

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 20

2019

№ 9

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Главный редактор:
ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

Заместители главного редактора:
БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.
ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.
ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

Ответственный секретарь:
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционный совет:
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН
КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН
МИКРИН Е. А., акад. РАН
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН
СИГОВ А. С., акад. РАН
СОЙФЕР В. А., акад. РАН
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН
ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

Редколлегия:
DANIELE Z., PhD, Италия
DORANTES D. J., PhD, Турция
GROUMPOS P. P., PhD, Греция
ISIDORI A., PhD, Италия
KATALINIC B., PhD, Австрия
LIN CH.-Y., PhD, Тайвань
MASON O. J., PhD, Ирландия
ORTEGA R. S., PhD, Франция
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США
STRZELECKI R. M., PhD, Польша
SUBUDHI B. D., PhD, Индия
АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан
ГАРАШЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина
ТРОФИМЕНКО Е. Е., д.т.н., Беларусь
БОБЦОВ А. А., д.т.н.
БУКОВ В. Н., д.т.н.
ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.
ЖУКОВ И. А., д.т.н.
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.
ЛОХИН В. М., д.т.н.
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д.ф.-м.н.
ПУТОВ В. В., д.т.н.
ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.
РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.
СЕРГЕЕВ С. Ф., д.пс.н.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.
ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.
ФУРСОВ В. А., д.т.н.
ЮРЕВИЧ Е. И., д.т.н.

Редакция:
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Директор издательства:
АНТОНОВ Б. И.

СОДЕРЖАНИЕ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

- Bedioui N., Houimli R., Besbes M.** Adaptive Observer Design for Sensor Fault Detection and Reconstruction 515
- Рубинович Е. Я.** О расширении класса программных управлений уклонения в простейшей двухкритериальной игре преследования двух целей 524
- Ловчаков В. И., Шибякин О. А.** Решение задачи быстродействия по выходной координате для линейных динамических систем 532
- Буланов С. Г.** Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем 542
- Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.** Управление конформациями молекул ДНК с помощью геометрических и физических параметров 550

РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Зенкевич С. Л., Назарова А. В., Чжай Мэйсинь.** Планирование движения мобильных роботов при выполнении задач вероятностного поиска 560

ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

- Большаков А. А., Кулик А. А.** Исследование комплексной системы управления летательного аппарата вертолетного типа при отказах бортового оборудования 568

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL

Vol. 20

2019

No. 9

MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Editor-in-Chief

FILIMONOV N. B.

Deputy Editors-in-Chief:

BOLSHAKOV A. A.

PODURAEV Yu. V.

YUSCHENKO A. S.

Responsible Secretary:

BEZMENOVA M. Yu.

Editorial Board:

ANSHAKOV G. P.

BOLOTNIK N. N.

CHENTSOV A. G.

CHERNOUSKO F. L.

FEDOROV I. B.

KALYAEV I. A.

KURZHANSKI A. B.

KUZNETSOV N. A.

MIKRIN E. A.

PESHEKHONOV V. G.

REZCHIKOV A. F.

SCHERBATYUK A. F.

SEBRYAKOV G. G.

SIGOV A. S.

SOJFER V. A.

SOLOMENTSEV Yu. M.

VASSILYEV S. N.

YUSUPOV R. M.

ZHELTOV S. Yu.

Editorial Council:

ALIEV T. A., Azerbaijan

DANIELE Z., PhD, Italy

DORANTES D. J., PhD, Turkey

GARASCHENKO F. G., Ukraine

GROUMPOS P. P., PhD, Greece

ISIDORI A., PhD, Italy

KATALINIC B., PhD, Austria

LIN CH.-Y., PhD, Taiwan

MASON O. J., PhD, Ireland

ORTEGA R. S., PhD, France

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA

STRZELECKI R. M., PhD, Poland

SUBUDHI B. D., PhD, India

TROFIMENKO Ye. Ye., Belarus

BOBTSOV A. A.

BUKOV V. N.

ERMOLOV I. L.

FILARETOV V. F.

FRADKOV V. L.

FURSOV V. A.

ILYASOV B. G.

KOROSTELEV V. F.

LEBEDEV G. N.

LOKHIN V.M.

PAVLOVSKY V. E.

PUTOV V. V.

PSHIKHOPOV V. Kh.

RAPOPORT E. Ya.

SERGEEV S. F.

YUREVICH E. I.

ZHUKOV I. A.

Editorial Staff:

BEZMENOVA M. Yu.

Director of the Publishing House:

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and perspectives development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

- Bedioui N., Houimli R., Besbes M.** Adaptive Observer Design for Sensor Fault Detection and Reconstruction 515
- Rubinovitch E. Ya.** On the Expansion of a Class of Open-Loop Evasion Control in the Simplest Two-Criteria Pursuit-Evasion Game of Two Purposes 524
- Lovchakov V. I., Shibyakin O. A.** The Solution of a Problem of Speed of Response on Output Coordinate for Linear Dynamic Systems 532
- Bulanov S. G.** The Analysis of the Systems Stability of Linear Differential Equations Based on the Transformation of Difference Schemes 542
- Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V.** Conformation Control of DNA Molecules by Means Geometric and Physical Parameters 550

ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

- Zenkevich S. L., Nazarova A. V., Meixin Zhai.** The Movement Planning of Mobile Robots in Performing Search Task Based on Probability Theory 560

DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

- Bolshakov A. A., Kulik A. A.** Investigation of the Integrated Control System of a Helicopter Type Aircraft in Case of Onboard Equipment Failures 568

Information about the journal is available online at:
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: mech@novtex.ru

N. Bedioui^{1,2}, Associate Professor, bedioui_neila_enit@yahoo.fr, **R. Houimli**², PhD, radhia.houimli@gmail.com,

M. Besbes^{1,2}, Professor, mongi.besbes@gmail.com,

¹Robotics, Informatics and Complex Systems (RISC), ENIT, University of Tunis El Manar, Tunis,

²Higher Institute of Information and Communication Technologies, University of Carthage, Tunis

Corresponding author: Bedioui Neila, Associated Professor, Robotics, Informatics and Complex Systems (RISC), ENIT, University of Tunis El Manar, Tunis, Tunisia; Higher Institute of Information and Communication Technologies, University of Carthage, Tunis, Tunisia

Accepted on March 14, 2019

Adaptive Observer Design for Sensor Fault Detection and Reconstruction

Abstract

A new approach is presented for sensor fault detection reconstruction and state estimation. The system considered is linear polytopic parameter-varying (LPV) system. The main idea is the design of a novel robust adaptive observer based on and polyquadratic formulation with a new set of relaxation. Sufficient conditions are given by a set of Linear Matrix Inequalities (LMI) in order to guarantee the stability of the system and the asymptotic convergence of the fault error. A simulation example has been studied to illustrate the proposed methods by detecting constant and variable sensor fault.

Keywords: Adaptive Observer, Sensor Fault Detection, State Estimation, Polytopic Linear Parameter-Varying (LPV) System, LMI

Acknowledgements: The article is prepared on the basis of the results of the project in the SFedU of the project No. 16-08-00013-a under the RFBR grant.

For citation:

Bedioui N., Houimli R., Besbes M. Adaptive Observer Design for Sensor Fault Detection and Reconstruction, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. .

УДК 681.511.46 + 681.5.013

DOI: 10.17587/mau.19.515-523

Н. Бедиуи^{1,2}, доц., bedioui_neila_enit@yahoo.fr, **Р. Уимли**², PhD, radhia.houimli@gmail.com,

М. Бесбес^{1,2}, проф., mongi.besbes@gmail.com,

¹Лаборатория робототехники, информатики и сложных систем,

Национальная инженерная школа Туниса, Университет Тунис-Эль-Манар, г. Тунис, Тунис

²Институт информационно-коммуникационных технологий, Университет Карфагена, г. Тунис, Тунис

Конструкция адаптивного наблюдателя для выявления и моделирования ошибок датчика¹

Представлен новый подход к выявлению ошибок датчиков, их моделированию и оценке состояния. Рассматриваемая система представляет собой линейную политопную систему с изменяющимися параметрами. Основная идея заключается в формировании нового надежного адаптивного наблюдателя в рамках поликвадратического подхода с новым релаксационным множеством. Достаточные условия задаются набором линейных матричных неравенств, которые гарантируют устойчивость системы и асимптотическую сходимость оценки ошибки. Для иллюстрации использования предложенных методов приведен пример моделирования, в котором осуществляется идентификация постоянной и переменной ошибки датчика.

Ключевые слова: адаптивный наблюдатель, выявление ошибок датчика, оценка состояния, политопная линейная система с изменяющимися параметрами, линейные матричные неравенства

¹Статья подготовлена на основе результатов, полученных в рамках проекта, выполняемого совместно с ЮФУ по гранту РФФИ № 16-08-00013.

Process monitoring and fault diagnosis are a complex and vital operations to ensure the real-time control of process variables and thus to predict any failures. These operations are increasingly difficult to perform more particularly when the system is difficult to model, or when some measurements are inaccessible. Indeed, diagnostic methods do not have universal characteristics. Prerequisite to designing such methods is to take many real factors such as processes' nature, varied input, and systems' parameters into account.

On the other hand, a system can be subjected to several types of faults, mainly two called sensor and motors [35]. A defect can arrive and damage the normal operation of a system and cause catastrophic consequences such as aircraft or nuclear explosions. As a result, the properties of the system change [4]. Thus, the role of control strategies is to enable early monitoring and a diagnostic process. In light of this, the primary goal of early detection of defects is to ensure the full performance of the system.

Over the last two decades, the fault detection and state estimation in non-linear systems have received the attention of a plethora of research which spawned a variety of algorithms designed to perform such estimation. The proposed so-called adaptive observer is particular, one of them. Based on a dynamic model process, this observer can be described as the sum of the sensor-measured signals and the estimation of unmeasured signals.

Initially, many studies carried on adaptive observers were motivated by adaptive control, and more recently there have been driven by industrial process supervision. In this context, each proposed techniques depend on the vary specific system affected by the fault. References [11, 15, 20], for instance, have focused on the study of an adaptive observer for uncertain nonlinear systems. Their objective was to detect and isolate sensor faults in a distributed manner. In [5], the detection and the isolation of actuator and/or sensors faults for the nonlinear systems were considered. However, [17] propose a novel algorithm to estimate and accomodate fault in the case of nonlinear time-varying delay systems. In their work, a neural network has been used to design an observer for the detection of a single sensor faults as in [16]. Regarding the class of linear systems with variable parameters, we have have suggested several studies. For example, we cite [6] where the authors have presented a construction approach of a sensor fault signal and a reconstruction of the state for discrete-time

linear time-varying systems. Unlike the work [18], which presents the sensor fault detection for the class of LPV descriptor systems being performed with neglect of all forms of noise, this approach takes account of all disturbances that may effect the system.

This paper is an extension of the work presented in [19] where the authors proposed an adaptive algorithm to estimate engine failure and a sensor detect it in the case of linear system. We place our focus, in this work, on the sensors faults, in particular. Most commonly, two methods are applied in the reconstruction of the sensor fault signal. The first was developed in [19] proposing a change of variable that allows considering the sensor failure as an internal engine failure. While in the second method, studied in [6, 18], the fault variable is introduced as a term of the state vector.

In the present work, we limit ourselves to the first method. We propose a new approaches in order to estimate sensor fault for for linear parameter-varying (LPV) systems. Based on polyquadratic solution, the observer design is described by an optimization problems formulated in terms of LMI. In the case of polyquadratic oberver design, we use a relaxation solution to avoid the BMI problems.

The paper is organized as follows, in Section 2 we present the sensor fault principle estimation for LPV systems with quadratic conditions. In the section 3, we develop a new adaptive polyquadratic observer on the bases of LMI terms.

Notation. The following notations are used:

$$\text{sym}(A) = A + A^T, \begin{bmatrix} A & B \\ \cdot & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}, \rho = \rho(\theta(t)).$$

System description

Let us consider a continuous-time LPV system:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t); \\ y(t) = Cx(t) + \Psi(\theta)f_s(t). \end{cases} \quad (1)$$

Where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $y \in \mathbb{R}^p$ are respectively, the state space vector, the input, and the output of the system. $f_s(t) \in \mathbb{R}^r$ is the sensor fault vector.

It is assumed that θ is bounded and also lid in a convex polytopic domain of vertices such that:

$$\Theta = \{\theta(t) \in \mathbb{R}^p | \theta_1 \in [\theta_1^{\min}, \theta_1^{\max}], \dots, \dots, \theta_p \in [\theta_p^{\min}, \theta_p^{\max}]\}. \quad (2)$$

Where $\theta_i^{\min}$ and $\theta_i^{\max}$, $i = 1, \dots, p$ defined, respectively, the lower and upper bounds of the parameter.

The matrices $A(\theta)$, $B(\theta)$ and $\Psi(\theta)$ of the LPV system (1) depend affinely on θ . The system (1) is defined as a convex interpolation of the vertices of Θ . Then, the vertices of the polytope are defined as:

$$S_i = [A_i, B_i, \Psi_i, C], \quad \forall i \in [1, \dots, n], \quad (3)$$

where A_i , B_i , Ψ_i are constant matrices of appropriate dimensions.

The parameter $\rho(\theta(t))$ denotes polytopic coordinates. It is assumed to vary into the convex set as [29]:

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} \rho(\theta(t)) \in \mathbb{R}^n, \rho(\theta(t)) = [\rho_1(\theta(t)), \dots, \\ \dots, \rho_n(\theta(t))]^T, \rho_i(\theta(t)) \geq 0, \forall i, \sum_{i=1}^N \rho_i(\theta(t)) = 1 \end{array} \right\}. \quad (4)$$

The system (1) is represented by a convex combination of each vertex S_i :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\theta(t))(A_i x(t) + B_i u(t)); \\ y(t) = Cx(t) + \sum_{i=1}^n \rho_i(\theta(t))(\Psi_i f_s(t)). \end{cases} \quad (5)$$

Assumption 1.

$$\text{rank}(C\Psi_i) = r, \quad \forall i = [1, \dots, N]. \quad (6)$$

Assumption 2. The triple matrix (A_i, C) is observable for all $i \in [1, \dots, N]$.

Adaptive polytopic observer design

Consider a new state $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^p$ such as:

$$\dot{\hat{z}}(t) = -A_s(\theta)\hat{z}(t) + A_s(\theta)Cx(t) + A_s(\theta)\Psi(\theta)f(t), \quad (7)$$

where $A_s(\theta) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ is a time-varying matrix.

Denote the following augmented system:

$$X(t) = [x^T(t) \quad \hat{z}^T(t)]^T.$$

Then the new state presentation is given by:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \bar{A}(\theta)X(t) + \bar{B}(\theta)u(t) + \bar{\Psi}(\theta)f_a(t); \\ Y(t) = \bar{C}X(t); \end{cases}$$

$$\bar{A}(\theta) = \begin{bmatrix} A(\theta) & 0 \\ A_s(\theta)C & -A_s(\theta) \end{bmatrix}, \bar{B}(\theta) = \begin{bmatrix} B(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\bar{\Psi}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ A_s(\theta)\Psi(\theta) \end{bmatrix} \text{ and } \bar{C} = [0 \quad I_p]$$

with the new fault $f_a(t) = f_s(t)$,

where $\bar{A}(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)}$, $\bar{B}(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+p) \times m}$, $\bar{\Psi}(\theta) \in \mathbb{R}^{(n+p) \times r}$ and $\bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times (n+p)}$.

Remark 1. With the idea of introducing an augmented system, the observer synthesis problem of system (1) subjected to sensor fault returns to an observer synthesis problem applied to the new system (8) subjected to an actuator fault.

For a polytopic LPV system (8), an adaptive polytopic observer is described by the following:

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}(t) = \bar{A}(\theta)\hat{X}(t) + \bar{B}(\theta)u(t) + \\ + \bar{\Psi}(\theta)\hat{f}_s(t) - L(\theta)(\hat{Y}(t) - Y(t)); \\ \hat{Y}(t) = \bar{C}\hat{X}(t). \end{cases} \quad (9)$$

Where $\hat{X}(t)$ and $\hat{Y}(t)$ are the state estimation vector and the estimated system outputs. $\hat{f}_s(t)$ is the fault estimation. The gain matrix is defined by the following polytopic form:

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\theta(t))L_i. \quad (10)$$

Where L_i represents the gain of i^{th} vertex.

Remark 2. Since it has been assumed that the pair (A_i, C) is observable, the gain matrices L_i can be selected such that $(A_i - L_i C)$ is stable.

Denote $\bar{e}_X(t)$, $\bar{e}_Y(t)$, $\bar{e}_{f_s}(t)$ are respectively state estimation error, output estimation error, and fault estimation error:

$$\begin{aligned} \bar{e}_X(t) &= X(t) - \hat{X}(t); \\ \bar{e}_Y(t) &= Y(t) - \hat{Y}(t); \\ \bar{e}_{f_s}(t) &= f_s(t) - \hat{f}_s(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Then, the error dynamics are expressed as follows:

$$\dot{\bar{e}}_X(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i(\theta(t))(\bar{A}_i - L_i \bar{C})\bar{e}_X(t) + \bar{\Psi}_i \bar{e}_{f_s}(t); \quad (12)$$

$$\bar{e}_Y(t) = \bar{C}\bar{e}_X(t). \quad (13)$$

The default $f_s(t)$ is constant, hence $\dot{f}_s(t) = 0$ [23]. Consequently, the derivative of $\bar{e}_{f_s}(t)$ with respect to time can be written as:

$$\dot{\bar{e}}_{f_s}(t) = \dot{\hat{f}}(t). \quad (14)$$

The state observer (9) is combined with the law of the fault estimation updating of the form [23]:

$$\dot{\hat{f}}(t) = -\Gamma F(\theta)\bar{e}_Y(t), \quad (15)$$

where $F \in \mathbb{R}^{r \times p}$ and $\Gamma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ is the learning rate.

It should be noted that a modification of (15) is presented in [23] and [24] for time varying $f_s(t)$ in the form:

$$\dot{\hat{f}}(t) = -\Gamma F(\theta)(\bar{e}_Y(t) + \sigma \bar{e}_Y(t)), \quad (16)$$

where $\sigma \in \mathbb{R}$ is a positive scalar and can guarantee $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}_X(t) = 0$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{e}_{f_s}(t) = 0$.

Main result

Consider the LPV system described by (1) with an additive sensor fault. In this section we propose a new adaptive observer for LPV polytopic system. For this, we use the parameter-dependent Lyapunov function to ensure stability condition. We introduce some instrumental tools which will be used in the proof of this observer characterization.

Lemma 1 [23]. Given scalar $\mu > 0$ and symmetric positive definite matrix $P(\rho)$ the following inequality holds:

$$2X^T Y \leq \frac{1}{\mu} X^T P(\rho) X + \mu Y^T P^{-1}(\rho) Y, \quad X, Y \in \mathbb{R}^n. \quad (17)$$

Lemma 2. (*Projection Lemma*) [27] Given a symmetric matrix $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and two matrices P, Q of column dimensions n , there exists X such that the following LMI holds:

$$\begin{bmatrix} \Theta P_i - 2P_i + \text{sym}(P_i \bar{A}_j) & -\frac{2}{\sigma} \bar{A}_j^T P_i \bar{\Psi}_k & P_i + X_1 & P_i - \alpha \bar{C}^T L_i^T \\ \cdot & -\frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}_k^T P_i \bar{\Psi}_j + \frac{1}{2\mu\sigma} G & 0 & -\frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}_j^T P_i \\ \cdot & \cdot & -X_1 - X_1^T & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2\alpha I \end{bmatrix} < 0; \quad (22)$$

$$Y + \text{sym}(P^T X^T Q) < 0. \quad (18)$$

If and only if the projection inequalities with respect to X are satisfied:

$$\mathcal{N}_P Y \mathcal{N}_P^T < 0, \mathcal{N}_P^T Y \mathcal{N}_Q < 0. \quad (19)$$

Where $\mathcal{N}_P$ and $\mathcal{N}_Q$ denote arbitrary bases of the null spaces of P and Q respectively.

Proof See [27] ■

Lemma 3. Let Φ a symmetric matrix and N, J matrices of appropriate dimensions. The following statements are equivalent:

- i) $\Phi < 0$ and $\Phi + NJ^T + JN^T < 0$.
- ii) There exists a matrix X such that:

$$\begin{bmatrix} \Phi & J + NX \\ J^T + X^T N^T & -X - X^T \end{bmatrix} < 0. \quad (20)$$

Proof

The proof is obtained remarking that (20) can be developed as follows:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Phi & J + NX \\ J^T + X^T N^T & -X - X^T \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \Phi & J \\ J^T & 0 \end{bmatrix} + \text{sym} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} X^T \begin{bmatrix} N^T & -I \end{bmatrix} \right\} < 0 \end{aligned} \quad (21)$$

and by applying Lemma 2. ■

We propose in the following our main contribution given by Theorem 2. It consist in a convex optimization problem allowing the synthesis of a poly-quadratic adaptive observer checking LMI constraints as stated below.

Theorem 1. Under the Assumptions 1, 2 and 3, the system (9) is an adaptive observer for the system (1) with (8) if, for given scalars $\Theta > 0, \mu > 0, \alpha > 0, \eta > 0$, there exist, for each vertex, asymmetric positive definite matrix $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L_i \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $G \in \mathbb{R}^{r \times r}$ and $X_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ such that the following conditions hold:

$$\begin{bmatrix} \eta I & \bar{\Psi}_j^T P_i - F_i \bar{C} \\ \cdot & \eta I \end{bmatrix} > 0. \quad (23)$$

The gain observer matrix of the system (1) is given by the following polytopic form:

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^N \rho_i(\theta(t)) L_i. \quad (24)$$

Proof

With respect to the system parameter, it is clear that $\bar{e}_X(t)$ is linear. Thereby, consider the polytopic Lyapunov function defined by:

$$\begin{aligned} & V(\bar{e}_X(t), \bar{e}_{f_s}(t)) = \\ & = \bar{e}_X^T(t) P(\theta) \bar{e}_X(t) + \bar{e}_{f_s}^T(t) \Gamma^{-1} \bar{e}_{f_s}(t), \end{aligned} \quad (25)$$

where $P(\theta) > 0$ is a symmetric positive defined matrix. The derivation of (25) is:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}_X(t), \bar{e}_{f_s}(t)) &= \dot{\bar{e}}_X^T(t) P(\theta) \bar{e}_X(t) + \\
&+ \bar{e}_X^T(t) \dot{P}(\theta) \bar{e}_X(t) + \bar{e}_X^T(t) P(\theta) \dot{\bar{e}}_X(t) + \\
&+ \dot{\bar{e}}_{f_s}^T(t) \Gamma^{-1} \bar{e}_{f_s}(t) + \bar{e}_{f_s}^T(t) \Gamma^{-1} \dot{\bar{e}}_{f_s}(t) = \\
&= ((\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})\bar{e}_X(t) + \bar{\Psi}(\theta)\bar{e}_{f_s}(t))^T P(\theta) \bar{e}_X(t) + \\
&+ \bar{e}_X^T(t) P(\theta) (\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C}) \bar{e}_X(t) + \\
&+ \hat{f}_s^T(t) \Gamma^{-1} \bar{e}_{f_s}(t) + \bar{e}_{f_s}^T(t) \Gamma^{-1} \hat{f}_s(t) = \\
&= \bar{e}_X^T(t) ((\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})^T P(\theta)) \bar{e}_X(t) - \\
&- \bar{e}_{f_s}^T(t) \Gamma \Gamma^{-1} F(\theta) \bar{C} \bar{e}_X(t) + \bar{e}_X^T(t) P(\theta) (\bar{A}(\theta) - \\
&- L(\theta)\bar{C}) \bar{e}_X(t) + \bar{e}_{f_s}^T(t) \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) \bar{e}_X(t) + \\
&+ \bar{e}_X^T(t) P(\theta) \bar{\Psi}(\theta) \bar{e}_{f_s}(t) - \bar{e}_X^T(t) \bar{C}^T F(\rho) \Gamma \Gamma^{-1} \bar{e}_{f_s}(t) = \\
&= \bar{e}_X^T(t) [(\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})^T P(\theta) + \\
&+ P(\theta) (\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})] \bar{e}_X(t) + \bar{e}_{f_s}^T(t) [\bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) - \\
&- F(\theta) \bar{C}] \bar{e}_X(t) + \bar{e}_X^T(t) [P(\theta) \bar{\Psi}(\theta) - \bar{C}^T F(\theta)] \bar{e}_{f_s}(t). \quad (26)
\end{aligned}$$

Thus, it is verified that:

$$(\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})^T P(\theta) + P(\theta) (\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C}) < 0; \quad (27)$$

$$\bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) = F(\theta) \bar{C}. \quad (28)$$

Replacing $\dot{\bar{e}}_X(t)$ and $\dot{\bar{e}}_{f_s}(t)$ respectively with the expressions (14) and (15) and using (27) and (28):

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}_X(t), \bar{e}_{f_s}(t)) &= \\
&= ((\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})\bar{e}_X(t) + \bar{\Psi}(\theta)\bar{e}_{f_s}(t))^T P(\theta) \bar{e}_X(t) + \\
&+ \bar{e}_X^T(t) P(\theta) ((\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})\bar{e}_X(t) + \bar{\Psi}(\theta)\bar{e}_{f_s}(t)) + \\
&+ \bar{e}_X^T(t) \dot{P}(\theta) \bar{e}_X(t) + \frac{1}{\sigma} (\hat{f}_s(t) - \dot{f}_s(t)) \Gamma^{-1} \bar{e}_{f_s}(t) + \\
&+ \frac{1}{\sigma} \bar{e}_{f_s}^T(t) \Gamma^{-1} (\hat{f}_s(t) - \dot{f}_s(t)). \quad (29)
\end{aligned}$$

Then, by replacing $\hat{f}_s(t)$ using (16) in the expression, we get:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}_X(t), \bar{e}_{f_s}(t)) &= \bar{e}_X^T(t) [\dot{P}(\theta) + \\
&+ (\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})^T P(\theta) + P(\theta) (\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})] \bar{e}_X(t) + \\
&+ \bar{e}_{f_s}^T(t) \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) \bar{e}_X(t) + \bar{e}_X^T(t) P(\theta) \bar{\Psi}^T(\theta) \bar{e}_{f_s}(t) - \\
&- \frac{2}{\sigma} \bar{e}_{f_s}^T(t) \Gamma^{-1} \dot{f}_s(t) + \frac{2}{\sigma} \bar{e}_{f_s}^T(t) \Gamma^{-1} [-\Gamma F(\theta) (\dot{\bar{e}}_Y(t) + \sigma \bar{e}_Y(t))] = \\
&= \bar{e}_X^T(t) [\dot{P}(\theta) + (\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})^T P(\theta) + P(\theta) (\bar{A}(\theta) - \\
&- L(\theta)\bar{C})] \bar{e}_X(t) + \bar{e}_{f_s}^T(t) \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) \bar{e}_X(t) + \\
&+ \bar{e}_X^T(t) P(\theta) \bar{\Psi}^T(\theta) \bar{e}_{f_s}(t) - \frac{2}{\sigma} \bar{e}_{f_s}^T(t) \Gamma^{-1} \dot{f}_s(t) + \\
&+ \frac{2}{\sigma} \bar{e}_{f_s}^T(t) \Gamma^{-1} [-\Gamma F(\theta) C (\dot{\bar{e}}_X(t) + \sigma \bar{e}_X(t))]. \quad (30)
\end{aligned}$$

After development and simplification we obtain:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\bar{e}_X(t), \bar{e}_{f_s}(t)) &= \\
&= \bar{e}_X^T(t) [\dot{P}(\theta) + (\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})^T P(\theta) + \\
&+ P(\theta) (\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})] \bar{e}_X(t) - \\
&- \frac{2}{\sigma} \bar{e}_{f_s}^T(t) \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) (\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C}) \bar{e}_X(t) - \\
&- \frac{2}{\sigma} \bar{e}_{f_s}^T(t) \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) \bar{\Psi}(\theta) \bar{e}_{f_s}(t) - \frac{2}{\sigma} \bar{e}_{f_s}^T(t) \Gamma^{-1} \dot{f}_s(t). \quad (31)
\end{aligned}$$

Using Lemme 1, we can demonstrate that:

$$2 \left(-\frac{2}{2\sigma} \bar{e}_{f_s}^T(t) \right)^T (\Gamma^{-1} \dot{f}_s(t)) \leq \quad (32)$$

$$\leq \frac{2}{2\mu\sigma} \bar{e}_{f_s}^T(t) G \bar{e}_{f_s}(t) + \frac{\mu}{2\sigma} f_1^2 \lambda_{\max}(\Gamma^{-1} G^{-1} \Gamma^{-1});$$

$$\dot{V}(t) \leq \zeta^T(t) \Xi \zeta(t) + \delta, \quad (33)$$

where

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} \bar{e}_X(t) \\ \bar{e}_{f_s}(t) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Based on (32), the equation (31) can be expressed by the following inequality:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}(\theta) + \text{sym}((\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})^T P(\theta)) & \cdot \\ -\frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) \times & -\frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}^T(\theta) \times \\ \times ((\bar{A}(\theta) - L(\theta)\bar{C})) & \times P(\theta) \bar{\Psi}(\theta) + \frac{1}{2\mu\sigma} G \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

The parameter dependent Lyapunov function is assumed to be measurable [28]:

$$\theta(t) = [\theta_1(t) \quad \theta_2(t) \quad \dots \quad \theta_r(t)]^T \in \mathbb{R}^r. \quad (36)$$

Assumption 3 [28]. The state-space matrices $(\bar{A}(\theta), \bar{B}(\theta))$ are continuous and bounded functions and depend affinely on $\rho(\theta)$.

Assumption 4 [28]. The real parameters $\rho(\theta)$ that can be known by on-line measurement values exist in LPV system and vary in a polytope Θ as:

$$\begin{aligned}
\rho(t) &\in \Theta \text{ with} \\
\Theta &= \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) w_i : \alpha_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1, N = 2^r \right\} \quad (37)
\end{aligned}$$

and the rate of variation $\dot{\rho}(t)$ is well defined at all times and vary in a polytope Θ_v as:

$$\dot{\rho}(t) \in \Theta_v \text{ with } \Theta_v = \left\{ \sum_{k=1}^N \beta_k(t) v_k : \beta_k(t) \geq 0, \sum_{k=1}^N \beta_k(t) = 1, N = 2^r \right\}. \quad (38)$$

Then,

$$\frac{dP(\theta)}{dt} = \sum_{k=1}^N \beta_k(t) P(v_k) = \sum_{k=1}^N \beta_k(t) (P(v_k) - \hat{P}_0); \quad (39)$$

$$\dot{P}(\theta) = \sum_{i=1}^N \dot{\rho}_i(\theta) P_i, \quad \sum_{i=1}^N \dot{\rho}_i = 0. \quad (40)$$

The rate $\dot{\rho}(t)$ can be represented in several ways. In fact most of the time, it is difficult to give its adequate modeling. For LPV system, the derived parameter does not vanish as in the LTI case.

In our case, we suppose that [25]:

$$\dot{\rho}(\theta) < \vartheta \rho(\theta). \quad (41)$$

Then,

$$\dot{P}(\theta) = \vartheta P(\theta). \quad (42)$$

Unfortunately, (46) is not convex in P and L , then, it cannot be solved by the LMI tools.

We can introduce some transformations to simplify the $P(\rho)$, $L(\rho)$ and $\bar{C}$ terms of the inequality (46).

We suppose that:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \vartheta P(\theta) - 2P(\theta) + \text{sym}(P(\theta)\bar{A}(\theta)) & \cdot & \cdot \\ -\frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) \bar{A}(\theta) & -\frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) \bar{\Psi}(\theta) + \frac{1}{2\mu\sigma} G & \cdot \end{bmatrix}; \quad (43)$$

$$N^T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -L(\theta)\bar{C} & 0 \end{bmatrix}; \quad (44)$$

$$J = \begin{bmatrix} P(\theta) & P(\theta) \\ 0 & \frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) \end{bmatrix}. \quad (45)$$

By Lemma 2, there exists a matrix $X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & \alpha I \end{bmatrix}$

of appropriate dimensions such that inequality (46) is satisfied.

$$\begin{bmatrix} \vartheta P(\theta) - 2P(\theta) + \text{sym}(P(\theta)\bar{A}(\theta)) & -\frac{2}{\sigma} \bar{A}(\theta) P(\theta) \bar{\Psi}(\theta) & P(\theta) + X_1 & P(\theta) - \alpha \bar{C}^T L^T(\theta) \\ \cdot & -\frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) \bar{\Psi}(\theta) + \frac{1}{2\mu\sigma} G & 0 & -\frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}^T(\theta) P(\theta) \\ \cdot & \cdot & -X_1 - X_1^T & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & -2\alpha I \end{bmatrix} < 0. \quad (46)$$

Hence, (46) can be rewritten as:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \rho_i(\theta(t)) \rho_j(\theta(t)) \rho_k(\theta(t)) \Xi < 0; \quad \Xi = \begin{bmatrix} \vartheta P_i - 2P_i + \text{sym}(P_i \bar{A}_k) & -\frac{2}{\sigma} \bar{A}_j P_i \bar{\Psi}_k & P_i + X_1 & P_i - \alpha \bar{C}^T L_i^T \\ \cdot & -\frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}_k^T P_i \bar{\Psi}_j + \frac{1}{2\mu\sigma} G & 0 & -\frac{2}{\sigma} \bar{\Psi}_j^T P_i \\ \cdot & \cdot & -X_1 - X_1^T & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & -2\alpha I \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Remark 5. The main advantage of the theorem 1 given earlier will appear when dealing with poly-quadratic adaptive observer. In fact, the new convex optimization problem allows to guarantee a robust stability of the error which means that as long as LMI is feasible the variation of the parameters $\theta(t)$ is always tolerated.

Numerical example

In this section, we propose the example of single-link arm (Fig 1) [30]. The system is described by the following equation:

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{q}_1 + F_1 \dot{q}_1 + k(q_1 - q_2) + mgl \sin(q_1); \\ J_m \ddot{q}_2 + F_m \dot{q}_1 - k(q_1 - q_2) = u. \end{aligned} \quad (48)$$

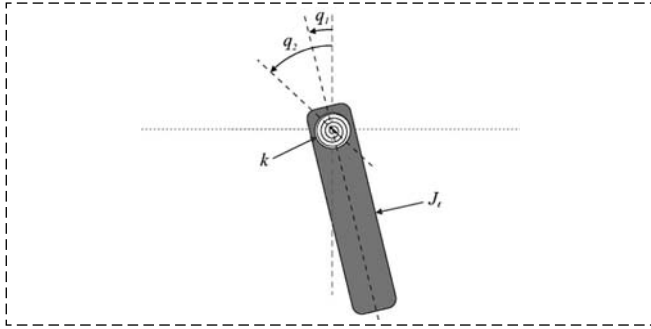


Fig. 1. Single-link robotic arm, with a revolute elastic joint, rotating in a vertical plane [31]

Then, the state space is written as:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{J_1} & \frac{-F_1}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_m} & 0 & \frac{-k}{J_m} & \frac{-F_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-mgl}{J_1} \sin(x_1) \\ 0 \\ \frac{u}{J_m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \eta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (49)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} + \beta(t - T_0) F \theta. \quad (50)$$

The proposed model has been linearized and assumed to an LPV model in [30]. In this paper, we consider that the LPV state space is described by:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= \left(\frac{1}{J_1} \right) (K(x_3 - x_1) - F_1 x_2 - mgl(\sin(x_1) + d)); \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= \left(\frac{1}{J_m} \right) (K(x_1 - x_3) - F_m x_4 + k_\tau u); \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 - 9,8\theta(x) & -0,25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad (52)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} f_s(t).$$

Table 1

Values of parameters of the single-link robotic arm [30]

q_1	the link displacement	
q_2	the rotor displacement	
J_1	the motor rotor inertia	2
J_m	the motor rotor inertia	1
k	the elastic constant	2
m	the link mass	4
g	the gravity constant	9,8
I	the center of mass	
F_1, F_m	the viscous friction coefficients	$F_1 = 0,5$ and $F_m = 1$

Where x_1 , x_2 , x_3 and x_4 are, respectively, the link angular position, the link angular velocity, the motor angular position and the motor angular velocity. Table 1 summarizes the values of the different parameters. In this example, the state x_1 , x_3 and x_4 are available for measurement. The torque provided by the motor is considered as the control input, u . We consider that $u = 2\sin(t)$ and $\theta(x) = \sin(y_1)/y_1$.

The sensor fault is assumed as the following:

$$f_s = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Two sensors in the single-link arm are subject to faults; the velocity and the measurement of the motor's angular position.

Model (59) is a quasi-LPV system, thus, we can't apply the algorithm directly. The parameters' trajectory is given by the behavior variable $\theta(x) \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$. If we consider $x \in [-x_0, x_0]$, $x_0 \leq \pi/2$, we obtain $\theta_{\min} = \underline{\theta} = -2/\pi$ and $\theta_{\max} = \bar{\theta} = 2/\pi$.

The vertex model of the single-link arm is represented by both local models. Similar to [14], the weighing functions are computed as the following:

$$\rho_1(\theta) = \frac{\theta - \underline{\theta}}{\bar{\theta} - \underline{\theta}}; \quad \rho_2(\theta) = \frac{\bar{\theta} - \theta}{\bar{\theta} - \underline{\theta}}. \quad (54)$$

For simulation purposes, we choose an arbitrary value of θ as $1/\pi$ and the obtained ρ_i verifies (3). LPV representation of the dynamic system is described by the following set of matrices:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5,24 & 0,25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7,24 & 0,25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

We applied two types of faults to verify the efficiency of the algorithm; varying and sinusoidal faults:

- a varying fault as:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 10; \\ 10, & \text{if } 10 \leq t \leq 15; \\ 0, & \text{if } 15 \leq t \leq 30; \\ 20, & \text{if } 30 \leq t \leq 60; \\ 0, & \text{if } 60 \leq t \leq 80; \\ 50, & \text{other.} \end{cases}$$

- a sinusoidal fault as:

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{if } t < 50; \\ 1, 2 + 0,8 \sin(0,4\pi t), & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Poly-quadratic Observer: Application of Theorem 1

By taking the same condition, and applying the Theorem 1 (30), the solution is computed and the observer matrices are determined as follows:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1102 & 0,0064 & -0,0013 & -0,1090 & -0,0168 \\ 0 & 0 & 0,0064 & 0,1178 & -0,0236 & 0,0172 & -0,1067 \\ 0 & 0 & -0,0013 & -0,0236 & 0,0047 & -0,0034 & 0,0213 \\ 0 & 0 & -0,1090 & 0,0172 & -0,0034 & 0,1125 & -0,0046 \\ 0 & 0 & -0,0168 & -0,1067 & 0,0213 & -0,0046 & 0,0977 \end{bmatrix};$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1109 & 0,0067 & -0,0013 & -0,1096 & -0,0171 \\ 0 & 0 & 0,0067 & 0,1182 & -0,0236 & 0,0169 & -0,1071 \\ 0 & 0 & -0,0013 & -0,0236 & 0,0047 & -0,0034 & 0,0214 \\ 0 & 0 & -0,1096 & 0,0169 & -0,0034 & 0,1130 & -0,0043 \\ 0 & 0 & -0,0171 & -0,1071 & 0,0214 & -0,0043 & 0,0981 \end{bmatrix};$$

$$L_1 = 10^{-9} \cdot \begin{bmatrix} 0,1640 & 0,0442 & -0,1556 \\ 0,0239 & 0,0144 & -0,0077 \\ 0,0944 & 0,3290 & -0,0481 \\ -0,0789 & -0,0417 & 0,1561 \\ 0,0282 & 0,0100 & -0,0175 \\ 0,0070 & 0,0266 & -0,0068 \\ -0,0185 & -0,0077 & 0,0198 \end{bmatrix};$$

$$L_2 = 10^{-9} \cdot \begin{bmatrix} 0,1640 & 0,0451 & -0,1564 \\ 0,0240 & 0,0142 & -0,0076 \\ 0,0946 & 0,3281 & -0,0476 \\ -0,0808 & -0,0440 & 0,1596 \\ 0,0286 & 0,0096 & -0,0174 \\ 0,0065 & 0,0270 & -0,0066 \\ -0,0168 & -0,0058 & 0,0168 \end{bmatrix}.$$

The sensor fault estimation result in the case of the varying sensor and sinusoidal faults using the adaptive fault estimation observer is depicted in Figure 2 and Figure 3.

Fig. 2, 3 shows the varying and sinusoidal-like fault and its estimate. From the above given figures it is obvious that the the adaptive observer described by the theorem 1, which parameters are obtained as a solution of the LMI problem specified by Theorem 1, can with sufficient precision approximate given class of warring faults that their impact on the system variables is successfully compensated.

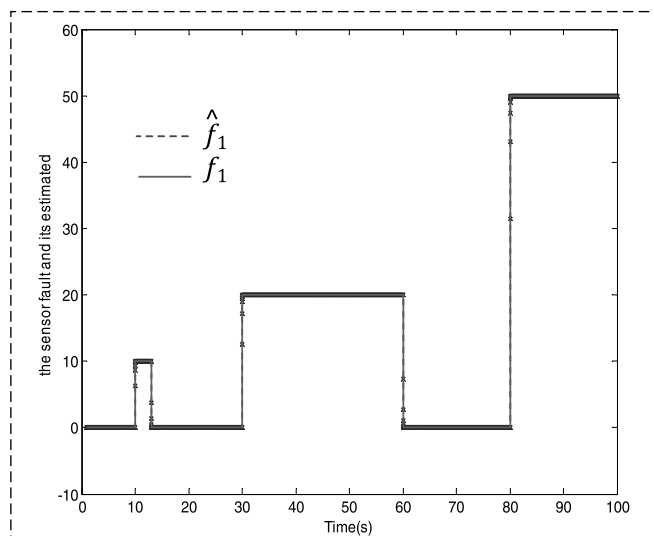


Fig. 2. Behavior of varying sensor fault and its estimate using the polyquadratic approach

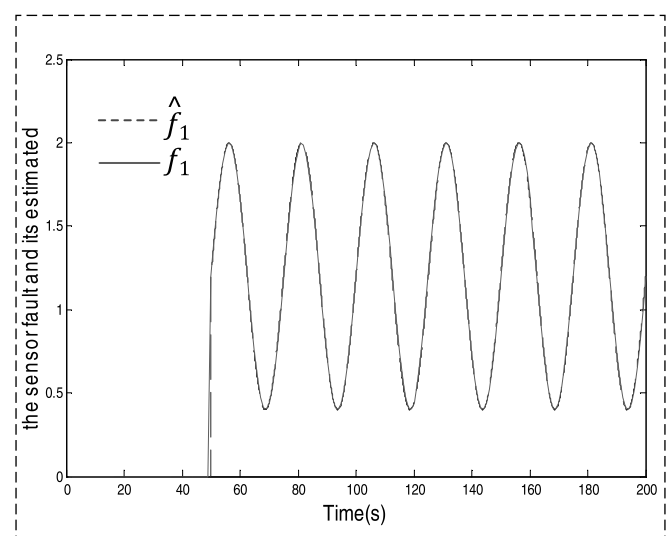


Fig. 3. Behavior of sinusoidal sensor fault and its estimate using the polyquadratic approach

Conclusion

A new sensor fault estimator for class of polytopic LPV systems has been designed in this paper. The approach is described by a convex optimization problem in terms of LMI. The solution scheme is applied to an augmented system, where the sensor fault is considered as an actuator fault. Finally, a numerical example is provided to illustrate the effectiveness of the proposed theory.

References

1. Edwards C. A comparison of sliding mode and unknown input observers for fault reconstruction, *Proc. of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2004, pp. 5279–5284.
2. Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. Diagnosis and Fault-Tolerant Control. 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
3. De Oca S. M., Rotondo D., Nejari F., Puig V. Fault Estimation and Virtual Sensor FTC Approach for LPV Systems, *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Orlando, FL, USA, December 12–15, 2011.
4. Da Silva J. C., Saxena A., Balaban E., Goebel K. A knowledge-based system approach for sensor fault modeling, detection and mitigation, *Expert Systems with Applications* 39, 10977–10989, Elsevier 2012.
5. Mattone R., De Luca A. Nonlinear Fault Detection and Isolation in a Three-Tank Heating System, *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, November 2006, vol. 14, no. 6.
6. Zhen-Hua W., Mickael R., Didier T., Yi S. Sensor Fault Estimation Filter, Design for Discrete-time Linear Time-varying Systems, *Acta Automatica Sinica*, October, 2014, vol. 40, no. 10.
7. Noura H., Sauter D., Hamelin F., Theilliol D. Fault-tolerant control in dynamic systems: Application to winding machine, *IEEE control system magazine*, February 2000.
8. Reece S., Roberts S., Claxton C., Nicholson D. Multi-sensor fault recovery in the presence of known and unknown faults, *Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion*, 2009, pp. 1695–1703.
9. Isermann R. Fault-diagnosis systems: an introduction from fault detection to fault tolerance, Springer Verlag, 2006.
10. Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. Diagnosis and fault-tolerant control, Springer Verlag, 2003.
11. Reppa V., Polycarpou M. M. Adaptive Approximation for Multiple Sensor Fault Detection and Isolation of Nonlinear Uncertain Systems, *IEEE Transaction on Neural Networks and Learning Systems*, January 2014, vol. 25, no. 1.
12. Venkatasubramanian V., Rengaswamy R., Kavuri S. N. A review of process fault detection and diagnosis, Part II: Qualitative models and search strategies, *Computers and Chemical Engineering*, 2003, vol. 27, pp. 313–326.
13. Venkatasubramanian V., Rengaswamy R., Kavuri S. N. A review of process fault detection and diagnosis: Part I: Quantitative model-based methods, *Computers and Chemical Engineering*, March 2003, vol. 27, iss. 3, pp. 293–311.
14. Wang Z., Rodrigues M., Theilliol D., Shen Y. Fault Estimation for A Class of Discrete-Time Nonlinear Systems, *19th IFAC World Congress, IFAC'14*, Cape Town, South Africa, Aug 2014.
15. Reppa V., Polycarpou M. M., Panayiotou C. G. A Distributed Architecture for Sensor Fault Detection and Isolation using Adaptive Approximation, *WCCI 2012 IEEE World Congress on Computational Intelligence*, Brisbane, Australia, June, 10–15, 2012.
16. Samy I., Postlethwaite I., Da-WeiGu I. Survey and application of sensor fault detection and isolation scheme", *Control Engineering Practice* 19, Elsevier Ltd, 2011, pp. 658–674.
17. Zhang K., Jiang B., Cocquempot V. Fast adaptive fault estimation and accommodation for nonlinear time-varying delay systems, *Asian Journal of Control*, November 2009, vol. 11, no. 6, pp. 643–652.
18. Astorga-Zaragoza C.-M., Theilliol D., Ponsart J.-C., Rodrigues M. Sensor fault diagnosis for a class of LPV descriptor systems, *7th Workshop on Advanced Control and Diagnosis*, Poland, 2009.
19. Zhang K., Jiang B., Cocquempot V. Adaptive Observer-based Fast Fault Estimation, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, June 2008, vol. 6, no. 3, pp. 320–326.
20. Zhang X. Sensor Bias Fault Detection and Isolation in a Class of Nonlinear Uncertain Systems Using Adaptive Estimation, *IEEE Transaction on Automatica Control*, May 2011, vol. 56, no. 5.
21. Ichalal D., Mammar S. On Unknown Input Observers for LPV Systems, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015.
22. Toth R., Willems J., Heuberger P., Van den Hof P. A behavioral approach to LPV systems, *Proceedings of the European Control Conference*, Budapest, Hungary, 2015–2020, August, 2009.
23. Zhang K., Jiang B., Cocquempot V. Adaptive Observer-based Fast Fault Estimation, *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2008, vol. 6, no. 3, pp. 320–326.
24. Krokavec D., Filasova A., Serbak V., Liscinsky P. An enhanced approach to actuator fault estimation design for linear continuous-time systems, *European Workshop on Advanced Control and Diagnosis, Journal of Physics: Conference Series* 570 (2014) 072002.
25. Cao Y., Lin Z. A Descriptor System Approach to Robust Stability Analysis and Controller Synthesis, *IEEE Transaction on automatic control*, November, 2004, vol. 49, no. 11.
26. Geromel J., Colaneri P. Robust stability of time varying polytopic systems, *Systems and control letters*, 55:81–85. 2006.
27. Boyd S. P., Ghaoui L. E., Feron E., Balakrishnam V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, the Society for Industrial and Applied Mathematics, 3600 University City Science Center, Philadelphia, Pennsylvania 19104-2688, vol. 15, 1994.
28. Xie W. H2 gain scheduled state feedback for LPV system with new LMI formulation, *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, November 2005, vol. 152, no. 6.
29. Rodrigues M., Theilliol D., Sauter D. Design of an active fault tolerant control for nonlinear systems described by a multi-model representation, 2005; 1579–1584.
30. Zhang X., Parisini T., Polycarpou M. Sensor bias fault isolation in a class of nonlinear systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, Mar. 2005, vol. 50, no. 3, pp. 370–376.
31. André P., Rosa N. E. Multiple-Model Adaptive Control of Uncertain LPV Systems, Ph.D thesis, Universidade tecnica de Lisboa, Instituto Superior Tecnico, 2011.
32. Kwong W. A., Passino K. M., Laukoen E. G., Yurkovich S. Expert Supervision of Fuzzy Learning Systems for Fault Tolerant Aircraft Control, *Special Issue on Fuzzy Logic in Engineering Applications, Proceedings of the IEEE*, March 1995, vol. 83, no. 3, pp. 466–483.
33. Ganguli S., Marcos A., Balas G. Reconfigurable lqv control design for boeing 747-100/200 longitudinal axis, *Proceedings of the American Control Conference ACC'02*, 2002, pp. 3612–3617.
34. Eryurek E., Upadhyaya B. R. An integrated fault tolerant control and diagnostics system for nuclear power plants, *Proceedings of the Topical Meeting on Computer Based Human Support Systems: Technology, Methods and Future*, 1995, pp. 267–274.
35. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol 15, Philadelphia, PA 1994.
36. Zemouch A., Rajamani R., Boulkroune B., Rafaralaby H., Zasadzinski M. Convex Optimization Based Dual Gain Observer for Lipschitz Nonlinear Systems, *American Control Conference (ACC)*, Boston Marriott, USA, July 6–8, 2016.

Е. Я. Рубинович, д-р техн. наук, проф., rubinvch@ipu.ru,
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

О расширении класса программных управлений уклонения в простейшей двухкритериальной игре преследования двух целей

Рассмотрены постановка и решение двухкритериальной игры преследования-уклонения на плоскости одного преследователя против двух целей, одна из которых является ложной. Ложная цель используется для отвлечения преследователя, позволяя истинной цели (в процессе отвлечения) максимизировать минимально возможное расстояние до преследователя. Специфика преследователя состоит в том, что он обладает круговой зоной классификации радиуса R , внутри которой он имеет возможность мгновенно классифицировать цель как ложную или истинную. Игра состоит в том, что преследователь минимизирует время, необходимое для сближения с одной из целей до расстояния, не превышающего R (R -встреча), а цели, действуя согласованно, максимизируют минимальное расстояние между преследователем и оставшейся целью. Игра продолжается до момента R -встречи преследователя с первой (ложной) целью, т. е. до момента классификации ложной цели. Предполагается, что то, что первая цель является ложной априори преследователю не известно. Стратегия использования ложной цели как раз и состоит в том, чтобы выпустить ее для отвлечения преследователя от истинной цели. В реальности ложная цель представляет собой мобильный беспилотный аппарат, управление которым осуществляется программно с помощью БЦВМ. В классе программных управлений рассматриваемая постановка исследовалась в 1984 г. М. Н. Ивановым и Е. П. Масловым. Возникает естественный вопрос, что даст расширение класса программных управлений ложной целью до класса позиционных, т.е. до класса управлений с обратной связью. Такой вопрос вполне уместен в связи с большим прогрессом в развитии микропроцессорной техники и повышением производительности БЦВМ, что дает возможность использовать все более сложные алгоритмы управления автономными подвижными объектами. В данной статье дается отрицательный ответ на поставленный выше вопрос, а именно, показывается, что расширение класса программных управлений ложной целью не улучшает качества управления. Доказывается, что в рассматриваемой игре имеет место равновесие по Нэшу в программных стратегиях игроков.

Ключевые слова: игра преследования-уклонения, мобильная ложная цель, программное управление, позиционное управление, равновесие по Нэшу

Введение

Первые постановки дифференциальных игр преследования с ложной целью относятся к началу 70-х годов прошлого века [1]. Эти игры подразделяются на дифференциальные игры совместного и поочередного преследования. При совместном преследовании в задачу преследователя входит сближение с группой целей и используется терминальный критерий типа "промах" (по истинной цели) [1, 4, 5]. При поочередном преследовании используется критерий типа "время". Требуется переловить все цели за минимальное время или минимизировать время поимки именно истинной цели [2, 3, 6]. При этом информация о том, с какой вероятностью та или иная цель является истинной, может быть задана априорно.

В последнее время активно развиваются постановки и решения задач, описывающих различные эпизоды динамического взаимодействия трех игроков типа Атакующий—Цель—Защитник (Attacker—Target—Defender или Missile—Target—Defender, соответственно ATD-или MTD-игры), в которых коалиция из двух

игроков (убегающей цели и мобильного защитника) выступает против атакующего преследователя [7—23]. В качестве защитника подразумевается ударный беспилотный аппарат или мобильная ложная цель. В этих постановках атакующий игрок стремится поймать (поразить) убегающую цель, в то время как задача мобильного защитника — успеть перехватить атакующего игрока. В упомянутых выше работах [7—23] постановки игр рассматриваются на плоскости, а задачи отличаются динамикой игроков (простые движения, движения с ограничениями на разворот и т. п.), критериями ("время", "промах") и условиями информированности участвующих в конфликте сторон. Условия информированности, в свою очередь, накладывают ограничения на классы стратегий (управлений) игроков (позиционные, программные, кусочно-программные и т. п.). В частности, в работе [22] рассматривается MTD-игра в программных стратегиях игроков при отсутствии у коалиции цель—защитник априорной информации о дистанции до преследователя.

В реальности выбор управления защитником в классе программных управлений обу-

словлен двумя причинами. Первая состоит в том, что возможности для получения объективной текущей информации о преследователе с борта защитника сильно затруднены или вообще отсутствуют в силу его чисто конструктивных особенностей. Второй причиной является, как правило, относительная "примитивность" БЦВМ-защитника. "Взрывной" прогресс в развитии микропроцессорной техники, который наблюдается в последние годы, позволяет ставить вопрос о разработке более сложных в интеллектуальном плане алгоритмов управления автономными подвижными объектами, в частности, переходить от программных управлений к позиционным.

В настоящей статье рассматривается плоская двухкритериальная АТД-игра одного преследователя (атакующего игрока) против двух целей, одна из которых является ложной и играет роль защитника. Задача защитника — отвлечь на себя атакующего игрока, дав тем самым истинной цели возможность совершить маневр уклонения, максимизировав минимально возможное расстояние до преследователя, которое реализуется в процессе его сближения с ложной целью. Конструктивные особенности атакующего игрока таковы, что он обладает круговой зоной классификации радиуса R , внутри которой он имеет возможность мгновенно классифицировать цель как ложную или истинную. Игра состоит в том, что преследователь минимизирует время, необходимое для сближения с одной из целей до расстояния, не превышающего R (R -встреча), а цели, действуя согласованно, максимизируют минимальное расстояние между преследователем и оставшейся целью. Игра продолжается до момента R -встречи преследователя с первой (ложной) целью, т. е. до момента классификации ложной цели (время до этого момента атакующий игрок минимизирует). Предполагается, что тот факт, что первая по порядку преследования цель является ложной, априори преследователю не известен.

При программных управлениях ложной целью подобная постановка рассматривалась в работе [23]. В свете вышесказанного вполне уместен вопрос: что даст расширение класса программных управлений ложной целью до класса позиционных, т. е. до класса управлений с обратной связью?

В данной работе дается отрицательный ответ на этот вопрос, а именно, показывается, что расширение класса программных управлений

ложной целью не улучшает качества управления. Доказывается, что в рассматриваемой игре имеет место равновесие по Нэшу в программных стратегиях игроков.

Постановка задачи

Три игрока: преследователь (атакующий игрок) P и две цели E_1 и E_2 , обладавая ограниченными линейными скоростями, перемещаются на плоскости, имея возможность в каждый момент изменять направления своих движений (совершают так называемые "простые движения", рис. 1).

Уравнения относительного движения (здесь и далее $i = 1, 2$)

$$\dot{Z}_i(t) = v_i(t) - u(t), Z_i(0) = Z_i^0, \quad (1)$$

где $Z_i(t)$ — двумерный вектор, направленный от P к цели E_i в текущий момент t ; $u(t)$, $v_i(t)$ — двумерные векторы скоростей (управлений) игроков P и E_i соответственно, временные реализации которых подчинены следующим ограничениям:

$$P: |u(t)| \leq 1, E_i: |v_i(t)| \leq \beta < 1. \quad (2)$$

Игрок P осуществляет R -встречу с целью E_1 , решая задачу преследования с критерием (платежным функционалом)

$$G_1 = T \rightarrow \min_u, \quad (3)$$

при начальных и терминальных условиях

$$0 \leq |Z_1(T)| = R \leq |Z_1^0| \leq |Z_2^0|. \quad (4)$$

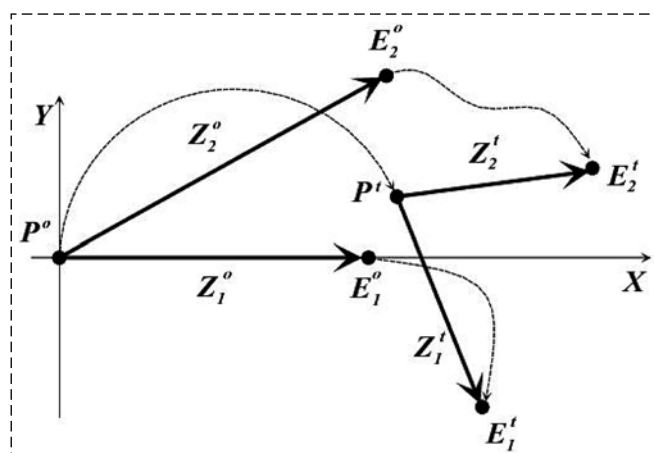


Рис. 1. Геометрия движения игроков
Fig. 1. The players motion geometry

Коалиция целей решает задачу уклонения с критерием

$$G_2 = \min_t |Z_2(t)|^2 \rightarrow \min_{v_1, v_2}, \quad t \leq T. \quad (5)$$

Здесь T — время окончания игры.

Решение игры в программных стратегиях

В предположении о программности управления цели E_1 , которое известно игрокам P и E_2 , был найден оптимальный ответ коалиции $\{E_1, E_2\}$ в смысле критерия G_1 на интервале $[0, T]$ [23]. А именно, при любом программном управлении $v_1(t)$ игрока E_1 для преследователя P оптимальным является движение с максимальной скоростью в точку R -встречи с целью E_1 . Направления движений игроков зависят от начального положения E_2^0 цели E_2 (здесь и далее верхними индексами 0 и T отмечены положения игроков в начальный и конечный моменты времени). Область возможных начальных положений E_2^0 цели E_2 (верхняя полуплоскость в декартовой системе координат XOY , начало O которой совпадает с начальным положением P^0 преследователя P (т. е. $O = P^0$), а ось OX направлена вдоль линии визирования $P^0 E_1^0$ цели E_1 в начальный момент времени) разбивается двумя параллельными прямыми L_1, L_2 на три зоны: A, B и C (детали см. в работе [23]). В зоне A игра физического смысла не имеет. В случае $E_2^0 \in B$ преследователь P движется по прямой $P^0 P^T$, касательной к овалу Декарта (в полярной системе координат $\{\rho, \varphi\}$ с полюсом O и полярной осью OX , отсчет φ — по часовой стрелке):

$$(1 - \beta^2)\rho^2 + 2(\beta^2 R - x_1^0 \cos \varphi)\rho + (x_1^0)^2 - \beta^2 R^2 = 0, \quad (6)$$

который дает описание геометрического места точек R -встречи игроков P и E_1 (рис. 2). Здесь x_1^0 — абсцисса начального положения E_1^0 цели E_1 , т. е. $x_1^0 = |Z_1^0|$.

Условие касания прямой $P^0 P^T$ овала Декарта ($P^0 P^T$ — направление движения игрока P) имеет вид

$$\cos \varphi_0 = \beta^2 \sigma_0 + \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta^2 \sigma_0^2)}, \quad (7)$$

где $\sigma_0 = R/x_1^0 < 1$.

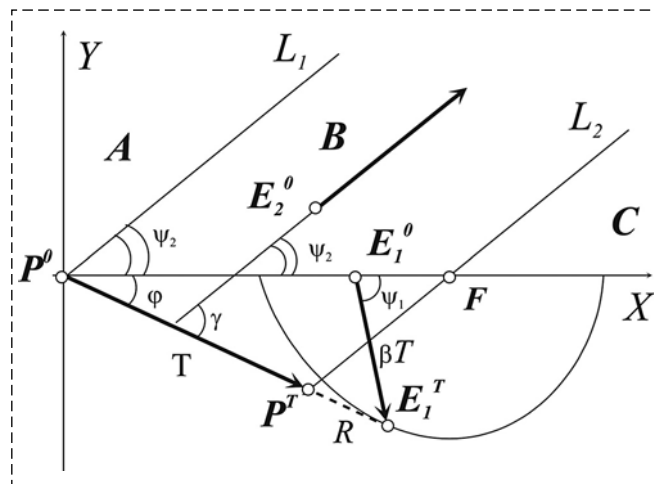


Рис. 2. Решение игры в программных стратегиях
Fig. 2. The game solution with open-loop controls

Углы ψ_1 и ψ_2 разбегания целей (вдоль прямых с максимально возможными скоростями, равными β) задаются следующими равенствами:

- для цели E_1 :

$$\cos \psi_1 = \beta \sigma_0; \quad (8)$$

- для цели E_2 :

$$\psi_2 = \gamma - \varphi, \quad (9)$$

где $\varphi = \varphi_0$ из соотношения (7), а γ такое, что $\cos \gamma = \beta$.

Радиус-вектор $P^0 E_1^T$ терминальной точки E_1^T имеет длину

$$\rho_T = \sqrt{\frac{1 - \beta^2 \sigma_0^2}{1 - \beta^2}}. \quad (10)$$

Время существования игры

$$T = \rho_T - R. \quad (11)$$

В зоне C цель E_2 уклоняется вдоль прямой, проходящей через точки P^T и E_2^0 .

Позиционный выбор управлений

Во введении был поставлен вопрос: "Может ли коалиция целей $\{E_1, E_2\}$ улучшить значение своего платежного функционала G_2 , перейдя к позиционным управлениям игрока E_1 ?" и был анонсирован отрицательный ответ. Для обоснования этого ответа обратим внимание на то, что игрок P и коалиция $\{E_1, E_2\}$ решают свои задачи с разными критериями. Следова-

тельно, тот факт, что отказ от программности не улучшает значения критериев G_1 и G_2 , равносильно тому, что в задаче имеет место равновесие по Нэшу на траекториях, удовлетворяющих (6)–(11), т. е. выполняются условия:

а) игрок P не может улучшить свой платежный функционал G_1 при условии, что игроки E_1 и E_2 движутся оптимально в соответствии с (6)–(11);

б) коалиция $\{E_1, E_2\}$ не может улучшить G_2 , если P избирает стратегию преследования, соответствующую (6)–(11).

Условие а) выполняется в силу того, что игрок P движется оптимально при программном движении E_1 , что соответствует (6)–(11). Далее показывается, что условие б) также выполняется.

Действительно, игрок P выбирает свое управление позиционно. Позиционный выбор означает, что в текущий момент времени t , принимая момент t за начальный, игрок P решает задачу (1)–(5) в предположении программности последующего движения игрока E_1 , т. е. считая, что с этого момента t игрок E_1 будет двигаться оптимально, а именно, под углом $\psi_1(t)$ к вектору $Z_1(t)$ в соответствии с (8) (где σ_0 заменяется на $\sigma_t \triangleq R/|Z_1(t)| \leq R$). Из этого следует, что управление $u(t)$ игрока P в каждый момент времени t направлено под углом $\varphi(t)$ к вектору $Z_1(t)$ (где $\varphi(t)$ из соотношения (7) с заменой φ_0 на $\varphi(t)$ и σ_0 на σ_t), т. е.

$$\cos \varphi(t) = \beta^2 \sigma_t + \sqrt{(1 - \beta^2)(1 - \beta^2 \sigma_t^2)}. \quad (12)$$

Замечание 1. Заметим, что вид максимизируемого функционала $\min_t Z_2^2(t)$ таков, что в некоторый момент времени θ функция $Z_2^2(t)$ достигает минимума по t , а после момента θ оптимальными уже будут любые траектории, на которых $Z_2^2(t) \geq Z_2^2(\theta)$. Таких траекторий бесконечно много. Далее будет показано, что достаточным условиям оптимальности удовлетворяют только траектории движения вдоль прямых, т. е. при $v_i = \text{const}$, $u = \text{const}$, причем этот факт не зависит от вида терминального условия в момент θ . Следовательно, можно считать функцию $Z_2^2(t)$ гладкой в точке θ , откуда

$$\frac{dZ_2^2(t)}{dt} = 2Z_2(t) \cdot \frac{dZ_2(t)}{dt} = 0, \quad t = \theta. \quad (13)$$

Здесь и далее точка между векторами обозначает скалярное произведение. Поэтому мо-

мент θ можно определить как момент окончания игры для зоны B , в который $0 < t \leq \theta$, а выбор управления $u(t)$ в соответствии с соотношением (12) обеспечивает траекторию следующей R -встречи.

Изложенное выше Замечание 1 позволяет сформулировать на отрезке $[0, \theta]$ следующую вспомогательную игру при позиционном управлении игрока P , считая все векторы вектор-столбцами и выбирая для упрощения масштаб $R = 1$:

- уравнения движения

$$\dot{Z}_i(t) = v_i(t) - u(t), \quad Z_i(0) = Z_i^0, \quad i = 1, 2; \quad (14)$$

- ограничения на управления

$$|v_i(t)| \leq \beta < 1, \quad |u(t)| = 1; \quad (15)$$

- фазовое ограничение

$$u(t) \cdot Z_1(t) = \beta^2 + \sqrt{(1 - \beta^2)(Z_1^2(t) - \beta^2)}; \quad (16)$$

- терминальное условие (см. (13))

$$Z_2(\theta) \cdot \dot{Z}_2(\theta) = 0; \quad (17)$$

- критерий

$$G = -Z_2^2(\theta) \rightarrow \min_{v_1, v_2} \max_u. \quad (18)$$

В ограничении (16) скалярное произведение $u(t) \cdot Z_1(t) = |Z_1(t)| \cos \varphi(t)$, где угол $\varphi(t)$, отсчитываемый от вектора $Z_1(t)$ к вектору $u(t)$, положителен.

Теорема 1. Решение задачи в постановке (14)–(18) совпадает с решением задачи (1)–(5) вплоть до момента θ . Иными словами, движения игроков происходят вдоль прямых под углами $\varphi_0, \psi_1, \psi_2, \gamma$ (рис. 2).

Доказательство основано на достаточных условиях Кротова для задач с критериями типа

$$G = F(Z(0), Z(\theta)) \rightarrow \min_{v \in V_v(t)} \max_{u \in V_u(t, Z(t))}, \quad t \in [0, T],$$

для систем вида $\dot{Z}_i = f_i(t, Z, u, v)$, где $f_i(\cdot)$ — кусочно-гладкая функция [24, стр. 36].

Решение игры (1)–(5), удовлетворяющее (6)–(11), назовем *предполагаемым*. Согласно методике работы [24] выберем функцию Кротова ϕ , например, в виде

$$\phi = \lambda_1(t) \cdot Z_1 + \lambda_2(t) \cdot Z_2 + C(t) \quad (19)$$

с неопределенными пока функциями $\lambda_i(t)$, $C(t)$. Тогда, следуя методу Кротова, находим в нашем случае

$$\Phi = \Phi(t, Z, u, v) \triangleq \sum_i \phi'_{Z_i} f_i + \phi'_t = \lambda_1 \cdot (v_1 - u) + \\ + \lambda_2 \cdot (v_2 - u) + \dot{\lambda}_1 \cdot Z_1 + \dot{\lambda}_2 \cdot Z_2 + \dot{C} \rightarrow \min_{v_1, v_2} \max_{u, Z}$$

Для сокращения записи здесь и далее аргумент t опущен.

В функции Φ управления u и v_i разделяются, не входят они одновременно и в ограничения. По этой причине функцию Φ можно независимо максимизировать по v_i и минимизировать по u . Максимум Φ , при учете ограничений (15), реализуется при

$$v_1 = \beta \lambda_1 |\lambda_1|^{-1}, \quad v_2 = \beta \lambda_2 |\lambda_2|^{-1}. \quad (20)$$

Обозначим

$$D \triangleq \max_{v_1, v_2} \Phi = \beta(|\lambda_1| + |\lambda_2|) - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot u + \\ + \dot{\lambda}_1 \cdot Z_1 + \dot{\lambda}_2 \cdot Z_2 + \dot{C} \rightarrow \min_{u, Z}$$

где $Z = (Z_1, Z_2)$. Здесь, в силу фазового ограничения (16) и ограничения (15), управление u является заданной функцией фазовой координаты Z_1 , т. е. $u = u(Z_1)$. Введем угол ϑ между вектором u и осью OX , тогда

$$u = u(Z_1) \triangleq (\cos \vartheta(Z_1), \sin \vartheta(Z_1)).$$

Таким образом, задача минимизации функции D свелась к ее минимизации по фазовым переменным $Z = (Z_1, Z_2)$. Достаточными условиями минимума D по Z в некоторой точке $Z^* = (Z_1^*, Z_2^*)$ будут следующие условия:

$$D'_{Z_1}(Z^*) = 0, \quad D'_{Z_2}(Z^*) = 0 \quad (21)$$

и положительная определенность квадратичной формы

$$Q \triangleq \sum_{i,j} D''_{Z_i Z_j}(Z^*) \eta_i \eta_j > 0, \quad \forall \eta_i, \eta_j \neq 0. \quad (22)$$

Из условий (21) вытекает

$$\partial D / \partial Z_2 = \dot{\lambda}_2 = 0, \Rightarrow \lambda_2 = \text{const} \text{ и} \quad (23) \\ \partial D / \partial Z_1 = \dot{\lambda}_1 - (\lambda \cdot u_{\perp}) \nabla \vartheta = 0,$$

где $u_{\perp} \triangleq (-\sin \vartheta, \cos \vartheta)$, $\lambda \triangleq \lambda_1 + \lambda_2$ и обозначено $\nabla \vartheta \triangleq (\vartheta'_x, \vartheta'_y)$, $Z_1 \triangleq (x, y)$.

Далее, дифференцируя (16) по Z_1 , получаем

$$u + (u_{\perp} \cdot Z_1) \nabla \vartheta = B Z_1, \quad B \triangleq \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{Z_1^2 - \beta^2}}. \quad (24)$$

Из соотношений (23) и (24) находим

$$\dot{\lambda} = \frac{\lambda \cdot u_{\perp}}{u_{\perp} \cdot Z_1} (B Z_1 - u), \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2. \quad (25)$$

Легко показать, что в (25)

$$\lambda \cdot u_{\perp} = 0. \quad (26)$$

Действительно, вычисление вторых производных функции D при условии (26) дает

$$Q = (\lambda \cdot u) (A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2)^2,$$

т. е. $Q > 0$, если $\lambda \cdot u > 0$ и $A_1, A_2 \neq 0$, где

$$A_1 \triangleq \frac{Bx - \cos \vartheta}{Z_1 \cdot u_{\perp}}, \quad A_2 \triangleq \frac{By - \sin \vartheta}{Z_1 \cdot u_{\perp}}, \quad Z_1 \triangleq (x, y).$$

Таким образом, D достигает $\min$ по Z_1 на любом решении, удовлетворяющем (26), неравенству

$$\lambda \cdot u > 0 \quad (27)$$

и условию $A_1, A_2 \neq 0$. Оказывается, предполагаемое решение удовлетворяет этим условиям. Для доказательства этого факта, прежде всего, заметим, что

$$A \triangleq \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{B Z_1 - u}{Z_1 \cdot u_{\perp}} \neq 0$$

в силу

$$A \cdot u_{\perp} = \frac{B Z_1 \cdot u_{\perp}}{Z_1 \cdot u_{\perp}} = B > 0.$$

Поскольку в (20) λ_i еще не определены, выберем их так, чтобы они соответствовали предполагаемому решению, т. е. положим по определению

$$\lambda_i \triangleq k_i v_i^* |v_i^*|^{-1}, \quad (28)$$

где константы $k_i > 0$ пока произвольны, а звездочкой отмечено предполагаемое решение. За-

метим, что из (28) следует, что λ_i неколлинеарны. Далее выберем константы k_i так, чтобы выполнялось условие (26) для u^* , которое равносильно условию коллинеарности

$$\lambda \|u^*\| \quad (29)$$

или равенству $\lambda |\lambda|^{-1} \triangleq u^*$. После этого выбираем $\dot{C}(t)$ в функции Φ , положив

$$\dot{C}(t) \triangleq -(\lambda_1 \cdot (v_1^* - u^*) + (\lambda_2 \cdot (v_2^* - u^*))).$$

Тогда на предполагаемом решении получаем $\Phi(t) = 0$. Это условие 1° Кротова для функции Φ [24, стр. 36]). Условие 2° Кротова — терминальное [24, стр. 36]. В нашем случае оно имеет вид

$$-Z_2^2(\theta) + \lambda_1 \cdot Z_1(\theta) + \lambda_2 \cdot Z_2(\theta) \rightarrow \max_{Z_1, Z_2} \quad (30)$$

где максимум вычисляется при терминальном условии (17), которое с учетом (14) при $i = 2$ дает:

$$Z_2 \cdot (v_2 - u) = 0, \quad t = \theta. \quad (31)$$

Это условие также является терминальным и определяет момент θ наряду с ограничением (16).

В условии (30) переменные Z_1 и Z_2 разделены, и при заданном векторе u они не связаны и через ограничения (16), (17), т. е. допустима раздельная максимизация по переменным Z_1 и Z_2 . Иными словами, максимизируемую функцию в (30) можно представить в виде суммы $F(Z_1, Z_2) = F_1(Z_1) + F_2(Z_2)$, где

$$F_2(Z_2) \triangleq -Z_2^2 + \lambda_2 \cdot Z_2 \rightarrow \max_{Z_2} \quad (32)$$

при ограничении (31).

Для нахождения условного максимума в (32) составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} \triangleq -Z_2^2 + \lambda_2 \cdot Z_2 + \mu Z_2 \cdot (v_2 - u) \rightarrow \max_{Z_2, \mu}$$

где μ — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению (31).

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z_2} &= -2Z_2 + \lambda_2 + \mu(v_2 - u) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} &= (v_2 - u) \cdot Z_2 = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Проверим, удовлетворяет ли условиям (33) предполагаемое решение.

На предполагаемом решении угол $\gamma^* \triangleq \widehat{v_2^*, u^*}$ такой, что $\cos \gamma^* = \beta$. Это влечет $v_2^* \cdot (v_2^* - u^*) = 0$ и, следовательно, $v_2^* \perp (v_2^* - u^*)$. Но в силу (14) и (17) имеем $Z_2 \perp (v_2^* - u^*)$ при $t = \theta$, т. е. векторы Z_2 , v_2^* , λ_2 коллинеарны, причем Z_2 сонаправлен с λ_2 . Пропорциональным подбором коэффициентов k_i добиваемся равенства

$$k_2 = |\lambda_2| = 2|Z_2(\theta)|.$$

Тогда в (33) $-2Z_2 + \lambda_2 = 0$, и при $\mu = 0$ необходимые условия экстремума (33) на предполагаемом решении выполняются.

Рассмотрим вторые производные $F_2(Z_2)$. Имеем для $Z_2 = (x_2, y_2)$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial Z_2^2} = \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} \right) = -2(1, 1), \quad \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial y_2} = 0.$$

Тогда соответствующая квадратичная форма

$$Q = -2(\eta_1^2 + \eta_2^2) < 0$$

для любых ненулевых η_1, η_2 , т. е. отрицательно определена. Следовательно, F_2 достигает максимума по Z_2 на предполагаемом решении.

Рассмотрим теперь $F_1 = -\lambda_1 Z_1$. Направление вектора Z_1 задается однозначно равенством (16). Момент θ определен в (31), $|Z_1|$ определен интегрированием уравнений движения. Следовательно, максимизация F_1 осуществляется на единственном векторе Z_1^* , и F_1 достигает максимума на Z_1^* .

Таким образом, предполагаемое решение удовлетворяет достаточным условиям оптимальности Кротова и является решением задачи (14)–(18). Теорема доказана.

Далее, в силу Замечания 1 данное предполагаемое решение, продленное до момента времени T , в который осуществляется R -встреча игроков P и E_1 , является решением задачи (14)–(16), (18) с терминальным условием (4): $|Z_1(T)| = R$. Таким образом, доказано, что коалиция целей $\{E_1, E_2\}$ не может увеличить свой платежный функционал G_2 , отклоняясь от программных прямолинейных траекторий (6)–(9), если игрок P выбирает свою стратегию, удовлетворяющую (12). В то же время для игрока P оптимальным является движение

по прямой под углом φ_0 из (7) к оси OX при прямолинейном движении E_1 и E_2 в соответствии с (7)–(9). Иными словами, ни игроку P , ни игрокам E_1 и E_2 не выгодно отклоняться от оптимальных прямолинейных движений (7)–(11). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. Для задачи (1), (5) решением являются траектории, удовлетворяющие (7)–(9), и на этих траекториях имеет место равновесие по Нэшу.

Заключение

В статье исследуется возможность повышения эффективности применения ложной цели путем перехода от программных к позиционным управлениям в задаче ее применения в роли защитника для перехвата преследователя в двухкритериальной дифференциальной игре на плоскости типа Атакующий—Цель—Защитник при простых движениях игроков и заданной круговой зоне классификации целей у атакующего игрока (преследователя). Показано, что в рассмотренной постановке расширение класса программных управлений не улучшает качества управления. Доказано существование равновесия по Нэшу.

Список литературы

1. Ольшанский В. К., Рубинович Е. Я. Простейшие дифференциальные игры преследования системы из двух объектов // Автоматика и телемеханика. 1974. № 1. С. 24–34.
2. Абрамянц Т. Г., Маслов Е. П., Рубинович Е. Я. Простейшая дифференциальная игра поочередного преследования // Автоматика и телемеханика. 1980. № 8. С. 5–15.
3. Breakwell J. V., Hagedorn P. Point Capture of two Evaders in Succession // J. Opt. Theory and Appl. 1979. Vol. 27. N. 1. P. 89–97.
4. Рубинович Е. Я. Дифференциальная игра преследования-уклонения двух целей с ограничением на разворот преследователя // Известия ЮФУ. Технические науки. 2018. № 1 (195). С. 117–128.
5. Rubinovich E. Ja. Two targets pursuit-evasion differential game with a restriction on the targets turning // Preprints, 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization. Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018. P. 503–508. IFAC PapersOnLine 51-32 (2018) 503–508.
6. Петросян Л. А., Ширяев В. Д. Групповое преследование одним преследователем нескольких преследуемых // Вестн. ЛГУ. 1980. № 13. С. 50–57.
7. Boyell R. L. Defending a Moving Target against Missile or Torpedo Attack // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1976. Vol. AES-12. P. 582–586.
8. Boyell R. L. Counterweapon Aiming for Defence of a Moving Target // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1980. Vol. AES-16, P. 402–408.
9. Shneydor N. A. Comments on Defending a Moving Target against Missile or Torpedo Attack // IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst. 1977. Vol. AES-13. P. 321.
10. Eloy Garcia, David W. Casbeer, Khanh Pham, Meir Pachter. Cooperative aircraft defense from an attacking missile // Proc. 53th IEEE Conference Decision and Control (CDC). 2014. Dec. 15–17, Los Angeles, USA, P. 2926–2931.
11. Pachter M., Garcia E., Casbeer D. W. Active target defense differential game // 52nd Annual Allerton Conf. Communication, Control, and Computing. IEEE. 2014. P. 46–53.
12. Perelman A., Shima T., Rusnak I. Cooperative differential games strategies for active aircraft protection from a homing missile // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2011. Vol. 34(3). P. 761–773.
13. Rusnak I., Weiss H., Hexner G. Guidance laws in target-missile-defender scenario with an aggressive defender // Proc. of the 18th IFAC World Congress, Milano, Italy, 2011.
14. Rusnak I. The lady, the bandits and the body-guards — a two team dynamic game // Proc. of the 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic. 2005. Vol. 36(1). P. 441–446.
15. Shima T. Optimal cooperative pursuit and evasion strategies against a homing missile // AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2011. Vol. 34(2). P. 414–425.
16. Yamasaki Takeshi, Balakrishnan Sivasubramanya N. Terminal intercept guidance and autopilot for aircraft defense against an attacking missile via 3d sliding mode approach // Proc. of the American Control Conference (ACC). 2012. P. 4631–4636.
17. Yamasaki Takeshi, Balakrishnan Sivasubramanya N., Takano Hiroyuki. Modified command to line-of-sight intercept guidance for aircraft defense // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. Vol. 36(3). P. 898–902.
18. Yanfang Liu, Naiming Qi, Jinjun Shan. Cooperative interception with doubleline-of-sight-measuring // In AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences. American Institute of Aeronautics and Astronautics, August. 2013.
19. Naiming Qi, Qilong Sun, Jun Zhao. Evasion and pursuit guidance law against defended target // Chinese Journal of Aeronautics. 2017. Vol. 30(6). P. 1958–1973.
20. Weissyand M., Shimazand T., Rusnak I. Minimum effort intercept and evasion guidance algorithms for active aircraft defense // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2016. Vol. 39(10). P. 2297–2311.
21. Garcia E., Casbeer David W., Pachter M. Active Target Defense Differential Game with a Fast Defender // IET Control Theory and Applications. 2017. Vol. 11(17). P. 2985–2993.
22. Rubinovich E. Ja. Missile-Target-Defender Problem with Incomplete a priori Information // Dynamic Games and Applications (Special Issue). 2019. N. 1 (Yan). P. 1–7. On open access: <https://rdcu.be/bhvyh>. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13235-019-00297-0>.
23. Маслов Е. П., Иванов М. Н. Об одной задаче уклонения // Автоматика и телемеханика. 1984. № 8. С. 56–62.
24. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973.

On the Expansion of a Class of Open-Loop Evasion Control in the Simplest Two-Criteria Pursuit-Evasion Game of Two Purposes

E. Ya. Rubinovich, rubinvch@ipu.ru,

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, 65, Profsoyuznaya str., Moscow, 117997, Russian Federation

Corresponding author: **Rubinovich Evgeny Ya.**, Professor, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, 117997, Russian Federation, e-mail: rubinvch@ipu.ru

Accepted on February 25, 2019

Abstract

The article is devoted to the formulation and solution of the two-criterion pursuit-evasion game on the plane of one pursuer against two targets, one of which is false. A false target is used to distract the pursuer, allowing the true target (in the process of diverting) to maximize the minimum possible distance to the pursuer. The specificity of the pursuer is that it has a circular classification zone of radius R , within which it has the ability to instantly classify the target as false or true. The game is that the pursuer minimizes the time required to approach one of the targets to a distance not exceeding R (R -encounter), and the targets, acting in concert, maximize the minimum distance between the pursuer and the remaining target. The game continues until the R -meeting of the pursuer with the first (false) target, i.e. until the classification of the false target. It is assumed that the first target is false a priori the persecutor is not known. The strategy of using a false target is precisely to release it to distract the pursuer from the true target. In reality, the false target is a mobile drone, which is controlled programmatically by the on-Board computer. In the class of open-loop controls the staging was investigated in 1984 by Ivanov M. N. and Maslov E. P. There is a natural question: what will give an extension of a class of open-loop controls of the false targets to the class of closed-loop controls, i.e. to the class of controls with a feedback? This question is quite appropriate in connection with the great progress in the development of microprocessor technology and improving the performance of on-Board computers, which makes it possible to use more complex algorithms for controlling Autonomous mobile objects. This article gives a negative answer to the above question, namely, it is shown that the extension of the class of open-loop controls by a false target does not improve the quality of control. It is proved that in this game there is a Nash equilibrium in the program strategies of the players.

Keywords: pursuit-evasion game, mobile false target, open-loop control, closed-loop control, Nash equilibrium

For citation:

Rubinovich E. Ya. On the Expansion of a Class of Open-Loop Evasion Control in the Simplest Two-Criteria Pursuit-Evasion Game of Two Purposes, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 524–531.

DOI: 10.17587/mau.20.524-531

References

1. Ol'shansky V. K., Rubinovich E. Ya. *Automation and Remote Control*, 1974, 35:1, 19–28.
2. Abramyan T. G., Maslov E. P., Rubinovich E. Ya. *Automation and Remote Control*, 1981, 41:8, 1043–1052.
3. Breakwell J. V., Hagedorn P. J. *Opt. Theory and Appl.*, 1979, vol. 27, no 1, pp. 89–97.
4. Rubinovich E. Ya. *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2018, no. 1 (195), pp. 117–128 (in Russian)
5. Rubinovich E. Ja. Two targets pursuit-evasion differential game with a restriction on the targets turning, *Preprints, 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization*, Yekaterinburg, Russia, October 15–19, 2018, pp. 503–508, IFAC PapersOnLine 51-32 (2018) 503–508.
6. Petrosyan L. A., Shiryayev V. D. *LGU Bulletin: Mathematics, Mechanics and Astronomy*, 1980, no. 13, pp. 50–57 (in Russian)
7. Boyell R. L. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 1976, vol. AES-12, pp. 582–586.
8. Boyell R. L. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 1980, vol. AES-16, pp. 402–408.
9. Shneydor N. A. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, 1977, vol. AES-13, pp. 321.
10. Garcia E., Casbeer D. W., Pham K., Pachter M. *Proc. 53th IEEE Conference Decision and Control (CDC)*, 2014, Dec. 15–17, Los Angeles, USA, pp. 2926–2931.
11. Pachter M., Garcia E., Casbeer D. W. *52nd Annual Allerton Conf. Communication, Control, and Computing. IEEE*, 2014, pp. 46–53.
12. Perelman A., Shima T., Rusnak I. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, vol. 34(3), pp. 761–773.
13. Rusnak I., Weiss H., Hexner G. *Proc. of the 18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, 2011.
14. Rusnak I. *Proc. of the 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005, vol. 36(1), pp. 441–446.
15. Shima T. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, vol. 34(2), pp. 414–425.
16. Yamasaki Takeshi, Balakrishnan Sivasubramanya N. *Proc. of the American Control Conference (ACC)*, 2012, pp. 4631–4636.
17. Yamasaki Takeshi, Balakrishnan Sivasubramanya N., Takano Hiroyuki. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, vol. 36(3), pp. 898–902.
18. Yanfang Liu, Naiming Qi, Jinjun Shan. *AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, August, 2013.
19. Naiming Qi, Qilong Sun, Jun Zhao. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2017, vol. 30(6), pp. 1958–1973.
20. Weissyand M., Shimazand T., Rusnak I. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, vol. 39(10), pp. 2297–2311.
21. Garcia E., Casbeer D. W., Pachter M. *IET Control Theory and Applications*, 2017, vol. 11(17), pp. 2985–2993.
22. Rubinovich E. Ja. *Dynamic Games and Applications (Special Issue)*, 2019, on open access: <https://rdcu.be/bhvyh>. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13235-019-00297-0>.
23. Maslov E. P., Ivanov M. N. *Automation and Remote Control*, 1984, 45:8, 1008–1014 (in Russian).
24. Krotov V. F., Gurman V. I. *Variational Problems of Mechanics and Control*, Moscow, Nauka, 1973 (in Russian).

В. И. Ловчаков, д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru, О. А. Шибякин, магистрант, yutiop@gmail.com, Тульский государственный университет

Решение задачи быстродействия по выходной координате для линейных динамических систем

Исследуется решение так называемой задачи быстродействия по одной координате (БОК), имеющей важное теоретическое и практическое значение. Она сформулирована применительно к линейным одномерным объектам управления высокого порядка, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений в некотором фазовом пространстве. Время переходного процесса $t_{\text{пн}}$ проектируемой системы понимается в смысле классической теории автоматического управления относительно одной (выходной) координаты объекта и определяется с использованием зоны $\Delta = \sigma^ = 4,321\%$, равной заданному (желаемому) значению перерегулирования синтезируемой системы. Данное перерегулирование соответствует быстродействующему колебательному звену второго порядка с коэффициентом демпфирования $\sqrt{2}/2 = 0,7071$. Здесь необходимо подчеркнуть, что равенство $\Delta = \sigma$ является одним из необходимых условий максимального быстродействия системы с колебательным характером переходных процессов. Соответственно задача БОК ставится в следующей обобщенной формулировке: требуется найти линейный алгоритм обратной связи, обеспечивающий замкнутой системе регулирования заданный порядок астатизма n_a и переводящий объект управления из начального нулевого состояния в конечное, определяемое постоянным сигналом задания, с минимальным значением времени переходных процессов системы $t_{\text{пн}}$ и заданным значением перерегулирования $\sigma \leq \sigma^*$ при выполнении ограничения на сигнал управления $|u(t)| \leq u_{\text{max}}$.*

В настоящее время указанная задача БОК приближенно решена алгебраическим методом синтеза линейных систем управления при определении желаемой передаточной функции проектируемой замкнутой системы на основе типовых (эталонных) нормированных передаточных функций (НПФ). В работах Д. П. Кима проведен анализ четырех видов НПФ, обладающих повышенным быстродействием. В настоящей работе предлагаются дополнительно два вида нормированных передаточных функций, имеющих в сравнении с указанными НПФ более высокое быстродействие при заданном перерегулировании $\sigma^ = 4,321\%$. На их основе с использованием методологии модального управления предложен метод синтеза регулятора, обеспечивающего время переходных процессов проектируемой системы, близкое к минимальному, при заданных ограничениях на перерегулирование и значение сигнала управления. Подчеркнем, что данный метод в отличие от алгебраического метода синтеза применим к более широкому классу объектов управления: как к минимально-фазовым, так и не к минимально-фазовым, как содержащим нули, так и нет. Метод иллюстрируется примером синтеза быстродействующей системы управления четвертого порядка, содержащим результаты ее моделирования.*

Ключевые слова: линейный одномерный объект, критерий быстродействия, перерегулирование, астатизм, полюса оптимальной системы, модальное управление

1. Введение, постановка задачи исследования

Задача быстродействия по одной (выходной) координате объекта управления, имеющая важное теоретическое и практическое значение, сформулирована в работе [1]. Она сформулирована применительно к нелинейным одномерным объектам, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений в некотором фазовом пространстве с n -мерным вектором состояния $X(t)$, компоненты которого имеют физический смысл отклонений от заданного режима. Время T переходного процесса проектируемой системы определяется по первому моменту попадания системы в желаемую (требуемую) область фазового пространства, описываемую неравенствами $|x_i(T)| \leq \varepsilon_i$, где ε_i , $i = 1, 2, \dots, k$, — положительные числа, характеризующие заданную точность функционирования системы по соответствующей фазовой координате, причем $k < n$. Соответственно задача управления ставится следующим образом:

требуется найти управление в форме обратной связи $u(X)$, переводящее объект из начального состояния $X(0) = X_0$ в желаемую область за минимальное время T , причем при $t > T$ синтезируемая замкнутая система управления остается в требуемой области.

Подчеркнем, что в данной задаче координаты $x_{k+1}(T), \dots, x_n(T)$ могут принимать произвольные значения.

Сформулированная задача, называемая задачей быстродействия по нескольким координатам (БНК), является обобщением известной задачи оптимального быстродействия [2]: она трансформируется в последнюю при $k = n$ и $\varepsilon_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. В работе анализируется подход к решению поставленной задачи в случае $k = 1$. В этом случае задача для краткости называется задачей быстродействия одной координаты (БОК). Она является математически наиболее простой из рассматриваемых, но в то же время имеет большое инженерное значение, так как при $\varepsilon_1 = 0,05$ введенное время T

совпадает с определением времени переходного процесса системы $t_{\text{пп}} = T$ в классической теории автоматического управления. В связи с этим задачу БОК можно рассматривать как задачу конструирования системы с минимальным временем регулирования, понимаемым в смысле классической теории управления.

Необходимо подчеркнуть, что решение задачи БОК, а тем более задачи БНК, представляет более сложную математическую проблему, чем решение задачи оптимального быстродействия, так как при определенных условиях решение задачи БОК можно свести к последовательному решению двух задач оптимального быстродействия. В свою очередь, решение последних задач в форме обратной связи, как показывает анализ работ [2–9], представляет серьезную проблему даже для линейных объектов относительно невысокого порядка ($n = 4, 5, \dots$). Подчеркнем, что существует большое число работ, оцениваемое сотнями, посвященных анализу и синтезу оптимальных по быстродействию систем управления (в списке литературы данной статьи указаны основные монографии, суммарная библиография которых отчасти отражает это множество работ). Их анализ установил, что задача быстродействия полностью решена для объектов второго порядка методом фазовой плоскости [3–5]. Для объектов третьего порядка быстродействующее управление точно (аналитически) найдено только в отдельных случаях, в частности, для трех последовательно соединенных интеграторов [3–5], соединения двух интеграторов и апериодического звена [3, 4], соединения интегратора и двух апериодических звеньев [3, 4]. При этом существенным образом использовались геометрические методы, например, построение проекций вынужденных траекторий объекта в трехмерном фазовом пространстве на соответствующие плоскости [2–5]. Для объектов высокого порядка ($n \geq 4$) применение геометрических методов существенно затруднено и, как следствие, для них практически неизвестны аналитические решения задач оптимального быстродействия [9, 10].

В связи с указанными обстоятельствами в данной работе ограничимся рассмотрением решения задачи БОК только для линейных объектов с определением алгоритма управления в форме линейной обратной связи. Анализ работ по исследованиям этой линейной задачи БОК показал, что к настоящему времени предложены лишь приближенные мето-

дики ее решения для отдельных подклассов объектов на основе алгебраического метода синтеза [11–15] с использованием желаемых передаточных функций (ЖПФ), обеспечивающих повышенное быстродействие. Методики определения ЖПФ основаны на использовании нормированных передаточных функций (НПФ) — передаточных функций в форме Вышнеградского [16, 17]. В качестве характерного примера рассмотрим методику работы [14] нахождения ЖПФ системы управления минимально-фазовым объектом (его передаточная функция (ПФ) содержит только левые нули и полюса). Если проектируемая система управления не должна обладать астатизмом выше 1-го порядка, то ЖПФ может не иметь нулей, и в этом случае нахождение данной передаточной функции сводится к определению только ее знаменателя — характеристического полинома синтезируемой системы. В указанной методике предлагается использовать следующие три вида типовых (эталонных) нормированных полиномов, обеспечивающих повышенное быстродействие проектируемой системе. Первыми двумя такими полиномами являются: 1) полином с одинаковыми корнями, представляющий собой бином Ньютона $(q + 1)^n$; 2) полином из произведения $n/2$ трехчленов $(q^2 + 2\zeta_n\beta_n q + \beta_n^2)$ при четном n , а при нечетном n — полином из произведения $(n - 1)/2$ трехчленов $(q^2 + 2\zeta_n\beta_n q + \beta_n^2)$ и одного двучлена $(q + \alpha_n)$. Эти полиномы и передаточные функции с такими характеристическими полиномами соответственно называются биномиальными и колебательными (известно, что функция $W(q) = 1/(q^2 + 2\zeta_n\beta_n q + \beta_n^2)$ описывает колебательное звено с коэффициентом демпфирования ζ_n и постоянной времени $T_n = 1/\beta_n$). Необходимо подчеркнуть, что системы с биномиальными передаточными функциями обеспечивают в классе монотонных переходных процессов (процессов с нулевым перерегулированием $\sigma = 0$) минимальное время регулирования [16, 17]. Также известно [16], что замена апериодического звена биномиальной системы колебательным звеном с небольшим перерегулированием (со значением коэффициента демпфирования, близким к единице) может существенно уменьшить время переходных процессов получаемой динамической системы. Соответственно в работах [17, 18] предложены нормированные полиномы, отвечающие НПФ колебательных систем, которые

обеспечивают минимальное время переходных процессов проектируемой системе управления. В дальнейшем эти полиномы и НПФ, составляющие третий вид функций, будем называть оптимальными по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому. Необходимо подчеркнуть, что данные полиномы и НПФ найдены приближенно, с некоторой точностью.

В настоящей работе на основе развития результатов статьи [19] предлагаются дополнительно два вида нормированных передаточных функций, обеспечивающих в сравнении с указанными НПФ более высокое быстродействие при заданном перерегулировании $\sigma^* = 4,321\%$. Данное перерегулирование соответствует колебательному звену второго порядка с коэффициентом демпфирования $\zeta = \sqrt{2}/2 = 0,7071$, являющемуся оптимальным по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому. Соответственно время переходных процессов $t_{\text{пп}}$ систем в дальнейшем определяется с использованием зоны $\varepsilon_1 = \sigma^* = 4,321\%$.

Для последующего сравнения показателей перечисленных нормированных передаточных функций, обеспечивающих высокое быстродействие, приведем параметры и показатели типовых НПФ, воспользовавшись данными работы [14].

2. Параметры и показатели типовых нормированных передаточных функций

Предварительно более конкретно сформулируем исследуемую задачу БОК. Рассматриваемый класс линейных объектов управления описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t); |u(t)| \leq u_{\max}, \quad (1)$$

где $X(t)$ — вектор координат состояния объекта; $u(t)$ — управляющее воздействие, ограниченное величиной $\pm u_{\max}$; A , B — матрицы параметров объекта размерностей $n \times n$, $n \times 1$. Объектам (1) с выходной координатой $x(t) = x_1(t)$ соответствует передаточная функция

$$W(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n}, m \leq n-1 \quad (2)$$

с постоянными коэффициентами a_i , b_i . Задачу управления, по аналогии с работой [11], сформулируем в следующей обобщенной постановке: *требуется найти линейный алгоритм обратной связи $u(X)$, обеспечивающий замкнутой системе регулирования заданный порядок астатизма n_a и переводящий объект (1) из начального нулевого состояния в конечное, определяемое заданием регулятора x_z , с минимальным значением времени переходных процессов системы $t_{\text{пп}}$ и заданным значением перерегулирования $\sigma \leq \sigma^*$ при наличии ограничения $|u(t)| \leq u_{\max}$.*

Приближенно данную задачу управления можно решить алгебраическим методом синтеза линейных систем управления [11–14], выбрав ЖПФ проектируемой замкнутой системы на основе типовых НПФ, обладающих повышенным быстродействием. Для справки укажем, что произвольная ПФ (2) может быть преобразована в НПФ заменой переменной p преобразования Лапласа $L[f(t)] = F(p)$ новой переменной [11, 17]

$$q = \alpha p, \quad \alpha = \sqrt[n]{a_0/a_n}. \quad (3)$$

Данная замена переменной Лапласа, согласно известному свойству преобразования Лапласа $L[f(t/\alpha)] = \alpha F(\alpha p)$, равносильна замене переменной времени $\tau = t/\alpha$ и умножению изображения на постоянную α . Так как умножение переходной функции на константу не влияет на время регулирования, то время регулирования исходной системы $t_{\text{пп}}$ и время регулирования $\tau_{\text{пп}}$ системы с НПФ связаны соотношением $t_{\text{пп}} = \alpha \tau_{\text{пп}}$. Остальные показатели качества (перерегулирование, запасы устойчивости и др.) нормированных и ненормированных систем совпадают.

При синтезе систем с порядком астатизма $n_a = 1$ можно использовать типовые НПФ, исследованные в работе [14], параметры и показатели которых представлены в табл. 1. В данной таблице первая строка соответствует биномиальным системам с нормированной передаточной функцией $W(q) = (q+1)^n$. Вторая строка табл. 1 соответствует колебательным системам с НПФ вида

$$W(q) = \begin{cases} 1/(q^2 + 2\zeta q + 1)^{n/2}, \\ n - \text{четное}; \\ 1/(q+1)(q^2 + 2\zeta q + 1)^{(n-1)/2}, \\ n - \text{нечетное}, \end{cases} \quad (4)$$

Таблица 1
Table 1

Параметры и показатели типовых НПФ
Parameters and indicators of typical NTF

Вид НПФ, ее параметры	Показатели	n				
		2	3	4	5	6
Биномиальный	$\tau_{пп}$ σ	4,74 0	6,30 0	7,75 0	9,15 0	10,51 0
Колебательный с $\alpha_n = \beta_n = 1, \zeta = 0,7$	$\tau_{пп}$ σ	2,90 4,60	4,41 1,52	7,26 6,69	5,99 3,45	9,43 8,08
Колебательный с $\alpha_n = \beta_n = 1, \zeta = 0,75$	$\tau_{пп}$ σ	3,13 2,84	4,69 0,77	5,02 3,88	6,43 1,79	6,80 8,08
Оптимальный по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому	$\tau_{пп}$ σ	4,38 5,00	4,07 0,49	4,57 4,73	5,71 0,00	6,22 5,00

для которой параметры $\alpha_n = \beta_n = 1$, а коэффициент демпфирования $\zeta = 0,7$. Третья строка табл. 1 отвечает аналогичным динамическим системам со значением $\zeta = 0,75$.

В четвертой строке табл. 1 приводятся показатели систем, оптимальных по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому. Их передаточные функции имеют вид $W(q) = 1/M(q)$, причем нормированный полином $M(q)$ имеет комплексные корни с одинаковыми вещественными частями η и мнимыми частями, образующими арифметическую прогрессию с разностью и первым членом, равными γ . В работе [17] показано, что существует минимальное значение $\mu = \gamma/\eta$, при котором время регулирования системы минимально. Ниже в соответствии с этой работой приводятся характеристические полиномы для пяти значений степеней, начиная с $n = 2$, при оптимальных значениях μ :

$$\begin{aligned}
 n = 2: M_2(q) &= q^2 + 1,38q + 1; \\
 n = 3: M_3(q) &= q^3 + 2,05q^2 + 2,3q + 1; \\
 n = 4: M_4(q) &= q^4 + 2,6q^3 + 3,8q^2 + 2,8q + 1; \\
 n = 5: M_5(q) &= q^5 + 2,5q^4 + 5,3q^3 + 5,46q^2 + 3,64q + 1; \\
 n = 6: M_6(q) &= q^6 + 3,73q^5 + 8q^4 + 10,3q^3 + 8,56q^2 + 4,18q + 1.
 \end{aligned}$$

Данные табл. 1 подтверждают выводы вводной части: колебательные системы (см. строки 2—4) за счет наличия небольшого перерегулирования обеспечивают существенно меньшее относительное время $\tau_{пп}$ переходных процессов в сравнении с биномиальной системой (строка 1).

После выбора на основе данных табл. 1 НПФ определение ЖПФ синтезируемой системы управления осуществляется заменой переменной (3). При этом следует иметь в виду, что время регулирования ЖПФ и время регулирования НПФ связаны соотношением $t_{пп} = \alpha \tau_{пп}$. Поэтому время регулирования проектируемой системы можно подкорректировать до требуемого значения выбором параметра α при преобразовании НПФ в ЖПФ. При известной ЖПФ последующий синтез системы управления осуществляется согласно строго формализованной процедуре алгебраического метода [11, 13].

3. Параметры и показатели быстродействующих НПФ

Последующие исследования показали, что за счет определенного выбора параметров колебательных звеньев возможно дальнейшее увеличение быстродействия систем управления. В основе нахождения новых НПФ быстродействующих систем лежит использование необходимых условий максимального быстродействия, сформулированных в работе [19] в форме следующей **теоремы**: линейная динамическая система четного порядка с передаточной функцией вида $W(p) = K/A(p)$, в которой перерегулирование не должно превышать заданное значение σ^* , а сигнал управления — ограничения $|u(t)| \leq u_{\max}$, может иметь минимальное время переходных процессов, определяемое с использованием зоны $\Delta = \sigma^*$, если

1) ее полюса, в общем случае комплексные, расположены на окружности

$$|p_1| = |p_2| = \dots = |p_n| = R, \quad (6)$$

радиус R которой выбирается из условия выполнения ограничения на значение сигнала управления;

2) расположение полюсов вдоль окружности обеспечивает системе перерегулирование, равное заданному значению

$$\sigma = \sigma^*. \quad (7)$$

Подчеркнем, что для некоторого класса систем условия теоремы являются не только необходимыми, но и достаточными условиями быстродействия. К данному классу, например, относятся системы с переходными процессами монотонного характера, для которых $\sigma = 0$ и,

соответственно, имеющие только действительные отрицательные полюсы [16, 17]. Для этих систем условие (6) и ограничение $|u(t)| \leq u_{\max}$ однозначно задают параметры K_0 , $T_0 = 1/R$ оптимальной передаточной функции

$$W(p) = K_0 / (T_0 p + 1)^n,$$

которой соответствует биномиальная НПФ. Применяя условия теоремы к колебательным системам, указанным в табл. 1, отметим, что для систем с передаточной функцией (4) (вторая и третья строки) условие (6) выполняется ($p_i = 1/T_i = \beta_i = 1$), а условие (7) нарушается. Поэтому быстродействие данных систем можно увеличить, если для них соответствующим выбором значений коэффициентов демпфирования обеспечить выполнение равенства (7) — $\sigma = \sigma^* = 4,321\%$. Этот вывод подтверждают результаты моделирования систем, представленные во второй строке табл. 2.

Дополнительное увеличение быстродействия системы можно получить, если вместо колеба-

тельных звеньев с одинаковыми коэффициентами демпфирования использовать звенья с различными значениями ζ_i (см. строку 3 табл. 2). Примечательно, что последние колебательные системы, как правило, превосходят по быстродействию системы, описываемые передаточными функциями оптимальными по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому (строка 1). Исключение составляют только системы четвертого порядка. Результаты дополнительного исследования этих колебательных систем четвертого порядка представлены в табл. 3. При моделировании указанные в ней значения ζ_2 задавались изначально, а значения ζ_1 подбирались такими, чтобы система имела требуемое значение перерегулирования $\sigma^* = e^{-\pi} \cdot 100\% = 4,321\%$. Так как результаты табл. 3 получены при изменении коэффициентов демпфирования практически во всем возможном диапазоне значений $0 < \zeta_1, \zeta_2 \leq 1$, то они свидетельствуют, что быстродействие системы увеличивается при $\zeta_2 \rightarrow 1$ и, соответственно, максимальное быстродействие имеет динамическая система, описываемая передаточной функцией

$$W(q) = 1 / (q + 1)^2 (q^2 + 2\zeta q + 1) \tag{8}$$

при $\zeta = 0,46313$.

Несколько большее время переходных процессов $\tau_{\text{пп}} = 4,7432$ этой системы в сравнении с системой, оптимальной по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому ($\tau_{\text{пп}} = 4,57$), можно объяснить с использованием указанной теоремы различными значениями перерегулирования сравниваемых систем.

Аналогичным моделированием в системе компьютерной математики MathCAD 14 получены результаты строки 3 табл. 2 для нормированных передаточных функций пятого и шестого порядков.

На основе представленных данных при синтезе быстродействующих систем управления, допускающих наличие перерегулирования $\sigma \leq 4,321\%$, можно рекомендовать использование нормированных передаточных функций из табл. 2. Указанные в ней НПФ одного порядка относительно мало различаются как по времени переходных процессов, так и по перерегулированию. Однако из них более предпочтительными являются НПФ колебательных звеньев, имеющих различные значения коэффициентов демпфирования.

Таблица 2
Table 2

Параметры и показатели быстродействующих НПФ
Parameters and indicators of high-speed NTF

Вид НПФ, ее параметры	Показатели	n				
		2	3	4	5	6
Оптимальный по Г. С. Поспелову, А. А. Красовскому	$\tau_{\text{пп}}$ σ	4,38 5,00	4,07 0,49	4,57 4,73	5,71 0,00	6,22 5,00
Колебательный с $\sigma = 4,321\%$	$\tau_{\text{пп}}$ ζ	2,974 0,7071	3,9236 0,5916	4,9975 0,7411	5,8743 0,6799	6,6819 0,6134
Колебательный с $\sigma = 4,321\%$ и различными ζ_i	$\tau_{\text{пп}}$ ζ_1 ζ_2	2,974 0,7071	3,9236 0,5916	4,7432 0,4631 0,9999	5,4375 0,3207 0,9999	6,1824 0,2490 0,920

Таблица 3
Table 3

Результаты моделирования систем 4-го порядка
Results of modeling systems of the 4th order

	ζ_1	ζ_2	$\zeta_1 + \zeta_2$	$\sigma, \%$	$t_{\text{пп}}$
1	0,96487	0,5	1,46487	4,321004	4,7949
2	0,873915	0,6	1,473915	4,32108	4,9184
3	0,74108	0,74108	1,48216	4,32118	4,9975
4	0,68038	0,8	1,48038	4,32136	4,9814
5	0,57107	0,9	1,47107	4,32101	4,8870
6	0,47340	0,99	1,46340	4,32117	4,7570
7	0,46313	0,9999	1,46303	4,32126	4,7432

4. Синтез быстродействующих линейных систем управления

Определив желаемую ПФ быстродействующей системы и соответствующие ей полюсы с использованием метода модального управления, относительно легко осуществить синтез регулятора, обеспечивающего минимальное время переходных процессов проектируемой системе. Необходимо подчеркнуть, что данный метод в отличие от алгебраического метода синтеза применим ко всем объектам с ПФ (2): как минимально-фазовым, так и не минимально-фазовым, как содержащим нули, так и нет. Изложим его в варианте, вытекающем непосредственно из работ [16, 19].

Для обеспечения требуемого порядка n_a астатизма проектируемой системе в качестве нового управления $U(t)$ будем рассматривать сигнал, подаваемый на вход дополнительного n_a -кратного интегратора, включенного последовательно с исходным объектом. В этом случае "расширенный" объект управления будет описываться ПФ:

$$W(p) = \frac{L[x(t)]}{L[U(t)]} = \frac{B_m(p)}{p^{n_a} A_n(p)} \equiv \frac{B_m(p)}{A_N(p)}, \quad (9)$$

$$N = n + n_a.$$

Используя физические сведения об управляемом объекте или теорию решения задач о построении динамической реализации системы, описанию объекта в форме передаточной функции (9) поставим в соответствие его математическое описание в пространстве состояний [20]:

$$\dot{Z}(t) = A_1 Z(t) + B_1 U(t), \quad (10)$$

где $Z(t)$ — вектор фазовых координат объекта в выбранном пространстве; A_1, B_1 — матрицы его параметров, имеющие размерности $N \times N, N \times 1$.

В целях решения сформулированной задачи синтеза методом модального управления проведем преобразование фазовых координат объекта $Z(t) = DX(t)$ с использованием такой невырожденной матрицы D , при которой описание объекта принимает каноническую форму Фробениуса (1) с матрицами следующей структуры:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{N-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Как известно, матрица перехода D , обладающая указанным свойством, может быть найдена разными способами. Один из способов основан на использовании матриц управляемости M_y, M_{ly} объекта в новом и старом базисах [20]:

$$D^{-1} = \|B, AB, A^2 B, A^3 B\| \times \\ \times \|B_1, A_1 B_1, A_1^2 B_1, A_1^3 B_1\|^{-1} = M_y M_{ly}^{-1}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что для полностью управляемого объекта (10) эта матрица является неособенной — $\det D \neq 0$.

Подчеркнем, что, во-первых, компоненты вектора состояния X объекта в канонической форме Фробениуса имеют ясный математический и физический смысл:

$$x_1(t) = x_z - x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t), \quad x_3(t) = \dot{x}_2(t), \dots, \\ \dots, x_N(t) = \dot{x}_{N-1}(t)$$

— смысл отклонения выходной переменной объекта от заданного режима и его производных. Во-вторых, данное каноническое описание объекта можно представить в форме дифференциального уравнения N -го порядка:

$$A(D)x(t) = b U(t), \quad (12)$$

где $A(D) = D^N + a_{2N-1}D^{N-1} + a_{2N-2}D^{N-2} + \dots + \dots + a_1 D + a_0$ — полином от оператора дифференцирования $D = d/dt$.

Определим управление объектом (12) таким образом, чтобы характеристический полином замкнутой системы имел представление

$$G(p) = p^N + \alpha_{N-1}p^{N-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 = \\ = \prod_{i=1}^N (p - p_i) \quad (13)$$

с заданными корнями p_i (или, что равносильно, с заданными коэффициентами α_i).

Задача модального управления (12), (13) решается известным методом [20]:

$$U(t) = \frac{-1}{b} \sum_{i=0}^{N-1} (\alpha_i - a_i) x^{(i)}(t) = \\ = - \sum_{i=1}^N k_i x_i(t) = -KX(t), \quad k_{i+1} = \frac{\alpha_i - a_i}{b}. \quad (14)$$

Таким образом, задача модального управления объектом (10) за счет преобразования фазовых координат, приводящего матрицу A_1 системы к канонической форме Фробениуса, сводится к задаче управления (12), (13), имею-

шей решение (14). На этом основании предлагается метод синтеза регулятора с минимальным временем переходных процессов, содержащий следующие операции (процедуры).

1. С использованием данных табл. 1 и 2 для синтезируемой системы управления объектом (9) порядка $N = n + n_a$, обеспечивающей заданное значение перерегулирования $\sigma = \sigma^*$, выбирается подходящая НПФ, характеризующая коэффициентами демпфирования ζ_1, ζ_2 (они определяют желаемые полюса системы).

2. По значениям ζ_i рассчитываются коэффициенты $A_i, i = 1, \dots, N - 1$, нормированного характеристического полинома быстродействующей системы

$$(q + 1)^{N-2k} \prod_{i=1}^k (q^2 + 2\zeta_i q + 1) = q^N + A_{2N-1}q^{N-1} + \dots + A_1q + 1$$

и далее коэффициенты желаемого (ненормированного) полинома (13):

$$G(p) = p^N + \alpha_{N-1}p^{N-1} + \dots + \alpha_1p + \alpha_0 = p^N + \frac{A_{N-1}}{\alpha}p^{N-1} + \dots + \frac{A_1}{\alpha^{N-1}}p + \frac{1}{\alpha^N},$$

где α — коэффициент связи переменных преобразования Лапласа $p = q/\alpha$ и, соответственно, реального и нормированного времени $t = \alpha t$.

3. По ПФ (9) определяем описание объекта в пространстве состояния (10).

4. Вычисляем матрицу перехода D , связывающую матричное описание исходного объекта (10) с ее каноническим представлением Фробениуса. Данная матрица может быть найдена, например, с использованием соотношения (11).

5. В соответствии с формулами (14) находим матрицу-строку K коэффициентов модального регулятора в преобразованном базисе:

$$U(X) = -\sum_{i=1}^N k_i x_i = -KX, \quad (15)$$

$$k_i = (A_{i-1}/\alpha^{N-(i-1)} - a_{i-1})/b.$$

6. Возвращаясь к исходным фазовым координатам z_i , определяем для объекта управления (10) искомый закон управления:

$$U(Z) = -\bar{K}Z, \quad \bar{K} = KD^{-1}, \quad (16)$$

обеспечивающий максимальное быстродействие проектируемой системе. Заметим, что согласно уравнениям (15), (16) элементы матрицы $\bar{K}$ являются функциями коэффициента α .

7. Проверка правильности синтеза регулятора осуществляется расчетом собственных чисел матрицы $A_1 - B_1\bar{K}$, которые должны совпадать с корнями характеристического полинома системы (см. п. 1), или нахождением характеристического полинома указанной матрицы, который должен равняться ЖПФ (13).

8. Моделированием замкнутой системы управления (10), (16) определяем значение коэффициента α , обеспечивающее отработку задания x_z со значениями сигнала управления, равными или меньшими, чем $u_{\max}$.

Пример. Пусть передаточная функция объекта имеет вид

$$W_0(p) = 1/(0,1p^3 + 0,8p^2 + 1,7p + 1), \quad (17)$$

а управление подчиняется ограничению $|u(t)| \leq u_{\max} = 10$ [11]. Требуется определить линейный регулятор с максимальным быстродействием, обеспечивающий системе переходный процесс с перерегулированием $\sigma^* = \Delta = 4,321\%$ и нулевой статической ошибкой регулирования.

Выполняем процедуры предложенного метода синтеза.

1. Так как ПФ объекта третьего порядка (17) не содержит нулевой полюс, то для того чтобы статическая ошибка проектируемой системы управления была равна нулю, положим порядок астатизма $n_a = 1$, и тогда $N = n + n_a = 3 + 1 = 4$. Поэтому в дальнейшем используется НПФ колебательного звена четвертого порядка (8), параметры и показатели качества которого указаны в табл. 2.

2. При коэффициенте демпфирования $\zeta^* = 0,46313$ (см. табл. 2) рассчитываем коэффициенты $A_i, i = 1, 2, 3$, нормированного характеристического полинома $(q + 1)^2(q^2 + 2\zeta^*q + 1) = q^4 + A_3q^3 + A_2q^2 + A_1q + 1$ быстродействующей системы:

$$A_3 = 2(1 + \zeta^*) = 2,92626;$$

$$A_2 = 2(1 + 2\zeta^*) = 3,85252;$$

$$A_1 = 2(1 + \zeta^*) = 2,92626.$$

Далее находим коэффициенты желаемого (ненормированного) характеристического полинома (13):

$$G(p) = p^4 + \alpha_3p^3 + \alpha_2p^2 + \alpha_1p + \alpha_0 = p^4 + \frac{A_3}{\alpha}p^3 + \frac{A_2}{\alpha^2}p^2 + \frac{A_1}{\alpha^3}p + \frac{1}{\alpha^4}. \quad (18)$$

3. По передаточной функции "расширенного" объекта

$$W_0(p) = 1/p(0,1p^3 + 0,8p^2 + 1,7p + 1)$$

порядка $N = n + n_a = 4$ определяем его описание в пространстве состояний. С учетом того, что интегратор, обеспечивающий астатизм системы, стоит перед исходным объектом (17) и описывается уравнением $\dot{u}(t) = U(t)$, введем следующие фазовые координаты $z_i(t)$ для "расширенного" объекта:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_z - x(t), & z_2(t) &= \dot{z}_1(t), \\ z_3(t) &= \dot{z}_2(t), & z_4(t) &= u(t). \end{aligned}$$

В данном фазовом пространстве матрицы A_1 , B_1 объекта принимают вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -17 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

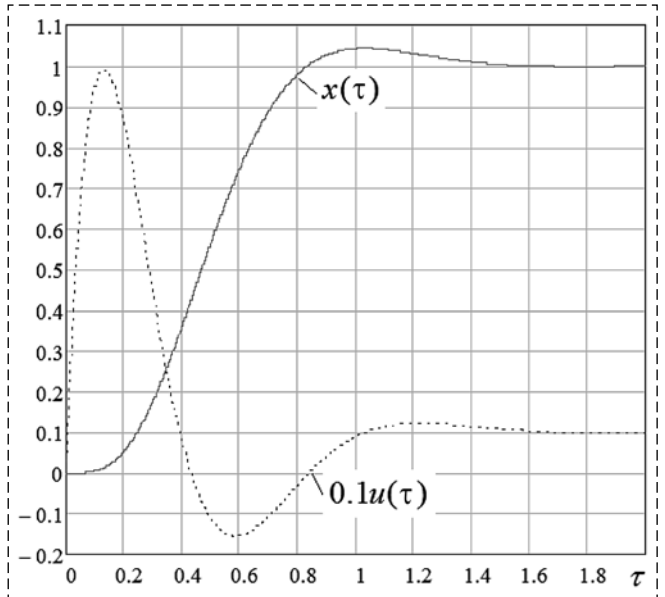
4. Вычисляем матрицу перехода D с использованием матриц управляемости M_y , M_{ly} объекта в новом и старом базисах (11):

$$D^{-1} = M_y M_{ly}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ -1 & -1,7 & -0,8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 17 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. В соответствии с формулами (15), (16) при $\alpha = 0,156$ находим вектор коэффициентов модального (одновременно быстродействующего) регулятора $KK = (158,093 \ 57,788 \ 5,523 \ 10,757)$. Проверка подтвердила, что при этом замкнутая система имеет желаемый характеристический полином (18).

При данных параметрах регулятора, как показало дальнейшее моделирование системы (см. рисунок), обеспечивается максимальное по модулю значение управляющего сигнала, равное 10 при отработке задания $x_z = 1$.



Переходные процессы быстродействующей системы четвертого порядка

Transients responses of a high-speed system of the fourth order

Из данного рисунка также следует, что исследуемая система управления четвертого порядка имеет нулевую статическую ошибку, заданное перегулирование $\sigma = 4,321\%$ и время переходных процессов $\tau_{пп} = 0,738$, которое меньше, чем в системе [11] ($\tau_{пп} = 0,878$). Данные результаты полностью отвечают исходным данным синтеза быстродействующего регулятора.

Список литературы

1. Ловчаков В. И. К проблеме быстродействия систем управления по одной (нескольким) координатам // Системы управления электротехническими объектами. Тр. 3-й Всеросс. Науч.-практ. конф. Тула, Известия ТулГУ, 2005. С. 111–113.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 302 с.
3. Атанс М., Фалб П. Л. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
4. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Кн. 3. Часть II. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования / Под ред. проф. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1969. 368 с.
5. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
6. Ключев А. С., Колесников А. А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
7. Колесников А. А., Гельфгат А. Г. Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами. М.: Энергоатомиздат, 1993. 304 с.
8. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Гибридная схема решения задачи линейного быстродействия на основе формализма полиэдральной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 3–9.

9. **Каюмов О. Р.** Глобально управляемые механические системы. М.: Физматлит, 2007. 168 с.

10. **Ловчаков В. И.** Функции переключения оптимального по быстродействию регулятора для четырехкратного интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 3–5.

11. **Ким Д. П.** Синтез оптимальных по быстродействию непрерывных линейных регуляторов // АиТ. 2009. № 3. С. 5–16.

12. **Ким Д. П.** Синтез неминимально-фазовых систем управления с заданным временем регулирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 4. С. 5–10.

13. **Ким Д. П.** Алгебраический метод синтеза линейных непрерывных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 9–15.

14. **Ким Д. П.** Определение желаемой передаточной функции при синтезе систем управления алгебраическим методом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 5. С. 15–21.

15. **Крутько П. Д.** Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. 304 с.

16. **Пупков К. А.** Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. / К. А. Пупков. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. 736 с.

17. **Красовский А. А., Поспелов Г. С.** Основы автоматики и технической кибернетики. М.: Гостехиздат, 1962.

18. **Рубинчик А. М.** Приближенный метод оценки качества регулирования в линейных системах. Сборник: Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики. М.: Машгиз, 1952.

19. **Ловчаков В. И.** Необходимые условия максимального быстродействия линейных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. № 6. С. 376–382.

20. **Александров А. Г.** Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 264 с.

The Solution of a Problem of Speed of Response on Output Coordinate for Linear Dynamic Systems

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru, O. A. Shibyakin, yutiop@gmail.com,
Tula State University, Tula, 300600, Russian Federation

Corresponding author: **Lovchakov Vladimir I.**, Full Professor,
Tula State University, department of electrical engineering and electrical equipment,
Tula, 300600, Russian Federation, e-mail: lovvi50@mail.ru

Accepted on May 15, 2019

Abstract

The solution of the so-called problem of speed of response in one coordinate, which has important theoretical and practical importance, is investigated. It is formulated with reference to linear one-dimensional high-order control objects described by a system of ordinary differential equations in a certain phase space. The transient time t_{tr} of the system designed is understood in a sense of the classical control theory in reference to one (output) coordinate of the object and is determined by using the zone $\Delta = \sigma^* = 4.321\%$, which equals the given (desirable) value of the overshoot of the system synthesized. This overshoot corresponds with the speed of response oscillating second-order element with a damping coefficient $\zeta = \sqrt{2}/2 = 0.7071$. It is indispensable to mention here that the equation $\Delta = \sigma$ is one of the necessary conditions for the maximum speed of response of the system with the oscillating character of transient processes. In accordance to this the task of the speed of response by one coordinate can be described by the following generalized formulation: one must find the linear algorithm of the feedback signal, which provides a preset order of the astaticism n_a for the closed-loop control system and converts the control object from a zero state into a final state, which is determined by the constant signal of the input, with a minimal time value of the transient processes of the system t_{tr} and the preset value of the overshoot $\sigma \leq \sigma^*$ while fulfilling the constraint of the control signal $|u(t)| \leq u_{max}$. Nowadays the task mentioned is approximately solved by the algebraic method of the synthesis of linear control systems with the determination of a desirable transfer function of the designed closed-loop system based on model normalized transfer functions (NTF). In the works by Kim D. P. there was carried out the analysis of four types of normalized transfer functions characterized by the increased speed of response. In this work two additional types of normalized transfer functions are suggested, in comparison with mentioned NTF they have the increased speed of response in case of the preset value of the overregulation $\sigma^* = 4.321\%$. On their basis and using the methodology of the modal control the method of the synthesis of the controller is suggested; this method ensures the transient time of the designed system to be close to the minimum in case of the preset constraint of the overregulation and the value of the control signal. It needs to be emphasized that in contrast to the algebraic method of the synthesis, this method is applied to a wider range of control objects: as to minimal-phased objects as to non-minimum-phased ones; as to the objects containing zeros as to those without them. The method is illustrated by an example of synthesis of control system speed of response of the fourth order, containing the results of its modeling.

Keywords: linear one-dimensional object, criterion of speed of response, overregulation, astaticism, the pole of the optimal system, modal control

For citation:

Lovchakov V. I., Shibyakin O. A. The Solution of a Problem of Speed of Response on Output Coordinate for Linear Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 532—541.

DOI: 10.17587/mau.20.532-541

References

1. **Lovchakov V. I.** *Sistemy upravleniya elektrotekhnicheskimi ob"ektami: Trudy 3-i Vserossiiskoi nauchno-praktich. konf.* [Control systems of electrical objects: proceedings of the 3d All-Russian scientific-practical conference], Tula, *Izvestiya TulGU*, 2005, pp. 111—113 (in Russian).

2. **Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** Mathematical theory of optimal processes, Moscow, Fizmatlit Publ., 1961, 302 p (in Russian).

3. **Atans M., Falb P. L.** Optimal control, Moscow, Mashinostroenie Publ., 1968. 764 p (in Russian).

4. **Solodovnikov V. V.** ed. Control theory, vol. 3, part 2. The theory of nonstationary, non-linear and self-adjusting control systems, Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969, 368 p (in Russian).

5. **Ivanov V. A., Faldin N. V.** The theory of optimal control systems, Moscow, Nauka Publ., 1981, 336 p (in Russian).

6. **Kliuev A. S., Kolesnikov A. A.** The optimization of control systems by speed of response, Moscow, Energoizdat Publ., 1982, 240 p (in Russian).

7. **Kolesnikov A. A., Gel'fgat A. G.** The design of multiobjective control systems of industrial facilities, Moscow, Energoatomizdat Publ., 1993, 304 p (in Russian).

8. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 7, pp. 3—9 (in Russian).

9. **Kayumov O. R.** Globally controlled mechanical systems, Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 168 p (in Russian).

10. **Lovchakov V. I.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no.9, pp. 3—5 (in Russian).

11. **Kim D. P.** *AiT*, 2009, no.3, pp. 5—16 (in Russian).

12. **Kim D. P.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2010, no. 4, pp. 5—10 (in Russian).

13. **Kim D. P.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 1, pp. 9—15 (in Russian).

14. **Kim D. P.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 5, pp. 15—21 (in Russian).

15. **Krut'ko P. D.** The inverse tasks of the dynamics of controlled systems. Linear models, Moscow, Nauka, 1987, 304 p (in Russian).

16. **Pupkov K. A.** Methods of classical and modern control theory: 3 vol., Moscow, MGTU im. N. E. Bauman Publ., 2000, 736 p (in Russian).

17. **Krasovskii A. A., Pospelov G. S.** and technical cybernetics fundamentals, Moscow, Gostekhzdat, 1962 (in Russian).

18. **Rubinchik A. M.** Approximate method of the quality evaluation of the control process in linear systems, *Ustroistva i elementy teorii avtomatiki i telemekhaniki*, Moscow, Mashgiz, 1952 (in Russian).

19. **Lovchakov V. I.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, no. 6, pp. 376—382 (in Russian).

20. **Aleksandrov A. G.** Optimal and adaptive systems, Moscow, Vysshaya shkola, 1989, 264 p (in Russian).



25—27 мая 2020 г. в Санкт-Петербурге
на базе ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электروприбор"
состоится



XVII Санкт-Петербургская Международная конференция по интегрированным навигационным системам

Тематика конференции

- Инерциальные датчики, системы навигации и ориентации;
- Интегрированные системы навигации и управления движением;
- Глобальные навигационные спутниковые системы;
- Средства гравиметрической поддержки навигации.

В рамках каждого направления рассматриваются:

- схемы построения и конструктивные особенности;
- методы и алгоритмы;
- особенности разработки и применения для различных подвижных объектов и условий движения (аэрокосмические, морские, наземные, подземные);
- испытания и метрология.

Контактная информация:

Тел.: + 7 (812) 499 82 10 + 7 (812) 499 81 57
Факс: + 7 (812) 232 33 76 E-mail: icins@eprub.ru

С. Г. Буланов, канд. техн. наук, доц., bulanovtgi@mail.ru,
Ростовский государственный экономический университет, г. Таганрог

Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем

Представлен подход к анализу устойчивости в смысле Ляпунова систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на мультипликативных преобразованиях разностных схем численного интегрирования. В результате преобразований формируются критерии устойчивости в виде необходимых и достаточных условий. Критерии инвариантны относительно правой части системы и не требуют ее преобразования относительно разностной схемы, длины промежутка и шага решения. Отличительной особенностью критериев является то, что они не используют методы качественной теории дифференциальных уравнений. В частности, для случая систем с постоянной матрицей коэффициентов не нужно построения характеристического многочлена и оценки значений характеристических чисел. При анализе устойчивости системы с переменной матрицей коэффициентов не требуется вычисления характеристических показателей. Получены разновидности критериев в аддитивной форме. Анализ устойчивости на их основе эквивалентен оценке устойчивости на основе критериев в мультипликативной форме. В условиях устойчивости (асимптотической устойчивости) линейной системы дифференциальных уравнений получены критерии устойчивости (асимптотической устойчивости) систем линейных дифференциальных уравнений с нелинейной добавкой. Для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений приводится схема анализа устойчивости на основе линеаризации, которая связана непосредственно с исследуемым решением. Схема строится в предположении, что устойчивость решения системы общего вида эквивалентна устойчивости линеаризованной системы в достаточно малой окрестности возмущения начальных данных. Матричная форма критериев позволяет реализовать их в виде циклической программы. Компьютерный анализ выполняется в режиме реального времени и по своим результатам позволяет сделать однозначный вывод о характере устойчивости исследуемой системы. На основе численного эксперимента установлен допустимый диапазон вариации шага разностного метода и длины промежутка разностного решения в границах достоверности анализа устойчивости. Изложен подход, ориентированный на компьютерный анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений. Компьютерная апробация показала целесообразность использования данного подхода на практике.

Ключевые слова: устойчивость по Ляпунову, компьютерное моделирование устойчивости, разностные решения дифференциальных уравнений

Введение

Анализ устойчивости по Ляпунову систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) требуется проводить при решении теоретических и прикладных задач механики, физики, теории сверхоперативного управления, при строительстве высотных сооружений и создании авиационных конструкций, в ряде других областей современной науки и техники.

Актуальность исследований в данном направлении обусловлена и тем, что к анализу устойчивости систем линейных ОДУ на основе классических и современных методов линеаризации сводятся важные методы исследования устойчивости решений нелинейных систем. Помимо этого, с помощью систем линейных ОДУ непосредственно моделируются классы физических и технологических процессов, требующих анализа устойчивости.

Использование компьютерной техники в научно-технических исследованиях приводит к задаче автоматизации анализа устойчивости. Анализ устойчивости требуется выполнять

непосредственно в процессе компьютерного управления объектами в целях повышения качества управления. Поэтому актуальна разработка компьютерных средств анализа устойчивости систем линейных ОДУ.

В работе предлагается подход к решению задачи анализа устойчивости (в смысле Ляпунова), в основу которого положены схемы, представляющие собой матричные мультипликативные преобразования разностных методов численного интегрирования. Это делается с целью сконструировать компьютерный метод анализа устойчивости по Ляпунову. Метод должен формировать критерии устойчивости, компьютерное моделирование которых влечет однозначное определение характера устойчивости, неустойчивости либо асимптотической устойчивости систем линейных ОДУ.

Постановка задачи

Рассматривается задача Коши для линейной однородной системы ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, Y(t_0) = Y_0, \quad (1)$$

где Y — вектор-функция, координаты которой — искомые функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ от независимой переменной t ; $A(t)$ — матрица коэффициентов размерности $n \times n$. Предполагается, что все функции $a_{ij}(t)$ $i, j = 1, \dots, n$, определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$, при любом выборе $T = \text{const}$, $T \in [t_0, \infty)$; $Y(t_0) = Y_0$ — заданный начальный вектор.

Всюду ниже используется каноническая норма матрицы $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^n |a_{ik}|$ и согласованная с ней норма вектора $\|Y\| = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k|$.

Предполагается, что для системы (1) выполнены все условия существования и единственности решения $Y = Y(t)$, $Y(t_0) = Y_0$ на $[t_0, \infty)$, эти же условия предполагаются выполненными для каждого элемента множества возмущенных решений $\tilde{Y} = \tilde{Y}(t)$, соответствующих возмущенному начальному вектору $\tilde{Y}(t_0) = \tilde{Y}_0$, удовлетворяющему неравенству

$$\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta, \delta > 0, \quad (2)$$

где δ — некоторое достаточно малое число.

В рассматриваемых предположениях справедливы следующие утверждения [1]:

1) матрица $A(t)$ ограничена на отрезке $[t_0, T]$ по норме:

$$\|A(t)\| \leq c, c = \text{const} \quad \forall T \in [t_0, \infty);$$

2) производная функций $f_k(t, Y(t))$, $f_k(t, \tilde{Y}(t))$, где $f_k(t, Y) = a_{k1}(t)y_1 + \dots + a_{kn}(t)y_n$, $k = 1, \dots, n$, ограничена на отрезке $[t_0, T]$:

$$|f'_k(t, Y(t))| \leq c_1, |f'_k(t, \tilde{Y}(t))| \leq c_1, \\ c_1 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Пусть R обозначает область, включающую множество всех решений задачи (1) при начальных значениях, удовлетворяющих (2):

$$R : \{t_0 \leq t < \infty; \tilde{Y}(t), Y(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta\}. \quad (3)$$

Требуется исследовать решение задачи (1) на устойчивость в смысле Ляпунова. Традиционное определение устойчивости заимствовано с упрощениями на случай рассматриваемого множества R [2].

Описание метода

Метод Эйлера приближенного решения системы (1) можно записать в виде: $Y_{i+1} = Y_i + hA(t_i)Y_i$, $i = 0, 1, \dots$, или

$$Y_{i+1} = (E + hA(t_i))Y_i, \quad (4)$$

где h — шаг разностной схемы, узлы которой предполагаются равноотстоящими. При любом выборе $t = \text{const}$, $t \in [t_0, \infty)$, h и переменный индекс i всегда предполагаются связанными соотношениями

$$t = t_{i+1}, h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1}, i = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Для возмущенного решения системы (1) соотношение (5) переходит в соотношение

$$\tilde{Y}_{i+1} = (E + hA(t_i))\tilde{Y}_i. \quad (6)$$

Соответствующие приближенным решениям (4), (6) точные решения могут быть представлены в форме метода Эйлера с остаточным членом на каждом шаге:

$$Y_{i+1} = (E + hA(t_i))Y_i + Q_i, \\ \tilde{Y}_{i+1} = (E + hA(t_i))\tilde{Y}_i + \tilde{Q}_i. \quad (7)$$

Остаточным членом метода Эйлера на шаге будем считать разность между точным решением и его приближением по методу Эйлера.

Для разности между возмущенным и невозмущенным решениями получим точное равенство

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = (E + hA(t_i))(\tilde{Y}_i - Y_i) + Q_{Ei}, \quad (8)$$

где $Q_{Ei} = \tilde{Q}_i - Q_i$. Поскольку $\|Q_{Ei}\| \leq \|\tilde{Q}_i\| + \|Q_i\|$, то $\|Q_{Ei}\| \leq c_1 h^2$ [1].

Рекуррентное преобразование (8) влечет равенство

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell}))(\tilde{Y}_0 - Y_0) + L_i, \quad (9)$$

где

$$L_i = \sum_{k=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-k} (E + hA(t_{i-\ell}))Q_{Ek-1} + Q_{Ei}. \quad (10)$$

Лемма 1. В рассматриваемых условиях имеет место соотношение $\|L_i\| = O(h)$ [1].

Доказательство. Из соотношения (10) следует

$$\|L_i\| \leq \sum_{k=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-k} \|(E + hA(t_{i-\ell}))\| \|Q_{Ek-1}\| + \|Q_{Ei}\|.$$

С учетом утверждений 1) и 2) последнее неравенство примет вид

$$\|L_i\| \leq c_1 h^2 \sum_{k=1}^{i+1} (1+ch)^{i-k+1}$$

или $\|L_i\| \leq c_1 h^2 \sum_{\ell=0}^i (1+ch)^\ell$.

Суммирование геометрической прогрессии в правой части влечет выполнение

$$\|L_i\| \leq \bar{c}_1 h ((1+ch)^{i+1} - 1),$$

где $\bar{c}_1 = \frac{c_1}{c}$.

Отсюда, с учетом (5), следует, что

$$\|L_i\| \leq \bar{c}_1 h \left((1+ch)^{\frac{t_{i+1}-t_0}{h}} - 1 \right).$$

Тем более справедливо неравенство

$$\|L_i\| \leq \bar{c}_1 h (e^{c(t_{i+1}-t_0)} - 1). \quad (11)$$

При любом выборе $t = t_{i+1}$, $t = \text{const}$, $t \in [t_0, \infty)$, и при переменном i выполняется соотношение $\bar{c}_1 (e^{c(t-t_0)} - 1)h \rightarrow 0$, если $h \rightarrow 0$. Отсюда и из неравенства (11) следует, что $\|L_i\| = O(h)$. Лемма доказана.

В условиях леммы 1 имеет место равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} L_i = 0. \quad (12)$$

Предельный переход в равенстве (9) при любом t из (5) влечет равенство

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0) + \lim_{h \rightarrow 0} L_i.$$

Стремление h к нулю равносильно стремлению i к бесконечности. Отсюда, с учетом (12), для любого $t \in [t_0, \infty)$ выполнено:

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) (\tilde{Y}_0 - Y_0). \quad (13)$$

Теоретически шаг h в формуле (13) зависит от i : $h(i) = \frac{t-t_0}{i+1}$, $i = 0, 1, \dots$. В правой части (13) бесконечное произведение не вполне соответствует смыслу этого понятия, определяемого в математическом анализе. Известное определение включает последовательность частичных произведений, изменение которых определяет добавление новых сомножителей. Бесконечное произведение в соотношении (13) строится как последовательность частичных произведений,

каждое из которых отличается от предыдущего не только добавлением нового сомножителя, но и изменением (уменьшением в обратной числу сомножителей пропорции) параметра h в каждом из сомножителей нового частичного произведения.

Смысл равенства (13) состоит в том, что для произвольного t величина возмущения равна бесконечному матричному произведению, умноженному на возмущение начальных данных. Таким образом, возмущение при любом t пропорционально бесконечному матричному произведению. Отсюда автоматически вытекает базовый критерий устойчивости линейных систем ОДУ, представленный теоремой 1 [3].

Теорема 1. Пусть выполнены все рассматриваемые условия. Для того чтобы решение задачи (1) было устойчиво, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \leq \tilde{c}_1 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty). \quad (14)$$

Решение асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполнено (14) и, кроме того, выполняется соотношение

$$\left\| \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \prod_{\ell=0}^i (E + hA(t_{i-\ell})) \right\| \rightarrow 0. \quad (15)$$

Соотношение (13) можно переписать в виде

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \prod_{i=0}^{\infty} (E + hA(t_i)) (\tilde{Y}_0 - Y_0).$$

Соответственно, соотношения (14), (15) примут вид

$$\left\| \prod_{i=0}^{\infty} (E + hA(t_i)) \right\| \leq \tilde{c}_1 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty)$$

и $\left\| \lim_{t \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{\infty} (E + hA(t_i)) \right\| \rightarrow 0,$

где t, i, h связаны зависимостью (5).

Значение критериев (14), (15) заключается в том, что они позволяют определить характер устойчивости, асимптотической устойчивости либо неустойчивости систем линейных ОДУ без представления решения в аналитической форме, непосредственно по значениям разностных приближений. Мультипликативная форма выражений под знаком предела в левой части предоставляет возможность запрограммировать вычисление этих выражений в виде цикла по числу сомножителей. Это влечет

предпосылки компьютерного анализа устойчивости без обращения к аналитическим методам качественной теории дифференциальных уравнений.

Практическая компьютерная реализация критериев будет выполняться с постоянным шагом на фиксированном промежутке. Это делается по двум причинам: во-первых, экспериментально не обнаруживается разница результатов моделирования при изменении шага в наборе сомножителей, во-вторых, постоянство шага принципиально сокращает время моделирования [1].

В случае постоянства матрицы A запись критериев упрощается [1]. Критерий устойчивости (14) примет вид

$$\left\| \lim_{i \rightarrow \infty} B^{i+1} \right\| \leq \tilde{c}_2 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty),$$

где $B = E + hA$.

Критерий асимптотической устойчивости (15) преобразуется в следующее соотношение:

$$\left\| \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} B^{i+1} \right\| \rightarrow 0.$$

Далее приводится схема компьютерного анализа устойчивости для случая систем линейных ОДУ с нелинейной добавкой.

Рассматривается задача Коши для системы

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (16)$$

Предполагается, что для системы (16) выполнены все условия, ранее требуемые для (1). Дополнительно предполагается, что элементы нелинейной функции $F(t, Y)$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, T]$ при любом выборе $T = \text{const}$, $T \in [t_0, \infty)$.

В данных условиях для $\forall T \in [t_0, \infty)$ на отрезке $[t_0, T]$ производные функций $\phi_k(t, Y(t))$, $\phi_k(t, \tilde{Y}(t))$, $\phi_k(t, Y_i) = \sum_{j=1}^n a_{kj}(t_i) y_{ji} + f_k(t_i, Y_i)$, $k = 1, \dots, n$, ограничены общей константой: $|\phi'_k(t, Y(t))| \leq c_2$, $|\phi'_k(t, \tilde{Y}(t))| \leq c_2$, $c_2 = c_2(T) = \text{const}$.

Разность между возмущенным и невозмущенным решением (16) имеет вид точного равенства [4]:

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = B(t_i)(\tilde{Y}_i - Y_i) + h\Phi_i(t_i, \tilde{Y}_i, Y_i) + \Theta_{Ei}, \quad (17)$$

где $B(t_i) = E + hA(t_i)$, $\Phi_i(t_i, \tilde{Y}_i, Y_i) = F(t_i, \tilde{Y}_i) - F(t_i, Y_i)$, $\|\Theta_{Ei}\| \leq c_2 h^2$. Ниже полагается, что $\Phi_i = \Phi_i(t_i, \tilde{Y}_i, Y_i)$.

Для системы (16) рекуррентное преобразование (17) влечет равенство

$$\tilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = P_i(\tilde{Y}_0 - Y_0) + D_{Ei} + S_{Ei}, \quad (18)$$

где $P_i = \prod_{\ell=0}^i B(t_{i-\ell})$, $D_{Ei} = \sum_{k=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-k} B(t_{i-\ell}) h\Phi_{k-1} + h\Phi_i$, $S_{Ei} = \sum_{k=1}^i \prod_{\ell=0}^{i-k} B(t_{i-\ell}) \Theta_{Ek-1} + \Theta_{Ei}$ [4].

Переходя в (18) к пределу при $h \rightarrow 0$, что равносильно $i \rightarrow \infty$, получим

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_i(\tilde{Y}_0 - Y_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} D_{Ei} + \lim_{i \rightarrow \infty} S_{Ei}. \quad (19)$$

В рассматриваемых условиях выполняется соотношение $\|S_{Ei}\| = O(h)$ [4].

В тех же условиях

$$\lim_{h \rightarrow 0} S_{Ei} = 0. \quad (20)$$

Согласно (20) соотношение (19) примет вид

$$\tilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i \rightarrow \infty} P_i(\tilde{Y}_0 - Y_0) + \lim_{i \rightarrow \infty} D_{Ei}. \quad (21)$$

Вывод необходимых и достаточных условий устойчивости (асимптотической устойчивости) решения задачи (16) строится в предположении, что устойчива (асимптотически устойчива) соответствующая системе (16) система линейных ОДУ [4].

Теорема 2. Пусть выполнены рассматриваемые ограничения на систему (16), и соответствующая ей линейная система устойчива. Тогда для устойчивости решения системы (16) необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\tilde{\varepsilon} > 0$ нашлось $\delta_1 > 0$, такое что выполнение $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta_1$ влечет неравенство

$$\left\| \tilde{Y}(t) - Y(t) - \lim_{i \rightarrow \infty} P_i(\tilde{Y}_0 - Y_0) \right\| \leq \tilde{\varepsilon} \quad \forall t \in [t_0, \infty). \quad (22)$$

Относительно асимптотической устойчивости имеет место следующая теорема [4].

Теорема 3. Если выполнены рассматриваемые ограничения на систему (16), и соответствующая ей линейная система асимптотически устойчива, то решение задачи (16) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется утверждение теоремы 2 и существует некоторое положительное δ_2 , такое

что выполнение $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta_2$ при $t \rightarrow \infty$ влечет соотношение

$$\left\| \tilde{Y}(t) - Y(t) - \lim_{i \rightarrow \infty} P_i(\tilde{Y}_0 - Y_0) \right\| \rightarrow 0. \quad (23)$$

Значения выражений под знаком нормы в (22), (23) вычисляются программно, на этой основе численно моделируются устойчивость и асимптотическая устойчивость и реализуется компьютерный анализ устойчивости решений систем вида (16).

В рамках предложенного подхода можно выполнять анализ устойчивости нелинейной системы ОДУ на основе линеаризации, которая имеет место только в окрестности исследуемого решения [5].

Рассматривается задача Коши для нелинейной системы ОДУ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y), \quad Y(t_0) = Y_0. \quad (24)$$

Предполагается, что существует $\delta_0 > 0$, при котором все условия существования и единственности выполнены для невозмущенного решения на полупрямой $[t_0, \infty)$ и для каждого его возмущения с начальным вектором из окрестности $\|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta_0$. Предполагается также, что в области $R_0 : \{t_0 \leq t < \infty; Y(t), \forall \tilde{Y}(t) : \|\tilde{Y}_0 - Y_0\| \leq \delta_0\}$ функция $F(t, Y)$ всюду определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема по t (в точке t_0 — справа), компоненты этой функции удовлетворяют неравенству

$$|f_k(t, Y) - f_k(t, \tilde{Y})| \leq L|y_k - \tilde{y}_k|, \quad L = \text{const},$$

$$\forall t \in [t_0, \infty), \forall (t, Y), (t, \tilde{Y}) \in R_0, \forall k = 1, \dots, n.$$

Первоначально выполняется преобразование системы (24):

$$\frac{dy_k}{dt} = \frac{f_k(t, y_1, \dots, y_n)}{y_k} y_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

в предположении $y_k \neq 0$, или, в матричной форме,

$$\begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{f_1(t, y_1, \dots, y_n)}{y_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{f_2(t, y_1, \dots, y_n)}{y_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f_n(t, y_1, \dots, y_n)}{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Если каждую диагональную компоненту в матрице из (25) заменить на аналитическое выражение от t в явной форме, то получим для анализа устойчивости линейную систему, поскольку матрица от $y_1(t)$, ..., $y_n(t)$ зависеть не будет. Это дает возможность на практике использовать аппарат анализа устойчивости систем линейных ОДУ для каждого отдельного решения нелинейной системы (24). Преобразованную такой подстановкой систему (25) можно рассматривать как линейную систему ОДУ вида

$$\frac{dY}{dt} = \tilde{A}(t)Y, \quad (26)$$

где диагональные элементы зависят только от переменной t .

Для системы (26) критерии устойчивости (14), (15) приводятся к аддитивной форме после следующего преобразования [5]:

$$\begin{aligned} \prod_{\ell=0}^i (E + h\tilde{A}(t_{i-\ell})) &= \\ &= e^{\ln \prod_{\ell=0}^i (E + h\tilde{A}(t_{i-\ell}))} = e^{\sum_{\ell=0}^i \ln(E + h\tilde{A}(t_{i-\ell}))}. \end{aligned}$$

Система (26) устойчива тогда и только тогда, когда [5]

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h\tilde{A}(t_{i-\ell}) \leq \tilde{C}_1 = \text{const} \quad \forall t \in [t_0, \infty), \quad (27)$$

где C_1 — постоянная (диагональная) матрица. Для асимптотической устойчивости необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (27), а также соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^i h\tilde{A}(t_{i-\ell}) = (-\infty), \quad (28)$$

где под символом $(-\infty)$ понимается предел диагональной матрицы, диагональные элементы которой стремятся к $-\infty$.

Критерии (27), (28) инвариантны относительно правой части системы, разностных схем приближенного решения системы, шага и длины промежутка численного интегрирования и ориентированы на компьютерную реализацию, которая выполняется в режиме реального времени.

На практике при компьютерном анализе устойчивости точное аналитическое решение в (25) заменяется на разностное. В результате исследование устойчивости решения системы (24) сводится к анализу устойчивости линейной системы ОДУ вида (26) с соответственно дискретизированными значениями правой части и решениями на диагонали.

Численный эксперимент

Исследуется нелинейная система

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -y_2\sqrt{y_1^2 + y_2^2}; \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1\sqrt{y_1^2 + y_2^2}. \end{cases} \quad (29)$$

Известно, что нулевое решение этой системы устойчиво, все остальные решения неустойчивы [2].

Анализ устойчивости выполняется на основе критериев (14), (27) после предварительной линеаризации. Исследуется на устойчивость нулевое решение системы на промежутке $[0, 10\ 000]$ с шагом $h = 0,00001$. Величина возмущения нулевого решения считается равной $0,000001$.

На основе следующих операторов (Delphi) выполняется компьютерный анализ устойчивости по критерию (14), результаты которого представлены в табл. 1.

```
function f1(t, y1, y2: extended): extended;
begin f1 := -y2*sqrt(sqr(y1) + sqr(y2)); end;
function f2(t, y1, y2: extended): extended;
begin f2 := y1*sqrt(sqr(y1) + sqr(y2)); end;
begin
  t := 0; k := 0; y1 := 0; y2 := 0;
  yv1 := y1 + eps1; yv2 := y2 + eps2;
  p1 := (1 + (h*(f1(t,y1,y2)-f1(t,yv1,yv2))/(y1-yv1)));
  p2 := (1 + (h*(f2(t,y1,y2)-f2(t,yv1,yv2))/(y2-yv2)));
  repeat
    y_1 := y1; yv_1 := yv1; y1 := y1 +
    h*f1(t,y1,y2); y2 := y2 + h*f2(t,y_1,y2);
    yv1 := yv1 + h*f1(t,yv1,yv2); yv2 := yv2 +
    h*f2(t,yv_1,yv2);
    p1 := p1*(1 + (h*(f1(t,y1,y2)-f1(t,yv1,yv2))/(y1-yv1)));
    p2 := p2*(1 + (h*(f2(t,y1,y2)-f2(t,yv1,yv2))/(y2-yv2)));
    k := k + 1; t := t + h;
    if k >= 100000000 then
      begin
        norma := sqrt(sqr(p1) + sqr(p2));
        writeln('t = ',t:6:4,', norma = ',norma); k := 0;
      end;
  until t > TT;
```

Представленные значения нормы ограничены константой, что в соответствии с критерием (14) свидетельствует об устойчивости.

Таблица 1
Table 1

Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (29) на основе критерия (14)
The Results of the Stability Analysis of the Zero Solution of the System (29) Based on the Criteria (14)

t	$norma$
1000	1.41421356237311
2000	1.41421356237312
3000	1.41421356237314
4000	1.41421356237315
5000	1.41421356237317
6000	1.41421356237318
7000	1.41421356237319
8000	1.41421356237321
9000	1.41421356237322
10000	1.41421356237324

Далее выполняется анализ устойчивости системы (29) на основе критерия (27). Численные значения входных параметров остаются прежними. Операторы, реализующие критерий (27), представлены ниже, результаты моделирования даны в табл. 2.

```
begin
  t := 0; k := 0; y1 := 0.01; y2 := 0.01;
  yv1 := y1 + eps1; yv2 := y2 + eps2;
  d1 := (f1(t,y1,y2)-f1(t,yv1,yv2))/(y1-yv1);
  d2 := (f2(t,y1,y2)-f2(t,yv1,yv2))/(y2-yv2);
  repeat
    y_1 := y1; yv_1 := yv1; y1 := y1 +
    h*f1(t,y1,y2); y2 := y2 + h*f2(t,y_1,y2);
    yv1 := yv1 + h*f1(t,yv1,yv2); yv2 := yv2 +
    h*f2(t,yv_1,yv2);
    d1 := d1 + ((f1(t,y1,y2)-f1(t,yv1,yv2))/(y1-yv1));
    d2 := d2 + ((f2(t,y1,y2)-f2(t,yv1,yv2))/(y2-yv2));
    k := k + 1; t := t + h;
    if k >= 100000000 then
      begin
        writeln('t = ',t:5:0,' ',h*d1,' ',h*d2);
        k := 0; end;
  until t > TT;
```

Таблица 2
Table 2

Результаты анализа устойчивости нулевого решения системы (29) на основе критерия (27)
The results of the Stability Analysis of the Zero Solution of the System (29) Based on the Criteria (27)

t	$h \sum_{\ell=0}^i \tilde{a}_{11}(t_{i-\ell})$	$h \sum_{\ell=0}^i \tilde{a}_{22}(t_{i-\ell})$
1000	-1.41621546482379E-0003	1.41221545945044E-0003
2000	-2.83644226666084E-0003	2.82044218124678E-0003
3000	-4.26069182993056E-0003	4.22469139780226E-0003
4000	-5.68897562982427E-0003	5.62497426428432E-0003
5000	-7.12130520691026E-0003	7.02130187319912E-0003
6000	-8.55769216760099E-0003	8.41368525483007E-0003
7000	-9.99814818462451E-0003	9.80213537767238E-0003
8000	-1.14426849975002E-0002	1.11866631488637E-0002
9000	-1.28913144130190E-0002	1.25672794146111E-0002
10 000	-1.43440483057280E-0002	1.39439949606140E-0002

Диагональные элементы матрицы ограничены константой, что является признаком устойчивости. Результат исследования находится в соответствии с полученными ранее оценками устойчивости на основе (14).

Далее выполняется анализ устойчивости ненулевого решения системы (29), соответствующего начальным условиям $y_1(0) = 0,01$, $y_2(0) = 0,01$. Все остальные входные параметры программы не меняются. Результаты анализа устойчивости на основе критерия (14) отображены в табл. 3.

Наблюдается монотонное увеличение значений нормы, что свидетельствует о неустойчивости решения системы. Результаты исследования на основе критерия (27) представлены в табл. 4. и свидетельствуют о неустойчивости решения системы.

Компьютерная реализация критериев показала целесообразность использования данного

подхода на практике. Выполненный численный эксперимент показал эквивалентность рассмотренных способов компьютерного анализа и позволил указать значение шага разностного метода, длину промежутка разностного решения для сохранения достоверности анализа устойчивости.

Заключение

Предложен принципиально новый подход к анализу устойчивости систем линейных ОДУ, в основу которого полагаются компьютерные схемы анализа устойчивости, сконструированные с помощью мультипликативных преобразований разностных методов численного интегрирования.

Итогом преобразований являются необходимые и достаточные условия устойчивости в матричной мультипликативной форме, удобной для циклической программной реализации.

Важной особенностью предложенных критериев является то, что для их применения достаточно подать на вход стандартной процедуры, работающей в виде цикла значения правой части системы ОДУ в некоторой (начальной) точке. После этого никаких аналитических преобразований правой части не требуется, равно как не требуется ввод дополнительных данных по ходу работы программы или же ее прерывание, причем это так при любых параметрических изменениях правой части. Отсюда следует, что для анализа устойчивости системы управления, модель которой описывается системой ОДУ рассматриваемого вида, можно использовать стандартный блок в виде процедуры, программно реализующей представленные критерии. Поскольку для этого не требуется ввод дополнительных данных, компьютерный анализ устойчивости допускает выполнение в режиме реального времени. Тем самым анализ будет адекватно соответствовать реальным значениям параметров системы. Скорость выполнения анализа достаточно высока и на персональном компьютере, но имеется резерв увеличения быстродействия за счет параллелизма выполняемых операций [1].

Отмеченной возможностью не обладает математический анализ в рамках качественной теории ОДУ. Не обладают ею и системы компьютерной математики, которым на вход требуется ручной ввод с клавиатуры всех изменений правой части системы ОДУ.

Таблица 3
Table 3

Результаты анализа устойчивости ненулевого решения системы (29) на основе критерия (14)
The Results of the Stability Analysis of the Nonzero Solution of the System (29) Based on the Criteria (14)

t	$norma$
1000	2.00509839014046E + 0001
2000	4.00271780873374E + 0001
3000	6.00200688337337E + 0001
4000	8.00171918936163E + 0001
5000	1.00016040816282E + 0002
6000	1.20015772753961E + 0002
7000	1.40016020966995E + 0002
8000	1.60016596426253E + 0002
9000	1.80017390581162E + 0002
10 000	2.00018332995000E + 0002

Таблица 4
Table 4

Результаты анализа устойчивости ненулевого решения системы (29) на основе критерия (27)
The Results of the Stability Analysis of the Nonzero Solution of the System (29) Based on the Criteria (27)

t	$h \sum_{\ell=0}^i \tilde{a}_{11}(t_{i-\ell})$	$h \sum_{\ell=0}^i \tilde{a}_{22}(t_{i-\ell})$
1000	-1.33439834750317E + 0001	-2.39578166413820E + 0001
2000	-1.61236408719768E + 0001	-1.76326201174625E + 0001
3000	-2.85138829462534E + 0001	1.29716455076887E + 0002
4000	-1.17482297585034E + 0002	1.09150527716857E + 0002
5000	-1.10920097518025E + 0002	9.73066902829440E + 0001
6000	-1.32803432779380E + 0002	1.14073647152513E + 0002
7000	-1.23246494308784E + 0002	2.74865524156251E + 0002
8000	-1.25041154302556E + 0002	2.74974411665878E + 0002
9000	-1.61359014795154E + 0002	2.64322950154764E + 0002
10 000	1.14864679112119E + 0001	2.71221899034593E + 0002

Список литературы

1. Ромм Я. Е., Буланов С. Г. Компьютерный анализ устойчивости по Ляпунову систем линейных дифференциальных уравнений. Таганрог: Изд-во Таганрог. гос. пед. ин-та им. А. П. Чехова, 2012. 148 с.
2. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 478 с.
3. Буланов С. Г., Джанунц Г. А. Программный анализ устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе мультипликативных преобразований разностных схем и кусочно-полиномиальных приближений

решения // Промышленные АСУ и контроллеры. 2015. № 2. С. 10–20.

4. Ромм Я. Е., Буланов С. Г. Компьютерный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с нелинейной добавкой применительно к фазовой автоподстройке частоты // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. Серия "Управление, вычислительная техника и информатика". 2010. № 6. С. 55–60.

5. Ромм Я. Е., Буланов С. Г. Численный эксперимент по компьютерному анализу устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений на основе критериев матричного вида // Депонирована в ВИНТИ от 14.08.17. № 89.2017. 20 с.

The Analysis of the Systems Stability of Linear Differential Equations Based on the Transformation of Difference Schemes

S. G. Bulanov, bulanovtgp@mail.ru,

Rostov State University of Economics, 347900, Taganrog, Russian Federation

Corresponding author: **Bulanov Sergey G.**, Rostov State University of Economics, 347900, Taganrog, Russian Federation, Russian Federation, bulanovtgp@mail.ru

Accepted on March 14, 2019

Abstract

The approach to the analysis of Lyapunov systems stability of linear ordinary differential equations based on multiplicative transformations of difference schemes of numerical integration is presented. As a result of transformations, the stability criteria in the form of necessary and sufficient conditions are formed. The criteria are invariant with respect to the right side of the system and do not require its transformation with respect to the difference scheme, the length of the gap and the step of the solution. A distinctive feature of the criteria is that they do not use the methods of the qualitative theory of differential equations. In particular, for the case of systems with a constant matrix of the coefficients it is not necessary to construct a characteristic polynomial and estimate the values of the characteristic numbers. When analyzing the system stability with variable matrix coefficients, it is not necessary to calculate the characteristic indicators. The varieties of criteria in an additive form are obtained, the stability analysis based on them being equivalent to the stability assessment based on the criteria in a multiplicative form. Under the conditions of a linear system stability (asymptotic stability) of differential equations, the criteria of the systems stability (asymptotic stability) of linear differential equations with a nonlinear additive are obtained. For the systems of nonlinear ordinary differential equations the scheme of stability analysis based on linearization is presented, which is directly related to the solution under study. The scheme is constructed under the assumption that the solution stability of the system of a general form is equivalent to the stability of the linearized system in a sufficiently small neighborhood of the perturbation of the initial data. The matrix form of the criteria allows implementing them in the form of a cyclic program. The computer analysis is performed in real time and allows coming to an unambiguous conclusion about the nature of the system stability under study. On the basis of a numerical experiment, the acceptable range of the step variation of the difference method and the interval length of the difference solution within the boundaries of the reliability of the stability analysis is established. The approach based on the computer analysis of the systems stability of linear differential equations is rendered. Computer testing has shown the feasibility of using this approach in practice.

Keywords: Lyapunov stability, computer simulation of stability, differential solutions differential equations

For citation:

Bulanov S. G. The Analysis of the Systems Stability of Linear Differential Equations Based on the Transformation of Difference Schemes, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 542–549.

DOI: 10.17587/mau.20.542-549

References

1. Romm Ya. E., Bulanov S. G. Computer analysis of Lyapunov systems stability of linear differential equations, Taganrog, Publishing house of Taganrog State Pedagogical Institute named after A. P. Chekhov, 2012, 148 p. (in Russian).

2. Chезари Л. The asymptotic behavior and solutions stability of ordinary differential equations, Moscow, Mir, 1964, 478 p. (in Russian).

3. Bulanov S. G., Dzhанунц G. A. *Промышленные АСУ и контроллеры*, 2015, no. 2, pp. 10–20 (in Russian).

4. Romm Ya. E., Bulanov S. G. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskij region. Tekhnicheskie nauki. Seriya "Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika"*, 2010, no. 6, pp. 55–60 (in Russian).

5. Romm Ya. E., Bulanov S. G. Numerical experiment on computer analysis of the solutions stability of ordinary differential equations based on the criteria of the matrix type, *Deponirovana v VINITI* on 14.08.17, no. 89, 2017, 20 p. (in Russian).

А. А. Илюхин, д-р физ.-мат. наук, проф., aleilyukhin@yandex.ru,
Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) ФГБОУ ВО "РГЭУ (РИНХ)", г. Таганрог,
Д. В. Тимошенко, канд. физ.-мат. наук, доц., dmitrytim@sfedu.ru,
Южный федеральный университет, г. Таганрог

Управление конформациями молекул ДНК с помощью геометрических и физических параметров

Рассматривается концептуальный подход к задаче управления пространственными конфигурациями молекул ДНК. Работа носит проблемный характер и является обобщением исследований авторов в области моделирования поведения и структуры ДНК методами механики деформируемого твердого тела. Предметом исследований в настоящей работе служит вопрос о применимости методов теории управления к объекту живой природы на примере молекулы ДНК. В работе рассматриваются как вопросы управляемости на примерах влияния параметров молекулы на ее конфигурацию, так и вопросы наблюдаемости и идентификации параметров молекулы на основе видимой конфигурации в естественной среде. Приводится краткий обзор результатов, полученных авторами в части адаптации к объектам исследования существующих и разработки новых математических моделей деформируемых упругих объектов с учетом их внутренней структуры. В основу предлагаемого подхода положена концепция перехода с помощью известных методов молекулярной динамики от многоэлементной дискретной среды к континууму, содержащему моментные напряжения. С этой целью в предшествующих работах авторов получена зависимость компонентов тензоров деформаций, силовых и моментных напряжений от различных видов потенциалов межатомного взаимодействия (потенциал Ленарда — Джонса, потенциал Борна — Мейера и др.). Необходимость выбора в качестве базовой модели континуума, содержащего моментные напряжения, диктуется особенностями основного объекта исследования — молекул нуклеиновых кислот и биополимеров — обладающих несколькими степенями свободы вращательных движений. Также в качестве примера рассмотрен случай, для которого осуществлена редукция от трехмерной задачи несимметричной теории упругости к одномерной посредством расщепления трехмерной задачи на совокупность двумерной и одномерной задач. Указаны кинематические параметры, которые необходимо привлечь, чтобы вместе с системой дифференциальных уравнений Кирхгофа получить замкнутую систему уравнений одномерной моментной теории стержней. Остальные геометрические величины найдены из определяющих их соотношений. Предлагаемый подход согласуется с современными тенденциями в области молекулярного моделирования в биофизике и физико-химической биологии и представляется перспективным в решении задач управления генетическими и биохимическими процессами с участием ДНК.

Ключевые слова: управление конформациями ДНК, упругий стержень, идентификация параметров динамических систем

Введение

В работе рассматривается общая постановка и методология решения задачи управления пространственными конфигурациями макромолекул биологического происхождения, в первую очередь, молекулами ДНК.

Получение заданной пространственной конфигурации (или, в терминах молекулярной динамики, конформации) молекулы ДНК имеет исключительное значение в таких областях, как генная терапия и клеточная медицина. Это связано с тем, что одним из объективных и общепризнанных свойств молекулы ДНК, отвечающих за передачу наследственной информации, является последовательность и периодичность в молекуле ее базовых элементов — нуклеотидных оснований, а также структурный состав этих элементов. Физическое объяснение важности этих свойств заключается в:

- слабом взаимодействии этих оснований (близодействии);
- определяющем свойстве молекулы синтезе соответствующих электромагнитных полей;
- движении свободных электронов в молекуле под действием внешних факторов, которое формирует изменения во внутреннем взаимодействии, что приводит к появлению новых конформаций (естественное равновесие внутреннего взаимодействия).

В связи с тем что изменение конформаций молекулы приводит к изменению взаимного положения частиц молекулы, а следовательно, к появлению новых близодействующих участков и возможному исчезновению подобных участков, имевших место в прежней конформации, можно говорить о новых свойствах молекулы как следствии изменившегося электромагнитного поля, определяемого конфигурацией составляющих.

Таковы в общих чертах физические процессы, связанные с изменением конформации ДНК. Эти процессы, в свою очередь, лежат в основе передачи генетической информации и регулирования биохимических процессов внутри клетки.

Описанные процессы показывают необходимость исследования конформаций молекулы, о чем свидетельствуют многочисленные работы, лишь малая часть которых приведена в списке источников [1—8].

Другой важной задачей является определение зависимости от конформаций внутренних параметров молекулы [9—11]. Влияние изменений значений параметров молекулы на конкретный вид ее конформации дает возможность через эти параметры влиять на конформации, устанавливать определенный их вид с соответствующими свойствами молекулы.

В то же время описанный процесс изменения электромагнитных характеристик молекулы в зависимости от изменения ее пространственной конфигурации наводит на мысль об использовании этого естественного процесса в качестве канала управления конформацией молекулы. Механизм управляющего воздействия представляется достаточно тривиальным: генерация электромагнитных полей заданных характеристик в пространственной окрестности, окружающей молекулу, что вызовет изменение электронного баланса внутримолекулярных структур, в свою очередь приводящее к изменению пространственной конфигурации молекулы в целом.

В отличие от традиционно рассматриваемых в теории управления технических систем, ДНК является объектом живой природы. Поэтому в первую очередь необходимо предложить обоснованную парадигму исследования, в рамках которой можно было бы построить математическую модель макромолекулы как объекта управления и указать соответствующие управляющие параметры.

В качестве такой парадигмы предлагается теория упругости, и соответственно в качестве модели объекта рассматривается модель деформируемого упругого тела.

Предварительным соображением, говорящим в пользу этого подхода, является распространение практики проведения компьютерного моделирования отдельных молекул и их систем не в рамках аппарата квантовой механики, наиболее полно описывающей строение

вещества, а используя набор допущений и приближений, упрощающих природу процесса, но позволяющих решить задачу в целом.

Одним из ключевых допущений подобного рода является гипотеза о представимости молекулы в виде упругого тела, которое может быть подвергнуто сосредоточенным либо распределенным силовым воздействиям. В настоящей работе авторами взято за основу представление молекулы в качестве одномерного объекта — упругого стержня, что позволяет применить результаты предыдущих работ авторов [12—16] в области моделирования молекулярных систем методами теории упругости к задаче управления конфигурациями молекул.

Впервые данный подход был предложен в работах Д. Хёрста и Р. Бенхема [2, 3], которые рассматривали молекулу ДНК в виде упругого стержня, равновесные состояния которого описываются классической системой уравнений Кирхгофа — Клебша. И хотя такой подход, на первый взгляд, содержит заметную долю примитивизма, на практике он обладает потенциалом для существенного продвижения в решении задач молекулярного дизайна и, в частности, в области конформационного анализа. Это связано с тем, что слабостью утвердившихся в настоящее время в молекулярном дизайне методов (например, метода эмпирических силовых полей, метода молекулярной динамики или метода Монте-Карло) является то, что практически всегда уравнения, осуществляющие переход от молекулярных параметров к свойствам вещества, т. е. к макроскопическим свойствам, приходится решать численно. Таким образом, эффективность решения задач в значительной мере определяется вычислительными ресурсами, которыми располагают исследователи. Кроме того, моделирующие системы содержат большое число основных уравнений и вспомогательных соотношений, поскольку исследуемые молекулы имеют сложное атомное строение. В то же время представление исследуемых молекул в виде упругих поверхностей или одномерных упругих объектов (упругих стержней) позволяет, с одной стороны, уйти от перечисленных трудностей, а с другой — получить исчерпывающие представления как о процессах во внутренней структуре молекул, так и об их пространственной конфигурации и их взаимосвязи.

В то же время подход, предложенный Д. Хёрстом и Р. Бенхемом для описания пове-

дения молекул, обладает рядом принципиальных недостатков, связанных с тем, что модель Кирхгофа — Клебша, описывающая деформации упругого стержня, основана на представлениях о симметричности тензоров напряжений и деформаций, возникающих в упругом теле под действием внешних воздействий. Такая гипотеза не отражает процессы, происходящие в естественных молекулярных системах, является слишком упрощенной, поскольку модель Кирхгофа — Клебша основывается на классической теории упругости.

По этой причине Д. Хёрст и Р. Бенхем в своих работах не продвинулись дальше формальных постановок задач описания поведения молекулы ДНК в целом уравнениями Кирхгофа — Клебша.

Авторам данной работы удалось устранить указанные недостатки, используя модели сплошных сред, каждая из которых позволяет учесть определенный вид внутренних взаимодействий или начального состояния молекулы как объекта управления и соответствующим образом скорректировать систему уравнений модели [16, 18, 19].

В то же время в работе [17] в нелинейной постановке был разработан общий метод определения пространственных форм равновесия деформируемых стержней. В работах [16, 18] осуществлена редукция от трехмерной задачи теории упругости к системе двумерной и одномерной задач, и одномерная задача взята в качестве модели, описывающей процесс деформации объекта. Это позволяет рассмотреть задачу управления пространственными формами равновесия как задачу управления системой с сосредоточенными параметрами.

Особенностью метода анализа форм равновесия, разработанного в работе [17], является возможность установить все допустимые формы устойчивого равновесия объекта, соответствующие определенному классу воздействий. Воздействия, в свою очередь, можно охарактеризовать соответствующим решением системы уравнений объекта (в нашем случае системы уравнений Кирхгофа — Клебша, скорректированной в соответствии с выбором модели сплошной среды). Отдельное преимущество рассматриваемого подхода состоит в том, что нет необходимости интегрировать уравнения объекта, поскольку, как показано в работах [16, 18, 19], известные решения с соответствующими уточнениями могут обобщаться для скорректированных уравнений.

Сказанное, в первую очередь, относится к точным решениям системы уравнений деформации. Однако именно точные решения являются ключевым инструментом классификации естественных форм равновесия исследуемых объектов, или, говоря языком техники, допустимых режимов функционирования системы.

Для целей определения конфигурации точные решения обладают большим преимуществом, поскольку они содержат много параметров, т. е. потенциально много типов возможных взаимодействий внутри молекул, которые определяют упругие свойства молекул и их конформации в зависимости от разного класса действующих сил.

Параметры, входящие в конкретное точное решение, являются безразмерными, поэтому определяют классы допустимых форм равновесия лишь на качественном уровне. По сути, множество допустимых для существования данного решения значений параметров задает в пространстве состояний системы гиперповерхность, каждая точка которой соответствует устойчивой форме равновесия.

Для оценки характеристик направленных воздействий, переводящих молекулу в желаемую форму равновесия, необходим переход к размерным значениям параметров, позволяющих соотносить характеристики внешних воздействий с изменениями внутренних состояний молекулярной системы.

В рамках рассматриваемой идеи направленного воздействия на структуру электромагнитных полей внутри молекулы переход к размерным параметрам означает, например, что в качестве критериев оптимизации управляющих воздействий можно выбрать напряженности электрического и магнитного полей или потенциал электрического поля.

Переход к размерным параметрам математической модели также необходим при решении задач, связанных с идентификацией физических параметров молекулы. Выявление связи "конформация—параметры" позволит более полно ответить на вопросы о связи между формой ДНК и ее функциями в молекулярном комплексе клеточного ядра. Анализ связи "параметры—конформация" позволит решить задачу управления конформацией через воздействия на внутренние параметры молекулы внешними факторами, например, электромагнитными полями.

Постановка задачи и уравнения модели

Базовую систему уравнений деформации эквивалентного молекуле упругого стержня, следуя работе [17], запишем в виде

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{M} + \lambda) = (\mathbf{M} + \lambda) \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{P}(\mathbf{e} \times \boldsymbol{\gamma}), \quad \frac{d}{ds}\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$) — вектор Дарбу оси стержня; $\mathbf{P}$ — равнодействующая концевых сил; $\mathbf{M}$ (M_1, M_2, M_3) — вектор-момент внутренних сил; $\boldsymbol{\gamma}$ ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$) — единичный вектор вдоль концевой силы; $\mathbf{e}$ (e_1, e_2, e_3) — единичный вектор касательной к оси стержня; вектор λ ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) характеризует форму оси стержня в первоначальном состоянии. Дифференцирование по дуговой координате s проводится в главных осях изгиба и кручения.

Система дифференциальных уравнений (1) содержит девять неизвестных величин: M_i, γ_i, ω_i ($i = 1, 2, 3$), поэтому является незамкнутой. Для того чтобы получить недостающие три уравнения, привлекают к рассмотрению уравнения теории упругости. В классической теории стержней Кирхгофа эти замыкающие уравнения имеют вид

$$M_i + \lambda_i = \sum_{j=1}^3 B_{ij}(\omega_j - \omega_j^0), \quad (2)$$

где ω_j^0 — компоненты в главных осях изгиба и кручения вектора Дарбу $\boldsymbol{\omega}^0$ для недеформированного состояния; B_{ij} — компоненты матрицы жесткостей стержня. В дальнейшем рассматриваются изотропные стержни ($B_{ij} = 0, i \neq j$).

Система уравнений (1) совместно с замыкающими соотношениями (2) допускает два обших интеграла:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1; \quad (3)$$

$$M_1\gamma_1 + M_2\gamma_2 + M_3\gamma_3 = K, \quad (4)$$

третий интеграл (интеграл энергии), в случае равенства нулю недиагональных компонентов матрицы жесткостей, имеет вид

$$B_{11}\omega_1^2 + B_{22}\omega_2^2 + B_{33}\omega_3^2 - 2P\gamma_1 = 2H. \quad (5)$$

Во многих случаях процедура интегрирования системы (1) сводится к поиску четвертого интеграла, которого в соответствии с теорией последнего множителя Якоби достаточно для получения основных переменных в виде функции дуговой координаты [17, 20].

Схематическое представление молекулы ДНК в качестве упругого стержня показано на рис. 1 (см. вторую сторону обложки).

Суть механической модели молекулы ДНК (рис. 1) состоит в том, что молекуле ставится в соответствие упругий стержень, ось которого совпадает с гипотетической осью молекулы, а боковая поверхность — с гипотетической боковой поверхностью молекулы, механические характеристики которого близки к молекуле ДНК. Поведение такого стержня под действием внешних сил будет эквивалентно поведению молекулы ДНК, взаимодействующей с внешней средой.

Дополнительно отметим, что такое представление возможно благодаря уникальным по молекулярным меркам масштабам молекулы ДНК: от нескольких тысяч нанометров до нескольких сантиметров.

Система (1) с уравнениями связи в форме (2) описывает деформации изотропного стержня постоянного поперечного сечения. С помощью такой модели удобно анализировать общую геометрию молекулы, не касаясь вопросов внутренних взаимодействий. Как показали исследования, для задач качественного анализа геометрии во многих случаях этого оказывается достаточно [13–15]. Для задач идентификации параметров модель вида (1)–(2) может оказываться грубой, поскольку не учитывает внутренние взаимодействия. В этом случае в зависимости от выбора гипотез о свойствах сплошной среды соотношения (2) корректируются либо получаются с помощью редукции трехмерной задачи теории упругости [14–19].

Особое значение уточнение модели приобретает в связи с наличием внутримолекулярных параметров, которые могут приводить к появлению большого числа дополнительных степеней свободы. Речь идет о таких величинах, как валентные и торсионные углы [10, 16] (рис. 2, см. вторую сторону обложки).

На рис. 2 начальные значения валентного и торсионного углов обозначены соответственно α_0, φ_0 . Необходимость учета этих специфических параметров ведет к рассмотрению сплошной среды с вращательными и нецентральными взаимодействиями частиц [16–18].

Для системы (1) с уравнениями связи (2) либо их модификацией ставятся две задачи: задача выявления связи "параметры—конформация" и задача выявления связи "конформация—параметры" (задача идентификации).

Решение первой задачи можно проиллюстрировать на примере точных решений системы (1) для различной формы соотношений (2).

Решение второй задачи может опираться на методы теории наблюдения динамических систем [20–23].

Задача управления

Приведем примеры реализации общего подхода к задаче управления конформациями, развитого в работах [16–18].

Пример 1. Моделирование для случая анизотропии свойств молекулы

Пусть параметры системы (1)–(2) удовлетворяют следующим условиям:

$$e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = 0, \\ B_{22} = B_{33}, B_{ij} = 0 \ (i \neq j), \lambda_3 = 0,$$

λ_1 и λ_2 — константы, что указывает на то, что ось молекулы в естественном состоянии — винтовая линия, это соответствует наиболее часто наблюдаемой форме молекулы в естественном состоянии. Рассматриваемый случай соответствует анизотропии физических свойств молекулы с наличием плоскости упругой симметрии.

Введем безразмерные величины

$$M_1 = \lambda_2 x, M_2 = \lambda_2 y, M_3 = \lambda_2 z, \\ g = B_{22}/B_{11}, p = B_{22}P/\lambda_2^2, k = pK/\lambda_2^2, \quad (6) \\ 2h = 2B_{22}H/\lambda_2^2, \lambda_1 = r\lambda_2.$$

Рассмотрим случай, когда для постоянных, входящих в интегралы (4), (5), выполняются условия, которые с помощью безразмерных параметров (6) можно записать следующим образом:

$$p^2 = \frac{1}{(1-a^2)^4} [(b-2a(a+1))^2 + a^2(1-a)^2 n^4 + \\ + (2a(1-a)b + a^3(a+1)(a^2-3a+4))n^2]; \\ k = \frac{a(a-2)n(-b+a(a-1)n^2-(a+1)(a^2+1))}{(1-a^2)^3}; \\ 2h = \frac{2(a^2+a-1)b+a^2(1-a)(a+3)n^2+4a(a+1)}{(1-a^2)^2},$$

$$\text{где } a = \frac{1 \mp \sqrt{b^2 - b + 1}}{1 - b}, \quad n = r \frac{1 - a^2}{a^2 - a + 1}.$$

Тогда система дифференциальных уравнений (1) допускает решение, в котором основные безразмерные переменные связаны следующими равенствами [17]:

$$y = \frac{ax^2 - anx + b + 2a(a+1)}{1-a^2}; \\ z^2 = \{-a^2x^4 + 2a^2nx^3 + \\ + (-a^2n^2 - 2ab - a^2(a+1)^2)x^2 + \\ + 2an(b+a(a+1))x - b(b+2a(a+1))\}/(1-a^2)^2; \quad (7) \\ p\gamma_1 = \frac{-a(a+1)x^2 + 2an(a+1)x - b}{(1-a^2)^2}; \\ p\gamma_2 = \frac{(x-n)z}{(1-a^2)}.$$

Область изменения параметра a найдена в работе [17] и представляет собой следующие промежутки:

$$a < -1, \quad 0 < a < 1, \quad a > 2.$$

Результаты моделирования

На рис. 3 представлены результаты моделирования конформаций ДНК, соответствующих различным комбинациям параметров решения (7). Для моделирования применяли безразмерные значения параметров, которые, будучи комбинацией размерных, фактически задают целевые многообразия, на которых объект управления (молекула) сохраняет желаемую конфигурацию.

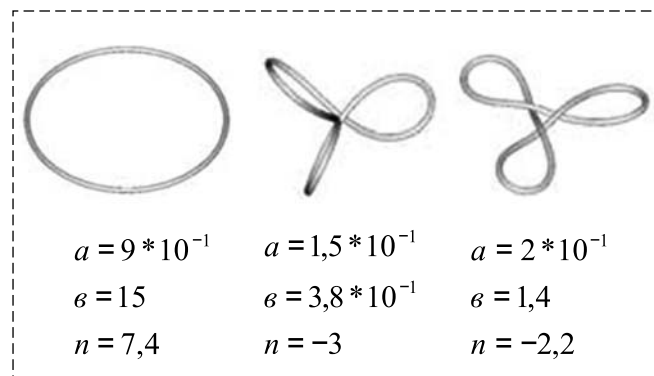


Рис. 3. Примеры конформаций ДНК и соответствующие значения безразмерных параметров

Fig. 3. Examples of DNA conformations and corresponding values of dimensionless parameters

Пример 2. Моделирование конформаций с учетом взаимодействия между кручением и растяжением молекулы

В работе [19] предложено обобщение модели (1)–(2) для случая, когда стержень обладает естественным кручением в начальном состоянии. Для ДНК это соответствует состоянию сверхспирализации. Для обобщенной модели сохраняется идеология получения безразмерных параметров в виде комбинации силовых и энергетических характеристик, а также констант инвариантов системы (1):

$$\begin{aligned}(H - B_1\omega_1^2)/2P &= h, C_1/\sqrt{2PB_2} = b, \\ K/\sqrt{2PB_2} &= \beta, B_1\omega_1/\sqrt{2PB_2} = \omega, \sqrt{B_2/2P} = n, \\ (I_P - T)/\Omega &= I, B_2/B_1 = b_1, B_1r\omega_1/P = b_2, \\ r\omega_1(I_P - T)/\Omega &= b_3.\end{aligned}\quad (8)$$

Для случая равных жесткостей на изгиб в работе [19] получено точное решение системы (1), обобщающее классическое решение Лагранжа [17]. Для краткости решение приводить не будем, остановимся на результатах моделирования конформаций молекулы в областях допустимых значений параметров этого решения (8).

Рис. 4 иллюстрирует наличие замкнутых пространственных конфигураций, обладающих значительной степенью закрученности. Применительно к молекулам ДНК этот эф-

фект демонстрирует явление сверхспирализации, присущее третичной структуре молекулы. Для сравнения на рис. 4, а приведена конфигурация, соответствующая одинаковому набору значений общих параметров и отсутствию естественной закрученности.

Пример 3. Моделирование конформаций с учетом нецентрального взаимодействия

В этом примере рассмотрим результаты моделирования, полученные в наиболее приближенных к молекулярному объекту условиях: уравнения связи в модели деформации получены редукцией трехмерной задачи теории упругости для сплошной среды с нецентральными вращательными взаимодействиями [12, 16, 18]. В частности, в работе [16] показано, что в уравнениях связи (2) появляются дополнительные слагаемые, вызванные наличием моментных напряжений в структуре вещества, и они приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned}M_1 &= B_1\omega_1 + A_1\omega_1, \\ M_2 &= B_2\omega_2 + A\omega_3, \quad M_3 = B_3\omega_3 + A\omega_2.\end{aligned}\quad (9)$$

В работе [16] найдено точное решение системы (1) с уравнениями связи (9), содержащее безразмерные параметры в виде следующих комбинаций:

$$\begin{aligned}\sqrt{B_2/2P} &= n, (2H - C)/2P = h, \\ a &= \frac{A}{B_1}, a_2 = \frac{A}{B_2}, K/\sqrt{2PB_2} = \beta.\end{aligned}\quad (10)$$

На рис. 5 приведены примеры пространственных конформаций молекул, получаемых при фиксированных значениях параметров (10).

Для иллюстрации совпадения моделируемых конформаций с конформациями реальных молекул ДНК на рис. 6 (см. вторую сторону обложки) приведены микроскопные снимки наблюдения ДНК в естественной среде.

Из рис. 6 видно, что во всех приведенных примерах моделирования можно наблюдать совпадение конформаций, наблюдаемых в естественной среде с полученными расчетным способом на

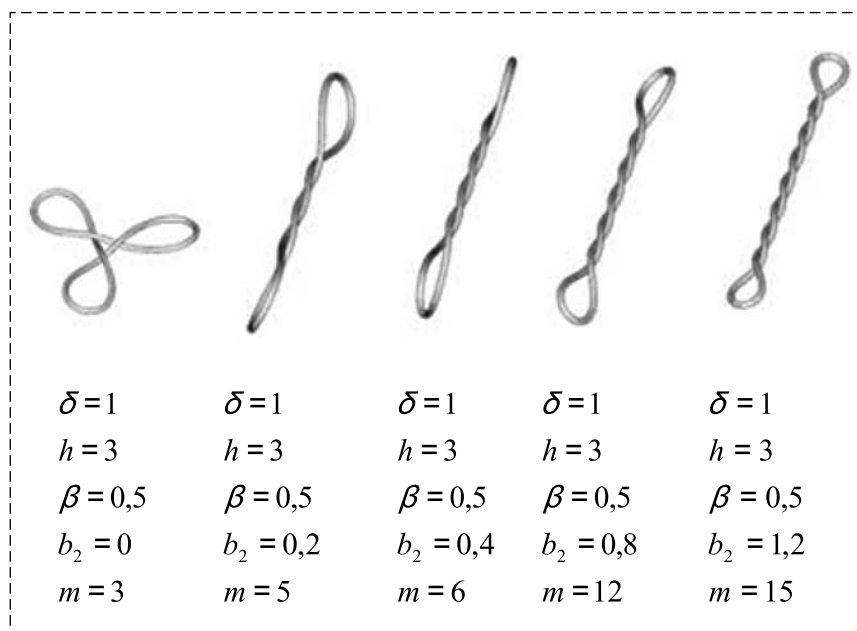


Рис. 4. Примеры конформаций ДНК и соответствующие значения безразмерных параметров

Fig. 4. Examples of DNA conformations and corresponding values of dimensionless parameters

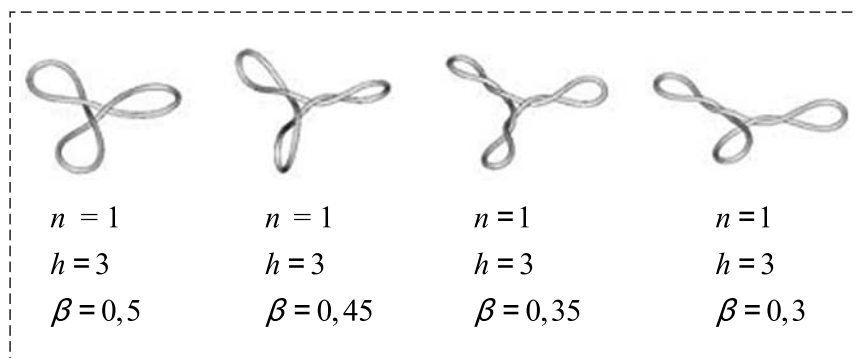


Рис. 5. Примеры конформаций ДНК и соответствующие значения безразмерных параметров

Fig. 5. Examples of DNA conformations and corresponding values of dimensionless parameters

основании данного подхода. Это указывает на возможность с помощью управления параметрами молекулы привести их в желаемую конформацию, а следовательно, в рамках рассматриваемой гипотезы о влиянии формы на свойства, и получить заданные свойства. С учетом сказанного во введении к работе, можно сделать вывод, что при переходе к размерным параметрам системы можно установить характер управляющих воздействий, переводящих ее в желаемое состояние. Другими словами, задача управления пространственными конформациями молекул принципиально разрешима.

Задача идентификации

В качестве основного подхода к решению задачи идентификации параметров молекулы предлагается использовать методы теории наблюдения динамических систем. Это связано с тем, что в большинстве случаев измерения необходимых величин либо невозможно осуществить имеющимися средствами, либо эти измерения сопряжены с большими трудностями. Последнее непосредственно касается выбранных объектов исследования, поскольку приборов, непосредственно измеряющих внутримолекулярные параметры, на сегодняшний день не существует.

Кроме того, постановка краевой задачи или задачи Коши для дифференциальных уравнений изгиба и кручения упругих стержней не всегда возможна из-за отсутствия необходимых начальных или граничных условий. В то же время могут быть известны значения какой-либо величины в нескольких точках молекулы. В этом случае возникает вопрос: нельзя ли, из-

меряя другие величины, вычислять значения нужных параметров? Ответ на него и призваны дать методы теории наблюдения [20–22].

Приведем необходимую формализацию и постановку основных видов задач идентификации.

Положение главных осей изгиба и кручения молекулы по отношению к осям $O\xi\eta\zeta$, фиксированным в пространстве, можно определить, например, с помощью углов Эйлера φ , ψ , ϑ . Кинематические формулы

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}; \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi; \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi,\end{aligned}\quad (11)$$

в которых точкой обозначена производная по дуговой координате, и геометрические соотношения

$$\gamma_1 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \gamma_2 = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta \quad (12)$$

устанавливают связь переменных γ_i , ω_i с углами Эйлера. Уравнения упругой линии (геометрической оси) молекулы с использованием углов Эйлера имеют вид

$$\xi = \sin \psi \sin \vartheta, \quad \eta = \cos \psi \sin \vartheta, \quad \zeta = \cos \vartheta, \quad (13)$$

где ξ , η , ζ — декартовы координаты точек оси молекулы.

Следуя работе [20], запишем уравнения системы (1) в компонентной форме, разрешив их относительно производных $\dot{\omega}_i$:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= b_1 \omega_2 \omega_3 + c_1 \gamma_2, \\ \dot{\omega}_2 &= b_2 \omega_1 \omega_3 - c_2 \gamma_1, \quad \dot{\omega}_3 = b_3 \omega_1 \omega_2;\end{aligned}\quad (14)$$

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 \omega_3 - \gamma_3 \omega_2, \\ \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 \omega_1 - \gamma_1 \omega_3, \quad \dot{\gamma}_3 = \gamma_1 \omega_2 - \gamma_2 \omega_1.\end{aligned}\quad (15)$$

Уравнения (11), (13), (14), в которых учтены соотношения (12), составляют полную систему уравнений, в результате интегрирования которой определяются основные параметры молекулы. Кроме того, уравнения (14), (15) являются замкнутыми и могут служить объектом самостоятельного исследования. Для полной системы уравнений или для замкнутой ее части поставим следующую задачу.

В одной или нескольких точках известны значения некоторых функций основных переменных. Возможно ли по этим значениям вычислить значения всех основных переменных в одной из точек упругой линии?

Применяя результаты теории наблюдения нелинейных динамических систем [20, 21], можно утверждать, что данная задача имеет решение, если изучаемая система дифференциальных уравнений является наблюдаемой по функциям, значения которых известны по условию задачи.

Рассмотрим параметры молекулы, идентификацию которых можно проводить по ее пространственной конфигурации.

Измерение координат

Специфической особенностью рассматриваемых задач является тот факт, что в большинстве случаев известны значения координат ξ , η , ζ на одном из концов молекулы, например, при $s = 0$ имеем $\xi(0) = 0$, $\eta(0) = 0$, $\zeta(0) = 0$, в этих случаях наблюдаемость системы (11), (14) по некоторой функции ρ от переменных ω_1 , ω_2 , ω_3 , φ , ψ , ϑ означает и наблюдаемость полной системы (11), (12), (14) по этой функции. Если же измеряемая функция ρ зависит и от переменных ξ , η , ζ , то при исследовании наблюдаемости полной системы (11), (12), (14) производные от измеряемой функции вычисляются в силу полной системы, но якобиева матрица строится только по переменным ω_1 , ω_2 , ω_3 , φ , ψ , ϑ [20, 21].

Первой рассмотрим задачу наблюдения, состоящую в измерении декартовых координат некоторых точек упругой линии молекулы. Измерение декартовых координат достаточно просто реализовать на практике, и, кроме того, именно для этих переменных записываются дифференциальные уравнения в задачах деформации стержневых систем.

Задача 1. Рассматривается система (11), (13), (14). Значения координат в любой точке упругой линии считаются неизвестными. Измеряемой функцией является $\rho = (\xi, \eta, \zeta)$. Требуется найти значения девяти величин ω_1 , ω_2 , ω_3 , φ , ψ , ϑ , ξ , η , ζ . Данная задача имеет решение, если изучаемая система является наблюдаемой [20, 21].

Задача 2. Рассматривается система (11), (13), (14). Известны значения декартовых координат на одном из концов упругой линии. Измеряемой является функция $\rho = (\xi, \eta)$. Требуется

вычислить значения девяти переменных ω_1 , ω_2 , ω_3 , φ , ψ , ϑ , ξ , η , ζ в некоторой точке упругой линии.

Как показано в работах [20, 21], для нахождения всех параметров упругой линии достаточно знать ее проекцию на горизонтальную плоскость в пяти точках.

Измерение угла поворота главных осей изгиба и кручения

Задача 3. Рассматривается система (14), (15). Измеряемой функцией служит $\rho = \omega_1/\omega_2$ — тангенс угла поворота вокруг касательной главных осей изгиба и кручения молекулы относительно естественного трехгранника. Требуется вычислить значения переменных ω_1 , ω_2 , ω_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 .

Согласно работам [20, 21] при соответствующем выборе достаточно знать значения угла поворота осей изгиба и кручения в пяти точках, чтобы по ним вычислить значения переменных ω_1 , ω_2 , ω_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 во всех точках упругой линии. Следует отметить, что экспериментально измерение угла поворота поперечного сечения является одной из простейших задач.

Задача 4. Рассматривается система (14), (15). Измеряемой функцией является квадрат кривизны $\rho = \omega_1^2 + \omega_2^2$. Требуется вычислить значения переменных ω_1 , ω_2 , ω_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 .

По аналогии с предыдущей задачей, для вычисления переменных ω_1 , ω_2 , ω_3 , γ_1 , γ_2 , γ_3 достаточно знать значения кривизны упругой линии в пяти соответствующих точках [20, 21, 23].

Заключение

В работе описаны подходы к решению задач управления конфигурациями ДНК и анализа их параметров в целях получения новых наследственных свойств, определяемых различными конфигурациями молекул. Рассмотренные примеры не исчерпывают направления исследований, связанных с оценкой возможностей влияния на конфигурации молекул, а вместе с ними в конечном счете — и на их свойства.

Список литературы

1. Франк-Каменецкий М. Д., Веденов А. А., Дыхне А. М. Переход спираль — клубок в ДНК // УФН. 1971. Т. 105, Вып. 3. С. 479—519.

2. **Benham C. J.** Elastic model of supercoiling // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1977. 74. P. 2397–2401.
3. **Hearst J. S.** Torsional rigidity of DNA and length dependence of the free energy of DNA supercoiling // *J. Mol. Biol.* 173. 1984. P. 75–91.
4. **Hunter C. A.** Sequence-dependent DNA Structure: The Role of Base Stacking Interactions // *J. Mol. Biol.* 1993. N. 230. P. 1025–1054.
5. **Frank-Kamenetskii M. D., Lukashin A. V., Anshelevich V. V.** Torsional and bending rigidity of the double helix from data on small DNA rings // *J. Biomol. Struct. Dynam.* 1985. N. 2. P. 1005–1012.
6. **Swigon D.** Configurations with self-contact in the theory of the elastic rod model for DNA. New Brunswick: Rutgers University, 1999. 255 p.
7. **Bouchiat C., Mezard M.** Elasticity model of supercoiled DNA molecule // *Phys. Rev. Lett.* 1998. N. 80. P. 1556–1559.
8. **Козлов Н. Н., Кугушев Е. И., Сабитов Д. И., Старостин Е. Л.** Компьютерный анализ процессов структурообразования нуклеиновых кислот // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2002. Т. 19, № 42.
9. **Hunter C. A.** Sequence-dependent DNA Structure // *J. Mol. Biol.* 1993. N. 231. P. 903–925.
10. **Olson W. K., Gorin A. A., Lu X.-J., Hock L. M.** DNA sequence-dependent deformability deduced from protein–DNA crystal complexes // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1998. N. 95. P. 11163–11168.
11. **Strick T. R., Croquette V.** Homologous Pairing in Stretched Supercoiled DNA // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1998. N. 95. P. 10579–10583.
12. **Илюхин А. А., Щепин Н. Н.** К моментной теории упругих стержней // *Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2001. Спецвыпуск. С. 92–94.
13. **Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.** Математический анализ условий замкнутости молекул ДНК // Матер. Междунар. XI науч.-техн. Конф. "Математические модели физических процессов". Таганрог. 2005. С. 135–143.
14. **Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.** Новый метод определения условий замкнутости молекул ДНК // *Обзорные прикладной и промышленной математики*. Москва. 2006. Т. 13, Вып. 2. С. 322–324.
15. **Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.** Математическая модель замкнутых молекул ДНК // *Известия Саратовского университета*. 2008. Т. 8. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3. С. 32–40.
16. **Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.** Микрополярная теория упругих стержней // *Известия Саратовского университета*. 2008. Т. 8. Сер. Математика. Механика. Информатика. Вып. 4. С. 27–39.
17. **Илюхин А. А.** Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. Киев: Наукова думка, 1979. 216 с.
18. **Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.** К одномерной микрополярной теории упругих стержней // *Тр. IV Всеросс. школы-семинара "Математическое моделирование и биомеханика в современном университете"*. Ростов-на-Дону. 2008. С. 49–57.
19. **Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.** Точное решение системы уравнений Кирхгофа для естественно закрученного стержня с равными жесткостями на изгиб // *Тр. XI Междунар. конференции "Современные проблемы механики сплошной среды"*. Ростов-на-Дону. 2007. С. 144–147.
20. **Горр Г. В., Илюхин А. А., Ковалев А. М., Савченко А. Я.** Нелинейный анализ поведения механических систем. Киев: Наукова думка, 1984. 288 с.
21. **Ковалев А. М.** Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наукова думка, 1980. 176 с.
22. **Ковалев А. М., Илюхин А. А.** К определению параметров оси стержня, деформированного концевыми нагрузками // *Механика твердого тела*. 1980. Вып. 12. С. 100–108.
23. **Илюхин А. А., Тимошенко Д. В.** Моделирование несимметричных микроструктур с моментными напряжениями // Матер. Первой Междунар. Конф. "Проблемы механики и управления" (РМС-2018), г. Махачкала, 16–22 сентября 2018 г. С. 161–162.

Conformation Control of DNA Molecules by Means Geometric and Physical Parameters

A. A. Ilyukhin, aleilykhin@yandex.ru,

Taganrog Institute named after A. P. Chekhov, Taganrog, 347900, Russian Federation,

D. V. Timoshenko, dmitrytim@sfedu.ru,

Southern Federal University, Taganrog, 347928, Russian Federation

*Corresponding author: Ilyukhin Aleksandr A., Professor,
Taganrog Institute named after A. P. Chekhov, Taganrog, 347900, Russian Federation,
e-mail: aleilykhin@yandex.ru*

Accepted on March 14, 2019

A conceptual approach to the problem of managing spatial configurations of DNA molecules is considered. The work is problematic in nature and is a synthesis of the authors' research in the field of modeling the behavior and structure of DNA by the methods of the mechanics of a deformable solid. The subject of research in this paper is the question of the applicability of methods of control theory to a living object by the example of a DNA molecule. The paper considers both issues of controllability on examples of the influence of the parameters of a molecule on its configuration, and questions of observability and identification of parameters of a molecule, based on the visible configuration in the natural environment. A brief review of the authors' results in terms of adaptation to the objects of research of existing and development of new mathematical models of deformable elastic objects with regard to their internal structure is given. The proposed approach is based on the concept of transition using known methods of molecular dynamics from a multi-element discrete medium to a continuum containing momentary stresses. To this end, in previous works, the authors obtained the dependence of the components of the strain tensors, force and moment stresses on various types of interatomic interaction potentials (Lennard-Jones potential, Born-Meyer potential, etc.). The need to choose as the base model of a continuum containing momentary

stresses is dictated by the peculiarities of the main object of study - nucleic acid molecules and biopolymers - which have several degrees of freedom of rotational motions. Also, as an example, we consider the case for which the reduction from the three-dimensional problem of the asymmetric theory of elasticity to a one-dimensional one was carried out by splitting the three-dimensional problem into a set of two-dimensional and one-dimensional problems. The kinematic parameters that are necessary to attract in order to obtain a closed system of equations of the one-dimensional moment theory of rods with the system of Kirchhoff's differential equations are indicated. The remaining geometrical values are found from the relations defining them. The proposed approach is consistent with current trends in the field of molecular modeling in biophysics and physico-chemical biology, and it seems promising in solving the problems of controlling genetic and biochemical processes involving DNA.

Keywords: DNA conformation management, elastic rod, identification of parameters of dynamic systems

For citation:

Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V. Conformation Control of DNA Molecules by Means Geometric and Physical Parameters, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 550—559.

DOI: 10.17587/mau.20.550-559

References

1. Frank-Kamenetsky M. D., Vedenov A. A., Dykhne A. M. The helix-coil transition in DNA, *UFN*, 1971, vol. 105, iss. 3, pp. 479—519 (in Russian).
2. Benham C. J. Elastic model of supercoiling, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1977, vol. 74, pp. 2397—2401.
3. Hearst J. S. Torsional rigidity of DNA and length dependence of the free energy of DNA supercoiling, *J. Mol. Biol.* 1984, vol. 173, pp. 75—91.
4. Hunter C. A. Sequence-dependent DNA Structure: The Role of Base Stacking Interactions, *J. Mol. Biol.*, 1993, 230, pp. 1025—1054.
5. Frank-Kamenetskii M. D., Lukashin A. V., Anshelevich V. V. Torsional and bending rigidity of the double helix from data on small DNA rings, *J. Biomol. Struct. Dynam.*, 1985, vol. 2, pp. 1005—1012.
6. Swigon D. Congurations with self-contact in the theory of the elastic rod model for DNA, New Brunswick, Rutgers University, 1999, 255 pp.
7. Bouchiat C., Mezard M. Elasticity model of supercoiled DNA molecule, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, 1998, pp. 1556—1559.
8. Kozlov N. N., Kugushev E. I., Sabitov D. I., Starostin E. L. Computer analysis of nucleic acid structure formation processes, Preprint IPM im. M. V. Keldysh RAS, 2002, vol. 19, no. 42 (in Russian).
9. Hunter C. A. Sequence-dependent DNA Structure, *J. Mol. Biol.*, 1993, no. 231, pp. 903—925.
10. Olson W. K., Gorin A. A., Lu X.-J., Hock L. M. DNA sequence-dependent deformability deduced from protein—DNA crystal complexes, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1998, no. 95, pp. 11163—11168.
11. Strick T. R., Croquette V. Homologous Pairing in Stretched Supercoiled DNA, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1998, no. 95, pp. 10579—10583.
12. Ilyukhin A. A., Shchepin N. N. To the moment theory of elastic rods, *Izvestiya VUZ. North Caucasus region. Natural Sciences*, 2001, Special edition, pp. 92—94 (in Russian).
13. Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V. Mathematical analysis of the conditions of DNA molecules closure, *Proceedings of the International XI Scientific and Technical Conference "Mathematical Models of Physical Processes"*, 2005, pp. 135—143 (in Russian).
14. Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V. New method for determining the conditions of DNA molecules closure, *Review of Applied and Industrial Mathematics*, Moscow, 2006, vol. 13, iss. 2, pp. 322—324 (in Russian).
15. Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V. Mathematical model of closed DNA molecules, *Proceedings of the Saratov University*, 2008, vol. 8, Ser. Maths. Mechanics. Computer science, iss. 3, pp. 32—40 (in Russian).
16. Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V. *News of the Saratov University*, 2008, vol. 8, Ser. Maths. Mechanics. Computer science, iss. 4, pp. 27—39 (in Russian).
17. Ilyukhin A. A. Spatial problems of the nonlinear theory of elastic rods, Kiev: Naukova Dumka, 1979, 216 p. (in Russian).
18. Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V. To the one-dimensional micropolar theory of elastic rods, *Proceedings of the IV All-Russian School-Seminar "Mathematical modeling and biomechanics in a modern university"*, Rostov-on-Don, 2008, pp. 49—57 (in Russian).
19. Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V. Exact solution of the Kirchhoff system of equations for a naturally twisted rod with equal bending stiffnesses, *Proceedings of the XI International Conference "Modern Problems of Continuum Mechanics"*, Rostov-on-Don, 2007, p. 144—147 (in Russian).
20. Gorr G. V., Ilyukhin A. A., Kovalev A. M., Savchenko A. Ya. Nonlinear analysis of the behavior of mechanical systems, Kiev, Naukova Dumka, 1984, 288 p. (in Russian).
21. Kovalev A. M. Nonlinear control and observation problems in the theory of dynamical systems, Kiev, Naukova Dumka, 1980, 176 p. (in Russian).
22. Kovalev A. M., Ilyukhin A. A. To the determination of the parameters of the axis of the rod, deformed by end loads, *Mechanics of a solid*, 1980, vol. 12, pp. 100—108 (in Russian).
23. Ilyukhin A. A., Timoshenko D. V. Simulation of asymmetric microstructures with momentary stresses, *Materials of the First International Conference "Problems of Mechanics and Control" (PMC-2018)*, Makhachkala, September 16—22, 2018, pp. 161—162 (in Russian).

С. Л. Зенкевич, д-р физ.-мат. наук, проф., **А. В. Назарова**, канд. техн. наук, avn@bmstu.ru,
Мэйсинь Чжай, аспирант, 982696853@163.com,
Научно-учебный центр "Робототехника" МГТУ им. Н. Э. Баумана

Планирование движения мобильных роботов при выполнении задач вероятностного поиска

Статья посвящена решению задач поиска цели мобильными роботами или летательными аппаратами при тушении пожаров, в поисковых операциях на земле и воде в случае аварий или стихийных бедствий. С учетом характеристик поисковой зоны и используемых датчиков созданы две вероятностные модели. Первая — плотность распределения вероятности нахождения цели, вторая — условная вероятность обнаружения цели датчиком в зависимости от расстояния между датчиком и исследуемой точкой, в которой находится цель. На основе этих моделей проанализированы параметры и процедура поиска и получено соотношение между вероятностью обнаружения цели, временем поиска и другими параметрами. Основное отличие предложенного подхода от известных заключается в том, что оптимизация полученных соотношений приводит к оптимальному распределению времени в процессе поиска и, в результате, к повышению вероятности обнаружения цели. В процессе исследований, в первую очередь, рассмотрен случай, когда распределение вероятности нахождения цели в поисковой зоне имеет дискретный вид (сетевая карта), и получена формула вероятности обнаружения цели при дискретном и непрерывном исследовании датчиком. С использованием метода множителей Лагранжа и динамического планирования данная формула максимизирована, что позволило получить оптимальное распределение поискового времени в каждой ячейке. Далее на основе полученного результата исследование расширено до непрерывного распределения вероятности нахождения цели в поисковой зоне, в результате получен функционал вероятности обнаружения цели от времени поиска, плотности распределения вероятности нахождения цели и траектории поиска (скорости). Этот функционал при заданном времени поиска и плотности распределения вероятности нахождения цели позволяет получить оптимальное управление (траекторию и скорость). Приведены результаты моделирования, подтверждающие работоспособность предложенного метода поиска. Показано, что чем больше вероятность нахождения цели в исследуемой точке и чем меньше скорость движения агента, тем больше вероятность обнаружения цели. При некоторых значениях параметров поиска разница в вероятностях обнаружения цели достигает 75,3 %.

Ключевые слова: поиск цели, теория вероятности, планирование траектории, оптимальное распределение, условная вероятность

Введение

Задачи покрытия и поиска в сфере робототехники разрабатываются в целях применения в самых разных областях, например, для тушения пожаров и при поисковых операциях, выполняемых не только в воздухе и на земле, но и в воде. Сутью задачи покрытия и поиска является то, что агенты должны сканировать всю поисковую зону, избегая при этом повторных поисков и затрачивая минимальное время на обнаружение целей с большой вероятностью. Кроме того, важно учитывать характеристики датчиков и поисковой зоны в каждой конкретной задаче. Таким образом, очевидна необходимость оптимального планирования траектории и скорости движения агентов.

Алгоритмы покрытия и поиска были предметом обсуждения многих ученых [1], особенно остро их интересовал вопрос планирования траекторий. Но недостатком существующих работ является то, что в них лишь объясняется, по каким траекториям должны двигаться роботы, чтобы покрыть всю поисковую зону, а вопросы оптимальных скоростей и вероятности нахождения целей с учетом характеристик датчиков и поисковой зоны освещались мало. В статьях [2, 3] предложен очень распространенный в настоящее время метод поиска, в основе которого лежат теории Байеса и Гаусса. Преимущество этого метода состоит в том, что на каждой итерации обновляются вероятностная карта и вероятность распределения целей. В то же время движения агентов планируются

таким образом, чтобы они стремились двигаться в направлении, в котором вероятность нахождения целей выше и которое обеспечивает более высокую скорость решения задачи поиска несколькими кооперативными агентами. Однако этот метод не помогает избежать повторных поисков и отсканировать поисковую зону целиком. Кроме того, его недостатком является необходимость больших вычислений в процессе итераций.

В данной работе рассматривается подход к поиску целей в зоне одним агентом на основе теории вероятности, плотности распределения вероятностей нахождения цели и условной вероятности ее обнаружения. Цель работы состоит в получении соотношений, связывающих вероятность обнаружения цели и траекторию движения агента.

Постановка задачи

На основе сказанного выше мы поставим следующую задачу: агент, в данной статье — беспилотный летательный аппарат (БПЛА), выполняет задачу обнаружения цели в плоскости известных размеров. Задачей агента является сканирование всей поисковой зоны за заданное время и нахождение вероятности обнаружения цели.

Создание вероятностных моделей поиска

Пусть имеется карта местности $L_x \times L_y$, на которой находится цель. Для каждой точки (x, y) на карте имеется априорная информация о плотности распределения вероятности нахождения цели в ней $\rho(x, y)$, причем суммарная вероятность нахождения цели на карте равна

$$\iint \rho(x, y) dx dy \leq 1. \quad (1)$$

Дискретизируем непрерывную карту сеткой размером $M \times N$, где M — число строк разбиения, а N — число столбцов. Для каждой ячейки сетки (m, n) легко находится вероятность нахождения цели $c(m, n)$. Суммарная вероятность нахождения цели на сетевой карте равна

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c(m, n) \leq 1. \quad (2)$$

Пусть параметры поиска (высота полета и т. д.) остаются постоянными, и агент ищет цель с помощью радиолокатора, гидролокатора и т. д. При этом существуют две возможности: (1) датчик при любом элементарном наблюдении может обнаружить цель, эти элементарные наблюдения следуют через две-три минуты одно за другим; (2) датчик может вести непрерывные наблюдения: примером является визуальное наблюдение.

В случае дискретных наблюдений имеет значение: условная вероятность обнаружения цели при условии, что цель находится в области видимости датчика, при одном просмотре записывается как s , зависящая от характеристики и среднего расстояния между датчиками и целью. При рассмотрении случая непрерывного поиска: каждый просмотр занимает малое время Δt , при этом условная вероятность обнаружения цели в ячейке равна $s = \alpha \Delta t$, α зависит от характеристики и среднего расстояния между датчиками и целью.

Точнее, вероятность обнаружения целей — это непрерывная убывающая функция расстояния между датчиками и целями [4, 5]: $s(z_k | d_k) = \lambda(d_k)$, показана на рис. 1, где наблюдение z_k — бинарный параметр: $z_k \in \{1, 0\}$, 1 означает обнаружение цели, а 0 — необнаружение; d_k — расстояние между датчиками и целями; P_D — вероятность обнаружения датчика (учитывает неопределенности наблюдения $P_D \in [0, 1]$); P_F — вероятность ложной тревоги датчика, $P_F \in [0, 1]$; d_{in} — наибольшее расстоя-

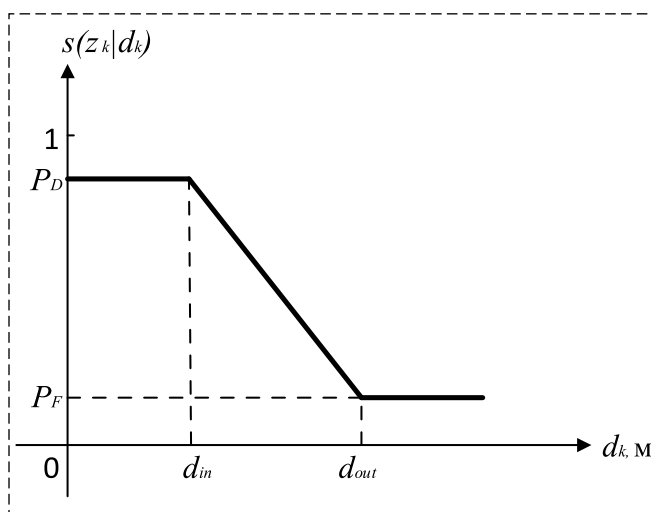


Рис. 1. Условная вероятность обнаружения цели
Fig. 1. Conditional probability of target detection (approximate relationship between probability of detection and distance)

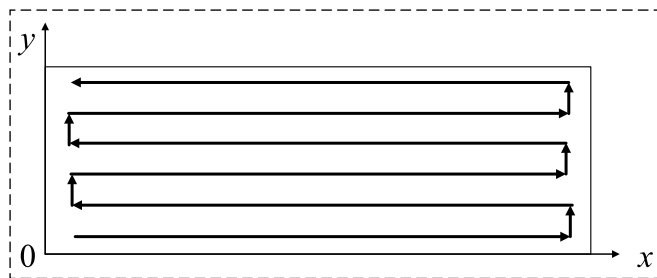


Рис. 2. Метод поиска в плоскости
Fig. 2. The search method of robot in the plane

ние, с которого датчик наблюдает цель с вероятностью P_D ; d_{out} — наименьшее расстояние, начиная с которого датчик не может обнаружить цель, но сообщает, что она существует с вероятностью P_F (ложная тревога датчика). Тогда [6],

$$s(z_k | d_k) = \begin{cases} P_D & \text{при } d_k < d_{in}; \\ P_D - \frac{(P_D - P_F)(d_k - d_{in})}{d_{out} - d_{in}} & \text{при } d_{in} \leq d_k \leq d_{out}; \\ P_F & \text{при } d_k > d_{out}. \end{cases} \quad (3)$$

Пусть T — время, отпущенное на поиск; P_T — вероятность обнаружения цели за время T , r_t является траекторией поиска. На основе знания P_T требуется проанализировать параметры и процедуру поиска, точнее, найти

$$P_T = P_T(r_t, \rho(x, y), T). \quad (4)$$

В случае поисково-спасательной ситуации необходимо обследовать всю зону поиска (плоскость) или ее часть. В связи с этим агент может летать, например, по параллельным линиям, как показано на рис. 2.

Исследование процесса поиска с использованием теории вероятности

Основываясь на анализе приведенных выше моделей и целевой функции (4), делаем вывод, что важной задачей является нахождение вероятности поиска. В этой задаче имеются два известных вероятностных параметра: плотность распределения вероятности нахождения цели $\rho(x, y)$ в точке (x, y) и вероятность обнаружения датчиком цели за один просмотр при условии, что цель находится в данной точке. Обозначим этот параметр $s = \alpha \Delta t$. В этом разделе сначала рассмотрим случай, когда агент исследует одну

ячейку, затем несколько ячеек, а далее рассмотрим случай, когда агент исследует плоскость непрерывно.

1. Агент исследует одну ячейку.

А. Пусть разыскиваемый объект (цель) находится в некоторой ячейке, при этом c — вероятность нахождения цели в ячейке, s — условная вероятность обнаружения цели за один просмотр при условии, что цель находится в ячейке.

Тогда вероятность обнаружения цели за один просмотр равна $P_1 = cs$.

Пусть теперь датчик осуществляет n просмотров одной ячейки. Тогда вероятность обнаружить цель за один из n просмотров составляет

$P_n = \{\text{вероятность обнаружения за 1-й просмотр}\} \text{ ИЛИ } \{(\text{вероятность не обнаружения за 1-й просмотр}) \text{ И (обнаружение за 2-й просмотр)} \text{ ИЛИ... } \{ \text{вероятность не обнаружения с 1-го до } (n-1)\text{-го просмотра} \} \text{ И (обнаружение за } n\text{-й просмотр)} \}$

т. е.

$$P_n = cs + (1-s)cs + (1-s)^2cs + \dots + (1-s)^{n-1}cs = c(1 - (1-s)^n). \quad (5)$$

Сделаем здесь три замечания:

- 1) очевидно, что $P_n \rightarrow c$ при $n \rightarrow +\infty$;
- 2) вероятностные характеристики датчиков и цели разделены;
- 3) нетрудно получить рекуррентные соотношения для P_n . Действительно, из (5) следует:

$$\frac{P_{i+1}}{c} = \frac{P_i}{c} + \left(1 - \frac{P_i}{c}\right)s,$$

откуда

$$P_{i+1} = (1-s)P_i + cs, P_0 = 0, i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Б. Рассмотрим теперь непрерывный случай. Сделаем следующие допущения:

- 1) каждый просмотр ячейки занимает малое время h ;
- 2) условная вероятность обнаружения цели за время h есть $s = \alpha h$ (α — характеристика датчика, которая зависит от расстояния между датчиками и целью).

Тогда из соотношения (6) следует: $P_{t+h} = (1 - \alpha h) P_t + c \alpha h$, откуда при $h \rightarrow 0$ имеем: $\dot{P}_t = -\alpha h P_t + c \alpha$, или $\dot{P}_t = \alpha (c - P_t)$, $P_0 = 0$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$P_t = c(1 - e^{-\alpha t}), \quad (7)$$

где P_t — вероятность обнаружить цель в ячейке за время t , т. е. это функция распределения вероятности обнаружения цели в зависимости от времени. График P_t представлен на рис. 3.

В. Пусть теперь в процессе наблюдения вероятность нахождения цели в ячейке меняется во время просмотров.

Тогда выражение (5) имеет вид

$$P_n = c_1 s + (1 - s) c_2 s + (1 - s)^2 c_3 s + \dots \dots + (1 - s)^{n-1} c_n s, \quad (8)$$

где c_i — вероятность того, что цель находится в ячейке во время i -го измерения.

Очевидно, что соответствующее выражению (8) рекуррентное соотношение имеет вид

$$P_{n+1} = P_n + (1 - s)^n s c_{n+1}, P_0 = 0. \quad (9)$$

Обозначим $Q_n = (1 - s)^n$, тогда рекуррентные соотношения для (9) имеют вид

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + Q_n s c_{n+1}, P_0 = 0; \\ Q_{t+h} = Q_t (1 - s), Q_0 = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Г. Теперь рассмотрим непрерывный процесс. Пусть, по-прежнему, просмотры ячейки

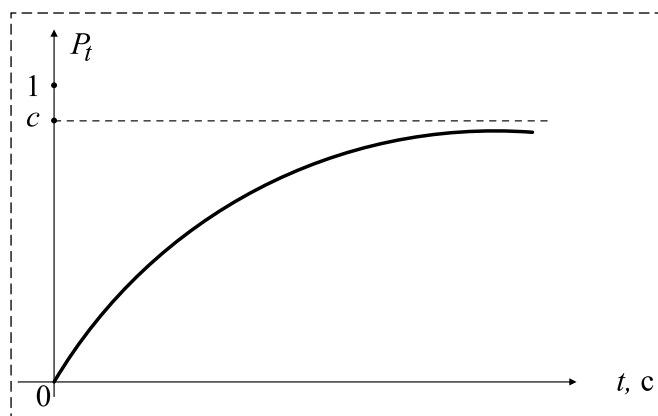


Рис. 3. Функция распределения вероятности обнаружения цели от времени

Fig. 3. The distribution function of target detection probability over time

требуют времени t , каждый просмотр занимает малое время h , при этом условная вероятность обнаружения цели в ячейке равна $s = \alpha_t h$, а вероятность нахождения цели в ячейке зависит от времени: $c = c_t$. Тогда уравнения (10) примут вид

$$\begin{cases} P_{t+h} = P_t + Q_t c_t \alpha_t h; \\ Q_{t+h} = Q_t (1 - \alpha_t h), \end{cases}$$

и соответствующие дифференциальные уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{P}_t = Q_t c_t \alpha_t, P_0 = 0; \\ \dot{Q}_t = -\alpha_t Q_t, Q_0 = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Допустим, что $\alpha_t = \alpha = \text{const}$, тогда из второго уравнения (11) следует $Q_t = e^{-\alpha t}$, для P_t :

$$\dot{P}_t = e^{-\alpha t} c_t \alpha, P_0 = 0. \quad (12)$$

Решением (12) является

$$P_t = \alpha \int_0^t c_t e^{-\alpha t} dt. \quad (13)$$

2. Агент исследует несколько ячеек

А. Рассмотрим случай, когда датчик осматривает k ячеек, в одной из которых может находиться цель (рис. 4).

Пусть c_i — вероятность нахождения цели в i -й ячейке, c_i не зависит от числа сделанных датчиком просмотров, т. е. цель неподвижна, $\sum c_i \leq 1$; s — по-прежнему условная вероятность обнаружения цели при условии, что цель находится в исследуемой ячейке (характеристика датчика); n_i — число просмотров датчиком i -й ячейки.

Нетрудно увидеть, что вероятность обнаружения цели после $n = \sum_{i=1}^K n_i$ просмотров K ячеек имеет вид

$$P_K^n = \sum_{i=1}^K c_i (1 - (1 - s)^{n_i}), \quad (14)$$

при этом, естественно, $\sum_{i=1}^K c_i \leq 1$.

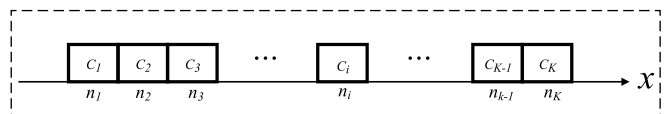


Рис. 4. Модель обнаружения цели

Fig. 4. Target detection model

Б. Пусть теперь датчик осматривает те же ячейки, каждую в течение времени t_i , как показано на рис. 4. Тогда вероятность обнаружить цель, по крайней мере, в одной из ячеек за время $T = \sum_{i=1}^K t_i$ имеет вид

$$P_K^T = \sum_{i=1}^K c_i (1 - e^{-\alpha t_i}). \quad (15)$$

Ясно, что вероятность P_K^T не зависит от порядка просмотра ячеек, но зависит от распределения времени осмотра ячеек.

Будем теперь искать $\{t_i\}$, максимизирующие P_K^T при условии, что $T = \sum_{i=1}^K t_i$ — время, отпущенное на поиск. Это простая задача на поиск условного экстремума. Введем обозначения $\tilde{P}_K^T = P_K^T - \lambda \left(\sum_{i=1}^K t_i - T \right)$. Необходимые условия экстремума имеют вид

$$\begin{cases} \tilde{P}_{K_{t_i}}^T = c_i (\alpha e^{-\alpha t_i}) - \lambda = 0; \\ \tilde{P}_{K_\lambda}^T = \sum_{i=1}^K t_i - T = 0, i = 1, 2, \dots, K. \end{cases} \quad (16)$$

Уравнения (16) представляют собой систему $K + 1$ уравнений из $K + 1$ неизвестных $t_1, t_2, t_3, \dots, t_K, \lambda$. Ее решением являются значения времени наблюдения за каждой из ячеек:

$$t_i = \frac{T}{K} - \frac{1}{\alpha K} \sum_{j=1}^K \ln \frac{c_j}{c_i}, c_i > 0, i = 1, 2, \dots, K, \quad (17)$$

первый член в этом выражении обозначает среднее время осмотра i -й ячейки, а второй — предпочтение, отдаваемое ячейке с большей вероятностью нахождения в ней цели. Нетрудно также проверить, что условие $T = \sum_{i=1}^K t_i$ выполнено. Заметим, что если $c_i = c = \text{const}$, то время наблюдения распределяется между всеми ячейками поровну $t_i = T/K$, что кажется естественным.

Сделаем одно замечание. Использование известного метода условного экстремума (метод множителей Лагранжа) предполагает наличие ограничений в виде равенств (в нашем случае: $\sum_{i=1}^K t_i = T$). Однако этот метод может привести к физически недопустимым результатам: например, некоторые из результатов могут оказаться отрицательными или нулевыми ($t_i \leq 0$).

Добавление ограничений в виде неравенств (в нашем случае $t_i > 0$) существенно усложняет процедуру поиска. Рассмотрим тогда решение этой проблемы, состоящее в поиске ограничений на параметры, входящие в выражения для оптимальных времен t_i , т. е. T, K, α, c_i , обеспечивающих положительность параметров t_i . Имеем:

$$t_i = \frac{T}{K} - \frac{1}{\alpha} \ln(c_1 c_2 \dots c_K)^{1/K} + \frac{1}{\alpha} \ln c_i.$$

В силу неравенства Коши

$$(a_1 a_2 \dots a_K)^{1/K} \leq \frac{1}{K} (a_1 + a_2 + \dots + a_K)$$

имеем

$$t_i \geq \frac{T}{K} + \frac{1}{\alpha} \ln(K c_i).$$

Таким образом, окончательно имеем следующее ограничение на параметры: $\frac{T}{K} + \frac{1}{\alpha} \ln(K c_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, K$. Здесь параметр T/K означает среднее время, затрачиваемое на осмотр одной ячейки, а параметр $1/\alpha$ — аналог постоянной времени эквивалентного апериодического звена, описывающего работу бортового датчика.

Ясно, что непосредственное использование соотношения $\frac{T}{K} + \frac{1}{\alpha} \ln(K c_i) > 0$ является неприемлемым, поскольку может потребовать изменения параметров для каждой ячейки. Для того чтобы решить эту проблему, воспользуемся следующим подходом. Обозначим $c^* = \min c_i$, тогда имеем: $\frac{T}{K} + \frac{1}{\alpha} \ln(K c^*) > 0$, что и является окончательным результатом исследования.

В. Рассмотрим теперь развитие предыдущей задачи. Пусть агент движется вдоль оси x , осматривая последовательно одну за другой небольшие ячейки, в которых может располагаться цель. Вероятное положение цели задается стационарной плоскостью распределения. Проблема состоит в нахождении скорости движения агента, обеспечивающей максимум вероятности обнаружения цели за заданное время. Рассмотрим сначала дискретный вариант задачи.

Пусть во время ϵ_k датчик находится в ячейке k и просматривает ячейки от k до $k + L - 1$, уже просмотрев до этого ячейки от 1 до $k - 1$ (рис. 5, см. третью сторону обложки).

Здесь вероятности нахождения цели в ячейках обозначены $c_k, c_{k+1}, \dots, c_{k+L-1}$ (мы по-прежнему считаем цель неподвижной), где k — номер ячейки; ε_k — время нахождения датчика над ячейкой k . Обозначим P_k вероятность того, что до ячейки k цель будет найдена. Тогда нетрудно увидеть, что для P_k верно следующее рекуррентное соотношение:

$$P_{k+1} = P_k + (1 - P_k)(1 - e^{-\alpha \varepsilon_{k+1}}) \sum_{i=k+1}^{k+L} c_i, P_0 = 0.$$

Учитывая, что времена ε_i малы, имеем

$$P_{k+1} = P_k + (1 - P_k)\alpha \varepsilon_{k+1} \sum_{i=k+1}^{k+L} c_i, P_0 = 0. \quad (18)$$

Непрерывный аналог последнего соотношения (18) имеет вид

$$P_{t+\varepsilon_t} = P_t + (1 - P_t)\alpha \varepsilon_t \int_{x_t}^{x_t+L} \rho(z) dz, \quad (19)$$

где ε_t — малое время прохождения агентом ячейки; z — положение исследуемой точки вдоль оси x ; $\rho(z)$ — плотность распределения вероятности нахождения цели; x_t — положение датчика вдоль оси x в момент времени t ; α — условная вероятность обнаружения цели; L — диапазон сканирования датчиков за один просмотр.

Из последнего соотношения нетрудно получить дифференциальное уравнение относительно P_t :

$$\dot{P}_t = (1 - P_t)\alpha \int_{x_t}^{x_t+L} \rho(z) dz, \rho(0) = 0, \quad (20)$$

решением которого является выражение

$$P_t = 1 - e^{-\alpha \int_0^t \int_{x_t}^{x_t+L} \rho(z) dz dt}. \quad (21)$$

Если обозначить вероятность нахождения цели в области видимости датчика, находящегося в момент времени t в точке x_t , как

$$Q_t = \int_{x_t}^{x_t+L} \alpha \rho(z) dz,$$

то соотношение (21) примет вид

$$P_t = 1 - e^{-\int_0^t Q_\tau d\tau}. \quad (22)$$

Максимум P_t в каждый момент времени t достигается тогда, когда максимума в момент t достигнет функция

$$\int_0^t Q_\tau d\tau = \int_0^t \int_{x_\tau}^{x_\tau+L} \alpha \rho(z) dz d\tau. \quad (23)$$

Рассматриваемая задача оптимального поиска состоит в выборе x_t , максимизирующего выражение (23) с учетом соответствующих динамических свойств объекта, несущего на борту датчик обнаружения цели.

Моделирование

Пусть в плоскости находятся $n \times n$ дискретных ячеек, в одной из которых может находиться цель. Вероятность того, что цель находится в определенной ячейке i , равна $c_i, i = 1, 2, \dots, n \times n$, и $c_1 + c_2 + \dots + c_{n \times n} = 1$, время поиска T . Для нахождения оптимального времени поиска цели в каждой ячейке используются формулы (14)–(17). Результат моделирования при $n = 20$, $T = 400$ с, $\alpha = 0,5$, размере ячейки 1×1 м² показан на рис. 6 (см. третью сторону обложки).

На рис. 6, а вероятность нахождения цели в ячейке представляет собой параболу. Тогда максимальная вероятность обнаружения цели равна 0,4025. Если время поиска равномерно распределяется по каждой ячейке, тогда вероятность обнаружения цели 0,3935. На рис. 6, б показаны результат оптимального распределения времени и средняя скорость в каждой ячейке, где сплошная линия соответствует распределению времени, а штриховая — распределению скорости.

На рис. 6, в вероятность нахождения цели в ячейке представляет собой прямую линию. Тогда вероятность обнаружения цели равна 0,4050; если время поиска равномерно распределяется по каждой ячейке, тогда вероятность обнаружения цели 0,3935. На рис. 6, г показаны результат оптимального распределения времени и средняя скорость в каждой ячейке (сплошная линия соответствует распределению времени, штриховая — распределению скорости).

В случае, когда n велико, следует воспользоваться соотношениями (21)–(23).

Из рис. 6 (см. третью сторону обложки) нетрудно видеть, что чем больше вероятность на-

хождения цели в ячейке и чем меньше скорость движения агента, тем больше вероятность обнаружения цели.

Однако на рис. 6 разница между двумя методами не слишком заметна из-за того, что время поиска достаточно велико. На рис. 7 (см. третью сторону обложки) показаны вероятности нахождения цели при разных временах поиска с помощью предлагаемого метода и метода равномерного распределения времени между ячейками.

Из рис. 7 нетрудно видеть, что если время поиска слишком маленькое или большое, тогда вероятности обнаружения цели либо малы, либо велики, разница между двумя методами небольшая. Когда время поиска среднее, например, около 320 с, тогда разница в вероятностях обнаружения цели достигает 75,3 %. Предлагаемый метод показал свое преимущество перед известными методами.

Заключение

В работе предложен и исследован метод поиска цели и покрытия зоны поиска мобильным роботом с учетом характеристик датчиков и особенностей поисковой зоны. Метод основан на использовании теории вероятности, плотности распределения вероятностей, а также условной вероятности, из которых выведены

формулы вероятности нахождения цели, оптимизирующие скорость поиска. Проведенное моделирование подтверждает правомерность предложенного подхода.

Дальнейшее направление исследований авторы видят в расширении области поиска на прямоугольные зоны с препятствиями, выполнении распределенного кооперативного поиска целей несколькими роботами, а также в нахождении нескольких целей в наблюдаемой зоне.

Список литературы

1. Инзарцев А. В., Багницкий А. В. Планирование и реализация траекторий движения автономного подводного робота при выполнении мониторинга в акваториях различных типов // Подводные исследования и робототехника. 2016. № 2(22). С. 25—35.
2. Yoonchang Sung, Pratap Tokekar. Algorithm for Searching and Tracking an Unknown and Varying Number of Mobile Targets using a Limited FoV Sensor // 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2017. Singapore, May 29-June 3.
3. Frederic Bourgault, Tomonari Furukawa, Hugh F. Coordinated Decentralized Search for a Lost Target in a Bayesian World // International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2003. Las Vegas, Nevada, October.
4. Anxing Shan, Xianghua Xu, Zongmao Cheng. Target Coverage in Wireless Sensor Networks with Probabilistic Sensors // Sensors (Basel). 2016. № 16(9). С. 1372—1393.
5. Wang B. Coverage problems in sensor networks: A survey // ACM Computing Surveys. 2011. № 43(4). С. 32—51.
6. Kamrani F. Using on-line simulation in UAV pathing planning // 2007 Winter Simulation Conference. 2007. Washington. DC. USA. December 9—12.
7. William Feller. An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. 1. M.: Wiley. 3rd Edition. 1968.

The Movement Planning of Mobile Robots in Performing Search Task Based on Probability Theory

S. L. Zenkevich, zenkev@bmstu.ru, **A. V. Nazarova**, avn@bmstu.ru, **Meixin Zhai**, 982696853@163.com, Robotics Training-Research Center, Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

Corresponding author: **Meixin Zhai**, Ph.D., Robotics Training-Research Center, Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation, e-mail: 982696853@163.com

Accepted on May 15, 2019

Abstract

The article is devoted to the development of searching and covering task in different areas, for example, for extinguishing fires, during search operations in the air, on the ground, etc. Two probabilistic models were created based on the characteristics of the sensors and the search zone, that is, the probability density of the target position and the conditional probability of detecting the target by the sensor under the conditions that the target is at the point of observation (depending on the distance between the sensor and the point of observation). Based on these models, the parameters and the search procedure were analyzed; more precisely, the relationship and formulas between the target detection probability, the search time and other parameters were found. The main difference of the proposed research lies in the fact that by optimizing the obtained relations and formulas it is possible to obtain an optimal distribution of time in the search process, as a result, to increase the probability of target detection. In the research process, at first, the case where the distribution probability of

target position in the search area represents a discrete form (network map) is investigated, then a formula for the probability of target detection in a discrete and continuous probe is obtained. Using the method of Lagrange multipliers and dynamic programming, the optimal distribution of search time in each cell was obtained. Further, according to the result obtained, the study was expanded to a continuous distribution probability of target position in the search area, the functional probability of detecting the target of search time, probability density of target and the search trajectory (velocity) was derived. As a result of solving this functional, for a given search time and probability density distribution of target, optimal control (trajectory and speed) was obtained. The simulation confirmed the efficiency of the proposed search method. The simulation result shows that the greater the probability density of target and the slower the agent's movement speed, the greater the probability of target detection, for some values of the search parameters, the difference in probabilities of target detection reaches 75.3 %.

Keywords: search target, probability theory, movement planning, optimal distribution, conditional probability

For citation:

Zenkevich S. L., Nazarova A. V., Meixin Zhai. The Movement Planning of Mobile Robots in Performing Search Task Based on Probability Theory, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 560—567.

DOI: 10.17587/mau.20.560-567

References

1. **Inzartsev A. V., Bagnitsky A. V.** The trajectories planning and implementation of autonomous underwater robot of performing monitoring in different types of waters, *Underwater Research and Robotics*, 2016, no. 2(22), pp. 25—35 (in Russian).

2. **Yoonchang Sung, Pratap Tokekar.** Algorithm for Searching and Tracking an Unknown and Varying Number of Mobile Targets

using a Limited FoV Sensor, *2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2017, Singapore May 29-June 3.

3. **Frederic Bourgault, Tomonari Furukawa, Hugh F.** Coordinated Decentralized Search for a Lost Target in a Bayesian World, *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2003, Las Vegas, Nevada, October.

4. **Anxing Shan, Xianghua Xu, Zongmao Cheng.** Target Coverage in Wireless Sensor Networks with Probabilistic Sensors. *Sensors (Basel)*, 2016, no. 16(9), pp. 1372—1393.

5. **Wang B.** Coverage problems in sensor networks: A survey, *ACM Computing Surveys*, 2011, no. 43(4), pp. 32-51.

6. **Kamrani F.** Using on-line simulation in UAV pathing planning, *2007 Winter Simulation Conference*, 2007, Washington, DC, USA, December 9—12.

7. **William Feller.** An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. 1, Moscow, Wiley, 1968.



27 ноября 2019 г. в ГК «ИЗМАЙЛОВО» (г. Москва) состоится

Десятая Межотраслевая конференция «АВТОМАТИЗАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВА-2019»,

посвященная демонстрации современных программ, приборов, систем и решений
для автоматизации предприятий энергетики, машиностроения, металлургии,
химической, нефтегазовой, цементной и других отраслей промышленности.

Темы докладов конференции

- Актуальные задачи автоматизации в промышленности
- Информационно-управляющие системы промышленной автоматизации (АСУ ТП, АСОДУ, ERP, CRM, MES, АСКУЭ, ПАЗ, РЗА, SCADA и др.)
- Опыт внедрения различных информационных систем на предприятиях машиностроения, энергетики, металлургии, нефтегазовой, оборонной и др. отраслей промышленности
- Теория и практика управления информационной безопасностью промышленных предприятий
- Отечественные и зарубежные контрольно-измерительные приборы
- Автоматизация электроснабжения промышленных предприятий. Системы энергоменеджмента
- Программные средства поддержки проектирования, измерений и испытаний
- Системы управления нормативно-справочной информацией

Контактная информация:

тел.: + 7 (905) 567-8767; e-mail: admin@intecheco.ru

А. А. Большаков, д-р техн. наук, проф., aabolshakov57@gmail.com,

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург,

А. А. Кулик, канд. техн. наук, инженер-системотехник I кат., kulikalekse@yandex.ru,

ОАО "Конструкторское бюро промышленной автоматики", г. Саратов

Исследование комплексной системы управления летательного аппарата вертолетного типа при отказах бортового оборудования

Рассматривается комплексная система управления летательным аппаратом вертолетного типа, приводится описание ее проектирования в зависимости от требований, предъявляемых к летательному аппарату, и взаимодействия с сопрягаемым бортовым оборудованием. Основными элементами исследуемой системы являются подсистемы дистанционного и автоматического управления вертолетом. В процессе разработки подобной системы большое внимание уделяется обеспечению высокого уровня их надежности и сохранению функций, необходимых для безопасного завершения полета. Поэтому основным требованием, предъявляемым к комплексной системе управления, является вероятность ее отказа при резервном управлении с улучшением устойчивости объекта управления не выше 10^{-9} . Проведен анализ комплексной системы управления на отказобезопасность в условиях отказа элементов, входящих в ее состав. В процессе анализа проведена оценка отказобезопасности подсистем дистанционного и автоматического управления. При этом для каждой системы рассматривалось влияние явных и не явных отказов на изменение управляемости летательного аппарата и на безопасность его полета. Также выполнен анализ системы в условиях отказа бортового оборудования аппарата. Особое внимание в работе уделяется исследованию динамики исполнительного механизма системы в условиях отказа бортовой системы гидравлического питания. Приведены результаты исследований изменения усилия, скорости и добротности электрогидравлического привода при различных отказах линий гидравлического питания на борту летательного аппарата. Полученные результаты могут быть использованы в процессе проектирования комплексных систем управления, при исследовании электрогидравлических приводов и при разработке способов парирования последствий отказов бортового оборудования вертолета относительно комплексной системы управления, в том числе при создании алгоритмов реконфигурации системы и логики контроля функционирования ее элементов.

Ключевые слова: летательный аппарат, комплексная система управления, безопасность полета

Введение

В последние годы активное развитие электроники и вычислительной техники [1] в значительной степени оказало влияние на создание новых систем управления летательными аппаратами. Одной из них является комплексная система управления летательным аппаратом вертолетного типа, предназначенная для снижения рабочей нагрузки пилота, повышения безопасности и эффективности управления аппаратом. Первоначально комплексные системы управления (КСУ) разрабатывались для самолетов военного и гражданского назначения. Однако в настоящее время комплексными и электродистанционными системами управления стали оснащаться летательные аппараты вертолетного типа, такие как RAH-66, NH-90, S-92F, Bell 525, Ансат [2-6].

Как правило, КСУ содержат подсистемы ручного и автоматического управления. Также в КСУ могут использоваться системы ограничивающих сигналов и интеллектуальной поддержки экипажа [7]. Особенностью КСУ является исключение механической проводки управления летательным аппаратом, что достигается передачей электрических сигналов управления на исполнительные механизмы его рулевых поверхностей. Наряду с этим КСУ способна реализовать повышенные требования к устойчивости и управляемости вертолетом, что достигается обеспечением необходимых типов реакций на управляющее воздействие пилота при различных скоростях и режимах полета вертолета.

К основным типам реакций объекта управления относятся:

- управление по поступательной скорости со стабилизацией углов крена и тангажа;

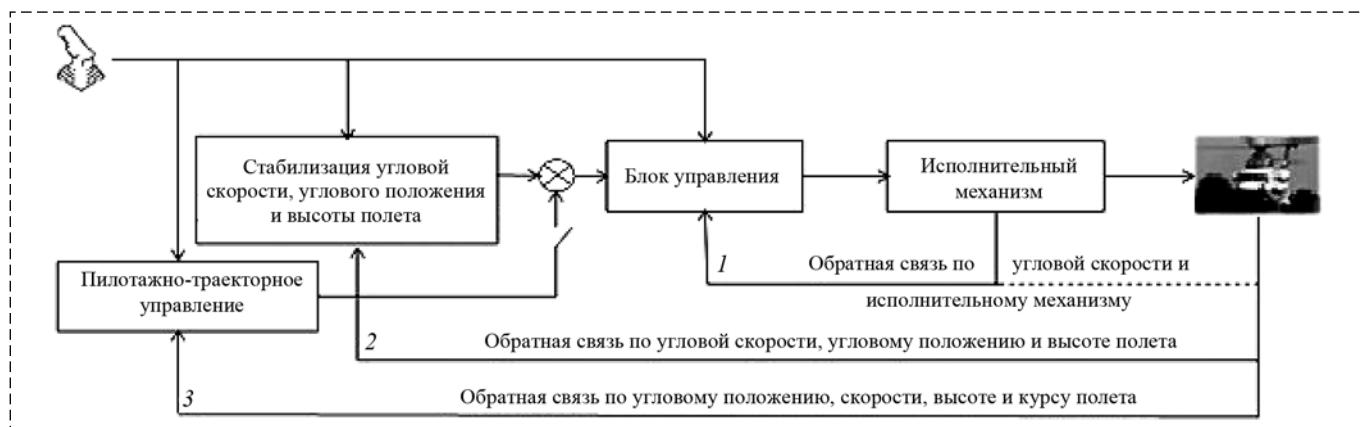


Рис. 1. Обобщенная структурная схема комплексной системы управления вертолетом

Fig. 1. The structural scheme of the helicopter's complex control system

- стабилизация продольно-поперечной скорости полета;
- управление по угловой скорости со стабилизацией приборной скорости и углового положения летательного аппарата по продольно-поперечным каналам управления при скоростях полета выше области границ висения.

На рис. 1 представлена структурная схема управления летательным аппаратом вертолетного типа, позволяющая реализовать указанные типы реакций и заданные режимы управления объектом.

Из структурной схемы видно, что первый контур управления летательным аппаратом является основным и обеспечивает улучшение устойчивости объекта управления, а также его управляемость не ниже второго уровня в хорошей среде ориентации пилота. Второй контур системы управления обеспечивает улучшение управляемости объекта до первого уровня в условиях полета с ухудшенной видимостью. В свою очередь, задачи автоматического управления летательным аппаратом решаются третьим контуром.

Таким образом, наличие первого и второго контуров системы управления способно обеспечить высокие характеристики управляемости объекта в различных погодных условиях его полета при ручном управлении. При этом вероятность отказа первого контура не должна превышать 10^{-9} . Учитывая высокие требования надежности и отказобезопасности, предъявляемые к первому контуру, разработка системы должна осуществляться в соответствии с требованиями по гарантии конструирования бортовой электронной аппаратуры (КТ-254), программному обеспечению (КТ-178В), руковод-

ства проектирования бортовых систем (Р4754) по уровню не ниже категории А. Выполнение требований руководств по разработке бортовых систем и их программно-аппаратному обеспечению непосредственно связано с исследованием комплексной системы управления на отказобезопасность, работоспособность и корректность принятых технических решений.

Постановка задачи

Целью настоящей работы является оценка динамических характеристик исполнительного механизма комплексной системы управления в условиях отказа бортового оборудования летательного аппарата, что позволит оценить изменение динамических характеристик объекта управления и разработать способы парирования угрозы авиационного происшествия.

Для достижения поставленной цели необходимо:

- провести анализ системы управления на отказобезопасность;
- исследовать систему управления в условиях отказа бортового оборудования объекта управления.

Анализ комплексной системы управления на отказобезопасность

Исследуется комплексная система управления, состоящая из автоматической и дистанционной подсистем. Архитектура такой системы представлена на рис. 2. Здесь ДОУ — датчики органов управления, ЦВУП — центральный вычислитель управления полетом, ДУС — датчики угловой скорости, ТРМ — триммерный

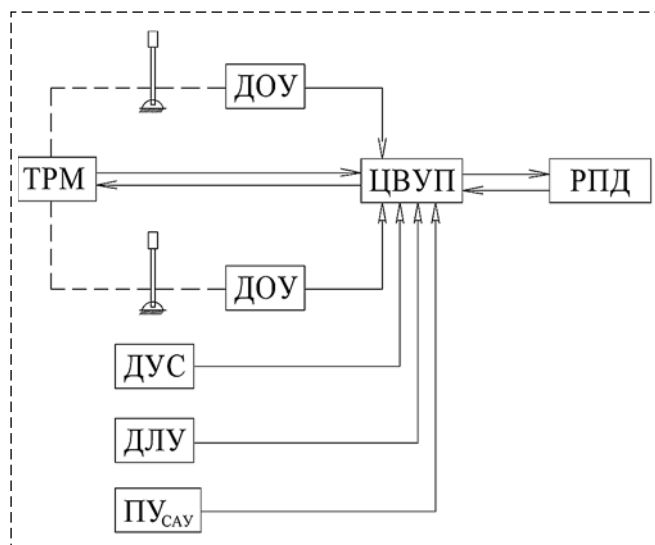


Рис. 2. Архитектура комплексной системы управления
Fig. 2. The architecture of the complex control system

механизм, РПД — рулевой дистанционный привод, ДЛУ — датчик линейных ускорений, ПУ_{САУ} — пульт управления САУ.

Из структурной схемы видно, что основным элементом системы управления является вычислитель управления полетом, реализующий законы автоматического и ручного управления. Вычислитель формирует электрические сигналы, поступающие на вход рулевого дистанционного привода. Также он взаимодействует с ДОУ, ДУС, ДЛУ, ПУ_{САУ} и бортовым оборудованием летательного аппарата по линиям цифровой связи. Наряду с управлением рулевыми приводами летательного аппарата вычислитель осуществляет управление механизмом триммирования и перемещения, который перемещает рычаги управления воздушным судном (ВС) в автоматическом режиме полета.

Учитывая, что ЦВУП реализует режимы автоматического и дистанционного управления ВС, к которым предъявляются различные требования по отказобезопасности и надежности, то расчет вероятностей и анализ последствий отказов элементов системы целесообразно выполнять методом ее разделения на функциональные контуры. Например, простейшая ком-

плексная система состоит из контура системы дистанционного управления (СДУ) и системы автоматического управления (САУ). При этом отказ контура САУ приведет к усложнению условий полета, что не должно превышать вероятности 10^{-3} , в то время как отказ СДУ приведет к катастрофическим последствиям с вероятностью возникновения не более 10^{-9} .

Предположим, что ЦВУП содержит два вычислительных модуля, реализующих задачи САУ, и четыре модуля управления приводами. Контур САУ содержит: вычислительные модули САУ, датчики угловых скоростей и линейных перемещений, механизм триммирования и перемещения, пульт управления САУ. В состав СДУ входят датчики органов управления, модули управления приводом, рулевые дистанционные приводы.

Процедура исследования комплексной системы управления на отказобезопасность определяется расчетом вероятности отказа ее подсистем с учетом резервирования их элементов, а также анализом последствий отказов на условия полета воздушного судна [10, 11].

1. Рассмотрим структурную схему оценки надежности САУ, представленную на рис. 3. Здесь МВ — модуль вычислительный; ЦВИ — цифровой интерфейс; ТРМ_к, ТРМ_н, ТРМ_т, ТРМ_{ош} — триммерные механизмы, установленные в каналах крена, тангажа, направления и общего шага объекта управления соответственно.

Исследования подсистемы автоматического управления на надежность показывают, что вероятность отказа элементов КСУ, выполняющих задачи автоматического управления, не превышает величину 10^{-3} .

Следующим этапом исследования подсистемы автоматического управления является анализ последствий отказов ее элементов на условия выполнения поставленной задачи и полета вертолета. В табл. 1 представлены результаты анализа явных/неявных отказов элементов бортового радиоэлектронного оборудования (БРЭО) и САУ на условия полета ЛА [12].

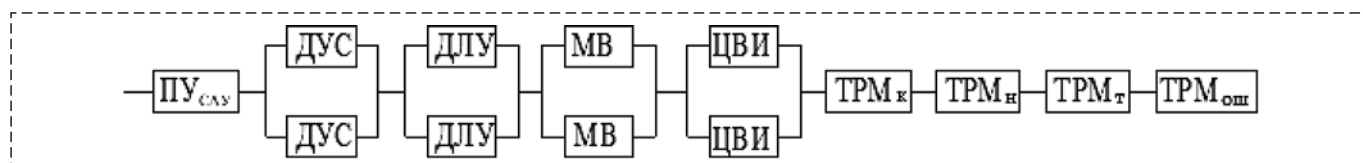


Рис. 3. Структурная схема оценки надежности САУ

Fig. 3. The scheme for estimation reliability of the automatic control system

Уровень управляемости летательного аппарата в зависимости от отказов элементов БРЭО и САУ
The level of controllability of the aircraft, depending on the failure of the elements of avionics and ACS

Вид отказа	Тип отказа	Последствия	Управляемость
Отказ соединения САУ с БРЭО	Явный	Потеря пилотажно-навигационной информации и систем контроля	Снижение управляемости до 2-го уровня
Отказ вычислительного элемента САУ	Явный	Невыполнение пилотажно-траекторных задач САУ	Снижение управляемости до 2-го уровня
	Неявный	Формирование неверного управляющего сигнала при решении задач САУ и пилотирования ЛА	Снижение управляемости до 2-го уровня. Отсутствие управляемости ЛА. Наличие аварийной и катастрофической ситуации
Отказ триммерного механизма	Явный	Потеря функции автотриммирования в режиме автоматического пилотирования ЛА. Усложнение условий перемещения рычагов управления аппаратом	Управляемость соответствует 2-му уровню
	Неявный	Самопроизвольное вращение выходного вала триммерного механизма с превышением заданной скорости. Неконтролируемое перемещение рычагов ЛА. Приведение аппарата в неустойчивое положение	Наличие аварийной и катастрофической ситуации
Отказ датчиков угловой скорости и линейного ускорения ЛА	Явный	Потеря функции улучшения устойчивости и управляемости ЛА	Управляемость соответствует 3-му уровню
	Неявный	Неверные значения по датчикам угловой скорости	Наличие аварийной и катастрофической ситуации
Отказ пульта управления	Явный	Отсутствие включения/отключения функций САУ	Управляемость ЛА не изменяется
	Неявный		

Из табл. 1 видно, что наибольшую опасность представляют неявные отказы вычислительных модулей, триммерных механизмов, датчиков угловой скорости и линейного ускорения. Парирование отказов этих элементов достигается применением дополнительных методов контроля их исправности: сравнением с модельными значениями контролируемого параметра, разнородными программными и аппаратными средствами решения задачи автоматического управления ЛА, сравнением данных с сигналами другой природы; ограничением расходов управления по исполнительным механизмам управления вертолетом. Перечисленные методы позволяют обеспечить своевременное вмешательство пилота в управ-

ление летательным аппаратом и парировать отказные ситуации системы управления.

2. Рассмотрим структурную схему оценки надежности подсистемы дистанционного управления, представленную на рис. 4, где МУП — модуль управления приводом; РИ — резервный интерфейс; РПД_к, РПД_т, РПД_н, РПД_{ош} — рулевые дистанционные приводы, установленные в каналах крена, тангажа, направления и общего шага объекта управления соответственно.

Результаты исследований подсистемы дистанционного управления [12] показывают, что элементы КСУ, выполняющие задачи по реализации ручного управления, удовлетворяют предъявляемым к ним требованиям надежно-

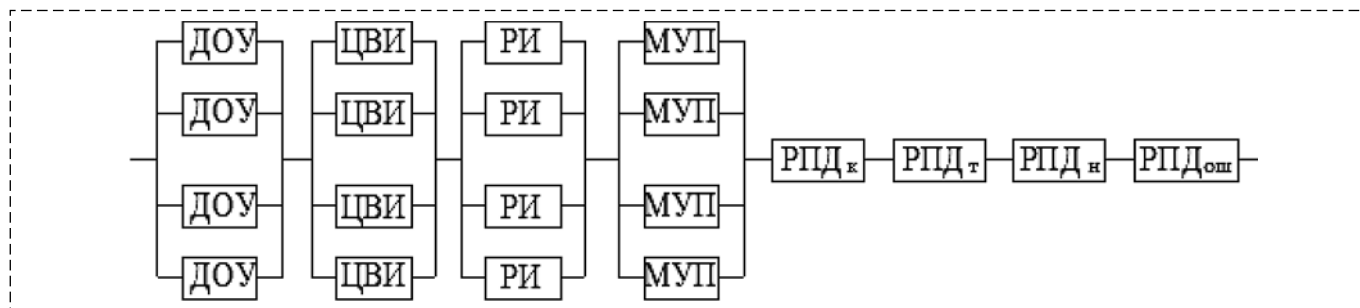


Рис. 4. Структурная схема оценки надежности СДУ

Fig. 4. The scheme for estimation reliability of the fly by wire control system

Способы парирования отказов элементов СДУ
Methods parry bounce elements of the fly by wire control system

Отказавший элемент	Вид отказа	Способ парирования
Датчик органов управления	Явный	Резервирование
	Неявный	Применение разнородных датчиков, средства самоконтроля и кворуммирования
Модуль управления приводом	Явный	Резервирование
	Неявный	Разнородное программное и аппаратное обеспечение. Сравнение с модельными значениями
Рулевой дистанционный привод	Явный	Дублирование основных элементов привода
	Неявный	Сравнение с модельными значениями характеристик привода в МУП. Наземная отработка
Интерфейс передачи данных	Явный	Резервирование, применение разнородных интерфейсов

сти, а именно, вероятность отказа системы не превышает 10^{-9} .

Учитывая, что любой отказ элементов СДУ (явный/неявный) может привести к катастрофической ситуации, то исследование последствий отказов СДУ сводится к анализу их парирования, результаты которого представлены в табл. 2.

Как видно из табл. 2, основными способами парирования отказных ситуаций подсистемы дистанционного управления является их резервирование, применение разнородных аппаратных и программных средств реализации системы, дополнительных видов контроля (сравнение с модельными значениями контролируемых параметров, кворуммирование выходного сигнала элементов).

Таким образом, исследование представленной архитектуры КСУ на отказобезопасность позволило подтвердить ее надежность, определить последствия отказа ее элементов, а также предложить основные способы их парирования. Полученные результаты исследований могут быть использованы в процессе разработки логики контроля КСУ, а также алгоритмов реконфигурации ее работы.

Исследование системы управления в условиях отказа бортового оборудования

Согласно анализу КСУ на отказобезопасность отказ взаимодействия системы управления с информационно-измерительным оборудованием вертолета способен привести к потере функций автоматического управления вертолетом, а также к ухудшению его управля-

емости до 3-го уровня зависимости от условий полета вертолета. При этом управление объектом осуществляется резервным контуром системы, который обеспечивает заданное положение рулевых поверхностей в зависимости от угла отклонения рычагов управления с улучшением устойчивости и управляемости.

Наряду с информационно-измерительным оборудованием вертолета комплексная система управления взаимодействует с системой гидравлического питания, которая осуществляет подачу рабочей жидкости в рулевой дистанционный привод [13]. Поэтому в процессе проектирования комплексных и электродистанционных систем управления возникает необходимость в исследовании влияний отказов системы гидравлического питания на динамические характеристики исполнительных механизмов системы. Как правило, к основным отказам системы гидравлического питания следует отнести падение давления в линии напора гидравлического цилиндра привода и уменьшение расхода рабочей жидкости через камеры гидравлического привода.

На рис. 5 представлены характеристики рулевого дистанционного привода при подаче рабочей жидкости по двум гидравлическим линиям питания, где F — усилие, развиваемое на выходном штоке привода, Н; V — скорость перемещения выходного штока привода, см/с; t — время, с.

Предположим, что в процессе выполнения полета летательного аппарата произошел отказ одной линии гидравлического питания привода, тогда зависимости усилия и скорости перемещения выходного штока привода примут вид, представленный на рис. 6.

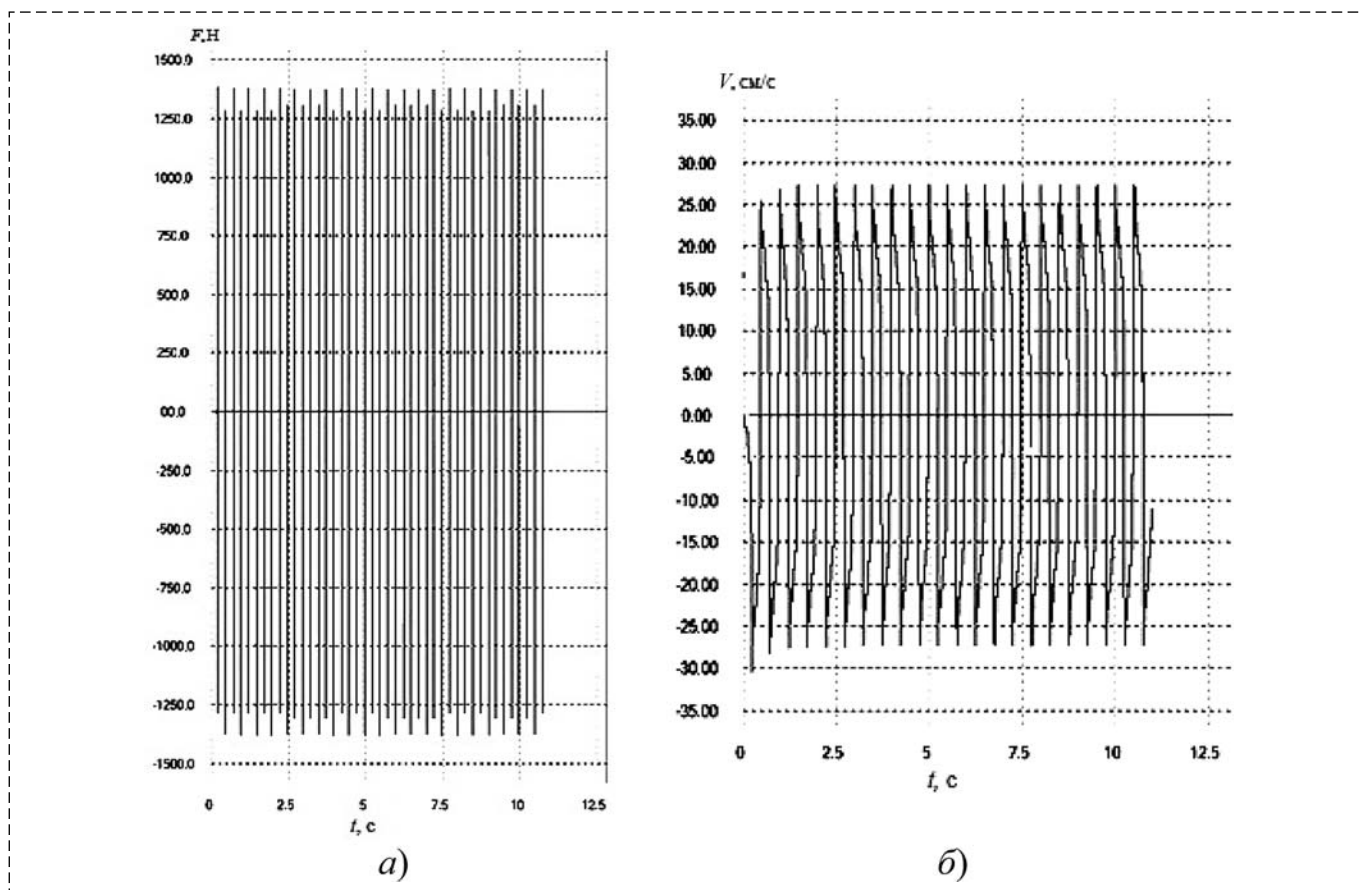


Рис. 5. Усилие, развиваемое на выходном штоке привода (а) и скорость его перемещения (б) при исправной системе гидравлического питания

Fig. 5. The force developed on the output rod of the drive (a) and the speed of its movement (b) with a serviceable hydraulic supply system

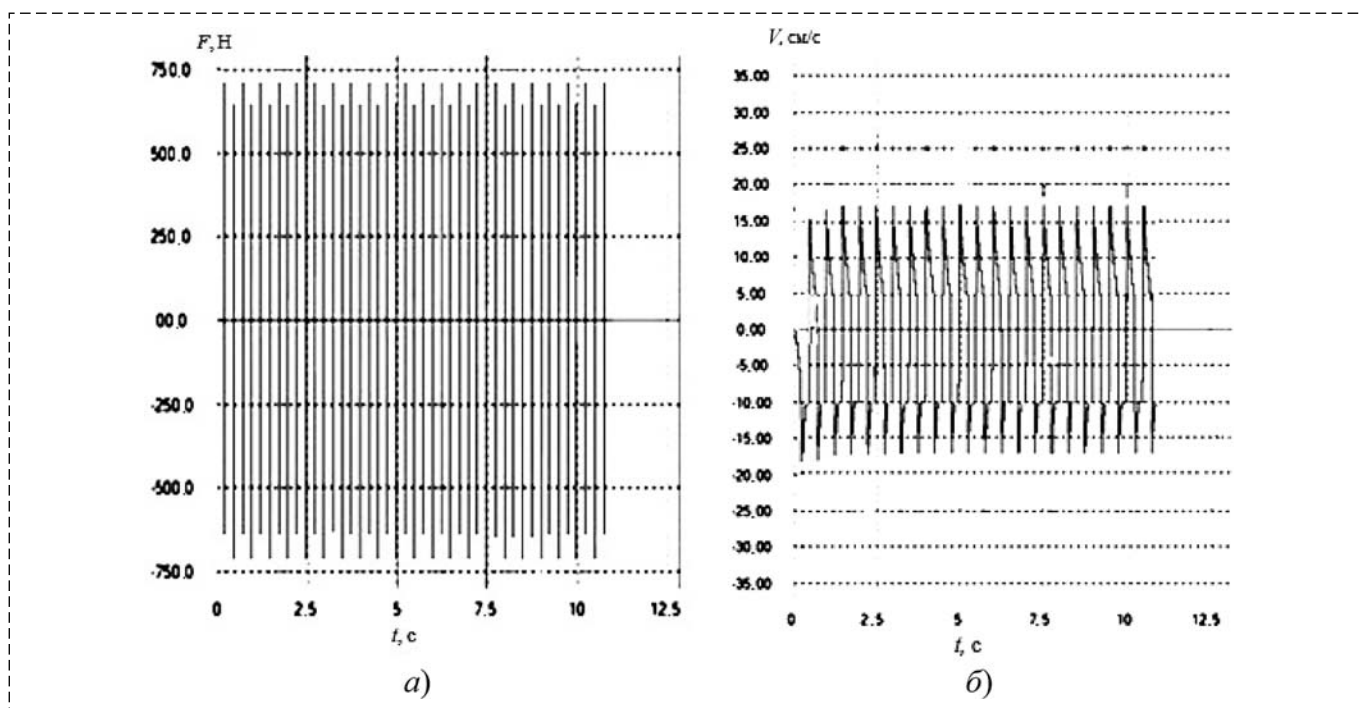


Рис. 6. Усилие, развиваемое на выходном штоке привода (а) и скорость его перемещения (б) при отказе одной линии гидравлического питания

Fig. 6. The force developed on the output rod of the drive (a) and the speed of its movement (b) in case of failure of one hydraulic supply line

Из зависимостей видно, что при отказе одной линии гидравлического питания привода усилие, развиваемое его выходным штоком, уменьшается в 2 раза. При этом уменьшение скорости привода происходит из-за изменения его нагрузочной характеристики, где эффект торможения привода выполняет внешняя нагрузка.

Следует отметить, что уменьшение расхода жидкости через гидравлический цилиндр способно привести к ухудшению скоростных характеристик привода, а также к уменьшению его добротности. Так, при уменьшении расхода рабочей жидкости через гидравлический привод в 2 раза согласно его АЧХ (рис. 7, где S_z — заданное положение выходного штока, мм; S_p — положение выходного штока, измеренное датчиками обратной связи ЭГРП, мм) добротность системы управления составит 15 с^{-1} , что в 2 раза меньше требуемого значения.

Таким образом, отказ системы гидравлического питания исполнительных механизмов комплексной системы управления способен привести к значительным ухудшениям характеристик управляемости объекта. Для исключения неблагоприятного влияния подобных отказов на борту летательного аппарата целесообразно применять раздельную подачу рабочей жидкости в камеры гидроцилиндра исполнительного механизма от двух систем гидравлического питания. Также в целях сохранения заданных значений параметров исполнительного механизма возможно программное изменение коэффициентов усиления в системе управления, реализуемое при ее реконфигурации.

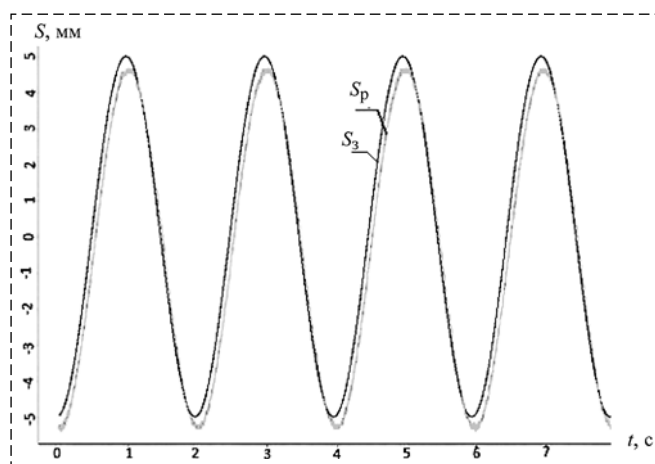


Рис. 7. Амплитудная характеристика ЭГРП при отказе системы гидравлического питания

Fig. 7. Amplitude characteristic of the drive in case of failure of the hydraulic power system

В процессе выполнения работы осуществлен анализ влияния отказов бортового оборудования летательного аппарата на комплексную систему управления, выявлены особенности отказных ситуаций гидравлического питания исполнительных механизмов системы.

Полученные результаты могут быть использованы при создании комплексных систем управления летательными аппаратами вертолетного типа. Дальнейшая работа в этом направлении должна быть направлена на разработку способов парирования отказных состояний системы на аппаратном и программном уровнях ее реализации.

Список литературы

1. Оболенский Ю. Г., Ермаков С. А., Карев В. И., Константинов С. В., Селиванов А. М., Сухоруков Р. В. Системы дистанционного управления и рулевые приводы // Труды МАИ. 2013. Т. 20. № 2.
2. Есаулов С. Ю., Вайнпрес А. А., Филенков Е. В., Ильин И. Р. Системы электрического дистанционного управления для вертолетов // Полет. 2015. № 8—9. С. 39—54.
3. Gallot J., Millon G., Clerc C. The Flyby-Wire Concept and Its Application to the NH90 Helicopter // 15th European Rotorcraft Forum. 1989. Amsterdam.
4. Stiles L., Wittmer K. The S-92 Goes Fly By Wire. // 64th Annual Forum of the American Helicopter Society. 2008. Montreal. Canada.
5. Kim S. K., Bothell M., Fortenbaugh R. The Bell 525 Relentless, The World's First "Next Generation" Fly-by-Wire Commercial Helicopter // 70th Annual Forum of the American Helicopter Society. 2014. Montreal. Canada.
6. Вертолет Bell-525 Relentless совершил первый полет. URL: <http://www.ato.ru/conternt/vertolet-bell-525-relentless-sovershil-pervyy-polet>.
7. Сапогов В. А., Анисимов К. С., Новожилов А. В. Отказобезопасная вычислительная система для комплексных систем управления полетом летательных аппаратов // Труды МАИ. 2008. № 45.
8. Шушпанов Н. А., Линник М. Ю., Ковязин И. О. Перспективные интегрированные вычислительные комплексы вертолетов // Авиакосмическое приборостроение. 2012. № 2. С. 27—32.
9. Жулев В. И., Иванов В. С. Безопасность полетов летательных аппаратов: (Теория и анализ). М.: Транспорт, 1986.
10. Липатов И. Н. Надежность функционирования автоматизированных систем: конспект лекций. Пермь: Изд-во Перм. ГТУ, 1996.
11. Липаев В. В. Надежность и функциональная безопасность комплексов программ реального времени. М.: Изд. Ин-та системного программирования РАН, 2013.
12. Большаков А. А., Кулик А. А., Сергушов И. В. Исследование взаимодействия комплексной системы управления с устройствами и системами бортового радиоэлектронного оборудования летательного аппарата // Вестник Астраханского государственного технического университета. Сер. Управление, информатика и вычислительная техника. 2016. № 1. С. 7—17.
13. Редько П. Г., Амбарников А. В., Ермаков С. А., Карев В. И., Трифонов О. Н. Гидравлические агрегаты и приводы систем управления полетом летательных аппаратов. М.: Олита, 2004. 472 с.

Investigation of the Integrated Control System of a Helicopter Type Aircraft in Case of Onboard Equipment Failures

A. A. Bolshakov, aabolshakov57@gmail.com,

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU), St. Petersburg, 195251, Russian Federation,

A. A. Kulik, kulikalekse@yandex.ru,

JSC "Design Bureau of Industrial Automation", Saratov, 410005, Russian Federation

Corresponding authors: Bolshakov Alexander A., Professor of the Department "Telematics", Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU), St. Petersburg, 195251, Russian Federation, e-mail: aabolshakov57@gmail.com

Accepted on 06 June, 2019

Abstract

The complex control system of the helicopter-type aircraft is considered, its design is described depending on the requirements for the aircraft and interaction with the interfaced onboard equipment. The main elements of the system are the subsystems of remote and automatic control of the helicopter. In the process of developing such a system, much attention is paid to ensuring a high level of reliability and maintaining the functions necessary for the safe completion of the flight. Therefore, the main requirement for an integrated management system is the probability of its failure in backup management with improved stability of the control object is not higher than 10^{-9} . The authors of the article conducted the analysis of the integrated management system on accutanecost in conditions of failure of the elements included in its composition. In the course of the analysis the assessment of fault safety of subsystems of remote and automatic control is carried out. At the same time, for each system, the influence of obvious and not obvious failures on the change in the controllability of the aircraft and the safety of its flight was considered. Also, the analysis of the system in the conditions of failure of the on-Board equipment of the device. Special attention is paid to the study of the dynamics of the Executive mechanism of the system in the conditions of failure of the onboard hydraulic power supply system. The paper presents the results of studies of changes in the force, speed and quality factor of the electrohydraulic drive at various failures of hydraulic power lines on Board the aircraft. The obtained results can be used in the process of designing complex control systems, studies of electrohydraulic drives and development of methods for parrying the consequences of failures of the helicopter's onboard equipment with respect to the complex control system, including the creation of algorithms for reconfiguring the system and the logic of controlling the functioning of its elements.

Keywords: aircraft, integrated control system, flight safety

For citation:

Bolshakov A. A., Kulik A. A. Investigation of the Integrated Control System of a Helicopter Type Aircraft in Case of Onboard Equipment Failures, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 9, pp. 568–575.

DOI: 10.17587/mau.20.568-575

References

1. Obolenskij Yu. G., Ermakov S. A., Karev V. I., Konstantinov S. V., Selivanov A. M., Suhorukov R. V. *Trudy MAI*, 2013, vol. 20, no. 2 (in Russian).
2. Esaulov S. Yu., Vajnpres A. A., Filenkov E. V., Il'in I. R. *Polet*, 2015, no.8-9, pp. 39–54 (in Russian).
3. Gallot J., Millon G., Clerc C. The Flyby-Wire Concept and Its Application to the NH90 Helicopter, *15th European Rotorcraft Forum, Amsterdam, The Hague*. September 1989 (in Russian).
4. Stiles L., Wittmer K. The S-92 Goes Fly By Wire..., *64th Annual Forum of the American Helicopter Society*, Montreal, Canada, April-May, 2008 (in Russian).
5. Kim S. K., Bothell M., Fortenbaugh R. The Bell 525 Relentless, The World's First "Next Generation" Fly-by-Wire Commercial Helicopter, *70th Annual Forum of the American Helicopter Society*, Montreal, Quebec, Canada, May 2014.
6. Vertolet Bell-525 Relentless sovershil pervyy polet, available at: <http://www.ato.ru/conternt/vertolet-bell-525-relentless-sovershil-pervyy-polet> (in Russian).
7. Sapogov V. A., Anisimov K. S., Novozhilov A. V. *Proceedings of the MAI*, 2008, no. 45 (in Russian).
8. Shushpanov N. A., Linnik M. Y., Kovyazin I. O. *Aviakosmicheskoe Instrumentation*, 2012, no. 2, pp. 27–32 (in Russian).
9. Zhulev V. I., Ivanov V. S. Theory and analysis, Moscow, Transport, 1986, (in Russian).
10. Lipatov I. N. Reliability of automated systems: lecture notes, Perm, Publishing house Perm.GTU, 1996 (in Russian).
11. Lipaev V. V. Reliability and functional safety of real-time software systems, Moscow, Institute of system programming, RAS, 2013 (in Russian).
12. Bolshakov A. A., Kulik A. A., Surguchov I. V. *Vestnik of Astrakhan state Technical University. Series. Management, computer science and computing*, 2016, no. 1, pp. 7–17 (in Russian).
13. Red'ko P. G., Ambarnikov A. V., Ermakov S. A., Karev V. I., Trifonov O. N. Hydraulic assemblies and drives for flight control systems for aircraft, Moscow, Olita, 2004, 472 p. (in Russian).



21 февраля 2020 г.
в г. Новокузнецк на базе Научно-исследовательского центра
«МашиноСтроение» (НИЦ МС) состоится

IV Международная научно-практическая конференция "МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИКА И РОБОТОТЕХНИКА"



Секции конференции:

1. Роботы, мехатроника и робототехнические системы.
2. Методы и техника создания и исследования интеллектуальных машин.
3. Механика и управление движением машин.
4. Механизация, автоматизация и управление технологическими процессами и производствами.
5. Методы контроля и диагностики в машиностроении.
6. Информационно-измерительные и управляющие системы.
7. Математическое и программное обеспечение вычислительных машин и комплексов.

По итогам конференции издается сборник трудов с присвоением УДК, ББК, ISSN.
Сборник индексируется в базе данных РИНЦ.

Всем публикациям постатейно присваивается цифровой идентификатор DOI.

Подробную информацию о конференции см. на сайте:
<http://srcms.ru>

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5510, (499) 269-5397**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *Е. В. Комиссарова*.

Сдано в набор 25.06.2019. Подписано в печать 09.08.2019. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН919. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: www.aov.ru