

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 20

2019

№ 8

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Главный редактор:**  
ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

**Заместители главного редактора:**  
БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.  
ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.  
ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

**Ответственный секретарь:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционный совет:**  
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН  
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН  
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН  
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН  
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН  
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН  
КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН  
МИКРИН Е. А., акад. РАН  
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН  
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН  
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН  
СИГОВ А. С., акад. РАН  
СОЙФЕР В. А., акад. РАН  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН  
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН  
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН  
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН  
ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН  
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

**Редколлегия:**  
DANIELE Z., PhD, Италия  
DORANTES D. J., PhD, Турция  
GROUMPOS P. P., PhD, Греция  
ISIDORI A., PhD, Италия  
KATALINIC B., PhD, Австрия  
LIN CH.-Y., PhD, Тайвань  
MASON O. J., PhD, Ирландия  
ORTEGA R. S., PhD, Франция  
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США  
STRZELECKI R. M., PhD, Польша  
SUBUDHI B. D., PhD, Индия  
АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан  
ГАРАШЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина  
ТРОФИМЕНКО Е. Е., д.т.н., Беларусь  
БОБЦОВ А. А., д.т.н.  
БУКОВ В. Н., д.т.н.  
ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.  
ЖУКОВ И. А., д.т.н.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.  
ЛОХИН В. М., д.т.н.  
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д.ф.-м.н.  
ПУТОВ В. В., д.т.н.  
ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.  
РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.  
СЕРГЕЕВ С. Ф., д.пс.н.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.  
ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.  
ФУРСОВ В. А., д.т.н.  
ЮРЕВИЧ Е. И., д.т.н.

**Редакция:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Директор издательства:**  
АНТОНОВ Б. И.

## СОДЕРЖАНИЕ

### СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

**Колесников А. А., Кузьменко А. А.** Синтез законов разрывного управления на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий метода АКАР . . . . . 451

**Дубовик С.А.** Асимптотическая семантизация данных в системах управления . . . . . 461

### РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

**Шадрин Г. К., Алонцева Д. Л., Кусайын-Мурат А. Т., Красавин А. Л.** Синтез алгоритма управления движением инструмента робота методом коррекции его динамики и компенсации возмущений . . . . . 472

**Волков С. В., Горячев О. В., Ефромеев А. Г., Степочкин А. О.** Расчет параметров математической модели электрического шагового двигателя гибридного типа на основе анализа картины магнитостатического поля . . . . . 482

**Носков В. П., Киселев И. О.** Использование текстуры линейных объектов для построения модели внешней среды и навигации . . . . . 490

### ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

**Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** Quaternion Models and Algorithms of Solving the General Problem of Energetically Optimal Spacecraft Orbit Reorientation . . . . 498

**Солдаткин В. М., Солдаткин В. В.** Исследование методических погрешностей системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником набегающего воздушного потока . . . . . 504

*Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:

<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

# MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



## MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Editor-in-Chief**

FILIMONOV N. B.

**Deputy Editors-in-Chief:**

BOLSHAKOV A. A.

PODURAEV Yu. V.

YUSCHENKO A. S.

**Responsible Secretary:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Editorial Board:**

ANSHAKOV G. P.

BOLOTNIK N. N.

CHENTSOV A. G.

CHERNOUSKO F. L.

FEDOROV I. B.

KALYAEV I. A.

KURZHANSKI A. B.

KUZNETSOV N. A.

MIKRIN E. A.

PESHEKHONOV V. G.

REZCHIKOV A. F.

SCHERBATYUK A. F.

SEBRYAKOV G. G.

SIGOV A. S.

SOJFER V. A.

SOLOMENTSEV Yu. M.

VASSILYEV S. N.

YUSUPOV R. M.

ZHELTOV S. Yu.

**Editorial Council:**

ALIEV T. A., Azerbaijan

DANIELE Z., PhD, Italy

DORANTES D. J., PhD, Turkey

GARASCHENKO F. G., Ukraine

GROUMPOS P. P., PhD, Greece

ISIDORI A., PhD, Italy

KATALINIC B., PhD, Austria

LIN CH.-Y., PhD, Taiwan

MASON O. J., PhD, Ireland

ORTEGA R. S., PhD, France

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA

STRZELECKI R. M., PhD, Poland

SUBUDHI B. D., PhD, India

TROFIMENKO Ye. Ye., Belarus

BOBTSOV A. A.

BUKOV V. N.

ERMOLOV I. L.

FILARETOV V. F.

FRADKOV V. L.

FURSOV V. A.

ILYASOV B. G.

KOROSTELEV V. F.

LEBEDEV G. N.

LOKHIN V.M.

PAVLOVSKY V. E.

PUTOV V. V.

PSHIKHOPOV V. Kh.

RAPOPORT E. Ya.

SERGEEV S. F.

YUREVICH E. I.

ZHUKOV I. A.

**Editorial Staff:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Director of the Publishing House:**

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

## CONTENTS

### SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

**Kolesnikov A. A., Kuz'menko A. A.** Sliding Mode Control Laws Design by the ADAR Method with Subsequent Invariant Manifolds Aggregation . . . . . 451

**Dubovik S. A.** Asymptotic Semantization of Data in Control Systems . . . . . 461

### ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

**Shadrin G. K., Alontseva D. L., Krasavin A. L., Kussaiyn-Murat A. T.** Synthesis of the Robotic Tool Motion-Controlling Algorithm Using Method of Correction Dynamics and Perturbations Compensation . . . . . 472

**Volkov S. V., Goryachev O. V., Efromeev A. G., Steepochkin A. O.** Calculation of the Parameters of a Mathematical Model of an Electric Hybrid Stepper Motor Based on the Analysis of the Magneto Static Field Pattern . . . . . 482

**Noskov V. P., Kiselev I. O.** Using Texture of Linear Objects for Build Enviroments Model and Navigations . . . . . 490

### DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

**Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N.** Quaternion Models and Algorithms of Solving the General Problem of Energetically Optimal Spacecraft Orbit Reorientation . . . . 498

**Soldatkin V. M., Soldatkin V. V.** Research of Methodological Errors of the Air Data System of Aircraft with Stationary Included Receiver of Incoming Air Flow . . . . . 504

Information about the journal is available online at:  
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

**А. А. Колесников**, д-р техн. наук, проф., [ankolesnikov@sfedu.ru](mailto:ankolesnikov@sfedu.ru),  
**А. А. Кузьменко**, канд. техн. наук, доц., [aakuzmenko@sfedu.ru](mailto:aakuzmenko@sfedu.ru),  
Институт компьютерных технологий и информационной безопасности  
Южного федерального университета, г. Таганрог

## Синтез законов разрывного управления на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий метода АКАР\*

*В инженерной практике востребовано широкое использование законов разрывного управления (SMC — sliding mode control) для обеспечения робастности к изменению параметров, внешним возмущениям и немоделируемой динамике объекта управления. Современные возможности теории адаптивного и робастного управления, теории нечетких систем, искусственных нейронных сетей и др., которые объединяются с SMC, не снимают имеющиеся проблемы при синтезе SMC — имеют место значительные трудности векторного синтеза и анализа устойчивости замкнутой системы с SMC. При этом в общем случае классическая задача синтеза SMC заключается в решении подзадач перевода объекта из произвольного начального положения на поверхность скольжения, обеспечения условий существования скользящего режима в любой точке поверхности скольжения, обеспечения устойчивого движения к желаемому состоянию. Традиционно эти подзадачи, как правило, решаются раздельно.*

*В данной статье представлена методика синтеза законов разрывного управления на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий, базирующаяся на методе аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) синергетической теории управления. Методика позволяет осуществлять синтез робастных законов управления и совместно решать классические подзадачи синтеза законов управления со скользящим режимом для нелинейных объектов. При этом также упрощается процедура анализа устойчивости замкнутой системы: условия устойчивости складываются из условий устойчивости решений функциональных уравнений метода АКАР и условий устойчивости финишной декомпозированной системы, размерность которой существенно меньше размерности исходной системы. Несмотря на то что в данной работе подробно изложена только методика синтеза скалярного разрывного управления, ее положения справедливы и для векторного синтеза: основное отличие заключается в числе инвариантных многообразий, вводимых на первом и последующих этапах синтеза.*

*Теоретические положения работы проиллюстрированы примерами синтеза для нелинейных технических систем, которые показывают выполнение поставленных задач управления: достижение целевых инвариантов, нечувствительность к возникающим параметрическим и внешним возмущениям.*

**Ключевые слова:** нелинейные системы управления, робастность, синтез управления, разрывное управление, поверхность скольжения, синергетическая теория управления, метод АКАР, инвариантное многообразие

### Введение

Предложенная в 60-х годах XX века теория разрывного управления (sliding mode control — SMC), заложенная в работах В. И. Уткина, С. В. Емельянова и др. [1–4], была активно воспринята учеными и инженерами-практиками для построения робастных законов управления различными техническими системами. Именно в инженерной практике востребовано широкое использование SMC для обеспечения робастности. Актуальность данной теории также под-

тверждает неумещающееся число научных работ, представленных в базах Scopus и Web of Science. Как всякая востребованная область науки, теория SMC также не стоит на месте — ее дополняют новыми возможностями теории адаптивного и робастного управления, теории нечетких систем, искусственных нейронных сетей и др. [5–11]. Развитие теории SMC привело к созданию и широкому использованию систем со скользящим режимом высокого порядка [12–15], с интегральным скользящим режимом [16, 17]. В ИПУ РАН В. А. Уткиным и С. А. Красновой был разработан принцип блочного управления. В ряде своих научных работ они рассматривают совместное использование

\*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-08-00366.

этого принципа и техники скользящих режимов высокого порядка, интегральных скользящих режимов для построения законов управления сложными системами [17–19].

Основное достоинство SMC в задачах управления техническими системами — обеспечение нечувствительности к изменению параметров объекта, внешним возмущениям и немоделируемой динамике объекта управления. Но указанные выше достоинства и современные достижения не снимают имеющиеся проблемы при синтезе SMC — имеют место значительные трудности векторного синтеза и анализа устойчивости замкнутой системы с SMC.

В общем случае задача синтеза SMC заключается в решении следующих подзадач [1–4]:

1) перевод изображающей точки (ИТ) объекта из произвольного начального положения (в определенной области фазового пространства) на некоторую поверхность скольжения  $s = 0$  (поверхность разрыва управления);

2) обеспечение условий существования скользящего режима в любой точке поверхности скольжения;

3) обеспечение устойчивого движения ИТ к желаемому конечному состоянию (в частном случае — началу координат) фазового пространства объекта.

Традиционно эти подзадачи, как правило, решаются отдельно. Этому недостатка лишен синерго-кибернетический подход, в рамках которого развивается метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) синергетической теории управления. Его использование позволяет преодолеть обозначенные выше трудности синтеза SMC [20, 21]. В данной работе нами предлагается методика аналитического синтеза SMC для нелинейных объектов, в которой перечисленные выше подзадачи решаются совместно. Важно отметить, что описание движения SMC на поверхности скольжения — это также отдельная задача, решение которой традиционно базируется на аксиоматическом подходе и методе эквивалентного управления [3]. В предлагаемой здесь методике проблема описания системы с SMC при ее движении в режиме скольжения таковой не является — для каждого этапа рассматривается своя декомпозированная система, размерность которой меньше размерности системы предыдущего этапа. Также необходимо отметить, что в классических SMC для организации скользящих режимов в пространстве состояния, как

правило, используются линейные поверхности скольжения в виде линейной комбинации переменных состояния объекта управления. Применение синерго-кибернетического подхода в общем случае позволяет использовать нелинейные поверхности скольжения.

### Описание метода

Ранее в работе [22] показано применение метода синтеза нелинейных SMC, в котором в соответствии с методом АКАР [20, 21] на первом этапе явно задавалось единственное многообразие, содержащее целевой инвариант в виде поверхности разрыва управления  $s = 0$ . Однако не всегда возможно сразу явно задать такое многообразие. Поэтому возникает идея применения для синтеза нелинейных SMC последовательной или параллельной совокупности инвариантных многообразий в фазовом пространстве систем, основанная на развитии в методе АКАР скалярном и векторном синтезе [20, 21]. При этом, в зависимости от способа формирования макропеременных  $\psi_k(x_1, \dots, x_{n-1}, s_k)$  функций поверхностей разрыва  $s_k$  можно построить различные процедуры синтеза SMC.

Перейдем к рассмотрению метода аналитического конструирования SMC на основе применения последовательной совокупности инвариантных многообразий. Пусть исходные дифференциальные уравнения объекта управления имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_n) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-1}; \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, \dots, x_n) + u, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$  — вектор переменных состояния,  $\dim \mathbf{x} = n \times 1$ ;  $u = u(\mathbf{x})$  — скалярное управление;  $f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , — непрерывные дифференцируемые функции.

Для системы (1) ставится задача синтеза SMC: требуется определить такое управление  $u(\mathbf{x})$  в функции переменных состояния объекта (1), которое обеспечивает перевод ИТ объекта из произвольного исходного состояния (в некоторой допустимой области) в заданное состояние, определяемое желаемым инвариантом — целью управления.

На первом этапе синтеза будем рассматривать многообразие

$$\psi_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k |x_k| + |s_1| = 0, \quad (2)$$

где  $s_1$  — это подмногообразие вида

$$s_1 = x_n + u_2(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0, \quad (3)$$

в котором  $u_2(x_1, \dots, x_{n-1})$  — неизвестная на данном этапе непрерывная функция, играющая роль "внутреннего" управления для декомпозированной системы следующего этапа:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-2}; \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) - a_n u_2(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned} \quad (4)$$

На основе основного функционального уравнения метода АКАР

$$T_1 \dot{\psi}_1(t) + \psi_1 = 0, \quad (5)$$

в силу исходных уравнений объекта (1), многообразий (2) и (3) находится искомое управление

$$\begin{aligned} u &= \\ &= - \left( \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k (f_k(x_1, \dots, x_n) + a_{k+1}x_{k+1}) \operatorname{sign} x_k \right) \operatorname{sign} s_1 - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} (f_k(x_1, \dots, x_n) + a_{k+1}x_{k+1}) - \\ &\quad - \frac{1}{T_1} \psi_1 \operatorname{sign} s_1 - f_n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (6)$$

Это управление переводит ИТ из произвольного начального состояния на многообразии  $\psi_1 = 0$  (2). Поскольку движение относительно  $\psi_1 = 0$  асимптотически устойчиво при  $T_1 > 0$ , это означает, что ИТ неизбежно попадает на подмногообразие (3), т. е. на поверхность скольжения. Устойчивое движение вдоль  $s_1 = 0$  можно организовать, используя подмногообразия  $s_2 = 0, \dots, s_m = 0$ :

$$\begin{aligned} s_2 &= x_{n-1} + u_3(x_1, \dots, x_{n-2}) = 0; \\ &\dots \\ s_m &= x_2 + u_{m+1}(x_1) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и синтезируя промежуточные управления  $u_2, \dots, u_{m+1}$  на основе функциональных уравнений:

$$T_i \dot{s}_i(t) + s_i = 0, \quad i = \overline{2, m}; \quad T_i > 0. \quad (8)$$

Так, например, управление  $u_2$  находится из уравнения

$$T_2 \dot{s}_2(t) + s_2 = 0, \quad T_2 > 0$$

с учетом (7) в силу уравнений декомпозированной системы (4), описывающих движение вдоль подмногообразия  $s_1 = 0$ .

Аналогично, управление  $u_3$  находится из уравнения

$$T_3 \dot{s}_3(t) + s_3 = 0, \quad T_3 > 0,$$

соответствующего подмногообразия из (7) и уравнений следующей декомпозированной системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= f_j(x_1, \dots, x_j) + a_{j+1}x_{j+1}, \quad j = \overline{1, n-3}; \\ \dot{x}_{n-2}(t) &= f_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) - a_{n-1}u_3(x_1, \dots, x_{n-2}), \end{aligned}$$

описывающей движение вдоль подмногообразия  $s_2 = 0$ .

Аналогично рассуждая, получаем, что управление  $u_k$  переводит ИТ на подмногообразии  $s_k = 0$  из (7), движение вдоль которого описывается своей декомпозированной системой, чья размерность на единицу меньше размерности предыдущей.

Очевидно, что исходное управление (6) имеет переменную структуру, а "внутренние" (промежуточные) управления  $u_2, \dots, u_{m+1}$  будут представлять собой некоторые непрерывные функции переменных состояния соответствующей декомпозированной системы. Процедура синтеза закона управления (6) завершается после синтеза или выбора последнего "внутреннего" управления, обеспечивающего выполнение желаемого целевого инварианта. Так, например, если целевой инвариант для системы (1) связан с обеспечением желаемого значения переменной  $x_1$ , то последним "внутренним" управлением будет управление  $u_{m+1}(x_1)$  — управление последнего этапа движения, описываемого дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1) - a_2 u_{m+1}(x_1).$$

Выражение для  $u_{m+1}(x_1)$  выбирается или находится методом АКАР либо другим методом. Затем полученное выражение  $u_{m+1}(x_1)$  подставляется в предыдущее управление  $u_m(x_1, x_2)$ , которое, в свою очередь, подставляется в  $u_{m-1}(x_1, x_2, x_3)$  и т. д., вплоть до управления  $u_2(x_1, \dots, x_{n-1})$ , непосредственно входящего в закон управления (6).

Отметим, что условия устойчивости замкнутой системы согласно методу АКАР [20, 21] складываются из условий устойчивости решений функциональных уравнений (5), (8) и

условий устойчивости финишной декомпозированной системы, размерность которой существенно меньше размерности исходной системы.

Приведенная выше методика синтеза скалярного SMC справедлива и для векторного управления: в этом случае на первом этапе синтеза по числу каналов управления вводятся многообразия вида (2), а последующие этапы идентичны этапам, описанным выше.

Проиллюстрируем представленную выше общую процедуру синтеза для нелинейного объекта третьего порядка.

*Пример 1.* Пусть уравнения объекта имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1) + a_2x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2) + a_3x_3; \\ \dot{x}_3(t) &= f_3(x_1, x_2, x_3) + u.\end{aligned}\quad (9)$$

Цель управления — обеспечить целевой инвариант  $x_1 = 0$ .

На первом этапе синтеза задаем инвариантное многообразие вида (2):

$$\psi_1 = \beta_1|x_1| + \beta_2|x_2| + |s_1| = 0, \quad (10)$$

где  $s_1 = x_3 + u_2(x_1, x_2)$ .

Подставляя соотношение (10) в функциональное уравнение (5), получаем в силу уравнений объекта (9) искомый закон управления:

$$\begin{aligned}u &= -(\beta_1(f_1(x_1) + a_2x_2)\text{sign}x_1 + \\ &+ \beta_2(f_2(x_1, x_2) + a_3x_3)\text{sign}x_2)\text{sign}s_1 - \\ &- \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(f_1(x_1) + a_2x_2) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(f_2(x_1, x_2) + a_3x_3) \right) - \\ &- \frac{1}{T_1}(\beta_1|x_1| + \beta_2|x_2| + |x_3 + u_2(x_1, x_2)|)\text{sign}s_1 - \\ &- f_3(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}\quad (11)$$

Под действием закона управления (11) ИТ системы (9) попадает в окрестность многообразия (10), движение вдоль которого описывается декомпозированной системой:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1) + a_2x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2) - a_3u_2(x_1, x_2).\end{aligned}\quad (12)$$

В выражение (11) входит неизвестное на данном этапе "внутреннее" управление  $u_2(x_1, x_2)$ , а также его частные производные. Для нахождения  $u_2(x_1, x_2)$  согласно (7) вводим подмногообразие

$$s_2 = x_2 + u_3(x_1) = 0. \quad (13)$$

Из функционального уравнения вида (8) при  $i = 2$  в силу уравнений декомпозированной системы (12) и подмногообразия (13) находим:

$$\begin{aligned}u_2(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{a_3} \left[ f_2(x_1, x_2) + (f_1(x_1) + a_2x_2) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{T_2}(x_2 + u_3(x_1)) \right].\end{aligned}\quad (14)$$

Управление (14) переводит ИТ системы (12) в окрестность подмногообразия  $s_2 = 0$ , движение вдоль которого описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1) - a_2u_3(x_1). \quad (15)$$

Выбрав для системы (15) промежуточное управление, например, вида

$$u_3(x_1) = \frac{1}{a_2}(\alpha x_1 + f_1(x_1)), \quad (16)$$

находим уравнение движения ИТ вдоль  $s_2 = 0$ :

$$\dot{x}_1(t) = -\alpha x_1. \quad (17)$$

Условие асимптотической устойчивости в целом этого уравнения и, следовательно, движения вдоль  $s_2 = 0$  имеет весьма простой вид:  $\alpha > 0$ . Как видим, в этом случае достигается целевой инвариант  $x_1 = 0$ .

Подставим выражение (16) в управление (14) и определим "внутреннее" управление (14) в явном виде, с учетом которого запишем выражение поверхности переключения:

$$\begin{aligned}s_1 &= x_3 + u_2(x_1, x_2) = \\ &= x_3 + \frac{1}{a_3} \left[ f_2(x_1, x_2) + (f_1(x_1) + a_2x_2) \frac{1}{a_2} \left( \alpha + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{a_3 T_2} \left( x_2 + \frac{1}{a_2} (\alpha x_1 + f_1(x_1)) \right) = 0.\end{aligned}$$

Для проверки выполнения условия возникновения скользящего режима

$$s_1 \dot{s}_1(t) < 0 \quad (18)$$

выразим  $\dot{s}_1(t)$  из функционального уравнения (5), записанного с учетом соотношений (10) и (9):

$$\begin{aligned}\dot{s}_1(t) &= -(\beta_1(f_1(x_1) + a_2x_2)\text{sign}x_1 + \\ &+ \beta_2(f_2(x_1, x_2) + a_3x_3)\text{sign}x_2)\text{sign}s_1 - \frac{1}{T_1}\psi_1\text{sign}s_1.\end{aligned}$$

Подставив полученные выше выражения для  $s_1$  и  $\dot{s}_1(t)$  в (18), можно убедиться, что условие (18) выполняется при  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$  и  $\beta_1 \gg \beta_2$ .

Согласно методу АКАР [20, 21] условие устойчивости замкнутой системы (9) с синтезированным управлением (11) складывается из условия устойчивости финишной декомпозированной системы (17), в нашем случае это  $\alpha > 0$ , и условий устойчивости движения к введенным многообразиям (10), (13), которые определяются условиями устойчивости решений функциональных уравнений (5), (8), в нашем случае это  $T_1 > 0$ ,  $T_2 > 0$ .

Итак, вычислив частные производные  $u_2(x_1, x_2)$  и подставив их в управление (11), получим итоговое выражение для искомого закона управления объектом (9), обеспечивающего устойчивость замкнутой системы, скользящий режим и выполнение целевого инварианта  $x_1 = 0$ .

Как видим, управление (11) имеет переменную структуру, а "внутренние" (промежуточные) управления (14), (16) представляют собой непрерывные функции переменных состояния системы (9).

*Пример 2.* Рассмотрим пример синтеза SMC математическим маятником в верхнем неустойчивом положении [23]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= \sin x_1 + x_3; \\ \dot{x}_3(t) &= u. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $x_1$  — угол отклонения маятника от вертикали;  $x_2$  — скорость отклонения;  $x_3$  — момент, приложенный к маятнику.

Ставится задача стабилизации маятника моментом, приложенным к нему на оси подвеса. Указанный момент развивается исполнительным механизмом, который представлен интегрирующим звеном. Требуется найти SMC  $u(x_1, x_2, x_3)$  на входе исполнительного механизма, которое стабилизирует маятник в верхнем положении равновесия, т. е. обеспечивает целевой инвариант  $x_1 = 0$  и асимптотическую устойчивость системы.

Как видим, уравнения объекта (19) соответствуют виду (9) при  $a_2 = a_3 = 1$ ,  $f_1(x_1) = f_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ ,  $f_2(x_1, x_2) = \sin x_1$ . Тогда, повторяя этапы синтеза Примера 1, получаем из (16):  $u_3(x_1) = \alpha x_1$  из (14):  $u_2(x_1, x_2) = \sin x_1 + \alpha x_2 + \frac{1}{T_2}(x_2 + \alpha x_1)$ ; а из (11):

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= -(\beta_1 x_2 \operatorname{sign} x_1 + \beta_2 (\sin x_1 + x_3) \operatorname{sign} x_2) \operatorname{sign} s_1 - \\ &- \left( \left( \cos x_1 + \frac{\alpha}{T_2} \right) x_2 + \left( \alpha + \frac{1}{T_2} \right) (\sin x_1 + x_3) \right) - \\ &- \frac{1}{T_1} (\beta_1 |x_1| + \beta_2 |x_2| + |s_1|) \operatorname{sign} s_1, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $s_1 = x_3 + u_2(x_1, x_2)$ .

Условие (18) в нашем случае принимает вид

$$\begin{aligned} &\left[ -(\beta_1 x_2 \operatorname{sign} x_1 + \beta_2 (\sin x_1 + x_3) \operatorname{sign} x_2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \operatorname{sign} s_1 - \frac{1}{T_1} \psi_1 \operatorname{sign} s_1 \right] \times \\ &\times \left[ x_3 + \sin x_1 + \alpha x_2 + \frac{1}{T_2} (x_2 + \alpha x_1) \right] < 0 \end{aligned}$$

и выполняется при  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$  и  $\beta_1 \gg \beta_2$ , а условия асимптотической устойчивости замкнутой системы (19), (20):  $\alpha > 0$ ,  $T_1 > 0$ ,  $T_2 > 0$ .

*Пример 3.* В работе [22] был подробно описан синтез SMC энергосистемой с одним синхронным генератором (СГ), работающим на шины большой (бесконечной) мощности, на основе заданного инвариантного многообразия. Рассмотрим теперь синтез SMC на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий, обеспечивающего стабилизацию частоты вращения СГ  $\omega = \omega_0$ . Математическая модель объекта управления, представленная в работе [22], имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= \omega - \omega_0; \\ \dot{\omega}(t) &= a_0 - a_1 E'_q \sin \delta - a_2 (\omega - \omega_0); \\ \dot{E}'_q(t) &= -a_3 E'_q - a_4 \cos \delta + a_3 E_f, \end{aligned} \quad (21)$$

здесь  $\delta$  — синхронный угол СГ;  $\omega$  — частота вращения ротора СГ;  $\omega_0$  — синхронная частота СГ;  $E'_q$  — переходная ЭДС СГ по оси  $q$ ;  $E_f$  — напряжение возбуждения СГ (сигнал управления);  $a_i$ ,  $i = 0, 4$ , — постоянные коэффициенты.

На первом этапе синтеза задаем инвариантное многообразие вида (2):

$$\psi_1 = \beta_1 |\delta - \delta_0| + \beta_2 |\omega - \omega_0| + |s_1| = 0, \quad (22)$$

где  $s_1 = a_1 E'_q \sin \delta + u_2(\delta, \omega)$ . Как видим, в этом случае выражение для  $s_1$  отличается от выражения (3).

Подставляя (22) в функциональное уравнение (5), получаем в силу уравнений объекта (21) закон управления

$$E_f = -\frac{1}{a_1 a_3 \sin \delta} \times \left( \begin{aligned} &\beta_1(\omega - \omega_0) \text{sign}(\delta - \delta_0) + \\ &+ \beta_2(a_0 - a_1 E'_q \sin \delta - \\ &- a_2(\omega - \omega_0)) \text{sign}(\omega - \omega_0) \end{aligned} \right) \text{sign} s_1 + E'_q + \frac{a_4}{a_3} \cos \delta - \frac{1}{a_1 a_3 \sin \delta} \times \left( \begin{aligned} &a_1 E'_q (\omega - \omega_0) \cos \delta + \frac{\partial u_2}{\partial \delta} (\omega - \omega_0) + \\ &+ \frac{\partial u_2}{\partial \omega} (a_0 - a_1 E'_q \sin \delta - a_2 (\omega - \omega_0)) + \\ &+ \frac{1}{T_1} \psi_1 \text{sign} s_1 \end{aligned} \right). \quad (23)$$

Под действием закона управления (23) ИТ системы (21) попадает в окрестность многообразия (22), движение вдоль которого описывается декомпозированной системой

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(t) &= \omega - \omega_0; \\ \dot{\omega}(t) &= a_0 + u_2 - a_2(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (24)$$

Выберем для системы (24) промежуточное управление, например, вида

$$u_2 = -(a_2 + \lambda_2)(\omega - \omega_0) - \lambda_1 \delta. \quad (25)$$

Тогда уравнение движения ИТ системы (24) с учетом (25) имеет вид

$$\ddot{\delta}(t) + \lambda_2 \dot{\delta}(t) + \lambda_1 \delta(t) = a_0.$$

Условие асимптотической устойчивости в целом этого уравнения имеет весьма простой вид:  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , а выбором значений этих параметров можно обеспечить желаемый вид переходного процесса по углу СГ. А условие возникновения скользящего режима (18) обеспечивается выбором параметров  $\lambda_i$ ,  $\beta_i$ .

На рис. 1, 2 показаны результаты моделирования замкнутой системы (21), (23) с номинальными параметрами СГ [22]:  $\omega_0 = 1$ ;  $a_0 = 0,128$ ;  $a_1 = 0,304$ ;  $a_2 = 0,571$ ;  $a_3 = 0,125$ ;  $a_4 = 0,452$  и параметрами закона управления:  $\beta_1 = 10$ ;  $\beta_2 = 20$ ;  $\delta_0 = 0,4$ ;  $T_1 = 2$ ;  $\lambda_1 = 100$ ;  $\lambda_2 = 20$ .

При моделировании замкнутой системы в СГ рассматриваются параметрические возму-

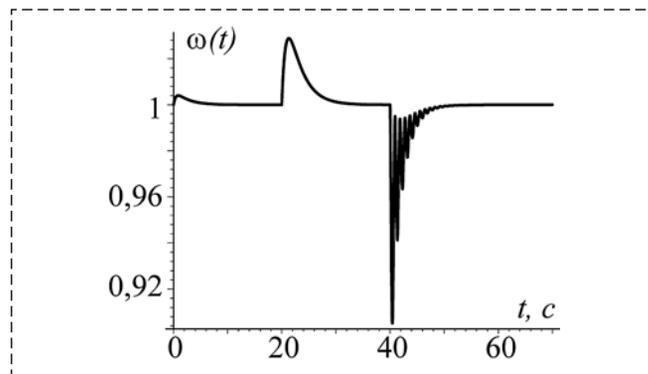


Рис. 1. График изменения частоты вращения  
Fig. 1. Dynamics of rotation speed

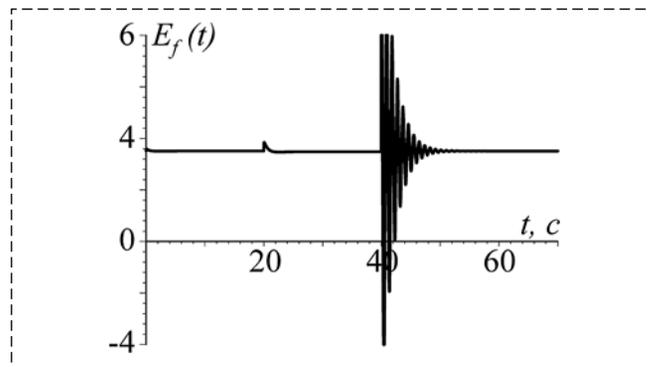


Рис. 2. График изменения управления  
Fig. 2. Dynamics of excitation control

щения: в момент  $t = 20$  с в десять раз увеличивается эквивалентное индуктивное сопротивление линии электропередачи, а в момент  $t = 40$  с на 30 % уменьшается механическая мощность, поступающая на СГ. Из результатов моделирования видно, что закон управления (23) обеспечивает робастность к этим возмущениям и выполнение целевого инварианта  $\omega = \omega_0$ .

*Пример 4.* Рассмотрим применение методики синтеза SMC на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий для решения задачи обеспечения робастности при синхронизации двух хаотических систем с аттрактором Спротта (Sprott's jerk system).

Математическая модель объекта управления с двумя системами Спротта согласно работе [24] представлена:

- моделью ведущей системы (master system)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2; \\ \dot{x}_2(t) &= x_3; \\ \dot{x}_3(t) &= -ax_1 + x_2^2 - bx_3, \end{aligned}$$

где  $x_i$  — переменные состояния ведущей системы;  $a > 0$ ,  $b > 0$  — постоянные параметры;

- моделью ведомой системы (slave system)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2; \\ \dot{y}_2(t) &= y_3; \\ \dot{y}_3(t) &= -ay_1 + y_2^2 - by_3 + u, \end{aligned}$$

где  $y_i$  — переменные состояния ведомой системы;  $u$  — управление.

Вводя новые переменные — ошибки синхронизации  $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , совместную динамику ведущей и ведомой систем согласно работе [24] представим следующей системой:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= e_2; \\ \dot{e}_2(t) &= e_3; \\ \dot{e}_3(t) &= -ae_1 + y_2^2 - x_2^2 - be_3 + u. \end{aligned} \quad (26)$$

Для системы (26) ставится задача построения разрывного закона управления, обеспечивающего синхронизацию ведущей и ведомой систем и робастность к внешнему возмущению, действующему на ведущую систему.

На первом этапе синтеза задаем инвариантное многообразие вида (2):

$$\psi_1 = \beta_1 |e_1| + \beta_2 |e_2| + |s_1| = 0, \quad (27)$$

где  $s_1 = e_3 + u_2(e_1, e_2)$ .

Подставляя соотношение (27) в функциональное уравнение (5), получаем в силу уравнений объекта (26) закон управления

$$\begin{aligned} u &= -(\beta_1 e_2 \text{sign} e_1 + \beta_2 e_3 \text{sign} e_2) \text{sign} s_1 + \\ &+ ae_1 - y_2^2 + x_2^2 + be_3 - \\ &- \frac{\partial u_2}{\partial e_1} e_2 - \frac{\partial u_2}{\partial e_2} e_3 - \frac{1}{T_1} \psi_1 \text{sign} s_1. \end{aligned} \quad (28)$$

Под действием закона управления (28) ИТ системы (26) попадает в окрестность многообразия (27), движение вдоль которого описывается декомпозированной системой:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= e_2; \\ \dot{e}_2(t) &= -u_2(e_1, e_2). \end{aligned} \quad (29)$$

Выберем для системы (29) промежуточное управление, например, вида

$$u_2(e_1, e_2) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2. \quad (30)$$

Тогда движение ИТ системы (29) будет описываться уравнением

$$\ddot{e}_1(t) + \lambda_2 \dot{e}_1(t) + \lambda_1 e_1 = 0.$$

Условие асимптотической устойчивости в целом этого уравнения имеет весьма простой вид:  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , а выбором значений этих параметров можно обеспечить желаемый вид переходного процесса. Условие возникновения скользящего режима (18) обеспечивается выбором параметров  $\lambda_j$ ,  $\beta_j$ . Таким образом, подставляя управление (30) в закон (28), получим итоговое выражение для управления.

В работе [24] на основе бэкстеппинга для системы (26) был получен следующий закон управления:

$$u = (a - 3)e_1 - 5e_2 + (b - 3)e_3 - y_2^2 + x_2^2. \quad (31)$$

На рис. 3–5 показаны результаты моделирования замкнутой системы (26), (28) с номинальными параметрами системы Спротта [24]:  $a = 1$ ;  $b = 2,02$  и параметрами закона управления:  $T_1 = \beta_1 = \beta_2 = 0,2$ ;  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ . На рис. 6–8 показаны результаты моделирования замкнутой системы (26), (31) с такими же параметрами системы Спротта. При этом в обоих слу-

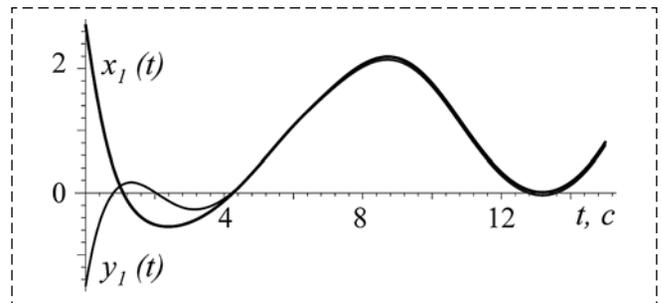


Рис. 3. График изменения переменных  $x_1$ ,  $y_1$  с законом (28)  
Fig. 3. Synchronization of the states  $x_1$ ,  $y_1$  with control (28)

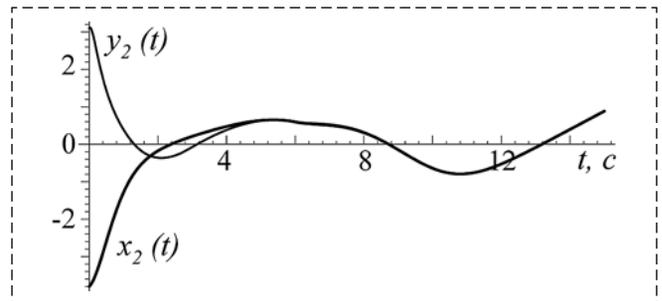


Рис. 4. График изменения переменных  $x_2$ ,  $y_2$  с законом (28)  
Fig. 4. Synchronization of the states  $x_2$ ,  $y_2$  with control (28)

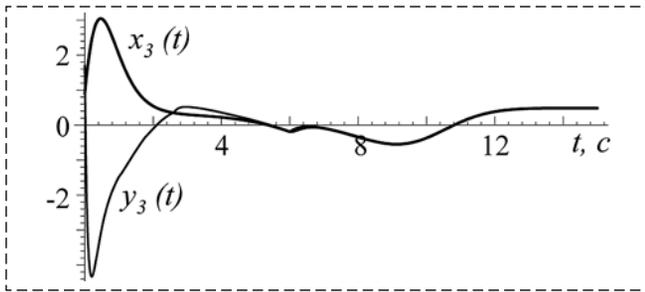


Рис. 5. График изменения переменных  $x_3, y_3$  с законом (28)  
 Fig. 5. Synchronization of the states  $x_3, y_3$  with control (28)

чаях ведущая система подвержена внешнему возмущению

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 6 < t < 10; \\ 0, & t > 10, \end{cases} \quad (32)$$

которое аддитивно входит в третье уравнение.

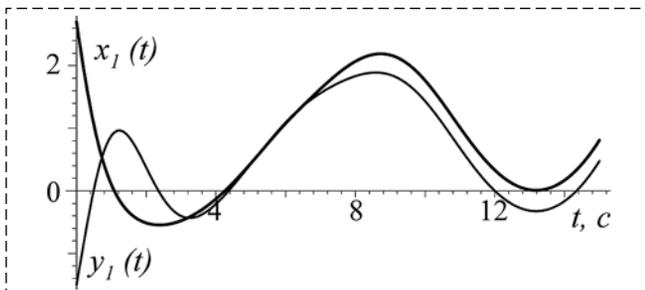


Рис. 6. График изменения переменных  $x_1, y_1$  с законом (31)  
 Fig. 6. Synchronization of the states  $x_1, y_1$  with control (31)

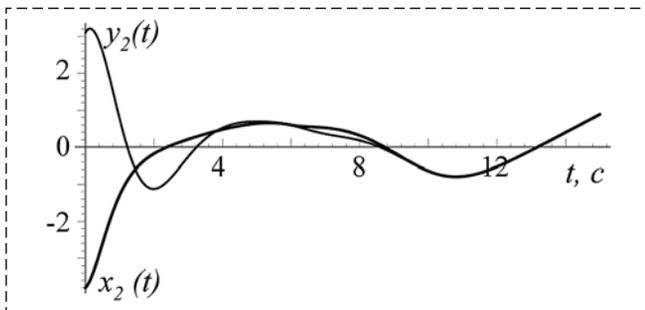


Рис. 7. График изменения переменных  $x_2, y_2$  с законом (31)  
 Fig. 7. Synchronization of the states  $x_2, y_2$  with control (31)

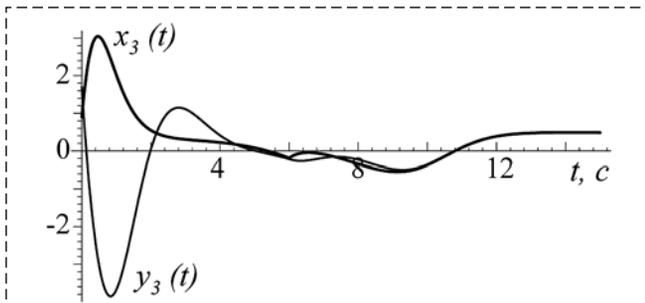


Рис. 8. График изменения переменных  $x_3, y_3$  с законом (31)  
 Fig. 8. Synchronization of the states  $x_3, y_3$  with control (31)

Из рис. 3—5 видно, что под действием управления (28) переменные состояния ведущей системы синхронизируются с переменными состояниями ведомой системы и они оказываются нечувствительными к внешнему возмущению (32). При этом по переменной  $x_1$  наблюдаются незначительные колебания, вызванные скользящим режимом. А согласно рис. 6—8 при действии управления (31) часть переменных также синхронизируется — ошибки  $e_i(t) \rightarrow 0$ ,  $i = 2, 3$ , но на их поведение влияет внешнее возмущение — появляется ненулевая ошибка синхронизации  $e_1(t)$ , что видно из рис. 6.

### Заключение

Итак, в данной работе представлена методика синтеза законов разрывного управления на основе последовательной совокупности инвариантных многообразий метода АКАР. Данная методика позволяет осуществлять синтез робастных законов управления и совместно решать классические подзадачи синтеза SMC для нелинейных объектов, а также упрощает процедуру анализа устойчивости замкнутой системы. В общем случае возможно использование нелинейных выражений для поверхностей скольжения.

Изложенная методика проиллюстрирована примерами синтеза для нелинейных технических систем, которые показывают выполнение поставленных задач управления.

В последующих работах будет показано применение рассмотренной в статье методики для векторного синтеза законов разрывного управления нелинейными системами.

### Список литературы

1. Уткин В. И. Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974. 272 с.
2. Utkin V. Variable structure systems with sliding modes // IEEE Transactions on Automatic Control. 1977. Vol. 22, N. 2. P. 212—222.
3. Utkin V., Guldner J., Shi J. Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. 2nd ed. Boca Raton, London: CRC Press, Taylor and Francis, 2009. 503 p.
4. Теория систем с переменной структурой / Под ред. С. В. Емельянова. М.: Наука, 1970. 592 с.
5. Park B. S., Yoo S. J., Park J. B., Choi Y. H. Adaptive Neural Sliding Mode Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots with Model Uncertainty // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2009. Vol. 17, N. 1. P. 207—214.
6. Al-Holou N., Lahdhiri T., Joo D. S., Weaver J., Al-Abbas F. Sliding mode neural network inference fuzzy logic control for active suspension systems // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2002. Vol. 10, N. 2. P. 234—246.

7. Yu X. H., Man Z. H. Model reference adaptive control systems with terminal sliding modes // International Journal of Control. 1996. Vol. 64, N. 6. P. 1165—1176.
8. Palm R. Robust-control by fuzzy sliding mode // Automatica. 1994. Vol. 30, N. 9. P. 1429—1437.
9. Huang Y.-J., Kuo T.-C., Chang S.-H. Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters // IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics: Part B — Cybernetics. 2008. Vol. 38, N. 2. P. 534—539.
10. Tong S. C., Li H. X. Fuzzy adaptive sliding-mode control for MIMO nonlinear systems // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2003. Vol. 11, N. 3. P. 354—360.
11. Nekoukar V., Erfanian A. Adaptive fuzzy terminal sliding mode control for a class of MIMO uncertain nonlinear systems // Fuzzy Sets and Systems. 2011. Vol. 179. P. 34—49.
12. Bartolini G., Pisano A., Punta E., Usai E. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems // International Journal of Control. 2003. Vol. 76, N. 9—10. P. 875—892.
13. Emelyanov S. V., Korovin S. K., Levant A. Higher-order sliding modes in control systems // Differential Equations. 1993. Vol. 29. P. 1627—1647.
14. Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control // International Journal of Control. 2003. Vol. 75, N. 9—10. P. 924—941.
15. Cavallo A., Natale C. High-order sliding control of mechanical systems: Theory and experiments // Control Engineering Practice. 2004. Vol. 12. P. 1139—1149.
16. Laghrouche S., Plestan F., Glumineau A. Higher order sliding mode control based on integral sliding mode // Automatica. 2007. Vol. 43. P. 531—537.
17. Loukianov A. G., Espinosa-Guerra O., Castillo-Toledo B., Utkin V. A. Integral sliding mode control for systems with time delay // Proceedings of the 2006 International workshop on variable structure systems, VSS'06. 2006. P. 256—261.
18. Кочетков С. А., Краснова С. А., Уткин В. А. Метод регуляризации скользящих движений по обратной связи // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 1, № 4. С. 67—77.
19. Уткин В. А., Loukianov A. G. Управление ветряной энергосистемой на скользящих режимах // Сборник трудов XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014). М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 2257—2267.
20. Колесников А. А. Синергетическая теория управления. М.: Энергоатомиздат, 1994. 344 с.
21. Колесников А. А. Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. 2-е изд. М.: Либроком, 2012. 240 с.
22. Кузьменко А. А., Попов А. Н., Радионов И. А. Нелинейное робастное управление возбуждением синхронного генератора: синергетическая система с переменной структурой // Информатика и системы управления. 2014. № 3(41). С. 130—139.
23. Колесников А. А., Колесников Ал. А., Кузьменко А. А. Методы АКАР и АКОР в задачах синтеза нелинейных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 10. С. 657—669.
24. Vaidyanathan S., Idowu B. A., Azar A. T. Backstepping controller design for the global chaos synchronization of Sprott's jerk systems // Studies in Computational Intelligence. 2015. Vol. 581. P. 39—58.

## Sliding Mode Control Laws Design by the ADAR Method with Subsequent Invariant Manifolds Aggregation

A. A. Kolesnikov, [ankolesnikov@sfedu.ru](mailto:ankolesnikov@sfedu.ru), A. A. Kuz'menko, [aakuzmenko@sfedu.ru](mailto:aakuzmenko@sfedu.ru),  
Southern Federal University, Taganrog city, 347922, Russian Federation

Corresponding author: **Kuz'menko Angrew A.**, Associated Professor,  
Southern Federal University, Taganrog city, 347922, Russian Federation, e-mail: [aakuzmenko@sfedu.ru](mailto:aakuzmenko@sfedu.ru)

Accepted on March 26, 2019

### **Abstract**

*Sliding mode control (SMC) laws are commonly used in engineering to make a system robust to parameters change, external disturbances and control object unmodeled dynamics. State-of-the-art capabilities of the theory of adaptive and robust control, the theory of fuzzy systems, artificial neural networks, etc., which are combined with SMC, couldn't resolve current issues of SMC design: vector design and stability analysis of a closed-loop system with SMC are involved with considerable complexity. Generally the classical problem of SMC design consists in solving subtasks for transit an object from an arbitrary initial position onto the sliding surface while providing conditions for existence of a sliding mode at any point of the sliding surface as well as ensuring stable movement to the desired state. As a general rule these subtasks are solved separately. This article presents a methodology for SMC design based on successive aggregation of invariant manifolds by the procedure of method of Analytical Design of Aggregated Regulators (ADAR) from the synergetic control theory. The methodology allows design of robust control laws and simultaneous solution of classical subtasks of SMC design for nonlinear objects. It also simplifies the procedure for closed-loop system stability analyze: the stability conditions are made up of stability criteria for ADAR method functional equations and the stability criteria for the final decomposed system which dimension is substantially less than dimension of the initial system. Despite our paper presents only the scalar SMC design procedure in details, the ideas are also valid for vector design procedure: the main difference is in the number of invariant manifolds introduced at the first and following stages of the design procedure. The methodology is illustrated with design procedure examples for nonlinear engineering systems demonstrating the achievement of control goals: hitting to target invariants, insensitivity to emerging parametric and external disturbances.*

**Keywords:** nonlinear systems, control systems, system synthesis, robustness, sliding mode control, sliding surface, synergetic control theory, ADAR method, invariant manifold, synchronous generator, chaos synchronization

**Acknowledgements:** The study was carried out with the financial support of the Russian Foundation for Basic Research in the framework of the research project No. 19-08-00366.

For citation:

**Kolesnikov A. A., Kuz'menko A. A.** Sliding Mode Control Laws Design by the ADAR Method with Subsequent Invariant Manifolds Aggregation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 8, pp. 451–460.

DOI: 10.17587/mau.20.451-460

### References

1. **Utkin V. I.** Sliding modes and their application in systems with variable structure, Moscow, Nauka, 1974, 272 p. (in Russian).
2. **Utkin V.** *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 212–222.
3. **Utkin V., Guldner J., Shi J.** Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. 2nd ed., Boca Raton, London, CRC Press, Taylor and Francis, 2009, 503p.
4. **Emel'janov S. V.** ed. Theory of systems with variable structure, Moscow, Nauka, 1970, 592 p.
5. **Park B. S., Yoo S. J., Park J. B., Choi Y. H.** *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, vol. 17, no. 1, pp. 207–214.
6. **Al-Holou N., Lahdhiri T., Joo D. S., Weaver J., Al-Abbas F.** *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, vol. 10, no. 2, pp. 234–246.
7. **Yu X. H., Man Z. H.** *International Journal of Control*, 1996, vol. 64, no. 6, pp. 1165–1176.
8. **Palm R.** *Automatica*, 1994, vol. 30, no 9, pp. 1429–1437.
9. **Huang Y.-J., Kuo T.-C., Chang S.-H.** *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics: Part B — Cybernetics*, 2008, vol. 38, no. 2, pp. 534–539.
10. **Tong S. C., Li H. X.** *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2003, vol. 11, no. 3, pp. 354–360.
11. **Nekoukar V., Erfanian A.** *Fuzzy Sets and Systems*, 2011, vol. 179, pp. 34–49.
12. **Bartolini G., Pisano A., Punta E., Usai E.** *International Journal of Control*, 2003, vol. 76, no. 9–10, pp. 875–892.
13. **Emelyanov S. V., Korovin S. K., Levant A.** *Differential Equations*, 1993, vol. 29, pp. 1627–1647.
14. **Levant A.** *International Journal of Control*, 2003, vol. 75, no. 9–10, pp. 924–941.
15. **Cavallo A., Natale C.** *Control Engineering Practice*, 2004, vol. 12, pp. 1139–1149.
16. **Laghrouche S., Plestan F., Glumineau A.** *Automatica*, 2007, vol. 43, pp. 531–537.
17. **Loukianov A. G., Espinosa-Guerra O., Castillo-Toledo B., Utkin V. A.** *Proceedings of the 2006 International workshop on variable structure systems, VSS'06*, 2006, pp. 256–261.
18. **Kochetkov S. A., Krasnova S. A., Utkin V. A.** *Ufimskij Matematicheskij Zhurnal*, 2010, vol. 1, no. 4, pp. 67–77 (in Russian).
19. **Utkin V. A., Loukianov A. G.** *Sbornik trudov XII Vserossijskogo soveshhanija po problemam upravlenija (VSPU-2014)*, Moscow, Institut problem upravlenija im. V. A. Trapeznikova, 2014, pp. 2257–2267 (in Russian).
20. **Kolesnikov A. A.** Synergetic control theory, Moscow, Jenergoatomizdat, 1994, 344 p. (in Russian).
21. **Kolesnikov A. A.** Synergetic methods of complex systems control: theory of system synthesis, Moscow, Librokom, 2012, 240 p. (in Russian).
22. **Kuz'menko A. A., Popov A. N., Radionov I. A.** *Informatika I Sistemy Upravlenija*, 2014, no. 3(41), pp. 130–139 (in Russian).
23. **Kolesnikov A. A., Kolesnikov A. A., Kuz'menko A. A.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 10, pp. 657–669 (in Russian).
24. **Vaidyanathan S., Idowu B. A., Azar A. T.** *Studies in Computational Intelligence*, 2015, vol. 581, pp. 39–58.



### ИНФОРМАЦИОННОЕ ПИСЬМО

С 30 октября по 1 ноября 2019 года в Санкт-Петербургском государственном электротехническом университете «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) (Россия, Санкт-Петербург) состоится III Международная научная конференция по проблемам управления в технических системах (ПУТС-2019).

#### ОРГАНИЗАТОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ

- Министерство науки и высшего образования
- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина) (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»)
- ГНЦ РФ АО «Концерн «ЦНИИ «Электрон»
- Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН)
- Российская Северо-Западная секция IEEE
- ООО «Мицубиси электрик (рус)»
- АО «НПФ «Система-Сервис»
- ООО «Амтел»

Конференция проходит при поддержке Комитета по науке и высшей школе Правительства Санкт-Петербурга.

#### СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

1. СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ
4. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ В УПРАВЛЕНИИ
5. РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И КОМПЛЕКСЫ

С. А. Дубовик, д-р техн. наук, проф., duboviksa@gmail.com,  
Севастопольский государственный университет

## Асимптотическая семантизация данных в системах управления<sup>1</sup>

*Асимптотические методы анализа больших уклонений в настоящей работе используются для преобразования информации о состоянии управляемого диффузионного процесса в вероятностные оценки о штатном или нештатном развитии процесса. Тем самым, над рефлексным контуром локальной стабилизации реализуется система глобального семантического контроля, своего рода вторая сигнальная система. В качестве аппарата анализа используется функционально-аналитический подход, аналогичный слабой сходимости вероятностных мер, позволяющий существенно расширить условия применения метода. Глобальный контроль сводится к решению задачи Лагранжа в форме Понтрягина для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (системы путей), функционала действия Вентцеля—Фрейдлина, который представлен здесь как интегрально-квадратичный критерий для функций управления в системе путей, и граничного условия в виде рассматриваемого критического состояния системы. Ограниченное решение задачи Лагранжа—Понтрягина на полупрямой, дающее прообраз квазипотенциала системы путей, в работе названо А-профилем критического состояния. А-профиль позволяет существенно упростить процедуру анализа больших уклонений, вплоть до ее осуществления в реальном времени и реализации контура глобального контроля (вторая сигнальная система). Полученная двухуровневая архитектура позиционируется как базовая для достижения функциональной устойчивости системы управления. Формулируется предположение, что такую роль аппарат больших уклонений может играть и в биологических эволюционирующих системах, в том числе в образовании языков и других атрибутов эволюции высшей нервной деятельности человека.*

**Ключевые слова:** функционал действия, большие уклонения, экстремаль, функциональная устойчивость, глобальный контроль, эволюция, язык

### Введение

Данную статью можно рассматривать как продолжение работы [1], что избавляет от необходимости детального вступления. Здесь, как и в работе [1], основным конструктивным методом остается асимптотический анализ больших уклонений (АБУ), но акцент смещается к следующей цели: с помощью АБУ сформировать в задаче управления предметную область, получив в итоге систему, основанную на знаниях и обеспечивающую функциональную устойчивость управления [2]. Расширение прикладного назначения метода потребовало перехода от чисто вероятностных его оснований [3] к функционально-аналитическому подходу [4], аналогичному слабой сходимости вероятностных мер. В результате получается, что собственно технологию синтеза составляют детерминированные уравнения динамики, квадратичные задачи Лагранжа и классическая теория управляемости [5], правда, примененная не к управлениям, а к возмущениям, действующим на объект (и в этом смысле, скорее, теория контруправляемости). Это реализация идеи, которая сформулирована в заключении работы [2]: для построения функционально

устойчивой системы (ФУС) нужно робастный регулятор (в смысле  $H^\infty$ -синтеза) "расщепить" на части, выделяя в нем рефлексную систему локальной стабилизации и систему верхнего уровня, обеспечивающую реагирование на критические состояния (КС), обусловленные действием возмущений. Если вспомнить аналогию между первой сигнальной системой у живых организмов (и, прежде всего, у *Homo Sapiens*), то тут же возникает ассоциация между контуром глобального контроля (КГК) и второй сигнальной системой, присущей, как известно, только *Homo Sapiens*. Далее мы еще вернемся к этим аналогиям, которые, кстати, вполне естественны для кибернетики как науки об "управлении и связи в животном и машине". Порядок изложения следующий: сначала (п. 1) вместе с формулировкой проблемы и основных компонентов ее решения представлен и основной результат — алгоритм ФУС, формирующий при необходимости сигналы опасного превышения вероятностями КС некоторых заданных уровней (в SCADA-системах такие сигналы известны как "алармы"). Вероятностный анализ начинается с простейшего дискретного случая (п. 2), а затем задача рассматривается в п. 3 с позиций сходимости в смысле больших уклонений. В п. 4 рассмотрены применения к синтезу ФУС и даны некоторые достаточные условия. В полной мере

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01220)

алгоритм синтеза ФУС, основанный на явном определении профилей, удастся реализовать в линейном случае (п. 5).

### 1. Постановка задачи, основные понятия и алгоритм управления

Основное уравнение, которое нас будет интересовать как объект АБУ, является возмущенным, т. е. содержит  $\varepsilon > 0$  — малый параметр:

$$\dot{\tilde{x}} = a(\tilde{x}) + \varepsilon \sigma(\tilde{x})\dot{w}; \quad \tilde{x}(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где  $\dot{w}$  —  $k$ -мерный вектор "белого шума";  $a, \sigma$  — гладкие матричные функции.

Наряду с этим рассмотрим две порождающие системы:

невозмущенную

$$\dot{x} = a(x); \quad x(t_0) = x_0 \quad (1a)$$

и систему путей

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + \sigma(\varphi)v; \quad \varphi(t_0) = x_0, \quad (1b)$$

где  $v$  — суммируемая функция, такая что на решениях (1b) определен функционал действия [3]:

$$S_{t_0 t_K}(\varphi, v) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} v^T v dt, \quad (2)$$

который конечен, если решение  $\varphi$  на  $[t_0, t_K]$  абсолютно непрерывно, и равен бесконечности в противном случае (т. е., если  $\varphi$  не абсолютно непрерывна, или не удовлетворяет (1b)). Далее будут использованы следующие обозначения:

$R_+ = \{t : 0 \leq t < \infty\}$ ,  $R_- = \{t : t_0 \geq t > -\infty\}$  — множества действительных чисел; множества целых чисел (и производных от них рациональных чисел), обозначения которых используют аналогичные индексы, вводятся в п. 2;

$\|x\| = \sqrt{(x^T x)}$  — евклидова норма вектора или соответствующая ей норма, если  $x$  — матрица;  $\|x\|_2^2 = \int_{R_{\pm}} \|x\|^2 dt$ ;  $\|x\|_{\infty} = \sup_{R_{\pm}} \|x\|$  (знак в  $R_{\pm}$  определяется индексом числовой мажоранты:  $c_+ > 0$  или  $c_- > 0$ );

$a_x(x) = \{\partial a_i(x) / \partial x_j\}$  — матрица частных производных от вектора  $a(x)$  по вектору  $x$ ;

$C_b^+(E)$  — множество  $R_+$ -значных ограниченных непрерывных функций на  $E$ ;

$C^1(D)$  — множество  $R^n$ -значных функций, имеющих непрерывные частные производные в  $D \subset R^n$ ;

$0_{k \times m}$ ,  $I_k$  — матрицы (соответственно)  $(k \times m)$ -мерная нулевая и  $(k \times k)$ -мерная единичная;  $a \vee b$ ,  $a \wedge b$  — соответственно максимум, минимум чисел  $a$  и  $b$ .

Все указанные выше системы будем считать стабилизированными в том смысле, что

$$a(x) = \alpha(x, U),$$

где управления  $U(t)$  формируются в виде обратной связи

$$U = Kx \quad (3)$$

таким образом, чтобы обеспечить устойчивое состояние равновесия  $\chi$  (аттрактор) невозмущенной системы (1a) с областью притяжения  $O_{\chi}$ . Далее будем считать, что  $\chi = 0$ , а стабилизирующее управление (3) определяется линеаризованной (невозмущенной) системой:

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 U; \quad y = C_0 x, \quad (4)$$

где матрицы  $A_0, B_0$  суть матрицы частных производных  $\alpha(x, U)$  по аргументам (соответственно) в нуле, а  $y$  — вектор выходных координат; критерий качества стабилизации:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} y^T y dt + R_{t_0 t_K}, \quad R_{t_0 t_K} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} U^T R U dt,$$

где  $R = R^T > 0$ .

В предположении управляемости (пара  $(A_0, B_0)$ ) и наблюдаемости (пара  $(A_0, C_0)$ ) системы (4) получаем:

$$K = -R^{-1} B_0^T P, \quad (5)$$

где  $P > 0$  удовлетворяет матричному уравнению

$$0 = -PA_0 - A_0^T P - C_0^T C_0 + PB_0 R^{-1} B_0^T P.$$

В результате система (4), замкнутая управлением (3), (5), оказывается асимптотически устойчивой, а матрица

$$A = A_0 + B_0 K = A_0 - B_0 R^{-1} B_0^T P$$

— гурвицевой.

Глобальные свойства системы (1) будем описывать с помощью системы путей, учитывая, прежде всего, возможность отклонений состояния системы (1) от нуля в направлении границы  $\partial_D$  эксплуатационной области  $D \subset O_{\chi}$  ( $D$  — открытое множество), относительно которой будем считать, что при достаточно малом  $\mu > 0$

$$B_{\mu}(0) \subset D,$$

где  $B_r(c)$  — открытый шар радиуса  $r$  с центром в  $c \in R^n$ .

Пусть  $\partial_D = \bigcup \partial_j$  и имеется конечная совокупность  $\Lambda = \{Y_j\}^j$  таких критических состояний (КС):

$$Y_j(t) = c_j \tilde{x}(t); Y_j \in \partial_j.$$

Предположим, что в каждый момент времени  $t = t_K$  может возникать опасность только одного КС  $Y_K \in \partial_K$ , любого из данной совокупности. Тогда можно считать, что  $Y = Y_K$ , и поставить вопрос о прогнозе КС, полагая

$$t_K = \inf\{t : Y(t) \in \partial_K, t > t_0, \tilde{x}(t_0) \in D\}. \quad (6)$$

Сформулируем следующую задачу оптимального управления (Лагранжа—Понтрягина (ЛП)): на решениях (1b) минимизировать функционал действия (шума) (2) при дополнительном условии

$$Y(t_K) = c_K \varphi(t_K) \in \partial_K, \quad (7)$$

где  $c_K$  — матрица полного ранга.

**Определение 1.** *Потенциалом КС* будем называть взятое со знаком минус минимальное значение критерия (2):

$$-\hat{S}_{t_0 t_K}(\hat{\varphi}, \hat{\nu}) = -\inf S_{t_0 t_K}(\varphi, \nu),$$

а *профилем КС* — экстремаль  $(\hat{\varphi}, \hat{\nu})$  в решении задачи ЛП.

Существование профиля  $(\hat{\varphi}, \hat{\nu})$  в наших предположениях и в силу выпуклости (2) следует из работы [6] (глава 3, теорема 4.1).

Эвристический алгоритм глобального контроля (АГК) может быть основан на следующем простом и естественном наблюдении: мерой близости текущего состояния  $\tilde{x}(t) \in D$  и КС  $Y_K \in \partial_K$  является потенциал КС, а сигналом (алармом) к антикризисной коррекции — превышение потенциалом КС некоторого порога  $-\pi_K < 0$ . Иными словами, процедура контроля в момент  $t$  сводится к операции сравнения  $\pi_K$  с  $S_{t_0 t_K}$ , где  $t_0 = t$ .

Обозначим правую часть выражения (1b):

$$\gamma(x, u) = a(x) + \sigma(x)u,$$

а также ее производные в нуле  $((x, u) = (0, 0))$ :

$$A = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)_0; G = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right)_0 = \sigma(0). \quad (8)$$

Введем в рассмотрение еще  $M(T)$  — множество точек для (1б) (множество достижимости (1b)), которые достижимы из  $\varphi(t_0) = \chi = 0$  за

время  $T$  посредством допустимых управлений  $\|v\| < L$  в (1b) на  $[t_0, t_0 + T]$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что *система путей (1b) невырождена*, если

$$M(T) \supset B_\mu(0)$$

при достаточно малом  $\mu > 0$ .

Следующий результат важен в вероятностном анализе для диффузионного процесса (1), представленном ниже.

**Лемма 1** ([7], proposition 3.3). Если пара  $(A, G)$  управляема, то (1b) невырождена.

Переходя к стохастической задаче, рассмотрим сначала существенно более простой случай линейной дискретной системы.

## 2. Асимптотика больших уклонений для дискретной системы

Пусть случайная величина  $\xi_j$ , принимающая значения  $+1, -1$  с вероятностями (соответственно)  $p_+, p_-$ , задает для частицы на прямой случайное блуждание длительностью  $n$  [8, 9], а именно: смещения  $\xi_j$  на каждом шаге являются независимыми одинаково распределенными обозначенным образом случайными величинами, так что значения смещений в числах шагов в положительном (+1), и отрицательном (−1) направлениях суть соответственно  $N_+, N_-$ , так что  $N_+ + N_- = n$ .

Случайные блуждания по точкам множества  $Z$  всех целых чисел описываются последовательностью:

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n = N_+ - N_-, n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

или эквивалентным рекуррентным уравнением:

$$S_k - S_{k-1} = \xi_k, k = 1, 2, \dots, S_0 = 0. \quad (10)$$

Как всякий случайный процесс, кроме такого определения в виде последовательности случайных величин  $\{S_j\}$ , он может быть представлен и как некоторое распределение вероятностей на множестве путей [9], т. е. ломаных, выходящих из точки  $(0, 0)$  с вершинами в точках  $(i, X_i)$ , где  $X_i$  — множество значений случайной величины  $S_i, i = 1, 2, \dots$ . Пути — это решения  $\varphi$  уравнения

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = v_i, \quad (11)$$

в котором элементы последовательности  $\{v_j\}$  принадлежат паре  $\{+1, -1\}$ , причем каждая тра-

ектория своей последовательностью из  $\{+1, -1\}$  определяется однозначно.

Для последовательности (9) (или (10)) рассмотрим вероятность КС:

$$p_n(A, B) = P(A \leq S_n \leq B)$$

для любого отрезка  $[A, B]$ , не содержащего среднее значение  $S_n$ . Для простоты будем считать, что  $A, B, S_n$  — одинаковой четности. Далее обозначим:

$$\mu_+ = N_+/n, \mu_- = N_-/n, a = A/n, b = B/n,$$

и тогда для эмпирического среднего имеем:

$$S_n/n = \mu_+ - \mu_- \rightarrow p_+ - p_-, n \rightarrow \infty,$$

(закон больших чисел), а для вероятности КС  $P_n(a, b) = P(a \leq S_n/n \leq b)$ :

$$\begin{aligned} P_n(a, b) &= \sum_{a < \frac{N_+ - N_-}{n} < b} \frac{n!}{N_+! N_-!} p_+^{N_+} p_-^{N_-} = \\ &= \sum_{a < \frac{N_+ - N_-}{n} < b} \frac{n!}{N_+! N_-!} e^{N_+ \ln p_+ + N_- \ln p_-}. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда, с учетом формулы Стирлинга и ее различных следствий [9]:  $\ln n! = n(\ln n - 1) + o(n)$ ,  $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ ,  $n \rightarrow \infty$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{N_+! N_-!} &\approx \frac{n^n e^{-n}}{N_+^{N_+} N_-^{N_-} e^{-n}} = \frac{1}{\mu_+^{N_+} \mu_-^{N_-}} = \\ &= e^{-(N_+ \ln \mu_+ + N_- \ln \mu_-)}. \end{aligned}$$

С учетом этого из соотношения (12) следует:

$$P_n(a, b) = \sum_{a < \frac{N_+ - N_-}{n} < b} e^{-(N_+ \ln \mu_+ + N_- \ln \mu_-) + N_+ \ln p_+ + N_- \ln p_- + o(1)},$$

где, вводя обозначение для относительной (Кульбака—Лейблера—Санова) энтропии [8, 10]

$$H(\mu, p) = \mu_+ \ln \frac{\mu_+}{p_+} + \mu_- \ln \frac{\mu_-}{p_-}, \quad (13)$$

имеем:

$$P_n(a, b) = \sum_{a < \frac{N_+ - N_-}{n} < b} e^{-nH(\mu, p) + o(1)}. \quad (14)$$

Для симметричного блуждания на прямой, когда  $p_+ = p_- = 1/2$ , обозначим  $\mu = \mu_+$ ,  $p = p_+ = 1/2$ . Тогда для энтропии (13) имеем

$$H(\mu, p) = \mu \ln(2\mu) + (1 - \mu) \ln[2(1 - \mu)].$$

Воспользуемся разложением по Тейлору функции

$$h(x) = H(1/2 + x, 1/2) \quad (15)$$

в нуле, учитывая, что

$$\begin{aligned} h(0) &= 0, h'(x) = \ln \frac{1/2 + x}{1/2 - x}, h'(0) = 0, \\ h''(x) &= \frac{1}{1/4 - x^2}, h''(0) = 4. \end{aligned}$$

В результате получим

$$h(x) = \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2). \quad (16)$$

Так как по определению (15) в соотношении (16)  $x = \mu - 1/2$ , и

$$S_n = N_+ - N_- = N - (n - N) = 2N - n,$$

то в выражении (10) имеем:

$$2x = 2\mu - 1 = S_n/n. \quad (17)$$

Представление (16), (17) справедливо только при достаточно малом  $x = \mu - 1/2$ , поэтому представим блуждание как

$$S_n = S_{n-k} + S_{n-k, n},$$

где

$$S_{n-k, n} = \xi_{n-k+1} + \dots + \xi_n.$$

Тогда при некотором  $k$  из соотношения (17) имеем

$$2x \approx S_{n-k, n}/n, n \rightarrow \infty,$$

и при дополнительном условии  $n - k \rightarrow \infty$ :

$$(2x)^2 \approx (\xi_{n-k+1}^2 + \dots + \xi_n^2)/n^2. \quad (18)$$

Возвращаясь к исходной записи искомой вероятности  $p_n(A, B)$  и к уравнению пути (11), получаем, что с точностью до  $1/n$  минимизация относительной энтропии (13) для симметричного блуждания эквивалентна дискретной задаче оптимального управления для уравнения (11) с граничным условием

$$A \leq \varphi_n \leq B \quad (19)$$

и (в силу выражений (16), (18)) функционалом действия (ФД)

$$I = \frac{\gamma}{2} \sum_{i=n-k}^n v_i^2, \quad (20)$$

где  $\gamma = \frac{n-k}{n}$ .

Усложним систему (10), дополнив правую часть линейной компонентой ( $\alpha \in R^1$ ):

$$X_{i+1} - X_i = \alpha X_i + \xi_{i+1}, \quad i = \overline{0, n}, \quad X_0 = x. \quad (21)$$

Эти соотношения, учитывая (10), эквивалентным образом можно представить следующим образом:

$$X_{i+1} = x + \alpha \sum_{j=0}^i X_j + S_{i+1}, \quad S_{i+1} = \sum_{j=0}^i \xi_{j+1}, \\ i = \overline{0, n},$$

или в форме уравнения путей:

$$\varphi_{i+1} = x + \alpha \sum_{j=0}^i \varphi_j + \psi_{i+1}, \quad \psi_{i+1} = \sum_{j=0}^i u_{j+1}, \quad (22) \\ i = \overline{0, n}.$$

Иными словами, на множестве  $Z$  всех целых чисел определено непрерывное отображение

$$a_x : \{\psi_k\} \rightarrow \{\varphi_k\},$$

для которого существует обратное:

$$a_x^{-1} : \{\varphi_k\} \rightarrow \{\psi_k\},$$

а именно

$$\psi_{i+1} = \varphi_{i+1} - \alpha \sum_{j=0}^i \varphi_j - x,$$

причем для последовательностей  $\{\psi_k\}$  в выражении (22) определен ФД (20). Следовательно, для уравнения (21) и преобразования  $a_x$  выполнены условия *принципа сжатия* [11], гарантирующего существование ФД для семейства последовательностей (21) при  $n \rightarrow \infty$  равномерно относительно начальной точки  $x$ :

$$J(\varphi) = I(a_x^{-1}(\varphi)). \quad (23)$$

Возвращаясь к исходной разностной форме (21) для уравнения путей (22), имеем

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = \alpha \varphi_i + v_{i+1}, \\ i = n-k, n-k+1, \dots, n, \quad (24) \\ \varphi_{n-k} = x,$$

для ФД (23) на множестве  $n-k \leq i \leq n$  — особенно простой вид (20), а в качестве дополнительного нужно сохранить условие (19).

Таким образом, оценка вероятности КС  $p_n(A, B) = P(A \leq X_n \leq B)$  для стохастического уравнения (21) сводится к решению дискретной задачи оптимального управления (19), (20), (24) (дискретная задача ЛП).

**Замечание 1.** Систему (21) в случае  $\alpha < 0$  можно интерпретировать как результат использования управления  $u$  в (10) (и в (11)): если это управление искать в форме обратной связи  $u_i = \alpha \varphi_i$ , то и получатся системы (21) и (24). При выборе  $\alpha$  можно руководствоваться следующими гипотезами:

1) типичная ситуация, когда влиянием  $\xi_i$  можно пренебречь и синтез осуществить, минимизируя критерий  $\rho = \frac{1}{2} \sum_i^n (\varphi_i^2 + r u_i^2)$ ,  $r > 0$ ;

2) ситуация "возможных больших отклонений", когда контроль больших отклонений отсутствует, но априорно предполагается возможность их появления в результате действия возмущений: в этом случае учет  $v_i$  осуществим только в рамках рефлексной системы, что приводит к игровой задаче гарантирующего управления:

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = u_i + v_{i+1}$$

с критерием

$$\eta(q) = \rho - q \frac{1}{\gamma} I = \frac{1}{2} \sum_i^n (\varphi_i^2 + r u_i^2 - q v_i^2), \quad r > 0, \quad q \geq 0,$$

т. е. такой учет возмущений также опирается на ФД (20); понятно также, что гипотеза 1 — это частный случай второй гипотезы:  $\rho = \eta(0)$ .

Сравним теперь указанные варианты рефлексного управления с тем, что дает явный контроль больших отклонений в (10), сводящийся в нашем случае к решению дискретной задачи ЛП. Получающиеся в этой простой задаче экстремали — это совокупность точек (также назовем их профилем КС), лежащих на кратчайшем отрезке, ведущем из начальной точки (НТ) в конечную (КТ). При этом вероятность КС (в соответствии с оценкой (14)) будет стремиться к единице по мере приближения текущей точки к КТ. В результате управление может быть организовано следующим образом: пока все штатно,  $u_i = 0$  и на каждом шаге отклонение  $X_i$  соизмеряется с профилем КС, соответствующим образом смещенным по времени; когда текущее состояние оказывается близким к КТ, включается управление  $u_i$ , возвращающее состояние в окрестность НТ; как только состояние оказывается в достаточ-

но малой окрестности НТ (малая вероятность в (14)), управление обнуляется. Конечно, такое антикризисное управление можно сочетать с рефлексной стабилизацией, как описано в замечании 1, и в этом случае для построения профиля нужно решать задачу ЛП.

### 3. Контроль больших отклонений в системе (1)

Покажем теперь, что и в случае системы (1) задача ЛП и АГК являются результатом вероятностного анализа, благодаря чему оказывается возможным данные о состоянии управляемого диффузионного процесса трансформировать в суждения о текущих ситуациях управления. Как и в дискретном случае, ключевым является принцип сжатия (только в более общей форме) и построение ФД по принципу (23) на основе аналогичного функционала, построенного для процесса с независимыми приращениями; в случае (1) — это винеровский процесс. Подчеркивая роль ФД в построении оценок, нужно заметить, имея в виду вышеизложенную дискретную схему, что для любого множества  $A$ , находящегося на положительном расстоянии от нуля, можно записать

$$P_n(A) \approx e^{-n\hat{S}(A)}$$

в том смысле, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n(A) = -\hat{S}(A),$$

причем

$$\hat{S}(A) = \inf S(A),$$

где минимум вычисляется по всем путям, ведущим из нуля в  $A$ . Таким образом, можно говорить о некотором свойстве макситивности АБУ [4]: если  $B$  — еще одно событие такого же рода, причем  $A \cap B$  — пустое множество, то, с одной стороны,

$$P_n(A \cup B) = P_n(A) + P_n(B),$$

а с другой,

$$P_n(A \cup B) \approx e^{-n\{\hat{S}(A) \wedge \hat{S}(B)\}} = P_n(A) \vee P_n(B).$$

Это значит, что вероятностный анализ, основанный, естественно, на аддитивной мере, с точностью до малых ошибок грубых оценок АБУ может быть заменен анализом, основан-

ным на некоторой макситивной мере — *идемпотентности*  $\mu$  [4], для которой

$$\mu(A) = \sup_{\omega \in A} \mu(\omega),$$

где  $\omega$  — элементарный исход (атом) события  $A$ .

В работе [4] строится именно такая теория, содержащая разделы интегрирования по идемпотентностям, идемпотентным процессам (в том числе аналогу винеровского) и дифференциальным уравнениям Ито. В более ранней работе [14] отмечено сходство принципа больших отклонений с определением слабой сходимости вероятностных мер. На этой основе в работах [4, 14] и в некоторых других разработана теория сходимости в смысле больших отклонений (БУ-сходимость), позволившая получить оценки в рамках АБУ, свободные от многих ограничений классической вероятностной методики [3]. В частности, очень важным для практики инженерных расчетов оказывается снятие условия равномерной невырожденности матрицы диффузии в уравнении (1).

Здесь представим только то, что позволит сформулировать необходимый нам результат. Детали теории БУ-сходимости и методов идемпотентного анализа можно найти в работе [4], где также приведена и обширная библиография по вопросу.

Среди прочего, эта теория позволяет построить АБУ в максимальной для практики общности — для систем с непрерывной и дискретной компонентами. Например, вместо последовательностей (как в п. 2) можно сразу говорить о направленностях  $\{P_\phi, \phi \in \Phi\}$  вероятностных мер на топологическом пространстве  $E$  с борелевской  $\sigma$ -алгеброй  $\beta(E)$  и шкалой  $r_\phi$  (направленности) неотрицательных чисел  $\{r_\phi, \phi \in \Phi\}$  такой, что  $r_\phi \rightarrow \infty$  при  $\phi \in \Phi$ , где  $\Phi$  — направленное множество. Тогда дискретному варианту соответствует  $r_\phi = n$  с натуральным рядом в качестве  $\Phi$ , а для (1)  $r_\phi = 1/\varepsilon$  из множества  $R_+$  и  $\Phi = R_+$ . В следующем определении ([4], определение 3.1.1) можно усмотреть некоторую аналогию с определением слабой сходимости ([10], с. 332, определение 2), если учесть, что интеграл по идемпотентной мере  $\Pi$  от функции  $z(s)$  на  $E$  есть  $\bigvee_E z(s) d\Pi(s)$  ([4], параграф 1.4); при этом  $Z$  — система замкнутых подмножеств  $E$ .

**Определение 3.** Направленность  $\{P_\phi, \phi \in \Phi\}$  БУ сходится со скоростью  $r_\phi$  к  $Z$ -идемпотентности  $\Pi$  на  $E$ , если для любой функции  $h \in C_b^+(E)$

$$\lim_{\phi \in \Phi} \left( \int_E h(s)^{r_\phi} dP_\phi(s) \right)^{1/r_\phi} = \int_E h(s) d\Pi(s),$$

что короче обозначается как  $P_\phi \xrightarrow[r_\phi]{ld} \Pi$ .

Условием, при котором для (1) имеет место (при  $r_\phi = 1/\varepsilon$ ) БУ-сходимость, является условие линейного роста (УЛР) ([4], параграфы 2.6, 2.8, гл. 5) на функции  $a(x)$  и  $c(x) = \sigma(x)\sigma(x)^T$ :

**УЛР:** существует локально интегрируемая  $R_+$ -значная функция, такая что

$$\|a(x(t))\| \leq l(t)(1 + \sup_{s \leq t} \|x(s)\|);$$

$$\|c(x(t))\| \leq l(t)(1 + \sup_{s \leq t} \|x(s)\|^2).$$

**Теорема 1** ([4], теоремы 2.6.18–23, 2.8.9, 2.8.10 и 5.1.13, 5.4.2). Если при некотором  $c_+ > 0$  для управления в (1b) выполнено УЛР и

$$\|v\|_2^2 \leq c_+,$$

то при условии невырожденности (определение 2) системы (1b) имеем:

$$P_\phi \xrightarrow[r_\phi]{ld} \Pi.$$

Этот результат опирается, в частности, на свойство системы (1b) ([4], определение 2.6.14 для системы (2.6.3)), которое назовем здесь *продолжаемостью вправо* (т. е. при  $t \rightarrow \infty$ ) и которое выполнено при наших предположениях (система (1b) — это в работе [4] система (2.6.3)).

Таким образом, для оценки вероятности события  $\partial_D$ , связанного с процессом (1), получаем задачу оптимального управления Лагранжа—Понтрягина (ЛП) (1б), (2), (7).

**Замечание 2.** В соответствии с традицией АБУ [3] в работе [4] для характеристики предельной точки вместо аппарата оптимального управления для уравнения путей используется вариационное исчисление, в результате чего ФД записывается в следующем виде ([4], теорема 2.8.10):

$$S(x) = -\ln \Pi(x) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} (\dot{x}_t - a(x_t))^T c(x_t)^\oplus (\dot{x}_t - a(x_t)) dt, \quad (25)$$

где  $c^\oplus$  — операция псевдообращения матрицы ([15], с. 492–496). Покажем, что это эквивалентно нашему рассмотрению через уравнение путей и оптимальное управление. Пусть  $\sigma$  в

уравнении (1) — матрица полного ранга, тогда представим ее в виде

$$\sigma = J\rho, \quad J = (0_{k \times (n-k)} \quad I_k)^T, \quad (26)$$

где  $\rho$  — симметричная положительно определенная  $(k \times k)$ -мерная матрица. Учитывая [15], что в выражении (25)

$$c^\oplus = (\sigma\sigma^T)^\oplus = \sigma(\sigma^T\sigma)^{-2}\sigma^T,$$

и подставляя сюда соотношение (26) (учитывая при этом, что  $J^T J = I_k$ ), получаем

$$c^\oplus = J\rho^{-2}J^T.$$

Подставляя теперь это в выражение (25) и обозначая

$$v = \rho^{-1}J^T(\dot{x} - a(x)), \quad (27)$$

получаем в (25) критерий (2). Умножая последнее равенство слева на  $\rho$ , с учетом  $J^T J = I_k$  имеем:

$$J^T J \rho v = J^T(\dot{x} - a(x)).$$

Учитывая (26), получаем здесь уравнение (1b).

**Замечание 3.** Преобразование (27) позволяет воспользоваться принципом сжатия и определить ФД на решениях (1) по ФД для винеровского процесса по аналогии с (23) в дискретном случае. Но для того чтобы это имело смысл, требуется невырожденность уравнения пути. В данном случае это эквивалентно управляемости пары  $(A, J)$ ; в работе [4] используется такой вариант достаточного условия (теорема 2.8.10): " $\dot{x} - a(x)$  принадлежит множеству значений матрицы  $c$ ".

#### 4. Функциональная устойчивость и А-профили КС

Исходя из постановки проблемы управления в п. 1 мы можем теперь определить *функционально устойчивой* такую систему (ФУС) управления, в которой обеспечены:

а) устойчивость состояния равновесия (будем говорить также о локальной устойчивости) с заданным качеством;

б) выполнение на заданном вероятностном уровне всех условий принадлежности текущего состояния эксплуатационной области.

Детализируем последний пункт в этом определении: будем считать заданным для каждого условия (7) число  $\pi_K$ ,  $0 < \pi_K \ll 1$  такое, что

$$P(Y_K \in \partial_K) \leq \pi_K, \quad Y_K = Y(t_K), \quad K = 1, 2, \dots, N,$$

где  $N$  — общее число критических состояний. Данное определение сводит синтез ФУС к решению задачи классификации (выбор между гипотезами "штатно" или "кризис").

Результатом решения задачи ЛП является тройка  $(\hat{v}, \hat{\varphi}, \hat{t}_K)$ , т. е. экстремаль  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_K]$ , определяющая минимальное значение (6) и ФД:  $\hat{I} = I_{t_0 \hat{t}_K}(\hat{\varphi}, \hat{v}) = \varepsilon^{-2} \hat{S}_{t_0 \hat{t}_K}(\hat{\varphi}, \hat{v})$ . По ФД определяется квазипотенциал [3] системы (1b) — функция точки  $x$  и состояния равновесия:

$$V(\chi, x) = \inf\{S_{t_0 t_K}(\varphi) : \varphi \in C_{t_0 t_K}(R^n), \\ \varphi_{t_0} = \chi, \varphi_{t_K} = x\}.$$

**Определение 4.** Экстремаль  $\hat{\varphi}$ , удовлетворяющую (1b), если она является единственным прообразом квазипотенциала  $V(0, x)$ , будем называть *A-профилем* КС [12].

Значение A-профиля КС для синтеза ФУС состоит в том, что он позволяет осуществить ГК по текущим данным о состоянии (1) в реальном времени, т. е. реализовать контур ГК над системой ЛС. Приведем некоторые достаточные условия существования A-профиля. Для этого нам потребуется понятие *конвергенции* [13] для системы (1b). Кроме того, для (1b) наряду с продолжаемостью вправо в случае  $v = \hat{v}$  на  $[t_0, \hat{t}_K]$  это потребует *продолжаемости влево*, т. е. при  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Предположим, что в (1) и (1b)  $\sigma(x)$  не зависит от  $x$ , т. е.

$$\sigma(x) = \sigma.$$

В этом случае для задачи ЛП можно записать прямое и сопряженное уравнения с соответствующими им условиями справа:

$$\dot{\varphi}_t = a(\varphi_t) + \sigma v_t, \quad c_K \varphi(t_K) = Y_K, \quad (28)$$

$$\dot{\psi}_t = -a_x^T(\hat{\varphi}_t) \psi_t, \quad \psi(t_K) = \psi_K, \quad (29)$$

$$v_t = \hat{v}_t = \sigma^T \psi_t. \quad (30)$$

Обозначим соответствующую матрицу  $a(x)$  в (1) симметризованную якобиеву матрицу

$$J_a(x) = (a_x(x) + a_x(x)^T)/2$$

и предположим

**П1:**  $a(x) \in C^1(D)$  и наибольший характеристический корень  $\Lambda(x)$  матрицы  $J_a(x)$  для любого  $x$  удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(x) \leq \lambda < 0,$$

а матрица  $a_x(x)$  для любого  $x$  — гурвицева.

**Теорема 2.** При условии П1 и невырожденности системы (1b) существует A-профиль для

$$Y(t_K) \subset B_\mu(0)$$

при достаточно малом  $\mu > 0$ .

**Доказательство** следует из того, что в условиях теоремы из (П1) имеем

$$\|\psi\|_\infty \leq c_-$$

что, в свою очередь, влечет

$$\|v\|_\infty \leq c_-$$

на  $R_-$ . Уравнение (1b), следовательно, является системой с конвергенцией [13] и имеет единственное ограниченное на всей прямой (предельное) решение (продолжаемое влево), которое и есть A-профиль.

Проверка условия П1 может быть сложной задачей. Тем более интересен линейный вариант задачи, где этой проблемы нет.

## 5. A-профили для линейных систем

Переходя к рассмотрению асимптотически устойчивых линейных систем, стоит отметить, во-первых, что проблема больших уклонений возникает при нахождении критического множества на любом положительном расстоянии от аттрактора, а также тот факт, что линейное рассмотрение актуально и для нелинейных систем, поскольку штатное функционирование управляемого объекта, как правило, происходит в зоне почти линейности. Так, во многих случаях эксплуатационные изменения угла крена судна или угла атаки летательного аппарата принадлежат интервалу  $\pm 10...15^\circ$ . Вместе с тем линейность дает возможность получить несколько больше.

В линейном случае уравнения (28), (29) имеют следующий вид [2]:

$$\dot{\varphi}_t = A \varphi_t + \sigma v_t, \quad c_K \varphi(t_K) = Y_K, \quad (31)$$

$$\dot{\psi}_t = -A^T \psi_t, \quad \psi(t_K) = \psi_K, \quad (32)$$

а управление (минимизирующее (2)) по-прежнему определяется соотношением (30). Относительно системы путей предположим

**П2:** матрица  $A$  — гурвицева, а система (31) — невырождена, т. е. пара  $(A, \sigma)$  — управляема.

В рассматриваемом линейном случае, говоря об А-профиле, можно ставить вопрос о тройке объектов: экстремаль  $\widehat{\varphi}(t)$ , оптимальное управление  $\widehat{v}(t)$  и квазипотенциал  $V(0, x)$ . Управление  $\widehat{v}(t)$ , в соответствии с (30), определяется вектором сопряженных переменных  $\psi_t = \psi(t)$ . Оказывается, что  $\widehat{\varphi}(t)$  также определяется вектором  $\psi_t$ .

**Теорема 3.** При условии П2 для системы (31) существуют А-профиль, определяемый соотношением

$$\widehat{\varphi}(t) = D\psi(t), \quad (33)$$

соответствующий этому профилю квазипотенциал

$$V(0, x) = \frac{1}{2} x^T D^{-1} x \quad (34)$$

и оптимальное управление, определяемое формулой (30), где вектор сопряженных переменных  $\psi(t)$  имеет вид

$$\psi(t) = e^{A^T(t_K-t)} c_K^T (c_K D c_K^T)^{-1} Y_K,$$

а  $D$  — единственное положительно определенное решение матричного уравнения:

$$\sigma\sigma^T = -AD - DA^T.$$

**Следствие 1.** Если  $\varphi(t_0, x_0; t)$  — профиль КС, т. е. решение уравнения (31) с управлением (30), (33) и с дополнительным условием  $\varphi(t_0, x_0; t_0) = x_0$ , то для  $t_0 < t' < t_K$

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \|\varphi(t_0, x_0; t) - \widehat{\varphi}(t)\| = 0$$

равномерно по  $\{t : t' \leq t \leq t_K\}$ .

**Доказательство** следует из П2 и того факта, что разность  $\varphi(t_0, x_0; t) - \widehat{\varphi}(t)$  удовлетворяет однородной системе, соответствующей (31).

Из соотношения (34) имеем

$$\widehat{S}_{t_0 t_K} = V(0, x_K) - V(0, \widehat{\varphi}(t_0)).$$

Полагая

$$P_{t_0 t_K} = P\{x_0 = \widehat{\varphi}(t_0) \in D; \tilde{x}_{t_K} \in R^n \setminus D\}$$

и обозначая  $F$  — множество путей, ведущих из  $x_0 \in D$  в  $R^n \setminus D$ , согласно работе [3] (теорема 1.2, с. 145) получаем при  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\varepsilon^2 \ln P_{t_0 t_K} \approx -\widehat{S}_{t_0 t_K} = -\min_{\varphi \in F} S_{t_0 t_K}(\varphi, v).$$

В силу следствия очевидна определяющая роль А-профиля в построении алгоритма КГК: текущее состояние системы (1) необходимо сравнивать с А-профилем  $\widehat{\varphi}(t)$ , фиксируя при этом  $\widehat{S}_{t_0 t_K}$ ,  $P_{t_0 t_K}$ , и в тот момент, когда приближение к  $\widehat{\varphi}(t)$  выразится в превышении потенциалом КС (определение 1) значения порога, должно включиться управление КГК. Здесь нет возможности остановиться на конкретной форме этого управления. Не приводим мы и примеров синтеза конкретных ФУС, их можно найти в работе [2].

**Замечание 4.** Следствие 1 показывает, что структура окрестности А-профиля аналогична окрестности аттрактора: соседние решения сходятся к А-профилю так же, как это происходит в окрестности аттрактора. Говорят, что окрестность аттрактора соответствует типичным траекториям в том смысле, что подавляющее число реализаций в устойчивой системе принадлежит этому классу траекторий (сходящихся к аттрактору). Тогда с учетом следствия 1 можно говорить об *условно типичности* (для данного КС) траекторий, сходящихся к А-профилю КС, учитывая при этом, что частота попадания траекторий в окрестность А-профиля КС как редкого события существенно меньше, чем частота попаданий в окрестность аттрактора.

**Замечание 5.** Как уже отмечалось во введении, ФУС, в принципе, строится из тех же элементов, что и робастный  $H^\infty$ -регулятор. И наоборот, из элементов АГК (п. 1) можно сформировать критерий  $H^\infty$ -оптимизации. Аналогично дискретному случаю (замечание 1) имеем

$$\eta(q) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} y^T y dt + R_{t_0 t_K} - q S_{t_0 t_K}, \quad (35)$$

где  $R_{t_0 t_K}$  и  $S_{t_0 t_K}$  — затраты (соответственно) управления и шума (ФД):

$$R_{t_0 t_K} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} U^T R U dt, \quad S_{t_0 t_K}(\varphi, v) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_K} v^T v dt,$$

и для критерия (35) имеем задачу синтеза (рефлексного) управления.

## 6. Комментарий по поводу структуры ФУС

Структура ФУС, т. е. системы, с заданной вероятностью обеспечивающей жизненный

цикл управляемого объекта, определяется наличием второго, глобального контура — КГК, который возникает на основе АБУ. Конечно, для формирования этого второго уровня (второй сигнальной системы) могут быть использованы и другие асимптотические методы, не только АБУ. Хорошо известна роль методов регулярных и сингулярных возмущений в задачах синтеза и оптимизации систем управления [16, 17, 2]. Но, по-видимому, методам АБУ в этом принадлежит особая роль — они формируют семантический базис ФУС, язык (или протоязык), основу которого составляет набор критических состояний и соответствующих им А-профилей.

**Замечание 6.** Учитывая, что первая сигнальная система многих организмов (в том числе и *Homo Sapiens*) является результатом биологической адаптации (в условиях эволюционной типичности), естественной представляется гипотеза об аналогичном механизме, связанном с условной КС-типичностью: по-видимому, именно так образовались первые лексемы (как соответствующие КС-алармы) первого протоязыка. Так же, как закон больших чисел и центральная предельная теорема в эволюции приводят к первой сигнальной системе и рефлексам, большие отклонения от равновесных режимов формируют (на значительно более протяженных временах) вторую сигнальную систему, в том числе лексемы (сигнификаты) протоязыка.

### Заключение

Вероятностный анализ для управляемых стохастических систем, как это хорошо известно ([3], гл. 4, параграф 1), включает: 1) закон больших чисел (теоремы о среднем), 2) центральные предельные теоремы (о нормальных отклонениях) и 3) АБУ. Говоря формально, если нас интересуют процессы с подавляющей вероятностью или с вероятностью, близкой к единице, первых двух типов часто оказывается вполне достаточно, и на этом основано большинство теорий локальной и робастной стабилизации и оптимизации. Существует даже убеждение (или вера), что теорема разделения обеспечивает обычный детерминированный подход к оптимизации, т. е. что шумами вообще можно пренебречь, если предусмотреть дополнительный фильтр или наблюдатель. В действительно-

сти, то, чем мы пренебрегаем, при длительном функционировании может приводить к плохо прогнозируемым явлениям, связанным с нелинейностью реальных моделей динамики. Но дело в том, что это, оказывается, далеко не главное. Существо дела состоит именно в том, что, отбрасывая АБУ, мы лишаем систему контура глобального контроля и всего, что с этим связано: семантики, языка и функциональной устойчивости, и искусственно ограничиваем наши возможности рефлексным контуром. Такое ограничение приемлемо в тех случаях, когда функции КГК берет на себя человек (пилот, оператор и т. п.), способный вмешиваться в процесс управления, или когда вся задача управления ограничена по времени. Понятно, что этого нет во многих ситуациях беспилотного, либо длительного и абсолютно автономно управляемого движения. В таких задачах, особенно и при отсутствии возможности обучения, полноценная двухуровневая ФУС-архитектура может быть вполне рациональным решением.

### Список литературы

1. Дубовик С. А. Использование квазипотенциалов для контроля больших отклонений управляемых процессов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 5. С. 301–307.
2. Дубовик С. А., Кабанов А. А. Функционально устойчивые системы управления: асимптотические методы синтеза. М.: ИНФРА-М, 2019. 249 с.
3. Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
4. Пухальский А. А. Большие отклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 512 с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.
6. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. М.: Мир, 1978. 316 с.
7. Nijmeijer H., A. van der Schaft. Nonlinear dynamical control systems. New York: Springer-Verlag, 1990. 467 p.
8. Соболевский А. Н. Теория вероятностей и основы математической статистики для физиков. М.: Физ. фак. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007. 46 с.
9. Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В. Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1982. 160 с.
10. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1989. 640 с.
11. Pham H. Large deviations in mathematical finance. Univ-ers. Paris, 2010. 58 p.
12. Дубовик С. А., Кабанов А. А. Profiles of critical states in diagnostics of controlled processes // ICMTMTE 2018, MATES Web of Conferences 224. 04024 (2018).
13. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
14. Пухальский А. А. К теории больших отклонений // Теория вероятн. и ее применен. 1993. Т. 38. С. 490–497.

15. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.

16. Первозванский А. А., Гайцгори В. Г. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. М.: Наука, 1979. 344 с.

17. Васильева А. Б., Дмитриев М. Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления. М.: ВИНТИ. Итоги науки и техники. Мат. анализ. Т. 20. 1982.

## Asymptotic Semantization of Data in Control Systems

S. A. Dubovik, duboviksa@gmail.com,  
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Corresponding author: **Dubovik Sergei A.**, PhD, Head of Department of Informatics and Control in Technical Systems, Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation, e-mail: duboviksa@gmail.com

Accepted on April 17, 2019

### Abstract

Asymptotic methods for analyzing large deviations in this work are used to convert information about the state of a controlled diffusion process into probabilistic estimates of the normal or abnormal development of the process. Thus, over the reflex contour of local stabilization a system of global semantic control is implemented, a kind of second signal system. A functional analytical approach similar to the weak convergence of probabilistic measures is used as an analysis tool, which makes it possible to significantly expand the conditions for applying the method. Global control is reduced to solving the Lagrange problem in the form of Pontryagin for the system of ordinary differential equations (system of paths), the Ventzel-Freidlin action functional (or "rate function" in some English literature), which is presented here as an integral-quadratic criterion for control functions in the system of paths, and the boundary condition in the form of the critical state of the system. A bounded solution of the Lagrange — Pontryagin problem on the half-line, which gives a prototype of the quasipotential of the system of paths, is called the *A*-profile of the critical state. The *A*-profile makes it possible to significantly simplify the procedure for analyzing large deviations, up to its implementation in real time and the implementation of the global control loop (2nd signaling system). The resulting two-tier architecture is positioned as a baseline to achieve the functional stability of the control system. It is speculated that this role of the apparatus of large deviations takes place in biological evolving systems, including the formation of languages and other attributes of the evolution of higher human nervous activity.

**Keywords:** action functional, large deviations, extremal, functional stability, global control, evolution, language

**Acknowledgements:** The study was carried out by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 17-11-01220).

For citation:

**Dubovik S. A.** Asymptotic Semantization of Data in Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 8, pp. 461—471.

DOI: 10.17587/mau.20.461-471

### References

1. **Dubovik S. A.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 5, pp. 301—307 (in Russian).
2. **Dubovik S. A., Kabanov A. A.** Functionally stable control systems: asymptotic synthesis methods, Moscow, INFRA-M, 2019, 249 p. (in Russian).
3. **Freidlin M. I., Wentzell A. D.** Random Perturbations of Dynamical Systems. Berlin, Springer-Verlag, 2012, 453 p.
4. **Puhalskii A.** Large deviations and idempotent probability, New York, Chapman & Hall, 2001, 493 p.
5. **Gabasov R.** Qualitative theory of optimal processes, Moscow, Nauka, 1971, 508 p. (in Russian).
6. **Fleming W. H., Rishel R. W.** Deterministic and Stochastic Optimal Control, New York, Springer-Verlag, 1975, 316 p.

7. **Nijmeijer H., van der Schaft A.** Nonlinear dynamical control systems. New York, Springer-Verlag, 1990, 467 p.

8. **Sobolevskij A.** Probability theory and basic mathematical statistics for physicists, Moscow, Phis. phak. MGU, 2007, 46 p. (in Russian).

9. **Kolmogorov A.** Introduction to probability theory, Moscow, Nauka, 1982, 160 p. (in Russian).

10. **Shirjajev A. N.** Probability, Berlin, Springer—Verlag, 1995, 640 p.

11. **Pham H.** Large deviations in mathematical finance, Univers. Paris, 2010, 58 p.

12. **Dubovik S. A., Kabanov A. A.** *ICMTMTE 2018, MATEC Web of Conferences* 224, 04024 (2018).

13. **Demidovitch B. P.** Lectures on the mathematical theory of sustainability, Moscow, Nauka, 1967, 472 p. (in Russian).

14. **Puhalskii A.** *Th. Prob. Appl.*, vol. 38. no. 3, pp. 490—497.

15. **Liptser R., Shirjajev A.** Statistics of Random Processes, New York, Springer-Verlag, 1977, 696 p.

16. **Pervosvanskij A.** Decomposition, aggregation and approximate optimization, Moscow, Nauka, 1979, 344 p. (in Russian).

17. **Vasilyeva A. B., Dmitriev M. G.** Singular perturbations in optimal control problems, Moscow, VINITI, Itogi nauki I tehniki, math. analiz, 1982, v. 20 (in Russian).

Г. К. Шадрин, канд. техн. наук, доц., shadrin.g.k@yandex.ru,  
Д. Л. Алонцева, д-р физ.-мат. наук, проф., dalontseva@mail.ru,  
А. Т. Кусайын-Мурат, докторант Ph. D, asselkussaiynmurat@gmail.com,  
А. Л. Красавин, канд. физ.-мат. наук, ст. преп., alexanderkrasavin@mail.ru,  
Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,  
г. Усть-Каменогорск, Казахстан

## Синтез алгоритма управления движением инструмента робота методом коррекции его динамики и компенсации возмущений<sup>1</sup>

*Рассмотрена задача управления движением манипуляционного робота в одном направлении. Такая задача возникает при резке, сварке, покраске, нанесении покрытий и других аналогичных действиях, когда инструмент робота совершает программное движение вдоль обрабатываемой поверхности и в то же время нужно без перерегулирования автоматически поддерживать определенное расстояние от этого инструмента до поверхности. Получен новый алгоритм управления линейным объектом второго порядка общего вида методом компенсации динамики объекта и возмущений, имеющий преимущества перед известными решениями. Алгоритм обеспечивает нулевую статическую ошибку регулирования и движение системы при отработке внешних воздействий с точностью до фильтров-эталонов второго порядка, что удобно для практических применений. Первый фильтр задает движения системы при отработке задания, второй обеспечивает компенсацию возмущений на переменные состояния. Представлена пошаговая процедура синтеза алгоритма для объекта управления второго порядка общего вида, получены формулы для расчета коэффициентов регулятора. Полученные уравнения, определяющие процессы в замкнутой системе управления, позволяют выполнить анализ качества управления и динамики изменения управляющего воздействия в зависимости от внешних воздействий. Разработан метод идентификации уравнений движения данного робота в условиях, когда известна максимальная скорость перемещения его инструмента и динамическая ошибка регулирования сервосистем робота. По этому методу уравнения робота приводятся к форме Вышнеградского, затем на компьютерной модели легко подбираются нужные собственная частота и коэффициент затухания. Рассмотрено применение полученного алгоритма для создания системы автоматического регулирования положения инструмента робота. Выяснено, что задание свободных коэффициентов этих фильтров из условия равенства собственных частот фильтра и объекта управления обеспечивает заданное быстродействие системы при умеренной амплитуде управляющих воздействий. Методом математического моделирования показано достижение заданного качества регулирования и параметрической структурной робастности полученной системы управления.*

**Ключевые слова:** манипуляционный робот, управление движением, алгоритм управления, аналитический синтез, математическое моделирование

### Введение

В настоящее время манипуляционные роботы используются для широкого спектра действий, при этом рабочие инструменты роботов совершают сложные движения в пространстве и времени. Решению задачи управления движением робота-манипулятора и планирования его траектории за последнее время посвящено много исследований, в том числе работы [1–5]. В работе [1] предлагается контроллер

манипулятора, обеспечивающий прохождение заданной траектории с заданными временными параметрами и основанный на концепции онлайн-генерации траектории (OTG), что позволяет в реальном времени вычислять траектории и связывать различные компоненты системы планирования движения робота (включая планировщик маршрута, генератор траектории) и предотвращать столкновения звеньев манипулятора с препятствиями, а также непосредственно контроллер управления движением манипулятора. В работе [2] проблему управления движением в оперативном пространстве решают с помощью контроллера

<sup>1</sup>Работа поддержана КН МОиН РК по программе 0006/ПЦФ-17.

(RMRC — resolved motion rate control) скоростного управления движением, так называемого кинематического управления, а также контроллера ПИ регулятора, входными параметрами которого служат угловые скорости поворота звеньев промышленного робота. В работе [3] рука робота выступает в качестве источника запрограммированных движений для таких задач, как перемещение объекта из одного места в другое или отслеживание траектории для пистолета-распылителя, причем авторы фокусируются на управлении с обратной связью и контроле импеданса. В работе [4] анализируются возможности управления роботом в аспекте модуляции траектории, когда рычаг робота перемещается с установленной скоростью через осевые точки. В книге [5] представлена стратегия адаптивного управления для контроля мобильных манипуляторов при наличии неопределенностей и беспорядков, желаемые траектории формулируются в пространстве задач.

Очевидно, что выбор и обеспечение заданных траекторий движения, включая скорости и ускорения — достаточно сложная для решения задача [1–8]. Приходится учитывать то обстоятельство, что манипулятор робота является многозвенной связанной инерционной механической системой с ограниченными по мощности и моменту приводами звеньев. Как правило, каждая кинематическая пара манипулятора (сустав) имеет свой привод, датчик положения и микропроцессорную систему управления приводом. В целом получается сервосистема позиционирования данной пары, обладающая своими динамическими характеристиками. На более высоком уровне реализуется координированная работа систем позиционирования всех суставов. Обычно для облегчения программирования на этом уровне предусматривается, наряду с другими, движение инструмента в заданном направлении в декартовой системе координат независимо от типа движения пар звеньев. Примером может служить робот Kawasaki RS10L, в котором используются вращательные пары, но предусмотрено движение инструмента в заданном направлении.

В данной статье рассматривается разработка системы автоматического регулирования движения инструмента робота в одном направлении в условиях внешних воздействий, удовлетворяющая предлагаемым требованиям. При

резке, сварке, нанесении покрытий и других аналогичных действиях инструмент, смонтированный в робот Kawasaki RS10L, совершает программное движение вдоль обрабатываемой поверхности, в то же время нужно без пере-регулирования автоматически поддерживать определенное расстояние от этого инструмента до поверхности.

Поскольку объект управления включает в себя механические элементы манипулятора, то будем аппроксимировать динамику объекта линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка общего вида. Таким образом, ставится задача управления одномерным инерционным линейным объектом второго порядка с сосредоточенными параметрами.

Данная задача является типовой для теории автоматического регулирования и имеет хорошо отработанные решения. Например, в известной работе [8] при математическом моделировании управления движением робота динамика робота сводится к использованию формулировки Гамильтона, которая в принципе может быть применена к большому числу типов роботов-манипуляторов. На данный момент для решения данной задачи используется ряд частотных и временных методов, имеющих свои преимущества и недостатки [9–16]. Среди частотных методов широкое применение имеет метод логарифмических частотных характеристик (метод ЛАЧХ). Этот графоаналитический метод позволяет выбирать корректирующее устройство, обеспечивающее заданные частотные показатели качества замкнутой системы [9–10]. Среди временных методов наиболее развиты аналитические методы модального управления и АКОР ( $LQ$ -оптимизация) [11, 12], являющиеся средствами коррекции собственной динамики объекта [13, 14]. В работах [15, 16] для отработки внешних воздействий (задания и возмущений) используются дополнительные компенсирующие блоки, а также отмечается, что при практическом применении этих методов используется метод последовательных приближений. Таким образом, несмотря на достаточно длительный период времени, посвященный исследованиям в данной области, задача синтеза алгоритма управления линейным объектом по-прежнему актуальна, об этом свидетельствуют также публикации [17–22].

В работах [21, 22] представлен метод компенсации динамики объекта и возмущений,

имеющий ряд преимуществ. Это аналитический метод, он предусматривает в едином алгоритме как коррекцию собственной динамики объекта управления, так и обработку внешних воздействий с нулевой статической ошибкой. Исходные данные здесь задаются в виде фильтров-эталонов замкнутой системы, что удобно для практических приложений, алгоритм управления получают путем выполнения конечного числа алгебраических операций над матрицами. Метод основан на компенсации всех внешних аддитивных воздействий и динамики объекта управления с точностью до фильтров-эталонов посредством обратной математической модели этого объекта. Фильтры-эталоны определяют динамику замкнутой системы управления по каналам задания и возмущений. Однако в известных публикациях представлены лишь общие формулы, последовательность расчета алгоритма регулирования и некоторые частные случаи применения указанного метода. В данной статье на основе этих формул получен алгоритм для линейного объекта второго порядка общего вида, выполнено исследование замкнутой системы и рассмотрено применение этого алгоритма для создания системы автоматического регулирования движения робота в одном направлении.

### Алгоритм управления объектом второго порядка методом компенсации динамики и возмущений

Рассматривается линейный динамический объект управления второго порядка, описываемый в переменных состояния уравнениями вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_{01} &= a_1 x_{01} + a_2 x_{02} + u - f_{x1}; \\ \dot{x}_{02} &= x_{01} - f_{x2}; \\ y_0 &= c_1 x_{01} + c_2 x_{02} - f_y\end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}u - \mathbf{f}_x; \\ y_0 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_0 - f_y,\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{bmatrix}.\quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{x}_0 = [x_{01} \ x_{02}]^T \in \mathbb{R}^2$  — вектор переменных состояния;  $u \in \mathbb{R}^1$  — входная (управляющая) переменная;  $y_0 \in \mathbb{R}^1$  — выходная (управляемая) переменная;  $f_y \in \mathbb{R}^1$  — возмущающее воздействие на выходную переменную;  $\mathbf{f}_x = [f_{x1} \ f_{x2}]^T \in \mathbb{R}^2$  — возмущающие воздействия на переменные состояния. Матрицы объекта  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  считаются заданными,  $c_2 \neq 0$ . Доступными для измерения являются переменные  $y_0$ ,  $\mathbf{x}_0$ .

Алгоритм управления методом компенсации динамики объекта и возмущений для линейного объекта произвольного порядка приводит к синтезу регулятора, описываемого уравнениями вида [22]

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_\varphi &= \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_\varphi + \Phi_2 \varepsilon; \\ u &= \mathbf{R}_3 \mathbf{x}_\varphi + \mathbf{N}_1 \tilde{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{P} \varepsilon; \\ \tilde{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\varphi; \\ \varepsilon &= y - y_0,\end{aligned}\quad (3)$$

где для объекта второго порядка (1)–(2):  $\mathbf{x}_\varphi = [x_{\varphi 1} \ x_{\varphi 2}]^T \in \mathbb{R}^2$  — вектор переменных состояния фильтра-эталона;  $y \in \mathbb{R}^1$  — задание для выходной переменной;  $\mathbf{R}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\Phi_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $\mathbf{R}_3 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ,  $\mathbf{N}_1 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ ,  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$  — матрицы, подлежащие определению.

Динамические свойства замкнутой системы управления (1)–(3) описываются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_\varphi &= \Phi_1 \mathbf{x}_\varphi - \Phi_2 \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_0 + \Phi_2 (y - f_y); \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_0 &= \Phi_{r1} \tilde{\mathbf{x}}_0 + f_x; \\ \varepsilon &= -\Phi_3 \mathbf{x}_\varphi - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}}_0 + y - f_y; \\ u &= \mathbf{N} \mathbf{x}_\varphi + (\mathbf{N}_1 - \mathbf{P} \mathbf{C}) \tilde{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{P} (y - f_y),\end{aligned}\quad (4)$$

где  $\Phi_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\Phi_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ ,  $\Phi_3 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  — матрицы фильтра-эталона по каналу обработки воздействия  $y - f_y$ ;  $\Phi_{r1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\Phi_{r3} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  — матрицы фильтра-эталона по каналам действия  $\mathbf{f}_x$ . Часть элементов этих матриц задается, другая часть определяется расчетным путем.

С использованием последовательности этапов синтеза алгоритма управления методом компенсации динамики и возмущений (3), представленного в работе [22], рассмотрим решение следующих задач: определение параметров (матриц) регулятора (3) и замкнутой системы (4); анализ функционирования замкнутой системы; применение алгоритма управления для синтеза системы автоматического регулирования движением манипуляционного робота.

## Синтез регулятора методом компенсации динамики и возмущений

Определяем матрицы регулятора (3) в следующей последовательности (здесь громоздкие преобразования опущены).

Выполняя обращение блочной матрицы объекта управления (2), находим матрицу обратной модели:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{c_1}{c_2} & \frac{1}{c_2} \\ 1 & -a_1 + a_2 \frac{c_1}{c_2} & -\frac{a_2}{c_2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Формируем матрицу  $\mathbf{Q}$ , которая является верхним правым блоком размером  $2 \times 2$  матрицы (5):

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{c_1}{c_2} & \frac{1}{c_2} \end{bmatrix}$$

и выполняем ее обращение, например, путем решения матричного уравнения  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{1}$ , где  $\mathbf{1}$  — единичная диагональная матрица. В итоге получаем

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}.$$

Определяем фильтры-эталонные. Обозначим свободно задаваемые коэффициенты этих фильтров, занимающие верхние строки матриц  $\Phi_1$ ,  $\Phi_{r1}$ , соответственно  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_{r1}$ ,  $\varphi_{r2}$ . Соображения по заданию свободных коэффициентов будут приведены ниже при анализе системы управления. Находим оставшиеся коэффициенты фильтров-эталонных по формулам

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \varphi_{21} & \varphi_{22} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} \end{bmatrix} = \\ & = \mathbf{Q}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}; \\ & \begin{bmatrix} \varphi_{r21} & \varphi_{r22} \\ \varphi_{r31} & \varphi_{r32} \end{bmatrix} = \\ & = \mathbf{Q}^{-1} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{r11} & \varphi_{r12} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где  $e_{ij}$  — соответствующий элемент матрицы  $\mathbf{E}$ ;

$$\Phi_2 = -\Phi_1 \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\frac{\varphi_2}{c_2} \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, блочные матрицы фильтров-эталонных имеют вид

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & -\frac{\varphi_2}{c_2} \\ 1 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \Phi_{r1} \\ \Phi_{r3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{r1} & \varphi_{r2} \\ 1 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Отметим, что каждый фильтр-эталон имеет единичный коэффициент передачи в статике. Далее, используя соотношения (5) и (6), определим матрицы регулятора (3):

$$\mathbf{R}_1 = \Phi_1 + \Phi_2 \Phi_3 = \begin{bmatrix} \varphi_1 - \frac{c_1}{c_2} \varphi_2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{G} \Phi_2 = -\frac{\varphi_2}{c_2}; \quad (8)$$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{G} \Phi_1 + \mathbf{H} \Phi_3 = [\varphi_1 - a_1 \quad \varphi_2 - a_2]; \quad (9)$$

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{G} \Phi_{r1} + \mathbf{H} \Phi_{r3} = [\varphi_{r1} - a_1 \quad \varphi_{r2} - a_2]; \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{N} + \mathbf{P} \Phi_3 = \begin{bmatrix} \varphi_1 - a_1 - \frac{c_1}{c_2} \varphi_2 & -a_2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Подставляя выражения (7)—(11) в (3), записываем в общем виде уравнения регулятора для объекта (1)—(2) в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\varphi 1} &= \left( \varphi_1 - \frac{c_1}{c_2} \varphi_2 \right) x_{\varphi 1} - \frac{\varphi_2}{c_2} \varepsilon; \\ \dot{x}_{\varphi 2} &= x_{\varphi 1}; \\ u &= \left( \varphi_1 - a_1 - \frac{c_1}{c_2} \varphi_2 \right) x_{\varphi 1} - a_2 x_{\varphi 2} + \\ &+ (\varphi_{r1} - a_1) \tilde{x}_{01} + (\varphi_{r2} - a_2) \tilde{x}_{02} - \frac{\varphi_2}{c_2} \varepsilon; \quad (12) \\ \tilde{x}_{01} &= x_{01} - x_{\varphi 1}; \\ \tilde{x}_{02} &= x_{02} - x_{\varphi 2}; \\ \varepsilon &= y - y_0. \end{aligned}$$

### Анализ синтезированной системы автоматического регулирования

Для удобства анализа представим уравнение для управляющего воздействия из системы (12) в области изображений по Лапласу:

$$u(s) = -\frac{\varphi_2 (s^2 - \varphi_{r1}s - \varphi_{r2})}{c_2 s(s - \varphi_1 + \frac{c_1}{c_2} \varphi_2)} \varepsilon(s) +$$

$$+ (\varphi_{r1} - a_1) x_{01}(s) + (\varphi_{r2} - a_2) x_{02}(s). \quad (13)$$

Подстановка выражений (7)–(11) в (4) дает следующие уравнения, определяющие процессы в замкнутой системе управления:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\varphi 1} &= \varphi_1 x_{\varphi 1} + \varphi_2 x_{\varphi 2} - \\ &- \frac{c_1}{c_2} \varphi_2 \tilde{x}_{01} - \varphi_2 \tilde{x}_{02} - \frac{1}{c_2} \varphi_2 (y - f_y); \\ \dot{x}_{\varphi 2} &= x_{\varphi 1}; \\ \dot{\tilde{x}}_{01} &= \varphi_{r1} \tilde{x}_{01} + \varphi_{r2} \tilde{x}_{02} + f_{x1}; \\ \dot{\tilde{x}}_{02} &= \tilde{x}_{01} + f_{x2}; \\ \varepsilon &= -c_1 x_{\varphi 1} - c_2 x_{\varphi 2} - c_1 \tilde{x}_{01} - c_2 \tilde{x}_{02} + y - f_y; \\ u &= (\varphi_1 - a_1) x_{\varphi 1} + (\varphi_2 - a_2) x_{\varphi 2} + \\ &+ (\varphi_{r1} - a_1 + \frac{c_1}{c_2} \varphi_2) \tilde{x}_{01} + \\ &+ (\varphi_{r2} - a_2 + \varphi_2) \tilde{x}_{02} - \frac{\varphi_2}{c_2} (y - f_y). \end{aligned} \quad (14)$$

Согласно уравнению (13) в регуляторе по каналу рассогласования  $\varepsilon$  имеется интегральная составляющая, которая устраняет статическую ошибку регулирования. Из (13), (14) видно, что в системе используются местные обратные связи по переменным состояниям. Эти связи в соответствии с системой (14) "правят" процессы в замкнутой системе по каналам действия  $f_x$ , приводя собственную динамику объекта к своему фильтру-эталоноу посредством свободных коэффициентов  $\varphi_{r1}$ ,  $\varphi_{r2}$ , однако для этого нужно иметь информацию о переменных состояниях объекта. В свою очередь, фильтр со свободными коэффициентами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  определяет переходные процессы замкнутой системы по каналу обработки  $y - f_y$ . Если динамика объекта удовлетворительная, следует принять  $\varphi_{r1} = a_1$ ,  $\varphi_{r2} = a_2$ , тогда отпадает необходимость контроля переменных состояний  $x_{01}$ ,  $x_{02}$ . Возможна частичная "правка" объекта. Используя (14), можно установить, что фильтр-эталон по  $f_x$  включен последовательно с фильтром по  $y - f_y$ . Уравнения (13), (14) позволяют легко получить количественные данные зависимости амплитуды управляющего воздействия от частоты среза фильтров-эталонных. Таким образом, поведение замкнутой системы управления по

всем каналам воздействий при заданном объекте определяется свободно задаваемыми коэффициентами, которые определяют положение полюсов фильтра. Это удобно при практическом применении данного метода синтеза.

Уравнения состояния для системы (14) без внешних воздействий, задающие собственные движения системы, можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{\varphi 1} \\ \dot{x}_{\varphi 2} \\ \dot{\tilde{x}}_{01} \\ \dot{\tilde{x}}_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & -\frac{c_1}{c_2} \varphi_2 & -\varphi_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{r1} & \varphi_{r2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\varphi 1} \\ x_{\varphi 2} \\ \tilde{x}_{01} \\ \tilde{x}_{02} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

откуда следует, что два полюса системы определяются только свободными коэффициентами  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , два других — коэффициентами  $\varphi_{r1}$ ,  $\varphi_{r2}$ . Каждый из фильтров-эталонных является фильтром низких частот второго порядка. Опыт показывает, что целесообразно выбирать свободные коэффициенты так, чтобы частотные полосы пропускания объекта управления и фильтра-эталона примерно были одинаковыми, тогда обеспечивается умеренная амплитуда управляющих воздействий и робастность системы управления. Соотношения между коэффициентами удобно выбирать, используя стандартные формы фильтров [15, 23, 24].

Отметим, что, согласно системе (14) нули фильтров-эталонных нельзя задать произвольно, они соответствуют нулям объекта управления. Таким образом, если объект является неминимальнофазовым, то это свойство переносится и на динамику замкнутой системы, не ухудшая качества ее работы. Предположительно, в рамках данного подхода к синтезу систем управления возможна коррекция и нулей объекта, но этот вопрос в данной статье не рассматривается.

### Синтез системы автоматического регулирования движения манипуляционного робота

Рассмотрим синтез системы автоматического регулирования манипуляционным роботом в одном направлении методом компенсации динамики объекта и возмущений. Уравнения робота как объекта управления представлены в виде (1). Здесь управляющим воздействием  $u$

является задание на положение инструмента робота в данном направлении для системы более низкого уровня. Управляемая переменная — фактическое положение инструмента робота. Доступными для контроля являются положение и скорость движения инструмента, т. е.  $y_0$  и  $\dot{x}_{01}$ . Система должна обеспечивать быстродействие, примерно соответствующее быстродействию системы более низкого уровня и динамическую ошибку не более 1 %. Для синтеза системы нужно найти числовые коэффициенты уравнения (1) конкретного робота. Снятие кривой разгона или других характеристик затруднительно, но обычно известна максимальная скорость перемещения инструмента робота в данном направлении  $v_{\max}$ . Кроме того, как правило, можно оценить динамическую ошибку (перерегулирование)  $\sigma$  механической servосистемы более низкого уровня.

Задачу параметрической идентификации в этих условиях предлагается решать следующим образом. Считая объект управления устойчивым с единичным коэффициентом передачи в статике, записываем его передаточную функцию по каналу "задание—выход" при  $c_1 = 0$  в форме Вышнеградского [23]:

$$W(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \zeta\omega_0 s + \omega_0^2}; \quad (16)$$

$$a_1 = -\zeta\omega_0; a_2 = -\omega_0^2; c_2 = \omega_0^2,$$

где  $\omega_0$  — собственная частота колебаний объекта управления;  $\zeta$  — коэффициент, характе-

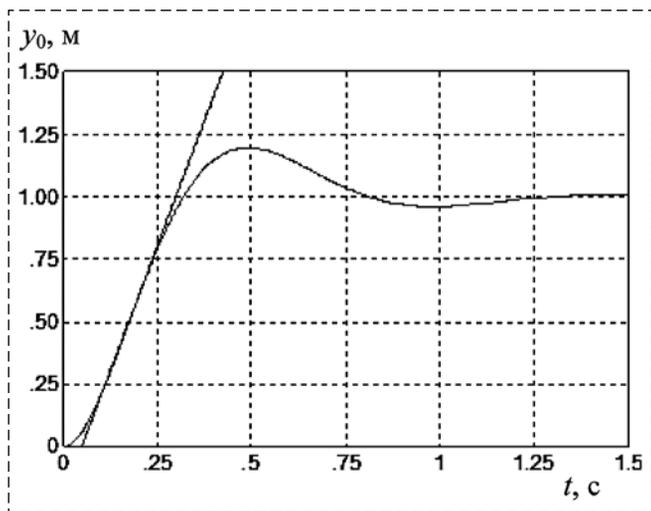


Рис. 1. Процесс параметрической идентификации математической модели (16)

Fig. 1. The process of parametric identification of the mathematical model (16)

ризирующий затухание. Эта форма удобна тем, что позволяет независимо изменять временной масштаб (быстродействие) звена и форму переходной характеристики. Такое представление объекта облегчает задачу его идентификации. Далее задачу решаем методом математического моделирования.

На компьютерной математической модели (16) находим переходную функцию системы и, изменяя  $\zeta$ , добиваемся того, чтобы динамическая ошибка стала равной заданному значению  $\sigma$ . Затем, изменяя  $\omega_0$ , легко обеспечиваем соответствие угла наклона касательной в точке перегиба переходной характеристики значению  $v_{\max}$ . На рис. 1 показан процесс параметрической идентификации математической модели (16) при характерных значениях  $v_{\max} = 4$  м/с и  $\sigma = 20$  %. Для этих значений получено (размерности здесь и далее опущены):

$$\omega_0 = 7,2; \zeta = 0,92, \quad (17)$$

что, согласно (15), соответствует коэффициентам

$$a_1 = -0,92 \cdot 7,2 = -6,634; \quad (18)$$

$$a_2 = -51,84; c_2 = 51,84.$$

Для задания свободных коэффициентов фильтров-эталонов также запишем уравнения этих фильтров в виде (16) и получим

$$W(s) = \frac{\omega_{\varphi 0}^2}{s^2 + \zeta_{\varphi}\omega_{\varphi 0}s + \omega_{\varphi 0}^2}, \quad (19)$$

$$\varphi_{11} = -\zeta_{\varphi}\omega_{\varphi 0}, \varphi_{12} = -\omega_{\varphi 0}^2;$$

$$W(s) = \frac{\omega_{r\varphi 0}^2}{s^2 + \zeta_{r\varphi}\omega_{r\varphi 0}s + \omega_{r\varphi 0}^2}, \quad (20)$$

$$\varphi_{r11} = -\zeta_{r\varphi}\omega_{r\varphi 0}, \varphi_{r12} = -\omega_{r\varphi 0}^2,$$

где  $\omega_{\varphi 0}$ ,  $\omega_{r\varphi 0}$  — собственные частоты колебаний фильтров-эталонов соответственно по  $y - f_y$  и  $f_x$ ;  $\zeta_{\varphi}$ ,  $\zeta_{r\varphi}$  — коэффициенты, характеризующие затухание по тем же фильтрам, являющиеся свободно задаваемыми параметрами. При увеличении  $\omega_{\varphi 0}$ ,  $\omega_{r\varphi 0}$  согласно (14) увеличивается быстродействие системы управления, но одновременно увеличивается амплитуда управляющего воздействия. Как показывает опыт, при увеличении частот повышается чувствительность системы к отклонениям параметров и структуры объекта управления от своих расчетных значений. В данном случае целесообразно выбрать

$$\omega_{\varphi 0} = \omega_{r\varphi 0} = \omega_0. \quad (21)$$

Поскольку в нашей системе динамическая ошибка должна быть менее 1 %, то выбираем

$$\zeta_{\varphi} = \zeta_{r\varphi} = \sqrt{3} \approx 1,73, \quad (22)$$

что соответствует фильтру Бесселя, имеющему перерегулирование 0,43 % [24].

Регулятор (12) с коэффициентами, вычисленными по формулам (17)—(22), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\varphi 1} &= -12,46x_{\varphi 1} + \varepsilon; \\ \dot{x}_{\varphi 2} &= x_{\varphi 1}; \\ u &= -5,83x_{\varphi 1} + 51,84x_{\varphi 2} - 5,83\tilde{x}_{01} + \varepsilon; \\ \tilde{x}_{01} &= x_{01} - x_{\varphi 1}; \\ \tilde{x}_{02} &= x_{02} - x_{\varphi 2}; \\ \varepsilon &= y - y_0. \end{aligned} \quad (23)$$

Исследование качества регулирования полученной системы проводилось методом математического моделирования. На рис. 2 пред-

ставлены переходные функции замкнутой системы управления объектом (1) с коэффициентами (18) и регулятором (12) по каналу "задание—выход" при разных значениях  $\omega_{\varphi 0}$ ,  $\omega_{r\varphi 0}$ . Верхняя кривая на рис. 2 соответствует значениям  $\omega_{\varphi 0} = \omega_{r\varphi 0} = 10$ ; средняя кривая — значениям  $\omega_{\varphi 0} = \omega_{r\varphi 0} = 7,2$ ; нижняя кривая — значениям  $\omega_{\varphi 0} = \omega_{r\varphi 0} = 5$ .

На рис. 3 показаны переходные функции по каналу " $f_{x1}$  — выход" при тех же значениях  $\omega_{\varphi 0}$ ,  $\omega_{r\varphi 0}$ , но чередование кривых обратное.

На модели проводилось также исследование параметрической и структурной робастности полученной системы управления. Исследование заключалось в анализе переходных функций при существенном изменении коэффициентов объекта управления и его структуры при регуляторе, рассчитанном для номинальных значений коэффициентов. На рис. 4 показаны переходные функции при поочередном изменении коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $c_2$  на  $\pm 30$  % от своих номинальных значений.

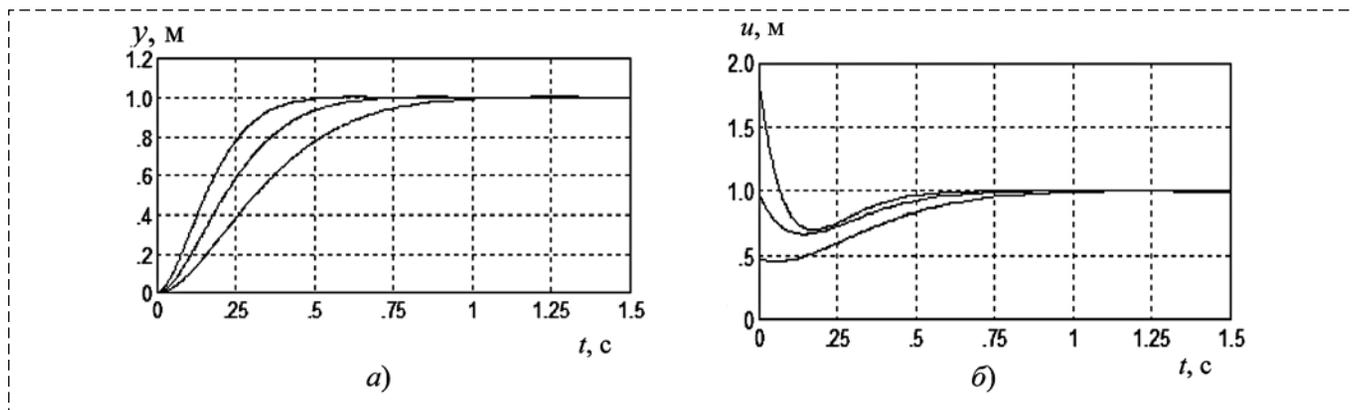


Рис. 2. Переходные процессы по каналу "задание—выход" при разных  $\omega_{\varphi 0}$ ,  $\omega_{r\varphi 0}$ :

*a* — выходная переменная; *b* — управляющее воздействие

Fig. 2. Transients on the channel "setpoint—output" with different  $\omega_{\varphi 0}$ ,  $\omega_{r\varphi 0}$ :

*a* — output variable; *b* — controlling action

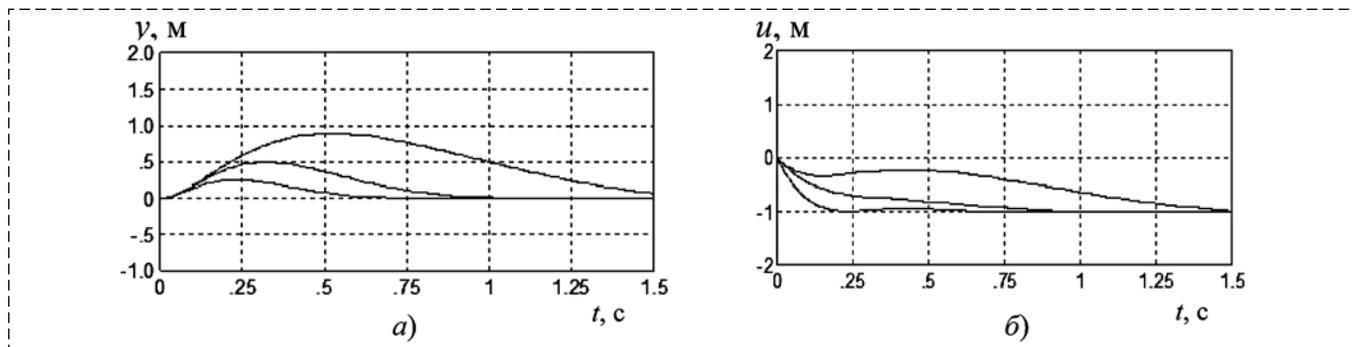


Рис. 3. Переходные процессы по каналу " $f_{x1}$  — выход" при разных  $\omega_{\varphi 0}$ ,  $\omega_{r\varphi 0}$ :

*a* — выходная переменная; *b* — управляющее воздействие

Fig. 3. Transients on the channel " $f_{x1}$  — output" with different  $\omega_{\varphi 0}$ ,  $\omega_{r\varphi 0}$ :

*a* — output variable; *b* — controlling action

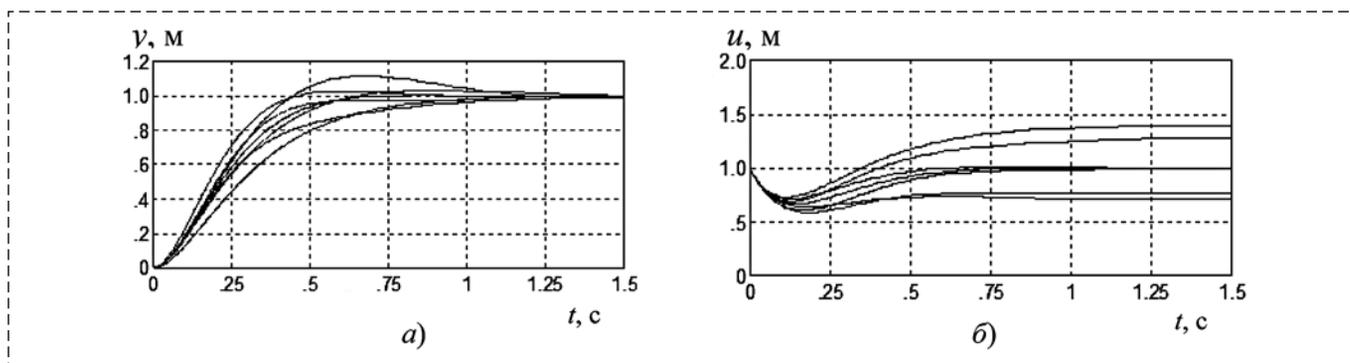


Рис. 4. Исследование системы на параметрическую робастность:

*a* — выходная переменная; *b* — управляющее воздействие

Fig. 4. Research of the system on parametric robustness:

*a* — output variable; *b* —controlling action

Запаздывание моделирует неучтенную динамику, а также реальные запаздывания в системе.

Таким образом, для данных внешних воздействий легко можно подобрать рациональные значения  $\omega_{\varphi 0}$ ,  $\omega_{r 0}$  и обеспечить вполне удовлетворительное качество регулирования.

### Заключение

Рассмотрение особенностей манипуляционного робота позволяет формулировать задачу управления его движением в одном направлении как управление линейным объектом второго порядка. Применение метода компенсации динамики объекта и возмущений дает возможность получить алгоритм управления таким объектом общего вида в аналитической форме посредством алгебраических действий над матрицами. Исходными данными для расчета системы управления являются математическая модель объекта управления и свободные параметры фильтров-эталонов, что удобно для практических приложений. Алгоритм обеспечивает нулевую статическую ошибку и обработку внешних воздействий с точностью фильтров-эталонов.

Применение формы Вышнеградского облегчает параметрическую идентификацию объекта и задание свободных коэффициентов фильтра-эталона, удобных применительно к описанию движения робота. Анализ методом математического моделирования системы управления движением робота, разработанной на основе предложенного в статье алгоритма, позволяет заключить, что система обеспечивает заданные

показатели качества и обладает свойствами параметрической и структурной робастности.

Полученный алгоритм управления может быть использован при автоматизации широкого класса промышленных объектов. В дальнейшем предполагается проработка свойств алгоритма с применением наблюдателя состояния, более детальное исследование робастности алгоритма и разработка системы с автоподстройкой параметров регулятора.

### Список литературы

1. **Zhao R.** Trajectory planning and control for robot manipulations. Robotics [cs.RO]: thesis — Université Paul Sabatier — Toulouse III. 2015. P. 158. URL: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01285383v2/document>
2. **Campa R., Ramirez C., Camarillo K., Santibanez V., Soto I.** Motion Control of Industrial Robots in Operational Space: Analysis and Experiments with the PA10 Arm // Advances in Robot Manipulators, Ernest Hall (Ed.). 2010. P. 417–442.
3. **Lynch K. M., Park F. C.** Modern Robotics: Mechanics, Planning and Control. Cambridge U. Press, 2017. 642 p.
4. **Nemeikšis A.** Trajectory modulation of 2.5 degree of freedom robot arm // Scientific researches and their practical application. Modern state and ways of development. 2014. Vol. 5, N. 3. P. 3–11. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22270213>
5. **Yurish S.** (Editor). Advances in Robotics and Automatic Control: Reviews, Book Series. 2018. Vol. 1. P. 404.
6. **Зенкевич С. Л., Ющенко А. С.** Управление роботами. Основы управления манипуляционными роботами. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. 400 с.
7. **Варков А. А., Красильникьянц Е. В., Тютиков В. В.** Система управления манипуляционным роботом с компенсацией динамических моментов // Автоматизация в промышленности. 2011, № 5. С. 38–44. URL: <https://avtprom.ru/sistema-upravleniya-manipulyatsionnym-ro>
8. **Zada V., Belda K.** Mathematical modeling of industrial robots based of Hamiltonian mechanics. 2016. P. 813–818. URL: [https://www.researchgate.net/publication/30466-5752\\_Mathematical\\_modeling\\_of\\_industrial\\_robots\\_based\\_on\\_Hamiltonian\\_mechanics](https://www.researchgate.net/publication/30466-5752_Mathematical_modeling_of_industrial_robots_based_on_Hamiltonian_mechanics)
9. **Воронов А. А.** Основы теории автоматического управления. Ч. I. Линейные системы регулирования одной вели-

чины. М.—Л.: Высшая школа, 1986. 367 с. URL: [http://www.studmed.ru/voronov-aa-teoriya-avtomaticheskogo-upravleniya-chast-per-vaya\\_92e4dec0e1e.html](http://www.studmed.ru/voronov-aa-teoriya-avtomaticheskogo-upravleniya-chast-per-vaya_92e4dec0e1e.html)

10. Александров А. Г. К аналитическому синтезу регуляторов // Автоматика и Телемеханика. 2010. № 6. С. 3—19. URL: [http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=826&option\\_lang=rus](http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=826&option_lang=rus)

11. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. I, II, III // Автоматика и телемеханика. 1960. № 4. С. 406—411; № 5. С. 561—568; № 6. С. 661—665. URL: [http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=12522&op-tion\\_lang=rus](http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=12522&op-tion_lang=rus)

12. Kalman R. E. Contributions to the Theory of Optimal Control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1960. Vol. 5, N. 1. P. 102—119. URL: <https://www.seman-ticscholar.org/paper/Contributions-to-the-Theory-of-Optimal-Control-K%С3%A1lm%С3%A1n/4602a97c4965a9f6c41c9a7eeaf5be8333dbaef>

13. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. [http://www.studmed.ru/polyak-bt-scherbakov-ps-robastnaya-ustoychivost-i-upravlenie\\_9af8562ef3e.html](http://www.studmed.ru/polyak-bt-scherbakov-ps-robastnaya-ustoychivost-i-upravlenie_9af8562ef3e.html)

14. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. URL: <https://lib-bkm.ru/12325>

15. Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в 5 т. Т. 3. Синтез регуляторов систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова и Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 656 с. URL: [http://www.studmed.ru/pupkov-ka-egupov-nd-metody-klassicheskoy-i-sovremennoy-teorii-avtomaticheskogo-upravleniya-tom-1\\_8c478adc2fa.html](http://www.studmed.ru/pupkov-ka-egupov-nd-metody-klassicheskoy-i-sovremennoy-teorii-avtomaticheskogo-upravleniya-tom-1_8c478adc2fa.html)

16. Андреев А. Ю. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с. URL: <http://www.toroid.ru/andreevUN.html>

17. Гайдук А. Р., Плаксиенко Е. А. Синтез динамических систем по требуемым показателям качества // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 4. С. 7—12. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=10442093>

18. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Динамическая коррекция процессов регулирования методом линейно-квадратичной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 5. С. 9—14. URL: <http://novtex.ru/mech/mech2011/an-not05.html#2>

19. Ким Д. П. Определение желаемой передаточной функции при синтезе систем управления алгебраическим методом // Мехатроника, автоматизация, управление. — 2011. № 5. С. 15—21.

20. Ким Д. П. Алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 164 с.

21. Шадрин Г. К. Физический подход к построению систем управления на основе компенсации динамики объекта и возмущений // Автоматика и Телемеханика. 2016. № 7. С. 33—46. URL: [http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=14505&option\\_lang=rus](http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=14505&option_lang=rus)

22. Шадрин Г. К., Порубов Д. А., Шадрин М. Г. Синтез алгоритма управления движением двухколесного робота методом компенсации динамики объекта и возмущений / Автоматика и программная инженерия. 2017. № 4 (22). С. 10—15. URL: <http://jurnal.nips.ru/sites/default/files/AaSI-4-2017-1.pdf>

23. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.—Л.: Госэнергоиздат, 1962. 600 с. URL: <https://www.twirpx.com/file/840055/>

24. Титце У., Шенк К. Полупроводниковая схемотехника. М.: Мир, 1982. 512 с. URL: <http://lazysmart.ru/wp-content/uploads/2016/07/Tittse-U.-SHenk-K.-Poluprovodniko-vaya-shemotekhnika.-Tom-I-2007.pdf>

## Synthesis of the Robotic Tool Motion-Controlling Algorithm Using Method of Correction Dynamics and Perturbations Compensation

G. K. Shadrin, [shadrin.g.k@yandex.ru](mailto:shadrin.g.k@yandex.ru), D. L. Alontseva, [dalontseva@mail.ru](mailto:dalontseva@mail.ru),

A. T. Kussaiyn-Murat, [asselkussaiynmurat@gmail.com](mailto:asselkussaiynmurat@gmail.com), A. L. Krasavin, [alexanderkrasavin@mail.ru](mailto:alexanderkrasavin@mail.ru),  
Automation and Control specialty at the Department of Instrument Engineering and Technology Automation,  
School of Information Technology, D. Serikbayev East-Kazakhstan State Technical University,  
Ust-Kamenogorsk, 070004, Kazakhstan

Corresponding author: Shadrin G. K., Associated Professor, Automation and Control Specialty at the Department of Instrument Engineering and Technology Automation, School of Information Technology D. Serikbayev East-Kazakhstan State Technical University, Ust-Kamenogorsk, 070004, Kazakhstan, e-mail: [shadrin.g.k@yandex.ru](mailto:shadrin.g.k@yandex.ru)

Accepted on February 28, 2019

### Abstract

The task of controlling the manipulation robot movement in one direction has been considered. Such task appears at cutting, welding, painting and other similar operations, when the robot instrument performs a program motion along the working surface and at the same time, it is necessary to keep a definite distance from this instrument to the surface automatically without excessive correction. A new algorithm of controlling the linear object of the second order of the general form has been obtained by dynamics and perturbations compensation method, which takes precedence over well-known decisions. The algorithm provides a zero static error of the system regulation and movement in acquisition of external effects within the accuracy of standard filters of the second order that is convenient for practical use. The first filter indicates movements of the system during the task performing; the second one provides perturbations compensation on state variables. A step-by-step procedure of the algorithm synthesis has been represented for the second order controlled object of the general form. Formulae for calculating regulator coefficients have been obtained. The obtained equations defining processes in a closed control system allow performing the analysis of the control quality and the dynamics of control changes depending on external influences. A method of equations identification of the robot motion in conditions when we know the maximum speed of its instrument movement and a dynamic error of the robot servosystem regulating has been developed. By this method, the robot equations are brought up to the Vyshnegradskiy's form and then on the computer model a fundamental frequency and a decay factor can

be easily chosen. The application of the obtained algorithm has been reviewed to create a system of automatic regulation of the robot instrument position. It has been clarified that defining free coefficients of these filters on position of filter fundamental frequency equation and a controlled object provides the given system operation speed at moderate amplitude of controlling actions. A mathematical modeling method has shown the advantages of regulation program quality, parametric and structural robustness of the obtained control system.

**Keywords:** programmable robot, motion control, algorithm of control, analytical synthesis, mathematic modeling

**Acknowledgements:** This work was supported by the Scientific Committee for the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan on program 0006 / PCF-17

For citation:

**Shadrin G. K., Alontseva D. L., Kussaiyn-Murat T., Krasavin A. L.** Synthesis of the Robotic Tool Motion-Controlling Algorithm Using Method of Correction Dynamics and Perturbations Compensation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 7, pp. 472–481.

DOI: 10.17587/mau.20.472-481

### References

1. **Zhao R.** Trajectory planning and control for robot manipulations. Robotics [cs.RO]: thesis — Universit@ Paul Sabatier — Toulouse III, 2015, pp. 158, available at: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01285383v2/document>
2. **Campa R., Ramirez C., Camarillo K., Santibanez V., Soto I.** Motion Control of Industrial Robots in Operational Space: Analysis and Experiments with the PA10 Arm, *Advances in Robot Manipulators*, Ernest Hall (Ed.), 2010, pp. 417–442.
3. **Lynch K. M., Park F. C.** Modern Robotics: Mechanics, Planning and Control, Cambridge U. Press, 2017, pp. 642.
4. **Nemeikšis A.** Trajectory modulation of 2.5 degree of freedom robot arm, *Scientific researches and their practical application. Modern state and shays of development*, 2014, vol. 5, no. 3, pp. 3–11, available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22270213>
5. **Yurish S.** ed. *Advances in Robotics and Automatic Control: Reviews*, Book Series, 2018, vol. 1, 404 p.
6. **Zenkevich S. L., Jushhenko A. S.** Robots control. The basics of manipulating robots, Moscow, Publishing house of MGTU named after N. Je. Bauman, 2000, 400 p. (in Russian)
7. **Varkov A. A., Krasil'nikjanc E. V., Tjutikov V. V.** Control system of a manipulation robot with compensation of dynamic moments, *Avtomatizacija v Promyshlennosti*. 2011, no. 5, pp. 38–44, available at: <https://avtprom.ru/sistema-upravleniya-manipulyatsionnym-ro> (in Russian)
8. **Zada V., Belda K.** Mathematical modeling of industrial robots based of Hamiltonian mechanics, 2016, pp. 813–818, available at: [https://www.researchgate.net/publication/30466-5752\\_Mathematical\\_modeling\\_of\\_industrial\\_robots\\_based\\_on\\_Hamiltonian\\_mechanics](https://www.researchgate.net/publication/30466-5752_Mathematical_modeling_of_industrial_robots_based_on_Hamiltonian_mechanics)
9. **Voronov A. A.** Fundamentals of the theory of automatic control. Part I. Linear control systems of one magnitude, Moscow—Leningrad, Vysshaja shkola, 1986, 367 p., available at: [http://www.studmed.ru/voronov-aa-teoriya-avtomaticheskogo-upravleniya-chast-per-vaya\\_92e4dec0e1e.html](http://www.studmed.ru/voronov-aa-teoriya-avtomaticheskogo-upravleniya-chast-per-vaya_92e4dec0e1e.html) (in Russian)
10. **Aleksandrov A. G.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 2010, no. 6, pp. 3–19, available at: URL:[http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshowpaper&jrnid=at&paperid=826&option\\_lang=rus](http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshowpaper&jrnid=at&paperid=826&option_lang=rus) (in Russian)
11. **Letov A. M.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 1960, no. 4, pp. 406–411; no. 5, pp. 561–568; no. 6, pp. 661–665, available at: [http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=12522&option\\_lang=rus](http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=12522&option_lang=rus) (in Russian)
12. **Kalman R. E.** *Boletin de la Sociedad Matematica Mehicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119, available at: <https://www.semanticscholar.org/paper/Contributions-to-the-Theory-of-Optimal-Control-K%C3%A1lm%C3%A1n/4602a97c4965a9f6c41c9a7eeaf5be8333dbaef>
13. **Poljak B. T., Shherbakov P. S.** Robust stability and control, Moscow, Nauka, 2002 (in Russian), available at: [http://www.studmed.ru/polyak-bt-scherbakov-ps-robastnaya-ustoychivost-i-upravle-nie\\_9af8562ef3e.html](http://www.studmed.ru/polyak-bt-scherbakov-ps-robastnaya-ustoychivost-i-upravle-nie_9af8562ef3e.html)
14. **Izerman R.** Digital control systems, Moscow, Mir, 1984, available at: <https://lib-bkm.ru/12325> (in Russian).
15. **Pupkov K. A., Egupov N. D.** Methods of classical and modern theory of automatic control. Textbook in 5 t.; V. 3. Synthesis of regulators of automatic control systems), Moscow Publishing house of MGTU named after N. Je. Bauman, 2004, 656 p. (in Russian).
16. **Andreev A. Ju.** Control of finite-dimensional linear objects, Moscow, Nauka, 1976, 424 p., available at: <http://www.toroid.ru/andreevUN.html> (in Russian).
17. **Gajduk A. R., Plaksienko E. A.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2008, no. 4, pp. 7–12, available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=10442093> (in Russian).
18. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 5, pp. 9–14 (in Russian), available at: <http://novtex.ru/mech/mech2011/an-not05.html#2>
19. **Kim D. P.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 5, pp. 15–21 (in Russian).
20. **Kim D. P.** Algebraic methods for the synthesis of automatic control systems, Moscow, FIZMATLIT, 2014, 164 p. (in Russian).
21. **Shadrin G. K.** *Avtomatika i Telemekhanika*, 2016, no. 7, pp. 1151–1162, available at: [http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=14505&option\\_lang=rus](http://m.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=14505&option_lang=rus) (in Russian).
22. **Shadrin G. K., Porubov D. A., Shadrin M. G.** *Avtomatika i programnaja inzhenerija*, 2017, no. 4 (22), pp. 10–15, available at: <http://jurnal.nips.ru/sites/default/files/AaSI-4-2017-1.pdf> (in Russian).
23. **Krasovskij A. A., Pospelov G. S.** Fundamentals of automation and technical cybernetics, Moscow—Leningrad, Gosjenergoizdat, 1962, 600 p., available at: <https://www.twirpx.com/file/840055/> (in Russian).
24. **Titce U., Shenk K.** Semiconductor Circuitry, Moscow, Mir, 1982, 512 pp. available at: <http://lazysmart.ru/wp-content/uploads/2016/07/Tittse-U.-Shenk-K.-Poluprovodniko-vaya-shemotehnika.-Tom-I-2007.pdf> (in Russian).

С. В. Волков, канд. техн. наук, [cniiag@cniiag.ru](mailto:cniiag@cniiag.ru),  
О. В. Горячев, д-р техн. наук, проф., [olevggor@rambler.ru](mailto:olevggor@rambler.ru),  
А. Г. Ефромеев, канд. техн. наук, доц., [age.sau@mail.ru](mailto:age.sau@mail.ru),  
А. О. Степочкин, аспирант, [s.a.o.1984@yandex.ru](mailto:s.a.o.1984@yandex.ru),  
Тульский государственный университет, г. Тула

## Расчет параметров математической модели электрического шагового двигателя гибридного типа на основе анализа картины магнитостатического поля

*Представлен вариант решения задачи расчета параметров математической модели электрического шагового двигателя гибридного типа на основе анализа картины его магнитостатического поля. Показан один из основных недостатков такого двигателя — среднечастотный резонанс, возникающий из-за совпадения частоты собственных колебаний ротора с частотой подачи импульсов напряжения питания. Обоснована необходимость учета данного фактора при проектировании системы дискретного электропривода на основе исполнительного двигателя данного типа путем расчета значений резонансных частот и использования их при разработке алгоритма управления приводом. Поставлена задача разработки математической модели двигателя, позволяющей выполнить анализ влияния его конструктивных параметров на спектр резонансных частот. Сформирована методика расчета параметров заданной математической модели. Рассмотрены варианты математического описания данной электрической машины и выполнен подбор ее известной математической модели на основе схемы замещения электрической цепи. Выполнен численный расчет пространственной картины магнитостатического поля электродвигателя. На основе анализа результатов расчета сформирована система допущений для разработки эквивалентной схемы замещения магнитной цепи электрической машины. Разработана эквивалентная схема замещения магнитной цепи и соответствующая ей система уравнений. Сформирована система уравнений математической модели на основе схем замещения электрической и магнитной цепей. На основе системы уравнений разработана имитационная модель дискретного электропривода в программном пакете Simulink. С помощью полученной имитационной модели выполнен расчет переходных процессов по углу поворота ротора и электромагнитному моменту и проведен анализ влияния одного из конструктивных параметров на частоту собственных колебаний ротора. На основе результатов моделирования показано, что при увеличении высоты воздушного зазора у гибридного шагового двигателя уменьшается значение результирующего электромагнитного момента, и снижается частота собственных колебаний ротора, соответственно снижается и частота, при которой возникает среднечастотный резонанс. Полученная математическая модель может быть использована на этапе поверочного расчета выбранного двигателя, так как позволяет проанализировать влияние конкретного конструктивного параметра машины, в частности воздушного зазора, на частоту собственных колебаний ротора, а следовательно, на спектр резонансных частот дискретного электропривода.*

**Ключевые слова:** гибридный шаговый двигатель, математическая модель, численный расчет пространственной картины магнитостатического поля, расчет параметров математической модели, эквивалентная схема замещения электрической цепи, эквивалентная схема замещения магнитной цепи

### Введение

Электрические шаговые двигатели гибридного типа на сегодняшний день являются одним из перспективных типов исполнительных устройств дискретного электропривода высокоточных систем и комплексов гражданского и оборонного назначения. Важное преимущество такого привода — возможность реализации позиционного контура управления без использования обратной связи. Наиболее существенным его недостатком является характерный для всех типов шаговых двигателей резонанс, вызывающий шум, вибрацию, уменьшение развиваемого двигателем момента и пропуск шагов при определенных скоростях вращения.

Можно выделить два типа резонансных явлений в шаговом двигателе. Низкочастотный резонанс проявляется в виде вибрации машины при низких частотах вращения (порядка  $1...2 \text{ с}^{-1}$ ). Он вызван несимметричностью токов в обмотках статора. Современные драйверы для управления шаговыми двигателями имеют механизм устранения низкочастотного резонанса с помощью подстройки фазных токов.

Среднечастотный резонанс проявляется в виде шума на средних частотах вращения (порядка  $5...15 \text{ с}^{-1}$ ) и возникает при совпадении частоты собственных колебаний ротора с частотой подачи импульсов фазных напряжений. Частота собственных колебаний ротора зависит, прежде всего, от конструктивных параметров двигателя: момента инерции, гео-

метрических размеров магнитопровода и воздушного зазора.

При реализации системы управления дискретным электроприводом возникает задача минимизации негативного влияния среднечастотного резонанса, что может быть достигнуто путем расчета соответствующих резонансных частот и их учета при разработке алгоритма управления. Соответственно актуальной является задача подбора математической модели, которая позволит оценить влияние конструктивных параметров машины на частоту собственных колебаний ротора, а следовательно, и на спектр резонансных частот. Это поможет оптимизировать подбор конкретной марки двигателя и реализовать алгоритм управления приводом таким образом, чтобы негативное влияние резонансных явлений на его характеристики было минимальным.

### Постановка задачи

Для расчета статических и динамических характеристик систем электрического привода применяются математические модели исполнительного двигателя разной степени идеализации. Математическое описание электрических машин, как правило, основано на системе уравнений Лагранжа—Максвелла, описывающих основные моменты процесса электрохимического преобразования энергии. Конструктивные параметры конкретного электрического двигателя в модели отражены в соответствующих постоянных коэффициентах системы дифференциальных и алгебраических уравнений, таких как потокосцепление, индуктивность фазы, коэффициент момента и противоЭДС и других, заданных заводом-изготовителем в прилагаемой технической документации. Однако в инженерной практике возникают задачи, решение которых требует непосредственного учета в математическом описании машины геометрических размеров магнитопровода и воздушного зазора, свойств конструкционных материалов ротора и статора, параметров обмоток. Одной из таких задач и является анализ влияния конструктивных параметров шагового двигателя на присущие данному типу электрических машин резонансные явления.

Различные аспекты формирования математического описания гибридного шагового двигателя (ГШД) рассмотрены в целом ряде работ [1—7]. На основе анализа данных источников

можно выделить модель, основанную на схеме замещения электрической цепи обмотки статора. В частности, согласно работе [7] для двухфазного ГШД соответствующая система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} U_A = i_A R_A + L_A \frac{di_A}{dt} + \omega p \psi \sin(p\theta); \\ U_B = i_B R_B + L_B \frac{di_B}{dt} - \omega p \psi \cos(p\theta); \\ M_{\vartheta} = p(\psi_B i_B \cos(p\theta) - \psi_A i_A \sin(p\theta)) - M_{\text{ст max}} \sin(2p\theta); \\ J_{\text{дв}} \frac{d\omega}{dt} = M_{\vartheta} - M_{\text{с}}; \\ \omega = \frac{d\theta}{dt}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $U$ ,  $i$ ,  $R$ ,  $\psi$ ,  $L$  — напряжение, ток, сопротивление, потокосцепление и индуктивность соответствующей фазы;  $\theta$ ,  $\omega$ ,  $J_{\text{дв}}$ ,  $p$  — угол поворота, угловая частота вращения ротора, момент инерции ротора, число пар полюсов ротора;  $M_{\vartheta}$  — электромагнитный момент;  $M_{\text{ст max}}$  — амплитудное значение статического фиксирующего момента, определяемого постоянными магнитами ротора;  $M_{\text{с}}$  — момент статического сопротивления вала двигателя.

Модель включает в себя:

- уравнения напряжений каждой из фаз, полученные согласно схеме замещения обмоток статора;
- выражение для электромагнитного момента, полученное из уравнения баланса мощностей;
- уравнение движения ротора двигателя под действием электромагнитного вращающего момента и момента статического сопротивления.

В системе уравнений (1) параметры  $L$  — индуктивность обмотки статора и  $\psi$  — потокосцепление обмотки статора заданы в виде постоянных коэффициентов без учета изменения модуля вектора магнитного потока, а также геометрии магнитопровода и воздушного зазора двигателя в процессе электрохимического преобразования энергии. В связи с этим задачу получения математической модели ГШД на основе анализа конструктивных параметров машины фактически будем рассматривать как задачу расчета параметров  $L$  и  $\psi$  как функций угла поворота ротора двигателя  $\theta$ , зависящих также от геометрических соотношений маг-

нитной системы, свойств конструкционных материалов, параметров обмоток статора.

### Общий подход к построению эквивалентной схемы замещения магнитной цепи ГШД

Для расчета значений индуктивности и потокосцепления обмотки статора в зависимости от параметров магнитной системы целесообразно использование эквивалентной схемы замещения магнитной цепи ГШД.

Общий подход к построению эквивалентной схемы замещения магнитной цепи, применимый для любого электромеханического преобразователя, рассмотрен, в частности, в работе [2].

Магнитодвижущие силы (МДС) обмоток статора и постоянных магнитов ротора создают магнитный поток, который замыкается через элементы магнитопровода. В силу специфики конструкции данного типа электрических машин схему замещения магнитной цепи ГШД целесообразно представить в виде пространственной структуры, включающей: источники МДС, линейные магнитные сопротивления, нелинейные магнитные сопротивления.

В качестве источников МДС могут выступать обмотки с током либо постоянные магниты. МДС обмотки статора  $F_{об}$  рассчитывается по формуле

$$F_{об} = iw, \quad (2)$$

где  $i$  — ток в обмотке соответствующей фазы статора;  $w$  — число витков обмотки фазы статора.

Если источником МДС выступает постоянный магнит, вводится понятие фиктивной МДС постоянного магнита  $F_{пм}$ :

$$F_{пм} = H_{кф} l_M, \quad (3)$$

где  $H_{кф}$  — фиктивная коэрцитивная сила постоянного магнита ротора;  $l_M$  — длина элемента постоянного магнита ротора (как правило, длина по средней линии).

Значение  $H_{кф}$  может быть рассчитано аналитически на основе анализа кривой размагничивания материала постоянного магнита [2], либо численно при решении задачи магнитостатики средствами одного из специализированных программных пакетов.

Магнитное сопротивление участка магнитопровода может быть вычислено по формуле

$$R_i = \frac{h_i}{S_i \mu_i}, \quad (4)$$

где  $h_i$  — соответствующие длины участков магнитопровода двигателя;  $S_i$  — площадь, пересекаемая магнитным потоком на заданном участке магнитопровода;  $\mu_i$  — относительная магнитная проницаемость материала заданного участка магнитопровода.

Магнитная проводимость участка магнитопровода очевидно является величиной, обратной магнитному сопротивлению:

$$G_i = \frac{1}{R_i}. \quad (5)$$

В соответствии с общими принципами формирования магнитная цепь условно разбивается на участки с равномерным сечением и постоянной магнитной проницаемостью. Затем каждый участок магнитной цепи заменяется магнитным сопротивлением, а МДС, распределенная на участке, заменяется источником МДС соответствующего вида.

Согласно принятым выше обозначениям выражение для закона полного тока магнитной цепи может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^n \Phi R_i = \sum_{j=1}^k F_{об} + F_{пм}, \quad (6)$$

где  $\Phi$  — магнитный поток на рассматриваемом участке магнитной цепи двигателя;  $n$  — число участков магнитной цепи с соответствующим магнитным сопротивлением;  $k$  — число фаз обмотки статора.

### Методика расчета параметров математической модели ГШД на основе эквивалентной схемы замещения магнитной цепи

Для построения эквивалентной схемы замещения магнитной цепи ГШД необходимо учитывать структуру магнитной системы в целом, а также параметры рабочего воздушного зазора. При расчете магнитной цепи необходимо знать магнитную проводимость рабочего воздушного зазора и проводимости потоков рассеяния. Значение магнитной проводимости определяется конфигурацией поверхностей полюсов, ограничивающих воздушный зазор, их размерами и непосредственно высотой воздушного зазора. Для расчета магнитных проводимостей участков магнитных цепей применяется целый ряд методов, в том числе: аналитический метод, метод вероятного пути потока, метод рас-

четных полюсов, метод построения картины поля и др.

Конструктивная схема ГШД представлена на рис. 1 (см. вторую сторону обложки).

Анализ данной схемы позволяет сделать вывод, что в силу специфики конструкции двигателя магнитное поле, созданное фазными обмотками и постоянными магнитами, имеет сложную трехмерную конфигурацию, и для подтверждения выводов по элементам и структуре магнитной системы целесообразно выполнить расчет его пространственной картины для серии взаимных положений ротора и статора. На основе полученных результатов моделирования можно будет сформировать систему допущений для разработки схемы замещения магнитной цепи. Расчет картины поля может быть проведен с помощью численных методов средствами специализированных программных пакетов.

Соответственно, методика расчета параметров модели на основе анализа магнитной системы машины включает в себя:

1) анализ физических свойств и характеристик применяемых конструкционных материалов;

2) численное моделирование магнитного поля машины с помощью метода конечных элементов средствами специализированных программных пакетов и формулировка выводов по структуре и параметрам магнитной системы;

3) формирование системы допущений для описания структуры магнитной системы машины;

4) разработку схемы замещения магнитной системы машины;

5) формирование аналитических зависимостей для расчета полной проводимости магнитной цепи согласно полученной схеме замещения;

6) формирование системы уравнений с учетом полученных аналитических зависимостей для потокосцепления и индуктивности фаз двигателя.

### **Расчет картины магнитостатического поля ГШД**

Исходя из анализа конструкции двигателя решение задачи расчета магнитного поля машины осуществляется в трехмерной постановке. В качестве исходных данных выступают трехмерная модель ГШД, выполненная в паке-

те SolidWorks, и параметры соответствующих конструкционных материалов.

Решение задачи магнитостатики выполняется с помощью численного метода конечных элементов средствами демоверсии программного пакета JMAG Designer. Численный расчет магнитного поля ГШД позволит решить следующие задачи:

1) выполнить анализ пространственной структуры пути магнитного потока и получить соответствующие геометрические размеры элементов магнитопровода;

2) выполнить анализ значения магнитной проницаемости участков магнитной цепи.

На рис. 2 (см. вторую сторону обложки) представлен вариант разбиения в рабочем окне программного пакета трехмерной модели секции двигателя с помощью сетки конечных элементов. Построение сетки выполняется в автоматическом режиме. Свойства конструкционных материалов элементов машины выбираются из библиотеки материалов Jmag Designer исходя из соответствия располагаемых кривых намагничивания магнитомягких материалов и кривых размагничивания магнитотвердых материалов заданным.

Результаты моделирования представлены на рис. 3, 4 (см. вторую сторону обложки).

В результате решения задачи магнитостатики получены картины линий вектора магнитной индукции и плотность ее распределения по магнитопроводу машины при заданных режимах подачи питания на обмотки статора. В соответствии с анализом полученных результатов была сформулирована система допущений для разработки схемы замещения магнитной цепи машины:

1) путь магнитного потока по магнитопроводу разбивается на участки, имеющие форму прямоугольного параллелепипеда;

2) вследствие малого значения воздушного зазора магнитные потоки рассеяния и выпучивания не учитываются;

3) при перемещении ротора относительно статора на один шаг угловые перемещения ввиду малости угла поворота считаются линейными;

4) магнитопровод и обмотки принимаются симметричными, т. е. имеющими одинаковые геометрические размеры на всех полюсных делениях, а в пределах одного деления — симметричными относительно продольных и поперечных осей;

5) для симметричных элементов конструкции машины (зубцы ротора, полюсные наконечники статора) анализ и расчет выполняются лишь для одного из элементов с последующим отображением результатов на остальные;

6) значение относительной магнитной проницаемости участков магнитопровода из магнитомягких материалов значительно превосходит данный показатель для воздушного зазора двигателя, следовательно, согласно выражению (4) при разработке схемы замещения магнитной цепи в расчет принимаем лишь магнитное сопротивление воздушного зазора;

7) результирующее магнитное поле в воздушном зазоре формируется в результате наложения полей фазных обмоток и постоянного магнита.

### Разработка эквивалентной схемы замещения магнитной цепи ГШД

При разработке схемы замещения магнитной цепи, помимо сформулированных выше допущений необходимо учитывать направления магнитодвижущих сил фазных обмоток двигателя, направления которых определяются заданными токами. Направление магнитодвижущей силы постоянного магнита одной секции ротора соответствует правилу о направлении линий вектора магнитной индукции постоянного магнита от его северного полюса N к южному полюсу S.

Эквивалентная схема замещения магнитной цепи с учетом принятых выше допущений представлена на рис. 5.

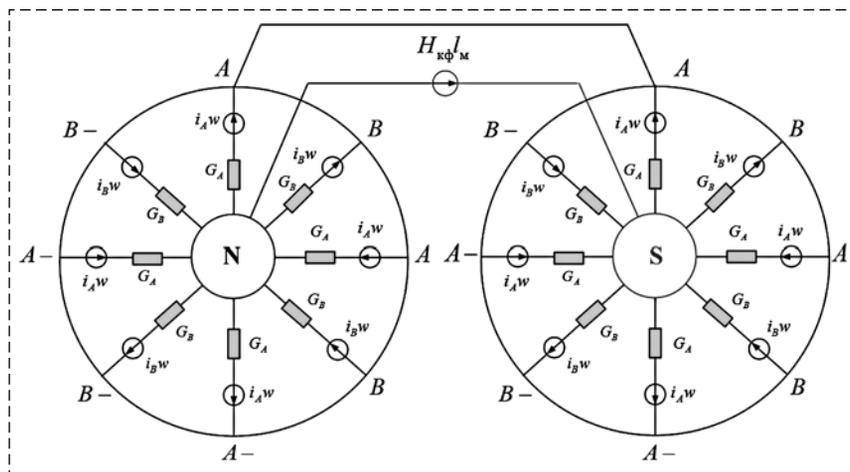


Рис. 5. Эквивалентная схема замещения магнитной цепи гибридного шагового двигателя

Fig. 5. The equivalent circuit of the magnetic circuit of the hybrid stepper motor

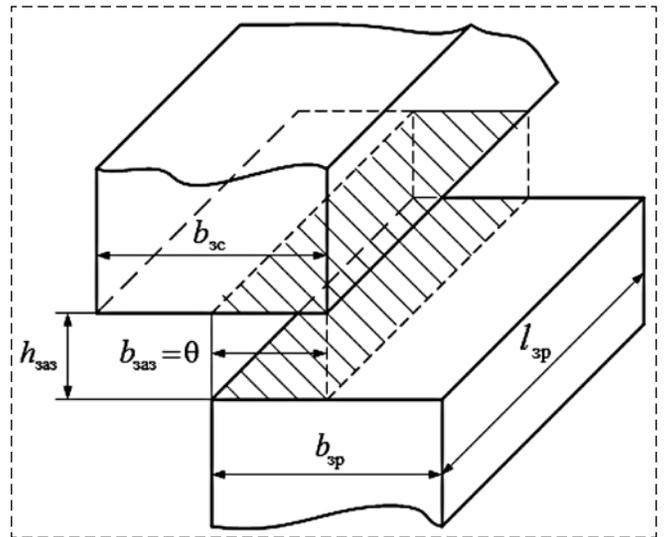


Рис. 6. Эскиз области воздушного зазора для одной пары зубцов статора и ротора гибридного шагового двигателя с соответствующими геометрическими соотношениями

Fig. 6. Sketch of the air gap area for one pair of teeth of the stator and rotor of the hybrid stepper motor with the corresponding geometric relations

В соответствии с анализом распределения линий магнитной индукции воздушного зазора при моделировании вращения двигателя и принятых допущений о структуре магнитной системы выполним эскиз области динамического воздушного зазора для одной пары зубцов статора и ротора, представленный на рис. 6.

На рис. 6  $h_{заз}$  — высота воздушного зазора между ротором и статором;  $b_{зр}$  — ширина зубца ротора;  $l_{зр}$  — длина зубца ротора;  $b_{зс}$  — ширина зубца статора;  $b_{заз}$  — ширина воздушного зазора.

### Формирование системы уравнений математической модели на основе схем замещения электрической и магнитной цепей

Соответствующая система уравнений по структуре повторяет математическую модель на основе схемы замещения электрической цепи, однако заданные в ней в качестве констант значения индуктивности  $L$  и потокосцепления  $\psi$  рассчитываются в соответствии с аналитическим выражением зависимости проводимости воздушного зазора  $G$  от угла поворота ротора двигателя  $\theta$ .

Выражения для расчета магнитных сопротивлений и со-

ответствующих им магнитных проводимостей зазоров полюсов ротора и статора можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} R_{A_{\text{ЭКВ}}}(\theta) = \frac{h_{\text{заз}}}{((b_{\text{зр}}/2) + \theta)l_{\text{зр}}\mu_{\text{v}}}; \\ R_{B_{\text{ЭКВ}}}(\theta) = \frac{h_{\text{заз}}}{((b_{\text{зр}}/2) + \theta)l_{\text{зр}}\mu_{\text{v}}}; \\ G_A(\theta) = \frac{1}{\sum R_{A_{\text{ЭКВ}}}(\theta)}; \\ G_B(\theta) = \frac{1}{\sum R_{B_{\text{ЭКВ}}}(\theta)}. \end{cases} \quad (7)$$

Система уравнений математической модели на основе эквивалентных схем замещения электрической и магнитной цепей имеет вид

$$\begin{cases} \psi_A(\theta) = (2i_A w + H_{\text{кф}} l_m) w G_A(\theta); \\ \psi_B(\theta) = (2i_B w + H_{\text{кф}} l_m) w G_B(\theta); \\ L_A(\theta) = w^2 G_A(\theta); \\ L_B(\theta) = w^2 G_B(\theta); \\ U_A = i_A R_A + L_A(\theta) \frac{di_A}{dt} + \omega p \psi_A(\theta) \sin(p\theta); \\ U_B = i_B R_B + L_B(\theta) \frac{di_B}{dt} - \omega p \psi_B(\theta) \cos(p\theta); \\ M_{\text{э}} = \psi_B(\theta) p i_B \cos(p\theta) - \psi_A(\theta) p i_A \sin(p\theta) - \\ - M_{\text{ст max}} \sin(2p\theta); \\ J_{\text{дв}} \frac{d\omega}{dt} = M_{\text{э}} - M_{\text{с}} - M_{\text{ст}}. \end{cases} \quad (8)$$

Из анализа уравнений (7) и (8) следует, что модель позволяет варьировать следующие конструктивные параметры двигателя: высоту воздушного зазора  $h_{\text{заз}}$ , ширину зубца ротора  $b_{\text{зр}}$ , длину зубца ротора  $l_{\text{зр}}$ , число витков обмотки одной фазы  $w$ , параметры постоянного магнита ротора  $H_{\text{кф}}$  и  $l_m$ .

### Simulink-модель ГЩД на основе эквивалентных схем замещения электрической и магнитной цепей

Имитационная модель ГЩД в пакете расширения MATLAB Simulink на основе уравнений (7) и (8) представлена на рис. 7. Переходные процессы по результирующему электромагнитному моменту и углу поворота ротора приведены на рис. 8 и 9. Модель полностью соответствует рас-

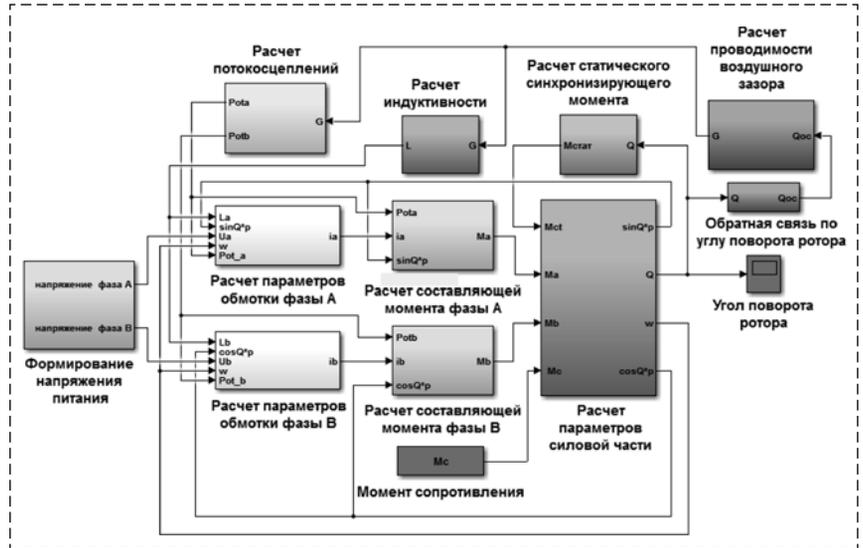


Рис. 7. Имитационная модель ГЩД на основе эквивалентных схем замещения электрической и магнитной цепей в программном пакете Simulink

Fig. 7. Simulation model of a hybrid stepper motor based on equivalent circuits of electric and magnetic circuits in the software package Simulink

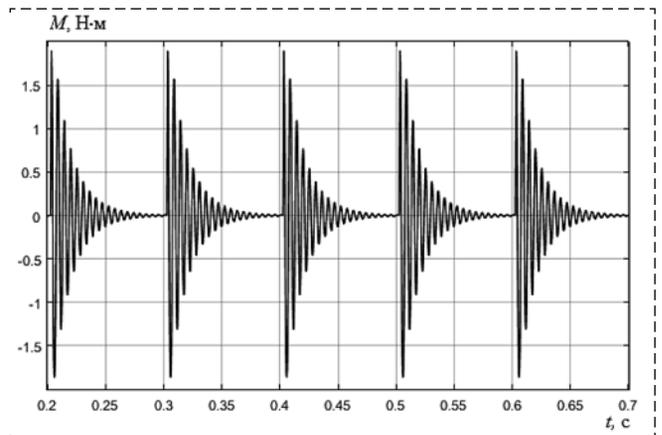


Рис. 8. Результаты моделирования переходного процесса по электромагнитному моменту при частоте питания 10 Гц

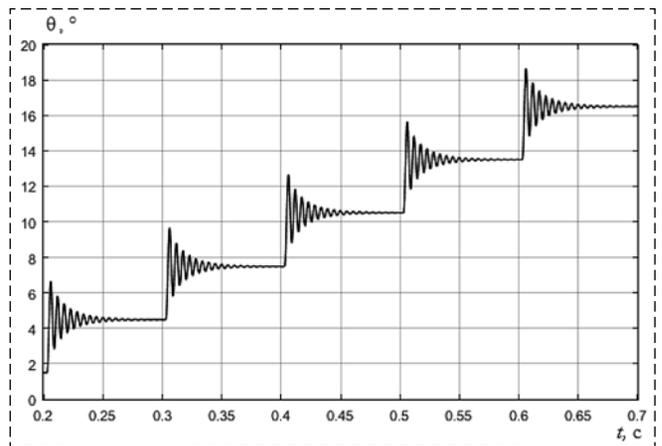


Рис. 9. Результаты моделирования переходного процесса по углу поворота ротора при частоте питания 10 Гц

Fig. 9. The results of the simulation of the transition process in the angle of rotation of the rotor with a power frequency of 10 Hz

смотренной выше системы уравнений (9) и состоит из следующих подсистем:

- подсистема расчета параметров обмоток фаз;
- подсистема расчета индуктивности фаз;
- подсистема расчета потокосцепления фаз;
- подсистемы расчета составляющих момента фаз;
- подсистема расчета проводимостей;
- подсистема расчета параметров силовой части;
- подсистема формирования напряжения питания;
- подсистема расчета статического синхронизирующего момента.

### Анализ влияния высоты воздушного зазора ГЩД на частоту собственных колебаний ротора

В качестве примера выполним сравнительный анализ результатов моделирования угла поворота вала двигателя при увеличении высоты воздушного зазора  $h_{\text{заз}}$  между ротором и статором на 40 % с 0,00015 до 0,00021 м.

Результаты моделирования представлены на рис. 10 и 11.

Из анализа результатов моделирования можно сделать вывод, что при увеличении высоты воздушного зазора уменьшается значение результирующего электромагнитного момента и снижается частота собственных колебаний ротора, соответственно снижается и частота, при которой возникает среднечастотный резонанс ГЩД.

### Заключение

В статье представлен вариант решения задачи расчета параметров математической модели ГЩД на основе результатов анализа картины его магнитостатического поля. Поставлена задача разработки математической модели двигателя, позволяющей выполнить анализ влияния его конструктивных параметров на спектр резонансных частот. Выполнен подбор известной модели на основе эквивалентной схемы замещения электрической цепи и выделены соответствующие ее параметры. Сформирована методика расчета заданных параметров с помощью эквивалентной схемы замещения магнитной цепи. Выполнен численный расчет и анализ пространственной картины магнитостатического поля в программном пакете JMAG Designer, на основе которого сформирована система допущений для постро-

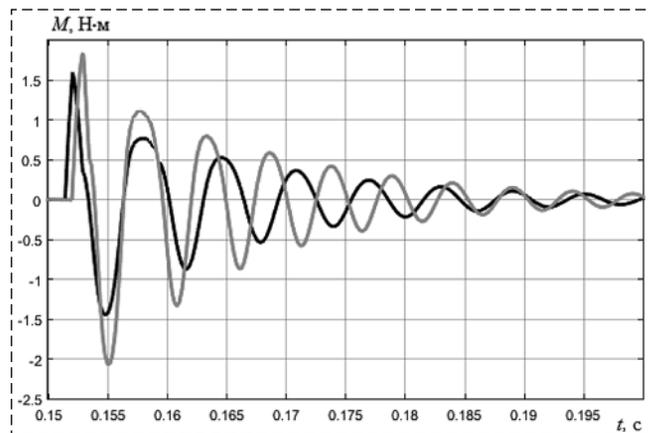


Рис. 10. Сравнение результатов моделирования переходного процесса по результирующему электромагнитному моменту при заданном и увеличенном значениях высоты воздушного зазора  
Fig. 10. Comparison of the simulation results of the transition process for the resulting electromagnetic moment for a given and increased values of the height of the air gap

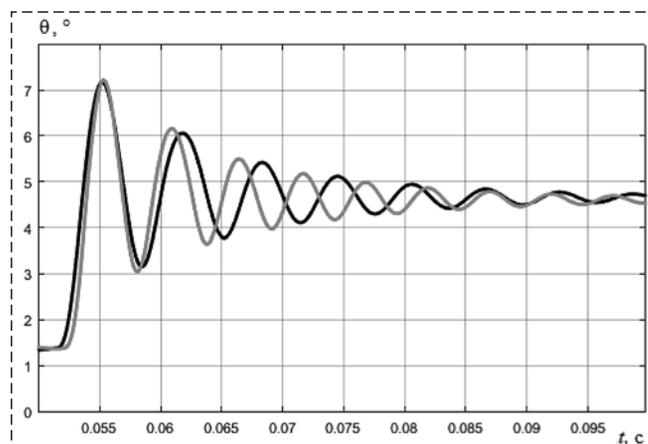


Рис. 11. Сравнение результатов моделирования переходного процесса по углу поворота ротора при заданном и увеличенном значениях высоты воздушного зазора  
Fig. 11. Comparison of the results of the simulation of the transition process in the angle of rotation of the rotor for a given and increased values of the height of the air gap

ения требуемой схемы замещения. Разработана эквивалентная схема замещения магнитной цепи и сформирована уточненная система уравнений математической модели ГЩД. Представлена имитационная модель дискретного электропривода в программном пакете Simulink, с помощью которой выполнен расчет переходных процессов по углу поворота ротора и электромагнитному моменту двигателя и проведен анализ влияния одного из конструктивных параметров машины на частоту собственных колебаний ротора. Сделаны выводы о влиянии высоты воздушного зазора ГЩД на частоту собственных колебаний ротора двигателя, а следовательно, на спектр резонансных частот дискретного электропривода на его основе.

## Список литературы

1. Денисов В. А., Жуков А. В. Математическое моделирование работы шагового двигателя в составе мехатронного модуля компенсации износа режущего инструмента // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2012. Т. 14, № 6. С. 54–58.
2. Елецкая Г. П., Илюхина Н. С., Панков А. П. Электромеханические системы. Тула: ТулГУ, 2009. 214 с.
3. Емельянов А. В., Шилин А. Н. Шаговые двигатели: Учеб. пособ. Волгоград: ВолгГТУ, 2005. 48 с.
4. Рыбак Л. А., Черкашин Н. Н., Гунькин А. А., Чичварин А. В. Моделирование электромеханического привода с

гибридным шаговым двигателем роботизированной платформы // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6.

5. Austin Hughes. Electric Motors and Drives. Fundamentals, Types and Applications. Third edition. Published by Elsevier Ltd, 2006.
6. Binglin Lu, Yanliang Xu. Presentation and Performance Evaluation of a Novel Stator-Permanent-Magnet Hybrid Stepper Motor. College of Electrical Engineering, Shandong University. Jinan. China, 2015.
7. Chirila A., Deaconu I., Navrapescu V., Albu M., Ghita C. On the model of a Hybrid Stepper Motor // Proc IEEE international conference on industrial electronics. 2008. P. 496–501.

## Calculation of the Parameters of a Mathematical Model of an Electric Hybrid Stepper Motor Based on the Analysis of the Magneto Static Field Pattern

S. V. Volkov, cniiaag@cniiaag.ru, O. V. Goryachev, olegvgor@rambler.ru,  
A. G. Efremeev, age.sau@mail.ru, A. O. Steepochkin, s.a.o.1984@yandex.ru,  
Tula State University, Tula, 300600, Russian Federation

Corresponding author: Steepochkin Aleksandr O., Postgraduate Student,  
Tula State University, Tula, 300600, Russian Federation, e-mail s.a.o.1984@yandex.ru

Accepted on March 26, 2019

### Abstract

The article presents a solution to the problem of calculating the parameters of a mathematical model of an electric hybrid stepper motor based on an analysis of the picture of its magnetostatic field. The main disadvantage of such an engine described. Is the mid-frequency resonance, which occurs due to the coincidence of the natural frequency of the rotor with the frequency of the supply voltage pulses. The necessity of taking this factor into account when designing a discrete electric drive system based on the executive motor of this type by calculating the values of resonant frequencies and using them in developing the drive control algorithm is shown. The task of developing a mathematical model of the engine is formulated, which allows to analyze the influence of its design parameters on the spectrum of resonant frequencies. The method of calculating the parameters of a given mathematical model is formed. The variants of the mathematical description of this electric machine are considered and the selection of its known mathematical model is made based on the equivalent electric circuit. The numerical calculation of the spatial pattern of the magnetostatic field of the electric motor is performed. Based on the analysis of the calculation results, a system of assumptions has been formed to develop an equivalent magnetic circuit of an electrical machine.

An equivalent magnetic circuit and the corresponding system of equations has been developed. Formed a system of equations of a mathematical model based on the equivalent circuits of the electric and magnetic circuits. On the basis of the obtained system of equations, a simulation model of a discrete electric drive was developed in the Simulink software package. Using the obtained simulation model, the calculation of transients on the angle of rotation of the rotor and the electromagnetic moment is carried out and the influence of one of the design parameters on the natural frequency of the rotor is analyzed. Based on the simulation results, it is shown that with an increase in the air gap height of a hybrid stepper motor, the resulting electromagnetic moment decreases, and the natural oscillation frequency of the rotor decreases, and the frequency at which medium-frequency resonance occurs also decreases. This mathematical model can be used at the stage of the correct calculation of the selected engine, since allows you to analyze the effect of a specific design parameter of the machine — in particular the size of the air gap on the natural frequency of the rotor, and, consequently, on the spectrum of the resonant frequencies of a discrete electric drive.

**Keywords:** hybrid stepper motor, mathematical model, calculation of parameters of a mathematical model, numerical calculation of the spatial picture of the magnetostatic field, equivalent electric circuit, equivalent magnetic circuit

### For citation:

Volkov S. V., Goryachev O. V., Efremeev A. G., Steepochkin A. O. Calculation of the Parameters of a Mathematical Model of an Electric Hybrid Stepper Motor Based on the Analysis of the Magneto Static Field Pattern, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 8, pp. 482–489.

DOI: 10.17587/mau.20.482-489

### References

1. Denisov V. A., Zhukov A. V. *Proceedings of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 2012, vol. 14, no. 6, pp. 54–58 (in Russian).
2. Eletskaia G. P., Ilyukhina N. S., Pankov A. P. *Electromechanical systems*, Tula, TSU, 2009, 214 p. (in Russian).

3. Emelyanov A. V., Shilin A. N. *Stepper motors*. Tutorial, Volgograd, VolgGTU, 2005, 48 p. (in Russian).

4. Rybak L. A., Cherkashin N. N., Gunkin A. A., Chichvarin A. V. *Modern problems of science and education*, 2014, no. 6 (in Russian).

5. Austin Hughes. *Electric Motors and Drives. Fundamentals, Types and Applications*, Third edition, Published by Elsevier Ltd, 2006.

6. Binglin Lu, Yanliang Xu. *Presentation and Performance Evaluation of a Novel Stator-Permanent-Magnet Hybrid Stepper Motor*, College of Electrical Engineering, Shandong University, Jinan, China, 2015.

7. Chirila A., Deaconu I., Navrapescu V., Albu M., Ghita C. *Proc IEEE international conference on industrial electronics*, 2008, pp. 496–501.

В. П. Носков, канд. тех. наук, зав. сектором, доц., noskov\_mstu@mail.ru,  
И. О. Киселев, аспирант, kiselev201@rambler.ru,  
МГТУ им Н. Э. Баумана, г. Москва

## Использование текстуры линейных объектов для построения модели внешней среды и навигации<sup>1</sup>

*Рассмотрены актуальные задачи 3D-реконструкции модели индустриально-городской среды и навигации, решаемые путем выделения и идентификации в процессе движения текстурированных линейных объектов по данным бортовой комплексированной системы технического зрения, состоящей из взаимно-юстированных 3D-лазерного сенсора и видеокамеры с общей зоной обзора. Для полного решения навигационной задачи (определения трех линейных и трех угловых координат объекта управления) необходимо в процессе движения в последовательности облаков точек, формируемых 3D-лазерным сенсором, выделять и идентифицировать не менее трех взаимно не параллельных плоских объектов. В случае выделения менее трех плоских объектов (например, в средах, подвергшихся разрушениям) навигационная задача решается не полностью (определяются неоднозначно не все координаты, а некоторые координаты связываются линейной или нелинейной зависимостями). В этих случаях предлагается дополнительно использовать формируемую видеокамерой текстуру выделяемых плоских объектов. В статье приведен анализ особенностей решения навигационной задачи в зависимости от числа выделяемых и идентифицируемых текстурированных линейных объектов в текущих комплексированных дальнометрических изображениях. Предложены алгоритмы решения навигационной задачи при выделении и идентификации в процессе движения одного текстурированного линейного объекта и двух текстурированных не параллельных друг другу линейных объектов. Показано, что в первом случае использование текстуры позволяет свести решение навигационной задачи к трехмерной, а во втором случае — к одномерной задаче оптимизации (поиску глобального оптимума функционала соответственно от трех и одной переменной). Предложенные алгоритмы обработки комплексированных изображений обеспечивают полное решение навигационной задачи даже при выделении менее трех линейных объектов, что существенно повышает достоверность решения навигационной задачи и построения модели внешней среды даже в индустриально-городских средах, подвергшихся разрушению, и, следовательно, надежность функционирования и живучесть наземных и воздушных робототехнических средств в автономных режимах движения. Приведены результаты работы соответствующих программно-аппаратных средств в реальных индустриально-городских средах, подтверждающие корректность и эффективность предлагаемых алгоритмов.*

**Ключевые слова:** комплексированная система технического зрения, текстурированные линейные объекты, семантическая модель индустриально-городской среды, навигация

### Введение

Анализ областей и интенсивности использования робототехнических средств показывает, что в настоящее время все более и более востребованными становятся наземные робототехнические комплексы (РТК) и беспилотные летательные аппараты (БЛА), ориентированные на функционирование в индустриально-городских средах [1]. Данные среды характеризуются наличием экранированных зон, что значительно ограничивает использование традиционных средств дистанционного управления и навигационного обеспечения. Перспективными здесь будут робототехнические средства с повышенной автономностью, способные функционировать какое-то время без участия оператора при отсутствии искусственных (спутниковая навигация) и естественных (магнитное поле Земли) навигационных полей. При создании таких

автономных систем решается так называемая SLAM-задача — построение модели внешней среды и навигация [2, 3]. Формирование модели и определение текущих координат на бортовых вычислителях по данным бортовых систем технического зрения (СТЗ) в темпе движения объекта управления обеспечивает планирование и обработку целенаправленных безопасных траекторий движения без участия оператора, что и является основой автономного функционирования [4–6]. В качестве бортовых СТЗ для автономных систем наиболее популярны и предпочтительны 2D- и 3D-лазерные сенсоры [4–8], которые позволяют сразу получать в зоне обзора геометрию внешней среды в виде облака точек. Использование непосредственно формируемых 3D-лазерными сенсорами исходных облаков точек, как правило, большого объема [9, 10], не всегда возможно, особенно для бортовых систем управления. Поэтому перспективным здесь является сжатие исходных дальнометрических данных без потери геометрической и навигационной информации

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-29-04178 офи\_м.

путем перехода к семантическому описанию внешней среды в виде совокупности линейных объектов (плоскостей, линий, углов), из которых и состоят в основном индустриально-городские среды (дороги, тротуары, ограждения, стены, перекрытия, ступени и другие фрагменты индустриально-городской инфраструктуры, зданий и помещений) [7, 11–13]. Как известно [11], для решения полной навигационной задачи (определение трех линейных и трех угловых координат объекта управления) необходимо в процессе движения в последовательности дальнометрических изображений выделять и идентифицировать не менее трех взаимно не параллельных плоских объектов. Однако возможны случаи, когда выделяются и идентифицируются менее трех плоских объектов: два или даже один. Такое возможно, когда в поле зрения попадают только два плоских объекта, например, стена и тротуар, или один, например, дорога. В этих случаях навигационная задача решается не полностью (определяются неоднозначно не все координаты, а некоторые координаты связываются линейной или нелинейной зависимостями). Для полного решения навигационной задачи в этих случаях в данной работе предлагается использовать текстуру выделяемых плоских объектов. Текстура может быть получена путем комплексирования дальнометрических и видеоизображений, формируемых комплексированной СТЗ, состоящей из взаимно юстированных 3D-лазерного сенсора и видеокамеры с общей зоной обзора [14].

### Навигационная задача при выделении и идентификации одного плоского текстурированного объекта

Пусть есть два дальнометрических изображения внешней среды, полученные из двух разных положений  $OXYZ$  и  $oxyz$ , в которых выделены соответственно плоскости (рис. 1):

$$P_1: X \cos \alpha_{11} + Y \cos \beta_{11} + Z \cos \gamma_{11} = \rho_{11};$$

$$p_1: x \cos \alpha_{21} + y \cos \beta_{21} + z \cos \gamma_{21} = \rho_{21}.$$

Пусть также известно, что плоскости  $P_1$  и  $p_1$  принадлежат одному и тому же плоскому объекту внешней среды и имеют непустое пересечение в части этого плоского объекта, видимой из обоих положений. Требуется определить вектор перемещения  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta)$  сен-

сора из положения  $OXYZ$  в положение  $oxyz$  при известной текстуре выделенного плоского объекта.

Так как плоскости  $P_1$  и  $p_1$  принадлежат одному и тому же плоскому объекту внешней среды, то нормали  $N_{11}$  и  $N_{21}$  к этим плоскостям параллельны и совпадают по направлению, поэтому для соответствующих единичных векторов можно записать следующее векторное уравнение относительно искомых угловых перемещений  $(\Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta)$ :

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} \\ \cos \beta_{11} \\ \cos \gamma_{11} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta) \begin{bmatrix} \cos \alpha_{21} \\ \cos \beta_{21} \\ \cos \gamma_{21} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{A}(\Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta)$  — обобщенная матрица поворотов при переходе из системы  $oxyz$  в систему  $OXYZ$ .

Для обобщенной матрицы поворотов примем следующую последовательность поворотов:

$$\mathbf{A}(\Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta) = \mathbf{A}_Z(\Delta \varphi) \mathbf{A}_X(\Delta \psi) \mathbf{A}_Y(\Delta \theta),$$

где  $\mathbf{A}_E(F)$  — матрица поворота вокруг оси  $E$  на угол  $F$ .

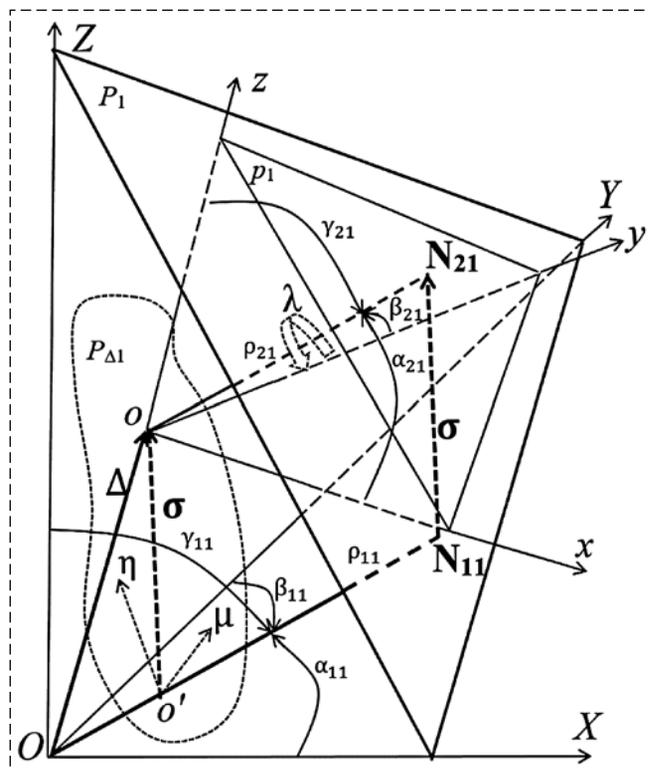


Рис. 1. Один и тот же плоский объект, выделенный в двух дальнометрических изображениях, полученных из двух разных положений

Fig. 1. The same flat object, which selected in two 3D images obtained from two different positions

Векторное уравнение (1) представляет собой систему из трех нелинейных тригонометрических уравнений, которые связывают искомые угловые перемещения  $(\Delta\varphi, \Delta\psi, \Delta\theta)$  соответствующей зависимостью. Вектор угловых перемещений однозначно определяется значением угла вращения  $\lambda$  системы координат  $oxuz$  вокруг вектора  $\mathbf{N}_{21}$  (рис. 1). Вращение системы координат  $oxuz$  вокруг вектора  $\mathbf{N}_{21}$  на угол  $\lambda$  эквивалентно вращению плоскости  $p_1$  в плоскости  $P_1$  на тот же угол  $\lambda$ .

В свою очередь, вследствие того, что сенсор во втором положении (центр системы координат  $oxuz$  — точка  $o$ ) может находиться только в плоскости  $P_{\Delta 1}$  (рис. 1), параллельной плоскости  $P_1$  и находящейся на расстоянии  $\rho_{11} - \rho_{21}$  от центра системы координат  $OXYZ$  (точка  $O$ ), для вектора линейных перемещений  $\Delta = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$  можно записать:

$$\Delta X \cos \alpha_{11} + \Delta Y \cos \beta_{11} + \Delta Z \cos \gamma_{11} = \rho_{11} - \rho_{21}. \quad (2)$$

Множество возможных линейных перемещений ограничено точками, принадлежащими плоскости (2), и если мы определим начало координат  $oxuz$  (точка  $o$  на рис. 1) как вектор  $(\mu, \eta)$  в двумерной системе координат  $o'\mu\eta$ , связанной с данной плоскостью (рис. 1), то мы определим и искомые линейные координаты  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$  в системе  $OXYZ$ . Перемещение системы координат  $oxuz$  на вектор  $(\mu, \eta)$  в плоскости  $P_{\Delta 1}$  эквивалентно перемещению плоскости  $p_1$  в плоскости  $P_1$  на этот же вектор  $(\mu, \eta)$ .

Таким образом, при выделении и идентификации в процессе движения в двух последовательных дальнометрических изображениях од-

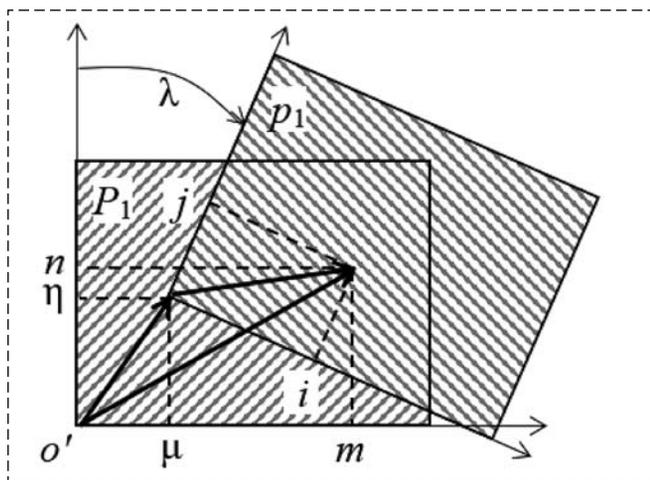


Рис. 2. Совмещение плоскостей  $P_1$  и  $p_1$  при параметрах  $\mu, \eta$  и  $\lambda$   
Fig. 2. The combination of the planes  $P_1$  and  $p_1$  with the parameters  $\mu, \eta$  and  $\lambda$

ного плоского объекта искомое перемещение  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta\varphi, \Delta\psi, \Delta\theta)$  однозначно задается углом вращения  $\lambda$  и вектором перемещения  $(\mu, \eta)$  плоскости  $p_1$  в плоскости  $P_1$ , которые можно определить путем совмещения их текстур. При этом значения параметров  $\mu, \eta$  и  $\lambda$ , при которых текстуры максимально совпадают, и дают искомое перемещение. На трехмерной области значений этих параметров можно определить функционал разности текстур текстурированных плоскостей  $P_1$  и  $p_1$  и свести задачу поиска перемещения  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta\varphi, \Delta\psi, \Delta\theta)$  к трехмерной задаче оптимизации. На рис. 2 приведено совмещение плоскостей  $P_1$  и  $p_1$  при параметрах  $\mu, \eta$  и  $\lambda$ .

Как видно из рис. 2, пикселу с индексами  $(i, j)$  из  $p_1$  соответствует пиксел с индексами  $(m, n)$  из  $P_1$ , которые определяются следующим векторным уравнением:

$$\begin{bmatrix} mv \\ nv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iv \\ jv \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $v$  — линейный размер пиксела.

Тогда функционал разности текстур плоскостей  $P_1$  и  $p_1$  при параметрах  $\mu, \eta$  и  $\lambda$  можно определить как усредненную суммарную разность значений яркостей соответствующих им пикселов из зоны пересечения:

$$\Delta E(\mu, \eta, \lambda) = \frac{\sum_i \sum_j |e_{ij} - E_{mn}| c_{ij}(\mu, \eta, \lambda)}{\sum_i \sum_j c_{ij}(\mu, \eta, \lambda)}, \quad (4)$$

где  $e_{ij}$  — яркость пиксела из текстуры плоскости  $p_1$ ;

$E_{mn}$  — яркость пиксела из текстуры плоскости  $P_1$ , индексы которого вычислены в соответствии с выражением (3);

$c_{ij}(\mu, \eta, \lambda) \in \{0, 1\}$  — бинарное число, принимающее значение 1, если для пиксела  $e_{ij}$  из текстуры плоскости  $p_1$  существует пиксел  $E_{mn}$  из текстуры плоскости  $P_1$ , и принимающее значение 0 в противном случае.

Глобальный минимум функционала (4) на пространстве возможных значений  $\mu, \eta$  и  $\lambda$  может быть найден методами оптимизации.

### Навигационная задача при выделении и идентификации двух плоских текстурированных объектов

Пусть есть два дальнометрических изображения внешней среды, полученные из двух разных положений  $OXYZ$  и  $oxuz$ , в каждом из

которых выделено и идентифицировано по две соответствующих друг другу плоскости (рис. 3):

$$P_1: X \cos \alpha_{11} + Y \cos \beta_{11} + Z \cos \gamma_{11} = \rho_{11};$$

$$p_1: x \cos \alpha_{21} + y \cos \beta_{21} + z \cos \gamma_{21} = \rho_{21}$$

и

$$P_2: X \cos \alpha_{12} + Y \cos \beta_{12} + Z \cos \gamma_{12} = \rho_{12};$$

$$p_2: x \cos \alpha_{22} + y \cos \beta_{22} + z \cos \gamma_{22} = \rho_{22}.$$

Пусть также известно, что плоскости  $P_1$  и  $p_1$  принадлежат одному плоскому объекту, а плоскости  $P_2$  и  $p_2$  — другому плоскому объекту внешней среды, плоскости  $P_1$  и  $P_2$  ( $p_1$  и  $p_2$ ) не параллельны друг другу и имеют непустое пересечение в частях этих плоских объектов, видимых из обоих положений. Требуется определить перемещение  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta)$  сенсора из положения  $OXYZ$  в положение  $oxyz$  при известной текстуре выделенных плоских объектов.

Очевидно, что для любой пары плоскостей  $P_1$  и  $p_1$  или  $P_2$  и  $p_2$ , задача сводится к варианту, рассмотренному выше. Однако использование обеих пар плоскостей существенно упрощает задачу.

Для плоскостей  $P_2$  и  $p_2$ , так же как и для плоскостей  $P_1$  и  $p_1$ , можно записать аналогичное (1) векторное уравнение:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_{12} \\ \cos \beta_{12} \\ \cos \gamma_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{A}(\Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta) \begin{bmatrix} \cos \alpha_{22} \\ \cos \beta_{22} \\ \cos \gamma_{22} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Векторные уравнения (1) и (5) представляют собой систему из шести нелинейных тригонометрических уравнений, которые связывают искомые угловые перемещения  $(\Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta)$  соответствующей зависимостью. Вектор  $(\Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta)$  однозначно определяется данной избыточной системой уравнений (шесть уравнений, три неизвестных) и может быть определен с помощью численных методов.

Для плоскостей  $P_2$  и  $p_2$ , так же как и для плоскостей  $P_1$  и  $p_1$ , можно записать аналогичное (2) уравнение:

$$\Delta X \cos \alpha_{12} + \Delta Y \cos \beta_{12} + \Delta Z \cos \gamma_{12} = \rho_{12} - \rho_{22}, \quad (6)$$

которое ограничивает возможные положения сенсора во втором положении соответствующей плоскостью  $P_{\Delta 2}$  (на рис. 3 плоскости  $P_{\Delta 1}$  и  $P_{\Delta 2}$  не показаны). Совокупность линейных уравнений (2) и (6) этих плоскостей ограничивает возможные положения сенсора прямой

линией  $ab$  их пересечения (рис. 3), которая параллельна прямой  $AB$  пересечения выделенных и идентифицированных пар плоскостей. Если мы определим точку  $o$  в одномерной системе координат  $o'\mu$ , связанной с прямой линией  $ab$  (рис. 3), то мы определим и искомые линейные координаты  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$  в системе  $OXYZ$ . Перемещение системы координат  $oxyz$  по прямой  $ab$  эквивалентно перемещению плоскости  $p_1$  в плоскости  $P_1$  и плоскости  $p_2$  в плоскости  $P_2$  по прямой  $AB$ .

Таким образом, при выделении и идентификации в процессе движения в двух последовательных дальнометрических изображениях двух не параллельных друг другу плоских объектов искомое перемещение  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta)$  однозначно задается параметром  $\mu$  на линии пересечения плоскостей (2) и (6), который можно определить путем совмещения текстур выделенных и идентифицированных плоскостей. При этом значение параметра  $\mu$ , при котором текстуры максимально совпадают, и дает искомое перемещение. На одномерной области значений параметра  $\mu$  можно определить функционал разности

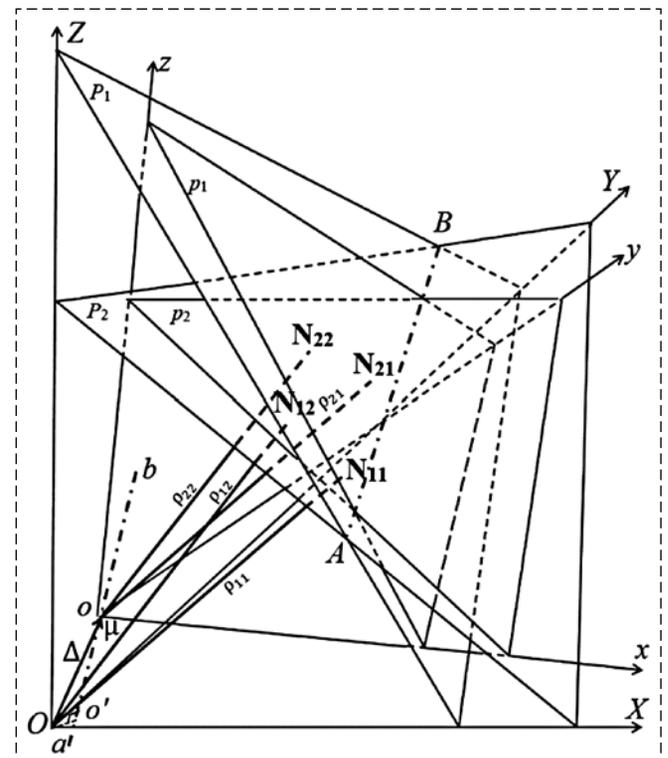


Рис. 3. Два одних и тех же плоских объекта, выделенных в двух дальнометрических изображениях, полученных из двух разных положений

Fig. 3. Two of the same flat objects selected in two ranging images obtained from two different positions

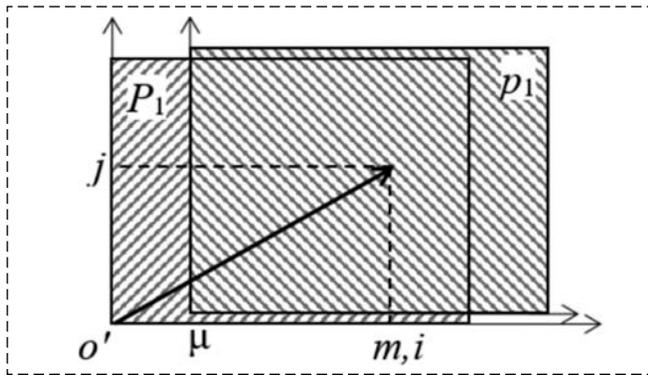


Рис. 4. Совмещение плоскостей  $P_1$  и  $p_1$  при параметре  $\mu$   
 Fig. 4. The combination of the planes  $P_1$  and  $p_1$  with the parameter  $\mu$

текстур текстурированных пар плоскостей  $P_1, p_1$  и (или)  $P_2, p_2$  и свести задачу поиска перемещения  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta)$  к одномерной задаче оптимизации. На рис. 4 приведено совмещение плоскостей  $P_1$  и  $p_1$  при параметре  $\mu$  (аналогично можно совмещать и плоскости  $P_2$  и  $p_2$ ). При этом уравнение (3) примет вид

$$mv = \mu + iv,$$

а функционал (4) — вид

$$\Delta E(\mu) = \frac{\sum_i \sum_j |e_{ij} - E_{mj}| c_{ij}(\mu)}{\sum_i \sum_j c_{ij}(\mu)}. \quad (7)$$

При нахождении значения параметра  $\mu$ , при котором функционал (7) принимает минимальное значение, вектор линейных перемещений определяется этим значением ( $\mu$  является параметром при представлении прямой пересечения плоскостей  $P_1$  и  $P_2$  в параметрическом виде).

Поиск глобального минимума функционала (7) на множестве возможных значений параметра  $\mu$  не представляет затруднений, так как может быть решен полным перебором в реальном времени.

### Результаты экспериментальных исследований

Для экспериментальной проверки предлагаемых алгоритмов разработаны и созданы программно-аппаратные средства, состоящие из комплексированной СТЗ, сопряженной с компьютером с соответствующим прикладным программным обеспечением.

Для формального описания предлагаемого подхода удобно использовать аппарат кватернионов. Введем кватернион:

$$\mathbf{q}_1 = \left[ \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|} \sin\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \cos\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \right], \quad (8)$$

при котором вектор нормали  $\mathbf{N}_{21}$  к плоскости  $p_1$  (см. рис. 1) станет коллинеарным вектору нормали  $\mathbf{N}_{11}$  к плоскости  $P_1$ . Здесь  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{N}_{21} \times \mathbf{N}_{11}$  — вектор, вокруг которого выполняется поворот, а  $\omega_1 = \arccos\left(\frac{\mathbf{N}_{21} \mathbf{N}_{11}}{|\mathbf{N}_{21}| |\mathbf{N}_{11}|}\right)$  — угол поворота (на

рис. 5 (см. третью сторону обложки) в системе координат  $OXYZ$ , связанной с первым положением сенсора, приведены текстурированные плоские объекты  $P_1$  и  $p_1$ , вектор  $\mathbf{R}_1$  и угол  $\omega_1$  для реальных комплексированных изображений). Соответствующее преобразование любой точки  $\mathbf{V}_{21}$  плоскости  $p_1$  (в том числе и вектора нормали  $\mathbf{N}_{21}$ ) будет иметь вид

$$\mathbf{V}_{21}^* = \mathbf{q}_1 \mathbf{V}_{21} \mathbf{q}_1^{-1} \quad (\mathbf{N}_{21}^* = \mathbf{q}_1 \mathbf{N}_{21} \mathbf{q}_1^{-1}).$$

Для совмещения плоскостей  $P_1$  и  $p_1$  сдвинем плоскость  $p_1$  вдоль вектора нормали  $\mathbf{N}_{11}$  на расстояние  $\Delta \rho = \rho_{11} - \rho_{21}$ , тогда окончательное преобразование примет вид

$$\mathbf{N}_{21}^{**} = \mathbf{q}_1 \mathbf{N}_{21} \mathbf{q}_1^{-1} + (\rho_{11} - \rho_{21}) \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} \\ \cos \beta_{11} \\ \cos \gamma_{11} \end{bmatrix}.$$

После данного преобразования плоскость  $p_1$  будет параллельна плоскости  $P_1$  и совместится с ней (рис. 6, см. третью сторону обложки).

Для упрощения вычислений целесообразно совместить векторы нормалей к плоскостям с оптической осью сенсора  $\mathbf{Y}$ . В таком случае оси  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Z}$  можно принять за оси  $o'\mu$  и  $o'\eta$ , а началом координат будет выступать точка  $O$ . Для этого вектор нормали  $\mathbf{N}_{11}$  нужно повернуть вокруг вектора  $\mathbf{R}_2 = \mathbf{N}_{11} \times \mathbf{Y}$  на угол  $\omega_2 = \arccos\left(\frac{\mathbf{N}_{11} \mathbf{Y}}{|\mathbf{N}_{11}| |\mathbf{Y}|}\right)$ , соответствующий кватернион будет иметь вид

$$\mathbf{q}_2 = \left[ \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|} \sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \cos\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \right]. \quad (9)$$

После приведения текстур к одной плоскости выполняется совмещение текстур путем решения трехмерной задачи оптимизации, и находятся параметры  $\mu_0, \eta_0$  и  $\lambda_0$ , при которых функционал (4) принимает минимальное значение. Поиск глобального минимума данного функционала не является тривиальной за-

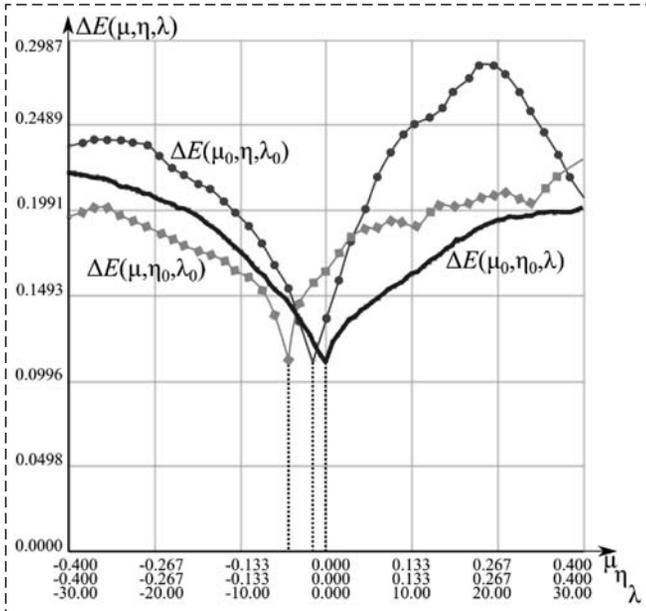


Рис. 7. Одномерные сечения функционала в точке решения  
Fig. 7. One-dimensional sections of the functional at the solution point

дачей. Однако при небольших перемещениях  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta)$  в соответствующей окрестности точки решения, к которой принадлежит и точка  $\mu = \eta = \lambda = 0$ , одномерные сечения функционала (4) являются унимодальными функциями (рис. 7), и решение может быть найдено известными методами оптимизации.

Найденные параметры  $\mu_0$ ,  $\eta_0$  и  $\lambda_0$  однозначно определяют искомое перемещение. Вектор линейных перемещений определяется следующим выражением:

$$\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} = (\rho_{11} - \rho_{21}) \begin{bmatrix} \cos \alpha_{11} \\ \cos \beta_{11} \\ \cos \gamma_{11} \end{bmatrix} + \mathbf{q}_2^{-1} \begin{bmatrix} \mu_0 \\ 0 \\ \eta_0 \end{bmatrix} \mathbf{q}_2, \quad (10)$$

где  $\mathbf{q}_2$  — кватернион, определенный выражением (9).

Итоговые угловые перемещения можно представить как композицию кватернионов:

$$\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z, Q_w) = \mathbf{q}_3 \mathbf{q}_1,$$

где  $\mathbf{q}_1$  — кватернион, определенный выражением (8);

$$\mathbf{q}_3 = \left[ \frac{\mathbf{N}_{11}}{|\mathbf{N}_{11}|} \sin\left(\frac{\lambda_0}{2}\right), \cos\left(\frac{\lambda_0}{2}\right) \right] \text{ — кватернион}$$

поворота текстуры  $p_1$  вокруг оси  $\mathbf{N}_{11}$  на угол  $\lambda_0$ .

Тогда вектор угловых перемещений в соответствии с принятой выше последовательно-

стью поворотов (1) определяется следующим выражением:

$$\begin{bmatrix} \Delta \varphi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{arctg} \left( \frac{2Q_y Q_x - 2Q_y Q_z}{1 - 2Q_x^2 - 2Q_z^2} \right) \\ \operatorname{arctg} \left( \frac{2Q_x Q_w - 2Q_y Q_z}{1 - 2Q_x^2 - 2Q_z^2} \right) \\ \operatorname{arcsin} (2Q_x Q_y - 2Q_z Q_w) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Вычисленное в соответствии с выражениями (10) и (11) искомое перемещение  $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta \varphi, \Delta \psi, \Delta \theta)$  позволяет построить объединенную модель внешней среды и перемещение сенсора (рис. 8, см. третью сторону обложки).

На рис. 9 (см. третью сторону обложки) приведен результат обработки серии из семи комплексированных изображений, полученных в процессе перемещения сенсора (робота) в реальной среде.

## Заключение

При решении SLAM-задач немаловажное значение имеет фильтрация ошибок измерений сенсора, влияющих на точность формирования модели и определения координат. При фильтрации обычно применяются методы усреднения, например, как это сделано в достаточно эффективном алгоритме, использующем знаковую функцию расстояний (SDF) при формировании модели внешней среды в дискретном трехмерном пространстве [15]. В данном алгоритме усреднение выполняется в каждом дискретном элементе трехмерной модели, попадающем на границу препятствия, оптимизация при решении навигационной задачи выполняется также с использованием всех этих дискретных элементов, которых достаточно много, что требует больших вычислительных ресурсов. В предлагаемом же алгоритме используются не отдельные точки исходного облака и даже не дискретные элементы трехмерного пространства с принадлежащими им точками, как в статье [15], а более интегральные элементы — плоские объекты, объединяющие большие по объему подмножества точек, которые усредняются аппроксимируемыми их плоскостями [12, 13]. Таким образом, фильтрация выполняется на более высоком уровне, при этом формирование

модели внешней среды и оптимизация при решении навигационной задачи выполняются также с использованием выделенных плоских объектов, число которых несоизмеримо меньше числа исходных точек или дискретных элементов в алгоритме, использующем SDF. Кроме того, в процессе движения сенсора пока выделяются и используются одни и те же плоские объекты (например, протяженная стена, тротуар), практически не накапливаются и ошибки определения координат и формирования модели.

Работоспособность и эффективность предлагаемых алгоритмов видеонавигации, основанных на выделении и использовании линейных текстурированных объектов, проверена на реальных данных различных комплексированных СТЗ (камера глубины AsusXtionPro, 2D-сканер Нокуо UTM-30LX на опорно-поворотном устройстве, комплексированный с цветной видеокамерой). Полученные результаты теоретических и экспериментальных исследований позволяют сделать заключение, что созданные алгоритмические и программно-аппаратные средства обеспечивают переход от больших объемов исходной зрительной информации к семантическим информационно-навигационным моделям, которые в явном и компактном виде содержат геометрические данные о внешней среде и навигационные данные об объекте управления. Предложенные алгоритмы обработки комплексированных (видеодальнометрических) изображений внешней среды обеспечивают полное решение навигационной задачи даже при выделении менее трех линейных объектов, что существенно повышает достоверность решения навигационной задачи даже в индустриально-городских средах, подвергшихся разрушению, что, в свою очередь, повышает надежность функционирования и живучесть РТК и БЛА в автономных режимах движения.

1. Лапшов В. С., Носков В. П. и др. Бой в городе. Боевые и обеспечивающие роботы в условиях урбанизированной территории // Известия ЮФУ. Технические науки № 3, 2011. С. 142—146.
2. Smith R., Self M., Cheeseman P. Estimating uncertain spatial relationships in robotics // Autonomous robot vehicles. — Springer, New York, NY, 1990. С. 167—193.
3. Leonard J. J., Durrant-Whyte H. F. Simultaneous map building and localization for an autonomous mobile robot // Proceedings IROS'91: IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems' 91. — IEEE, 1991. — С. 1442—1447.
4. Каляев А. В., Носков В. П., Чернухин Ю. В., Каляев И. А. Однородные управляющие структуры адаптивных роботов. М.: Наука, 1990. 147 с.
5. Лакота Н. А., Носков В. П., Рубцов И. В., Лундгрэн Я.-О., Моор Ф. Опыт использования элементов искусственного интеллекта в системе управления цехового транспортного робота // Мехатроника. 2000. № 4. С. 44—47.
6. Носков В. П., Рубцов И. В. Опыт решения задачи автономного управления движением мобильных роботов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2005. № 12. С. 21—24.5.
7. Носков В. П., Носков А. В. Навигация мобильных роботов по дальнометрическим изображениям // Мехатроника, автоматизация, управление. 2005. № 12. С. 16—21.
8. Загоруйко С. Н., Казьмин В. Н., Носков В. П. Навигация БПЛА и 3D-реконструкция внешней среды по данным бортовой СТЗ // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 8. С. 62—68.
9. Haehnel A. S. D., Thrun S. Generalized ICP // Proc. of Robotics: Science and Systems (RSS). — 2009.
10. Mitra N. J. et al. Registration of point cloud data from a geometric optimization perspective // Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing. — ACM, 2004. С. 22—31.
11. Казьмин В. Н., Носков В. П. Выделение геометрических и семантических объектов в дальнометрических изображениях для навигации роботов и реконструкции внешней среды // Известия ЮФУ. Технические науки". 2015. № 10 (171) (Тематический сборник "Проблемы управления и робототехники"). С. 71—83.
12. Носков В. П., Киселев И. О. Трехмерный вариант метода Хафа в реконструкции внешней среды и навигации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. № 8. С. 552—560.
13. Носков В. П., Киселев И. О. Выделение плоских объектов в линейно структурированных 3D-изображениях // Робототехника и техническая кибернетика. 2018. № 2(19). С. 31—38.
14. Носков А. В., Рубцов И. В., Романов А. Ю. Формирование объединенной модели внешней среды на основе информации видеокамеры и дальномера // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 8. С. 2—5.
15. Bylow E., Sturm, Jürgen & Kerl, Christian & Kahl, Fredrik & Cremers, Daniel. Real-Time Camera Tracking and 3D Reconstruction Using Signed Distance Functions // Robotics: Science and Systems, 2013.

## Using Texture of Linear Objects for Build Enviroments Model and Navigations

V. P. Noskov, noskov\_mstu@mail.ru, I. O. Kiselev, kiselev201@rambler.ru,  
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: Noskov Vladimir P., PhD, Special robotics and mechatronics department, NIISM Sector Head,  
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: noskov\_mstu@mail.ru

**Abstract**

The actual tasks of 3D-reconstruction of the industrial-urban environment and navigation models are considered by solving the identification of textured linear objects in the process of movement according to the onboard complex and technical vision system consisting of a mutually adjusted 3D laser sensor and a video camera with a common viewing area. For a complete solution of the navigation task (determination of three linear and three angular coordinates of the control object), it is necessary to select and identify at least three mutually non-parallel flat objects in the process of moving in a sequence of point clouds formed by a 3D laser sensor. In the case of the allocation of less than three flat objects (for example, in environments subjected to destruction), the navigation problem is not fully solved (not all coordinates are determined unambiguously, and some coordinates are related by linear or non-linear dependencies). In these cases, it is proposed to additionally use the texture of the selected flat objects formed by the video camera. In the paper is given the analysis of the features of the solution of the navigation problem is carried out depending on the number of allocated and identifiable textured linear objects in the current integrated images and algorithms for solving the navigation problem are evaluated for selecting and identifying the process of movement of one textured linear object and of two textured non-parallel linear objects. It is shown that in the first case, the use of texture makes it possible to reduce the solution of the navigational problem to a three-dimensional one, and in the second case to a one-dimensional optimization problem (finding the global optimum of a functional three and one variable, respectively). The proposed algorithms for processing complexed images provide a complete solution to the navigation task even if less than three linear objects are selected, which significantly increases the reliability of solving the navigation task and building an environmental model even in industrial-urban environments that have been destroyed, and therefore, the reliability and survivability of the ground ones and airborne robotic tools in autonomous modes of movement. The results of the corresponding software and hardware solutions in real industrial-urban environments, confirmed the accuracy and effectiveness of the proposed algorithms.

**Keywords:** complex system technical vision system, textured linear objects, semantic model of industrial-urban environment, navigation

**Acknowledgements:** This work was supported by the RFBR grant № 16-29-04178 ofi\_m

For citation:

**Noskov V. P., Kiselev I. O.** Using Texture of Linear Objects for Build Environments Model and Navigations, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 8, pp. 490—497.

DOI: 10.17587/mau.20.490-497

**References**

1. **Lapshov V. S., Noskov V. P.** et al. *Boy v gorode. Boevye i obespechivayushchie roboty v usloviyah urbanizirovannoy territorii* (Fight in the city. Combat and support robots in urbanized conditions), *Izvestiya YuFU Tekhnicheskie nauki*, 2011, no. 3, pp. 142—146 (in Russian).
2. **Smith R., Self M., Cheeseman P.** Estimating uncertain spatial relationships in robotics, *Autonomous robot vehicles*, 1990, pp. 167—193.
3. **Leonard J. J., Durrant-Whyte H. F.** Simultaneous map building and localization for an autonomous mobile robot, *Proceedings IROS'91: IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems' 91*, 1991, pp. 1442—1447.
4. **Kalyaev A. V., Noskov V. P., Chernuhin Yu. V., Kalyaev I. A.** *Odnorodnye upravlyayushchie struktury adaptivnyh robotov* (Homogeneous control structures of adaptive robots), Moscow, *Nauka*, 1990, p. 147 (in Russian).
5. **Lakota N. A., Noskov V. P., Rubtsov I. V., Lundgren Ya.-O., Moor F.** *Opyt ispol'zovaniya ehlementov iskusstvennogo intellekta v sisteme upravleniya cekhovogo transportnogo robota* (Experience of using elements of artificial intelligence in the control system of a workshop transport robot), *Mekhatronika*, 2000, no. 4, pp. 44—47 (in Russian).
6. **Noskov V. P., Rubtsov I. V.** *Opyt resheniya zadachi avtonomnogo upravleniya dvizheniem mobil'nyh robotov* (Experience in solving the problem of autonomous motion control of mobile robots), *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2005, no. 12, pp. 21—24 (in Russian).
7. **Noskov V. P., Noskov A. V.** *Navigatsiya mobil'nyh robotov po dal'nometricheskim izobrazheniyam* (Navigation of mobile robots by ranging images), *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2005, no. 12, pp. 16—21 (in Russian).
8. **Zagoruyko S. N., Kaz'min V. N., Noskov V. P.** *Navigatsiya BPLA i 3D-rekonstruktsiya vneshney sredy po dannym bortovoy STZ* (UAV navigation and 3D-reconstruction of the external environment according to the onboard STV), *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2014, no. 8, pp. 62—68 (in Russian).
9. **Haehnel A. S. D., Thrun S.** Generalized ICP, *Proceedings of Robotics: Science and Systems (RSS)*, 2009.
10. **Mitra N. J. et al.** Registration of point cloud data from a geometric optimization perspective, *Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing*, ACM, 2004, pp. 22—31.
11. **Kaz'min V. N., Noskov V. P.** *Vydelenie geometricheskikh i semanticheskikh ob'ektov v dal'nometricheskikh izobrazheniyah dlya navigatsii robotov i rekonstruktsii vneshney sredy* (Selection of geometric and semantic objects in ranging images for robot navigation and reconstruction of the external environment), *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki*, no. 10 (171), pp. 71—83 (in Russian).
12. **Noskov V. P., Kiselev I. O.** *Trekhmernyy variant metoda Hafa v rekonstruktsii vneshney sredy i navigatsii* (Three-Dimensional Version of the Hough Method in the Reconstruction of the External Environment and Navigation), *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2018, no. 8, pp. 552—560 (in Russian).
13. **Noskov V. P., Kiselev I. O.** *Vydelenie ploskikh ob'ektov v lineynno strukturirovannyh 3D-izobrazheniyah* (Selecting flat objects in linearly structured 3D images), *Robototekhnika i tekhnicheskaya kibernetika*, no. 2(19), 2018, pp. 31—38 (in Russian).
14. **Noskov V. P., Rubtsov I. V., Romanov A.Yu.** *Formirovanie ob'edinennoy modeli vneshney sredy na osnove informatsii videokamery i dal'nomera* (Formation of a unified model of the environment based on the information of the video camera and range finder), *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2007, no. 8, pp. 2—5 (in Russian).
15. **Bylow E. et al.** Real-Time Camera Tracking and 3D Reconstruction Using Signed Distance Functions, *Robotics: Science and Systems*, 2013.

I. A. Pankratov<sup>1,2</sup>, PankratovIA@info.sgu.ru, Ya. G. Sapunkov<sup>2</sup>, SapunkovYaG@gmail.com,  
Yu. N. Chelnokov<sup>2</sup>, ChelnokovYuN@gmail.com,

<sup>1</sup> Saratov State University, Saratov, Russian Federation,

<sup>2</sup> Institute of Precision Mechanics and Control Problems of the Russian Academy of Sciences,  
Saratov, Russian Federation

Corresponding author: I. A. Pankratov, Associate Professor, Saratov State University, Saratov, Russian Federation;  
Researcher, Institute of Precision Mechanics and Control Problems of the Russian Academy of Sciences,  
Saratov, Russian Federation, e-mail: PankratovIA@info.sgu.ru

Accepted on April 25, 2019

## Quaternion Models and Algorithms of Solving the General Problem of Energetically Optimal Spacecraft Orbit Reorientation

### Abstract

The problem of optimal reorientation of the spacecraft orbit is considered in quaternion formulation. Control (vector of the acceleration of the jet thrust) is limited in magnitude. It is required to determine the optimal orientation of the vector of the acceleration in space to solve the problem. It is necessary to minimize the energy consumption of the process of reorientation of the spacecraft orbit. We used quaternion differential equation of the orientation of the spacecraft orbit to describe the motion of the center of mass of the spacecraft. The problem was solved using the maximum principle of L. S. Pontryagin. We simplified the differential equations of the problem using known partial solution of the equation for the variable conjugated to true anomaly. The problem of optimal reorientation of the spacecraft orbit was reduced to a boundary value problem with a moving right end of the trajectory described by a system of nonlinear differential equations of fifteenth order. For the numerical solution of the obtained boundary value problem the transition to dimensionless variables was carried out. At the same time a characteristic dimensionless parameter of the problem appeared in the phase and conjugate equations. We constructed an original numerical algorithm for finding unknown initial values of conjugate variables. The algorithm is a combination of Runge-Kutta 4th order method and two methods for solving boundary value problems: modified Newton method and gradient descent method. The using of these two methods for solving boundary value problems has improved the accuracy of the solution of the investigated boundary value problem of optimal control. Examples of numerical solution of the problem are given for the cases when the difference (in angular measure) between initial and final orientations of the spacecraft orbit is equals to a few (or tens of) degrees. Graphs of changes component of the quaternion of the spacecraft orbit orientation; variables characterizing the shape and dimensions of the spacecraft orbit; optimal control are plotted. The analysis of the obtained solutions is given. The features and regularities of the process of optimal reorientation of the spacecraft orbit are established. We found that when the difference between initial and final spacecraft orbits is small there is a one point of extremum for the eccentricity of the spacecraft orbit and for modulo of the vector of orbital velocity moment of the spacecraft. And there are a few points of local extremum for these functions when the difference between initial and final spacecraft orbits is large.

**Keywords:** spacecraft, orbit, optimization, optimal control, quaternion, Newton method, gradient descent method

**Acknowledgment:** The work was supported by Russian Foundation for Basic Research — project № 19-01-00205.

For citation:

Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Quaternion Models and Algorithms of Solving the General Problem of Energetically Optimal Spacecraft Orbit Reorientation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 8, pp. 498—503.

УДК 519.6, 628.79

DOI: 10.17587/mau.20.498-503

И. А. Панкратов<sup>1,2</sup>, канд. техн. наук, доц., науч. сотр. PankratovIA@info.sgu.ru,

Я. Г. Сапунков<sup>2</sup>, канд. физ-мат. наук, ст. науч. сотр., SapunkovYaG@gmail.com,

Ю. Н. Челноков<sup>2</sup>, д-р физ-мат. наук, гл. науч. сотр., ChelnokovYuN@gmail.com,

<sup>1</sup> Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского, г. Саратов

<sup>2</sup> Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

## Кватернионные модели и алгоритмы решения общей задачи энергетически оптимальной переориентации орбиты космического аппарата<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований — проект № 19-01-00205.

*В кватернионной постановке рассмотрена задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата. Управление (вектор ускорения от реактивной тяги) ограничено по величине. Требуется определить оптимальную ориентацию этого вектора в пространстве. При этом необходимо минимизировать затраты энергии на процесс переориентации орбиты космического аппарата. Для описания движения центра масс космического аппарата использовано кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты. Поставленная задача решена с использованием принципа максимума Л. С. Понтрягина. Дифференциальные уравнения задачи были упрощены с помощью известного частного решения уравнения для переменной, сопряженной к истинной аномалии. Задача оптимальной переориентации орбиты космического аппарата была сведена к краевой задаче с подвижным правым концом траектории, описываемой системой нелинейных дифференциальных уравнений пятнадцатого порядка. Для численного решения полученной краевой задачи был осуществлен переход к безразмерным переменным. При этом в фазовых и сопряженных уравнениях появился характерный безразмерный параметр задачи. Для нахождения неизвестных начальных значений сопряженных переменных был построен оригинальный численный алгоритм. Этот алгоритм является комбинацией методов Рунге-Кутты 4-го порядка точности и двух методов решения краевых задач: модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Использование двух методов решения краевых задач позволило повысить точность решения исследуемой краевой задачи оптимального управления. Приведены примеры численного решения задачи для случаев, когда отличие (в угловой мере) между ориентациями начальной и конечной орбит космического аппарата составляет единицы (или десятки) градусов. Построены графики изменения компонент кватерниона ориентации орбиты космического аппарата; переменных, характеризующих форму и размеры орбиты космического аппарата; оптимального управления. Дан анализ полученных решений. Установлены особенности и закономерности процесса оптимальной переориентации орбиты космического аппарата. Так, в случае, когда отличие между ориентациями начальной и конечной орбит космического аппарата мало, эксцентриситет орбиты космического аппарата и модуль вектора момента орбитальной скорости космического аппарата имеют лишь одну точку экстремума. Напротив, в случае, когда отличие между ориентациями начальной и конечной орбит космического аппарата велико, указанные функции имеют несколько точек локального экстремума.*

**Ключевые слова:** космический аппарат, орбита, оптимизация, оптимальное управление, кватернион, метод Ньютона, метод градиентного спуска

## Introduction

In this paper we consider the problem of optimal reorientation of an orbit of a spacecraft regarded as a figure changeable in the course of motion control. The motion of a spacecraft, which is considered as a material point of a variable mass, is studied in the coordinate system with an origin at the point of attraction. The coordinate axes of this coordinate system are parallel to the axes of inertial frame of reference. It is required to determine the optimal control  $\mathbf{p}$  (vector of jet acceleration) which transfers spacecraft from its initial orbit to desired one. Also we have to minimize the energy consumption for this reorientation.

It is well known that the problem of spacecraft interorbital flights is greatly simplified if the start and final orbits lie in the same plane. It becomes possible to find the optimal transition trajectories analytically (accurately or approximately). This has led to the significant number of publications in this area. Note also that due to its complexity, the problem of performance was rarely solved (we can note papers [1–4]). Basically the energy cost or the characteristic velocity was minimized (refer to the papers of I. S. Grigoriev, K. G. Grigoriev [5–8], S. N. Kirpichnikov and coauthors [9, 10]).

In these papers optimal control problems were solved on the basis of the maximum principle. Boundary value problems of the maximum princi-

ple were solved numerically by shooting method. In the present article we consider the general problem of reorientation of the spacecraft orbit. There are no additional restrictions on the shape and size of the initial and final orbits.

In contrast to the control of angular motion of a solid body, where quaternion models have been used for a long time, in the majority of articles, dedicated to reorientation of the spacecraft orbit, equations of motion in traditional angular elements of the orbit are used. In most papers the problem is reduced to the numerical solution of nonlinear boundary problems of high dimensionality, obtained by application of the L. S. Pontryagin maximum principle. Analytical study of differential equations of orbit orientation in classical angular elements (and the resulting boundary value problems) is the quite complex problem. Note the papers of S. A. Ishkov, V. V. Salmin, etc. [11, 12]. Increasing the efficiency of numerical solution of problems in this area can be obtained using quaternion models of spacecraft orbital motion. In the present paper we develop the research, initiated in [13].

## 1. Statement of the problem

It is required to determine the bounded (in magnitude) control  $\mathbf{p}$ :

$$0 \leq p \leq p_{\max}, \quad p = |\mathbf{p}|, \quad (1.1)$$

which transfers the spacecraft whose motion is described by equations [14]:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v_1, \quad v_1 = c^2 r^{-3} - fMr^{-2} + p_1, \\ \dot{c} &= rp_2, \quad 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \Omega_{\xi}, \\ \Omega_{\xi} &= rc^{-1} p_3 (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2) - r(c^2 - fMr)^{-1} \times \\ &\times \cos \varphi (cp_1 \cos \varphi - (c + fMrc^{-1}) p_2 \sin \varphi) \mathbf{i}_3, \\ \dot{\varphi} &= cr^{-2} + r(c^2 - fMr)^{-1} \cos \varphi \times \\ &\times (cp_1 \cos \varphi - (c + fMrc^{-1}) p_2 \sin \varphi), \end{aligned} \quad (1.2)$$

from specified initial state

$$\begin{aligned} t = 0, \quad r(0) = r^0, \quad v_1(0) = v_1^0, \quad c(0) = c^0, \\ \varphi(0) = \varphi^0, \quad \Lambda(0) = \Lambda^0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

into the final state

$$\begin{aligned} t = t^* = ?, \quad c(t^*) = c(0) = c^0, \\ e_{or}(t^*) = e_{or}(0), \quad \text{vect}[\bar{\Lambda}(t^*) \circ \Lambda^*] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.4)$$

and minimizing the functional

$$J = \int_0^{t^*} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) dt.$$

Here  $\mathbf{r}$  is the spacecraft radius-vector drawn from the attraction center,  $r = |\mathbf{r}|$ ;  $v_1$  is the projection of spacecraft velocity vector onto its radius-vector;  $c$  is the modulo of the vector of orbital velocity moment of the spacecraft,  $c = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}|$ ;  $f$  is the gravitational constant,  $M$  is the mass of the attracting body;  $p_k$  are the components of the control  $\mathbf{p}$ ;  $\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 \mathbf{i}_1 + \Lambda_2 \mathbf{i}_2 + \Lambda_3 \mathbf{i}_3$  is the normalized quaternion of spacecraft orbit orientation,  $\mathbf{i}_1$ ,  $\mathbf{i}_2$  and  $\mathbf{i}_3$  are the unit vectors of a hypercomplex space (Hamilton imaginary units);  $\circ$  is the symbol of quaternion multiplication;  $\varphi$  is the true anomaly of the spacecraft; a line over a quaternion means conjugate quaternion;  $\Lambda^*$  is the quaternion of the orientation of the desired spacecraft orbit.

In this problem the values of  $c$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $\Lambda^0$ ,  $\Lambda^*$  and  $\varphi^0$  are assumed to be specified. One can calculate the eccentricity of the spacecraft orbit either by the formula [15, 16]:

$$e_{or} = (1 + c^2 \mu^{-2} (v_1^2 + c^2 r^{-2} - 2\mu r^{-1}))^{1/2}, \quad \mu = fM,$$

or by the formula

$$e_{or} = rv_1 (c \sin \varphi \mu^{-2} - rv_1 \cos \varphi)^{-1}.$$

Functional  $J$  characterizes the energy consumption for a spacecraft transfer from the initial to final state.

The final time moment  $t^*$  is not fixed and should be determined as a result of solving the problem, therefore, the problem under consideration is a problem with a movable right boundary.

Note that, in contrast to papers [17, 18], the values of the large semimajor axes of the initial and final orbits do not generally coincide. So the size of the final orbit may differ from the size of the initial spacecraft orbit.

## 2. Optimal control law

We solve the problem using the Pontryagin maximum principle [19]. Let us introduce conjugate variables  $\rho$ ,  $s_1$ ,  $e$ ,  $\chi$ ,  $\mathbf{M} = M_0 + M_1 \mathbf{i}_1 + M_2 \mathbf{i}_2 + M_3 \mathbf{i}_3$  corresponding to the phase variables  $r$ ,  $v_1$ ,  $c$ ,  $\varphi$ ,  $\Lambda$ . It is known [13] that conjugate equation for variable  $\chi$  has a partial solution

$$\chi = N_3/2. \quad (2.1)$$

In this case the Hamilton-Pontryagin function has the form

$$\begin{aligned} H &= -(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \rho v_1 + \\ &+ s_1 (c^2 r^{-3} - fMr^{-2} p_1) + erp_2 + \chi cr^{-2} + \\ &+ (1/2)(N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi)(r/c) p_3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

where  $N_k$  are the components of the quaternion  $\mathbf{N} = \bar{\Lambda} \circ \mathbf{M}$ .

The conjugate system has the form

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= -\rho; \\ \dot{\rho} &= 3s_1 c^2 / r^4 - 2(s_1 fM - \chi c) / r^3 - ep_2 - \\ &- (1/(2c)) p_3 (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi); \\ \dot{e} &= -2cs_1 / r^3 - \chi / r^2 + \\ &+ (1/2)r(p_3/c^2)(N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi); \\ 2\dot{\mathbf{M}} &= \mathbf{M} \circ \Omega_{\xi}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

The optimal control  $\mathbf{p}^o$  is found from the condition of a maximum in variable  $\mathbf{p}$  of the  $H$  function, determined by relation (2.2), with allowance made for constraint (1.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^o &= p^{opt} \mathbf{n} / |\mathbf{n}|, \quad \mathbf{n} = s_1 \mathbf{i}_1 + er \mathbf{i}_2 + \\ &+ (1/2)(N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi)(r/c) \mathbf{i}_3, \end{aligned} \quad (2.4)$$

where  $p^{opt} = 0.5|\mathbf{n}|$ , if  $0.5|\mathbf{n}| \leq p_{\max}$ ; and  $p^{opt} = p_{\max}$ , if  $0.5|\mathbf{n}| > p_{\max}$ .

Here and below, by the optimal control we meant the control, satisfying the necessary conditions of optimality (Pontryagin's maximum principle). The

optimal trajectory is the trajectory corresponding to this control.

Thus the posed problem is reduced to integration fifteen differential equations (1.2), (2.3), (2.4). When the system of equations is integrated, fifteen arbitrary constants will appear, the variable  $t^*$  is the sixteenth unknown. For determining the constants we have sixteen conditions: thirteen boundary conditions (1.3), (1.4), the relations

$$\begin{aligned} t = t^*, \rho - s_1(c^2 - r)/(v_1 r^2 c^2) = 0, \\ \Lambda_0^* \cdot \mathbf{M}_0 + \Lambda_1^* \cdot \mathbf{M}_1 + \Lambda_2^* \cdot \mathbf{M}_2 + \Lambda_3^* \cdot \mathbf{M}_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

following from the conditions of transversality, and the equality

$$H^0|_{t^*} = 0,$$

which takes place for the optimal control  $\mathbf{p}$  and the optimal spacecraft trajectory.

### 3. Equations in dimensionless variables

To obtain numerical solution, the equations and relations of the boundary optimization problem were written in the dimensionless form. The dimensionless variables and controls are connected with dimensionless analogues by the relations:  $r = Rr^{dl}$ ,  $t = Tt^{dl}$ ,  $p_k = p_{\max} p_k^{dl}$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Here  $R$  is a typical distance (the quantity close to the major semi-axis of the initial orbit of the controlled spacecraft is taken),  $V$  is a typical velocity,  $C$  is a typical sector velocity, and  $T$  is a typical time, determined as  $V = (fM/R)^{1/2}$ ,  $C = RV$  and  $T = R/V$ , respectively. Note that in the transition to dimensionless variables in the equations for the phase and conjugate variables, the typical dimensionless parameter  $N^b = p_{\max} R^3/C^2$  arises.

Let us present the equations and relations of the optimization boundary value problem in the dimensionless variables (superscripts “dl” are omitted). The equations of the motion of the spacecraft center of mass take the form

$$\begin{aligned} r \dot{} &= v_1, v_1 \dot{} = c^2 r^{-3} - r^{-2} + N^b p_1, \\ c \dot{} &= N^b r p_2, 2\Lambda \dot{} = \Lambda \circ \Omega_\xi, \\ \Omega_\xi &= N^b r c^{-1} p_3 (\cos \varphi \mathbf{i}_1 + \sin \varphi \mathbf{i}_2) - \\ &- N^b r (c^2 - fMr)^{-1} \cos \varphi (c p_1 \cos \varphi - \\ &- (c + rc^{-1}) p_2 \sin \varphi) \mathbf{i}_3, \\ \varphi \dot{} &= cr^{-2} + N^b r (c^2 - r)^{-1} \cos \varphi (c p_1 \cos \varphi - \\ &- (c + rc^{-1}) p_2 \sin \varphi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

The conjugate system of equations has the form

$$\begin{aligned} s_1 \dot{} &= -\rho; \\ \rho \dot{} &= 3s_1 c^2 / r^4 - 2(s_1 - \chi c) / r^3 - N^b e p_2 - \\ &- (N^b / (2c)) p_3 (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi); \\ e \dot{} &= -2cs_1 / r^3 - \chi / r^2 + \\ &+ (N^b / 2) r (p_3 / c^2) (N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi); \\ 2\mathbf{M} \dot{} &= \mathbf{M} \circ \Omega_\xi. \end{aligned} \quad (3.2)$$

The dimensionless optimal control is subject to condition  $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \leq 1$ .

Dimensionless conditions of transversality are the same as (2.5).

Thus the posed problem is reduced to integration fifteen differential equations (3.1), (3.2) with thirteen boundary conditions, two conditions of transversality and the equality  $H^0|_{t^*} = 0$ , which takes place for the optimal control  $\mathbf{p}$  and the optimal spacecraft trajectory.

### 4. An example of numerical solution of problem

Figures 1, 2 present the results of numerical solution of the boundary value problem of optimization described in Section 2. The equations and relations of the optimization boundary value problem were written in the dimensionless form considered in Section 3. An algorithm for solving the problem numerically is realized with two methods to solve the boundary value problem: the modified Newton method and the method of gradient descent [20]. For integration of phase and conjugate equations Runge-Kutta method was used.

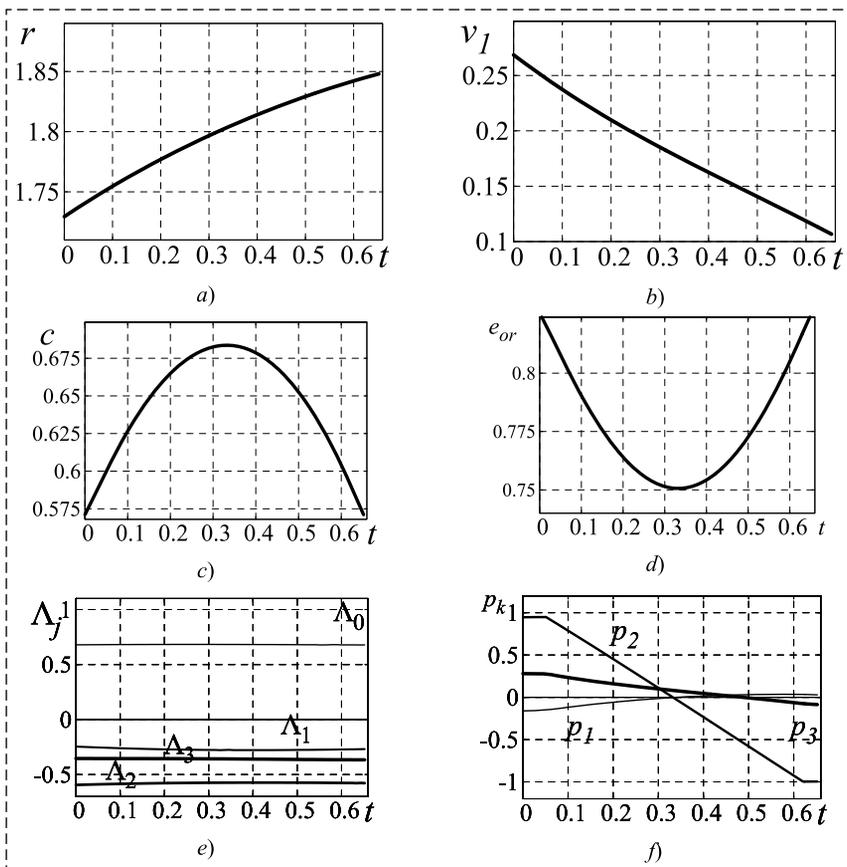
The quantities characterizing the forms and dimensions of spacecraft orbit, initial and final orientations of spacecraft orbit are equal to ( $a_{or}$  is the semi-major axis of an orbit) [21]:

$$\begin{aligned} e_{or} &= 0.8257, a_{or} = 37936238.7597 \text{ m}, \\ \varphi_0 &= 2.954779 \text{ rad}, \\ p_{\max} &= 0.101907 \text{ m/sec}^2, \\ N^b &= 0.35; \end{aligned}$$

initial spacecraft position

$$\begin{aligned} \Lambda_0^0 &= 0.679417, \Lambda_1^0 = -0.245862, \\ \Lambda_2^0 &= -0.539909, \Lambda_3^0 = -0.353860; \end{aligned}$$

final spacecraft position



**Fig. 1. Elliptical orbit, variant 1:**

*a* — modulo of spacecraft radius-vector; *b* — the projection of spacecraft velocity vector onto its radius-vector; *c* — modulo of the vector of orbital velocity moment of the spacecraft; *d* — the eccentricity of the spacecraft orbit; *e* — components of the quaternion of spacecraft orbit orientation; *f* — optimal control

variant 1 (small difference between initial and final spacecraft orbits):

$$\begin{aligned} \Lambda_0^* &= 0.678275, & \Lambda_1^* &= -0.268667, \\ \Lambda_2^* &= -0.577802, & \Lambda_3^* &= -0.366116; \end{aligned}$$

variant 2 (large difference between initial and final spacecraft orbits):

$$\begin{aligned} \Lambda_0^* &= -0.440542, & \Lambda_1^* &= -0.522476, \\ \Lambda_2^* &= -0.125336, & \Lambda_3^* &= -0.719189. \end{aligned}$$

The optimal control problem was solved for a spacecraft whose initial Cartesian coordinates and projections of the velocity vector of the center of mass on the axes of inertial coordinate system were given in [22].

The chosen scaling multipliers are  $R = 37000000.0$  m,  $V = 3282.220738$  m/sec<sup>2</sup>,  $C = 121442167306.088539$  m/sec<sup>2</sup>,  $T = 11272.855470$  sec. The initial values of the involved dimensionless variables are  $r = 1.729360$ ,  $v_1 = 0.268527$ ,  $c = 0.571134$ .

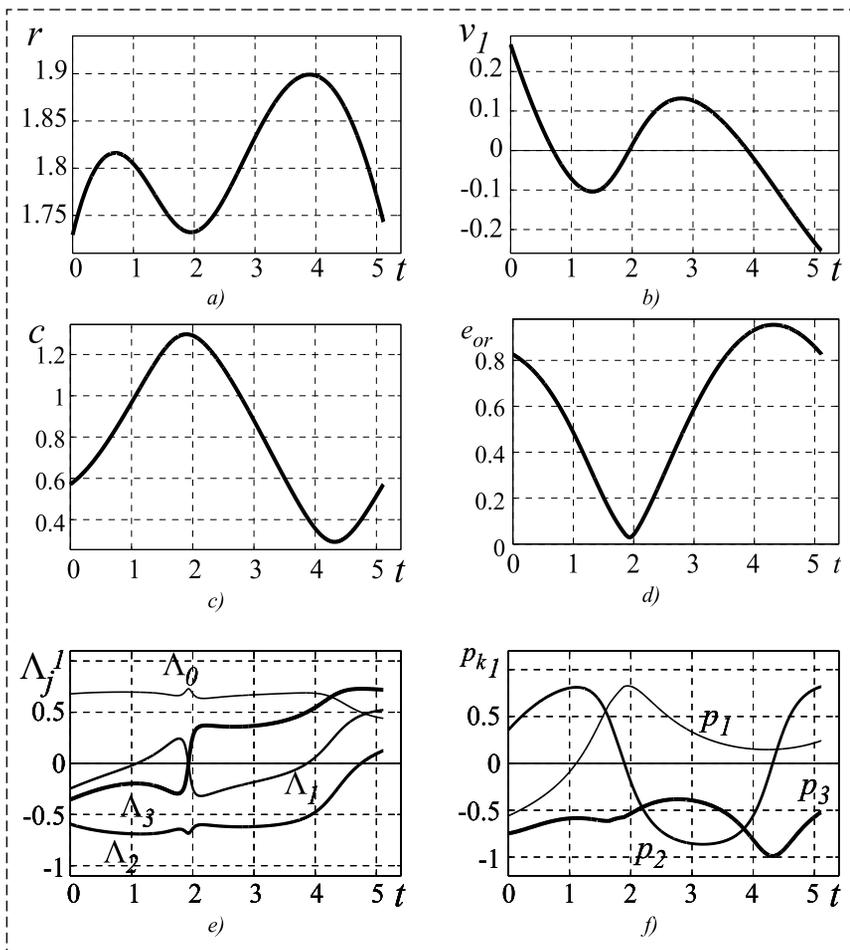
With a small difference in the orientations of the initial and final spacecraft orbits (variant 1), the duration of the reorientation of the spacecraft orbit was 0.652198 dimensionless units or 2.042 hours. Note that  $p_1 \approx p_2 \approx -0.003$  at  $t = 0.333101$ . Up to this point in time, modulo of the spacecraft orbital velocity moment has been increasing, and then it begins to decrease. And, on the contrary, the eccentricity of the spacecraft orbit decreases at first, and at  $t = 0.333101$  begins to increase, reaching its initial value at the end of the motion. The components of the quaternion of the spacecraft orbit orientation are slowly changing variables.

With a large difference in the orientations of the initial and final spacecraft orbits (variant 2), the duration of the reorientation of the spacecraft orbit was 5.113406 dimensionless units or 16.012 hours. Note that at  $t = 1.930153$  the spacecraft orbit is close to circular. Then the eccentricity of the orbit begins to increase. The maximum eccentricity value (close to one) is greater than its initial value. Also, when

$t = 1.930153$  modulo of the spacecraft orbital velocity moment reaches its maximum value. At the same point, the phase variables  $\Lambda_0$ ,  $\Lambda_2$  have local extremes, and  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_3$  change their signs. The eccentricity reaches its maximum value at  $t = 4.318343$ , at the same point modulo of the spacecraft orbital velocity moment reaches its minimum value.

Note that under the same boundary conditions in the formulation of the boundary value problem of optimal control various solutions for the laws of motion, control and behavior of conjugate variables were obtained. It is associated with the nonlinearity of the differential equations of the problem. From these solutions we chose that one with the minimal value of functional  $J$ .

Note also that unlike [13], the authors obtained a solution for the case where the difference in the orientations of the initial and final spacecraft orbits was equal to tens of degrees in angular measure. Also the combination of two methods for solving boundary value problems has improved the accuracy.



**Fig. 2. Elliptical orbit, variant 2:**

*a* – modulo of spacecraft radius-vector; *b* – the projection of spacecraft velocity vector onto its radius-vector; *c* – modulo of the vector of orbital velocity moment of the spacecraft; *d* – the eccentricity of the spacecraft orbit; *e* – components of the quaternion of spacecraft orbit orientation; *f* – optimal control

cy of the numerical solution of the boundary value problem from 0.002 to  $10^{-9}$  dimensionless units.

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 19-01-00205).*

### References

1. Kirpichnikov S. N., Bobkova A. N., Os'kina Yu. V. *Kosmicheskie Issledovaniia*, 1991, vol. 29, no. 3, pp. 367–374 (in Russian).
2. Grigoriev K. G., Grigoriev I. S., Petrikova Yu. D. *Kosmicheskie Issledovaniia*, 2000, vol. 38, no. 2, pp. 160–181.

3. Kiforenko B. M., Pasechnik Z. V., Kyrychenko S. B., Vasiliev I. Yu. *Acta Astronautica*, 2003, vol. 52, no. 8, pp. 601–611.

4. Fazl-zadeh S. A., Varzandian G. A. *Acta Astronautica*, 2010, vol. 66, no. 3–4, pp. 528–538.

5. Grigoriev K. G., Fedyna A. V. *Kosmicheskie Issledovaniia*, 1995, vol. 33, no. 4, pp. 403–416 (in Russian).

6. Ryzhov S. Y., Grigoriev I. S. *Cosmic Research*, 2006, vol. 44, no. 3, pp. 258–267.

7. Grigoriev I. S., Grigoriev K. G. *Cosmic Research*, 2007, vol. 45, no. 4, pp. 339–347.

8. Grigoriev I. S., Grigoriev K. G. *Cosmic Research*, 2007, vol. 45, no. 6, pp. 523–534.

9. Kirpichnikov S. N., Bobkova A. N. *Kosmicheskie Issledovaniia*, 1992, vol. 30, no. 6, pp. 800–809 (in Russian).

10. Kirpichnikov S. N., Kuleshova L. A., Kostina Yu. L. *Cosmic Research*, 1996, vol. 34, no. 2, pp. 156–164.

11. Ishkov S. A., Romanenko V. A. *Cosmic Research*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 268–277.

12. Salmin V. V., Sokolov V. O. *Kosmicheskie Issledovaniia*, 1991, vol. 29, no. 6, pp. 872–888 (in Russian).

13. Afanas'eva Yu. V., Chelnokov Yu. N. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 4, pp. 621–634.

14. Chelnokov Yu. N. *Cosmic Research*, 2003, vol. 41, no. 1, pp. 85–99.

15. Abalakin V. K., Aksenov E. P., Grebennikov E. A., Demin V. G., Riabov Iu. A. Reference guide on celestial mechanics and astrodynamics, Moscow, Nauka, 1976, 864 p. (in Russian).

16. Duboshin G. N. *Celestial mechanics. Main tasks and methods*, Moscow, Nauka, 1968, 799 p. (in Russian).

17. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 87–95 (in Russian).

18. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2013, vol. 13, no. 1, part 1, pp. 84–92 (in Russian).

19. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The mathematical theory of optimal processes*, Moscow, Nauka, 1983, 393 p. (in Russian).

20. Moiseev N. N. *Numerical methods in the theory of optimal systems*, Moscow, Nauka, 1971, 424 p. (in Russian).

21. Chelnokov Yu. N. *Cosmic Research*, 2003, Vol. 41, no. 5, pp. 460–477.

22. Bordovitsyna T. V. *Modern numerical methods in problems of celestial mechanics*, Moscow, Nauka, 1984, 136 p. (in Russian).

**В. М. Солдаткин**, д-р техн. наук, зав. кафедрой, w-soldatkin@mail.ru,

**В. В. Солдаткин**, д-р техн. наук, доц.,

Казанский национальный исследовательский технический университет им А. Н. Туполева—КАИ

## Исследование методических погрешностей системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником набегающего воздушного потока<sup>1</sup>

*Отмечается важность информации о воздушных сигналах самолета для пилотирования и обеспечения безопасности полета. Рассматриваются недостатки традиционных систем воздушных сигналов, связанных с использованием нескольких распределенных по фюзеляжу и вынесенных в набегающий воздушный поток приемников информации о параметрах набегающего воздушного потока. Раскрываются конкурентные преимущества и функциональная схема системы воздушных сигналов самолета с одним интегрированным неподвижным невыступающим приемником набегающего воздушного потока, построенной на основе ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости, на обтекаемой поверхности которого расположено отверстие-приемник статического давления. Анализируются причины, приводятся математические модели и расчетные значения методических аэродинамических погрешностей измерительных каналов рассматриваемой системы, обусловленных искажениями воспринимаемого статического давления и истинной воздушной скорости, регистрируемой ионно-меточным датчиком, которые необходимо учитывать при тарировке системы.*

**Ключевые слова:** самолет, воздушные сигналы, измерение, система, неподвижный невыступающий приемник, методические аэродинамические погрешности, модели, расчет

### Введение

Для решения задач пилотирования в режимах штурвального и автоматического управления, предотвращения критических режимов полета самолета в неспокойной атмосфере необходима достоверная информация о величине и составляющих вектора истинной воздушной скорости, аэродинамических углах атаки и скольжения, барометрической высоте и вертикальной скорости, числе Маха и других воздушных сигналах, определяющих аэродинамику и динамику движения самолета относительно окружающей воздушной среды [1, 2].

Традиционные системы воздушных сигналов самолета и других летательных аппаратов реализуют аэродинамический и аэрометрический методы измерения с использованием вынесенных в набегающий воздушный поток и распределенных по фюзеляжу приемников воздушных давлений и температуры торможения набегающего воздушного потока, флюгерных датчиков аэродинамических углов атаки и скольжения. При этом вынесенные в набегающий воздушный поток за обшивку фюзеляжа приемники и датчики нарушают аэродинамику самолета, особенно при маневрировании [3],

снижают надежность работы системы воздушных сигналов в реальных условиях эксплуатации, являются причиной дополнительных погрешностей измерения высотно-скоростных параметров, зависящих от параметров полета и окружающей воздушной среды [4, 5].

Реальной возможностью получения информации о высотно-скоростных параметрах полета самолета с помощью одного (интегрированного) неподвижного невыступающего приемника набегающего воздушного потока является построение системы воздушных сигналов на основе ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости [6, 7].

На рис. 1 приведена функциональная схема системы воздушных сигналов самолета, построенной на основе ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости с логометрическими информативными сигналами и интерполяционной схемой обработки [8].

Ионно-меточный датчик аэродинамического угла и истинной воздушной скорости содержит приемную плату 1, в центре 0 которой установлен искровой разрядник 2, подключенный к генератору метки ГМ. На окружности радиуса  $R$  с центром в точке 0 генерации ионных меток под одинаковыми углами расположены приемные электроды (ПЭ) 3, реги-

<sup>1</sup>Работа выполнена по гранту РФФИ № 18-08-00264.

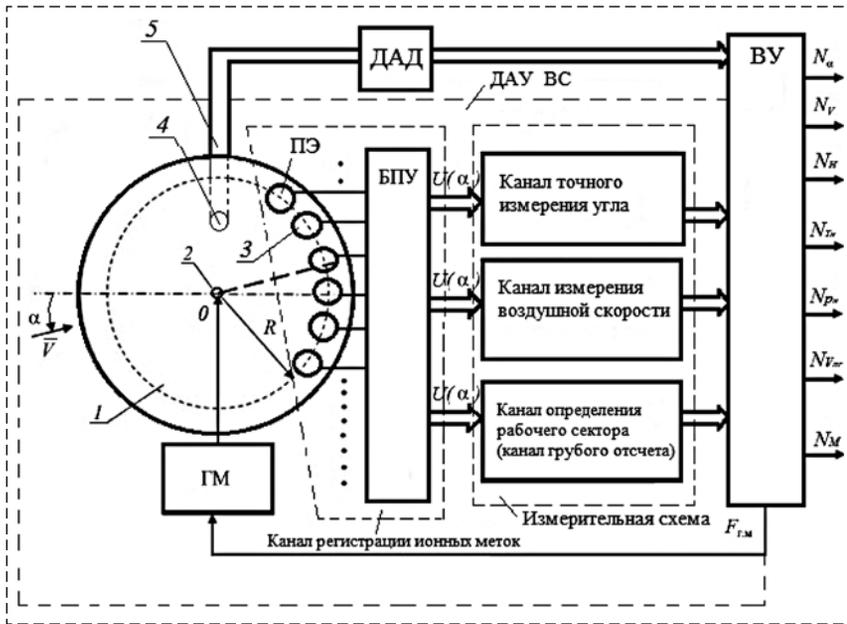


Рис. 1. Функциональная схема системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником набегающего воздушного потока  
 Fig. 1. Functional scheme of the air data system of aircraft with stationary included receiver of incoming air flow

стрирующие скорость и траекторию движения ионной метки совместно с набегающим воздушным потоком.

Измерительная схема рассматриваемого датчика включает три канала: канал определения рабочего сектора измеряемого аэродинамического угла  $\alpha$  (канал грубого отсчета), канал точного измерения измеряемого угла в пределах рабочего сектора и канал измерения истинной воздушной скорости  $V_b$ , выходы которых подключены к вычислительному устройству (ВУ). На выходе вычислительного устройства ВУ формируются цифровые сигналы  $N_\alpha$  и  $N_V$  по аэродинамическому углу  $\alpha$  и модулю  $V_b$  вектора истинной воздушной скорости. Вычислительное устройство выдает также сигнал  $F_{ГМ}$ , управляющий работой генератора меток, который задает частоту  $F_{ГМ}$  формирования ионной метки.

Выполнение измерительной схемы в виде канала определения рабочего сектора измеряемого угла, являющегося каналом грубого отсчета, и канала точного измерения угла в каждом из рабочих секторов позволяет существенно повысить разрешающую способность по измеряемому аэродинамическому углу во всем диапазоне его изменения без увеличения числа приемных электродов и габаритных размеров системы приемных электродов. Двухканальное выполнение канала измерения аэро-

динамического угла обеспечивает надежное определение рабочего сектора и точное измерение текущего значения угла внутри каждого рабочего сектора, что позволяет повысить точность измерения в широком диапазоне изменения аэродинамического угла при одновременном изменении модуля вектора истинной воздушной скорости. Канал измерения истинной воздушной скорости позволяет с высокой точностью формировать интервал времени пролета ионной метки от точки генерации до окружности с приемными электродами при одновременном изменении аэродинамического угла, что повышает точность измерения истинной воздушной скорости.

Для обеспечения одновременного измерения всех воздушных сигналов самолета с использова-

нием рассмотренного ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости предложено [6] на обтекаемой поверхности системы приемных электродов расположить отверстие-приемник 4 (рис. 1) для забора статического давления  $P_H$  набегающего воздушного потока, которое пневмоканалом 5 связано со входом датчика абсолютного давления (ДАД), например цифрового, выход которого подключен ко входу вычислительного устройства ВУ, обеспечивающего вычисление всех высотно-скоростных параметров самолета.

Разработаны алгоритмы вычисления высотно-скоростных параметров самолета по информации ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости с отверстием-приемником статического давления, установленным на его обтекаемой поверхности [6]. Проведенный анализ инструментальных погрешностей измерительных каналов системы воздушных сигналов самолета с интегрированным неподвижным невыступающим приемником набегающего воздушного потока [7] свидетельствует об их соответствии современным требованиям, определяют конкурентное преимущество и перспективы применения системы на самолетах и других летательных аппаратах различного класса и назначения [9, 10].

**Математические модели и расчет методических аэродинамических погрешностей измерительных каналов системы из-за искажения воспринимаемого статического давления**

При исследовании точности измерения высотно-скоростных параметров в измерительных каналах системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником набегающего воздушного потока особый интерес представляют методические погрешности, связанные с особенностями восприятия первичной информации о параметрах набегающего воздушного потока ионно-меточным датчиком аэродинамического угла и истинной скорости со встроенным в его обтекаемую поверхность отверстием-приемником статического давления.

Статическое давление  $P_H$  невозмущенного воздушного потока представляет собой давление, которое в данной точке невозмущенного потока испытывало бы достаточно малое тело, не деформирующее поток и движущееся со скоростью потока  $V$ . Поэтому восприятие статического давления на борту движущегося самолета является известной проблемой, связанной с деформацией набегающего воздушного потока профилем фюзеляжа и других элементов конструкции самолета и искажениями, вносимыми непосредственно приемником статического давления, установленным в набегающем воздушном потоке. Физически невозможно создать приемник статического давления, расположенный на фюзеляже самолета, который воспринимал бы статическое давление невозмущенного воздушного потока без погрешностей. Любой приемник статического давления на борту самолета воспринимает статическое давление невозмущенного воздушного потока на данной высоте полета со свойственными ему погрешностями, зависящими от места установки приемника на борту самолета, геометрических параметров самого приемника и от параметров вектора скорости набегающего воздушного потока [9].

Основным параметром, определяющим качество любого приемника статического давления, является коэффициент давления  $\bar{P}$ , вычисляемый как отношение разности давления  $P_X$ , воспринимаемого приемником, и статического давления  $P_H$  невозмущенного набегающего воздушного потока к скоростному напору  $q$  [9]:

$$\bar{P} = \frac{P_X - P_H}{q}, \quad (1)$$

где  $q = \rho_H V^2 / 2 = P_{\text{дин}} = P_{\text{ст}} - P_H$  — динамическое давление (скоростной напор) набегающего воздушного потока;  $\rho_H$  — плотность атмосферы на данной высоте  $H$ ;  $V$  — модуль вектора скорости невозмущенного набегающего воздушного потока.

В соответствии с Нормами летной годности гражданских самолетов (НГЛС) коэффициент давления  $\bar{P}$  самого приемника статического давления, установленного в набегающем воздушном потоке, не должен превышать  $\bar{P} \leq 0,05$  [9]. При этом при установке приемника статического давления на самолете появляется дополнительная аэродинамическая погрешность за счет искажения набегающего потока, вносимая движением самолета.

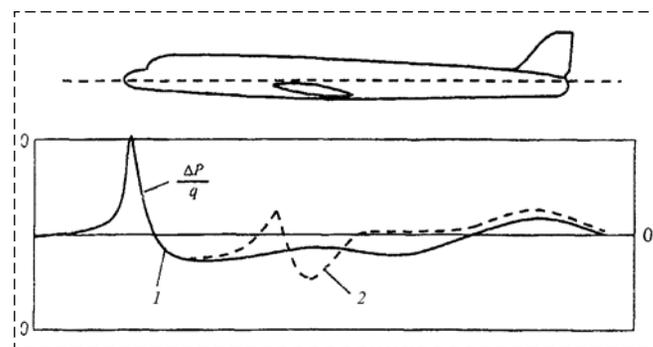
При  $\bar{P} = 0$  приемник статического давления выдает неискаженное статическое давление невозмущенного набегающего воздушного потока. Поэтому приемник статического давления необходимо устанавливать на борту самолета в местах, где местный коэффициент давления  $\bar{P}_M$  близок к нулю, т. е.

$$\bar{P}_M = \frac{P_M - P_H}{q} \approx 0, \quad (2)$$

где  $P_M$  — местное статическое давление в месте установки приемника.

На рис. 2 приведен характерный график распределения коэффициента давления  $\bar{P}_M$  по средней линии фюзеляжа дозвукового самолета [9].

Как видно из рис. 2, приемники статического давления на борту самолета необходимо уста-



**Рис. 2. Характер распределения коэффициента давления дозвукового самолета по средней линии фюзеляжа:**

1 — по свободному фюзеляжу; 2 — по фюзеляжу вместе с плоскостями и горизонтальным оперением

**Fig. 2. The nature of the distribution of pressure coefficient of the subsonic aircraft on the midline of fuselage:**

1 — on the free fuselage; 2 — on the fuselage with the planes and horizontal tail

навливать или на выносной штанге на значительном удалении от самолета, или на фюзеляже в области, где местный коэффициент давления  $\overline{P}_M$  близок к нулю или известны модели его изменения на всех характерных режимах полета.

Модели изменения коэффициента давления в месте расположения приемников статического давления на фюзеляже самолета и вызываемых ими аэродинамических погрешностей для традиционных систем воздушных сигналов определяются при летных испытаниях на конкретном типе самолета для конкретного места установки приемника, используя технологии работы [10].

Отклонение статического давления  $P_x$ , воспринимаемого приемником на поверхности ионно-меточного датчика, от статического давления  $P_H$  невозмущенного набегающего воздушного потока является причиной методических аэродинамических погрешностей определения высотно-скоростных параметров и других воздушных сигналов в каналах системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником набегающего воздушного потока.

Исследуем характер изменения методической аэродинамической погрешности измерения барометрической высоты из-за искажения статического давления, воспринимаемого отверстием-приемником на обтекаемой поверхности ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости.

Из-за возмущений, вносимых движением самолета, давление  $P_M$ , воспринимаемое в месте расположения отверстия-приемника на обтекаемой поверхности ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости, отличается от статического давления  $P_H$  невозмущенного набегающего воздушного потока на величину аэродинамического искажения  $\Delta P_a$ :

$$P_M = P_H + \Delta P_a = P_H + K_p q, \quad (3)$$

$K_p = \overline{P}_M$  — безразмерный коэффициент местного статического давления, в общем случае зависящий от истинной воздушной скорости  $V_B = V$ , углов атаки  $\alpha$  и скольжения  $\beta$  и определяемый при летных испытаниях системы на конкретном типе самолета для конкретного места установки ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости для всех характерных режимов полета.

Поэтому абсолютная барометрическая высота полета  $H_M$ , определяемая в каналах системы по давлению  $P_M$ , в соответствии со стандартной зависимостью [11, 12] будет иметь вид а) в диапазоне высот до 11 000 м:

$$\begin{aligned} H_M &= \frac{T_0}{\tau} \left[ 1 - \left( \frac{P_M}{P_0} \right)^{\tau R} \right] = \\ &= \frac{T_0}{\tau} \left[ 1 - \left( \frac{P_H}{P_0} \right)^{\tau R} \right] + \left( \frac{T_0}{\tau} \frac{\Delta P_a}{P_0} \right)^{\tau R} = H + \Delta H_a, \quad (4) \\ \Delta H_a &= \left( \frac{T_0}{\tau} \frac{\Delta P_a}{P_0} \right)^{\tau R} = \left( \frac{T_0}{\tau} \frac{K_p \rho_H V_B^2}{2P_0} \right)^{\tau R}, \end{aligned}$$

где  $\Delta H_a = H_M - H$  — методическая аэродинамическая погрешность определения абсолютной барометрической высоты из-за искажения статического давления на обтекаемой поверхности ионно-меточного датчика;  $T_0 = 288,1$  К и  $P_0 = 101\,325$  Па = 760 мм рт. ст. — абсолютная температура и давление воздуха на высоте  $H = 0$ ;  $\tau = 0,065$  м/К — температурный градиент;  $R = 29,27125$  м/К — газовая постоянная;

б) в диапазоне высот от 11 000 м до 20 000 м:

$$\begin{aligned} H_M &= H_{11} + RT_{11} \ln \frac{P_{11}}{P_M} = \\ &= H_{11} + RT_{11} \ln \frac{P_{11}}{P_H + \Delta P_a} = \\ &= H_{11} + RT_{11} [\ln P_{11} - \ln P_H - \ln \Delta P_a] = \quad (5) \\ &= H_{11} + RT_{11} \ln \frac{P_{11}}{P_H} - RT_{11} \ln \Delta P_a = H + \Delta H_a; \\ \Delta H_a &= -RT_{11} \ln \Delta P_a = -RT_{11} \ln 0,5 K_p \rho_H V_B^2, \end{aligned}$$

где  $T_{11} = 216,65$  К и  $P_{11} = 22\,632$  Па = 169,754 мм рт. ст. — абсолютная температура и давление воздуха на высоте  $H_{11} = 11\,000$  м.

Как показали расчеты, при изменении коэффициента местного статического давления отверстия-приемника, расположенного на обтекаемой поверхности ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости, от  $K_p = 0,05$  до  $K_p = 0,2$  методическая аэродинамическая погрешность  $\Delta H_a$  канала барометрической высоты в диапазоне высот от 0 до 11 000 м и дозвуковых скоростей полета изменяется от  $\Delta H_{a \min} = 0,75 \dots 2,5$  м до  $\Delta H_{a \max} = 4 \dots 5,2$  м.

Отклонение местного статического давления  $P_M$ , воспринимаемого на обтекаемой по-

верхности ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости, от статического давления  $P_H$  невозмущенного набегающего воздушного потока является также причиной методической аэродинамической погрешности канала приборной скорости системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником потока.

Приборная скорость, вычисляемая по местному статическому давлению  $P_M$  в каналах системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником потока на основе ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости с встроенным приемником статического давления, будет равна [6, 7]

$$V_{\text{пр}}^{P_M} = \sqrt{\left[ \frac{2gRT_0 \left( \frac{k}{k-1} \right) \times \left[ \left( \frac{\rho_0 T_0}{2P_0^2 T_H} V_B^2 (P_H + \Delta P_a) + 1 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}{2gRT_0 \left( \frac{k}{k-1} \right) \times \left[ \left( \frac{\rho_0 T_0 P_H}{2P_0^2 T_H} (1 + K_p) V_B^2 + 1 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \right]} = \sqrt{\left[ \frac{2gRT_0 \left( \frac{k}{k-1} \right) \times \left[ \left( \frac{\rho_0 T_0}{2P_0^2 T_H} V_B^2 (P_H + \Delta P_a) + 1 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}{2gRT_0 \left( \frac{k}{k-1} \right) \times \left[ \left( \frac{\rho_0 T_0 P_H}{2P_0^2 T_H} (1 + K_p) V_B^2 + 1 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \right]} \quad (6)$$

Тогда методическая аэродинамическая погрешность  $\Delta V_{\text{пр}}^{P_M}$  определения приборной скорости в месте установки ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости определяется выражением

$$\Delta V_{\text{пр}}^{P_M} = V_{\text{пр}}^{P_M} - V_{\text{пр}} = \sqrt{\left[ \frac{2gRT_0 \left( \frac{k}{k-1} \right) \times \left[ \left( \frac{\rho_0 T_0 P_H}{2P_0^2 T_H} (1 + K_p) V_B^2 + 1 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}{2gRT_0 \left( \frac{k}{k-1} \right) \times \left[ \left( \frac{\rho_0 T_0}{2P_0^2 T_H} V_B^2 (P_H + \Delta P_a) + 1 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \right]} - \sqrt{\left[ \frac{2gRT_0 \left( \frac{k}{k-1} \right) \times \left[ \left( \frac{\rho_0 T_0}{4P_0^2 T_H} V_B^2 + 1 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}{2gRT_0 \left( \frac{k}{k-1} \right) \times \left[ \left( \frac{\rho_0 T_0 P_H}{2P_0^2 T_H} (1 + K_p) V_B^2 + 1 \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} \right]} \quad (7)$$

Как показали расчеты, значения аэродинамической погрешности  $\Delta V_{\text{пр}}^{P_M}$  канала приборной скорости системы воздушных сигналов дозвукового самолета с неподвижным невыступающим приемником потока, обусловленной отличием местного статического давления  $P_M$ , воспринимаемого в месте установки ионно-меточного датчика, от статического давления  $P_H$  невозмущенного набегающего воздушного потока при регламентируемом НЛГС значении  $K_p = 0,05$  в диапазоне высот от 0 до 11 000 м и скорости полета от 50 до 1200 км/ч изменяются от 0,35 м/с (1,26 км/ч) до 9,65 м/с (34 км/ч), т. е. составляет около 2,5...2,8 % от значения истинной воздушной скорости. При увеличении (уменьшении)  $K_p$  значения методической аэродинамической погрешности  $\Delta V_{\text{пр}}^{P_M}$  пропорционально увеличивается (уменьшается).

### Математические модели и расчет методических аэродинамических погрешностей измерительных каналов системы из-за искажения истинной воздушной скорости, воспринимаемой ионно-меточным датчиком

Причиной другой группы методических аэродинамических погрешностей системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником потока является отличие истинной воздушной скорости невозмущенного набегающего воздушного потока от истинной воздушной скорости, измеренной ионно-меточным датчиком аэродинамического угла в месте его установки на фюзеляже.

Искажения невозмущенного воздушного потока вблизи фюзеляжа, вносимое движением самолета, приводит к увеличению местной истинной воздушной скорости  $V_{B.M}$  в месте установки ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости. Это увеличение местной истинной воздушной скорости  $V_{B.M}$  можно оценить через увеличение скоростного напора  $P_{\text{дин}}^M = \frac{\rho_H V_{B.M}^2}{2}$  в месте расположения ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости, определяемого как  $P_{\text{дин}}^M = (1 + K_V) P_{\text{дин}}$ , где  $P_{\text{дин}}$  — расчетное значение скоростного напора невозмущенного набегающего потока.

Тогда формулу для определения местной истинной воздушной скорости  $V_{B.M}$  можно представить в виде

$$V_{\text{в.м}} = \sqrt{2gRT_H \left(\frac{k}{k-1}\right) \times \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0}{2P_0 T_H} (1 + K_V) V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}, \quad (8)$$

где  $K_V$  — безразмерный коэффициент связи местной воздушной скорости  $V_{\text{в.м}}$ , измеренной ионно-меточным датчиком в месте установки на фюзеляже самолета, и истинной воздушной скорости движения самолета относительно окружающей воздушной среды, который зависит от параметров полета и определяется при летных испытаниях для характерных режимов полета самолета.

Методическую аэродинамическую погрешность  $\Delta V_{\text{в.а}}$  измерения истинной воздушной скорости в месте установки ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости можно оценить выражением

$$\Delta V_{\text{в.а}} = \sqrt{2gRT_H \left(\frac{k}{k-1}\right) \times \left[ \left(1 + \frac{(1 + K_V)\rho_0 T_0}{2P_0 T_H} V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} - \sqrt{2gRT_H \left(\frac{k}{k-1}\right) \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0}{2P_0 T_H} V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}. \quad (9)$$

Как показали расчеты, значения методической аэродинамической погрешности  $\Delta V_{\text{в.а}}$  канала истинной воздушной скорости в месте установки ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости для значения  $K_V = 0,05$  в диапазоне высот от 0 до 11 000 м при изменении скорости полета от 50 до 1200 км/ч изменяется от 0,34 м/с (1,2 км/ч) до 6,25 м/с (22,5 км/ч); при значении  $K_V = 0,02$  изменяется от 0,14 м/с (0,5 км/ч) до 2,53 м/с (9,1 км/ч), при значении  $K_V = 0,01$  изменяется от 0,07 м/с (0,25 км/ч) до 1,27 м/с (4,6 км/ч).

Истинная воздушная скорость  $V_B$  полета самолета определяется выражением [12]

$$V_B = \sqrt{2gRT_H \left(\frac{k}{k-1}\right) \left[ \left(\frac{P_{\text{дин}}}{P_H} + 1\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}, \quad (10)$$

которое позволяет получить неявную, но однозначную связь истинной воздушной скорости  $V_B$  и абсолютной температуры  $T_H$  воздуха на высоте полета  $H$  вида [7]

$$T_H = \frac{V_B^2}{2gR \left(\frac{k}{k-1}\right) \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0}{2P_0 T_H} V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}. \quad (11)$$

Температура наружного воздуха  $T_{\text{HM}}$ , определяемая по значению истинной воздушной скорости  $V_{\text{в.м}}$ , измеренной ионно-меточным датчиком, будет равна

$$T_{\text{HM}} = \frac{2gRT_H \left(\frac{k}{k-1}\right) \times \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0}{2P_0 T_H} (1 + K_V) V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}{2gR \left(\frac{k}{k-1}\right) \times \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0}{2P_0 T_H} (1 + K_V) V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} = T_H. \quad (12)$$

Следовательно, методическая аэродинамическая погрешность измерения температуры наружного воздуха системы воздушных сигналов дозвукового самолета с неподвижными невыступающими приемниками потока на основе ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости отсутствует.

Аналогично приборная скорость полета и число Маха, определяемые соотношениями [7]

$$V_{\text{пр}} = \sqrt{2gRT_0 \left(\frac{k}{k-1}\right) \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0 P_H}{2P_0^2 T_H} V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}; \quad (13)$$

$$M = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0}{2P_0 T_H} V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}, \quad (14)$$

вычисляются по истинной воздушной скорости  $V_{\text{в.м}}$ , измеренной ионно-меточным датчиком, с методическими аэродинамическими погрешностями

$$V_{\text{пр.м}} = \sqrt{\frac{2gRT_0 \left(\frac{k}{k-1}\right) \times \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0 P_H}{2P_0^2 T_H} (1 + K_V) V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}{k-1}} = V_{\text{пр}} + \Delta V_{\text{пр.а}},$$

где

$$\Delta V_{\text{пр.а}} = \sqrt{\frac{2gRT_0 \frac{k}{k-1} \times \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0 P_H}{2P_0^2 T_H} (1 + K_V) V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}{k-1}} - \sqrt{\frac{2gRT_0 \frac{k}{k-1} \times \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0 P_H}{2P_0^2 T_H} V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}{k-1}}; \quad (15)$$

$$M_{\text{м}} = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0}{2P_0 T_H} (1 + K_V) V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} = M + \Delta M_{\text{а}},$$

где

$$\Delta M_{\text{а}} = \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0}{2P_0 T_H} (1 + K_V) V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]} - \sqrt{\frac{2}{k-1} \left[ \left(1 + \frac{\rho_0 T_0}{2P_0 T_H} V_B^2\right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right]}, \quad (16)$$

где  $\Delta V_{\text{пр.а}} = V_{\text{пр.м}} - V_{\text{пр}}$  и  $\Delta M_{\text{а}} = M_{\text{м}} - M$  — методические аэродинамические погрешности определения приборной скорости и числа Маха по информации ионно-меточного датчика, установленного на фюзеляже самолета.

Как показывают расчеты, значения методической аэродинамической погрешности  $\Delta V_{\text{пр.а}}$  канала приборной скорости, обусловленной отличием местной истинной воздушной скорости  $V_{\text{в.м}}$  от истинной воздушной скорости  $V_{\text{в}}$  невозмущенного набегающего потока, зависит от высоты и скорости полета. При  $K_V = 0,01$ ,  $H = 0$  и  $V_{\text{в}} = 50$  км/ч  $\Delta V_{\text{пр.а}} = 0,07$  м/с (0,252 км/ч), при  $V_{\text{в}} = 1200$  км/ч  $\Delta V_{\text{пр.а}} = 1,27$  м/с (4,6 км/ч).

При  $K_V = 0,01$ ,  $H = 11\,000$  м и  $V_{\text{в}} = 50$  км/ч —  $\Delta V_{\text{пр.а}} = 0,1$  м/с (0,36 км/ч), при  $V_{\text{в}} = 1200$  км/ч —  $\Delta V_{\text{пр.а}} = 1,41$  м/с (5,1 км/ч). При  $K_V = 0,02$  и  $K_V = 0,05$  в исследуемом диапазоне высот и скоростей погрешности  $\Delta V_{\text{пр.а}}$  пропорционально увеличиваются.

Как показывают расчеты, значения методической аэродинамической погрешности  $\Delta M_{\text{а}}$  канала числа Маха, обусловленной отличием местной истинной воздушной скорости  $V_{\text{в.м}}$  в месте расположения ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости от истинной воздушной скорости  $V_{\text{в}}$  невозмущенного набегающего потока, также не зависит от высоты полета и при  $K_V = 0,01$  изменяется от  $\Delta M_{\text{а}} = 0$  при  $V_{\text{в}} = 50$  км/ч до  $\Delta M_{\text{а}} = 0,004$  при  $V_{\text{в}} = 1200$  км/ч. При  $K_V = 0,02$  методическая аэродинамическая погрешность  $\Delta M_{\text{а}}$  в исследуемом диапазоне скоростей изменяется от  $\Delta M_{\text{а}} = 0$  до  $\Delta M_{\text{а}} = 0,008$ .

### Заключение

Таким образом, искажение невозмущенного воздушного потока вблизи фюзеляжа в месте установки ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости приводит к дополнительным методическим аэродинамическим погрешностям измерительных каналов системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником потока, которые необходимо учитывать при тарировке системы.

Для исключения влияния угла скольжения на работу канала угла атаки на самолете необходимо использовать два ионно-меточных датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости, устанавливаемых на правом и левом сторонах фюзеляжа, при этом показания выходных сигналов по углу атаки обоих датчиков усредняются, снижая случайную составляющую погрешности измерения. Аналогично усредняются и выходные сигналы по другим высотно-скоростным параметрам, уменьшая случайную погрешность их измерения. Для измерения угла скольжения еще один ионно-меточный датчик располагается в азимутальной плоскости рыскания. При этом использование трех неподвижных невыступающих приемников потока решает задачу резервирования измерительных каналов и повышения точности и надежности работы

системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником потока, построенной на основе ионно-меточного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости.

#### Список литературы

1. **Практическая** аэродинамика маневренных самолетов / Под ред. Н. М. Лысенко. М.: Воениздат, 1977. 439 с.
2. **Филатов Г. А., Пуминова Г. С., Сильвестров П. В.** Безопасность полетов в возмущенной атмосфере. М.: Транспорт, 1992. 272 с.
3. **Котик М. Г., Филиппов В. В.** Полет на предельных режимах. М.: Воениздат, 1977. 239 с.
4. **Алексеев Н. В., Вожаев Е. С., Кравцов В. Г.** и др. Системы измерения воздушных сигналов нового поколения // Авиакосмическое приборостроение. 2003. № 8. С. 31–36.
5. **Солдаткин В. М.** Методы и средства измерения аэродинамических углов летательного аппарата. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2001. 448 с.
6. **Патент РФ** на изобретение № 2580208 С1, МПК G01P 5/00, G01C 1/12. Меточный датчик аэродинамического угла и истинной воздушной скорости / Солдаткин В. М., Ганеев Ф. А.,

Солдаткина Е. С., Макаров Н. Н., Деревянкин В. П., Крылов Д. Л. Заявл. 10.12.2014. Заявка № 2014150131/28. Оpubл. 10.04.2016. Бюл. № 10.

7. **Солдаткин В. М., Солдаткин В. В., Крылов Д. Л.** Теоретические основы построения системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником потока // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 7. С. 495–502.

8. **Ганеев Ф. А., Солдаткин В. М.** Ионно-меточный датчик аэродинамического угла и воздушной скорости с логотметрическими информативными сигналами и интерполяционной схемой обработки // Известия вузов. Авиационная техника. 2010. № 3. С. 46–50.

9. **Клюев Г. И., Макаров Н. Н., Солдаткин В. М., Ефимов И. П.** Измерители аэродинамических параметров летательных аппаратов: Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во Ульяновск. гос. техн. ун-та, 2005. 590 с.

10. **Харин Е. Г., Копылов И. А.** Технология летных испытаний бортового оборудования летательных аппаратов с применением комплекса бортовых траекторных измерений. М.: МАИ-ПРИНТ, 2012. 360 с.

11. **Кравцов В. Г., Алексеев Н. В.** Аэрметрия высотно-скоростных параметров летательных аппаратов // Приборы и системы: Управление, контроль, диагностика. 2000. № 8. С. 47–50.

12. **Ледяев В. В., Соколов В. И.** Математические аспекты теории аэрметрии ВСП // Приборы и системы: Управление, контроль, диагностика. 2000. № 8. С. 50–54.

## Research of Methodological Errors of the Air Data System of Aircraft with Stationary Included Receiver of Incoming Air Flow

V. M. Soldatkin, w-soldatkin@mail.ru, V. V. Soldatkin, w-soldatkin@mail.ru,

Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev-KAI, Kazan, 420111, Russian Federation

Corresponding author: **Soldatkin Vladimir M.**, D.Sc., Professor, Head of Chair, Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev-KAI, Kazan, 420111, Russian Federation, e-mail: w-soldatkin@mail.ru

Accepted on March 03, 2019

#### Abstract

*It is shown that the known limitations on the measurement of air parameters on board the helicopter due to significant aerodynamic disturbances introduced by inductive flows of vortex column of main rotor. This determines the need to create the means of measurement, taking into account the aerodynamics and dynamics of the helicopter flight. The known direction of overcoming these limitations is the use for measuring the information of aerodynamic field of vortex column of main rotor and its perception by means of the stationary multi-functional aerometric receiver. However, the need to protect a large number of full-pressure tubes installed in the flow channel of the multifunctional aerometric receiver, strict requirements for the identity and stability of the characteristics of the large number aerometric channels, complicate the design, reduce reliability, increase cost, inhibit the use of the air parameters measurement system on helicopters of various classes and purposes. Principles of construction, functional scheme, features of perception of primary information of measuring system of air parameters of the helicopter with the stationary receiver of a stream, ion-label and aerometric measuring channels are showed. Algorithms for processing primary information at various stages and flight modes, including: in the parking lot before the launch of the power plant and when rotating the rotor, when taxiing and maneuvering on the earth's surface, on takeoff and landing modes and when flying at low speeds, at flight speeds, when the stationary receiver of primary information leaves the zone of the vortex column of the rotor using ion-label and aerometric measuring channels, are presented. It is shown that the proposed approaches to the construction, models and algorithms for processing the primary information of the measuring system air parameters of helicopter with ion-label and aerometric measurement channels allow to determine the speed and direction of the wind vector, altitude-velocity parameters of motion relative to the environment and atmospheric parameters in a wide range of helicopter operation, which determines its competitive advantages in solving problems of piloting and provide the flight safety of helicopters of different classes and purposes.*

**Keywords:** helicopter, air parameters, measurement, system, stationary receiver, ion-label and aerometric measurement channels, functional diagram, design features, algorithms of information processing

**Acknowledgements:** Work performed under grant of the Russian Foundation for Basic Research № 18-08-00264.

For citation:

**Soldatkin V. M., Soldatkin V. V.** Research of Methodological Errors of the Air Data System of Aircraft with Stationary Included Receiver of Incoming Air Flow, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 20, no. 6, pp. 504—512.

DOI: 10.17587/mau.20.504-512

### References

1. **Lysenko N. M.** ed. Practical aerodynamics maneuverable aircraft, Moscow, Voenizdat, 1977, 439 p. (in Russian).
2. **Filatov G. A., Puminova G. S., Silvestrov P. V.** Flight safety in a disturbed atmosphere, Moscow, Transport, 1992, 272 p. (in Russian).
3. **Kotik M. G., Filippov V. V.** Flying on the limit modes, Moscow, Voenizdat, 1977, 239 p. (in Russian).
4. **Alekseev N. V., Vozhdaev E. S., Kravcov V. G. i dr.** *Aviakosmicheskoe priborostroenie*, 2003, no. 8, pp. 31—36 (in Russian).

5. **Soldatkin V. M.** Methods and means of measuring the aerodynamic angles of the aircraft, Kazan', Publishing house of Kazan. gos. tehn. un-t, 2001, 448 p. (in Russian).

6. **Patent** RF na izobretenie № 2580208 S1, MPK G01R 5/00, G01S 1/12. *Accuracy sensor of aerodynamic angle and true airspeed*, Soldatkin V. M., Ganeev F. A., Soldatkina E. S., Makarov N. N., Derevjankin V. P., Krylov D. L. Zjavl. 10.12.2014. Zjavka № 2014150131/28. Opubl. 10.04.2016. Bjul. № 10 (in Russian).

7. **Soldatkin V. M., Soldatkin V. V., Krylov D. L.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 7, pp. 495—502 (in Russian).

8. **Ganeev F. A., Soldatkin V. M.** *Izvestija Vuzov. Aviacionnaja Tehnika*, 2010, no. 3, pp. 46—50 (in Russian).

9. **Kljuev G. I., Makarov N. N., Soldatkin V. M., Efimov I. P.** Measuring aerodynamic parameters of aircraft, Ul'janovsk, Publishing house of Ul'janovsk. gos. tehn. un-t, 2005, 590 p. (in Russian).

10. **Harin E. G., Kopylov I. A.** Technology of flight tests of onboard equipment of aircraft using a complex of onboard trajectory measurements, Moscow, MAI-PRINT, 2012, 360 p. (in Russian).

11. **Kravcov V. G., Alekseev N. V.** *Pribory i Sistemy: Upravlenie, Kontrol', Diagnostika*, 2000, no. 8, pp. 47—50 (in Russian).

12. **Ledjaev V. V., Sobolev V. I.** *Pribory i Sistemy: Upravlenie, Kontrol', Diagnostika*, 2000, no. 8, pp. 50—54 (in Russian).



20—22 ноября 2019 г.

## XV Международная научно-практическая конференция «ЭЛЕКТРОННЫЕ СРЕДСТВА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ» XV International Scientific-practical Conference Electronic instrumentation and control systems:

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

### СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ

1. Радиотехнические и телекоммуникационные системы
2. Нанoeлектроника СВЧ. Интеллектуальные системы проектирования, автоматизация проектирования электронных устройств и систем
3. Нанотехнологии в электронике
4. Антенны и микроволновые устройства
5. Приборы и методы контроля
6. Нелинейная оптика
7. Интеллектуальная силовая электроника
8. Плазменная электроника
9. Автоматизация и оптимизация систем управления и обработки информации
10. Информационная безопасность
11. Информационные технологии в управлении и принятии решений
12. Информационные технологии в обучении
13. Видеоинформационные технологии и цифровое телевидение
14. Робототехника и мехатроника
15. Математическое моделирование в естественных и технических науках
16. Электронное государство

Сайт конференции <http://www.tusur.ru/ru/science/events/conferences/>

### Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5510, (499) 269-5397

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *Е. В. Комиссарова*.

Сдано в набор 03.06.2019. Подписано в печать 11.07.2019. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН819. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций  
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".  
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: [www.aov.ru](http://www.aov.ru)