$ значений свойств процессов. Это означает, что модель события W_i в момент (интервал) времени t представляется таблицей вида T_{it} (табл. 2).

В таблице T_{it} для конкретных момента времени t и класса процессов P_i и для всех рассматриваемых частных процессов $P_{ij}, 1 \leq j \leq v_i$, из класса процессов P_i , представлен срез в момент t значений $G(P_{ij}, R_\mu, t)$ показателей свойств процессов. В таблице T_{it} значения вида $G(P_{ij}, R_\mu, t)$ могут быть: конкретными числами; конкретными логическими значениями с интерпретацией; символами с содержательной интерпретацией; конкретными неравенствами или другими отношениями. Срез в момент времени t процесса в целом функционирования сложной человеко-машинной системы предполагается определенным таблицей T_p , состоящей из совмещения таблиц в последовательность $T_1, T_2, \dots, T_{63}, T_r$.

Такая форма определения процесса позволяет использовать Z -рекуррентное определение последовательности для построения моделей процессов в виде дифференциаль-

Таблица 2
Table 2

Таблица T_{it}
Table T_{it}

P_i		R_1	R_2	...	R_k
	P_{i1}	$G(P_{i1}, R_1, t)$	$G(P_{i1}, R_2, t)$	...	$G(P_{i1}, R_k, t)$
	P_{i2}	$G(P_{i2}, R_1, t)$	$G(P_{i2}, R_2, t)$	...	$G(P_{i2}, R_k, t)$
	...	...	...	...	...
	P_{iv_i}	$G(P_{iv_i}, R_1, t)$	$G(P_{iv_i}, R_2, t)$	...	$G(P_{iv_i}, R_k, t)$

ных, интегральных, алгебраических или логических уравнений. Для последовательности $\xi = \langle w_{v_1}, w_{v_2}, \dots, w_{v_c} \rangle$, являющейся моделью процесса, представленного последовательностью событий, определенных таблицами, вычисляются все (или некоторые, в зависимости от постановки задачи построения уравнения) выполняющиеся порядки Z -рекуррентных форм: $M^1, M^2, \dots, M^r$, где $M^\mu = (M_1^\mu, M_2^\mu) = (\{i_1^\mu, i_2^\mu, \dots, i_{\alpha_\mu}^\mu\}, \{j_1^\mu, j_2^\mu, \dots, j_{\beta_\mu}^\mu\})$. Из набора порядков Z -рекуррентных форм выбираются те, которые будут использованы при построении уравнения (для сокращения используемых обозначений будем предполагать, что для построения уравнения используются Z -рекуррентные формы всех выполняющихся для последовательности порядков).

Контроль и диагностирование в управлении системой

При исследовании контроля и диагностирования в управлении реальной сложной системой существенные ограничения принимаются в виде дополнительных условий и предположений. Реальная система как материальное тело изменяется во времени и, следовательно, результаты контроля и диагностирования имеют значение для прошлого системы, а распространяются из прошлого на настоящее и будущее с помощью гипотез. Кроме этого, существует последовательная во времени связь в событиях "возникновения дефекта", "проявление дефекта в процессе функционирования системы" и "обнаружения дефекта по свойствам изменения процесса функционирования". Каждое конкретное значение показателя свойства события или процесса в системе представляет дефект только с точностью до класса событий или класса процессов. Эти и другие особенности соответствия реальных объектов, событий и процессов их формальным моделям исключаются дополнительными предположениями и условиями.

Для решения задач контроля и диагностирования в управлении системой на основе использования формальных средств примем следующие предположения. Пусть H — множество всех последовательностей, являющихся моделями рассматриваемых процессов в системе. Предположим, что множество H представлено двумя подмножествами: $H_1 = \{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ (подмножество моделей работоспособных про-

цессов) и $H_2 = \{h_d\}_{d \in D}$ (подмножество моделей процессов, соответствующих рассматриваемым дефектам системы). Для систематизации процессов предлагается использовать ранее разработанную классификацию процессов, включающую 63 варианта процессов: шесть базовых процессов (класс P_1 командно-информационных управляющих процессов; класс P_2 процессов действий человеческих звеньев в постановках целей и задач, а также в реализации решений задач; класс P_3 процессов функционирования техники и оборудования; класс P_4 процессов энергообеспечения; класс P_5 процессов обеспечения сырьем и другими ресурсами; класс P_6 процессов взаимодействия с внешней средой) и 57 вариантов процессов $P_7, \dots, P_{63}$, соответствующих сочетаниям базовых процессов по два, по три, ..., всех шести базовых процессов.

В отличие от традиционных подходов к постановкам и решениям задач контроля и диагностирования предлагается представлять математические модели процессов в форме выполняющихся и не выполняющихся Z -рекуррентных определений последовательностей, соответствующих процессам. Рассмотрим случай зафиксированной длины s последовательностей. Множество H (или выбранное для анализа его подмножество) для каждой последовательности $h \in H$ разобьем на пару подмножеств $(\Phi_h, \bar{\Phi}_h)$, где Φ_h — множество выполняющихся для последовательности h Z -рекуррентных определений и $\bar{\Phi}_h$ — множество не выполняющихся для последовательности h Z -рекуррентных определений. Для задач контроля исходными данными являются множество пар $(\Phi_h^1, \bar{\Phi}_h^1)$ по всем $h \in H_1$ и множества пар $(\Phi_h^2, \bar{\Phi}_h^2)$ по всем $h \in H_2$. Переменной информацией является пара вида $(\Phi_{h_x}, \bar{\Phi}_{h_x})$, вычисленная для последовательности h_x , соответствующей реальному, фактическому процессу функционирования системы. В задаче контроля требуется определить, какому из двух множеств пар (для последовательностей из множества H_1 или для последовательностей из множества H_2) принадлежит пара $(\Phi_{h_x}, \bar{\Phi}_{h_x})$. В задачах диагностирования исключается анализ последовательностей из множества последовательностей H_1 и рассматриваются варианты совпадения пары $(\Phi_{h_x}, \bar{\Phi}_{h_x})$ с конкретными парами, вычисленными для последовательностей из множества H_2 .

Закключение

На основе проведенных исследований разработаны основные положения, включающие: расширение рекуррентного определения последовательностей до вводимого Z -рекуррентного определения; представление моделей процессов в форме множества выполняющихся Z -рекуррентных определений последовательностей и множества не выполняющихся; разработку моделей и методов для распознавания процессов по моделям процессов в форме множеств выполняющихся Z -рекуррентных определений последовательностей и множеств не выполняющихся Z -рекуррентных определений. Разработаны классификация Z -рекуррентных определений последовательностей, метод проверки выполнимости для последовательности конкретного Z -рекуррентного определения, классификация процессов и табличное представление значений показателей свойств событий. Сформулированы постановки задач контроля, диагностирования и методы решения этих задач. Введение Z -рекуррентного определения последовательностей позволяет заменять прямые причинно-следственные или логические связи событий функциональными связями значений показателей свойств событиями. Даже для небольших значений длин $s \in L^+$ последовательностей оказывается возможным при использовании Z -рекуррентных определений последовательностей рассматривать большое число свойств процессов, представленных выполняющимися или не выполняющимися Z -рекуррентными определениями последовательностей.

Список литературы

1. Твердохлебов В. А. Z -рекуррентное определение последовательностей в задачах контроля и диагностирования процессов в системах // Доклады академии военных наук. 2016. № 2 (70). С. 43–47.

2. Твердохлебов В. А. Геометрическая форма автоматных отображений, рекуррентное и Z -рекуррентное определение последовательностей // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, № 2. С. 232–241.

3. Твердохлебов В. А. Z -рекуррентное определение последовательности для оценки сложности структуры последовательности // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Международной науч. конф. (Саратов, 30 июня — 02 июля 2016 г.). Саратов, 2016. С. 414–417.

4. Епифанов А. С. Методы оценки сложности законов функционирования автоматных моделей систем // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 3. С. 19–29.

5. Епифанов А. С. Метод оценки сложности дискретных детерминированных автоматов // Управление большими системами: Материалы IX Всероссийской школы-конференции молодых ученых (Липецк, 21–24 мая 2012 г.). Липецк, 2012. С. 45–47.

6. Резчиков А. Ф., Твердохлебов В. А. Метод рекуррентного и Z -рекуррентного управления функционированием сложной системы // Проблемы управления. 2018. № 3. С. 56–64.

7. Алешкин А. П., Архипова И. Г., Полиенко В. Н., Семенов А. А., Макаров А. А. Метод рекуррентного оценивания параметров движения подводного объекта по данным космических навигационных определений буксируемой аппаратуры потребителя // Радиопромышленность. 2018. № 1. С. 57–61.

8. Анцев Г. В., Лысенко Л. Н., Петров В. А. Повышение точности определения параметров орбит на основе применения операторов совмещения витковых оценок по результатам малоинтервальной обработки данных ГЛОНАСС // Вестник Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия: Приборостроение. 2016. № 5 (110). С. 99–110.

9. Брега Г. В. Рекуррентный подход к управлению рисками в инновационной деятельности // Управленческие науки. 2015. № 2. С. 50–57.

10. Кривулин Н. К., Нев О. А. Вычисление асимптотических характеристик стохастической динамической системы с синхронизацией событий // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1, № 4. С. 533–543.

11. Умирзаков И. Х. Рекуррентный метод определения различных наборов кластеров и распределения кластеров по размерам в системе с конечным числом частиц // Бутлеровские сообщения. 2015. Т. 44, № 10. С. 45–63.

12. Кельманов А. В., Хамидуллин С. А., Окольников Л. В. Распознавание квазипериодической последовательности, включающей одинаковые подпоследовательности-фрагменты // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, № 4 (12). С. 38–54.

13. Кельманов А. В., Хамидуллин С. А. Апостериорное обнаружение заданного числа усеченных подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Сибирский журнал индустриальной математики. 2000. Т. 3, № 1 (15). С. 137–156.

Models of Functional Dependencies of Elements in Sequences for Solving Problems of Control and Management

V. A. Tverdokhlebov, TverdokhlebovVA@list.ru,

Institute of Problems of Precision Mechanics and Control of RAS, 410028, Saratov, Russian Federation

Corresponding author: Tverdokhlebov Vladimir A., Doctor of science, Professor, Institute of Problems of Precision Mechanics and Control of RAS, 410028, Saratov, Russian Federation, e-mail: TverdokhlebovVA@list.ru

Abstract

In paper developed version of the basic concepts, models and methods for the formulation and solution of problems of control and diagnosing of processes in systems, tasks of constructing models of processes in which the causal relationships of events are transformed into functional dependencies between elements in sequences, problems of formalizing of process control rules, etc. For this extended classical recurrent definition of the sequences, which presents the functional elements depending on the immediately preceding to them m elements to offered Z-recurrent definition, which defines the functional relationship between sets of elements in the sequence. The orders of Z-recurrent forms have the form of a set of numbers and are convenient for accurate and complete characterization of the connections of events in processes. The tasks of control, diagnosing, constructing new models of processes, assessing the complexity of processes and rules for managing processes can be formulated and solved using numerical indicators of Z-recurrent definitions. A classification of Z-recurrent definitions of sequences and a classification of processes are constructed, an algorithm for checking the feasibility of determining a Z-recurrent form for given sequences of form is developed. The Z-recurrent definition of sequence is complemented by the Z-recurrent sequence pattern method, which includes: introducing a linear order on the base set of sequence elements, constructing an image for the sequence in the form of a sequence of executing or non-executing relationships between the elements represented by a linear order, and applying Z-recurrent definitions to the constructed image of the sequence. The problem on which the solution of the considered problems is based is the recognition of two sequences by properties, which are determined by the indicators of Z-recurrent definitions of sequences, which have the form of orders of Z-recurrent forms. Sets of orders in executing or non-executing Z-recurrent forms characterize the sequences and the analyzed sets of sequences, which allows you to set and solve problems related to system management: problems of control and diagnosing of processes in the system, problems of constructing process models, problems of formalizing and complexity estimation of control rules of processes.

Keywords: system, process, property, model, method, control, diagnosing, sequence, recurrent definition, Z-recurrent definition

Acknowledgements: The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. AAAA-A18-118042790041-7).

For citation:

Tverdohlebov V. A. Models of Functional Dependencies of Elements in Sequences for Solving Problems of Control and Management, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 10, pp. 579—588.

DOI: 10.17587/mau.20.579-588

References

1. **Tverdohlebov V. A.** *Doklady akademii voennykh nauk*, 2016, no. 2 (70), pp. 43—47 (in Russian).
2. **Tverdohlebov V. A.** *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 232—241 (in Russian).
3. **Tverdohlebov V. A.** *Komp'yuternye nauki i informacionnye tekhnologii: Materialy Mezhdunarodnoj nauch. konf.*, Saratov, 30 iyunya 02 iyulya 2016 g., Saratov, 2016, pp. 414—417 (in Russian).
4. **Rezchikov A. F., Tverdohlebov V. A.** *Problemy Upravleniya*, 2018, no. 3, pp. 56—64 (in Russian).
5. **Epifanov A. S.** *Prikladnaya Matematika i Voprosy Upravleniya*, 2017, no. 3, pp. 19—29 (in Russian).
6. **Epifanov A. S.** *Upravlenie bol'shimi sistemami: Materialy IX Vserossijskoj shkoly-konferencii molodykh uchenykh* (Lipeck, 21—24 maya 2012 g.), Lipeck, 2012, pp. 45—47 (in Russian).
7. **Aleshkin A. P., Arhipova I. G., Polienko V. N., Semenov A. A., Makarov A. A.** *Radiopromyshlennost'*, 2018, no. 1, pp. 57—61 (in Russian).
8. **Ancev G. V., Lysenko L. N., Petrov V. A.** *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N. E. Bauman. Seriya: Priborostroenie*, 2016, no. 5 (110), pp. 99—110 (in Russian).
9. **Brega G. V.** *Upravlencheskie nauki*, 2015, no. 2, pp. 50—57 (in Russian).
10. **Krivulin N. K., Nev O. A.** *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2014, vol. 1, no. 4, pp. 533—543 (in Russian).
11. **Umirzakov I. H.** *Butlerovskie soobshcheniya*, 2015, vol. 44, no. 10, pp. 45—63 (in Russian).
12. **Kel'manov A. V., Hamidullin S. A., Okol'nishnikova L. V.** *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*, 2002, vol. 5, no. 4 (12), pp. 38—54 (in Russian).
13. **Kel'manov A. V., Hamidullin S. A.** *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki*, 2000, vol. 3, no. 1 (15), pp. 137—156 (in Russian).

Е. Е. Онегин, мл. науч. сотр., evgeny.onegin@phystech.edu

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

Оптимальная стабилизация квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами

Работа посвящена задаче оптимальной стабилизации квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами. Системы такого вида описываются линейными стохастическими дифференциальными уравнениями с мультипликативными возмущениями, матрицы которых, в общем случае нелинейно, зависят от управления. Критерий качества представляет собой модификацию классического квадратичного критерия качества управления. Задача состоит в минимизации критерия на множестве допустимых процессов управления. Данная постановка задачи интересна тем, что она позволяет изучать широкий спектр вопросов оптимизации линейных систем с мультипликативными возмущениями, в том числе: оптимизацию конструктивных параметров системы, задачи оптимальной стабилизации при наличии ограничений на коэффициенты линейного регулятора в виде неравенств, задачи оптимальной стабилизации линейных стохастических систем при наличии информационных ограничений. Основным результатом работы являются необходимые условия оптимальности вектора параметров в задаче оптимальной стабилизации квазилинейной стохастической системы с управляемыми параметрами. Предложена процедура градиентного типа синтеза оптимального стабилизирующего вектора параметров. Кроме того, на основе полученных условий оптимальности построен алгоритм синтеза субоптимального программного управления в рассматриваемой задаче. Результатом работы предложенного алгоритма является кусочно-постоянное управление, которое дает значение критерия гарантированно не хуже, чем оптимальный стабилизирующий вектор. Полученный алгоритм отличается простотой и позволяет проводить расчет в реальном времени. Полученные результаты применены к задаче оптимальной стабилизации с информационными ограничениями, в которой также получены необходимые условия оптимальности и предложена процедура синтеза управления градиентного типа. Использование полученных результатов продемонстрировано на модельном примере.

Ключевые слова: непрерывные стохастические системы, системы с управляемыми параметрами, квадратичный критерий, оптимальная стабилизация, линейные системы с мультипликативными возмущениями, информационные ограничения

Введение

Модели, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями, нашли широкое применение в экономике, физике, биологии, социологии, авиационной и ракетно-космической технике. При этом естественный интерес представляет собой проблема управления подобными системами, в частности проблема стабилизации движения. Одним из самых изученных классов систем теории стохастических дифференциальных уравнений являются линейные системы с аддитивными шумами. Данные системы характеризуются тем, что интенсивность воздействующих на них случайных возмущений является функцией времени и не зависит от состояния или управления. По этой причине система подвергается постоянному воздействию случайных возмущений, которые выводят систему из положения равновесия, вследствие чего невозможно обеспечить ее асимптотическую устойчивость. При этом не имеет содержательного смысла постановка вопроса об оптимальном управлении линейными системами на бесконечном интервале времени с классическим квадратичным критерием качества управления. Однако имеется широкий класс систем, которые называют линейными

системами с мультипликативными шумами или квазилинейными, для которых можно обеспечить асимптотическую устойчивость в среднем квадратичном нулевого решения.

Задачи оптимальной стабилизации линейных систем с мультипликативными возмущениями рассматривались в работах [1–6] и др. В этом направлении можно выделить две группы работ: задачи при наличии полной обратной связи и с наличием информационных ограничений. К первой группе относятся работы [1–4], в которых при различных предположениях о системе получены условия оптимальности линейного стационарного регулятора. Ко второй группе можно отнести работы [5, 7], в которых рассматривается задача с усредненным по времени критерием качества управления, и работу [8], в которой получены достаточные условия оптимальности при управлении по выходу. В данной работе рассмотрена задача оптимального подавления случайных возмущений при наличии информационных ограничений более общего вида. Рассматриваемые информационные ограничения заключаются в том, что каждая компонента управления зависит от отдельного вектора измерений. Получены необходимые условия в классе линейных стационарных регуляторов для данной задачи.

Нередко при синтезе так называемого марковского управления удается получить лишь условия оптимальности для линейного стационарного регулятора. Если же сразу задаться целью найти линейный стационарный регулятор, то мы приходим к задаче оптимального подавления случайных возмущений в квазилинейной стохастической системе с управляемыми параметрами. Системы такого вида описываются линейными стохастическими дифференциальными уравнениями с мультипликативными возмущениями, матрицы которых, в общем случае нелинейно, зависят от управления. Детерминированные линейные системы с управляемыми параметрами рассматривались в работе [9], их обобщение на стохастические уравнения изучались в работах [6, 10]. Результатов для рассматриваемой в данной работе задачи оптимальной стабилизации в подобных системах не известно. В работе получены необходимые условия оптимальности для данных систем, предложены процедуры синтеза оптимального стабилизирующего вектора параметров, а также предложена процедура построения субоптимального программного управления.

Результаты данной работы частично были доложены на Международных конференциях "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления" в 2016 и 2018 гг. [11, 12], а также Всероссийском совещании по проблемам управления в 2019 г.

1. Постановка задачи

Рассматривается векторное стохастическое дифференциальное уравнение Ито вида

$$dX(t) = A_0(u(t))X(t)dt + \sum_{i=1}^q A_i(u(t))X(t)dW_i(t), \quad (1)$$

$$X(0) = X_0,$$

где $t \geq 0$ — время; X — случайный процесс со значениями в $\mathcal{R}^n$; W — стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{R}^q$; $u: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}^m$ — управление; $v \mapsto A_i(v): \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$, $i = \overline{0, q}$, — непрерывно-дифференцируемые по v матрично-значные функции; X_0 — случайный вектор, который не зависит от $W(t)$, $t \geq 0$, и удовлетворяет условию $\mathbb{E} \|X_0\|^2 < +\infty$,

$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ — евклидова норма вектора

$x \in \mathcal{R}^n$, $\mathbb{E}(\cdot)$ — оператор математического ожидания.

Обозначим $\mathcal{D}_{X_0}$ — множество допустимых процессов управления $z = (X, u)$, которые являются парами случайных процессов X и функций управления u , таких что

1) функция u является ограниченной кусочно-непрерывной на каждом конечном интервале времени;

2) при заданном u непрерывный случайный процесс X является решением уравнения (1) с заданным начальным условием;

3) выполнено условие

$$\mathbb{E} \int_0^{+\infty} \|X(s)\|^2 ds < +\infty. \quad (2)$$

Определение. Управление u , для которого существует допустимый процесс управления $z = (X, u) \in \mathcal{D}_{X_0}$, будем называть допустимым.

Определение. Управление u будем называть стабилизирующим, если оно является допустимым при любом начальном условии X_0 , $\mathbb{E} \|X_0\|^2 < +\infty$.

Замечание 1. Управление u является стабилизирующим тогда и только тогда, когда замкнутая по u система асимптотически устойчива в среднем квадратичном.

На множестве $\mathcal{D}_{X_0}$ определим функционал $J: \mathcal{D}_{X_0} \rightarrow \mathcal{R}$:

$$J(z) = \mathbb{E} \int_0^{+\infty} X(s)^T F(u(s)) X(s) ds, \quad (3)$$

где $F: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$ — дифференцируемая на $\mathcal{R}^m$ матричнозначная функция, которая принимает значения из множества неотрицательно определенных симметрических матриц: $F(v) \succcurlyeq 0$, $v \in \mathcal{R}^m$.

Задача состоит в поиске процесса управления $\bar{z} = (\bar{X}, \bar{u}) \in \mathcal{D}_{X_0}$, который будет минимизировать критерий (3) на $\mathcal{D}_{X_0}$:

$$J(\bar{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{X_0}} J(z). \quad (4)$$

2. Вспомогательный функционал качества управления

Аналогично тому, как это было сделано в работах [2, 6, 13], построим для данной задачи вспомогательный функционал качества управления. Для этого фиксируем некоторый

процесс управления $z = (X, u) \in \mathcal{D}_{X_0}$. Известно [14, теорема 4.2.1], что для всякой функции $(t, x) \mapsto \varphi(t, x) : [0, +\infty) \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, имеющей непрерывные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = \overline{1, n}$, верна формула Ито

$$\begin{aligned} \varphi(t, X(t)) &= \varphi(0, X_0) + \\ &+ \int_0^t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, X(s)) + \nabla_x \varphi(s, X(s))^T A_0(u(s)) X(s) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q X(s)^T A_i(u(s))^T H_x^\varphi(s, X(s)) A_i(u(s)) X(s) \right) ds + \\ &+ \sum_{i=1}^q \int_0^t \nabla_x \varphi(s, X(s))^T A_i(u(s)) X(s) dW_i(s), t \geq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\nabla_x \varphi(t, \cdot)$ — градиент функции $\varphi(t, \cdot)$, $\nabla_x \varphi := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)^T$; $H_x^\varphi(t, \cdot)$ — матрица Гессе функции $\varphi(t, \cdot)$, $(H_x^\varphi)_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = \overline{1, n}$.

Применяя данную формулу к функции $\varphi(t, x) = x^T M x$, где $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$ — симметрическая матрица, получим равенство

$$\begin{aligned} X(t)^T M X(t) &= X_0^T M X_0 + \int_0^t X(s)^T \left(M A_0(u(s)) + \right. \\ &+ A_0(u(s))^T M + \sum_{i=1}^q A_i(u(s))^T M A_i(u(s)) \left. \right) X(s) ds + \\ &+ 2 \sum_{i=1}^q \int_0^t X(s)^T M A_i(u(s)) X(s) dW_i(s), t \geq 0. \end{aligned}$$

Возьмем математическое ожидание от левой и правой частей этого равенства. Тогда с учетом свойств стохастического интеграла Ито [14, теорема 3.2.1] получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(t)^T M X(t)) &= \mathbb{E}(X_0^T M X_0) + \\ &+ \mathbb{E} \int_0^t X(s)^T \left(M A_0(u(s)) + A_0(u(s))^T M + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^q A_i(u(s))^T M A_i(u(s)) \right) X(s) ds, t \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Устремляя t к бесконечности, учитывая (2), получим

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X_0^T M X_0) + \\ &+ \mathbb{E} \int_0^{+\infty} X(s)^T \left(M A_0(u(s)) + A_0(u(s))^T M + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^q A_i(u(s))^T M A_i(u(s)) \right) X(s) ds = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь рассмотрим вспомогательный функционал качества управления $\Gamma : \mathcal{D}_{X_0} \rightarrow \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &:= \mathbb{E}(X_0^T M X_0) + \mathbb{E} \int_0^{+\infty} X(s)^T \left(M A_0(u(s)) + \right. \\ &+ A_0(u(s))^T M + \sum_{i=1}^q A_i(u(s))^T M A_i(u(s)) + F(u(s)) \left. \right) X(s) ds. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в силу равенства (7) и произвольности выбора процесса управления z выполнено следующее важное свойство:

$$\Gamma(z) \equiv J(z), z \in \mathcal{D}_{X_0}, \quad (8)$$

которое не зависит от выбора симметрической матрицы $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$.

Введем в рассмотрение отображение $H : \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$:

$$\begin{aligned} H(v, M) &:= M A_0(v) + A_0(v)^T M + \\ &+ \sum_{i=1}^q A_i(v)^T M A_i(v) + F(v). \end{aligned} \quad (9)$$

С помощью отображения H можно переписать функционал Γ в более компактном виде:

$$\Gamma(z) = \text{tr}[M P_0] + \mathbb{E} \int_0^{+\infty} X(s)^T H(u(s), M) X(s) ds, \quad (10)$$

где $P_0 \in \mathcal{R}^{n \times n}$ — матрица вторых начальных моментов вектора X_0 , $\text{tr}[\cdot]$ — оператор следа матрицы.

3. Стабилизирующий вектор параметров

В данном и следующем разделах будут рассмотрены постоянные по времени стратегии управления $u(t) \equiv v \in \mathcal{R}^m$. При этом будем отождествлять вектор параметров v и соответствующую этому вектору стратегию управления $u(t) \equiv v$ и писать $z = (X, v) \in \mathcal{D}_{X_0}$. Если соответствующая вектору стратегия управления является допустимой или стабилизирующей, то вектор будем также называть допустимым или стабилизирующим соответственно. Множество всех стабилизирующих векторов обозначим $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}^m$, а множество соответствующих процессов управления — $\mathcal{D}_{X_0}^\mathcal{V}$:

$$\mathcal{D}_{X_0}^\mathcal{V} := \{(X, v) : (X, v) \in \mathcal{D}_{X_0}, v \in \mathcal{V}\}.$$

Позже нам потребуется следующий результат, касающийся стабилизирующих векторов.

Лемма 1. Если вектор v является стабилизирующим, то существует неотрицательно определенная симметрическая матрица $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$, которая является единственным решением уравнения

$$MA_0(v) + A_0(v)^T M + \sum_{i=1}^q A_i(v)^T M A_i(v) = -F(v). \quad (11)$$

Линейное матричное уравнение (11) называют обобщенным уравнением Ляпунова, и оно играет ключевую роль при анализе устойчивости уравнения (1). Подробное изучение свойств данного уравнения имеется в монографии [2]. Доказательство леммы 1 приведено в работе [6, стр. 68]. Прямым следствием данной леммы и равенств (8), (9), (10) является следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть имеется процесс управления $z = (X, v) \in \mathcal{D}_{X_0}^v$. Значение критерия $J(z)$ можно вычислить по формуле

$$J(z) = \text{tr}[MP_0], \quad (12)$$

где неотрицательно определенная симметрическая матрица $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$ — единственное решение уравнения (11).

Теперь покажем, что на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^v$ функционал Γ можно представить в виде функции $\hat{\Gamma}$ от переменной v , дифференцируемой на $\mathcal{V}$. Пусть имеется процесс управления $z = (X, u) \in \mathcal{D}_{X_0}$. Известно (см., например, [2, стр. 9]), что матрица вторых начальных моментов $P(t)$ случайной величины $X(t)$ описывается линейным обыкновенным матричным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= A_0(u(t))P(t) + P(t)A_0(u(t))^T + \\ &+ \sum_{i=1}^q A_i(u(t))P(t)A_i(u(t))^T, \quad t \geq 0, \quad P(0) = P_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Предположим, что $u(t) \equiv v \in \mathcal{R}^m$. Проинтегрируем уравнение (13) на интервале $[0, +\infty)$. При этом будем учитывать, что, как следует из условия (2), предел $\|P(t)\| := \left(\sum_{i,j=1}^n P_{ij}^2(t) \right)^{1/2}$ при $t \rightarrow +\infty$ равен нулю. Получим линейное матричное уравнение

$$-P_0 = \tilde{P}A_0(v)^T + A_0(v)\tilde{P} + \sum_{i=1}^q A_i(v)\tilde{P}A_i(v)^T, \quad (14)$$

где $\tilde{P} := \int_0^{+\infty} P(s)ds$.

Далее нам потребуется оператор симметрической векторизации $\text{svec}[\cdot]$, который устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами в $\mathcal{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ и симметрическими матрицами в $\mathcal{R}^{n \times n}$:

$$\text{svec}[P] := (P_{11}, \sqrt{2}P_{21}, \sqrt{2}P_{31}, \dots, \dots, \sqrt{2}P_{n1}, P_{22}, \sqrt{2}P_{32}, \dots, \sqrt{2}P_{n2}, \dots, P_{nn})^T.$$

С помощью оператора симметрической векторизации можно следующим образом определить симметрическое произведение Кронекера матриц. Пусть заданы $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B \in \mathcal{R}^{n \times n}$, тогда симметрическое произведение Кронекера $A \otimes_s B$ — это матрица из $\mathcal{R}^{\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}}$, которая для каждой симметрической матрицы $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ удовлетворяет условию

$$(A \otimes_s B) \text{svec}[P] = \frac{1}{2} \text{svec}[APB^T + BPA^T].$$

Можно показать, что такая матрица существует и единственна. Подробная информация о симметрическом произведении Кронекера содержится в работе [15, стр. 249–255].

Используя симметрическое произведение Кронекера и оператор симметрической векторизации, уравнения (13) и (14) можно переписать в виде линейных векторных уравнений относительно $\text{svec}[P(t)]$ и $\text{svec}[\tilde{P}]$:

$$\begin{aligned} \text{svec}[\dot{P}(t)] &= \Lambda(v) \text{svec}[P(t)], \quad t \geq 0; \\ \text{svec}[P(0)] &= \text{svec}[P_0]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(v) \text{svec}[\tilde{P}] &= -\text{svec}[P_0]; \\ \Lambda(v) &:= 2A_0(v) \otimes_s I + \sum_{i=1}^q A_i(v) \otimes_s A_i(v), \end{aligned} \quad (16)$$

где $I \in \mathcal{R}^{n \times n}$ — единичная матрица. Верны следующие утверждения.

Утверждение 2. Вектор v является стабилизирующим тогда и только тогда, когда вещественные части собственных чисел матрицы $\Lambda(v)$ строго меньше нуля.

Доказательство. Как было отмечено в замечании 1, вектор v является стабилизирующим в том и только в том случае, когда замкнутая система асимптотически устойчива в среднем квадратичном. Как известно (см., например, [2, стр. 11–13]), система (1) асимптотически устойчива в среднем квадратичном, если и только если асимптотически устойчиво матричное дифференциальное уравнение (13) или эквива-

лентная ей система линейных дифференциальных уравнений (15). Из теории устойчивости детерминированных систем хорошо известно, что линейная система с постоянными коэффициентами (15) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда спектр матрицы системы $\Lambda(v)$ принадлежит левой открытой полуплоскости. ■

Утверждение 3. Множество $\mathcal{V}$ является открытым.

Доказательство. Из свойств симметрического произведения Кронекера и дифференцируемости отображений $A_i, i = \overline{1, m}$, по v на $\mathcal{R}^m$ следует, что отображение $\Lambda : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^{\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}}$ также является дифференцируемым по v на $\mathcal{R}^m$. В частности, оно является непрерывным. Из утверждения 2 следует, что при отображении Λ множество $\mathcal{V}$ есть полный прообраз множества асимптотически устойчивых матриц, которое является открытым. Таким образом, множество $\mathcal{V}$ как прообраз открытого множества при непрерывном отображении является открытым. ■

Утверждение 4. Если $v \in \mathcal{V}$, то существует неотрицательно определенная симметрическая матрица $\tilde{P}$, которая является единственным решением уравнения (14). При этом $\tilde{P}$ можно рассматривать как дифференцируемую функцию от v .

Доказательство. Рассмотрим эквивалентное (14) линейное векторное уравнение с постоянными коэффициентами (16). Из утверждения 2 следует, что матрица системы не вырождена и, следовательно, существует единственное решение данного уравнения:

$$\text{svec}[\tilde{P}] = -\Lambda(v)^{-1} \text{svec}[P_0].$$

Полученная таким образом матрица $\tilde{P}$ будет удовлетворять уравнению (14) и по построению является неотрицательно определенной. Более того, в этом случае можно рассматривать $\tilde{P}$ как дифференцируемую функцию от v . Действительно, частные производные $\tilde{P}(v)'_i := \frac{\partial}{\partial v_i} \tilde{P}(v)$, $i = \overline{1, m}$ можно найти из равенств (14) или (16) как производные неявной функции. Продифференцируем, например, (16) по v_i и получим

$$\Lambda(v)'_i \text{svec}[\tilde{P}(v)] + \Lambda(v) \text{svec}[\tilde{P}(v)'_i] = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \text{svec}[\tilde{P}(v)'_i] &= -\Lambda(v)^{-1} \Lambda(v)'_i \text{svec}[\tilde{P}(v)] = \\ &= -\Lambda(v)^{-1} \Lambda(v)'_i \Lambda(v)^{-1} \text{svec}[P_0]. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку по условию задачи отображения $v \mapsto A_i(v)$, $i = \overline{0, q}$, непрерывно дифференцируемы по v , из равенства (17) следует, что частные производные отображения $v \mapsto \tilde{P}(v)$ также являются непрерывными функциями на множестве $\mathcal{V}$. Таким образом, выполняются достаточные условия для того, чтобы отображение $v \mapsto \tilde{P}(v)$ являлось дифференцируемым на множестве $\mathcal{V}$. ■

Пусть $M \in \mathcal{R}^{m \times m}$ — некоторая симметрическая матрица. С помощью интеграла матрицы вторых моментов $\tilde{P}(v)$ мы можем представить функционал Γ на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^\mathcal{V}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \text{tr}[MP_0] + \mathbb{E} \int_0^{+\infty} X(s)^T H(v, M) X(s) ds = \\ &= \text{tr}[MP_0] + \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \text{tr}[H(v, M) X(s) X(s)^T] ds = \\ &= \text{tr}[MP_0] + \text{tr} \left[H(v, M) \int_0^{+\infty} P(s) ds \right] = \\ &= \text{tr}[MP_0] + \text{tr}[H(v, M) \tilde{P}(v)] =: \hat{\Gamma}(v), \end{aligned} \quad (18)$$

где симметрическая неотрицательно определенная матрица $P(v) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ является единственным решением уравнения (14) при данном v . Таким образом, на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^\mathcal{V}$ функционал Γ представим в виде функции $\hat{\Gamma} : \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$, дифференцируемой по v на $\mathcal{V}$. Заметим также, что если v является допустимым вектором, то значение $\hat{\Gamma}(v)$ не зависит от выбора матрицы M .

4. Оптимальный стабилизирующий вектор

Получены следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\bar{z} = (\bar{X}, \bar{v}) \in \mathcal{D}_{X_0}^\mathcal{V}$, который минимизирует критерий (3) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}_{X_0}^\mathcal{V}$:

$$J(\bar{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{X_0}^\mathcal{V}} J(z). \quad (19)$$

Теорема 1. Если процесс управления $z = (X, v) \in \mathcal{D}_{X_0}^\mathcal{V}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^\mathcal{V}$ в задаче (1)–(3), (19), то выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned} \text{tr}[(MA_0(v)'_i + (A_0(v)'_i)^T M + 2 \sum_{j=1}^q (A_j(v)'_i)^T \times \\ \times MA_j(v) + F(v)'_i \tilde{P}(v)] = 0, i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (20)$$

где неотрицательно определенные симметрические матрицы $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$ и $\tilde{P}(v) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ — единственные решения уравнений

$$MA_0(v) + A_0(v)^T M + \sum_{i=1}^q A_i(v)^T MA_i(v) = -F(v); \quad (21)$$

$$\tilde{P}(v)A_0(v)^T + A_0(v)\tilde{P}(v) + \sum_{i=1}^q A_i(v)\tilde{P}(v)A_i(v)^T = -P_0.$$

Доказательство. Пусть процесс управления $z = (X, v) \in \mathcal{D}_{X_0}^v$ является точкой минимума функционала $\hat{\Gamma}$ на $\mathcal{D}_{X_0}^v$. Из леммы 1 и утверждения 4 следует, что найдутся единственные неотрицательно определенные симметрические матрицы $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$ и $\tilde{P}(v) \in \mathcal{R}^{n \times n}$, удовлетворяющие уравнениям (21). При этом выполняется равенство

$$H(v, M) = 0. \quad (22)$$

Ранее было показано, что функционал Γ на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^v$ можно представить в виде функции $\hat{\Gamma}$ от переменной v . При этом процесс управления $z = (X, v) \in \mathcal{D}_{X_0}^v$ является точкой минимума функционала $\hat{\Gamma}$ на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^v$ тогда и только тогда, когда v является точкой минимума функции $\hat{\Gamma}$ на множестве $\mathcal{V}$. Поскольку $\hat{\Gamma}$ дифференцируема на $\mathcal{V}$, и $\mathcal{V}$ является открытым, для точки v выполнены необходимые условия экстремума первого порядка, а именно

$$\hat{\Gamma}(v)'_i = 0, i = \overline{1, m}. \quad (23)$$

С учетом равенства (22) получим

$$\begin{aligned} \Gamma(v)'_i &= \text{tr}[H(v, M)\tilde{P}(v)]'_i = \\ &= \text{tr}[H(v, M)'_i \tilde{P}(v) + H(v, M)\tilde{P}(v)'_i] = \\ &= \text{tr}[H(v, M)'_i \tilde{P}(v)] = \text{tr}[(MA_0(v)'_i + \\ &+ (A_0(v)'_i)^T M + 2 \sum_{j=1}^q A_j(v)'_i)^T MA_j(v) + \\ &+ F(v)'_i] \tilde{P}(v)], i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (24)$$

откуда в совокупности с условием (23) получаем условие (20). ■

Выражение (24) для частных производных функции $\hat{\Gamma}$ может быть применено для построения следующей процедуры градиентного типа. Пусть имеется процесс управления $z^{(l)} = (X^{(l)}, v^{(l)}) \in \mathcal{D}_{X_0}^v$. Тогда мы можем улуч-

шить значение функционала качества, выбрав новый вектор $v^{(l+1)}$ по следующей формуле:

$$v_i^{(l+1)} = v_i^{(l)} - \theta \hat{\Gamma}(v^{(l)})'_i, i = \overline{1, m}, \quad (25)$$

где $\theta > 0$ — достаточно малый шаг.

5. Субоптимальное программное управление

Нахождение оптимального программного управления в задаче (1)–(4) сопряжено с рядом трудностей, и точного численного алгоритма ее решения не известно. Поэтому привлекательными являются приближенные алгоритмы синтеза субоптимальных программных управлений. Отметим тот факт, что полученные выше в теореме 1 условия содержат матрицу P_0 вторых начальных моментов вектора X_0 . Этот факт приводит к идее алгоритма синтеза кусочно-постоянного программного управления, основанного на рекуррентном вычислении стабилизирующего вектора, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Примером такого алгоритма является следующий.

Шаг 1. Задать разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_q < +\infty$ интервала $[0, +\infty)$; $v^{(0)}$ — начальное приближение (стабилизирующий вектор, удовлетворяющий условиям теоремы 1); $\varepsilon > 0$ — параметр алгоритма, отвечающий за условие остановки. Положить номер итерации $l = 0$.

Шаг 2. Вычислить $P(t_{l+1})$, решая задачу Коши (13) на интервале времени $[t_l, t_{l+1})$ при $u(t) \equiv v^{(l)}$ с начальным условием $P(t_l)$, $P(t_0) = P_0$.

Шаг 3. С помощью предложенной выше процедуры в задаче вычислить стабилизирующий вектор $v^{(l+1)}$, удовлетворяющий уравнениям теоремы 1 при $P_0 = P(t_{l+1})$. За начальное приближение алгоритма взять $v^{(l)}$.

Шаг 4. Проверить выполнение условий $\|P(t_{l+1})\| < \varepsilon$ и $l+1 < q$. Если не выполнено, то увеличить l на единицу и перейти к шагу 2. Иначе искомую стратегию $u(t)$ положить равной функции вида

$$u(t) = \begin{cases} v^{(0)}, 0 \leq t < t_1; \\ v^{(1)}, t_1 \leq t < t_2; \\ \dots \\ v^{(l+1)}, t_{l+1} \leq t < +\infty. \end{cases}$$

Полезное свойство данного алгоритма заключается в том, что он является не ухудшающим, т. е. каково бы ни было разбиение интервала времени, значение критерия, соответ-

ствующее найденному управлению u , будет не хуже, чем соответствующее вектору $v^{(0)}$. Кроме того, данный алгоритм отличается относительной простотой производимых вычислений и обладает свойством рекуррентности по времени, т. е. можно проводить расчет в реальном времени. Среди недостатков стоит отметить тот, что результат работы может значительно зависеть от выбора разбиения интервала времени. При этом вопрос выбора наилучшего разбиения остается открытым.

6. Связь с задачей с информационными ограничениями

Полученные результаты могут быть применены в задаче оптимальной стабилизации линейных стохастических систем с мультипликативными возмущениями при наличии информационных ограничений. Рассмотрим данную задачу подробнее. Процесс управления описывается векторным стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dX(t) = (A_0 X(t) + B_0 u(t, Y(t))) dt + \sum_{i=1}^q (A_i X(t) + B_i u(t, Y(t))) dW_i(t), \quad X(0) = X_0, \quad (26)$$

где $t \geq 0$ — время; X — случайный процесс со значениями в $\mathcal{R}^n$; W — стандартный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{R}^q$; $y \mapsto u(t, y) : [0, +\infty) \times \mathcal{R}^p \rightarrow \mathcal{R}^m$ — стратегия управления; $A_i \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathcal{R}^{n \times m}$, $i = \overline{0, q}$ — постоянные матрицы; $Y(t) = CX(t)$, $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$, — измеряемый выход системы. Предполагается, что случайный вектор X_0 не зависит от $W(t)$, $t \geq 0$, и удовлетворяет условию $\mathbb{E} \|X_0\|^2 < +\infty$.

Для того чтобы свести задачу к рассмотренной ранее в данной работе, ограничим множество стратегий управления линейными регуляторами $u(t, y) = -L(t)y$, $L(t) \in \mathcal{R}^{m \times p}$, $t \geq 0$. При этом далее управлением, подлежащим определению, будем считать не u , а L . Заметим, что из описания системы следует, что

$$u(t, Y(t)) = -L(t)CX(t), \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Обозначим $\mathcal{D}_{X_0}$ — множество процессов управления $z = (X, L)$, которые являются парами случайных процессов X и отображений L , таких что

1) отображение $t \mapsto L(t)$ является ограниченным и кусочно-непрерывным на каждом конечном интервале;

2) при заданной стратегии управления $u(t, y) = -L(t)y$ непрерывный случайный процесс X является решением уравнения (26) с заданным начальным условием;

3) выполнено условие (2).

На множестве $\mathcal{D}_{X_0}$ определим функционал $J : \mathcal{D}_{X_0} \rightarrow \mathcal{R}$

$$J(z) = \mathbb{E} \int_0^{+\infty} (X(s)^T Q X(s) + X(s)^T S u(s, Y(s)) + u(s, Y(s))^T S^T X(s) + u(s, Y(s))^T E u(s, Y(s))) ds,$$

который с учетом равенства (27) принимает вид

$$J(z) = \mathbb{E} \int_0^{+\infty} (X(s)^T (Q - SL(s)C - C^T L(s)^T S^T + C^T L(s)^T E L(s)C) X(s)) ds, \quad (28)$$

где $Q \in \mathcal{R}^{n \times n}$ и $E \in \mathcal{R}^{m \times m}$ — симметрические матрицы, $Q \succcurlyeq 0$, $E \succ 0$; матрица $S \in \mathcal{R}^{n \times m}$ удовлетворяет условию $Q - SE^{-1}S^T \succcurlyeq 0$.

Задача состоит в поиске такого процесса управления $\bar{z} = (\bar{X}, \bar{L}) \in \mathcal{D}_{X_0}$, который минимизирует критерий (28) на допустимом множестве:

$$J(\bar{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{X_0}} J(z). \quad (29)$$

Полученная задача (26)—(29) представляет собой частный случай задачи (1)—(4), и к ней могут быть применены предложенные условия оптимальности и процедуры улучшения. В роли компонент оптимизируемого управления u здесь выступают координатные функции отображения $t \mapsto L(t)$. Однако с учетом линейной структуры данной задачи полученные условия оптимальности можно конкретизировать и далее улучшить.

Аналогично тому, как это было проделано выше, далее будут рассмотрены постоянные по времени отображения $L(t) \equiv K \in \mathcal{R}^{m \times p}$, мы будем отождествлять матрицы K и соответствующие постоянные по времени отображения $L(t) \equiv K$ и писать $z = (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0}$. Также будем считать, что понятия допустимого и стабилизирующего управления, определения которых даны в разделе 3, аналогичным образом применимы к отображениям $t \mapsto L(t)$ или матрицам K . Множество стабилизирующих матриц обозначим $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}^{m \times p}$, а множество соответствующих процессов управления $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}} \subset \mathcal{D}_{X_0}$:

$$\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}} := \{(X, K) : (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0}, K \in \mathcal{K}\}.$$

Имеют место следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\bar{z} = (\bar{X}, \bar{K}) \in \mathcal{D}_{X_0}^K$, который минимизирует критерий (28) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}_{X_0}^K$:

$$J(\bar{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{X_0}^K} J(z). \quad (30)$$

Теорема 2. Если процесс управления $z = (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0}^K$ оптимален на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^K$ в задаче (26)–(28), (30), то выполнено условие

$$\left(\left(E + \sum_{i=1}^q B_i^T M B_i \right) K C - \sum_{i=1}^q B_i^T M A_i - S^T - B_0^T M \right) \tilde{P}_K(K) C^T = 0, \quad (31)$$

где неотрицательно определенные симметрические матрицы $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$ и $\tilde{P}(K) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ — единственные решения уравнений

$$\begin{aligned} M A_0^u(K) + A_0^u(K)^T M + \sum_{i=1}^q A_i^u(K)^T M A_i^u(K) &= \\ &= -Q + S K C + C^T K^T S^T - C^T K^T E K C; \\ \tilde{P}_K(K) A_0^u(K)^T + A_0^u(K) \tilde{P}_K(K) + \\ &+ \sum_{i=1}^q A_i^u(K) \tilde{P}_K(K) A_i^u(K)^T = -P_0; \\ A_i^u(K) &:= A_i - B_i K C, i = \overline{0, q}. \end{aligned} \quad (32)$$

Доказательство. Выше отмечалось, что задача (26)–(29) представляет собой частный случай рассмотренной ранее в данной работе задачи (1)–(4).

Действительно, рассмотрим взаимно однозначное отображение $\text{vec} : \mathcal{R}^{m \times p} \rightarrow \mathcal{R}^{mp}$:

$$\text{vec}[K] := (K_{11}, K_{21}, K_{31}, \dots, \dots, K_{m1}, K_{12}, K_{22}, \dots, K_{m2}, \dots, K_{mp})^T, K \in \mathcal{R}^{m \times p}.$$

Обратное к vec отображение обозначим $\text{mat} : \mathcal{R}^{mp} \rightarrow \mathcal{R}^{m \times p}$. Отметим также, что отображения vec и mat являются дифференцируемыми всюду на области определения.

Произвольную матрицу $K \in \mathcal{R}^{m \times p}$ можно считать результатом применения оператора mat к некоторому вектору $v \in \mathcal{R}^{mp}$. Если выполнить в задаче (26)–(29) замену $L(t) = \text{mat}[u(t)]$, $t \geq 0$, где $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}^{mp}$ — ограниченная кусочно-непрерывная на каждом конечном интервале времени функция, мы получаем эквивалентную задачу поиска оптимального управления u ,

которая является частным случаем задачи (1)–(4), в которой

$$\begin{aligned} A_i(v) &= A_i^u(\text{mat}[v]), \quad i = \overline{0, q}; \\ F(v) &= Q - S \text{mat}[v] C - C^T \text{mat}[v]^T S^T + \\ &+ C^T \text{mat}[v]^T E \text{mat}[v] C, v \in \mathcal{R}^{mp}. \end{aligned} \quad (33)$$

Нетрудно видеть, что при этом все утверждения, касающиеся допустимых управлений u и векторов v , полученные в разделе 5, переносятся и на допустимые отображения L и матрицы K соответственно, с точностью до равенств (33). В частности, множество $\mathcal{K}$ как прообраз открытого множества $\mathcal{V}$ при непрерывном отображении vec является открытым. Кроме того, функция $\tilde{P}_K(K) := \tilde{P}(\text{vec}[K])$ как композиция дифференцируемых отображений является дифференцируемым на $\mathcal{K}$ отображением.

Пусть задана некоторая симметрическая матрица $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$. Введем в рассмотрение функцию $\hat{\Gamma}_K : \mathcal{R}^{m \times p} \rightarrow \mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_K(K) &:= \text{tr}[M P_0] + \text{tr}[H_K(K, M) \tilde{P}_K(K)], \\ H_K(K, M) &:= M A_0^u(K) + A_0^u(K)^T M + \\ &+ \sum_{i=1}^q A_i^u(K)^T M A_i^u(K) + Q - S K C - C^T K^T S^T + C^T K^T E K C. \end{aligned}$$

Отметим, что с учетом (33) выполнено равенство

$$\hat{\Gamma}_K(K) = \hat{\Gamma}(\text{vec}[K]), K \in \mathcal{K}. \quad (34)$$

Пусть процесс управления $z = (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0}^K$ оптимален на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^K$ в задаче (26)–(28), (30). Из вышесказанного следует, что вектор $v = \text{vec}[K]$ удовлетворяет условиям теоремы 1. С учетом отношений (33) условия (21) совпадают с условиями (32). Пусть далее матрицы M и $\tilde{P}(K)$ — неотрицательно определенные симметрические матрицы, удовлетворяющие равенствам (32). При этом будет выполнено соотношение

$$H_K(K, M) = 0. \quad (35)$$

Покажем, что условия (20) совпадают с (31). Используя аппарат матричного дифференцирования, с учетом дифференцируемости $\tilde{P}_K(K)$ и с помощью тождества (35) можно найти градиент функции $\hat{\Gamma}_K$ в точке K :

$$\begin{aligned} \nabla \hat{\Gamma}_K(K) &= \left(\left(E + \sum_{i=1}^q B_i^T M B_i \right) K C - \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^q B_i^T M A_i - S^T - B_0^T M \right) \tilde{P}_K(K) C^T. \end{aligned} \quad (36)$$

Из этого выражения и тождества (34) следует, что условия (20) и (31) совпадают. ■

Полученный результат может быть обобщен на задачу стабилизации со структурными ограничениями на матрицу регулятора. Пусть задана матрица $G \in \mathcal{R}^{m \times p}$, состоящая из нулей и единиц.

Определение. Будем говорить, что матрица $K \in \mathcal{R}^{m \times p}$ удовлетворяет структурным ограничениям, если выполнено условие $\text{tr}[G^T K] = 0$. Множество матриц, удовлетворяющих структурным ограничениям, образует подпространство в $\mathcal{R}^{m \times p}$. Обозначим данное множество $\mathcal{S}$.

Множество стабилизирующих матриц, удовлетворяющих структурным ограничениям, обозначим $\mathcal{G}, \mathcal{G} := \mathcal{K} \cap \mathcal{S}$. Будем предполагать, что данное множество не пусто. Множество соответствующих процессов управления обозначим $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}} \subset \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}} \subset \mathcal{D}_{X_0}$:

$$\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}} := \{(X, K) : (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0}, K \in \mathcal{G}\}.$$

Докажем следующие необходимые условия в задаче поиска процесса управления $\bar{z} = (\bar{X}, \bar{K}) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}}$, который минимизирует критерий (28) на суженном множестве допустимых процессов управления $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}}$:

$$J(\bar{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}}} J(z). \quad (37)$$

Теорема 3. Если процесс управления $z = (X, K) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}}$ оптимален на множестве $\mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{G}} \subset \mathcal{D}_{X_0}$ в задаче (26)–(28), (37), то для всех i, j , таких что $G_{ij} = 0$, выполнены условия

$$\left(\left(\left(E + \sum_{i=1}^q B_i^T M B_i \right) K C - \sum_{i=1}^q B_i^T M A_i - S^T - B_0^T M \right) \tilde{P}_{\mathcal{K}}(K) C^T \right)_{ij} = 0,$$

где неотрицательно определенные симметрические матрицы $M \in \mathcal{R}^{n \times n}$ и $\tilde{P}(K) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ — единственные решения уравнений (32).

Доказательство. Множество $\mathcal{G}$ как пересечение открытых множеств является открытым, а функция $\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}$ является дифференцируемой на $\mathcal{K} \supset \mathcal{G}$. Условия (31) в совокупности представляют собой условие равенства проекции градиента (36) на подпространство $\mathcal{S}$. Таким образом, условия теоремы представляют собой необходимые условия экстремума первого порядка функции $\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}$ в точке K . ■

Примером задачи, в которой могут возникнуть структурные ограничения на матрицу регулятора, является задача с информационными ограничениями общего вида. Действительно, пусть заданы числа $p_i > 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m p_i = p$. Определим матрицу $G \in \mathcal{R}^{m \times p}$ следующим образом:

$$G_{ij} = \begin{cases} 0, & \sum_{r=1}^{i-1} p_r < j \leq \sum_{r=1}^i p_r; \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом подпространство $\mathcal{S}$, которое задается матрицей G , состоит из матриц $K \in \mathcal{R}^{m \times p}$, которые можно представить в виде блочной матрицы

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K_m \end{pmatrix}, K_i \in \mathcal{R}^{1 \times p_i}. \quad (38)$$

На содержательном уровне данные информационные ограничения заключаются в том, что каждая компонента управления зависит от своего вектора выхода:

$$u(Y(t)) = (u_1(Y_1(t)), \dots, u_m(Y_m(t)))^T, \quad (39)$$

где $u_i: \mathcal{R}^{p_i} \rightarrow \mathcal{R}; Y_i(t) = C_i X(t), C_i \in \mathcal{R}^{p_i \times n}, i = \overline{1, m}$. Для решения поставленной задачи можно воспользоваться теоремой 3.

Обозначим $\text{pr}[\nabla \hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K)]$ ортогональную проекцию градиента функции $\hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}$ в точке K на подпространство $\mathcal{S}$:

$$\text{pr}[\nabla \hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K)] = \nabla \hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K) - G \circ \nabla \hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K), \quad (40)$$

где $A \circ B \in \mathcal{R}^{m \times p}$ обозначает поэлементное произведение матриц (произведение Адамара). Используя полученные условия оптимальности и выражение для проекции градиента (40), сформулируем следующую процедуру градиентного типа. Пусть имеется процесс управления $z^{(l)} = (X^{(l)}, K^{(l)}) \in \mathcal{D}_{X_0}^{\mathcal{K}}$. Тогда мы можем улучшить значение функционала качества, выбрав новую матрицу $K^{(l+1)}$ по следующей формуле:

$$K^{(l+1)} = K^{(l)} - \theta \text{pr}[\nabla \hat{\Gamma}_{\mathcal{K}}(K^{(l)})] - \gamma G \circ K^{(l)}, \quad (41)$$

где $\theta > 0, \gamma > 0$ достаточно малы. Здесь проекция градиента обеспечивает движение вдоль структурных ограничений, а дополнительное слагаемое обеспечивает сходимость к подпространству $\mathcal{S}$. Такая процедура улучшения имеет существенное преимущество в том, что на-

чальное приближение $K^{(l)}$ может не принадлежать S . Более того, начальным приближением для численного метода на основе данной процедуры может служить управление с полной обратной связью, что существенно упрощает процедуру подбора начального приближения.

Для задач со структурными и информационными ограничениями, так же как это было сделано ранее в работе, можно построить субоптимальное программное управление. Алгоритм построения по своей структуре полностью совпадает с предложенным ранее.

7. Модельный пример

Продemonстрируем применение полученных результатов на модельном примере. Пусть имеется следующая задача оптимальной стабилизации:

$$\begin{cases} dX_1(t) = 2X_2(t)dt + \frac{1}{2}u(t)X_1dW(t), & X_1(0) = 1; \\ dX_2(t) = (-X_1(t) - u(t)X_2)dt, & X_2(0) = 1, t \geq 0; \end{cases}$$

$$J(z) = \mathbb{E} \int_0^{+\infty} ((1 + u(s)^2)X_1^2(s) + X_2^2(s))ds;$$

$$J(\bar{z}) = \min_{z \in \mathcal{D}_{X_0}} J(z).$$

Данная задача является частным случаем задачи (1)–(4). Если мы ограничимся рассмотрением только постоянных стратегий управления $u(t) \equiv v \in \mathcal{R}$, то получим задачу (1)–(3), (19), для которой в разделе 4 получены условия оптимальности и градиентная процедура поиска. Найденное с помощью численного метода постоянное управление u , удовлетворяющее условиям теоремы 1, и соответствующее значение критерия равны

$$u \approx 0,6776, \quad J \approx 6,777.$$

С использованием алгоритма синтеза субоптимального программного управления, предложенного в разделе 5, найдены программная кусочно-постоянная функция управления с одним переключением в момент времени $t_1 = 1,4200$ и значение критерия

$$u(t) = \begin{cases} 0,6776, & 0 \leq t < t_1; \\ 1,2389, & t_1 \leq t < +\infty; \end{cases} \quad J \approx 6,1854.$$

Таким образом, даже используя кусочно-постоянную стратегию управления с одним переключением, удалось значительно улучшить значение критерия.

Заключение

В данной работе был решен ряд вопросов оптимальной стабилизации квазилинейных стохастических систем. Вместе с тем, некоторые вопросы остаются открытыми. Не были получены условия оптимальности программной стратегии управления в задаче раздела 1. Остается нерешенным вопрос о выборе наилучшего разбиения интервала в алгоритме из раздела 5. Также открыты для изучения вопросы оптимальной стабилизации по части координат. В задаче с информационными ограничениями не рассмотрен случай наличия помех в канале измерений. Эти и другие вопросы являются предметом дальнейших исследований в данной области.

Список литературы

1. Wonham W. M. Optimal Stationary Control of a Linear System with State-dependent Noise // *SIAM Journal on Control*. 1967. Vol. 5, Iss. 3. P. 486–500.
2. Damm T. Rational Matrix Equations in Stochastic Control. Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
3. McLane P. J. Optimal Stochastic Control of Linear Systems with State- and Control-dependent Disturbances // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1971. Vol. 16, Iss. 6. P. 793–798.
4. Haussmann U. G. Optimal Stationary Control with State Control Dependent Noise // *SIAM Journal on Control*. 1971. Vol. 9, Iss. 2. P. 184–198.
5. Хрусталеv М. М. Синтез оптимальных и устойчивых управляемых стохастических систем при неполной информации о состоянии на неограниченном интервале времени // *Автоматика и телемеханика*. 2011. № 11. С. 174–190.
6. Халина А. С., Хрусталеv М. М. Оптимизация об-лика и стабилизация управляемых квазилинейных стохастических систем, функционирующих на неограниченном интервале времени // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2017. № 1. С. 65–88.
7. Мильштейн Г. Н. Линейные оптимальные регуляторы заданной структуры в системах с неполной информацией // *Автоматика и телемеханика*. 1976. № 8. С. 48–53.
8. McLane P. J. Linear Optimal Stochastic Control Using Instantaneous Output Feedback // *International Journal of Control*. 1971. Vol. 13, Iss. 2. P. 383–396.
9. Трушкова Е. А. Алгоритмы глобального поиска оптимального управления // *Автоматика и телемеханика*. 2011. № 6. С. 151–159.
10. Tsar'kov K. A., Khrustalev M. M., Rumyantsev D. S. Optimization of Quasilinear Stochastic Control-nonlinear Diffusion Systems // *Automation and Remote Control*. 2017. Vol. 78, Iss. 6. P. 1028–1045.
11. Oegin E., Khrustalev M. The Optimal Disturbance Suppression Problem on the Infinite Time Interval for Quasilinear Stochastic Systems with Output Feedback // *In Proc. 13th Int. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conf.)*. 2016. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7541193>.
12. Oegin E., Khrustalev M. Optimal Stabilisation of a Quasilinear Stochastic System with Controllable Parameters // *In Proc. 14th Int. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conf.)*. 2018. URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8408384>.

13. **Хрусталеv М. М.** Условия равновесия по Нэшу в стохастических дифференциальных играх при неполной информированности игроков о состоянии // Известия Российской академии наук, Ч. 1. 1995. № 6. С. 194—208; Ч. 2. 1996. № 1. С. 72—79.

14. **Øksendal B.** Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Springer, Berlin Heidelberg, 2003.

15. **Etienne de Klerk.** Aspects of Semidefinite Programming. Springer US, 2002.

Optimal Stabilization Problem for the Quasilinear System with Controllable Parameters

E. E. Onegin, evgeny.onegin@phystech.edu,

Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997, Russian Federation

Corresponding author: **Onegin Evgeny E.**, Junior Researcher, Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 117997, Moscow, Russian Federation, e-mail: evgeny.onegin@phystech.edu

Accepted on June 23, 2019

Abstract

The main concern of this paper is the problem of optimal stabilization of a quasilinear stochastic system with controllable parameters. Systems of this type are described by linear stochastic differential equations with multiplicative noises whose matrices, in general case, are nonlinear functions of control. The performance criterion is a modification of the classic quadratic performance cost. The goal is to minimize the criterion on the set of admissible control processes. This formulation of the problem is interesting because it allows us to study a wide range of optimization problems of linear systems with multiplicative perturbations, including: optimization of design parameters of the system, the problem of optimal stabilization under constraints on the gain matrix of the linear regulator in the form of inequalities, the problem of optimal stabilization of linear stochastic systems under information constraints. The main result of this paper is the necessary conditions for the optimal vector in the problem of stabilization of a quasilinear stochastic system with controllable parameters. The numerical gradient-type procedure for synthesis of the optimal stabilizing vector is also proposed. In addition, using obtained results we construct the algorithm for synthesis of a suboptimal time-dependent control. The result of the proposed algorithm is piecewise constant control, which gives the value of the criterion is guaranteed not worse than for the optimal stabilizing vector. This algorithm is relatively simple and one may use it for calculations in real time. The obtained results are applied to the problem of optimal stabilization under information constraints, in which the necessary optimality conditions are also obtained and the gradient-type procedure for the synthesis of the optimal control is proposed. The use of the obtained results is demonstrated by a model example.

Keywords: continuous stochastic systems, systems with controllable parameters, quadratic criterion, optimal stabilization, linear systems with multiplicative noise, information constraints

For citation:

Onegin E. E. Optimal Stabilization Problem for the Quasilinear System with Controllable Parameters, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 10, pp. 589—599.

DOI: 10.17587/mau.20.589-599

References

1. **Wonham W. M.** Optimal Stationary Control of a Linear System with State-dependent Noise, *SIAM Journal on Control*, 1967, vol. 5, iss. 3, pp. 486—500.
2. **Damm T.** Rational Matrix Equations in Stochastic Control. Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
3. **McLane P. J.** Optimal Stochastic Control of Linear Systems with State- and Control-dependent Disturbances, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, iss. 6, pp. 793—798.
4. **Hausmann U. G.** Optimal Stationary Control with State Control Dependent Noise, *SIAM Journal on Control*, 1971, vol. 9, iss. 2, pp. 184—198.
5. **Khrustal'ov M. M.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 2011, no. 11, pp. 174—190 (in Russian).
6. **Khalina A. S., Khrustal'ov M. M.** Optimizatsiya oblika i stabilizatsiya upravlyaemykh kvazilineynykh stokhasticheskikh sistem, funkcioniruyushchikh na neogranichenom intervale vremeni, *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2017, no. 1, pp. 65—88 (in Russian).

7. **Mil'shtejn G. N.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 1976, no. 8, pp. 48—53 (in Russian).

8. **McLane P. J.** Linear Optimal Stochastic Control Using Instantaneous Output Feedback, *International Journal of Control*, 1971, vol. 13, iss. 2, pp. 383—396.

9. **Trushkova E. A.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 2011, no. 6, pp. 151—159 (in Russian).

10. **Tsar'kov K. A., Khrustalev M. M., Rumyantsev D. S.** Optimization of Quasilinear Stochastic Control-nonlinear Diffusion Systems, *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, iss. 6, pp. 1028—1045.

11. **Onegin E., Khrustalev M.** The Optimal Disturbance Suppression Problem on the Infinite Time Interval for Quasilinear Stochastic Systems with Output Feedback, *In Proc. 13th Int. Conf. Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conf.)*, 2016, available at: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7541193>.

12. **Onegin E., Khrustalev M.** Optimal Stabilisation of a Quasilinear Stochastic System with Controllable Parameters, *In Proc. 14th Int. Conf. "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems" (Pyatnitskiy's Conf.)*, 2018, available at: <https://ieeexplore.ieee.org/document/8408384>.

13. **Khrustal'ov M. M.** *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk*, Part 1, 1995, no. 6, pp. 194—208; Part 2, 1996, no. 1, pp. 72—79 (in Russian).

14. **Øksendal B.** Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications, Springer, Berlin Heidelberg, 2003.

15. **Etienne de Klerk.** Aspects of Semidefinite Programming, Springer US, 2002.

А. В. Гулай, канд. техн. наук, зав. кафедрой, is@bntu.by, В. М. Зайцев, канд. техн. наук, доц., is@bntu.by,
Белорусский национальный технический университет, Минск

Интеллектуальная мехатронная система как адаптивная модель "управляемой конструкции"

Изложены принципы построения интеллектуальной модели, имитирующей процессы управляемых переходов между оптимальными состояниями "управляемой конструкции" при наличии НЕ-факторов. Проанализирован процесс идентификации состояний изучаемой конструкции, предполагающий сопоставление текущих значений ее параметров, соответствующих микросостояниям информационного образа, с классификационными параметрами заранее выделенного множества таксонов микросостояний. Представлены примеры выполнения интеллектуальной модели механической конструкции в виде цифровых регуляторов для управления исполнительным механизмом системных реакций.

Ключевые слова: "управляемая конструкция", интеллектуальная модель, идентификация состояний, таксономическая схема, импульсный регулятор

Введение

Развитие вычислительной техники, методов цифрового преобразования сигналов, алгоритмов обработки данных и знаний обусловило эффективное внедрение аппаратно-программных средств со свойствами искусственного интеллекта в технологии моделирования сложных систем. Интеллектуальные цифровые модели для исследования поведения объектов в неоднозначных, неопределенных и неконтролируемых условиях постепенно приходят на смену традиционным устройствам диагностики и прогнозирования как аналогового, так и цифрового типа. На учете указанных условий работы конкретных изучаемых объектов и анализе результатов имитации их характеристик базируется развиваемый авторами адаптивный подход к синтезу интеллектуальных цифровых моделей [1, 2]. Этот подход полностью сохраняет свою значимость при построении интеллектуальных систем для моделирования управляемых механических конструкций.

"Управляемая конструкция" в контексте предлагаемого исследования представляет собой механическую систему, которая, реагируя на внешнее воздействие, спонтанно (самопроизвольно) переходит из одного устойчивого состояния в другое. Характерная особенность объекта "управляемая конструкция" заключается в том, что он при внешнем воздействии

(функциональном или энергетическом) автоматически находит другое рациональное (возможно, оптимальное) состояние и фактически адаптируется к внешней нагрузке. При этом функциональные или энергетические рациональные состояния "управляемой конструкции" представляют собой набор ее надсистемных параметров и характеристик, которые обладают свойством количественной или качественной оценки.

Вызывает особый интерес опыт исследования "управляемой конструкции" при использовании электронной модели для определения ее надсистемных свойств [3]. При невозможности сенсорного контроля параметров "управляемой конструкции" (например, в зонах радиационного и химического загрязнения, в космосе, под водой или при отсутствии доступа к ней по иным причинам) вполне эффективно применение ее интеллектуальной модели в исследовательском процессе. В этом случае одной из основных проблем является задача анализа и моделирования с помощью интеллектуальной системы процесса идентификации состояний "управляемой конструкции" в рабочем режиме.

Целесообразно оснащение создаваемой модели высокоскоростными процессорами, развитым программным обеспечением, экспертными (обучающими) таблицами влияния значений системных параметров на характер поведения и конечные результаты работы. Указанная модель

реализует процедуры с четкими и нечеткими логическими продукционными правилами. Такой подход к построению модели "управляемой конструкции" позволяет представить ее как интеллектуальную цифровую мехатронную систему. Потенциально интеллектуальная система способна обеспечивать моделирование рациональных, а в ряде случаев даже оптимальных решений для достижения конечных надсистемных результатов функционирования объекта. Она позволяет изучать рабочие режимы целенаправленного преобразования вещества, энергии и информации.

Построение модели на основе компонентов со свойствами искусственного интеллекта дает возможность исследовать функциональную и энергетическую эффективность "управляемой конструкции" в условиях наличия различных НЕ-факторов. К ним относятся: неточности в определении текущих значений внешних и внутренних параметров; несоблюдение постоянства условий функционирования; неполнота или приблизительность описаний возможных системных состояний; нелинейности с большим числом интервалов кусочно-линейной аппроксимации; неработоспособность отдельных системных составных частей [4]. Эффективное наличие НЕ-факторов существенно отягощает или делает невозможной предварительную строгую и точную выработку решений на основе использования аналитических методов, при этом сами решения на практике оказываются крайне "хрупкими".

Интеллектуальная модель "управляемой конструкции": анализ процесса ее функционирования

Анализ вариантов реализации в интеллектуальной модели процессов изменения состояний показывает, что в большинстве случаев эти процессы целесообразно строить по общей адаптивной схеме в виде циклически повторяемых блоков определенных системных операций. В каждом цикле вырабатывается управленческое решение, которое должно обеспечивать либо сохранение текущего состояния конструкции, либо ее перевод из текущего состояния в иное состояние, которое должно быть физически достижимым и по логике функционирования (или по предварительным оценкам экспертов) считается более рациональным и предпочтительным. Необходимо, чтобы оцен-

ка текущего системного состояния в отдельных циклах управления была, по возможности, достоверной и правдоподобной, не противоречила сформированному текущему информационному образу "управляемой конструкции" при конкретных условиях функционирования и являлась бы первичной в блоке причинно-следственных системных операций каждого цикла.

Совокупность системных операций по оценке текущих состояний "управляемой конструкции" в конкретных условиях функционирования можно определить с помощью понятия "идентификации (классификации) состояний" [5, 6]. Важнейшей задачей в данном случае является выбор средств математического описания процессов идентификации состояний и создание соответствующих адекватных моделей. Используемые на практике модели процессов идентификации состояний отличаются разнообразием форм, глубиной детализации совокупностей исходных параметров и их представлением в виде информационных образов. Конкретные модели "управляемой конструкции" могут иметь различный уровень формализации, который определяется информационными потребностями решаемых исследовательских задач.

Различные методы и приемы идентификации состояний применяются как на стадии создания интеллектуальной модели "управляемой конструкции", так и на этапе ее эксплуатации. В качестве указанных методов может рассматриваться формализация структурных схем, различные системные соотношения в форме операторных, алгебраических, дифференциальных, интегральных и иных уравнений, передаточные и весовые функции, графы. Эти методы позволяют функционально связать входные переменные, отображающие внешние воздействия, с выходными переменными и параметрами внутренних состояний "управляемой конструкции". В частности, один из возможных вариантов построения экспертных логико-вероятностных связей в интеллектуальной системе для подобных случаев управления рассмотрен в работе [1].

Наиболее результативным эффектом обладают методы, основанные на хорошо известной технологии структурно-функциональной декомпозиции изучаемой системы. При этом моделируемая система представляется в виде наборов составных частей, свойства и математические описания которых известны из ранее накопленного опыта системного анализа и практических наблюдений. Корректное объе-

динение указанных математических описаний определяет аналитическую модель процесса идентификации системы в целом [7, 8]. В ряде случаев из-за отсутствия достаточного количества необходимых сведений построение аналитического описания нуждается в привлечении дополнительного экспериментального материала и экспертных сведений [9—11]. Адаптивная модель процессов идентификации состояний и циклов функционирования "управляемой конструкции" в виде интеллектуальной мехатронной системы показана на рис. 1.

Процессы идентификации состояний могут рассматриваться как некоторая совокупность правил и операторов, в соответствии с которыми на основании отдельных параметров информационного образа "управляемой конструкции" устанавливается ее текущее системное состояние [12—14]. Информационные образы системотехнической ситуации в каждом цикле управления естественно оценивать текущими значениями моделируемых параметров, которые входят в состав фазовых координат, образующих текущие информационные векторы X_t интеллектуальной цифровой мехатронной системы:

$$X_t^T = (x_{t1}, x_{t2}, x_{t3}, \dots, x_{ti}, \dots, x_{tn}),$$

где T — операция транспонирования; n — число параметров; t — указатель времени.

Мгновенные значения отдельных координат x_{ti} характеризуют соответствующие микросостояния информационного образа системы,



Рис. 1. Адаптивная модель "управляемой конструкции" в виде интеллектуальной мехатронной системы

Fig. 1. The adaptive model of "controlled mechanical construction" in the form of an intellectual mechatronic system

которые имеют существенную системную значимость, в связи с чем их называют признаками идентификации или классификации [8]. В состав векторов X_t^T (в терминологии Р. Эшби) должны включаться только "главные параметры", число которых необходимо и достаточно для решения требуемого набора задач логико-программного управления. На стадии системного анализа для построения векторов X_t^T целесообразно применять реальные параметры, которые фактически могут быть измерены и зафиксированы с помощью сенсорной аппаратуры и вычислительного оборудования, или надсистемные параметры, которые могут быть рассчитаны на основе описаний системы.

Значения виртуальных параметров и характеристик рассчитываются на основе реальных параметров непосредственно в процессе функционирования системы. Если ошибками определения значений некоторого параметра можно пренебречь, то параметр может считаться детерминированным. Вероятностные параметры имеют случайные значения, и их оценка проводится с такими ошибками, что по результатам этих операций невозможно определенно сказать, какое истинное числовое значение приняла данная величина.

Будем полагать, что первая группа из q линейно независимых координат x_{ti} вектора X_t^T с номерами $i = 1, 2, 3, \dots, q$ образует подмножество координат вектора входных переменных:

$$X_{t \text{ вх}}^T = (x_{t1}, x_{t2}, x_{t3}, \dots, x_{tq}).$$

Вторая группа из r координат x_{ti} вектора X_t^T с номерами $i = q + 1, q + 2, q + 3, \dots, q + r$ образует подмножество координат вектора выходных переменных системы

$$X_{t \text{ вых}}^T = (x_{t(q+1)}, x_{t(q+2)}, x_{t(q+3)}, \dots, x_{t(q+r)}).$$

Третья группа из s координат x_{ti} вектора X_t^T с номерами $i = q + r + 1, q + r + 2, q + r + 3, \dots, q + r + s$ отображает подмножество координат вектора переменных внутренних состояний:

$$X_{t \text{ сост}}^T = (x_{t(q+r+1)}, x_{t(q+r+2)}, x_{t(q+r+3)}, \dots, x_{t(q+r+s)}).$$

В данном случае очевидно выполнение следующего условия:

$$X_{t \text{ вх}}^T \cup X_{t \text{ вых}}^T \cup X_{t \text{ сост}}^T = X_t^T,$$

где $\cup$ — операция объединения указанных координатных множеств.

Процесс идентификации предполагает сопоставление текущих значений контролируемых параметров, соответствующих микросостояниям информационного образа, с классификационными параметрами некоторого заранее выделенного множества таксонов микросостояний $\{S_{ij}; i = 1, 2, \dots, q, q + 1, q + 2, \dots, q + r, q + r + 1, \dots, n\}$. Здесь $(n - q + 1)$ — число выходных параметров и параметров внутренних состояний, входящих в информационный образ, $j = 1, 2, \dots, m$; m — число типов таксонов, применяемых для оценки микросостояний и общего текущего состояния.

Каждый из таксонов объединяет микросостояния с близкими свойствами, которые характеризуются некоторыми значениями той или иной системной фазовой координаты и требуют выработки и последующей реализации однотипных управленческих воздействий [8, 10]. Число возможных микросостояний в пределах одного таксона бесконечно.

Полноценная идентификация достигается при использовании таксономической схемы, предполагающей применение таксонов пяти основных видов ($m = 5$), которым может быть приписан следующий системотехнический смысл:

- таксоны $\{S_{i1}\}, \{S_{i5}\}, i = 1, 2, \dots, n$, соответствуют выработке экстренных управленческих решений и воздействий по каждому из контролируемых параметров i -го типа при достижении этим параметром соответствующей ему верхней или нижней аварийной границы;
- таксоны $\{S_{i2}\}, \{S_{i4}\}$ предусматривают выработку штатных предупредительных управленческих решений и воздействий по каждому из контролируемых параметров i -го типа при достижении этим параметром соответствующей ему верхней или нижней предупредительной границы;
- таксоны $\{S_{i3}\}$ являются таксонами предпочтительных системотехнических микросостояний, в которых предполагается принятие штатных управленческих решений и формирование воздействий по контролируемому параметру i -го типа либо в целях обеспечения требуемых законов его изменения, либо в целях сохранения его текущего значения.

Общее число возможных идентифицируемых системных состояний интеллектуальной цифровой мехатронной системы при использовании этой таксономической схемы равно 5^n . Возможно дополнительное введение иных по смыслу таксонов, представляющих системотехнический интерес для выработки решений

в условиях различных комбинаций параметров состояния. Расширение состава таксонов, как правило, обеспечивает уменьшение уровней рисков и выработку системой более обоснованных и адекватных решений, но сопровождается естественным возрастанием размерности требуемых для этого базовых информационно-логических условий.

Если признаки идентификации имеют количественные выражения, то для описания таксонов микросостояний с помощью знаний и опыта экспертов предварительно для каждого параметра i -го типа требуется установить диапазоны значений, соответствующие таксонам $\{S_{ij}\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\{(\alpha_{i1 \min}, \alpha_{i1 \max}); (\alpha_{i2 \min}, \alpha_{i2 \max}); (\alpha_{i3 \min}, \alpha_{i3 \max}); (\alpha_{i4 \min}, \alpha_{i4 \max}); (\alpha_{i5 \min}, \alpha_{i5 \max})\}.$$

В общем случае эти диапазоны значений могут перекрываться, создавая зоны дополнительной неопределенности.

При вероятностном подходе обычно на основе предварительного исследования изучаемых процессов и по результатам анализа экспериментальных данных оцениваются функции $f_{ij}(x)$ плотности распределения значений параметров x_{ii} в обобщенных диапазонах $(\alpha_{i1 \min}, \alpha_{i5 \max})$. В этом случае могут быть рассчитаны точки $\alpha_{ij \text{ med}}$ абсцисс медианы распределения значений параметров x_i внутри диапазона таксонов соответствующих микросостояний:

$$\int_{\alpha_{ij \min}}^{\alpha_{ij \text{ med}}} f_{ij}(x) dx = \int_{\alpha_{ij \text{ med}}}^{\alpha_{ij \max}} f_{ij}(x) dx = 0,5.$$

При использовании в процессе моделирования алгоритмов нечеткой логики на основе знаний экспертов оцениваются функции $\phi_{ij}(x)$ принадлежности значений параметров x_{ii} к координатным диапазонам. Принадлежность значения параметра x_{ii} таксону микросостояния S_{ij} устанавливается исходя из следующего условия:

$$\alpha_{i1 \min} \leq x_{ii} \leq \alpha_{i5 \max}.$$

В алгоритмах классификации в качестве меры близости результатов измерения значений параметра x_{ii} таксону микросостояний S_{ij} возможно применение метрики квадратов расстояния до абсцисс медиан интервалов [10]:

$$x_{ii}(\rho_{ij}) \cup S_{ij}, \text{ если } \rho_{ij} = \min\{(\alpha_{ij \text{ med}} - x_{ii})^2\}.$$

Таким образом, каждому измеренному или рассчитанному текущему значению параметра x_{ji} может быть поставлен в соответствие один из пяти таксонов микросостояния S_{ji} или один из трехпозиционных битовых номеров логического кодирования таксонов $LC_{ji} = 001; 010; 011; 100; 101$. Значение $LC_{ji} = 000$ чаще всего используется для указания факта потери достоверности (системной значимости) результата текущего измерения параметра x_{ji} и невозможности его отнесения к тому или иному таксону S_{ji} . При попадании результатов измерений в равноудаленные точки перекрывающихся диапазонов 001; 010; 011 предпочтение следует отдавать диапазону с меньшим номером, а при попадании результатов в равноудаленные точки перекрывающихся диапазонов 011; 100; 101 предпочтение отдается диапазону с большим номером.

Номера логического кодирования таксонов позволяют составить конкатенацию длиной в $3n$ бит. Эта конкатенация может рассматриваться как ключевой код текущего состояния интеллектуальной мехатронной системы:

$$LC_i = LC_{i1} LC_{i2} LC_{i3} \dots LC_{in} \dots LC_{im}.$$

Формирование множества конкатенаций в пространстве таксонов на логико-алгебраической основе соответствует построению границ разбиений возможных состояний интеллектуальной цифровой мехатронной системы и, следовательно, схем рационального или оптимального системного поведения и требуемых сценариев реализации управленческих операций. Обычно эти границы называются решающими границами системотехнических состояний.

В объеме поставленной задачи значительный интерес представляет вопрос о применении сценария управления в интеллектуальной мехатронной системе, который отображает переходы между оптимальными состояниями "управляемой конструкции" под действием внешних факторов. С учетом этого рассмотрен пример выполнения интеллектуальной модели "управляемой конструкции" в виде импульсного регулятора для управления исполнительным механизмом системных реакций.

Оценка состояний "управляемой конструкции" с использованием интеллектуальной системы

Эффективная реализация управления адаптивным изменением состояний в интеллектуальной модели "управляемой конструкции" мо-

жет быть достигнута за счет предварительного синтеза и оперативного применения продукционных конструкций вида ЕСЛИ (IF) <антецедент> ТО (THEN) <консеквент>. Множество антецедентов и соответствующих им консеквентов из библиотеки продукций фактически определяет набор управленческих сценариев. Он может устанавливаться и модифицироваться в зависимости от желаемых конечных результатов функционирования интеллектуальной цифровой мехатронной системы с помощью обучающей матрицы, вводимой в систему в технологическом режиме. В основе управления выходными параметрами интеллектуальной цифровой мехатронной системы лежат программные блоки дискретного функционального преобразования входных переменных, блоки автоматического и терминального операторного регулирования, а также логико-программного управления.

Если в силу конечной надежности информационных трактов одна или несколько триад в конкатенации принимает нулевое значение $LC_{ji} = 000$, то наблюдается потеря достоверности (системной значимости) соответствующими параметрами x_{ji} . При этом все вычисления и преобразования, в которых используются эти параметры, должны блокироваться. С учетом такой ситуации в состав интеллектуальной мехатронной системы целесообразно предварительное введение таблиц параметров x_{ji} , для которых потеря значимости должна сопровождаться реализацией сценария с обязательным информированием оператора системы (исследователя) о сложившемся положении и последующим безусловным выполнением функционального контроля информационных каналов. Решение о продолжении функционирования системы возлагается на оператора.

Если одна или несколько триад в конкатенации принимают значения 001 или 101, то констатируется переход этими параметрами через установленные границы аварийной сигнализации. Все вычисления и преобразования, в которых используются указанные параметры, должны блокироваться. Сценарий функционирования системы предусматривает обязательное информирование оператора о сложившейся ситуации и принудительный плавный переход на ручной режим управления по группам заранее определенных выходных параметров, а также параметров внутренних состояний. Возвращение к автоматическому режиму управления должно выполняться в данном случае по командам оператора.

Коды 010 и 100 указывают на наличие в системе негативных тенденций с переходом тех или иных параметров через границы предупредительных диапазонов. Блокировку вычислений и преобразований в этих случаях проводить не требуется, но оператор системы оповещается о зарождении и развитии указанных тенденций. Код 011 предполагает функционирование системы с выработкой управленческих решений для обеспечения требуемых законов изменения или сохранения значений соответствующего параметра или группы параметров.

Для линейных и линеаризованных систем переход от дифференциальных уравнений к их операторной форме с использованием прямого преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях дает следующий типовой результат [15]:

$$pX_{t \text{ соот}}(p) = AX_{t \text{ соот}}(p) + BX_{t \text{ вх}}(p);$$

$$X_{t \text{ вх}}(p) = CX_{t \text{ соот}}(p).$$

Здесь A , B , C — системные матрицы преобразования фазовых координат, получаемые аналитическим, экспериментальным или экспертным путем, в том числе методом моделирования или исследования системных аналогов.

Это позволяет преобразовать операторные уравнения в уравнения выходов и состояний:

$$X_{t \text{ вх}}(p) = G(p)X_{t \text{ вх}}(p), X_{t \text{ соот}}(p) = H(p)X_{t \text{ вх}}(p),$$

где $G(p) = CB(pI - A)^{-1}$ — операторная матрица выходов; $H(p) = B(pI - A)^{-1}$ — операторная матрица состояний; I — единичная матрица. Матрицы $G(p)$, $H(p)$ называются передаточными, так как их элементами являются передаточные функции, которые отображают уровни влияния тех или иных входных переменных на выходные параметры или на переменные внутренних состояний:

$$x_{t \text{ вх } j}(p) = G_{j1}(p)x_{t \text{ вх } 1}(p) + G_{j2}(p)x_{t \text{ вх } 2}(p) + \dots + G_{jq}(p)x_{t \text{ вх } q}(p), j = 1, 2, \dots, r;$$

$$x_{t \text{ соот } k}(p) = H_{k1}(p)x_{t \text{ вх } 1}(p) + H_{k2}(p)x_{t \text{ вх } 2}(p) + \dots + H_{kq}(p)x_{t \text{ вх } q}(p), k = 1, 2, \dots, s.$$

Внедрение цифровых методов обработки и преобразования сигналов открывает реальные перспективы практического применения математического аппарата передаточных матриц, который обеспечивает дальнейшее расширение алгоритмических возможностей по учету и реализации многопараметрических функциональных связей в интеллектуальной циф-

ровой мехатронной системе. Поскольку перевод во временную область координат векторов $X_{t \text{ вх}}(p)$, $X_{t \text{ соот}}(p)$ соответствует выполнению операций суммирования результатов дискретных сверток координатных импульсных характеристик в решетчатой форме $g_{ji}(n, \Delta t)$, $h_{ki}(n, \Delta t)$ и соответствующих им отсчетов $x_{\text{вх } i}(n, \Delta t)$ фазовых координат, то с помощью программных средств возможно выполнение следующих расчетных операций:

$$x_{t \text{ вх } j}(n, \Delta t) = \sum_{i=1}^r \sum_{m=0}^n g_{ji}(n, \Delta t)x_{\text{вх } i}(n-m, \Delta t);$$

$$x_{t \text{ соот } k}(n, \Delta t) = \sum_{i=1}^r \sum_{m=0}^n h_{ki}(n, \Delta t)x_{\text{вх } i}(n-m, \Delta t).$$

Эти операции в библиотеках известных типов контроллеров, как правило, не предусматриваются, поскольку обладают сравнительно высокой вычислительной емкостью. Выполнение таких операций требует применения в составе интеллектуальных цифровых мехатронных систем вычислительного оборудования с адекватной общей производительностью, методика определения и выбора которой представлена в работе [16].

Если установлено, что некоторая координата $x_{t \text{ вх } i}$ не оказывает влияния на координаты векторов $X_{t \text{ вх}}$ или $X_{t \text{ соот}}$, то полагается $G_{ji}(p) = 0$ или $H_{ki}(p) = 0$. Численный метод перехода от передаточных функций $G_{ji}(p)$, $H_{ki}(p)$ к решетчатым оригиналам импульсных характеристик $g_{ji}[n, \Delta t]$, $h_{ki}[n, \Delta t]$ предложен в работе [17]. Этот переход целесообразно выполнять в интеллектуальной модели "управляемой конструкции" в технологическом режиме с одновременным формированием и усечением табулированных оригиналов указанных импульсных характеристик.

Одним из основных компонентов интеллектуальной модели "управляемой конструкции" является импульсный регулятор для управления исполнительным механизмом системных реакций. Построение импульсных регуляторов предполагает использование схемы формирования виртуального значения сигнала рассогласования $r_x[n, \Delta t]$ между текущим значением входного сигнала $X[n, \Delta t]$ и его некоторым значением X^* , которое определяется задатчиком интеллектуальной системы [15]. Рассогласование подвергается дискретной свертке с табулированным и усеченным оригиналом требуемой импульсной характеристики.

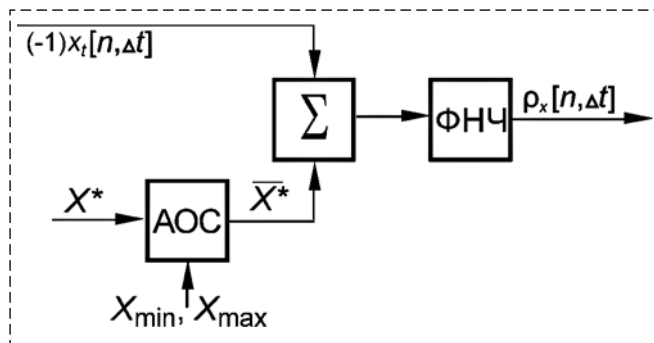


Рис. 2. Схема формирования виртуального значения сигнала рассогласования $\rho_x[n, \Delta t]$

Fig. 2. The formation scheme of the virtual value of the error signal $\rho_x[n, \Delta t]$

Схема формирования сигнала рассогласования представлена на рис. 2. При формировании сигнала рассогласования наряду с сумматором (Σ) дополнительно применяются блоки амплитудного ограничения задающего сигнала (АОС) и фильтрации нижних частот выходного сигнала (ФНЧ). Функционирование этих блоков обеспечивается заданием параметров настройки: для блока ограничения сигнала — $X_{\min}$, $X_{\max}$ (минимальное и максимальное значения сигнала); для фильтра нижних частот — k_ϕ , T_ϕ (коэффициент передачи и постоянная времени). Блок ограничения задающего сигнала реализует следующий алгоритм:

ЕСЛИ (IF) $X_{\min} \leq X^* \leq X_{\max}$ ТО (THEN) $\bar{X}^* = X^*$;

ЕСЛИ (IF) $X_{\min} < X^*$ ТО (THEN) $\bar{X}^* = X_{\min}$;

ЕСЛИ (IF) $X_{\max} > X^*$ ТО (THEN) $\bar{X}^* = X_{\max}$,

где $\bar{X}^*$ — сигнал, ограниченный по амплитуде. Передаточная функция фильтра нижних частот имеет следующий вид:

$$W_\phi(p) = k_\phi / (T_\phi + 1).$$

Сигнал рассогласования при этом равен:

$$\begin{aligned} \rho_x^*[n, \Delta t] &= \bar{X}^* + (-1)X_t[n, \Delta t]; \\ \rho_x[n, \Delta t] &= \sum_{m=0}^n \rho_x^*[n, \Delta t] W_\phi[n-m, \Delta t], \end{aligned}$$

где $W_\phi(t) = L^{-1}\{W_\phi(p)\}$; L^{-1} — оператор обратного преобразования Лапласа.

В ряде случаев удастся построить более простые и экономичные рекуррентные соотношения для выполнения расчетов по значениям рассогласований $\rho_x[n, \Delta t]$. Примером

может служить построение модели на основе цифровых пропорциональных интегрально-дифференциальных (ПИД) регуляторов. В таком случае может применяться не дискретная свертка сигнала рассогласования $\rho_x[n, \Delta t]$ и импульсной характеристики данного регулятора (последняя определяется обратным преобразованием Лапласа от передаточной функции $W(p) = K_p + K_i(T_i p)^{-1} + K_d(T_d p + 1)^{-1}$, а следующее рекуррентное соотношение:

$$x_{it}[n+1, \Delta t] \approx x_{it}[n, \Delta t] + k_1\{\rho_x[n, \Delta t] - \rho_x[n-1, \Delta t]\} + k_2\rho_x[n, \Delta t] + k_3\{\rho_x[n, \Delta t] - 2\rho_x[n-1, \Delta t] + \rho_x[n-2, \Delta t]\},$$

где $k_1 = K_p$; $k_2 = K_i \Delta t T_i^{-1}$; $k_3 = K_d T_d \Delta t^{-1}$ — обобщенные константы регулятора. Здесь используются следующие условные обозначения: K_p — коэффициент передачи по постоянной составляющей; K_i , T_i — соответственно коэффициент передачи и постоянная времени интегрирующей части регулятора; K_d , T_d — соответственно коэффициент передачи и постоянная времени дифференцирующей части регулятора.

Схема возможного построения процесса выработки управленческих (выходных) значений параметров для данного случая приведена на рис. 3. Функции, реализуемые блоками цифрового ПИД регулятора, поясняются соответствующими математическими выражениями, представленными на схеме. В регуляторе используются следующие параметры настройки: σ , k_1 , k_2 , k_3 , $\bar{\rho}_x[-1, \Delta t] = \bar{\rho}_x[-2, \Delta t] = 0$. Для предотвращения "дребезга" регулятора в его состав введен блок обработки зоны нечувстви-

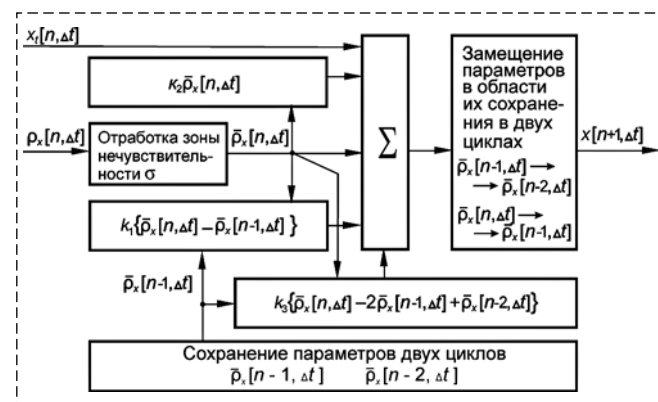


Рис. 3. Схема формирования выходного параметра $x[n+1, \Delta t]$ цифровым пропорциональным интегрально-дифференциальным регулятором

Fig. 3. The scheme of output parameter formation $x[n+1, \Delta t]$ by the digital proportional integral-differential controller

тельности, который реализует следующий алгоритм:

ЕСЛИ (IF) $|\rho_x[n, \Delta t]| \leq \sigma$ ТО (THEN)
 $\bar{\rho}_x[n, \Delta t] = 0$;

ЕСЛИ (IF) $|\rho_x[n, \Delta t]| \geq \sigma$ ТО (THEN)
 $\bar{\rho}_x[n, \Delta t] = |\rho_x[n, \Delta t]| - \sigma/2 \text{sign}(\rho_x[n, \Delta t])$.

Следует отметить, что логико-программное решение рассматриваемой задачи строится на основе технологии обхода ветвей древовидного графа, который отражает возможные варианты реализации сценариев в зависимости от заданных целей и задач функционирования интеллектуальной цифровой мехатронной системы при имитации характеристик "управляемой конструкции". Проблема представления сценариев в виде древовидного графа при исследовании объекта с помощью интеллектуальной модели требует отдельного рассмотрения.

Заключение

Изложены принципы построения интеллектуальной модели, имитирующей процессы управляемых переходов между различными состояниями "управляемой конструкции" при наличии НЕ-факторов. В основу построения интеллектуальной модели "управляемой конструкции" положен принцип циклического адаптивного управления, в каждом цикле которого реализуется технология выработки управленческого решения, обеспечивающего сохранение текущего состояния конструкции или ее перевод в более предпочтительное состояние. Проанализирован процесс идентификации состояний изучаемой конструкции, предполагающий сопоставление текущих значений ее параметров, соответствующих микросостояниям информационного образа, с классификационными параметрами заранее выделенного множества таксонов микросостояний. Для этого предложена таксономическая схема, основанная на применении таксонов пяти основных видов, которым приписан определенный системотехнический смысл. Показано, что в качестве меры близости значений параметра таксону микросостояний возможно применение метрики квадратов расстояния до абсцисс медиан выделенных интервалов.

Рассмотрен сценарий управления в интеллектуальной мехатронной системе, который отображает переходы между оптимальными

состояниями "управляемой конструкции" под действием внешних факторов. Представлен пример выполнения интеллектуальной модели механической конструкции в виде импульсного регулятора для управления исполнительным механизмом системных реакций. Построение импульсного регулятора основано на использовании схемы формирования виртуального сигнала рассогласования между текущим значением входного сигнала и его значением, определяемым задатчиком интеллектуальной системы. Указанное рассогласование подвергается дискретной свертке с табулированным и усеченным оригиналом требуемой импульсной характеристики. Показано также, что достаточно экономичные рекуррентные соотношения для выполнения расчетов по значениям рассогласований сигналов формируются при построении модели на основе цифровых ПИД регуляторов.

Список литературы

1. Гулай А. В., Зайцев В. М. Экспертная логико-вероятностная модель интеллектуальной системы управления // Наука и техника. 2014. № 1. С. 30–37.
2. Гулай А. В., Зайцев В. М. Эвристико-алгоритмические методы в интеллектуальных технологиях проектирования системотехнических комплексов // Новый университет. Серия "Технические науки". 2014. № 02 (24). С. 7–11.
3. Абовский Н. П., Овсянко В. М. Управляемая конструкция как система. Электронная модель — "мозг" системы // Архитектура и строительство Беларуси. 1994. № 5–6. С. 1–6.
4. Рыбина Г. В. Основы построения интеллектуальных систем. М.: Финансы и статистика, ИНФРА, 2010.
5. Гроп Д. Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979.
6. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
7. Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974.
8. Дилигенская А. Н. Идентификация объектов управления. Самара: Самарский государственный технический университет, 2009.
9. Вентцель Е. С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. М.: Наука, 1988.
10. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981.
11. Кузнецов Е. С. Управление техническими системами. М.: МАДИ, 2003.
12. Николаев В. И., Брук В. М. Системотехника: методы и приложения. Л.: Машиностроение, 1985.
13. Красников В. С. Разработка управляющих решений. СПб.: СЗАГС, 1999.
14. Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
15. Толмачев В. А. Основы управления электромеханическими системами. СПб.: ИТМО, 2006.
16. Гулай А. В., Зайцев В. М. Особенности проектирования интеллектуальных компонентов систем оперативного управления и приборов цифровой автоматики // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 7. С. 474–482.
17. Зайцев В. М., Путков В. Н. О численном обращении преобразования Лапласа // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 1977. № 2. С. 127–129.

Intelligent Mechatronic System as an Adaptive Model Having "Controlled Construction"

A. V. Gulay, is@bntu.by, V. M. Zaitsev, is@bntu.by,
Belorussian National Technical University, Minsk

Corresponding author: **Gulay Anatoly V.**, Associate Professor, Chief of Department,
Belorussian National Technical University, Minsk, 220065, Republic of Belarus, e-mail: is@bntu.by

Accepted on April 15, 2019

Abstract

The authors develop an adaptive approach to synthesis of intelligent digital models, which have acquitted particular significance during the research of controlled mechanical constructions. Capacity for generation of active reactions to external functional and energy impacts is a distinctive feature, when the object automatically finds rational or optimal states by means of respective adaptation to the aforesaid impacts. The paper presents principles of intelligent model construction, which simulates the processes of controlled transitions between various states of "the controlled construction" in presence of NON-factors. The principle of cyclic adaptive control has been taken as the basis of generation of the "controlled construction" intelligent model, where in every cycle the managerial decision generation technology is implemented, which provides maintenance of the current construction state or its transition to a more preferable state. The identification process for identification of states of the studied construction has been analyzed, and it assumes comparison of the current values of its parameters corresponding to microstates of the informational image along with classification parameters of the preliminary designated multiple taxons of microstates. A taxonomic scheme was offered for this purpose based on the use of five main taxons having the definite system meaning. It has been shown that application of the squared distance metrics to median abscissa of the selected intervals is technologically sufficient as a proximity measure of the parameter value to the taxon of microstates. The management scenario has been considered in the intelligent mechatronic system, which displays transitions between the optimal states of "the controlled construction" under the influence of external factors. An example, of the intelligent model of mechanical construction is shown in the form of a pulse-type regulator for control of the executive mechanism of system reactions. Construction of the pulse-type regulator is based on the use of the virtual signal formation scheme of mismatch between the current value of the input signal and its value defined by the intelligent system setting mechanism. This mismatch is subject to discrete convolution with the tabulated and abridged original of the required pulse characteristic. It is also shown that sufficiently economical recurrent interrelations for calculations according to mismatch values are formed during construction of the model on the basis of proportional integral and differential regulators.

Keywords: "controlled construction", intelligent model, states identification, taxonomic scheme, pulse controller

For citation:

Gulay A. V., Zaitsev V. M. Intelligent Mechatronic System as an Adaptive Model Having "Controlled Construction", *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 10, pp. 600–608.

DOI: 10.17587/mau.20.600-608

References

1. **Gulaj A. V., Zajcev V. M.** *Nauka i Tehnika*, 2014, no. 1, pp. 30–37 (in Russian).
2. **Gulaj A. V., Zajcev V. M.** *Novyj universitet. Serija "Tehnicheskie nauki"*, 2014, no. 2, pp. 7–11 (in Russian).
3. **Abovskij N. P., Ovsjanko V. M.** *Arhitektura i Stroitel'stvo Belarusi*, 1994, no. 5–6, pp. 1–6 (in Russian).
4. **Rybina G. V.** Fundamentals of Intellectual System Construction, Moscow, *Finansy i Statistika*, 2010 (in Russian).
5. **Graup D.** *Identification of System*, Huntington, New York, Krieger, 1976.
6. **Ljung L.** *System Identification: Theory for the User*, New Jersey, Prentice-Hall, 1999.
7. **Sage A. P., Melsa J. L.** *System Identification*, New York, Academic Press Inc, 1971.
8. **Diligenskaja A. N.** Objects of Control Identification, Samara, *Samarskij gosudarstvennyj tehnikeskij universitet*, 2009 (in Russian).
9. **Ventcel' E. S.** Investigation of Operations, Moscow, *Nauka*, 1988 (in Russian).
10. **Keene R. L., Raiffa Y. H.** *Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs*, New York, John Wiley, 1978.
11. **Kuznecov E. S.** Technical Systems Control, Moscow, *MADI*, 2003 (in Russian).
12. **Nikolaev V. I., Bruk V. M.** The Systems Engineering: Methods and Applications, Leningrad, *Mashinostroenie*, 1985 (in Russian).
13. **Krasnikov V. S.** Control Solutions Development, St. Petersburg, *SZAGS*, 1999 (in Russian).
14. **Sage A. P., Melsa J. L.** *Estimation Theory with Applications to Communications and Control*, New York, McGrawHill, 1971.
15. **Tolmachev V. A.** The Basics of Electromechanical Systems Control, St. Petersburg, *ITMO*, 2006 (in Russian).
16. **Gulaj A. V., Zajcev V. M.** *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 7, pp. 474–482 (in Russian).
17. **Zajcev V. M., Putkov V. N.** *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Jeletromehanika*, 1977, no. 2, pp. 127–129 (in Russian).

А. С. Антипов, математик, scholess18@mail.ru,
С. А. Краснова, д-р техн. наук, гл. науч. сотр., skrasnova@list.ru,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва

Система стабилизации положения тележки крана с использованием сигмоидальной функции¹

Рассматривается задача управления тележкой-краном с закрепленным на стержне грузом. Под действием управляющей силы тележка способна совершать перемещение массивных грузов, что определяется целями промышленного производства. Математическая модель, описывающая движение тележки-крана, представлена лагранжевой системой нелинейных уравнений с двумя степенями свободы и одним управляющим воздействием. Предполагается, что стержень невесом, его жесткостью пренебрегается, и трение во всех сочленениях отсутствует. Ставится задача стабилизации заданного положения тележки-крана с неопределенными массо-инерционными характеристиками при действии кусочно-гладких ограниченных внешних возмущений и при отсутствии полного комплекта измерительных устройств. На основе свойства пассивности системы строится закон управления, содержащий линейную и сигмоидальную части, решающий задачу стабилизации заданного положения. Полагается, что измерениям доступно только положение тележки-крана, шумы измерений отсутствуют. В целях получения оценки скорости тележки, необходимой для реализации закона управления, вводится наблюдатель состояния пониженного порядка с сигмоидальным корректирующим воздействием. Показано, что использование сигмоидальной функции как допредельной реализации функции знака в задаче управления обеспечивает инвариантность с заданной точностью по отношению к внешним возмущениям, а в задаче наблюдения позволяет получить с заданной точностью текущие оценки неизмеряемых сигналов. В силу ограниченности сигмоидальная функция помогает избежать излишнего расхода ресурсов управления и уменьшить возможную величину перерегулирования в начале переходных процессов. При этом в отличие от функции знака она является реализуемой в электромеханических системах с учетом динамики исполнительных устройств, в которых в силу физических ограничений обобщенные моменты и силы не могут быть разрывными функциями. В системе MATLAB-Simulink проведено моделирование разработанного закона управления с линейной и сигмоидальной частью применительно к механической системе. В целях сравнения также представлены результаты моделирования для классически используемого ПД регулятора. Приведенные результаты моделирования подтверждают эффективность разработанного подхода.

Ключевые слова: механическая система, пассивность, стабилизация, инвариантность, сигмоидальная функция, наблюдатель состояния пониженного порядка, параметрическая неопределенность, внешние возмущения

Введение

Транспортировочные краны широко распространены в промышленности для перемещения массивных грузов в производственных целях. При этом предъявляются требования по скорости и безопасности транспортировки различных грузов в заданное положение.

В работе рассматривается задача построения системы управления перемещением грузов в заданный пункт. В качестве объекта управления выступает тележка-кран, ее математическая модель представляет собой нелинейную динамическую систему с двумя степенями свободы. Сложность управления подобной системой возникает из-за наличия только одного управляющего воздействия. В настоящее время разработано множество алгоритмов управления системами с недостатком управляющих воздействий. Классически, ориентируясь на линейную теорию управления, законы управления

строили на основе линеаризации подобных систем [1–3]. Такие методы позволяют добиться локальной стабилизации в окрестности линеаризуемого положения. Другой подход основан на свойствах пассивности исследуемых систем, построении для них функций Ляпунова и глобальной стабилизации [4–7]. В частности, стандартным решением является использование пропорционально-дифференцирующего (ПД) регулятора, зависящего от положения и скорости, а также пропорционально-интегрально-дифференцирующего (ПИД) регулятора [4, 5]. Строятся различные модификации данных законов. Например, в работе [7] синтезируют модифицированный закон управления, добавляя в ПД регулятор угловую координату с ее производной и, тем самым, улучшая качество переходных процессов. При наличии внешних возмущений и неопределенностей в модели естественным подходом к управлению выступают силовые методы, такие как управление на скользящих режимах [8, 9]. Для рассматриваемых систем широко распространены методы иерархии скользящих режимов [10, 11], согласно

¹Статья подготовлена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-01-00846А.

которым обеспечивается последовательное попадание на заданные поверхности скольжения, выбранные исходя из целей управления. Однако на практике нельзя использовать разрывные, высокочастотные сигналы в качестве управляющих моментов.

В данной работе изучается задача стабилизации заданного положения тележки-крана при действии неизвестных внешних ограниченных возмущений, которые являются согласованными. Предложен подход к синтезу закона управления, основанный на свойстве пассивности системы. В законе управления присутствует часть с сигмоидальной функцией. Являясь гладкой допредельной реализацией функции знака, сигмоидальная функция в обратной связи позволяет подавить согласованные внешние возмущения. Ограниченность сигмоидальной функции помогает избежать излишнего расхода ресурсов управления, который нередко приводит к перерегулированию в начале переходных процессов.

При построении законов управления для систем с недостатком управляющих воздействий нередко предполагают наличие всех необходимых измерений и не ставят задачу наблюдения. На практике обычно удается получить измерения обобщенных координат, но организация измерения обобщенных скоростей является сложной и дорогостоящей задачей. В предположении, что измерению доступно только положение тележки, для оценивания ее скорости предложен оригинальный метод синтеза наблюдателя пониженного порядка. В отличие от стандартных укороченных наблюдателей, где отбрасывается динамика измеряемой переменной, мы, наоборот, не используем в наблюдателе дифференциальное уравнение неизмеряемой переменной, считая ее внешним ограниченным возмущением, оценкой которого, начиная с заданного момента времени, служит сигмоидальное корректирующее воздействие.

Постановка задачи

В качестве объекта управления рассматривается тележка-кран с массой M , к которой на невесомом стержне длиной l прикреплен груз с массой m (рис. 1). Тележка может совершать горизонтальные перемещения под действием управляющей силы u . Для описания ее движения вводятся следующие обобщенные ко-

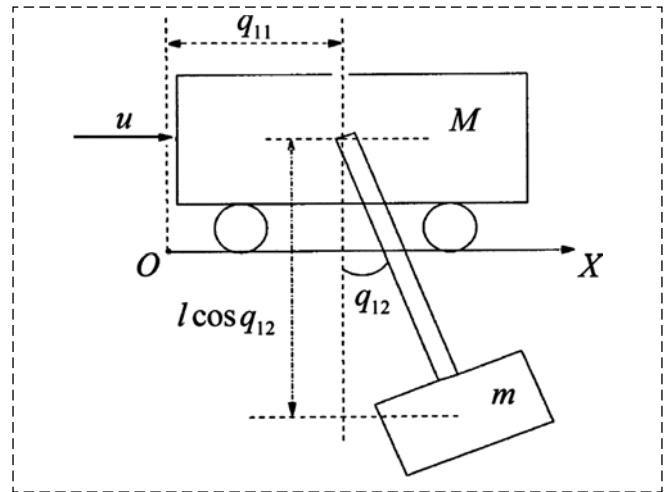


Рис. 1. Схема тележки-крана
Fig. 1. The scheme of convey-crane

ординаты: q_{11} — горизонтальное перемещение тележки; q_{12} — угол отклонения стержня от вертикальной оси.

Математическая модель объекта управления имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{q}_2; \\ \dot{q}_2 &= f_1(q_1, q_2) + f_2(q_1, q_2)(u + \eta(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

где $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12}) \in \mathbb{R}^2$ — вектор обобщенных координат; $q_2 = \text{col}(\dot{q}_{21}, \dot{q}_{22}) \in \mathbb{R}^2$ — вектор обобщенных скоростей;

$$\begin{aligned} f_1(q_1, q_2) &= \text{col}(f_{11}, f_{12}) \in \mathbb{R}^2, \\ f_2(q_1, q_2) &= \text{col}(f_{21}, f_{22}) \in \mathbb{R}^2; \\ f_{11} &= \frac{1}{M + m \sin^2(q_{12})} [-m \sin q_{12} (l \dot{q}_{22}^2 + g \cos q_{12})]; \\ f_{12} &= \frac{1}{l(M + m \sin^2(q_{12}))} \times \\ &\times [-\sin q_{12} ((M + m)g + (ml \cos q_{12}) \dot{q}_{22}^2)]; \\ f_{21} &= \frac{1}{M + m \sin^2(q_{12})}, \quad f_{22} = \frac{\cos q_{12}}{l(M + m \sin^2(q_{12}))}; \end{aligned}$$

g — ускорение свободного падения; $\eta(t)$ — обобщенная сила, трактуемая как неизвестное ограниченное возмущение. Выдвигаются следующие предположения:

- $\eta(t)$ полагается кусочно-гладкой ограниченной функцией с ограниченными односторонними производными; $|\eta(t)| \leq N$, $|\dot{\eta}(t)| \leq N_1 \forall t \geq 0$, N, N_1 — известные константы;
- параметры l, m, M точно не известны;

- груз рассматривается как точечная масса, жесткость и масса стержня не учитываются;
- измерению подлежит только положение тележки $q_{11}(t)$, шумы измерений отсутствуют.

Ставится задача синтеза закона управления u в форме обратной связи, обеспечивающего заданное положение тележки $q_{11d} = \text{const}$ и стабилизацию остальных переменных состояния. В условиях неопределенности данная задача может быть решена с заданной точностью:

$$|e_{11}(t)| \leq \delta_{11}, \quad |q_{21}(t)| \leq \delta_{21} \quad \forall t > T > 0, \quad (2)$$

где $e_{11} = q_{11} - q_{11d}$ — ошибка регулирования.

Характеристика сигмоидальной функции

В целях дальнейшего синтеза закона управления рассмотрим нелинейную гладкую ограниченную сигмоидальную функцию $\sigma(\alpha x) = 2/(1 + e^{-\alpha x}) - 1$, $\alpha = \text{const} > 0$, которая является допредельной реализацией функции знака $y = \text{sign} x$ в следующем смысле: $\sigma(-\alpha x) = -\sigma(\alpha x)$, $\sigma(\alpha x) \sim \alpha x/2$, $\sigma(\alpha x) \sim \text{sign} x$. Первая производная $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \sigma'(\alpha x) = 0$ сигмоидальной функции — положительная ограниченная четная функция $\sigma'(\alpha x) = \alpha(1 - \sigma^2(\alpha x))/2$, вторая производная — ограниченная нечетная функция $\sigma''(\alpha x) = -\alpha\sigma'(\alpha x)\sigma(\alpha x)$.

Для сигмоидальной функции и ее первой производной в указанных интервалах справедливы следующие оценки [12]:

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha\Delta) < |\sigma(\alpha x)| < 1, \\ 0 < \sigma'(\alpha x) < \sigma'(\alpha\Delta) \quad \forall |x| > \Delta > 0; \\ \sigma(\alpha\Delta)|x|/\Delta \leq |\sigma(\alpha x)| \leq \sigma(\alpha\Delta), \\ 0 < \sigma'(\alpha\Delta) \leq \sigma'(\alpha x) \leq \sigma'(0) = \alpha/2 \quad \forall |x| \leq \Delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Из оценок (3) следует, что при $|x| > \Delta$ сигмоидальная функция близка к постоянной функции, а при $|x| \leq \Delta$ — к линейной. В качестве границы рекомендуется принять точку $\alpha\Delta = c$, где $\pm c \approx \pm 3$ — абсциссы вершин сигмоидальной функции, в которых ее кривизна достигает максимума, при этом

$$\sigma(\pm 3) \approx \pm 0,9, \quad \sigma'(\pm 3) \approx 0,1\alpha, \quad \alpha\Delta \approx 3. \quad (4)$$

Синтез закона управления

Для решения поставленной задачи (2) предлагается использовать комбинированный закон управления

$$u = -k_1 e_{11} - M_2 \sigma(\alpha q_{21}), \quad (5)$$

где $\sigma(\alpha q_{21}) = \frac{2}{1 + e^{-\alpha q_{21}}} - 1$ — сигмоидальная функция; $\alpha, M = \text{const} > 0$. Данный закон состоит из двух частей — линейной и сигмоидальной. Линейная часть служит для стабилизации ошибки регулирования e_{11} , скорость сходимости зависит от выбора $k_1 > 0$, а нелинейная (сигмоидальная) — для обеспечения инвариантности по отношению к внешнему возмущению [12].

Для выбора параметров закона управления (5) и исследования устойчивости замкнутой системы (1), (5) в качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим [4, 7] функцию

$$V(q_1, q_2) = E(q_1, q_2) + \frac{1}{2} k_1 e_{11}^2, \quad (6)$$

где $E(q_1, q_2) = \frac{1}{2} q_2^T H(q_1) q_2 + mgl(1 - \cos q_{12})$ — полная энергия системы с матрицей инерции $H(q_1) = \begin{pmatrix} M + m & -ml \cos q_{12} \\ -ml \cos q_{12} & ml^2 \end{pmatrix}$.

С учетом (1), (5) производная функции (6) имеет вид

$$\dot{V} = q_{21}(u + \eta + k_1 e_{11}) = q_{21}(\eta - M_2 \sigma(\alpha q_{21})). \quad (7)$$

При выборе параметра M_2 в указанном виде (7) за конечное время $t_1 > 0$ в замкнутой системе (1), (5) обеспечивается сходимость переменных $e_{11}(t)$, $q_{21}(t)$, $q_{12}(t)$, $q_{22}(t)$ в некоторые окрестности нуля. Параметр α , который играет роль большого коэффициента, выбирается исходя из заданной точности (2) в силу (3), (4) на основе следующих соотношений:

$$\begin{aligned} |q_{21}| \leq \delta_{21} = 3/\alpha, \quad |\eta - M_2 \sigma(\alpha q_{21})| \leq \beta = \\ = 10N_1/(M_2\alpha), \quad |e_{11}| \leq \delta_{11} = \beta/k_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha > \max \left\{ \frac{3}{\delta_{21}}; \frac{10N_1}{M_2\delta_{11}k_1} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Построенный базовый закон управления (5) определяется сигналами $e_{11} = q_{11} - q_{11d}$ и q_{21} . Для его реализации необходимо получить оценку скорости тележки $q_{21}(t)$ по имеющимся измерениям положения $q_{11}(t)$. В условиях существенной неопределенности модели объекта управления и действия внешних возмущений, динамическая модель которых не вводится в построение, эту задачу можно решить только с заданной точностью.

Ниже представлен оригинальный метод синтеза наблюдателя состояния пониженного порядка с сигмоидальным корректирующим воздействием. Данный наблюдатель строится на основе подсистемы $\dot{q}_{11} = q_{21}$, где переменная $q_{21}(t)$ трактуется как внешнее ограниченное возмущение с ограниченной производной $|q_{21}(t)| \leq \bar{q}_{21}$, $|\dot{q}_{21}(t)| \leq \bar{q}_{31} \forall t \geq 0$, и имеет вид

$$\dot{z}_{11} = v, \quad (9)$$

где $z_{11} \in \mathbb{R}$ — переменная состояния, $v = U\sigma(k\varepsilon)$ — сигмоидальное корректирующее воздействие наблюдателя; $\varepsilon = q_{11} - z_{11} \in \mathbb{R}$ — ошибка наблюдения. Задача наблюдения сводится к стабилизации систем относительно ошибки наблюдения и ее производной

$$\dot{\varepsilon} = q_{21} - v = q_{21} - U\sigma(k\varepsilon), \quad \ddot{\varepsilon} = \dot{q}_{21} - U\sigma'(k\varepsilon)\dot{\varepsilon} \quad (10)$$

с заданной точностью:

$$|\varepsilon(t)| \leq \Delta, \quad |\dot{\varepsilon}(t)| \leq \Delta \quad \forall t > t^*, \quad 0 \leq t^* < T. \quad (11)$$

При выполнении (11) из уравнения статики имеем: $|\dot{\varepsilon}(t)| \leq \Delta \Rightarrow |q_{21}(t) - v(t)| \leq \Delta \quad \forall t > t^*$. Следовательно, корректирующее воздействие служит искомой оценкой обобщенной скорости: $v(t) \approx q_{21}(t) \quad \forall t > t^*$.

Желаемая точность стабилизации (11) достигается за счет выбора параметров k , $U > 0$ в сигмоидальном корректирующем воздействии. Для данного выбора при анализе систем (10) используются свойства сигма-функции (3), (4). При $|\varepsilon| > 3/k$ имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\varepsilon} &= \varepsilon(q_{21} - U\sigma(k\varepsilon)) \leq \\ &\leq |\varepsilon|(\bar{q}_{21} - 0,9U) < 0 \Rightarrow U > 1,1\bar{q}_{21}, \end{aligned} \quad (12)$$

что обеспечивает выполнение $|\varepsilon(t)| \leq 3/k$ за конечное время. При $t > t^*$ из достаточных условий получим нижнюю оценку для выбора второго параметра сигмоидальной функции:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\varepsilon} &\leq |\varepsilon|(\bar{q}_{21} - 0,3Uk|\varepsilon|) < 0 \Rightarrow k > 3,3\bar{q}_{21}/(U|\varepsilon|); \\ \dot{\varepsilon} \ddot{\varepsilon} &\leq |\dot{\varepsilon}|(\bar{q}_{31} - 0,1Uk|\dot{\varepsilon}|) < 0 \Rightarrow k > 10\bar{q}_{31}/(U|\dot{\varepsilon}|) \Rightarrow \\ &\Rightarrow k > \max\{3,3\bar{q}_{21}; 10\bar{q}_{31}\}/(U\Delta). \end{aligned} \quad (13)$$

В замкнутой системе (1) с наблюдателем состояния (9) закон управления (5) реализуется в виде

$$u = -k_1 e_{11} - M_2 \sigma(\alpha v), \quad (14)$$

и обеспечивает решение поставленной задачи (2).

Для иллюстрации эффективности описанного подхода было проведено моделирование в среде MATLAB-Simulink. В ходе моделирования приняты следующие параметры системы: $M = 10$ [кг] — масса тележки-крана; $l = 2,5$ [м] — длина стержня; $m = 50$ [кг] — масса груза. Внешние возмущения описывались кусочно-гладкой периодической функцией $\eta(t) = 0,2t$ с главным периодом $T = 1$ [с].

Требовалось стабилизировать заданное положение тележки $q_{11d} = 10$ [м] с точностью 0,07 [м].

На основе условий (7), (8) обеспечения заданной точности (2) приняты параметры $k_1 = 2$, $\alpha = 300$, $M_2 = 5$ в комбинированном законе управления (5).

В целях сравнения был также построен классический закон управления в виде ПД регулятора [3]:

$$u = -k_{p1}e_{11} - k_{p2}q_{21}, \quad (15)$$

где параметры $k_{p1} = 10$, $k_{p2} = 20$ были приняты из аналогичных условиям (7), (8) условий обеспечения заданной точности (2).

Для оценки скорости q_{21} и реализации законов управления строился наблюдатель состояния пониженного порядка с сигмоидальным корректирующим воздействием. Из условий (12), (13) выбраны его параметры: $k = 250$, $U = 1$.

В замкнутой системе (1) с наблюдателем (9) закон управления (15) реализуется следующим образом:

$$u = -k_{p1}e_{11} - k_{p2}v. \quad (16)$$

На рис. 2, 3 для законов управления (14), (16) представлены графики ошибок регулирования заданного положения $e_{11}(t) = q_{11}(t) - q_{11d}$ и угла отклонения стержня от вертикальной оси $q_{12}(t)$ соответственно (сверху — для комбинированного закона, снизу — для ПД регулятора). На рис. 4 приведены графики ошибок оценивания скорости $q_{21}(t)$ с помощью корректирующего воздействия наблюдателя $v(t)$. На рис. 5 отражены графики управляющих воздействий $u(t)$.

Таким образом, результаты моделирования подтвердили эффективность разработанного подхода. Построенный комбинированный закон управления (5) стабилизировал заданное положение с требуемой точностью, а наблюдатель состояния (9) в течение 30 с обеспечил его реализацию. Из рис. 3, 5 следует, что благодаря

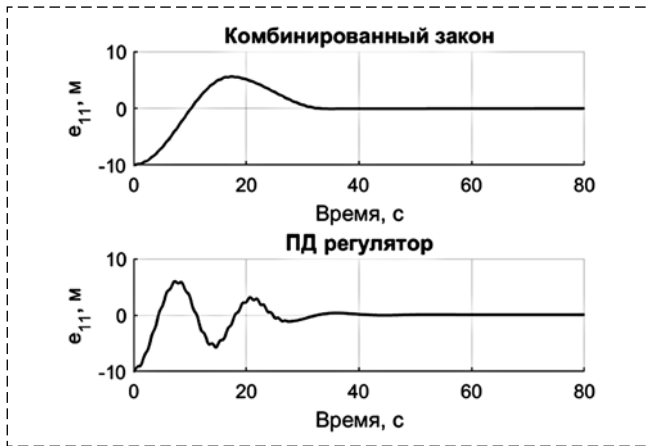


Рис. 2. График ошибки регулирования $e_{11}(t)$

Fig. 2. The graph of regulation error $e_{11}(t)$

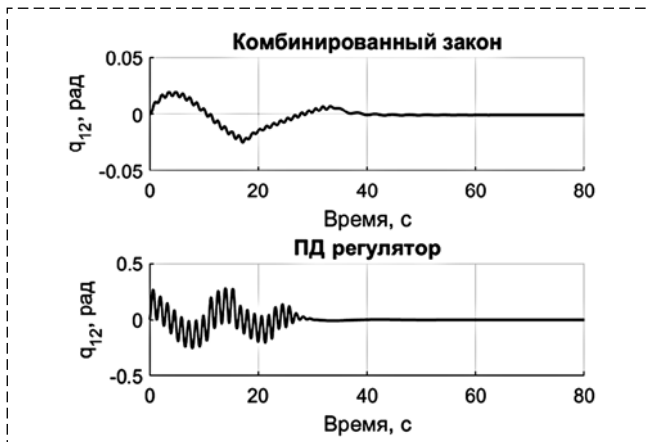


Рис. 3. График угла отклонения стержня от вертикальной оси $q_{12}(t)$

Fig. 3. The graph of sway angle $q_{12}(t)$

использованию ограниченной сигмоидальной функции комбинированный закон управления по сравнению с ПД регулятором обеспечивает примерно в 10 раз меньшее перерегулирование $q_{12}(t)$ и позволяет расходовать меньшие ресурсы управления $u(t)$

Заключение

Тележка-кран представляет собой сложную механическую систему с двумя степенями свободы и одним управляющим воздействием. В работе предложен комбинированный закон управления с линейной и сигмоидальной частями, решающий задачу стабилизации заданного положения в условиях параметрической неопределенности. Для реализации закона управления построен наблюдатель с сигмоидальным корректирующим воздействием. Разработанный подход к решению задачи стабилизации подтверждается результатами моделирования.

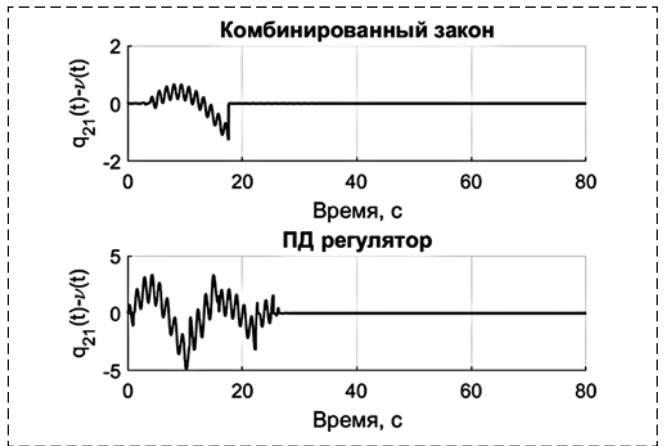


Рис. 4. График ошибки оценивания скорости $q_{21}(t) - v(t)$

Fig. 4. The graph of velocity estimation error $q_{21}(t) - v(t)$

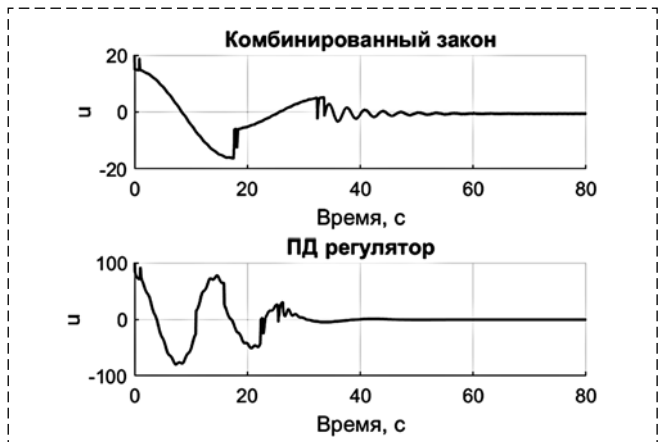


Рис. 5. График управления $u(t)$

Fig. 5. The graph of control $u(t)$

Показано, что использование сигмоидальных функций обеспечивает инвариантность с заданной точностью по отношению к имеющимся неопределенностям и позволяет снизить возможное значение перерегулирования.

Список литературы

1. Le Tuan Anh, Gook-Hwan Kim, Min Young Kim, Soon-Geul Lee. Partial Feedback Linearization Control of Overhead Cranes with Varying Cable Lengths // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2012. Vol. 13, N. 4. P. 501–507.
2. Bálint K., Na W. Robust exact linearization of a 2D overhead crane // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, N. 22. P. 354–359.
3. Аняньевский И. М. Управление трехзвенным перевернутым маятником в окрестности положения равновесия // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 2. С. 149–155.
4. Fantoni I., Lozano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems. London: Springer Verlag. 2002. P. 43–51.
5. Diantong Liu, Weiping Guo, Jianqiang Yi, Dongbin Zhao. Passivity-based-control for a class of underactuated mechanical systems // Proceedings of 2004 International Conference on Intelligent Mechatronics and Automation. 2004. P. 50–54.

6. Romero J. G., Donaire A., Borja P. Global Stabilisation of Underactuated Mechanical Systems via PID Passivity-Based Control // *IFAC-PapersOnLine*. 2017. Vol. 50, N. 1. P. 9577–9582.
7. Papadopoulos A. D., Rompokos A. A., Alexandridis A. T. Nonlinear and observer-based PD position and sway control of convey-crane systems // 2016 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). 2016. P. 696–700.
8. Slotine J. E. Sliding controller design for non-linear systems // *International Journal of Control*. 1984. Vol. 40, N. 2. P. 421–434.
9. Utkin V. I., Guldner J., Shi J. Sliding mode control in electromechanical systems. NewYork: CRC Press, 2009. 503 p.

10. Qian D., Yi J., Zhao D., Hao Y. Hierarchical Sliding Mode Control for Series Double Inverted Pendulums System // 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2006. P. 4977–4982.
11. Yi-Jen Mon, Chih-Min Lin. Hierarchical fuzzy sliding-mode control // 2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence. 2002 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. FUZZ-IEEE'02. Proceedings (Cat. No.02CH37291). 2002. Vol. 1. P. 656–661.
12. Krasnova S. A., Utkin A. V. Sigma function in observer design for states and perturbations // *Automation and Remote Control*. 2016. Vol. 77, N. 9. P. 1676–1688.

Stabilization System of Convey-Crane Position Via Sigmoidal Function

A. S. Antipov, scholess18@mail.ru, S. A. Krasnova, skrasnova@list.ru,

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997, Russian Federation

Corresponding author: Antipov Aleksey S., Mathematician, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997, Russia, e-mail: scholess18@mail.ru

Accepted on June 23, 2019

Abstract

In this paper, we consider the convey-crane system, which can transport loads for industrial purposes. The mathematical model, describing the motion of convey-crane, is presented by a Lagrangian mechanical system of nonlinear equations with two degrees of freedom and one control action. It is supposed that the rope has no mass, its stiffness is not taken into account, and there is no friction in the joints. The stabilization problem of the desired convey-crane position is posed under uncertain mass inertia characteristics, an action of non-smooth bounded disturbances and incomplete measurements. Based on the passivity property, the control law with linear and sigmoidal parts is constructed for the solution of the problem. The only measurement of the convey-crane position is available without a noise in the measurements. We use the low order observer with sigmoidal corrective action to obtain the needed velocity estimates for the control law. It is shown that the using of sigmoidal function as a prelimit realization of sign-function provides disturbances invariance with the given accuracy. With respect to the smoothness and boundness, sigmoidal function helps to avoid overshoot in the transient responses and excessive consumption of control resources. Moreover, unlike the sign-function, a sigmoidal function is realized in the electromechanical systems with actuator dynamics, in which the physical restrictions on the forces and general moments are posed. The constructed control law with linear and sigmoidal parts is simulated for the convey-crane system in MATLAB- Simulink. The classical PD-controller is simulated too for the purpose of comparison. The results of modeling are proved the effectiveness of the proposed approach.

Keywords: mechanical system, underactuated system, convey-crane, passivity, sigmoidal function, invariance, reduced order state observer, stabilization, disturbance, parametric uncertainties

Acknowledgements: This article was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research (18-01-00846A).

For citation:

Antipov A. S., Krasnova S. A. Stabilization System of Convey-crane Position Via Sigmoidal Function, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 10, pp. 609–614.

DOI: 10.17587/mau.20.609-614

References

1. Le Tuan Anh, Gook-Hwan Kim, Min Young Kim, Soon-Geul Lee. Partial Feedback Linearization Control of Overhead Cranes with Varying Cable Lengths, *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 2012, vol. 13, no. 4, pp. 501–507.
2. Bálint K., Na W. Robust exact linearization of a 2D overhead crane, *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 22, pp. 354–359.
3. Anan'evskii I. M. The Control of a Three-Link Inverted Pendulum Near the Equilibrium Point, *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, pp. 16–21.
4. Fantoni I., Lozano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems, London: Springer Verlag, 2002, pp. 43–51.
5. Diantong Liu, Weiping Guo, Jianqiang Yi, Dongbin Zhao. Passivity-based-control for a class of underactuated mechanical

systems // *Proceedings of 2004 International Conference on Intelligent Mechatronics and Automation*, 2004, pp. 50–54.

6. Romero J. G., Donaire A., Borja P. Global Stabilisation of Underactuated Mechanical Systems via PID Passivity-Based Control, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 9577–9582.
7. Papadopoulos A. D., Rompokos A. A., Alexandridis A. T. Nonlinear and observer-based PD position and sway control of convey-crane systems, *2016 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, 2016, pp. 696–700.
8. Slotine J. E. Sliding controller design for non-linear systems, *International Journal of Control*, 1984, vol. 40, no. 2, pp. 421–434.
9. Utkin V. I., Guldner J., Shi J. Sliding mode control in electromechanical systems, NewYork, CRC Press, 2009, 503 p.
10. Qian D., Yi J., Zhao D., Hao Y. Hierarchical Sliding Mode Control for Series Double Inverted Pendulums System, *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2006, pp. 4977–4982.
11. Yi-Jen Mon, Chih-Min Lin. Hierarchical fuzzy sliding-mode control, *2002 IEEE World Congress on Computational Intelligence. 2002 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. FUZZ-IEEE'02. Proceedings (Cat. No.02CH37291)*, 2002, vol. 1, pp. 656–661.
12. Krasnova S. A., Utkin A. V. Sigma function in observer design for states and perturbations, *Automation and Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 9, pp. 1676–1688.

С. С. Кочковская, старший преподаватель, lana1905@mail.ru,
Орский гуманитарно-технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего образования
"Оренбургский государственный университет", г. Орск

Разработка алгоритма моделирования характеристик сталей в подсистеме управления производственными ресурсами сталеплавильного производства

Статья посвящена разработке алгоритма моделирования характеристик сталей в соответствии с требованиями заказчика. Представлена математическая модель, учитывающая оптимальные уровни основных факторов и их взаимодействия, обеспечивающие требуемые значения характеристик. Следующим этапом изучения математической модели послужило моделирование средствами методологии функционального моделирования IDEF0. Определены входные и выходные данные, а также нормативные документы управления моделью и механизмы этого управления для построения функциональной модели. Механизмом управления послужил программный продукт OptimalSostav, разработанный с использованием объектно-ориентированного языка программирования Delphi. Программный продукт предназначен для моделирования характеристик сталей с помощью заданных ограничений допустимых минимальных и максимальных значений механических свойств. Описан алгоритм реализации механизма управления, в основу которого положен дробный факторный анализ. Представленный алгоритм позволяет выявить влияние химического состава на механические свойства сталей в виде полученных математических и графических зависимостей и определить заданные механические свойства, удовлетворяющие требованиям заказчика. Рассмотрены основные возможности и область применения программного продукта, позволяющего решить задачу прогнозирования оптимального химического состава, обеспечивающего требуемые механические характеристики, а также скорректировать процесс выплавки сталей в рамках заданного химического состава для достижения требуемого комплекса свойств. Показано применение программного продукта на примере анализа влияния химических элементов на механические свойства валковой стали 75ХМФ. Приведены результаты моделирования в виде полученных математических и графических зависимостей и дана оценка эффективности применения программного продукта. Представлены результаты решения задачи аппроксимации полученных графических зависимостей влияния химических элементов на механические свойства исследуемой марки стали средствами Microsoft Excel. Установлено, что разработанное математическое и алгоритмическое обеспечение программного продукта позволяет изучить процентное содержание химических элементов по отношению к общему составу сплава на основе полученных круговых диаграмм и графиков зависимостей. Адекватность модели подтверждена результатами экспериментов.

Ключевые слова: алгоритм моделирования, сталь, требуемые характеристики, математическое моделирование, программный продукт

Введение

В данной работе представлены подходы к применению статистических методов для решения задачи управления производственными ресурсами предприятия в металлургической отрасли [1, 2]. Наиболее известными методами управления являются планирование экспериментов, регрессионный анализ и моделирование. Одной из областей применения таких методов является организация подсистемы управления производственными ресурсами сталеплавильного производства. Подробное описание использования вышеупомянутых методов для решения задач этой области пред-

ставлено в трудах М. Г. Журавлевой, Л. А. Кузнецова, Д. Ю. Вишнякова, Л. Я. Козак [3–6].

В ходе исследований было выявлено, что одним из способов повышения эффективности управления производственными ресурсами в АСУ сталеплавильного производства является использование компьютерных систем поддержки принятия решений. Разработка таких подходов опирается на методы математической статистики, планирования и обработки результатов эксперимента, математического моделирования [7–9].

Целью исследования, результаты которого представлены далее, является разработка алгоритма моделирования требуемых характе-

ристик сталей. Модель на входе обрабатывает производственные данные о механических свойствах и химическом составе. Результатом моделирования являются полученные зависимости влияния химических элементов на механические свойства сталей. Обработка результатов моделирования позволяет определить заданные характеристики сталей, обеспечивающие требуемый комплекс свойств.

Постановка задачи

Постановка задачи заключается в следующем: имеется m партий плавок металла, в каждой из которых отобраны и испытаны по n образцов. Обозначим i — порядковый номер партии плавки, j — номер образца в партии. Результаты механических испытаний обозначим Y_{ij} , где $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

На рассматриваемые механические свойства стандартом задаются следующие ограничения: $Y^{\min} \leq Y_{ij} \leq Y^{\max}$. В качестве влияющих факторов выбраны химические элементы: z_1 — углерод, %; z_2 — марганец, %; z_3 — кремний, %; z_4 — хром, %; z_5 — никель, %; z_6 — молибден, %.

Приведение факторов к одному масштабу осуществляется по формуле

$$x_i = \frac{z_i - z_i^0}{\lambda_i},$$

где z_i — фактор, z_i^0 — центр плана и λ_i — интервал варьирования.

Центр плана и интервал варьирования определяются следующим образом:

$$z_i^0 = \frac{z_i^+ + z_i^-}{2};$$

$$\lambda_i = \frac{z_i^+ - z_i^-}{2},$$

где z_i^+ , z_i^- — верхний и нижний уровни фактора.

Оценкой уровня свойств конкретной плавки является внутриплавочное среднее характеристики, которое определяется по формуле

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Y_{ij}.$$

При изучении влияния парных взаимодействий выбранных факторов (химических элементов) на исследуемый параметр (механическое свойство) необходимо составить линейные уравнения регрессии.

Определяющие коэффициенты уравнений регрессии рассчитываются как

$$b_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n x_{ji} \bar{Y}_i, i = \overline{1, k},$$

где x_{ji} — кодированная переменная, которая соответствует j -му опыту для i -го фактора.

Для полученных коэффициентов выполняется проверка на значимость с помощью критерия Стьюдента: если $|b| > t_{кр} S_k$, то b значим; если $|b| < t_{кр} S_k$, то b незначим. Критическая точка $t_{кр}$ определяется из таблиц распределения Стьюдента по числу степеней свободы $n(m-1)$ и с заданным уровнем значимости α .

Из теории малых выборок [10] следует, что оценкой среднеквадратического отклонения внутриплавочной характеристики Y в контрольной партии является величина

$$S_{пл i} = \left\{ \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2 \right\}^{1/2}.$$

Оценкой внутриплавочной дисперсии является средняя выборочная внутриплавочная дисперсия

$$S_{пл}^2 = \frac{1}{n(m-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2.$$

Проверка на адекватность полученного уравнения регрессии со значимыми коэффициентами выполняется с помощью критерия Фишера: $F_p < F_{табл}$. Расчетное значение определяется как

$$F_p = \frac{S_o^2}{S_{пл}^2},$$

где S_o^2 — остаточная дисперсия.

Табличное значение критерия Фишера находится из таблиц критических точек распределения Фишера по заданному уровню значимости α и по степеням свободы $k_1 = n - r$ и $k_2 = n(m-1)$.

Остаточная внутриплавочная дисперсия определяется по формуле

$$S_o^2 = \frac{m}{n-r} \sum_{j=1}^n (\tilde{y}_j - \bar{Y}_j)^2,$$

где r — число значимых коэффициентов в уравнении, а $\tilde{y}_j$ — значение изучаемого результата испытания, вычисленное по уравнению регрессии со значимыми коэффициентами для j -го образца в партии.

Задача заключается в разработке алгоритма, позволяющего моделировать характеристики сталей с помощью заданных ограничений допустимых минимальных и максимальных значений механических свойств и скорректировать процесс выплавки сталей в рамках заданного химического состава для достижения требуемого комплекса свойств.

Алгоритм моделирования требуемых характеристик стали

Алгоритм моделирования был разработан с использованием объектно-ориентированного языка программирования Delphi программного продукта Embarcadero RAD Studio компании Embarcadero Technologies. Для моделирования требуемых характеристик сталей был разработан программный комплекс OptimalSostav (рис. 1).

Моделирование характеристик стали выполняется с учетом норм, ГОСТ, ОСТ и ТУ. На вход модели поступают сведения о требуемых характеристиках, а именно химический состав, предел прочности, предел текучести, ударная вязкость и твердость по каждой плавке и марке стали, хранящиеся в базах данных, созданных с помощью Microsoft Access.

Модель обеспечивает выходные данные согласно требованиям заказчика: на выходе модели формируются функциональные зависимости (уравнения регрессии) влияния химического состава на механические свойства, а также круговые диаграммы, графики зависимостей. Алгоритм моделирования представлен на рис. 2.

Алгоритм моделирует требуемые характеристики сталей с помощью заданных ограничений допустимых минимальных и максимальных значений механических свойств.

На первом шаге выполняется подготовка данных: вводятся необходимые параметры, а именно уровень значимости и критическая точка. Затем рассчитываются коэффициенты уравнений регрессии и определяется число значимых. Проводится проверка на адекватность уравнений регрессии с помощью табличного интерфейса "Критические значе-



Рис. 1. Функциональная схема моделирования значений основных характеристик сталей

Fig. 1. Functional scheme of modeling the values of the main characteristics of steels

ния критерия Фишера". Табличный редактор, представленный отдельным окном проекта, позволяет работать с исходными данными и анализировать результаты расчета.

На следующем этапе расчета получаются уравнения регрессии для каждого механического свойства, по которым можно определить влияние того или иного химического элемента на механические свойства. Также есть возможность рассчитать значения каждого механического свойства: предела прочности, предела текучести, ударной вязкости, твердости. Выполняя обработку данных непосредственно из окон ввода, пользователь может варьировать производственные данные из базы данных.

После успешного выполнения расчета пользователю доступен режим обработки результатов расчета, который позволяет строить круговые диаграммы и графики зависимостей влияния химического элемента на механические свойства. Режим результатов расчета доступен

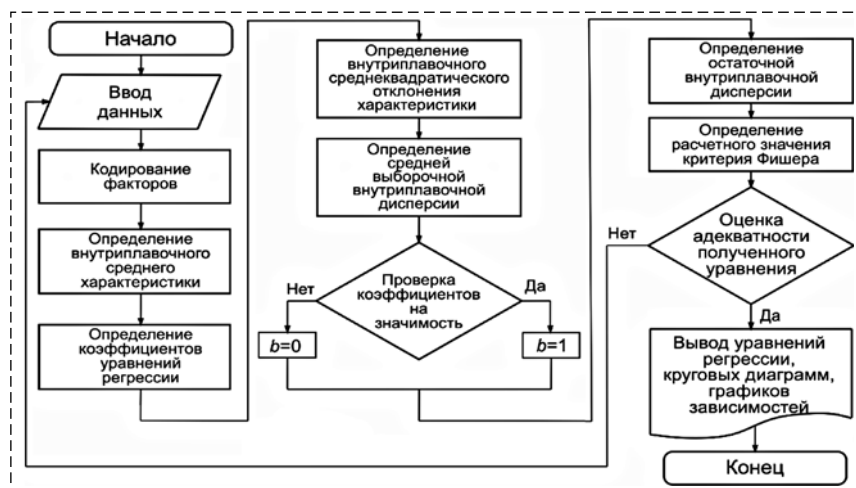


Рис. 2. Алгоритм моделирования значений основных характеристик сталей

Fig. 2. Algorithm for modeling the values of the main characteristics of steels

для редактирования. При необходимости внесения изменений следует вернуться в режим расчета и выполнить соответствующие построения. Предоставляется возможность сохранения и распечатки графической информации, конвертирования данных в формат .xls.

Компьютерная апробация алгоритма моделирования

Для исследования эффективности разработанного алгоритма, реализованного в программном комплексе OptimalSostav, проведем анализ влияния химических элементов на механические свойства исследуемой марки стали. Производственные данные взяты из БД ЦЗЛ АО "МК ОРМЕТО-ЮУМЗ". Этапы анализа следующие [12]:

Этап 1. Выбор марки стали, уровня значимости и критической точки. Выгрузка производственных данных из БД исследуемой марки стали.

Этап 2. Определение коэффициентов уравнений регрессии и числа значимых из них.

Этап 3. Проверка на адекватность полученных уравнений с помощью критерия Фишера.

Этап 4. Вывод полученных зависимостей (уравнений регрессии).

Этап 5. Определение значений предела прочности, предела текучести, ударной вязкости и твердости.

Этап 6. Вывод круговых диаграмм и графиков зависимостей влияния химического элемента на механические свойства.

Далее представлены результаты моделирования. Были выбраны следующие входные данные: исследуемая марка стали — инструментальная валковая сталь 75ХМФ; уровень значимости — 0,05; критическая точка — 2,037 (рис. 3, см. вторую сторону обложки).

После загрузки производственных данных из БД и проверки полученных уравнений регрессии со значимыми коэффициентами на адекватность доступны для анализа уравнения регрессии.

Рассмотрим полученную зависимость предела прочности, предварительно выполнив округление до десятых долей:

$$y_1 = 960,1 + 37,6x_1 - 12x_2 + 16,4x_3 - 38,4x_5 + 21,8x_6 + 38,7x_1x_2 - 22,5x_1x_4 + 33,6x_2x_4 - 28,5x_2x_4.$$

Из уравнения следует, что наибольшее влияние оказывает парное взаимодействие x_1x_2 — содержание углерода и марганца (%), так как ему соответствует наибольший по абсолютной величине коэффициент. Далее по степени влияния следуют факторы: x_5 — содержание никеля, %; x_1 — содержание углерода, %; парное взаимодействие x_2x_3 — содержание марганца и кремния, %; парное взаимодействие x_2x_4 — содержание марганца и хрома, %; парное взаимодействие x_1x_4 — содержание углерода и хрома, %; x_6 — содержание молибдена, %; x_3 — содержание кремния, %; x_2 — содержание марганца, %.

Так как коэффициенты при x_1 , x_3 , x_6 , x_1x_2 , x_2x_3 положительны, то с их увеличением повышается предел прочности. Коэффициенты при x_2 , x_5 , x_1x_4 , x_2x_4 отрицательны, это означает, что с их уменьшением предел прочности будет увеличиваться.

Рассмотрим полученную зависимость предела текучести, предварительно выполнив округление до десятых долей:

$$y_2 = 501,4 + 26,4x_1 + 15,4x_2 - 6,2x_3 - 25x_5 + 13,6x_6 + 33,7x_1x_2 - 13x_1x_4 - 21,6x_2x_4.$$

Из уравнения следует, что наибольшее влияние оказывает парное взаимодействие x_1x_2 — содержание углерода и марганца (%), далее по степени влияния факторы распределены следующим образом: x_1 — содержание углерода, %, x_5 — содержание никеля, %; парное взаимодействие x_2x_4 — содержание марганца и хрома, %; x_2 — содержание марганца, %; x_6 — содержание молибдена, %; парное взаимодействие x_1x_4 — содержание углерода и хрома, %; x_3 — содержание кремния, %.

Так как коэффициенты при x_1 , x_2 , x_6 , x_1x_2 положительны, то с их увеличением повышается предел текучести. Коэффициенты при x_3 , x_5 , x_1x_4 , x_2x_4 отрицательны, это означает, что с их уменьшением предел текучести будет увеличиваться.

Рассмотрим полученную зависимость ударной вязкости, предварительно выполнив округление до десятых долей:

$$y_3 = 227,5 - 29,6x_1 + 15,4x_2 + 39,2x_5 + 9,2x_6 - 30x_1x_2 + 23,3x_1x_4 - 27,9x_2x_3.$$

Из уравнения следует, что наибольшее влияние оказывает x_5 — содержание молибдена (%), далее следуют: парное взаимодействие x_1x_2 —

содержание углерода и марганца, %; x_1 — содержание углерода, %; парное взаимодействие факторов x_2x_3 — содержание марганца и кремния, %; парное взаимодействие x_1x_4 — содержание углерода и хрома, %; x_2 — содержание марганца, %; x_6 — содержание молибдена, %.

Так как коэффициенты при x_2, x_5, x_6, x_1x_4 положительны, то с их увеличением повышается ударная вязкость. Коэффициенты при x_1, x_1x_2, x_2x_3 отрицательны, это означает, что с уменьшением x_1 и перечисленных взаимодействий ударная вязкость будет увеличиваться.

Рассмотрим полученную зависимость твердости, предварительно выполнив округление до десятых долей:

$$y_4 = 286,6 + 13,9x_1 + 3x_3 - 14,9x_5 + 8,3x_6 + 17,4x_1x_2 - 14,6x_1x_4 + 14,1x_2x_3 - 7,2x_2x_4.$$

Из уравнения следует, что наибольшее влияние оказывает парное взаимодействие x_1x_2 — содержание углерода и марганца (%), далее следуют факторы: x_5 — содержание никеля, %; парное взаимодействие x_1x_4 — содержание углерода и хрома, %; парное взаимодействие x_2x_3 — содержание марганца и кремния, %; x_1 — содержание углерода, %; x_6 — содержание молибдена, %; парное взаимодействие x_2x_4 — содержание марганца и хрома, %; x_3 — содержание кремния, %.

Так как коэффициенты при $x_1, x_3, x_6, x_1x_2, x_2x_3$ положительны, то с их увеличением повышается твердость. Коэффициенты при x_5, x_1x_4, x_2x_4 отрицательны, это означает, что с их уменьшением твердость будет увеличиваться.

Для детальной оценки влияния химических элементов на механические свойства зададим производственные данные плавки исследуемой марки стали (см. таблицу).

Из круговых диаграмм видно, что на предел прочности более сильное влияние оказывает x_1 — содержание углерода, 2,78 % (рис. 4, а, см. вторую сторону обложки), т. е. с увеличением количества углерода предел прочности увеличивается.

На предел текучести более сильное влияние также оказывает x_1 — содержание углерода,

3,61 %, т. е. с увеличением количества углерода предел текучести увеличивается (рис. 4, б, см. вторую сторону обложки).

На ударную вязкость более сильное влияние оказывает x_5 — содержание никеля, 3,25 %, т. е. с увеличением количества никеля ударная вязкость увеличивается. С увеличением x_1 — содержание углерода — 7,54 %, напротив, ударная вязкость понижается (рис. 4, в, см. вторую сторону обложки).

На твердость более сильное влияние оказывает x_1 — содержание углерода, 3,33 %, т. е. с увеличением количества углерода твердость увеличивается (рис. 4, г, см. вторую сторону обложки).

Рассмотрим графики зависимостей химических элементов, которые оказывают существенное влияние на требуемый уровень механических свойств исследуемой марки стали.

Из приведенного графика зависимости влияния углерода на предел прочности (σ_B) видно, что увеличение содержания углерода в пределах от 0,68 до 0,74 % резко повышает предел прочности от 841 до 968 Н/мм². При дальнейшем росте содержания углерода от 0,74 до 0,8 % прочность снижается от 968 до 935 Н/мм² (рис. 5, а).

Исследуя график зависимости влияния углерода на предел текучести ($\sigma_{0,2}$) (рис. 5, б), можно отметить, что с увеличением содержания углерода в пределах от 0,68 до 0,74 % резко увеличивается предел текучести от 434 до 515 Н/мм². При дальнейшем росте углерода от 0,74 до 0,8 % предел текучести практически остается неизменным (от 515 до 534 Н/мм²).

Анализируя график зависимости влияния никеля на ударную вязкость (KCU) (рис. 5, в), можно отметить, что с увеличением содержания никеля в пределах от 0,24 до 0,3 % резко увеличивается ударная вязкость от 156 до 264 кДж/м². При дальнейшем росте от 0,3 до 0,41 % ударная вязкость остается практически неизменной (от 264 до 252 кДж/м²). На основании этого можно сделать вывод, что никель сохраняет значение ударной вязкости практически на одном уровне.

Исследуя график зависимости влияния углерода на твердость (рис. 5, г), можно отметить, что с увеличением содержания углерода в пределах от 0,68 до 0,74 % резко повышается твердость (от 242 до 290 НВ). При дальнейшем росте углерода от 0,74 до 0,8 % твердость практически остается неизменной (от 290 до 296 НВ).

Производственные данные плавки валковой марки стали 75ХМФ

Production data of melting of the roll grade of steel 75HMF

C, %	Mn, %	Si, %	Cr, %	Ni, %	Mo, %
0,8	0,48	0,3	1,48	0,26	0,11

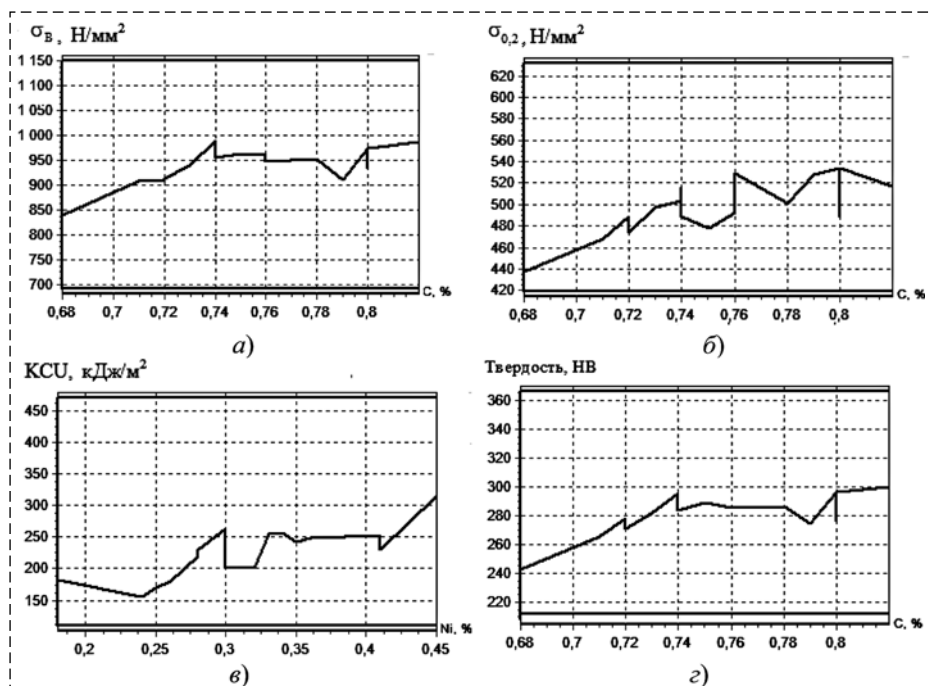


Рис. 5. Графики зависимостей влияния химических элементов на механические свойства сплава:

a — график зависимости влияния углерода на предел прочности; *б* — график зависимости влияния углерода на предел текучести; *в* — график зависимости влияния никеля на ударную вязкость; *г* — график зависимости влияния углерода на твердость

Fig. 5. Graphs of the influence of chemical elements on the mechanical properties of the alloy:

a — the graph of the effect of carbon on the tensile strength; *б* — the graph of the effect of carbon on the yield strength; *в* — the graph of the effect of nickel on the toughness; *г* — the graph of the effect of carbon on the hardness

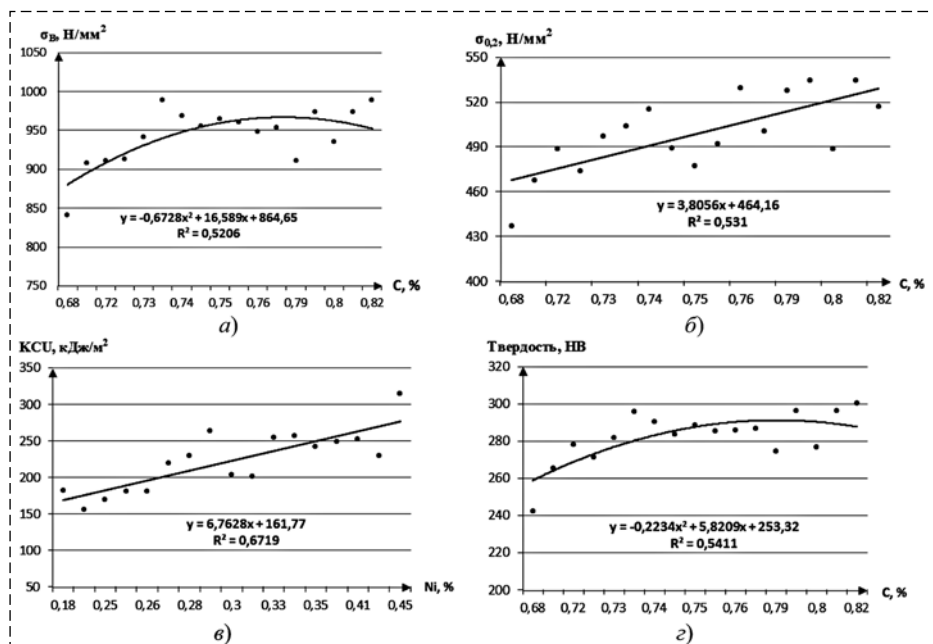


Рис. 6. Графики аппроксимирующих функций механических свойств сплава:

a — график зависимости влияния углерода на предел прочности; *б* — график зависимости влияния углерода на предел текучести; *в* — график зависимости влияния никеля на ударную вязкость; *г* — график зависимости влияния углерода на твердость

Fig. 6. Graphs of approximating functions of the mechanical properties of the alloy:

a — the graph of the effect of carbon on the tensile strength; *б* — the graph of the effect of carbon on the yield strength; *в* — the graph of the effect of nickel on the toughness; *г* — the graph of the effect of carbon on the hardness

На основе вышеприведенных графиков зависимостей влияния химических элементов на механические свойства исследуемой марки стали можно сделать вывод, что полученные механические характеристики находятся в допустимых пределах, которые регламентируются отраслевыми стандартами и техническими условиями ОСТ 24.023.22 и ТУ 3137-512-23846254—2014.

Для определения достоверности аппроксимации полученных графиков зависимостей, а также для прогнозирования изменения производственных данных воспользуемся возможностью конвертирования данных в формат .xls.

На рис. 6 представлены результаты аппроксимации полученных графиков зависимостей для исследуемой марки стали.

Исследуя полученные графики аппроксимирующих функций механических свойств исследуемой марки стали, можно отметить, что полученные значения коэффициентов детерминации $R^2 = 0,5206$; $R^2 = 0,531$; $R^2 = 0,6719$; $R^2 = 0,5411$ находятся в допустимых пределах ($R^2 = 0,47...0,79$) [13]. Такие значения коэффициентов детерминации могут быть объяснены высокой надежностью производственных данных, используемых при статистической обработке.

Из вышеизложенного можно сделать вывод, что выявленные зависимости влияния химических элементов на механические свойства позволяют опре-

делить требуемые механические свойства исследуемой марки стали [14].

Заключение

Результаты сравнительного анализа на примере выявленных зависимостей влияния химических элементов на механические свойства исследуемой марки стали 75ХМФ свидетельствуют о вычислительной эффективности программного продукта OptimalSostav. Используемый алгоритм обеспечивает повышенную точность расчета и позволяет скорректировать процесс выплавки сталей в рамках заданного химического состава для достижения требуемого комплекса свойств.

Список литературы

1. Кабулова Е. Г. Применение математического моделирования для прогнозирования свойств сплавов // Естественные и технические науки. 2015. № 4 (82). С. 198–200.
2. Шестакова Е. Н., Потапов А. И., Орлов Г. А. Пути повышения качества кованных прокатных валков // Инновационные технологии в металлургии и машиностроении: материалы международной конференции, посвященной памяти члена-корреспондента РАН, почетного доктора УрФУ В. Л. Колмогорова. Екатеринбург: Изд-во Уральского федерального университета имени Президента России Б. Н. Ельцина. 2014. С. 483–486.
3. Кузнецов Л. А., Корнеев А. М., Журавлева М. Г. Идентификация статистических моделей технологических процессов с заполнением пропусков в данных // Проблемы управления. 2007. № 1. С. 46–50.
4. Кузнецов Л. А., Журавлева М. Г., Вишняков Д. Ю. Техника построения многомерных непараметрических карт

контроля качества // Электротехнические комплексы и системы управления. 2008. № 3. С. 50–53.

5. Кузнецов Л. А., Черных М. В. Статистическая модель металлургической технологии // Известия вузов. Черная металлургия. 2007. № 11. С. 61–65.

6. Kozak L. Y. Conversion of the initial indices of the technological process of the smelting of steel for the subsequent simulation // Computer Research and Modeling, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 187–199.

7. Фрейдензон М. Е., Соколкин Б. П. и др. К вопросу комплексной оценки качества продукции // Сталь. 1977. № 1. С. 82–84.

8. Kochkovskaya S. S., Kletsova O. A., Kochkovskaya S. S. Study of the structure and properties of hot-rolling rolls from steel 70KH3G2VTB after heat treatment // Metal Science and Heat Treatment. 2015. Vol. 57, N. 1. P. 87–90.

9. Кочковская С. С., Сердюк А. И. Автоматизация процесса обработки экспериментальных данных по оптимизации химического состава опытных марок валковых сталей на основе дробно-факторного анализа // Автоматизация в промышленности. 2017. № 8. С. 54–56.

10. Агекян Т. А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. М.: Наука, 1972. 170 с.

11. Кочковская С. С., Сердюк А. И. Моделирование химического состава валковых марок сталей с помощью программного обеспечения OptimalSostav // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования: тезисы докладов 76-й международной научно-технической конференции. Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г. И. Носова. 2018. Т. 1. С. 260–261.

12. Кочковская С. С. Применение программного комплекса для расчета и контроля показателей качества валковых сталей и сплавов // Мехатроника, автоматика и робототехника: материалы III Международной научно-практической конференции. Новокузнецк: НИЦ МС, 2019. № 3. С. 82–84.

13. Рожков И. М., Власов С. А., Мулько Г. Н. Математические модели для выбора рациональной технологии и управления качеством стали. М.: Металлургия, 1990. 184 с.

14. Кочковская С. С., Сердюк А. И. Расчет оптимальных механических свойств по отношению к процентному содержанию легирующих элементов валковых марок сталей "OptimalSostav" // Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2018613600, Роспатент, 2018.

Development of Modeling Algorithm of the Characteristics of the Steels in the Subsystem of Management of the Production Resources of Steel Production

S. S. Kochkovskaya, lana1905@mail.ru,

Orsk Humanitarian-Technology Institute (Branch) of Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Orenburg State University", Orsk, 462403, Russian Federation

Corresponding author: Kochkovskaya Svetlana S., Senior Lecturer, Orsk Humanitarian-Technology Institute (Branch) of Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Orenburg State University", Orsk, 462403, Russian Federation, e-mail: lana1905@mail.ru

Accepted on June 14, 2019

Abstract

The article is devoted to the development of an algorithm for modeling the characteristics of steels in accordance with customer requirements. A mathematical model is presented that takes into account the optimal levels of the main factors and their interaction, providing the required values of the characteristics. The next step in the study of the mathematical model was modeling by means of functional modeling methodology IDEF0. Input and output data, as well as normative documents of model management and mechanisms of this management for building a functional model are defined. The

control mechanism was the software product *OptimalSostav*, developed using the object-oriented programming language Delphi. The software product is designed to simulate the characteristics of steels using the specified limits of permissible minimum and maximum values of mechanical properties. The algorithm of realization of the control mechanism, which is based on the fractional factor analysis, is described. The presented algorithm allows to identify the influence of chemical composition on the mechanical properties of steels in the form of mathematical and graphical dependencies and to determine the specified mechanical properties that meet the requirements of the customer. The main possibilities and the scope of the software product, which allows to solve the problem of predicting the optimal chemical composition, providing the required mechanical characteristics, as well as to adjust the process of steel melting within a given chemical composition to achieve the desired set of properties. The application of the software product on the example of the analysis of the influence of chemical elements on the mechanical properties of 75HMF roll steel is shown. The results of modeling in the form of mathematical and graphic dependences are given and the estimation of efficiency of application of the software product is given. The results of solving the problem of approximation of the obtained graphic dependences of the influence of chemical elements on the mechanical properties of the studied steel grade by means of Microsoft Excel are presented. It is established that the developed mathematical and algorithmic software of the software product allows to study the percentage of chemical elements in relation to the total composition of the alloy, based on the obtained pie charts and dependency graphs. The adequacy of the model is confirmed by experimental results.

Keywords: modeling algorithm, steel, required characteristics, mathematical modeling, software product

For citation:

Kochkovskaya S. S. Development of Modeling Algorithm of the Characteristics of the Steels in the Subsystem of Management of the Production Resources of Steel Production, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 10, pp. 615–622.

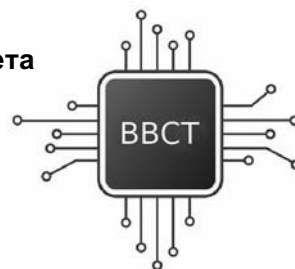
DOI: 10.17587/mau.20.615-622

References

1. **Kabulova E. G.** *Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki*, 2015, no. 4 (82), pp. 198–200 (in Russian).
2. **Shestakova E. N., Potapov A. I., Orlov G. A.** *Materials of the international conference dedicated to the memory of corresponding member of RAS, honorary doctor of UrFU V. L. Kolmogorov "Innovative technologies in metallurgy and mechanical engineering"*, Ekaterinburg, Publishing house of Uralskii federalnyi universitet imeni Prezidenta Rossii B N Eltsina, 2014, pp. 483–486 (in Russian).
3. **Kuznetsov L. A., Korneev A. M., Zhuravleva M. G.** *Problems of management*, 2007, no. 1, pp. 46–50 (in Russian).
4. **Kuznetsov L. A., Zhuravleva M. G., Vishnyakov D. U.** *Electrotechnical complexes and control systems*, 2008, no. 3, pp. 50–53 (in Russian).
5. **Kuznetsov L. A., Chernykh M. V.** *News of higher education institutions. Ferrous metallurgy*, 2007, no. 11, pp. 61–65 (in Russian).
6. **Kozak L. Y.** *Computer Research and Modeling*, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 187–199.
7. **Friedenson M. E., Sokolkin B. P.** et al. *Stal*, 1977, no. 1, pp. 82–84 (in Russian).
8. **Kochkovskaya S. S.** *Metal Science and Heat Treatment*, 2015, vol. 57, no. 1, pp. 87–90.
9. **Kochkovskaya S. S., Serdyuk A. I.** *Avtomatizatsiya v Promyshlennosti*, 2017, no. 8, pp. 54–56 (in Russian).
10. **Agekyan T. A.** *Fundamentals of error theory for astronomers and physicists*, Moscow, Nauka, 1972, 170 p. (in Russian).
11. **Kochkovskaya S. S., Serdyuk A. I.** Modeling of chemical composition of roll steel grades by means of the software of *OptimalSostav*, *Theses of reports of the 76th international scientific and technical conference "Current problems of modern science, the equipment and education"*, Magnitogorsk, Publishing house of Magnitogorsk gos tekhn un-ta im G I Nosova, 2018, vol. 1, pp. 260–261 (in Russian).
12. **Kochkovskaya S. S.** *Proceedings of the III International scientific and practical conference "Mechatronics, automation and robotics"*, Novokuznetsk, SIC MS, 2019, no. 3, pp. 82–84 (in Russian).
13. **Rozhkov I. M., Vlasov S. A., Mulk G. N.** Mathematical model for choice of rational technologies and quality control of steel, Moscow, Metallurgiya, 1990, pp. 184 (in Russian).
14. **Kochkovskaya S. S., Serdyuk A. I.** Calculation of optimum mechanical properties in relation to the percentage of the alloying elements of roll steel grades "OptimalSostav", *Svidetelstvo ob ofitsialnoi registratsii programmy dlia EVM*, no. 2018613600, Rospatent, 2018 (in Russian).



17—18 апреля 2020 г. в Барнауле
на базе Алтайского государственного университета
состоится



**X Международная
научно-практическая конференция**

**«ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ
В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ,
АВТОМАТИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ И ПРОИЗВОДСТВА
(ВВСТ-2020)»**

Секции работы конференции

Секция 1

Многопроцессорные вычислительные системы и сети, многоядерные процессоры и программируемые логические структуры, цифровая обработка сигналов: архитектура и особенности разработки аппаратного обеспечения многопроцессорных вычислительных систем (МВС), сигнальных (ЦСП) и многоядерных процессоров, устройств на базе ПЛИС; использование ускорителей GPU, FPGA и компьютеров с нетрадиционной архитектурой в высокопроизводительных вычислениях; цифровая обработка и синтез сигналов.

Секция 2

Параллельное программирование и компьютерное моделирование явлений и процессов в естественнонаучных областях с использованием параллельных вычислений: технологии программирования, средства и инструменты для разработки, отладки и оптимизации параллельных приложений; GRID-системы, облачные технологии, нейросетевые технологии; системы и методы защиты компьютерной информации; высокопроизводительное компьютерное многомасштабное предсказательное моделирование в нанoeлектронике, химии и физике наноструктурированных материалов и метаматериалов с использованием параллельных вычислений.

Секция 3

Робототехника, автоматизация управления, автоматизация производства и научного эксперимента: робототехника и системы с искусственным интеллектом; автоматизация управления и мехатроника; автоматизация производства (АСУП, АСУТП и автоматические линии); автоматизация научного эксперимента и проблемно-ориентированные интеллектуальные исследовательские лаборатории с высокой степенью интеграции междисциплинарных методов и компьютеризированных приборных комплексов; использование ИКТ, средств мультимедиа и средств телекоммуникаций в системах управления и учебном процессе.

**Подробная информация на сайте конференции:
<http://konf.asu.ru/hpcst/>**

A. V. Molodenkov, iptmuran@san.ru, **Ya. G. Sapunkov**,
Precision Mechanics and Control Problems Institute, RAS, Saratov, 410028 Russian Federation,
T. V. Molodenkova, moltw@yandex.ru,
Saratov State Technical University, Saratov, 410054, Russian Federation

Corresponding author: Molodenkov Aleksey V., Dr. of Tech. Sciences, Leading Researcher, Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Precision Mechanics and Control Problems Institute, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: iptmuran@san.ru

Accepted on March 28, 2019

The New Analytical Algorithm for Determining the Strapdown INS Orientation

Abstract

The analytical solution of an approximate (truncated) equation for the vector of a rigid body finite rotation has made it possible to solve the problem of determining the quaternion of orientation of a rigid body for an arbitrary angular velocity and small angle of rotation of a rigid body with the help of quadratures. Proceeding from this solution, the following approach to the construction of the new analytical algorithm for computation of a rigid body orientation with the use of strapdown INS is proposed: 1) By the set components of the angular velocity of a rigid body on the basis of mutually — unambiguous changes of the variables at each time point, a new angular velocity of a rigid body is calculated; 2) Using the new angular velocity and the initial position of a rigid body, with the help of the quadratures we find the exact solution of an approximate linear equation for the vector of a rigid body finite rotation with a zero initial condition; 3) The value of the quaternion orientation of a rigid body (strapdown INS) is determined by the vector of finite rotation. During construction of the algorithm for strapdown INS orientation at each subsequent step the change of the variables takes into account the previous step of the algorithm in such a way that each time the initial value of the vector of finite rotation of a rigid body will be equal to zero. Since the proposed algorithm for the analytical solution of the approximate linear equation for the vector of finite rotation is exact, it has a regular character for all angular motions of a rigid body).

Keywords: analytical solution, algorithm, orientation, vector of finite rotation, arbitrary angular velocity, rigid body, strapdown INS, quaternion

Acknowledgements: This work was supported by the RFBR grant 19-01-00205.

For citation:

Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G., Molodenkova T. V. The New Analytical Algorithm for Determining the Strapdown INS Orientation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 10, pp. 624—628.

УДК 531.3

DOI: 10.17587/mau.20.624-628

А. В. Молоденков, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., iptmuran@san.ru,
Я. Г. Сапунков, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., iptmuran@san.ru,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов,
Т. В. Молоденкова, канд. физ.-мат. наук, доц., moltw@yandex.ru,
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина

Новый аналитический алгоритм определения ориентации БИНС¹

На основе полученного точного решения приближенного (усеченного) уравнения для вектора конечного поворота твердого тела с помощью квадратур решена задача определения кватерниона ориентации твердого тела при произвольном векторе угловой скорости и малом угле поворота твердого тела. Исходя из этого решения предложен

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-01-00205.

следующий подход к построению нового аналитического алгоритма для вычисления ориентации твердого тела с помощью БИНС: 1) по заданным компонентам вектора угловой скорости твердого тела на основе взаимно-однозначных замен переменных в каждый момент времени вычисляется новый вектор угловой скорости некоторой новой введенной системы координат; 2) используя новый вектор угловой скорости и начальное положение твердого тела, с помощью квадратур находится точное решение приближенного линейного уравнения для вектора конечного поворота с нулевым начальным условием; 3) по вектору конечного поворота определяется значение кватерниона ориентации твердого тела (БИНС). Отметим, что при построении алгоритма ориентации БИНС на каждом последующем шаге замена переменных учитывает предыдущий шаг алгоритма таким образом, что начальное значение вектора конечного поворота твердого тела каждый раз будет нулевым. Поскольку предлагаемый алгоритм аналитического решения приближенного линейного уравнения для вектора конечного поворота твердого тела является точным, он носит регулярный характер при всех угловых движениях твердого тела.

Ключевые слова: аналитическое решение, алгоритм, ориентация, вектор конечного поворота, произвольная угловая скорость, твердое тело, БИНС, кватернион

Introduction

During operation of many strapdown inertial navigation systems (SINS) the vector of a rigid body finite rotation is periodically calculated by the method of approximate solution of the approximate linear differential equation for the vector of finite rotation (in the theory and practice of SINS construction, in ultra rapid cycles of algorithms for small angles of rotation, the nonlinear term in the differential equation for the vector of finite rotation of a rigid body is neglected). The angular velocity vector of a rigid body is the input quantity in the equation. Note that the full nonlinear differential equation for the vector of finite rotation of a rigid body is an analog of the quaternion linear equation; the vector and the quaternion of the rigid body orientation are linked by known relations. The approximate linear differential equation for the vector of finite rotation in the literature is solved by various numerical methods, for example, by Picard's method, then the second iteration of this method in the practice of SINS can be taken for the final one. This term in the iteration formula of Picard's method is called a non-commutative rotation vector, or "coning". For certain motions of a rigid body, this term makes a significant contribution to the error of the method. The study of non-commutative rotations (or "coning") as a kind of mechanical motion of bodies, separation of numerical algorithms for determining the orientation of a rigid body (SINS) for rapid and slow counting cycles are aimed at compensation for the effect of this phenomenon. Meanwhile, for some new angular velocity vector, which is obtained in determining the orientation of a rigid body (SINS), based on the initial arbitrary angular velocity vector in unambiguous interchanges of variables in the motion equations for a rigid body, the approximate differential equation for the vector of finite rotation of a rigid body admits of an exact analytic solution. We will show this.

The problem is to define the quaternion of orientation Λ of a rigid body with respect to an arbitrary given angular velocity vector $\omega(t)$ and the initial angular position of a rigid body in space based on the quaternion kinematic equation known as the Darboux problem. Further, we make changes of variables by the scheme $\Lambda \rightarrow U$, where U is the quaternion of the orientation of some introduced coordinate system, it is always possible to reverse the transition $U \rightarrow \Lambda$. These changes have the character of rotation transformations and reduce the initial problem of determining the orientation of a rigid body (quaternion Λ) with an arbitrary variable angular velocity vector $\omega(t)$ to the problem where the angular velocity vector $w(t)$ of the introduced coordinate system, remaining generally variable in absolute value, performs a definite motion — rotates around one of the axes of the coordinate system. This motion is generalized conical precession and agrees well with the known Poincaré's concept that any rigid body rotation about a fixed point can be represented as a conical motion. Finding an analytical solution of the quaternion differential equation obtained with respect to the new unknown quaternion U is still a difficult problem. However, the equation differing from this only by the coefficient "1/2" in the right-hand side (i.e., with the angular velocity vector $\Omega(t)/2$) is solved in closed form. Moreover, we note that the quaternion differential equation is isomorphic to the homogeneous vector differential equation of Poisson.

The resulting problem with the angular velocity vector $\Omega(t)$ and the unknown quaternion of orientation U is associated with the complete nonlinear differential equation with respect to the unknown vector of finite rotation of a rigid body x . The approximate linear equation for the vector of finite rotation, which is an inhomogeneous vector differential equation whose homogeneous part is equivalent to the Poisson equation with the vector coefficient $\Omega(t)/2$,

becomes analytically solvable and its solution $\mathbf{x}^*$ is obtained in quadratures by the Lagrange method.

The exact solution of the approximate linear equation for the vector of finite rotation of a rigid body made it possible to solve the problem of determining the quaternion of orientation of a rigid body for an arbitrary angular velocity and small angle of rotation of a rigid body with the help of quadratures. Proceeding from this solution, the following approach to the design of a new algorithm for computation of SINS orientation is proposed: 1) by the set components of the angular velocity of a rigid body on the basis of unambiguous interchanges of the variables at each time point, a new angular velocity $\boldsymbol{\Omega}(t)$ of some new coordinate system is calculated; 2) using the new angular velocity and the initial position of a rigid body, we find the exact solution $\mathbf{x}^*$ of the approximate linear equation for the vector of finite rotation with a zero initial condition with the help of quadratures; 3) the value of the quaternion orientation of a rigid body (SINS) is determined by the vector of finite rotation on the scheme $\mathbf{x}^* \approx \mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{U} \rightarrow \boldsymbol{\Lambda}$.

During construction of the algorithm for SINS orientation at each subsequent step the change of the variables takes into account the previous step of the algorithm in such a way that each time the initial value of the vector of finite rotation of a rigid body will be equal to zero. Since the proposed algorithm for the analytical solution of the approximate linear equation for the vector of finite rotation is exact, it has a regular character for all angular motions of a rigid body.

Previously, the authors constructed the exact solution of the Bortz approximate equation for the orientation vector of a rigid body and the quaternion orientation algorithm of SINS on its basis [1, 2].

1. Statement of the problem of determining the orientation of a rigid body (SINS)

Consider the Cauchy problem for quaternion kinematic equation [3] with arbitrary given angular velocity vector-function $\boldsymbol{\omega}(t)$, written in the following form (this problem is known as the Darboux problem):

$$2\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \boldsymbol{\Lambda} \circ \boldsymbol{\omega}(t), \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(t_0) = \boldsymbol{\Lambda}_0. \quad (1.2)$$

Here $\boldsymbol{\Lambda}(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$ is a quaternion describing the position of a rigid body in

an inertial space; $\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_1(t)i_1 + \omega_2(t)i_2 + \omega_3(t)i_3$ is the angular velocity vector of the rigid body specified by its projections onto body-fixed coordinate axes; i_1, i_2, i_3 — the units of the hypercomplex space (imaginary Hamiltonian units), which can be identified with the vectors of a three-dimensional vector space $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$; the symbol "o" stands for the quaternion product; $\boldsymbol{\Lambda}_0$ is the initial value of the quaternion $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ at $t = t_0, t \in [t_0, \infty)$ (t_0 set equal to 0). The problem is to find the quaternion $\boldsymbol{\Lambda}(t)$.

The problem of determining of the vector of a rigid body finite rotation $\mathbf{x}(t)$ [3] relative to an inertial space can also be posed by solving the exact differential equation for the vector of finite rotation of a rigid body

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}/2 + (\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})\mathbf{x}/4, \quad (1.3)$$

where " $\times$ " and " $(\cdot, \cdot)$ " mean the vector and the scalar products. In equation (1.3) the input quantity is the angular velocity vector $\boldsymbol{\omega}$. Note that the nonlinear equation (1.3) for the vector of finite rotation of a rigid body $\mathbf{x}$ is an analogue of the quaternion linear equation (1.1); vector $\mathbf{x}$ and quaternion $\boldsymbol{\Lambda}$ are connected by the relations:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= 2\boldsymbol{\lambda}_v/\lambda_0 = 2\mathbf{e}\operatorname{tg}(\varphi/2), \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\lambda}_v/\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \\ \boldsymbol{\lambda}_v &= \lambda_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2 + \lambda_3\mathbf{i}_3, \\ \cos \varphi &= \lambda_0, \quad \sin \varphi = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}, \quad 0 \leq \varphi < \pi, \end{aligned} \quad (1.4)$$

where φ is the angle of orientation of a rigid body and $\mathbf{e}$ — the Euler axis of rotation. In the practice of constructing of SINS orientation algorithms by numerical solution of equation (1.3) on a time interval $t_{m-1} \leq t < t_m$ the third member in this equation is neglected for small angles of rotation (it is the magnitude of the second order). If the derived simplified (approximate) differential equation

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{x}^* \times \boldsymbol{\omega}/2 \quad (1.5)$$

is solved by Picard's iterative method, then the second iteration of this method is taken for the final one [4, 5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_m^* &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} (\boldsymbol{\omega}(t)dt + \boldsymbol{\alpha}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)/2)dt = \boldsymbol{\alpha}_m + \boldsymbol{\beta}_m, \\ \boldsymbol{\alpha}(t) &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau, \quad \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{\alpha}(t_m), \\ \boldsymbol{\beta}(t) &= \int_{t_{m-1}}^{t_m} \boldsymbol{\alpha}(\tau) \times \boldsymbol{\omega}(\tau)d\tau/2, \quad \boldsymbol{\beta}_m = \boldsymbol{\beta}(t_m), \end{aligned}$$

where vector β is called a non-commutative rotation vector, or "coning". For certain motions of a rigid body, this term makes a significant contribution to the error of the method. The study of non-commutative rotations (or "coning") as a kind of mechanical motion of bodies, separation of numerical algorithms for determining the orientation of a rigid body SINS) for rapid and slow counting cycles are aimed at compensation for the effect of this phenomenon. Meanwhile, for some new angular velocity vector $\mathbf{w}(t)$, which is obtained in determining the orientation of a rigid body (SINS), based on the initial arbitrary angular velocity vector $\omega(t)$ in unambiguous replacements of variables in the motion equations for a rigid body, the approximate equation for the vector of finite rotation of a rigid body admits of an exact analytic solution, which will be shown in what follows.

2. The exact solution of the approximate equation for the vector of finite rotation of a rigid body and design of the algorithm for determining SINS orientation on its basis

Let's write unambiguous replacements of variables in the problem (1.1), (1.2) [6] according to the scheme $\Lambda \rightarrow \mathbf{U}$, where $\mathbf{U}(t)$ is the quaternion of orientation of some introduced coordinate system (new variable), quaternion $\mathbf{V}(t)$ is the generated transition operator, $\mathbf{K}$ is an arbitrary constant quaternion:

$$\Lambda(t) = \mathbf{U}(t) \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{V}(t), \|\mathbf{K}\| = \|\mathbf{V}\| = 1, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{V}(t) = (-\mathbf{i}_1 \sin N(t) + \mathbf{i}_2 \cos N(t)) \circ \exp(\mathbf{i}_3 N(t)/2) \circ \exp(\mathbf{i}_1 \Omega_1(t)/2), \quad (2.2)$$

$$2\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{U} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{w}(t) = \mu(t)(-\mathbf{i}_1 \sin N(t) + \mathbf{i}_2 \cos N(t)) - 2\mathbf{i}_3 \nu(t), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \omega_2(t) \cos \Omega_1(t) - \omega_3(t) \sin \Omega_1(t), \\ \nu(t) &= \omega_2(t) \sin \Omega_1(t) + \omega_3(t) \cos \Omega_1(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} N(t) &= \int_0^t \nu(\tau) d\tau, \quad \Omega_1(t) = \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau, \\ \mathbf{U}(0) &= \Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \tilde{\mathbf{K}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

where (2.3)—(2.6) the new problem for determining the orientation of a rigid body with the new angular velocity vector $\mathbf{w}(t)$, " $\|\cdot\|$ " means quaternion norm.

Finding an analytical solution to the resulting quaternion differential equation (2.3) remains a difficult task. However, the equation that differs from this one only in the coefficient "1/2" on the right side (i.e. with the angular velocity vector $\mathbf{w}(t)/2$)

$$2\dot{\Psi} = \Psi \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}/2, \quad (2.7)$$

$$\Psi(0) = \Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \tilde{\mathbf{K}} \quad (2.8)$$

is solved in a closed form. Choose quaternion $\mathbf{K}$ in the form $\mathbf{K} = \Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2)$ so that the initial conditions (2.6), (2.8) become unit $\mathbf{U}(0) = \Psi(0) = 1$. Note that this technique with quaternion $\mathbf{K}$ is important in the subsequent construction of the algorithm of SINS orientation. The solution of the Cauchy problem (2.7), (2.8) will be written as follows:

$$\Psi = \Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \Phi(t) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\Lambda}_0, \quad (2.9)$$

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{i}_2 M(t)/4) \circ \exp(-\mathbf{i}_3 N(t)/2), \quad (2.10)$$

$$M(t) = \int_0^t \mu(\tau) d\tau.$$

We check the correctness of the obtained solution of the problem (2.7), (2.8) by differentiating the expression (2.9) taking into account (2.10)

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t) &= \Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \Phi(t) \circ (\mu(t) \exp(\mathbf{i}_3 N(t)/2) \circ \\ &\circ \mathbf{i}_2 \circ \exp(-\mathbf{i}_3 N(t)/2) / 4 - \mathbf{i}_3 \nu(t)/2) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\Lambda}_0 = \\ &= \Psi(t) \circ \Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ (\mu(t)(-\mathbf{i}_1 \sin N(t) + \mathbf{i}_2 \cos N(t)) - \\ &- 2\mathbf{i}_3 \nu(t)) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\Lambda}_0 / 4 \end{aligned}$$

or otherwise

$$2\dot{\Psi} = \Psi \circ \Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \mathbf{w}(t) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\Lambda}_0 / 2$$

herewith $\Psi(0) = 1$, that matches with expressions (2.7), (2.8).

On the basis of expressions of type (2.4) we associate the reduced quaternion problem of determining orientation (2.3)—(2.6) with the problem with the vector approximate differential equation of the type (1.5):

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \mathbf{w}(t) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\Lambda}_0 + \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} &+ \mathbf{x}^* \times (\Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \mathbf{w}(t) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\Lambda}_0) / 2, \\ \mathbf{x}^*(0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

We note that the homogeneous part of the vector linear differential equation (2.11) is equivalent to the solvable system (2.7) written in the form of a vector differential Poisson equation. From the Lagrange method of solving linear inhomogeneous differential systems of equations, the exact solution of the approximate equation (2.11) will have the form on the basis of (2.9), (2.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2) \circ \tilde{\Phi}(t) \circ \\ &\circ \int_0^t \Phi(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\Phi}(\tau) d\tau \circ \Phi(t) \circ \mathbf{i}_2 \circ \tilde{\Lambda}_0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

We check the correctness of the obtained solution of the equation (2.12), (2.8) by differentiating the expression (2.13):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}^* &= \mathbf{K} \circ (\tilde{\Phi}(t) \circ \int_0^t \Phi(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\Phi}(\tau) d\tau \circ \Phi(t) \circ \mathbf{w}(t) - \\ &- \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\Phi}(t) \circ \int_0^t \Phi(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\Phi}(\tau) d\tau \circ \Phi(t)) \circ \tilde{\mathbf{K}}/4 + \\ &+ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \circ (\tilde{\Phi}(t) \circ \int_0^t \Phi(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\Phi}(\tau) d\tau \circ \\ &\circ \Phi(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \mathbf{K} \circ \tilde{\Phi}(t) \circ \\ &\circ \int_0^t \Phi(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\Phi}(\tau) d\tau \circ \Phi(t)) \circ \tilde{\mathbf{K}}/4 + \\ &+ \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{x}^* \times (\mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}})/2 + \mathbf{K} \circ \mathbf{w}(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}.\end{aligned}$$

Thus, the problem of determining the orientation of a rigid body (1.1)–(1.3) on the basis of (1.5) at small rotation angles is completely solved with the help of quadratures. We give the analytical algorithm for determining orientation of a rigid body (SINS) at arbitrary angles of rotation:

1) using the components of angular velocity vector $\omega(t)$ of a rigid body, functions $\mu(t)$, $\nu(t)$ are calculated at each moment of time t by the formulas:

$$\begin{aligned}\Omega_1(t) &= \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau, \\ \mu(t) &= \omega_2(t) \cos \Omega_1(t) - \omega_3(t) \sin \Omega_1(t), \\ \nu(t) &= \omega_2(t) \sin \Omega_1(t) + \omega_3(t) \cos \Omega_1(t);\end{aligned}\quad (2.14)$$

2) vector $\mathbf{w}(t)$ is determined by the calculated $\mu(t)$, $\nu(t)$:

$$\begin{aligned}N(t) &= \int_0^t \nu(\tau) d\tau, \\ \mathbf{w}(t) &= \mu(t)(-\mathbf{i}_1 \sin N(t) + \mathbf{i}_2 \cos N(t)) - 2\mathbf{i}_3 \nu(t);\end{aligned}\quad (2.15)$$

3) the approximate value of the vector of finite rotation of a rigid body $\mathbf{x}^*$ is calculated using vector $\mathbf{w}(t)$ and the initial position of rigid body Λ_0 :

$$M(t) = \int_0^t \mu(\tau) d\tau, \quad (2.16)$$

$$\Phi(t) = \exp(\mathbf{i}_2 M(t)/4) \circ \exp(-\mathbf{i}_3 N(t)/2),$$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{K} \circ \tilde{\Phi}(t) \circ \int_0^t \Phi(\tau) \circ \mathbf{w}(\tau) \circ \tilde{\Phi}(\tau) d\tau \circ \Phi(t) \circ \tilde{\mathbf{K}}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{K} = \Lambda_0 \circ (-\mathbf{i}_2);$$

4) the components of quaternion $\mathbf{U}$ are determined by the vector $\mathbf{x}^*$ on the basis of formulas of the type (1.4);

5) an approximate value of quaternion of a rigid body (SINS) orientation Λ^{approx} is obtained

$$\begin{aligned}\Lambda^{approx} &= \mathbf{U}(t) \circ \mathbf{K} \circ (-\mathbf{i}_1 \sin N(t) + \mathbf{i}_2 \cos N(t)) \circ \\ &\circ \exp(\mathbf{i}_3 N(t)/2) \circ \exp(\mathbf{i}_1 \Omega_1(t)/2).\end{aligned}$$

Quaternion $\mathbf{K}$ should be selected in the form $\mathbf{K}_m = \Lambda_{m-1} \circ (-\mathbf{i}_2)$ when implementing the SINS orientation algorithm at each subsequent step m of algorithm. Then the initial value of variable $\mathbf{x}^*$ will be zero each time.

Conclusion

In contrast to the algorithms for determining the orientation of an object described in [4, 5, 7] using approximate numerical solutions of a truncated equation for a vector of orientation of a rigid body and reading information about the angular velocity of an object directly from sensing elements of SINS, the essence of the approach proposed in the article is that by first transforming this information using formulas (2.14), (2.15), the equation for the vector of the final rotation of a rigid body becomes clearly solvable by formulas (2.17). The quaternion on the basis of which the solution of the problem is built is written in elementary functions and quadratures by formulas (2.16).

References

1. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G., Molodenkova T. V., Perelyaev S. E. The exact solution of the Bortz approximate equation and construction of the quaternion orientation algorithm of strapdown INS on its basis, in *Proc. of 25th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, ICINS 2018, CRSI Electropribor*, 2018, pp. 1–4.
2. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G., Molodenkova T. V. The exact solution of the Bortz approximate equation and construction of the quaternion orientation algorithm of SINS on its basis, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 5, pp. 335–340.
3. Branetz V. N., Shmyglevskij I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachah orientatsii tverdogo tela* (Application of Quaternions to Rigid Body Orientation Problems), Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).
4. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1: Attitude algorithms, *J. Guidance Control Dynamics*, 1998, vol. 21, no. 1, pp. 19–28.
5. Savage P. G. Strapdown analytics. Strapdown Associates Inc., Maple Plan, Minnesota, 2007.
6. Molodenkov A. V. On the solution of the Darboux problem, *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 167–176.
7. Mark J. G., Tazartes D. A. Tuning of coning algorithms to gyro data frequency response characteristics, *J. Guidance Control Dynamics*, 2001, vol. 24, no. 4, pp. 641–646.

М. Ю. Шавин, shawinmihail@gmail.com,
Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный,
Д. А. Притыкин, канд. физ.-мат. наук, dpritykin@rambler.ru,
Сколковский институт науки и технологий, Москва

Синтез системы управления квадрокоптером с поворотными роторами и наблюдение за подвижной целью

Предлагаются алгоритмы системы управления и навигации для беспилотного летательного аппарата (БЛА) с четырьмя поворотными роторами. Рассматриваемый аппарат реализует так называемую X-схему, основным элементом конструкции является корпус с симметричными лучами, на концах которых закреплены двигатели с пропеллерами. Отличие от классической конструкции квадрокоптера состоит в том, что аппарат снабжен дополнительными сервоприводами, способными изменять направление оси каждого ротора относительно корпуса, за счет чего увеличивается размерность вектора управляющих воздействий. Наличие дополнительных исполнительных органов системы управления, с одной стороны, открывает новые возможности использования БЛА, а с другой стороны, существенно усложняет модель динамики аппарата, что приводит к необходимости разработки новых алгоритмов управления.

Сформулирована математическая модель динамики аппарата. Показано, что наличие поворотных роторов позволяет добиться независимого управления положением и ориентацией аппарата. Синтезирован контур управления, в основе которого лежит аналитическое обращение динамики БЛА. Анализ полученных выражений для компонент вектора управляющих воздействий с применением численных методов позволяет учесть технические ограничения на максимальные обороты двигателей и углы отклонения сервоприводов.

Обратные связи в контуре управления реализованы посредством модели бортовых датчиков, характеристики которых соответствуют системе отслеживания движения, использованной при разработке прототипа БЛА. Для обработки сигналов бортовых датчиков применяется сигма-точечный фильтр Калмана.

Приведены результаты численных экспериментов, которые демонстрируют работоспособность алгоритмов управления и оценки состояния. В эксперименте аппарат выполняет движение по некоторой наперед заданной траектории, ориентируя при этом жестко закрепленную на корпусе камеру так, чтобы она отслеживала подвижный объект, также осуществляющий программное перемещение в трехмерном пространстве. Результаты численных экспериментов подтверждают способность аппарата выполнять сложные маневры, требующие независимого управления перемещением центра масс и ориентацией корпуса.

Ключевые слова: управление БЛА, квадрокоптер, поворотные роторы, обращение динамики, сигма-точечный фильтр Калмана

Введение

Беспилотные летательные аппараты (БЛА) мультироторного типа находят все более широкое применение в различных областях человеческой деятельности, а миниатюризация и доступность электронных компонентов их бортового оборудования приводит к расширению спектра задач, в решении которых используются такие аппараты. Интерес исследователей к БЛА обусловлен также и тем, что они являются доступным средством для отработки новых технологий в аэрокосмической отрасли [1]. С момента создания первых квадрокоптеров интенсивно ведутся исследования в области их динамики и управления, причем число работ столь велико, что мы ограничимся ссылкой на статью [2], в которой приведен обзор и качественный анализ основных алгоритмов. Однако, несмотря на обилие публикаций, в области управляемой динамики квадрокоптеров остаются перспективные направления, среди которых усовершенствование конструкции БЛА,

связанное с увеличением размерности вектора управляющих воздействий. Конструктивно это достигается, например, с помощью сервоприводов, способных поворачивать роторы с пропеллерами относительно корпуса.

Стандартный квадрокоптер с четырехмерным вектором управляющих воздействий и шестью степенями свободы корпуса аппарата не способен, например, независимо управлять положением и ориентацией. Это приводит к необходимости иметь дополнительные устройства для наведения камер или лазерных дальномеров, используемых при выполнении ряда стандартных для БЛА задач. Возможность независимо управлять положением и ориентацией, приобретаемая за счет использования поворотных роторов, влияет не только на работу полезной нагрузки и датчиков, но и на функциональные возможности всей системы в целом. Согласно работе [3] усовершенствованные таким образом квадрокоптеры более устойчивы к возмущениям внешней среды, а также лучше, чем стандартные квадрокоптеры, пригодны для

вертикального взлета и посадки на неровные поверхности. Достоинства БЛА с поворотными роторами отмечают и исследователи, работающие над управлением БЛА в экстренных ситуациях (при отказе части двигателей) [4, 5]. В работе [4] обосновывается достижение более высокой скорости за счет выбора оптимальной по отношению к набегающему потоку ориентации, а также более рациональное по сравнению со стандартными аппаратами энергопотребление. В работе [5] отмечена перспективность конструкции с поворотными роторами, однако ее применение не рассматривается из-за сложности реализации. Использование поворотных роторов действительно усложняет реализацию контура управления [6—9] и не позволяет применять ставшую классической изящную схему управления [10], однако мы полагаем, что предлагаемое нами аналитическое обращение динамики системы позволит преодолеть некоторую часть возникающих трудностей.

Отметим несколько работ, в которых в той или иной степени рассматривалась управляемая динамика квадрокоптера с поворотными роторами. Общая схема построения управления с помощью обращения динамики модели обсуждается в статье [3]. В работе [7] контур управления строится с помощью численного обращения динамики (фактически, поскольку размерность вектора управляющих воздействий больше размерности вектора фазовых переменных, в каждом такте управления вычисляется псевдообратная матрица Мура—Пенроуза). Тот же прием используется в известной работе [6], где перед обращением выполнен дополнительный переход от переменных положение, угловая скорость к переменным скорость, угловое ускорение, что позволяет преобразовать получившуюся систему, выразив искомые управляющие воздействия через управляющие параметры, в качестве которых выбраны обороты винтов и скорости поворота сервоприводов. Работа [6] примечательна тем, что в ней обсуждается способ выполнения существующих в системе технических ограничений на обороты роторов и углы отклонения сервоприводов за счет работы со штрафными функциями, что становится возможным благодаря переопределенности обрабатываемой системы. Однако, строго

говоря, этот подход предполагает нахождение решения с минимумом вращательной энергии роторов, а не непосредственное удовлетворение ограничений на максимальные обороты.

В работе [11] для квадрокоптера с поворотными роторами обсуждается построение регулятора на основе скользящих режимов управления. Работа [12], выполненная той же группой исследователей, показывает сравнение квадрокоптера с поворотными роторами и стандартного квадрокоптера при выполнении задачи слежения. В первом случае система управления демонстрирует более высокую робастность при наличии помех измерений, возмущений внешней среды и резких ускорений при маневрах.

Основным результатом нашей статьи является полное описание построения системы управления, включающее в себя аналитическое обращение динамики модели, явно сформулированный метод учета ограничений на управляющие воздействия и алгоритм определения состояния системы по модели датчиков. В первом разделе приводится постановка задачи. Далее кратко описана математическая модель системы, опубликованная ранее в работе [13]. Затем обсуждается синтез контура управления, рассматривается модель датчиков и алгоритм оценки состояния системы, в качестве которого выбран сигма-точечный фильтр Калмана, и представлены результаты численных экспериментов с моделью.

Постановка задачи

Общий вид аппарата представлен на рис. 1. Основным элементом конструкции является корпус, из которого выходят лучи с закреплен-

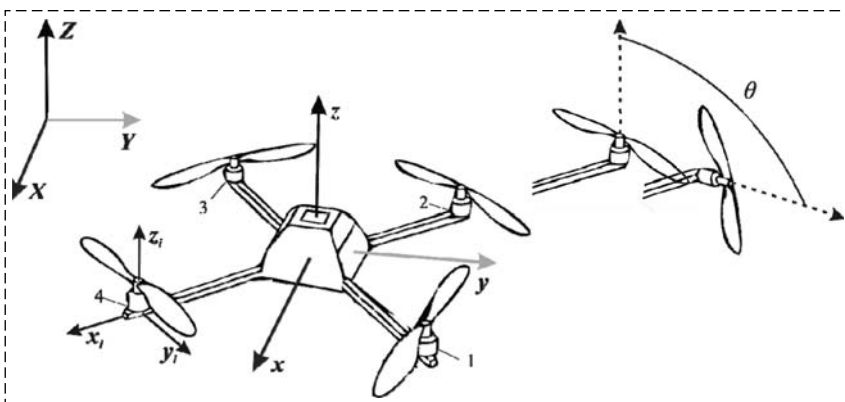


Рис. 1. Общий вид квадрокоптера и используемые системы координат
Fig. 1. Schematic view of the quadrotor and the reference frames

ными на концах двигателями с пропеллерами. Лучи расположены симметрично относительно корпуса аппарата и реализуют так называемую Х-схему. Смежные пропеллеры имеют противоположное направление вращения; первый и третий — пропеллеры левого вращения, а второй и четвертый — правого. Каждый из роторов может поворачиваться посредством сервопривода вокруг продольной оси луча.

Положим целью управления обеспечение наперед заданной траектории центра масс аппарата, а также требуемой ориентации. Такая постановка позволяет формализовать следующие задачи:

- приведение БЛА в некоторое наперед заданное статичное положение;
- перемещение БЛА вдоль некоторой наперед заданной (дискретным набором точек или непрерывной функцией координат от времени) траектории;
- наведение камеры, установленной на БЛА, на неподвижный или перемещающийся объект (съемка неподвижного объекта с разных ракурсов или слежение камерой за подвижным объектом).

Решение последней задачи в явном виде использует степени свободы, связанные с увеличением размерности вектора управляющих параметров. Квадрокоптер со стандартной конструкцией не способен выполнить произвольный маневр наведения камеры в точку с одновременным изменением высоты. В качестве примера, иллюстрирующего работоспособность системы управления, нами выбрано отслеживание квадрокоптером некоторой траектории с одновременным слежением установленной на аппарате камерой за движущимся объектом. Считается, что трехмерная траектория объекта при этом известна, что, например, соответствует задаче, выполняемой квадрокоптером при видеозаписи тренировок или соревнований биатлонистов.

Математическая модель динамики аппарата

Системы координат

Движение аппарата рассматривается относительно неподвижной инерциальной системы отсчета I , связанной с Землей (вращением Земли на характерных временах автономного полета БЛА рассматриваемого класса принято пренебрегать). Ось Z направлена вверх по вертикали, оси X и Y направим так, чтобы система образовывала правую тройку.

Индексом B обозначается жестко связанная с корпусом аппарата система координат $хуз$ с началом в центре масс и осями, совпадающими с главными центральными осями инерции корпуса БЛА.

Индексами R_i обозначаются системы координат, жестко связанные с роторами и совпадающие с их главными центральными осями инерции.

При записи векторов верхним индексом отмечается система координат, в которой записано разложение вектора. Повороты систем координат друг относительно друга описываются кватернионами. Кватернион, обозначаемый q_{IB} , задает ориентацию системы координат B относительно I в том смысле, что для любого вектора r выполняется соотношение

$$r^I = q_{IB} \circ r^B \circ \tilde{q}_{IB}. \quad (1)$$

Уравнения движения

При построении модели нами приняты следующие допущения: под ротором имеется в виду вращающаяся часть двигателя и пропеллер, которые считаются одним телом; корпус БЛА и каждый из четырех роторов считаются твердыми телами; крепление роторов к корпусу БЛА происходит в точках, совпадающих с центрами масс роторов. Помимо роторов в системе отсутствуют подвижные части; центры масс роторов лежат на окружности радиуса L , центр окружности совпадает с центром масс корпуса аппарата.

Положение БЛА в пространстве определяется радиус-вектором его центра масс r^I и кватернионом ориентации q_{IB} . Скорость центра масс аппарата равна

$$\dot{r}^I = \dot{r}^I. \quad (2)$$

Изменение кватерниона ориентации аппарата описывается уравнением Пуассона

$$\dot{q}_{IB} = \frac{1}{2} q_{IB} \circ \Omega^B, \quad (3)$$

где Ω^B — угловая скорость корпуса БЛА в проекции на собственные оси.

Движение центра масс БЛА определяется уравнением

$$M\ddot{r}^I = Mg^I - \frac{\rho CS_{\perp}}{2} |v^I| |v^I| + \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} k \tilde{\omega}_i |\tilde{\omega}_i| e_{z_i}^I, \quad (4)$$

где три члена в правой части соответствуют силе тяжести, силе аэродинамического сопротивления F_{drag}^B и создаваемой пропеллерами тяге F_{thr}^B ; $M = m + \sum m_i$, m — масса корпуса; m_i — масса i -го ротора с пропеллером; g — ускорение свободного падения; $S_\perp$ — площадь миделева сечения корпуса аппарата; C — аэродинамический коэффициент сопротивления воздуха; $e_{z_i}^{R_i}$ — единичный вектор вдоль оси симметрии i -го ротора; k — аэродинамический коэффициент, определяемый экспериментально; $\tilde{\omega}_i$ — скорость вращения i -го пропеллера.

Для описания вращательного движения воспользуемся динамическими уравнениями Эйлера, которые принимают вид [13]

$$\mathbb{J}_B \dot{\Omega}^B + \Omega^B \times \mathbb{J}_B \Omega^B = \sum_i r_i^B \times F_{thr_i}^B - \sum_i b \tilde{\omega}_i |\tilde{\omega}_i| e_{z_i}^B - \sum_i q_{BR_i} (\mathbb{J}_{R_i} \dot{\omega}_i^{R_i} + \omega_i^{R_i} \times \mathbb{J}_{R_i} \omega_i^{R_i}) \tilde{q}_{BR_i}, \quad (5)$$

где $\mathbb{J}_B$ и $\mathbb{J}_{R_i}$ — тензоры инерции корпуса и поворотных роторов; $\tau_{aero_i}^B = -b \tilde{\omega}_i |\tilde{\omega}_i| e_{z_i}^B$ — аэродинамический момент, связанный с вращением пропеллеров; b — определяемый экспериментально аэродинамический коэффициент.

Уравнения (2), (3), (4) и (5) составляют замкнутую систему, позволяющую моделировать динамику полета квадрокоптера с поворотными роторами.

Контур управления

Синтез регулятора

Пусть задана требуемая траектория центра масс аппарата $r^0(t)$, а также требуемая ориентация $q^0(t)$. Обозначим $\Delta r(t) = r^0(t) - r(t)$ и $\Delta q(t) = q^0(t) \circ \tilde{q}(t)$, где Δr и Δq определяют расхождение требуемой и текущей траектории БЛА в координатном пространстве, а $q = q_{IB}$. В качестве переменных управления выберем скорости вращения пропеллеров $\tilde{\omega}_i$ и углы поворота роторов θ_i :

$$u = \begin{pmatrix} \omega_u \\ \theta_u \end{pmatrix}, \quad \omega_u = (\tilde{\omega}_1 |\tilde{\omega}_1| \quad \tilde{\omega}_2 |\tilde{\omega}_2| \quad \tilde{\omega}_3 |\tilde{\omega}_3| \quad \tilde{\omega}_4 |\tilde{\omega}_4|)^T, \quad (6) \\ \theta_u = (\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4)^T.$$

Регуляторы, обеспечивающие необходимое управление по положению и ориентации, строятся как [7]

$$\ddot{r}(t) = \ddot{r}^0(t) + \mathbb{K}_{r1}(\dot{r}^0(t) - \dot{r}(t)) + \mathbb{K}_{r2}(r^0(t) - r(t)); \quad (7) \\ \dot{\Omega}(t) = \dot{\Omega}^0(t) + \mathbb{K}_{\Omega1}(\Omega^0(t) - \Omega(t)) + \mathbb{K}_{\Omega2}\Delta q(t),$$

где Δq — векторная часть кватерниона рассогласования ориентации, а $\mathbb{K}_{r_i}$ и $\mathbb{K}_{\Omega_i}$ — диагональные матрицы коэффициентов. Сходимость траектории аппарата к требуемой гарантируется выбором коэффициентов регулятора, удовлетворяющих критерию Рауса—Гурвица для характеристических полиномов уравнения. Таким образом, для построения контура управления необходимо связать выход из регулятора (7) с управляющими параметрами (6), учесть присутствующие в системе ограничения на реализацию управляющих воздействий, а также реализовать обратные связи.

Обращение динамики модели

Реализация контура управления с регуляторами (7) требует определения значений управляющих параметров (6) по выходу из регулятора (7). Преобразуем уравнения модели (2)—(5), оставив в правой части получившихся уравнений все члены, в которые явно входят управляющие параметры (6), а все остальные члены перенесем в левую часть:

$$\mathcal{F}(\ddot{r}, \dot{r}, q_{IB}) = k \mathbb{F}_{thr}(\theta_u) \omega_u, \quad (8) \\ \mathcal{T}(\dot{\Omega}, \Omega) = (k L \mathbb{T}_{thr}(\theta_u) - b \mathbb{T}_{aero}(\theta_u)) \omega_u,$$

В правой части уравнений (8) матрицы, зависящие только от углов θ_i , соответствуют силе тяги $\mathbb{F}_{thr}$, моменту силы тяги $\mathbb{T}_{thr}$ и аэродинамическому моменту $\mathbb{T}_{aero}$. Система (8) содержит 6 уравнений и 8 неизвестных. Доопределим систему, используя выражения для распределения вертикальных составляющих сил и моментов между парами двигателей, расположенных на параллельных лучах:

$$k \omega_{u1} \cos \theta_{u1} + k \omega_{u3} \cos \theta_{u3} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_Z + \varepsilon_F; \\ k \omega_{u2} \cos \theta_{u2} + k \omega_{u4} \cos \theta_{u4} = -\frac{1}{2} \mathcal{F}_Z + \varepsilon_F; \\ \omega_{u1} (b \cos \theta_{u1} - k L \sin \theta_{u1}) + \\ + \omega_{u3} (b \cos \theta_{u3} - k L \sin \theta_{u3}) = \frac{1}{2} \mathcal{T}_Z + \varepsilon_T; \quad (9) \\ \omega_{u2} (b \cos \theta_{u2} + k L \sin \theta_{u2}) + \\ + \omega_{u4} (b \cos \theta_{u4} + k L \sin \theta_{u4}) = \frac{1}{2} \mathcal{T}_Z - \varepsilon_T,$$

где ε_F и ε_T — некоторые балансировочные параметры. Полученная система уравнений (8)—(9) имеет аналитическое решение, которое достаточно громоздко, поэтому приведем его здесь в общем виде:

$$\begin{aligned}\omega_{ui} &= \frac{(-1)^{i+1}}{2kL} \sqrt{A_i^2(\mathcal{F}, T, \varepsilon_F, \varepsilon_T) + B_i^2(\mathcal{F}, T, \varepsilon_F, \varepsilon_T)}; \\ \theta_{ui} &= 2\arctg \left((-1)^{i+1} \frac{A_i(\mathcal{F}, T, \varepsilon_F, \varepsilon_T) - \sqrt{A_i^2(\mathcal{F}, T, \varepsilon_F, \varepsilon_T) + B_i^2(\mathcal{F}, T, \varepsilon_F, \varepsilon_T)}}{B_i(\mathcal{F}, T, \varepsilon_F, \varepsilon_T)} \right),\end{aligned}\quad (10)$$

где $A_i(\mathcal{F}, T, \varepsilon_F, \varepsilon_T)$ и $B_i(\mathcal{F}, T, \varepsilon_F, \varepsilon_T)$ — скалярные функции, куда линейно входят компоненты $\mathcal{F}$ и T . Таким образом, полученные выражения (10) связывают выход регулятора с управляющими параметрами при наличии обратной связи.

Ограничения на управляющие воздействия

Рассмотрим возможные ограничения на вектор управляющих воздействий, а именно на максимальную скорость вращения роторов и на углы отклонения сервоприводов. Пусть

$$0 < (-1)^{i+1} \omega_{ui} < \omega_{ui}^{\max}, |\theta_{ui}| < \theta_{ui}^{\max} < \pi. \quad (11)$$

С учетом выражений (10) получим

$$\begin{aligned}0 < \sqrt{A_i^2 + B_i^2} < 2lk^2 \omega_{ui}^{\max}, \\ \left| \frac{A_i - \sqrt{A_i^2 + B_i^2}}{B_i} \right| < \tg \frac{\theta_{ui}^{\max}}{2}.\end{aligned}\quad (12)$$

Уравнения (12) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{aligned}\sqrt{A_i^2(y, \varepsilon_F, \varepsilon_T) + B_i^2(y, \varepsilon_F, \varepsilon_T)} < 2lk^2 \omega_{ui}^{\max}, \\ |B_i(y, \varepsilon_F, \varepsilon_T)| < A_i(y, \varepsilon_F, \varepsilon_T) \tg \theta_{ui}^{\max}.\end{aligned}\quad (13)$$

Условия (13) определяют в пространстве $y = (\mathcal{F}, T)^T \in \mathcal{R}^6$ область Ω_y , в которой выполняются ограничения (11). Однако работать с ограничениями в таком виде на практике не всегда удобно. Выделив прямоугольную подобласть $\Psi_y \in \Omega_y$, можно независимо определить ограничения на каждую из компонент вектора y . Для этого сначала выделим линейно-ограниченную подобласть Ω_y^* из Ω_y .

$$\begin{aligned}\frac{|A_i(y, \varepsilon_F, \varepsilon_T)| + |B_i(y, \varepsilon_F, \varepsilon_T)|}{\sqrt{2}} < 2lk^2 \omega_{ui}^{\max}, \\ |B_i(y, \varepsilon_F, \varepsilon_T)| < A_i(y, \varepsilon_F, \varepsilon_T) \tg \theta_{ui}^{\max}.\end{aligned}\quad (14)$$

Далее выберем центр прямоугольной области y^C и единичный направляющий вектор ее диагонали d и определим значения балансирующих параметров $\varepsilon_F, \varepsilon_T$, при которых все точки n -мерного прямоугольника Ψ_y удовлетворяют ограничениям (14), а длина его диагонали 2γ максимальна. За центр прямоугольника имеет смысл выбрать точку, соответствующую неподвижному зависанию аппарата: $y^C = (0 \ 0 \ -m|g| \ 0 \ 0 \ 0)^T$.

Можно показать, что если все вершины прямоугольной области удовлетворяют набору линейных ограничений, то все его внутренние точки также удовлетворяют этим ограничениям. Тогда достаточно проверить конечное число точек области Ψ_y на принадлежность к области Ω_y^* , чтобы убедиться, что ограничения выполняются в каждой точке области Ψ_y (рис. 2). Это позволяет применить численные методы к поиску значений параметров $\varepsilon_T, \varepsilon_F$ и максимальной длины диагонали прямоугольника $2\gamma^*$. В итоге ограничения для компонент вектора y , при котором выполняются ограничения (11), могут быть записаны в виде: $y_k^C - \gamma^* d_k < y_k^0 < y_k^C + \gamma^* d_k, \quad k = \overline{1, 6}$.

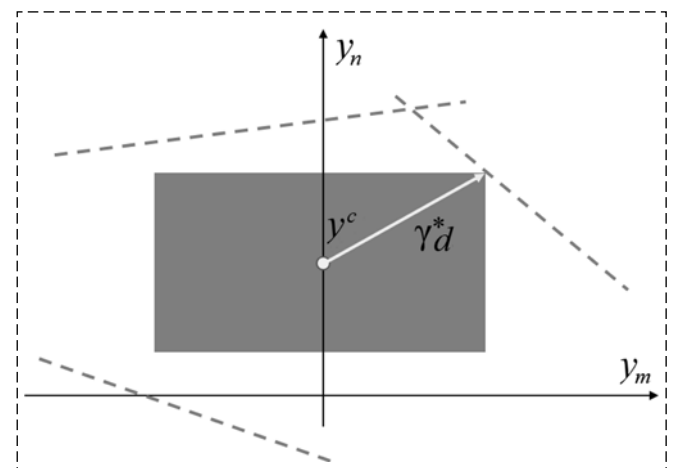


Рис. 2. Поиск прямоугольной области Ψ_y
Fig. 2. Determining a rectangular domain Ψ_y

Модель бортовых датчиков

Для реализации обратных связей в контуре управления необходимо обеспечить оценку текущего положения, скорости, кватерниона ориентации и угловой скорости БЛА. Здесь в качестве основы для моделирования обратных связей использована популярная среди разработчиков мультироторных роботов бортовая система Xsens MTi-7 [14]. Она содержит стандартный набор необходимых для оценки состояния БЛА подсистем, включающих в себя спутниковую систему глобального позиционирования, цифровой барометрический датчик давления, трехосевые электромеханические акселерометр и гироскоп, а также магнитный компас. Устройством предусмотрена возможность автоматической калибровки датчиков для устранения статических ошибок, которые могут возникнуть при его установке. Измерения датчиков моделируются добавлением к результатам интегрирования уравнений движения БЛА белого гауссовского шума с параметрами, соответствующими значениям, указанным в документации устройства [14]. Показания угловой скорости также содержат составляющую, отвечающую за дрейф нуля датчика угловой скорости. Стандартные отклонения для шума измерений горизонтальной составляющей позиции, вертикальной составляющей позиции, скорости, угла тангажа, крена и рысканья равны соответственно $\sigma_{rh} = 1$ м, $\sigma_{rv} = 2$ м, $\sigma_v = 0,05$ м/с, $\sigma_\psi = 0,5^\circ$, $\sigma_\theta = 0,5^\circ$, $\sigma_\phi = 1,5^\circ$. Плотность шума измерений угловой скорости равна $\rho_\Omega = 0,007^\circ \text{ с}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-0,5}$, а дрейф нуля $\beta_\Omega = 0,003^\circ \text{ с}^{-1}$.

Алгоритм фильтрации

Ранее [13] для обработки сигналов бортовых датчиков авторами использовался расширенный фильтр Калмана, однако реализация этого фильтра основана на предположении о том, что линеаризованное преобразование математического ожидания вектора состояния системы и соответствующей матрицы ковариации достаточно близко к истинному нелинейному преобразованию, определяемому динамикой системы. Ввиду того что исследуемая система существенно нелинейна, в настоящей работе в качестве алгоритма фильтрации выбран сиг-

ма-точечный фильтр Калмана [16, 17]. Преимуществом этого метода является более высокая точность аппроксимации при тех же вычислительных затратах, что и в ЕКФ-методе [18]. Кроме того, как показывают численные эксперименты [15], стандартный алгоритм расширенного фильтра Калмана более чувствителен к ошибкам дискретизации и округления, чем алгоритм, реализованный в настоящей работе.

Приведем основные формулы алгоритма фильтрации. Модель непрерывной динамической системы:

$$\dot{x} = f(x, t) + w(t), \quad (15)$$

где $x(t)$ — вектор состояний системы, а $w(t)$ — шум системы. В нашем случае вектор состояний системы $x = (r^I, \dot{r}^I, q_{IB}, \Omega^B)^T$. Дискретные измерения:

$$z_k = h_k(x(t_k)) + y_k, \quad (16)$$

где $z(t)$ — вектор измерений, а $y(t)$ — шум измерений. В нашем случае вектор измерений совпадает с вектором состояния.

Задача фильтрации — найти являющуюся функцией измерений z_k несмещенную оценку вектора состояния системы $x(t_k)$, которую мы обозначим $\hat{x}_k$, минимизирующую дисперсию ошибки $\hat{x}_k - x(t_k)$.

Пусть в момент времени t_{k-1} получена оценка вектора состояния $\hat{x}_{k-1}$. На основании этой оценки строится прогноз оценки вектора состояний $\hat{x}_k^-$ (оценка априори), затем проводятся измерения z_k и коррекция оценки априори на основании результатов измерений — $\hat{x}_k^+$ (оценка апостериори).

Априори оценка вектора состояния $\hat{x}_k^-$ вычисляется как

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2N} w^i f(X_k^i), \quad (17)$$

где в качестве функции f используется система уравнений (2), (3), (4) и (5) с начальными условиями $\hat{x}(t) = \hat{x}_{k-1}$ ($\hat{x}(0) = x_0$). Аргументами функции f в сумме (17) являются так называемые сигма-точки, выбор которых определяется соотношениями

$$\begin{aligned} X_k^0 &= x_{k-1}; \\ X_k^i &= x_{k-1} + \sqrt{N + \lambda} \left(\sqrt{\mathbb{P}_{k-1}} \right)^i, \quad i = 1, \dots, N; \\ X_k^i &= x_{k-1} + \sqrt{N + \lambda} \left(\sqrt{\mathbb{P}_{k-1}} \right)^{i-N}, \quad i = N + 1, \dots, 2N, \end{aligned} \quad (18)$$

где $(\sqrt{\mathbb{P}_{k-1}})^i$ обозначает i -й столбец матрицы $\sqrt{\mathbb{P}_{k-1}}$. Здесь используется разложение Холецкого [19] вида $\mathbb{P} = \sqrt{\mathbb{P}}\sqrt{\mathbb{P}}^T$, где $\sqrt{\mathbb{P}}$ — нижняя треугольная матрица; N — размерность оцениваемого вектора состояния.

Весовые коэффициенты в формуле (17) вычисляются как

$$w^0 = \frac{\lambda}{\lambda + N}, \quad w^i = \frac{1}{2(\lambda + N)}, \quad i = 1, \dots, 2N. \quad (19)$$

Оценка матрицы ковариации может быть получена по формуле

$$\mathbb{P}_k^- = \sum_{i=0}^{2N} w^i (f(X_k^i) - \hat{x}_k^-)(f(X_k^i) - \hat{x}_k^-)^T + \mathbb{Q}, \quad (20)$$

где $\mathbb{Q}$ — ковариационная матрица шума системы. При этом весовые коэффициенты в формулах (20) и (17) совпадают, за исключением коэффициента w^0 , который в формуле (20) принимает значение [18]

$$w_c^0 = \frac{\lambda}{\lambda + N} + 1 - \alpha^2 + \beta,$$

где $\alpha \in [10^{-4}, 1]$ — параметр, определяющий разброс сигма-точек вокруг среднего. Параметр β позволяет учесть априорные данные о функции плотности вероятности неизвестного вектора состояния системы (для нормального распределения $\beta = 2$). Наконец, $\lambda = 3\alpha^2 - N$ — параметр масштабирования.

Далее происходит коррекция сделанных на предыдущем этапе оценок вектора состояния и матрицы ковариации с помощью вектора и модели измерений. С помощью функции h из уравнений (16) сигма-точки (18) отображаются в пространство измерений, где также делается оценка среднего и матрицы ковариации

$$\begin{aligned} \zeta_k^i &= h(X_k^i); \\ \hat{z}_k &= \sum_{i=0}^{2N} w^i \zeta_k^i; \\ \mathbb{S}_k &= \sum_{i=0}^{2N} w^i (\zeta_k^i - \hat{z}_k)(\zeta_k^i - \hat{z}_k)^T + \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где $\mathbb{R}$ — ковариационная матрица шума измерений. Окончательные оценки для вектора состояния и матрицы ковариации получаются по формулам

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + \mathbb{K}_k(z_k - \hat{z}_k); \\ \mathbb{P}_k^+ &= (\mathbb{E} - \mathbb{K}_k\mathbb{T}_k)\mathbb{P}_k^-, \end{aligned}$$

где

$$\mathbb{T}_k = \sum_{i=0}^{2N} w^i (X_k^i - \hat{x}_k^-)(\zeta_k^i - \hat{z}_k)^T, \quad \mathbb{K}_k = \mathbb{T}_k\mathbb{S}_k^{-1}.$$

Результаты численных экспериментов

Для проверки алгоритмов управления и фильтрации создана модель *MATLAB Simulink* и проведены вычислительные эксперименты. Параметры модели приведены в табл. 1.

На основе приведенных выше параметров динамики выбрано направление диагонали прямоугольной области Ψ_y и рассчитаны значения пределов ограничений (11), которые приведены в табл. 2.

В эксперименте аппарат должен выполнить наблюдение за подвижным объектом, летя неподалеку от него и ориентируя камеру, установленную спереди, так, чтобы объект находился в центре полученного изображения. Мы не рассматриваем вопрос построения траектории БЛА, считая ее определенной заранее. Точка

Таблица 1
Table 1

Параметры модели
Model parameters

Параметр	Значение
M	2,0 кг
$\mathbb{J}_B$	diag(0,02 0,02 0,04) кг·м ²
$\mathbb{J}_R$	diag($2e^{-5}$ $2e^{-5}$ $1e^{-5}$) кг·м ²
k	$1,13e^{-5}$ Н·с ² ·рад ⁻²
b	$1,5e^{-6}$ Н·м·с ² ·рад ⁻²
$S_{\perp}$	0,12 м ²
C	1,05
L	0,25 м
$\theta_{\max}$	$\pi/3$
$\tilde{\omega}_{\max}$	1140 рад/с

Таблица 2
Table 2

Параметры ограничений
Constraints parameters

Параметр	Значение
d	(0,577 0,577 0,577 0,014 0,014 0,014) ^T
ε_F	0 Н
ε_T	2,6 Н·м
γ^*	13,75

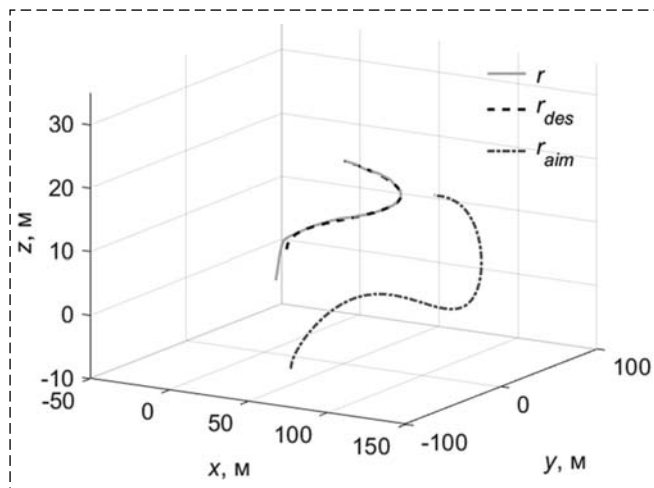


Рис. 3. Траектории: целевая БЛА (штриховая линия), БЛА (светлая линия), наблюдаемого объекта (темная линия)

Fig. 3. Trajectories: target (dotted line), UAV (light line), observed object (dark line)

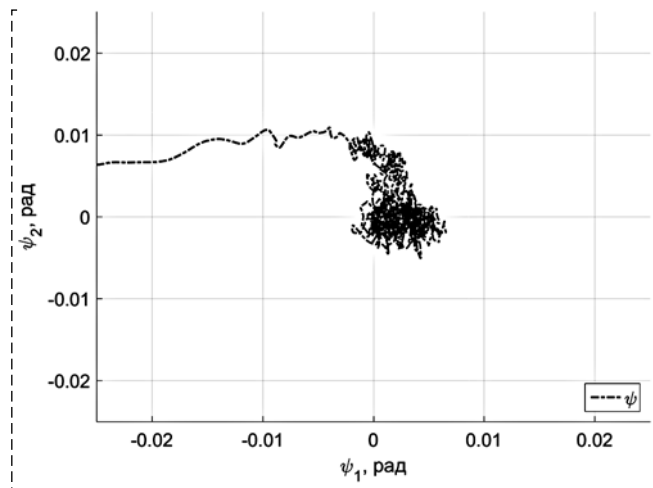


Рис. 5. Траектория объекта на записи

Fig. 5. Trajectory of the object as captured by the camera

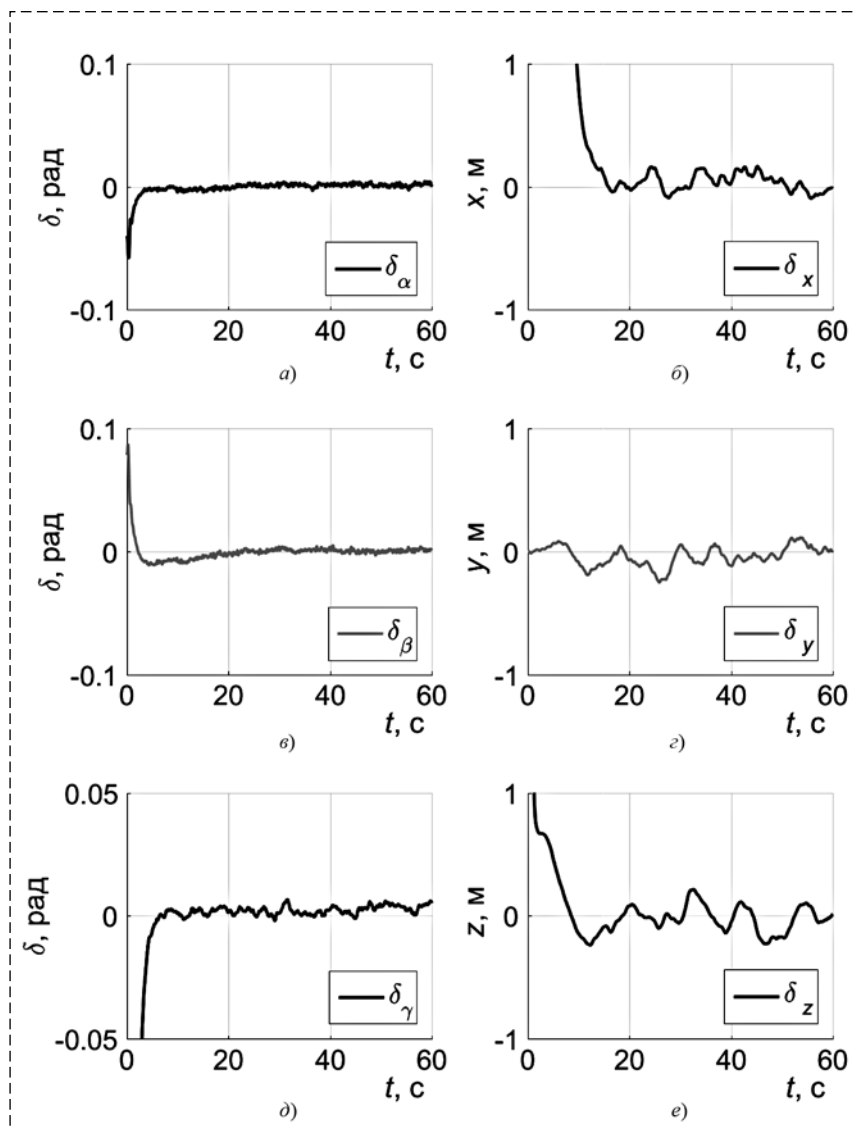


Рис. 4. Ошибка ориентации и позиции
Fig. 4. Attitude and position tracking errors

старта аппарата расположена на расстоянии 90 м от цели, затем это расстояние постепенно сокращается до 50 м. Траектория БЛА и наблюдаемого объекта изображены на рис. 3.

На рис. 4, а, в, д изображены ошибки ориентации по углам крена, тангажа и рысканья, а на рис. 4, б, г, е — положения квадрокоптера по оси X , Y и Z . Ошибки по каждому из углов ориентации после стабилизации не превышают 1° . После выхода аппарата на целевую кривую максимальное абсолютное отклонение от траектории составило 0,3 м.

На рис. 5 можно проследить за траекторией наблюдаемого объекта на записи, которую можно сделать с помощью передней камеры. Видно, что в начальный момент времени объект находится вне зоны видимости, затем перемещается в центр экрана, и далее на протяжении всего времени маневра ось визирования камеры отклоняется от вектора направления на объект не более чем на 1° .

Рис. 6 демонстрирует производительность алгоритмов оценки состояния. Слева приведены графики ошибки оценки угла

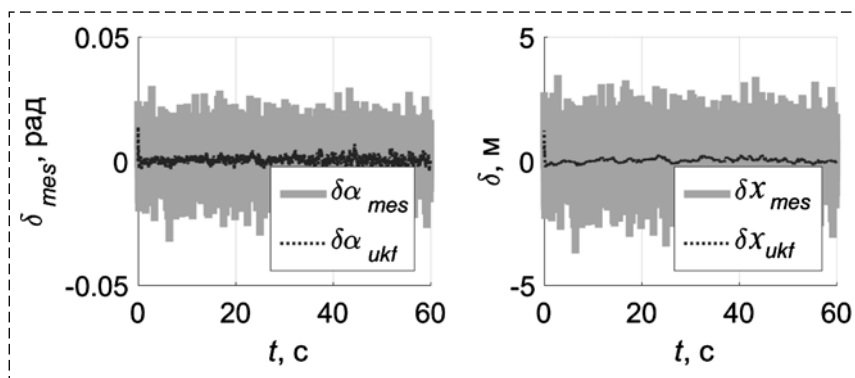


Рис. 6. Ошибка оценки состояния и прямых измерений
Fig. 6. Estimation and measurement errors

крена (темная линия) и прямых измерений (светлая линия). Справа — оценка положения по оси X и его прямые измерения.

Алгоритмы фильтрации позволяют значительно снизить уровень шума измерений текущей позиции. Среднеквадратичная ошибка оценки ориентации составила менее 1° .

В результате эксперимента мы оценили способность БЛА с поворотными роторами справляться со сложными маневрами, где необходимо независимо управлять ориентацией и положением аппарата. Квадрокоптер быстро вышел на целевую траекторию и отслеживал ее с ошибкой, максимальное значение которой составило 30 см, что значительно превышает точность прямых измерений положения аппарата. Отметим, что для решения поставленной задачи наблюдения за подвижным объектом ошибка оказалась не критичной. Однако при необходимости более точного отслеживания траектории имеет смысл использовать более чувствительные инструменты для измерения текущего положения и скорости, например, технологию RTK GPS [20], где применение неподвижной наземной базовой станции уменьшает погрешность измерений на 1...2 порядка.

При движении ориентация аппарата менялась таким образом, что зафиксированная на корпусе камера следила за движущейся целью, локализуя ее в центре изображения. Во время полета были выдержаны ограничения на компоненты вектора управляющего воздействия. Результаты эксперимента позволяют говорить о возможности эффективного применения БЛА с поворотными роторами для преследования и съемки движущихся по криволинейной траектории в трехмерном пространстве объектов.

Заключение

В работе предложена модель управляемой динамики квадрокоптера с поворотными роторами. При некоторых упрощениях эта модель допускает аналитическое обращение динамики и построение контура управления, который может обеспечить независимое управление положением и ориентацией аппарата с учетом имеющихся в системе ограничений на управляющие воздействия. Это позволяет решать задачи, недоступные

для выполнения квадрокоптером стандартной конструкции. В статье приведен пример решения одной из таких задач, а именно выполнение маневра одновременно со слежением установленной на аппарате камерой за объектом, движущимся по трехмерной траектории.

При построении системы управления определен набор бортовых измерений, необходимых для реализации синтезированного контура управления в бортовом программном обеспечении, приведены алгоритмы обработки этих измерений.

Дальнейшая работа с моделью предполагает дополнение полученных результатов алгоритмами построения оптимальных траекторий на борту БЛА [21], а также алгоритмами навигации на основе обработки поля локальных скоростей движения изображения, регистрируемого бортовой видеокамерой [22].

Список литературы

1. Otero A. S., Chen A., Miller D. W., Hilstad M. SPHERES: Development of an ISS Laboratory for formation flight and docking research // Proceedings IEEE Aerospace Conference, Big Sky, MT, USA, 2002. P. 1—1.
2. Zulu A., John S. A Review of Control Algorithms for Autonomous Quadrotors // Open. Journal of Applied Sciences. 2014. N. 4. P. 547—556.
3. Шольц Г., Троммер Г. Ф. Модельное управление квадрокоптерами с поворотными роторами // Гироскопия и навигация. 2015. № 4 (91). С. 131—146.
4. Sridhar S., Kumar R., Cohen K., Kumar M. Fault Tolerance of a Reconfigurable Tilt-Rotor Quadcopter Using Sliding Mode Control // ASME 2018 Dynamic Systems and Control.
5. Морозов Ю. В. Экстренное управление квадрокоптером при отказе двух симметричных винтов // Автоматика и телемеханика. 2018. № 3. С. 92—110.
6. Ryll M., Bühlhoff H. H., Giordano P. R. A novel over-actuated quadrotor unmanned aerial vehicle: Modeling, control, and experimental validation // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2015. 23 (2). P. 540—556.

7. Falconi R., Melchiorri C. Dynamic Model and Control of an OverActuated Quadrotor UAV // Proc. of the 10th IFAC Symposium on Robotic Control. 2012. P. 192—197.
8. Segui-Gasco P., Al-Rihani Y., Shin H. S., Savvaris A. A Novel Actuation Concept for a Multi Rotor UAV // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2014. Vol. 74, Iss. 1—2. P. 173—191.
9. Oosedo A. et al. Flight control systems of a quad tilt rotor unmanned aerial vehicle for a large attitude change // Robotics and Automation (ICRA). 2015 IEEE International Conference on. 2015. P. 2326—2331.
10. Mellinger D., Kumar V. Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '11). Shanghai, China, IEEE, May 2011. P. 2520—2525.
11. Sridhar S., Kumar R., Radmanesh M., Kumar M. Non-Linear Sliding Mode Control of a Tilting-Rotor Quadcopter // ASME 2017 Dynamic Systems and Control Conference.
12. Kumar R., Nemati A., Kumar M., Sharma R., Cohen K., Cazaaurang F. Tilting-Rotor Quadcopter for Aggressive Flight Maneuvers Using Differential Flatness Based Flight Controller // ASME 2017 Dynamic Systems and Control Conference.
13. Шавин М. Ю. Управляемая динамика квадрокоптера с поворотными роторами // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018. 76 (4).
14. Xsens North America Inc. Xsens MTi-7 module official page. URL: <https://www.xsens.com/products/mti-7/> (дата обращения: 10.11.2018).
15. Шавин М., Притыкин Д. Управляемая динамика квадрокоптера с поворотными роторами: алгоритмы оценки состояния // Проблемы механики и управления: Матер. Междунар. Конф. (16—22 сентября 2018 г., г. Махачкала). М.: Издательство Московского университета, 2018. С. 337—339.
16. Julier S. J., Uhlmann J. K., Durrant-Whyte H. F. A new approach for filtering nonlinear systems // In Proceedings of the American Control Conference. 1995. P. 1628—1632.
17. Julier S. J., Uhlmann J. K. Unscented filtering and nonlinear estimation // Proc. Of IEEE. 2004. N. 3. P. 401—422.
18. Куликова М. В., Куликов Г. Ю. Численные методы нелинейной фильтрации для обработки сигналов и измерений // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 4. С. 64—98.
19. Вержбицкий М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2009. 840 с.
20. Feng Yanming, Jinling Wang. GPS RTK performance characteristics and analysis // Journal of Global Positioning Systems, 2008. Vol. 1. P. 1—8.
21. Андреев К. В., Рубинович Е. Я. Траекторное управление наблюдателем за мобильной целью по угломерной информации // Автоматика и телемеханика. 2016. № 1. С. 134—162.
22. Миллер Б. М., Степанян К. В., Попов А. К., Миллер А. Б. Навигация БПЛА на основе последовательностей изображений, регистрируемых бортовой видеокамерой // Автоматика и телемеханика. 2017. № 12. С. 141—154.

Tilt-Rotor Quadrotor Control System Design and Mobile Object Tracking

M. Shavin, shawinmihail@gmail.ru,

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation,

D. Pritykin, dpritykin@rambler.ru,

Skolkovo Institute of Science and Technology (Skoltech), Moscow, 121205, Russian Federation

Corresponding author: M. Shavin, Moscow Institute of Physics and Technology, 141701, Dolgoprudny, Russian Federation, e-mail: shawinmihail@gmail.ru

Accepted on May 15, 2019

Abstract

We design the navigation and control system for unmanned aerial vehicle (UAV) with four tilting rotors. The considered UAV implements the so-called X-scheme, which implies the main body and four symmetrical beams, upon which rotors with propellers are mounted. It is different from the classical quadrotor by having four additional servomotors that may change the orientation of the rotors with respect to the main body, thus increasing the control parameters number. Greater number of the actuators in the system, on the one hand, opens new venues for UAVs' applications but, on the other hand, makes the mathematical model of the UAV's dynamics quite complicated. The latter calls for new control algorithms to be developed. We start by forming the mathematical models of the UAV's dynamics. It is shown that the introduction of the tilting motors allows implementing independent control of the quadrotor's position and attitude. The control loop is designed on the base on the analytical dynamics inversion. The expressions for the control parameters thus obtained are subjected to the numerical analysis, which allows taking into account technical constraints for maximal motor speed and tilt angles. Feedback in the control loop is implemented by simulation of the on-board sensors' signals, whose characteristics correspond to those of the sensors used in the UAV's experimental prototype design. The signals are processed with the aid of the unscented Kalman filter algorithm. The results of numerical experiments corroborate the efficiency of the developed control and navigation algorithms. The mission simulated in the numeric experiments is tracking of a pre-defined trajectory and pointing with a body-fixed camera at a mobile object, which, in turn, moves along a programmed trajectory. The results of the numeric experiments show that the UAV is capable of performing complex maneuvers with independent position and attitude control.

Keywords: UAV control, quadrotor, tilt-rotors, dynamics inversion, unscented Kalman filter

Acknowledgements: Authors thank the head of MIPT Advanced Control Systems Lab. S. V. Avtaikin for providing facilities and assistance.

For citation:

Shavin M., Pritykin D. Tilt-Rotor Quadrotor Control System Design and Mobile Object Tracking, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 10, pp. 629—639.

DOI: 10.17587/mau.20.629-639

References

1. Otero A. S., Chen A., Miller D. W., Hilstad M. SPHERES: Development of an ISS Laboratory for formation flight and docking research, *Proceedings, IEEE Aerospace Conference*, Big Sky, MT, USA, 2002, pp. 1—1.
2. Zulu A., John S. A Review of Control Algorithms for Autonomous Quadrotors. *Open. Journal of Applied Sciences*, 2014, 4, pp. 547—556.
3. Sholc G., Trommer G. F. *Gyroscopy and Navigation*, 2015, no. 4 (91), pp. 131—146 (in Russian).
4. Sridhar S., Kumar R., Cohen K., Kumar M. *ASME 2018 Dynamic Systems and Control*, 2018.
5. Morozov Y. V. *Automation and Remote Control*, 2018, no. 3, pp. 92—110 (in Russian).
6. Ryll M., Bühlhoff H. H., Giordano P. R. A novel overactuated quadrotor unmanned aerial vehicle: Modeling, control, and experimental validation, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2015, 23(2), pp. 540—556.
7. Falconi R., Melchiorri C. Dynamic Model and Control of an OverActuated Quadrotor UAV, in *Proc. of the 10th IFAC Symposium on Robotic Control*, 2012, pp. 192—197.
8. Segui-Gasco P., Al-Rihani Y., Shin H. S., Savvaris A. A Novel Actuation Concept for a Multi Rotor UAV, *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2014, vol. 74, iss. 1—2, pp. 173—191.
9. Oosedo A. et al. Flight control systems of a quad tilt rotor unmanned aerial vehicle for a large attitude change, *Robotics and Automation (ICRA), 2015 IEEE International Conference on. IEEE*, 2015, pp. 2326—2331.
10. Mellinger D., Kumar V. Minimum snap trajectory generation and control for quadrotors, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA '11)*, Shanghai, China, IEEE, May 2011, pp. 2520—2525.
11. Sridhar S., Kumar R., Radmanesh M., Kumar M. Non-Linear Sliding Mode Control of a Tilting-Rotor Quadcopter, *ASME 2017 Dynamic Systems and Control Conference*.
12. Kumar R., Nemati A., Kumar M., Sharma R., Cohen K., Cazaaurang F. Tilting-Rotor Quadcopter for Aggressive Flight Maneuvers Using Differential Flatness Based Flight Controller, *ASME 2017 Dynamic Systems and Control Conference*.
13. Shavin M. Y. *Engineering Journal: Science and Innovation*, 2018, 76 (4) (in Russian).
14. Xsens North America Inc. Xsens MTi-7 module official page // xsens.com: Xsens official web-page. 2000—2018, available at: <https://www.xsens.com/products/mti-7/>
15. Shavin M., Pritykin D. *Proceedings of the Problems Of Mechanics And Control conference (2018, Makhachkala)*, pp. 337—339 (in Russian).
16. Julier S. J., Uhlmann J. K., Durrant-Whyte H. F. A new approach for filtering nonlinear systems, *In Proceedings of the American Control Conference*, 1995, pp. 1628—1632.
17. Julier S. J., Uhlmann J. K. Unscented filtering and nonlinear estimation, *Proc. of IEEE*, 2004, no. 3, pp. 401—422.
18. Kulikova M. V., Kulikov G. Y. *Computational Technologies*, 2016, vol. 21, no. 4, pp. 64—98 (in Russian).
19. Vergbickiy M. Fundamentals of numerical methods, Electronic resources in HSE, Moscow, 2009, 840 p. (in Russian).
20. Feng Yanming, Jinling Wang. GPS RTK performance characteristics and analysis, *Journal of Global Positioning Systems*, 2008, 1, pp. 1—8.
21. Andreev K. V., Rubinovich E. Ya. *Automation and Remote Control*, 2016, no. 1, pp. 134—162 (in Russian).
22. Miller B. M., Stepanyan K. V., Popov A. K., Miller A. B. *Automation and Remote Control*, 2017, no. 12, pp. 141—154 (in Russian).

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5510, (499) 269-5397**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *Е. В. Комиссарова*.

Сдано в набор 31.07.2019. Подписано в печать 12.09.2019. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН1019. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

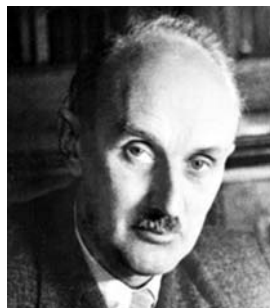
Оригинал-макет ООО "Авансд солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансд солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: www.aov.ru



**Завалишинские
чтения | 2020**

XV международная конференция по электромеханике и робототехнике

Уфа, Россия, 15—18 апреля 2020 г.



Конференция была создана в честь памяти Дмитрия Александровича Завалишина (1900-1968) — российского ученого, члена-корреспондента Академии наук СССР, профессора, доктора технических наук, Заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, основателя нового научного направления — создания электромашино-вентильных систем, основанных на синтезе электрических машин и электронных и полупроводниковых преобразователей энергии.

СЕКЦИИ

Робототехника и автоматизация:

- управление роботами и связь;
- электроприводы и мехатронные модули;
- взаимодействие человека и робота;
- сенсорные сети и облачные сервисы для роботов;
- киберфизические системы.

Электроэнергетика:

- преобразование электроэнергии;
- системы возобновляемых источников энергии;
- электроэнергетические системы и сети;
- менеджмент в электроэнергетике.

Мехатроника и вибрационные технологии (XIV Международная научно-техническая конференция "ВИБРАЦИЯ-2020. Вибрационные технологии, мехатроника и машины"):

- динамика машин и роботов;
- динамика многосвязных систем;
- управление вибрационными системами;
- биомеханические системы и технологии.

Электропривод, электротехнологии и электрооборудование (V международная научно-техническая конференция "Электропривод, электротехнологии и электрооборудование предприятий"):

- электропривод технологических установок;
- электроснабжение и релейная защита;
- электротехнологии и силовая преобразовательная техника;
- энергосбережение и энергоаудит;
- диагностика электрооборудования;
- автоматизация технологических процессов;
- цифровые технологии и робототехнические комплексы;
- методика преподавания электротехнических дисциплин.

Контакты

Электронная почта: zav-read@guap.ru

Русскоязычная версия сайта конференции: <http://confs.guap.ru/zav-read>

Англоязычная версия сайта конференции: <http://suai.edu.ru/conference/zav-read>