ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 20
2019
№ 5

Издается с 2000 года ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online) DOI 10.17587/issn.1684-6427

СОДЕРЖАНИЕ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу: http://novtex.ru/mech, e-mail: mech@novtex.ru

THEORETICAL AND APPLIED SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL

Vol. 20
2019
No. 5

MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000 ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online) DOI 10.17587/issn.1684-6427

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospectives development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

Information about the journal is available online at:
http://novtex.ru/mech.html, e-mail: mech@novtex.ru

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 681.51 DOI: 10.17587/mau.20.259-265

В. Т. Ле, аспирант, visaosang89@gmail.com,
М. М. Коротина, инженер, korotina.marina@gmail.com,
А. А. Бобцов, д-р техн. наук, директор, зав. кафедрой, проф., bobtsov@mail.ru,
С. В. Арановский, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., s.aranovskiy@gmail.com,
К. Д. Во, аспирант, cuoi.di.em89@gmail.com,
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, г. Санкт-Петербург

Идентификация линейно изменяющихся во времени параметров нестационарных систем[1]

Рассматривается задача синтеза алгоритма идентификации неизвестных параметров линейных нестационарных объектов управления. Предполагается, что измеряются только выходная переменная объекта и сигнал управления (но не их производные или переменные состояния), а неизвестные параметры являются линейными функциями времени или их производные представляют собой кусочно-постоянные сигналы. Допускается, что производные нестационарных параметров являются неизвестными постоянными числами на некотором интервале времени, который, в свою очередь, также не определен. Данное допущение относительно неизвестных параметров не является математической абстракцией, поскольку параметры большинства электромеханических систем в процессе работы изменяются относительно известных номинальных значений. Например, линейному изменению подвержено сопротивление ротора, которое может быть связано с температурными изменениями в электрическом двигателе, возникающем в процессе его функционирования. С использованием линейных стационарных устойчивых фильтров в данной работе предлагается итеративный алгоритм параметризации линейного нестационарного объекта управления, приводящий к типовой линейной регрессионной модели, включающей как переменные, так и постоянные (на некотором интервале времени) неизвестные параметры. Для этой модели применяется метод динамического расширения регрессора (DREM), обеспечивающий при условии незатухающего возбуждения сходимость оценок настраиваемых параметров к их истинным значениям при условии, что интервал времени, для которого производная каждого из параметров является константой, равен бесконечности. В противном случае (т. е. на любом конечном интервале) обеспечивается сходимость оценок в некоторую область. В отличие от известных градиентных подходов использование метода динамического расширения регрессора позволяет за счет увеличения коэффициентов алгоритма обеспечить улучшение быстродействия и, как следствие, увеличение точности сходимости оценок к истинным значениям. Дополнительно метод динамического расширения регрессора обеспечивает получение монотонности процессов, что для ряда технических приложений может быть крайне востребованным.

Ключевые слова: *идентификация, линейные системы, нестационарные объекты, параметризация, линейная регрессионная модель, монотонность процессов*

Введение

Проблема синтеза закона управления для линейных нестационарных систем с неизвестными параметрами до сих пор является нетривиальной задачей. По мнению авторов данной статьи, единых методов управления линейными системами с неизвестными переменными параметрами не существует, и каждый из подходов сфокусирован на решении задачи управления при некоторых допущениях на объект (см., например, работы [1—12]). Широко распространенные методы управления нестационарными системами с сильной обратной связью (см., например, работы [1, 2]) допускают, что линейная стационарная система представлена в некоторой канонической форме вида

$$x = Ax + bu + \theta(t)y;$$

$$y = c^{\mathrm{T}}x,$$

[1]Статья написана при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 074-11-2018-029 от 13 июля 2018 г. "Создание высокотехнологичного производства роботизированных дефектоскопов для контроля труднодоступных сварных соединений и металлоконструкций опасных производственных объектов в промышленности, энергетике и ЖКХ".

где $x(t) \in R^n$ — неизмеряемый вектор переменных состояния модели; A, b и c — неизвестные постоянные матрицы размерности, соответственно, $n \times n$, $n \times 1$ и $n \times 1$; $\theta(t) \in R^n$ — вектор неизвестных переменных параметров; $y(t) \in R$ — выходная переменная системы. В предположении, что передаточная функция $H(p) = c^{\mathrm{T}}(pI - A)^{-1}b = b(p)/a(p)$ — минимально-фазовая (т. е. полином $b(p)$ — гурвицев), в работах [1, 2] синтезируется специальное динамическое звено размерности $\rho - 1$ (где ρ — относительная степень $H(p) = b(p)/a(p)$), с помощью которого при достаточно больших коэффициентах обратной связи обеспечивается стабилизация нестационарного объекта.

Легко видеть, что рассматриваемый класс нестационарных объектов [1, 2] имеет как минимум два ограничения: во-первых, полином $b(p)$ — гурвицев; во-вторых, вектор неизвестных параметров $\theta(t)$ умножается на измеряемую выходную переменную $y(t)$, а не на неизмеряемый вектор переменных состояния $x(t)$.

В данной статье рассматриваются нестационарные системы вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + b(t)u(t);$$
$$y(t) = c^{\mathrm{T}}(t)x(t),$$

в которых параметры матриц $A(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ линейно изменяются во времени. Отметим, что объекты данного вида, в отличие от рассмотренных в работах [1—12], не имеют ограничений по модели, но имеют более жесткие допущения относительно неизвестных параметров, т. е. они являются линейными функциями времени. Линейное изменение параметров во времени, строго говоря, не является математической абстракцией. Например, параметры большинства электромеханических систем в процессе работы претерпевают изменения относительно номинальных значений. В частности, линейному изменению подвержено сопротивление ротора, которое вызвано нагревом электрического двигателя в процессе его функционирования.

Предлагаемый в статье подход к идентификации параметров нестационарных систем базируется на новом результате [13, 14], обеспечивающем оценку нестационарных параметров для линейной регрессионной модели.

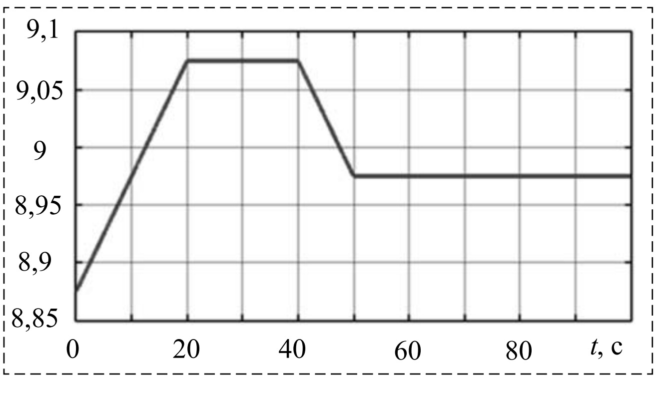


График изменения неизвестного параметра $\theta_i(t)$ во времени
Graph of change of unknown parameter $\theta_i(t)$ in time

Постановка задачи

Рассмотрим линейную нестационарную систему вида

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \theta_{n+m}(t)y^{(n-1)} + \ldots + \theta_{m+2}(t)\dot{y} + \theta_{m+1}(t)y = \\ = \theta_m(t)u^{(m)} + \ldots + \theta_1(t)\dot{u} + \theta_0(t)u, \end{aligned} \tag{1}$$

где $y = y(t)$ и $u = u(t)$ — известные и измеряемые функции времени; числа m и n предполагаются известными и $n > m$; производные сигналов $y = y(t)$ и $u = u(t)$ не измеряются; $\theta_i(t)$ — неизвестные линейно изменяющиеся во времени функции, $i = 0, ..., n + m$.

Относительно $\theta_i(t)$ будем допускать, что они изменяются по следующему закону:

$$\dot{\theta}_i = \beta_i = \begin{cases} \beta_{i,1} \text{ при } 0 \leqslant t < t_{i,2}; \\ \beta_{i,2} \text{ при } t_{i,2} \leqslant t < t_{i,3}; \\ \vdots \\ \beta_{i,q} \text{ при } t_{i,q} \leqslant t < t_{i,q+1}, \end{cases}$$

где $\beta_{i,j}$ и $t_{i,j}$ — неизвестные числа, $j = 1, ..., q$, причем $t_{i,j}$ определяет моменты времени, когда в j-й раз меняется скорость вариации параметра $\theta_i(t)$.

Графическая интерпретация данного допущения представлена на рисунке, где в качестве наглядного примера был выбран закон

$$\dot{\theta}_i = \beta_i = \begin{cases} 0{,}01 \text{ при } 0 \leqslant t < 20; \\ 0 \text{ при } 20 \leqslant t < 40; \\ -0{,}01 \text{ при } 40 \leqslant t < 50; \\ 0 \text{ при } 50 \leqslant t < 100. \end{cases}$$

Ставится задача синтеза алгоритма идентификации

$$\hat{\theta}(t) = f(y, u), \tag{2}$$

обеспечивающего асимптотическую сходимость функции $\hat{\theta}(t)$ к вектору неизвестных параметров $\theta(t) = \mathrm{col}\{\theta_{n+m}, \theta_{n+m-1}, \ldots, \theta_m, \theta_{m-1}, \ldots, \theta_0\}$ на интервале времени $\Delta t = t_{i,\,j+1} - t_{i,\,j}$ при $\Delta t \to \infty$, или

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \tilde{\theta}(\Delta t) = 0, \tag{3}$$

где $\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta(t)$.

Замечание 1. Следует отметить, что в асимптотически устойчивых системах сходимость обеспечивается только при стремлении переменной времени к бесконечности. Таким образом, обеспечить получение нулевых ошибок оценивания на любом конечном интервале (без привлечения методов с асимптотически стремящимся к бесконечности коэффициентом усиления или разрывностью в производных) невозможно. С учетом этого замечания можно отметить, что цель (3) предполагает, что по мере увеличения длительности интервала между переключениями до бесконечности ошибка оценивания будет асимптотически стремиться к нулю.

Поскольку описание решения задачи (2) для системы общего вида (1) представляет собой сложную итеративную процедуру, то для облегчения понимания предлагаемого ниже подхода рассмотрим более простой случай объекта управления третьего порядка:

$$\dddot{y} + \theta_4(t)\ddot{y} + \theta_3(t)\dot{y} + \theta_2(t)y = \theta_1(t)\dot{u} + \theta_0(t)u. \tag{4}$$

Следует отметить, что анализ модели третьего порядка не сужает области применения данного подхода, но лишь показывает суть итеративной процедуры синтеза алгоритма идентификации.

Параметризация объекта управления

Рассмотрим объект управления (4). Применяя для него оператор $1/(p+1)^3$, получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{(p+1)^3}\dddot{y} + \frac{1}{(p+1)^3}\theta_4\ddot{y} + \frac{1}{(p+1)^3}\theta_3\dot{y} + \\ + \frac{1}{(p+1)^3}\theta_2 y = \frac{1}{(p+1)^3}\theta_1\dot{u} + \frac{1}{(p+1)^3}\theta_0 u.\end{gathered} \tag{5}$$

Рассмотрим отдельно каждое из слагаемых уравнения (5) на интервале времени $t_{i,\,j}$:

$$r = \frac{1}{(p+1)^3}\dddot{y} = \frac{p^3}{(p+1)^3}y; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(p+1)^3}\theta_4\ddot{y} = \frac{1}{(p+1)^2}\frac{1}{(p+1)}\theta_4\ddot{y} = \\ &= \frac{1}{(p+1)^2}\left(\theta_4\frac{1}{(p+1)}\ddot{y} - \frac{1}{(p+1)}\left(\dot{\theta}_4\frac{1}{(p+1)}\ddot{y}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{(p+1)^2}\left(\theta_4\frac{p}{(p+1)}\dot{y} - \beta_4\frac{p^2}{(p+1)^2}y\right) = \\ &= \frac{1}{(p+1)}\left(\frac{1}{(p+1)}\left(\theta_4\frac{p}{(p+1)}\dot{y}\right) - \beta_4\frac{p^2}{(p+1)^3}y\right) = \\ &= \frac{1}{(p+1)}\left(\theta_4\frac{p^2}{(p+1)^2}y - \frac{1}{(p+1)}\left(\dot{\theta}_4\frac{p^2}{(p+1)^2}y\right) - \right. \\ &\left. -\beta_4\frac{p^2}{(p+1)^3}y\right) = \theta_4\frac{p^2}{(p+1)^3}y - \frac{1}{(p+1)}\times \\ &\times\left(\dot{\theta}_4\frac{p^2}{(p+1)^3}y\right) - \beta_4\frac{p^2}{(p+1)^4}y - \beta_4\frac{p^2}{(p+1)^4}y = \\ &= \theta_4\frac{p^2}{(p+1)^3}y - 3\beta_4\frac{p^2}{(p+1)^4}y = \theta_4\varphi_1 + \beta_4\varphi_2;\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(p+1)^3}\theta_3\dot{y} = \frac{1}{(p+1)^2}\left(\theta_3\frac{p}{(p+1)}y\right) - \\ &-\beta_3\frac{p}{(p+1)^4}y = \theta_3\frac{p}{(p+1)^3}y - 3\beta_3\frac{p}{(p+1)^4}y = \\ &= \theta_3\varphi_3 + \beta_3\varphi_4;\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(p+1)^3}\theta_2 y = \\ &= \frac{1}{(p+1)^2}\left(\theta_2\frac{1}{(p+1)}y\right) - \beta_2\frac{1}{(p+1)^4}y = \\ &= \theta_2\frac{1}{(p+1)^3}y - 3\beta_2\frac{1}{(p+1)^4}y = \theta_2\varphi_5 + \beta_2\varphi_6;\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{(p+1)^3}\theta_1\dot{u} = \theta_1\frac{p}{(p+1)^3}u - 3\beta_1\frac{p}{(p+1)^4}u = \\ = \theta_1\varphi_7 + \beta_1\varphi_8;\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{(p+1)^3}\theta_0 u = \theta_0\frac{1}{(p+1)^3}u - 3\beta_0\frac{1}{(p+1)^4}u = \\ = \theta_0\varphi_9 + \beta_0\varphi_{10},\end{gathered} \tag{11}$$

где в уравнениях (7)—(11) было использовано соотношение

$$\frac{\alpha}{p+\alpha}\chi_1\chi_2 = \chi_1\frac{\alpha}{p+\alpha}\chi_2 - \frac{1}{p+\alpha}\left(\dot{\chi}_1\frac{\alpha}{p+\alpha}\chi_2\right)$$

(см., например, [15]).

Таким образом, подставляя в соотношение (4) уравнения (6)—(11), получаем линейную регрессионную модель вида

$$\begin{aligned} r = \theta_4\varphi_1 + \beta_4\varphi_2 + \theta_3\varphi_3 + \beta_3\varphi_4 + \\ + \theta_2\varphi_5 + \beta_2\varphi_6 + \theta_1\varphi_7 + \beta_1\varphi_8 + \theta_0\varphi_9 + \beta_0\varphi_{10}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из представленной процедуры параметризации модели (4) можно видеть, что с использованием оператора $1/(p + 1)^n$ уравнение (1) можно привести к виду, аналогичному (12):

$$r = \theta^{\mathrm{T}}\omega + \beta^{\mathrm{T}}\vartheta, \quad (13)$$

где $\theta = \mathrm{col}\{\theta_{n+m}, \ldots, \theta_m, \theta_{m-1}, \ldots, \theta_0\}$ и $\beta = \mathrm{col}\{\beta_{n+m}, \ldots, \beta_m, \beta_{m-1}, \ldots, \beta_0\}$ — соответственно векторы неизвестных переменных и постоянных (на интервале $t_{i,j}$) параметров, а ω и ϑ — известные векторы.

Замечание 2. Заметим, что итеративная процедура параметризации (6)—(11) может показаться крайне громоздкой, но, возможно, с методической точки зрения более прозрачной. Тем не менее алгоритм (6)—(11) может быть заменен на более емкий и общий. Рассмотрим фильтр вида (см., например, работу [15])

$$W(p) = L^{\mathrm{T}}(pI - F)^{-1}G + d.$$

Тогда для функций ω, θ, где θ — дифференцируема, выполняется равенство

$$W(p)[\theta^{\mathrm{T}}\omega] = \theta^{\mathrm{T}}W(p)[\omega] - W_c(p)[(W_b(p)[\omega^{\mathrm{T}}])]\dot{\theta},$$

где $W_c(p) = L^{\mathrm{T}}(pI - F)^{-1}$ и $W_b(p) = (pI - F)^{-1}G$.

Для иллюстрации применения данного обобщения рассмотрим слагаемое $\dfrac{1}{(p+1)^3}\theta_2 y$. Выбирая $W(p) = \dfrac{\alpha^3}{(p+\alpha)^3}$, для скалярных функций времени y и θ, где $\dot{\theta} = \beta = \mathrm{const}$, имеем

$$\frac{\alpha^3}{(p+\alpha)^3}[\theta y] = \theta\frac{\alpha^3}{(p+\alpha)^3}[y] - \beta W_c(p)[W_b[y]],$$

где $W_c(p)[W_b[y]] = \dfrac{3\alpha^3}{(p+\alpha)^4}[y]$, откуда получаем

$$\frac{\alpha^3}{(p+\alpha)^3}[\theta y] = \theta\frac{\alpha^3}{(p+\alpha)^3}[y] - \beta\frac{3\alpha^3}{(p+\alpha)^4}[y],$$

и для случая $\alpha = 1$ имеем уравнение, аналогичное (9).

Идентификация параметров

Для идентификации параметров $\theta = \mathrm{col}\{\theta_{n+m}, \ldots, \theta_m, \theta_{m-1}, \ldots, \theta_0\}$ и $\beta = \mathrm{col}\{\beta_{n+m}, \ldots, \beta_m, \beta_{m-1}, \ldots, \beta_0\}$ воспользуемся методом динамического расширения регрессора (DREM) [16].

Следуя алгоритму [14], применительно к регрессионной модели (13) рассмотрим $n + m + 1$ фильтров вида $H_k(p) = \dfrac{\lambda_k}{p+\lambda_k}$:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_k}{p+\lambda_k}r &= \frac{\lambda_k}{p+\lambda_k}\theta^{\mathrm{T}}\omega + \frac{\lambda_k}{p+\lambda_k}\beta^{\mathrm{T}}\vartheta = \\ &= \theta^{\mathrm{T}}\frac{\lambda_k}{p+\lambda_k}\omega - \frac{1}{p+\lambda_k}\left[\dot{\theta}^{\mathrm{T}}\frac{\lambda_k}{p+\lambda_k}\omega\right] + \beta^{\mathrm{T}}\frac{\lambda_k}{p+\lambda_k}\vartheta = \\ &= \theta^{\mathrm{T}}\frac{\lambda_k}{p+\lambda_k}\omega - \beta^{\mathrm{T}}\frac{\lambda_k}{(p+\lambda_k)^2}\omega + \beta^{\mathrm{T}}\frac{\lambda_k}{p+\lambda_k}\vartheta, \end{aligned}$$

где $\lambda_k > 0$.

Введем обозначения $z_k = \dfrac{\lambda_k}{p+\lambda_k}r$, $\varphi_k = \dfrac{\lambda_k}{p+\lambda_k}\omega$ и $\xi_k = -\dfrac{\lambda_k}{(p+\lambda_k)^2}\omega + \dfrac{\lambda_k}{p+\lambda_k}\vartheta$. Сформируем матрицы $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n+m+1} \end{bmatrix}$, $\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1^{\mathrm{T}} \\ \varphi_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \varphi_{n+m+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$, $\Xi = \begin{bmatrix} \xi_1^{\mathrm{T}} \\ \xi_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \xi_{n+m+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ и запишем регрессионную модель в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} r \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^{\mathrm{T}} \\ \Phi \end{bmatrix}\theta + \begin{bmatrix} \vartheta^{\mathrm{T}} \\ \Xi \end{bmatrix}\beta. \quad (14)$$

Сформируем матрицу $T = [\omega\det\Phi - \omega\omega^{\mathrm{T}}\mathrm{adj}\Phi]$. Умножим слева уравнение (14) на матрицу T:

$$T\begin{bmatrix} r \\ Z \end{bmatrix} = [\omega\omega^{\mathrm{T}}\det\Phi - \omega\omega^{\mathrm{T}}\mathrm{adj}\,\Phi \cdot \Phi]\theta + T\begin{bmatrix} \vartheta^{\mathrm{T}} \\ \Xi \end{bmatrix}\beta.$$

Поскольку $\mathrm{adj}\Phi \cdot \Phi = \det\Phi \cdot I$, то $T\begin{bmatrix} y \\ Z \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} 0 \\ \Xi \end{bmatrix}\beta$.

Обозначим $Q = T\begin{bmatrix} y \\ Z \end{bmatrix}$ и $N = T\begin{bmatrix} 0 \\ \Xi \end{bmatrix}$.

Тогда

$$Q = N\beta. \quad (15)$$

В силу структуры матрицы T ($\mathrm{rank} T \leqslant 1$) получаем, что $\mathrm{rank} N \leqslant 1$. Тогда из соотношения (15) имеем

$$q(t) = \varpi^{\mathrm{T}}(t)\beta,$$

где $q \in R^l$ и $\varpi \in \mathrm{R}^{n+m+1}$ — измеряемые сигналы.

Следуя технологии DREM, введем $n + m$ блоков запаздывания с значениями τ_μ, $\mu = \overline{1, n+m}$, и получим матричное уравнение вида

$$Y_e = A_e\beta, \tag{16}$$

где $Y_e = \begin{bmatrix} q(t) \\ q(t-\tau_1) \\ \vdots \\ q(t-\tau_{n+m}) \end{bmatrix}$, $A_e = \begin{bmatrix} \varpi^{\mathrm{T}}(t) \\ \varpi^{\mathrm{T}}(t-\tau_1) \\ \vdots \\ \varpi^{\mathrm{T}}(t-\tau_{n+m}) \end{bmatrix}$.

Умножая уравнение (16) на $\mathrm{adj} A_e$ (т. е. союзную матрицу для A_e), получаем

$$Y(t) = \delta(t)\beta, \tag{17}$$

где $\delta = \det A_e \in \mathrm{R}^1$ — определитель матрицы A_e, $Y = \mathrm{adj} A_e \cdot Y_e$, $Y_i = \delta\beta_i$.

Для оценивания, соответственно, векторов β и θ будем использовать следующие алгоритмы:

$$\dot{\hat{\beta}}_i = -\gamma_i\delta(\delta\hat{\beta}_i - Y_i); \tag{18}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \hat{\beta} - \kappa\omega\omega^{\mathrm{T}}\hat{\theta} + \kappa\omega(r - \vartheta^{\mathrm{T}}\hat{\beta}), \tag{19}$$

где γ_i и κ — любые положительные числа; $\hat{\beta}_i$ и $\hat{\theta}$ — соответственно, оценки параметров β_i и θ.

Утверждение. Пусть вектор ω удовлетворяет условию незатухающего возбуждения (см., например, работы [17, 18]), и для функции $\delta(t)$ выполнено

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \int_{t_{i,j}}^{t_{i,j+1}} \delta^2(s)ds = \infty. \tag{20}$$

Тогда алгоритм (17), (18) обеспечивает решение задачи (3).

Доказательство. Сначала покажем, что алгоритм (18) обеспечивает сходимость оценок $\hat{\beta}_i$ к β_i на интервале времени $\Delta t = t_{i,j+1} - t_{i,j}$ при $\Delta t \to \infty$. Для этого рассмотрим ошибку оценивания

$$\tilde{\beta}_i = \hat{\beta}_i - \beta_i. \tag{21}$$

Дифференцируя (20), с учетом уравнения (18), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\beta}}_i &= \dot{\hat{\beta}}_i - \dot{\beta}_i = -\gamma_i\delta(\delta\beta_i - Y_i) = \\ &= -\gamma_i\delta^2\hat{\beta}_i + \gamma_i\delta Y_i = -\gamma_i\delta^2\hat{\beta}_i + \gamma_i\delta^2\beta_i = -\gamma_i\delta^2\tilde{\beta}_i. \end{aligned} \tag{22}$$

Интегрируя уравнение (22) на интервале времени $\Delta t = t_{i,j+1} - t_{i,j}$, имеем

$$\tilde{\beta}_i(\Delta t) = \tilde{\beta}_i(t_{i,j})\exp\left(-\gamma_i \int_{t_{i,j}}^{t_{i,j+1}} \delta^2(s)ds\right),$$

откуда следует $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} \tilde{\beta}_i(\Delta t) = 0$.

Теперь аналогичным образом докажем выполнения условия $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} \tilde{\theta}(\Delta t) = 0$. Дифференцируя $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\theta}} &= \hat{\beta} - \kappa\omega\omega^{\mathrm{T}}\hat{\theta} + \kappa\omega(r - \vartheta^{\mathrm{T}}\hat{\beta}) - \beta = \\ &= \tilde{\beta} - \kappa\omega\omega^{\mathrm{T}}\hat{\theta} + \kappa\omega(\omega^{\mathrm{T}}\theta + \vartheta^{\mathrm{T}}\beta - \vartheta^{\mathrm{T}}\hat{\beta}) = \\ &= \tilde{\beta} - \kappa\omega\omega^{\mathrm{T}}\hat{\theta} + \kappa\omega\omega^{\mathrm{T}}\theta + \kappa\omega\vartheta^{\mathrm{T}}\tilde{\beta} = \\ &= \tilde{\beta} - \kappa\omega\omega^{\mathrm{T}}\tilde{\theta} + \kappa\omega\vartheta^{\mathrm{T}}\tilde{\beta}. \end{aligned} \tag{23}$$

Отсюда легко показать (см., например, [19]), что при $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} \tilde{\beta}_i(\Delta t) = 0$ и выполнении условия незатухающего возбуждения для вектора ω следует $\lim\limits_{\Delta t \to \infty} \tilde{\theta}(\Delta t) = 0$.

Заключение

В статье рассмотрена процедура синтеза алгоритма идентификации для линейного нестационарного объекта вида (1). Относительно нестационарных параметров допускалось, что они линейно изменяются или их производные являются кусочно-постоянными функциями времени. Предложены алгоритмы идентификации вида (18)—(19), обеспечивающие асимптотическую сходимость по параметрам на интервале $\Delta t \to \infty$ при выполнении условия незатухающего возбуждения для вектора ω и интегрального неравенства (20) для функции $\delta(t)$.

В качестве предмета дальнейших исследований будет рассмотрено использование методологии DREM для получения скалярных уравнений не только по β_i, но и по параметрам θ_i, что позволит, как и в случае с β_i, улучшать качество настройки оценок $\hat{\beta}_i$, а также достигать их монотонности.

Список литературы

1. **Бобцов А. А., Наговицина А. Г.** Адаптивное управление по выходу линейными нестационарными объектами // Автоматика и телемеханика. 2006. № 12. С. 163—174.
2. **Бобцов А. А., Григорьев В. В., Наговицина А. Г.** Алгоритм адаптивного управления нестационарным объектом в условиях возмущения и запаздывания // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 1. С. 8—14.
3. **Цыкунов А. М.** Робастное управление нестационарными объектами // Автоматика и телемеханика. 1996. № 2. С. 117—125.
4. **Бобцов А. А., Лямин А. В., Сергеев К. А.** Синтез закона адаптивного управления для стабилизации не точно заданных нестационарных объектов // Изв. вузов. Приборостроение. 2001. № 3. С. 3—7.
5. **Никифоров В. О.** Робастная следящая система // Изв. вузов. Приборостроение. 1998. № 7. С. 13—18.
6. **Андреев Ю. Н.** Управление конечномерными линейными системами. М.: Наука, 1976. 424 с.
7. **Барабанов Н. Е.** О стабилизации линейных нестационарных систем с неопределенностью в коэффициентах // Автоматика и телемеханика. 1990. № 10. С. 30—37.
8. **Tsakalis K. S., Ioannou P. A.** Adaptive control of linear time-varying plants // Automatica. 1987. Vol. 23, N. 4. P. 459—468.
9. **Tsakalis K. S., Ioannou P. A.** Linear time varying systems: control and adaptation. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993.
10. **Zhang Y., Fidan B., Ioannou P. A.** Backstepping control of linear time-varying systems with known and unknown parameters // IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. Vol. 48, N. 11. P. 1908—1925.
11. **Первозванский А. А.** Курс теории автоматического управления. М.: Наука, 1986. 615 с.
12. **Юркевич В. Д.** Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб.: Наука, 2000. 288 с.
13. **Ле В. Т., Бобцов А. А., Пыркин А. А.** Новый алгоритм идентификации нестационарных параметров для линейной регрессионной модели // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17, № 5. С. 952—955.
14. **Ван Ц., Ле В. Т., Бобцов А. А., Пыркин А. А., Колюбин С. А.** Идентификация нестационарных параметров линейных регрессионных моделей // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12 (в печати).
15. **Ioannou P. A., Sun J.** Robust adaptive control. California: PTR Prentice-Hall, 1996.
16. **Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.** Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Trans. Automat. Control. 2016. Vol. 62, N. 7. P. 3546—3550.
17. **Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
18. **Sastry S., Bodson M.** Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness. Courier Dover Publications, 2011. 400 p.
19. **Пыркин А. А., Бобцов А. А., Ведяков А. А., Колюбин С. А.** Оценивание параметров полигармонического сигнала // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 94—114.

Identification of Linear Time-Varying Parameters of Nonstationary Systems

V. T. Le, visaosang89@gmail.com, **M. M. Korotina,** korotina.marina@gmail.com,
A. A. Bobtsov, bobtsov@mail.ru, **S. V. Aranovskiy,** s.aranovskiy@gmail.com,
Q. D. Vo, cuoi.di.em89@gmail.com,
ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: **Bobtsov Aleksei A.,** D. Sc., Director, Head the Chair,
ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation,
e-mail: bobtsov@mail.ru

Accepted November 12, 2018

Abstract

The paper considers the identification algorithm for unknown parameters of linear non-stationary control objects. It is assumed that only the object output variable and the control signal are measured (but not their derivatives or state variables) and unknown parameters are linear functions or their derivatives are piecewise constant signals. The derivatives of non-stationary parameters are supposed to be unknown constant numbers on some time interval. This assumption for unknown parameters is not mathematical abstraction because in most electromechanical systems parameters are changing during the operation. For example, the resistance of the rotor is linearly changing, because the resistance of the rotor depends on the temperature changes of the electric motor in operation mode. This paper proposes an iterative algorithm for parameterization of the linear non-stationary control object using stable LTI filters. The algorithm leads to a linear regression model, which includes time-varying and constant (at a certain time interval) unknown parameters. For this model, the dynamic regressor extension and mixing (DREM) procedure is applied. If the persistent excitation condition holds, then, in the case the derivative of each parameter is constant on the whole time interval, DREM provides the convergence of the estimates of configurable parameters to their true values. In the case of a finite time interval, the estimates convergence in a certain region. Unlike well-known gradient approaches, using the method of dynamic regressor extension and mixing allows to improve the convergence speed and accuracy of the estimates to their true values by increasing the coefficients of the algorithm. Additionally, the method of dynamic regressor extension and mixing ensures the monotony of the processes, and this can be useful for many technical problems.

Keywords: *identification, linear systems, non-stationary objects, parametrization, linear regression model, monotony of processes*

Acknowledgements: The work was written with the support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement № 074-11-2018-029, 13.07.2018, "Creation of high-tech production of robotic flaw detectors for control of hard-to-reach welded joints and metal structures of hazardous production facilities in industry, energy and housing"

For citation:

Le V. T., Korotina M. M., Bobtsov A. A., Aranovskiy S. V., Vo Q. D. Identification of Linear Time-Varying Parameters of Nonstationary Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 5, pp. 259—265.

DOI: 10.17587/mau.20.259-265

References

1. **Bobtsov A. A., Nagovitsina A. G.** *Adaptivnoe upravlenie po vyhodu linejnymi nestacionarnymi ob'ektami* (Adaptive control of linear nonstationary objects output), *Avtomatika i Telemehanika*, 2006, no. 12, pp. 163—174 (in Russian).
2. **Bobtsov A. A., Grigoryev V. V., Nagovitsina A. G.** *Algoritm adaptivnogo upravlenija nestacionarnym ob'ektom v uslovijah vozmushhenija i zapazdyvanija* (Adaptive control algorithm by nonstationary object in terms of disturbance and delay time), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2007, no. 1, pp. 8—14 (in Russian).
3. **Cykunov A. M.** *Robastnoe upravlenie nestacionarnymi ob'ektami* (Robust control of nonstationary objects), *Avtomatika i Telemehanika*, 1996, no. 2, pp. 117—125 (in Russian).
4. **Bobtsov A. A., Ljamin A. V., Sergeev K. A.** *Sintez zakona adaptivnogo upravlenija dlja stabilizacii ne tochno zadannyh nestacionarnyh ob'ektov* (Synthesis of the law of adaptive control for stabilization of not exactly specified non-stationary objects), *Izv. vuzov. Priborostroenie,* 2001, no. 3, pp. 3—7 (in Russian).
5. **Nikiforov V. O.** *Robastnaja sledjashhaja sistema* (Robust tracking system), *Izv. vuzov. Priborostroenie*, 1998, no. 7, pp. 13—18 (in Russian).
6. **Andreev Ju. N.** *Upravlenie konechnomernymi linejnymi sistemami* (Control of finite-dimensional linear systems), Moscow, Nauka, 1976, 424 p. (in Russian).
7. **Barabanov N. E.** *O stabilizacii linejnyh nestacionarnyh sistem s neopredelennost'ju v kojefficientah* (On stabilization of linear nonstationary systems with uncertainty in coefficients), *Avtomatika i Telemehanika*, 1990, no. 10, pp. 30—37 (in Russian).
8. **Tsakalis K. S., Ioannou P. A.** Adaptive control of linear time-varying plants, *Automatica*, 1987, vol. 23, no. 4, p. 459—468.
9. **Tsakalis K. S., Ioannou P. A.** Linear time varying systems: control and adaptation, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1993.
10. **Zhang Y., Fidan B., Ioannou P. A.** Backstepping control of linear time-varying systems with known and unknown parameters, *IEEE Trans. Automat. Contr*, 2003, vol. 48, no. 11, p. 1908—1925.
11. **Pervozvanskij A. A.** *Kurs teorii avtomaticheskogo upravlenija* (The course of the theory of automatic control), Moscow, Nauka, 1986, 615 p. (in Russian).
12. **Jurkevich V. D.** *Sintez nelinejnyh nestacionarnyh sistem upravlenija s raznotempovymi processami* (Synthesis of nonlinear nonstationary control systems with multi-tempo processes), SPb, Nauka, 2000, 288 p. (in Russian).
13. **Le V. T., Bobtsov A. A., Pyrkin A. A.** *Novyj algoritm identifikacii nestacionarnyh parametrov dlja linejnoj regressionnoj modeli* (New algorithm of variable parameters identification for linear regression model), *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2017, vol. 17, no. 5, pp. 952—955 (in Russian).
14. **Van C., Le V. T., Bobtsov A. A., Pyrkin A. A., Kolyubin S. A.** *Identifikacija nestacionarnyh parametrov linejnyh regressionnyh modelej*(Identification of nonstationary parameters of linear regression models), *Avtomatika i Telemehanika*, 2018, no. 12, *v pechati* (in Russian).
15. **Ioannou P. A., Sun J.** Robust adaptive control, California, PTR Prentice-Hall, 1996.
16. **Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.** Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2016, vol. 62, no. 7, pp. 3546—3550.
17. **Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L.** *Nelinejnoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* (Nonlinear and adaptive control of complex dynamic systems), SPb, Nauka, 2000, 549 p. (in Russian).
18. **Sastry S., Bodson M.** Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness, Courier Dover Publications, 2011, 400 p.
19. **Pyrkin A. A., Bobtsov A. A., Vedyakov A. A., Kolyubin S. A.** *Ocenivanie parametrov poligarmonicheskogo signala* (Estimation of polyharmonic signal parameters), *Avtomatika i Telemehanika*, 2015, no. 8, pp. 94—114 (in Russian).

УДК 681.5.03 DOI: 10.17587/mau.20.266-273

С. А. Гайворонский, канд. техн. наук, доц., saga@tpu.ru,
Т. А. Езангина, канд. техн. наук, науч. сотр., eza-tanya@yandex.ru,
И. В. Хожаев, аспирант, ivh1@tpu.ru,
Национальный исследовательский Томский политехнический университет, г. Томск,
А. А. Несенчук, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., anes@newman.bas-net.by,
Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, г. Минск

Определение вершинных полиномов для анализа степени робастной устойчивости интервальной системы[1]

Рассматривается характеристический полином интервальной системы автоматического управления, у которого коэффициенты априорно точно неизвестны или могут произвольно изменяться в заранее известных числовых пределах. При этом корни интервального характеристического полинома мигрируют по комплексной плоскости, образуя области их локализации. По границам этих областей возможно определить степень робастной устойчивости интервальной системы автоматического управления. Для ее анализа рассматривается отображение на корневую комплексную плоскость параметрического многогранника интервальных коэффициентов характеристического полинома системы управления. При этом учитывается известное свойство определения степени робастной устойчивости интервальной системы управления в вершинах этого многогранника. Для нахождения данных проверочных вершин предлагается использовать основное фазовое уравнение метода корневого годографа. Исходя из требований к расположению областей локализации полюсов системы управления проведено интервальное расширение углов от нулей и полюсов, входящих в основное фазовое уравнение. Для этого доказаны утверждения, определяющие суммы интервалов углов полюсов в случае колебательной степени робастной устойчивости интервальной системы управления. Из условий определения полюсом степени колебательной устойчивости системы получены двойные интервальные угловые неравенства, задающие диапазоны углов выхода из этого полюса всех реберных ветвей многопараметрического интервального корневого годографа. В результате проведенных исследований разработана процедура нахождения у многогранника коэффициентов характеристического полинома координат проверочных вершин и соответствующих им вершинных полиномов. Определены вершинные полиномы для анализа степени робастной колебательной устойчивости интервальных систем управления второго, третьего и четвертого порядков. Доказано утверждение для нахождения координат вершины, которая определяет степень робастной апериодической устойчивости. Приведены числовые примеры вершинного анализа степени колебательной и апериодической робастной устойчивости интервальных систем управления третьего и четвертого порядков. Для проверки полученных результатов построены области локализации корней рассмотренных интервальных полиномов, подтверждающие правильность выбора проверочных вершин многогранника интервальных коэффициентов.

Ключевые слова: *характеристический полином, многогранник интервально-неопределенных коэффициентов, углы выхода ветвей корневого годографа, степень робастной устойчивости, интервальные угловые неравенства*

Введение

Для систем автоматического управления с интервальным характеристическим полиномом (ИХП) существует задача анализа робастной устойчивости, т. е. возможности сохранения устойчивости системы при любых значениях интервальных коэффициентов полинома. Основополагающие результаты в области анализа устойчивости интервальных полиномов были получены В. Л. Харитоновым [1]. Позднее появились работы по исследованию робастной устойчивости ИХП с различными типами неопределенности коэффициентов [2—4].

Заметим, что наряду с анализом робастной устойчивости не меньший интерес с практической точки зрения представляет задача определения робастного качества систем с ИХП. Согласно работам [5—8] эта задача может быть успешно решена с использованием корневого подхода, который является достаточно простым и наглядным.

Известно, что корни характеристического полинома системы определяют такой важный показатель, как степень устойчивости, характеризующую длительность переходного процесса. У интервальных систем, в отличие от стационарных, корни ИХП мигрируют по комплексной плоскости, образуя области локализации. По границам этих областей можно определить степень η робастной устойчивости системы — минимальное расстояние от мни-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-58-00045 Бел_а).

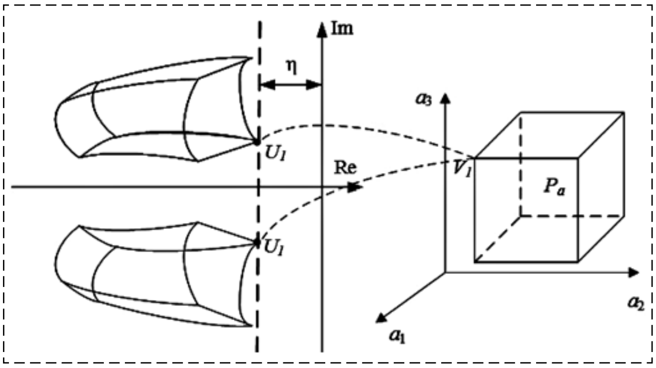


Рис. 1. Отображение многогранника коэффициентов ИХП на корневую плоскость
Fig. 1. ICP coefficients polytope projection on a complex plane

мой оси до ближайшей границы области локализации полюса.

Рассмотрим определение степени робастной устойчивости по отображению на корневую плоскость многогранника интервальных коэффициентов ИХП. Согласно работам [9, 10] степень робастной устойчивости определяется образами вершин многогранника (рис. 1).

Задача определения степени робастной устойчивости системы во всех 2^m вершинах (m — число интервальных коэффициентов ИХП) достаточно трудоемкая. Поэтому существуют работы [8, 10], посвященные сокращению числа проверочных вершин. Однако анализ показал, что предложенные в указанных работах подходы дают избыточное число этих вершин. В связи с этим представляет интерес задача определения минимального числа проверочных вершин и соответствующих им вершинных полиномов для анализа степени робастной устойчивости интервальных систем.

Интервальное расширение углов выхода реберных ветвей из комплексного полюса

Пусть ИХП имеет вид

$$A(s) = \sum_{i=0}^{n} [a_i] s^i = \\ = [a_n]s^n + [a_{n-1}]s^{n-1} + \ldots + [a_0],\ [a_i] > 0, \qquad (1)$$

где $m = n + 1$ коэффициентов могут изменяться в известных пределах. Образуемый этими коэффициентами многогранник M является прямоугольным гиперпараллелепипедом с вершинами V_q, $q = 1, 2^m$. Координаты любой точки M относительно вершины V_q определяются выражениями

$$a_i = a_i^q + \Delta a_i,\ i = \overline{0, n}; \\ (a_{i\min} - a_i^q) \leqslant \Delta a_i \leqslant (a_{i\max} - a_i^q), \qquad (2)$$

где Δa_i — приращение i-го интервального коэффициента; a_i^q — его значение в вершине V_q; $\overline{a_i} = a_{i\max}$, $\underline{a_i} = a_{i\min}$ — соответственно верхний и нижний пределы коэффициента a_i. Соотношение, связывающее точки M с корнями полинома (1), может быть получено подстановкой в соотношение (1) выражения (2):

$$A^q(s) + \sum_i \Delta a_i s^i = 0,\ i = \overline{0, n}, \qquad (3)$$

где $A^q(s) = \sum_i a_i^q s^i$ — вершинный полином. Введем в рассмотрение ребра M, которые обозначим R_i^q, где i — индекс интервального коэффициента, q — индекс вершины, из которой по ребру изменяется a_i. На основании соотношения (3) запишем уравнение отображения R_i^q на плоскость корней:

$$A^q(s) + \Delta a_i s^i = 0. \qquad (4)$$

Согласно теории корневого годографа уравнение (4) может быть получено из реберной передаточной функции

$$W_i^q(\Delta a_i, s) = \frac{\Delta a_i s^i}{A^q(s)}. \qquad (5)$$

Анализируя выражения (4) и (5), заметим, что при изменении Δa_i в интервале (2) корни движутся от полюсов функции (5), соответствующих одному концу R_i^q, к корням уравнения (4) на другом конце R_i^q. При этом корни образуют реберные ветви, а их начала и концы — корневые узлы.

Исходя из уравнения фаз корневого годографа [11] угол выхода реберной ветви из комплексного полюса P_1, являющегося корневым узлом, при увеличении a_i находится по формуле

$$\Theta_1^i = \pi - \sum_{p=2}^{n} \Theta_p + i\Theta_0, \qquad (6)$$

а при уменьшении a_i — по формуле

$$\Theta_1^i = -\sum_{p=2}^{n} \Theta_p + i\Theta_0, \qquad (7)$$

где Θ_p и Θ_0 — углы между вещественной осью и векторами, направленными из P_1 соответственно к p-му полюсу и к i-м нулям с координатами (0; j0). Поскольку P_1 может менять свое положение внутри области локализации, угол Θ_0 будет изменяться в интервале $[\Theta_0]$. Так как область локализации P_1 расположена во втором квадранте, то $[\Theta_0] = [90°; 180°]$.

Интервальное расширение касается и углов Θ_p, изменяющихся в своих интервалах $[\Theta_p]$. Определим сумму $[\Theta_p]$ для двух характерных случаев, когда левее пары полюсов P_1 и P_2 лежит другая пара P_3 и P_4 (рис. 2, *а*) или вещественный полюс P_3 (рис. 2, *б*). Зная сумму $[\Theta_p]$ для этих случаев, можно определить интервал искомых углов для любого расположения произвольного числа полюсов, локализованных левее P_1.

Утверждение 1. Если пара комплексно-сопряженных полюсов P_3 и P_4 мигрирует в области, расположенной левее полюсов P_1 и P_2 (рис. 2, *а*), то сумма углов $[\Theta_3]$ и $[\Theta_4]$, образованных P_3 и P_4 относительно P_1, принадлежит интервалу $[0°; 180°]$.

Доказательство. Рассмотрим углы треугольника $\Delta P_1P_3P_4$. Определим интервалы изменения углов Θ_3 и Θ_4. Из рис. 2, *а* видно, что $\Theta_3 = \gamma - 90°$ и $\Theta_4 = 90° - \psi$. Из этого следует, что $\Theta_3 + \Theta_4 = \gamma - \psi$. Тогда из правила углов треугольников находим $\min(\gamma - \psi) = 0°$ и $\max(\gamma - \psi) = 180°$. Следовательно, $[\Theta_3] + [\Theta_4] = [0°; 180°]$.

Утверждение 2. Если вещественный полюс P_3 перемещается по вещественной оси влево от полюсов P_1 и P_2 (рис. 2, *б*), то угол $[\Theta_3]$, образованный P_3 относительно P_1, принадлежит интервалу $[0°; 90°]$.

Доказательство. Если P_3 расположен вблизи слева от вертикальной прямой, проходящей через P_1 и P_2, то $\Theta_3 \to 90°$. Если же P_3 удален от указанной прямой на значительное расстояние, то $\Theta_3 \to 0°$. Следовательно, получаем $[\Theta_3] = [0°; 90°]$.

Таким образом, зная число полюсов и учитывая варианты их возможного расположения относительно комплексного полюса P_1, а также тот факт, что $\Theta_2 = 90°$, можно к формулам (6) и (7) применить интервальное расширение:

$$[\Theta_1^i] = \pi - \sum_{p=2}^{n} [\Theta_p] + i[\Theta_0]; \qquad (8)$$

$$[\Theta_1^i] = -\sum_{p=2}^{n} [\Theta_p] + i[\Theta_0]. \qquad (9)$$

Формирование двойных интервальных угловых неравенств

Для того чтобы полюс P_1 (образ вершины V_q, $q \in \overline{1, 2^m}$) определял степень робастной устойчивости системы, необходимо наложить ограничения на диапазоны углов $[\Theta_1^i]$ выхода реберных ветвей из P_1:

$$\underline{\Theta} \leqslant [\Theta_1^i] \leqslant \overline{\Theta}, i = \overline{0, n}, \qquad (10)$$

где $\underline{\Theta}$ и $\overline{\Theta}$ — соответственно заданные минимальный и максимальный углы выхода реберных ветвей из P_1. Очевидно, что если P_1 определяет степень устойчивости, то условие (10) имеет вид

$$90° \leqslant [\Theta_1^i] \leqslant 270°, \ i = \overline{0, n}. \qquad (11)$$

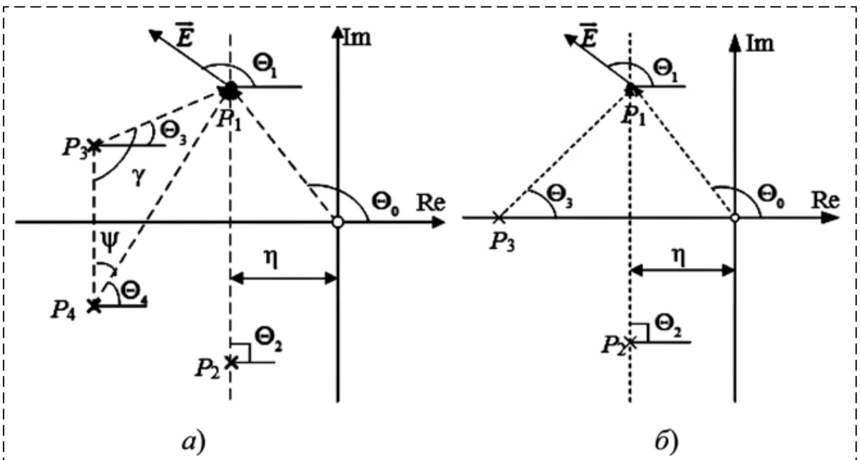


Рис. 2. Полюса слева от P_1:
а — пара комплексно-сопряженных полюсов P_3 и P_4; *б* — вещественный полюс P_3
Fig. 2. System poles on the left of P_1:
a — a pair of complex-conjugate poles P_3 and P_4; *б* — a real pole P_3

Необходимо, чтобы интервальные неравенства (11) выполнялись для всех коэффициентов a_i. Поэтому в соотношениях (8) и (9) предлагается ввести слагаемое πr_i, где $r_i = 0$ или $r_i = 1$. Выбор $r_i = 0$ не меняет угол выхода корневого годографа по ребру a_i, а при $r_i = 1$ угол изменяется на 180°. Так, например, если при условии (11) имеем $[\Theta_1^i] = [180°; 270°]$, то выбираем $r_i = 0$, что соответствует $\overline{a_i}$. Если же $[\Theta_1^i] = [270°; 360°]$, то выбираем $r_i = 1$ и получаем $\underline{a_i}$. В случае, когда $[\Theta_1^i] = [180°; 360°]$, следует выбрать $r_i = 0$ и $r_i = 1$. Это означает, что нужно рассматривать оба предела коэффициента a_i.

Таким образом, с учетом слагаемого πr_i запишем неравенства (11) в виде

$$90^\circ \leqslant [\Theta_0]i - \sum_{p=2}^{n}[\Theta_p] \pm \pi r_i \leqslant 270^\circ, \; i = \overline{0, n}. \quad (12)$$

Неравенства (12) назовем двойными интервальными угловыми неравенствами (ДИУН).

Определение вершин для нахождения степени робастной колебательной устойчивости

Для определения координат проверочных вершин доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. Если три интервальных коэффициента ИХП a_{i-1}, a_i, a_{i+1} имеют один и тот же предел, то образ вершины, в координаты которой входят указанные коэффициенты, не может лежать на границе области локализации корней ИХП.

Доказательство. Пусть коэффициенты ИХП a_{i-1}, a_i, a_{i+1} имеют верхний предел, т. е. $\overline{a_{i-1}}$, $\overline{a_i}, \overline{a_{i+1}}$. Тогда на основании выражения (8) запишем углы выхода реберных ветвей при изменении этих коэффициентов:

$$[\Theta_{i-1}] = -\sum_{p=2}^{n}[\Theta_p] + (i-1)[\Theta_0];$$

$$[\Theta_i] = -\sum_{p=2}^{n}[\Theta_p] + i[\Theta_0]; \quad (13)$$

$$[\Theta_{i+1}] = -\sum_{p=2}^{n}[\Theta_p] + (i+1)[\Theta_0].$$

Заметим, что во все выражения (13) входят одинаковые значения суммы углов полюсов $\sum_{p=2}^{n}[\Theta_p]$, которые не меняют соотношения между углами выхода. Поэтому уберем их из соотношения (13) и получим $[\Theta_{i-1}] = (i - 1)[\Theta_0]$; $[\Theta_i] = i[\Theta_0]$; $[\Theta_{i+1}] = (i + 1)[\Theta_0]$.

Для того чтобы образ вершины принадлежал границе области локализации корня ИХП, необходимо, чтобы выполнялось условие $\Theta_{max} - \Theta_{min} < 180^\circ$, где Θ_{max}, Θ_{min} — соответственно максимальный и минимальный углы выхода реберных ветвей. Проверим выполнение данного условия для вершины, где $\overline{a_{i-1}}, \overline{a_i}, \overline{a_{i+1}}$. Очевидно, что $[\Theta_{i-1}] = \Theta_{min}$, а $[\Theta_{i+1}] = \Theta_{max}$. В результате находим $\Theta_{max} - \Theta_{min} = ((i + 1) - (i - 1))[\Theta_0] = 2[\Theta_0] = [180^\circ; 360^\circ] \Rightarrow \Theta_{max} - \Theta_{min} \geqslant 180^\circ$.

Если a_{i-1}, a_i, a_{i+1} имеют нижний предел, то на основании выражения (9) получаем: $[\Theta_{i-1}] = \pi + (i - 1)[\Theta_0]$; $[\Theta_i] = \pi + i[\Theta_0]$; $[\Theta_{i+1}] = \pi + (i + 1)[\Theta_0]$. Проверяя выполнение условия граничности, получаем $\Theta_{max} - \Theta_{min} = [180^\circ; 360^\circ]$. Таким образом, при одинаковых пределах трех соседних коэффициентов a_{i-1}, a_i, a_{i+1} образ вершины не принадлежит границе области локализации корней ИХП.

На основании *утверждений 1* и *2* запишем ДИУН для систем низкого порядка. Так, для $n = 2$ имеем

$$90^\circ \leqslant [90^\circ; 180^\circ]i - 90 \pm \pi r_i \leqslant 270^\circ, \; i = \overline{0, n}. \quad (14)$$

Преобразуем неравенство (14) к виду

$$180^\circ \leqslant [90^\circ i; 180^\circ i]i \pm \pi r_i \leqslant 360^\circ, \; i = \overline{0, n}. \quad (15)$$

Решая ДИУН (15) для всех i, находим значения r_i: $r_0 = 1$ или $r_0 = 0$; $r_1 = 1$; $r_2 = 0$. Они определяют координаты двух проверочных вершин $V_1 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\overline{a_2}$, $V_2 = \underline{a_0}\,\underline{a_1}\,\overline{a_2}$. Данные вершины задают два вершинных полинома для нахождения степени робастной колебательной устойчивости:

$$A_1(s) = \overline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \overline{a_0}; \;\; A_2(s) = \overline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \underline{a_0}.$$

Для $n = 3$ (рис. 2, *б*) на основании *утверждения 2* имеем: $\Theta_2 + [\Theta_3] = 90^\circ + [0^\circ; 90^\circ]$. Учитывая, что $[\Theta_0] = [90^\circ; 180^\circ]$, запишем ДИУН

$$90^\circ \leqslant [90^\circ; 180^\circ]i - (90^\circ + [0^\circ; 90^\circ]) \pm \pi r_i \leqslant 270^\circ, \; i = \overline{0, n}. \quad (16)$$

В результате преобразования (16) получаем:

$$180^\circ \leqslant [90i - 90^\circ; \; 180^\circ i] \pm \pi r_i \leqslant 360^\circ, i = \overline{0, n}. \quad (17)$$

Решением ДИУН (17) являются значения $r_0 = 0$; $r_1 = 1$; $r_2 = 0$ или $r_2 = 1$, $r_3 = 0$ или $r_3 = 1$. Этим значениям соответствуют координаты следующих проверочных вершин: $V_1 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\overline{a_2}\,\underline{a_3}$, $V_2 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\overline{a_3}$, $V_3 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{a_3}$, $V_4 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\underline{a_3}$. Заметим, что вершина $V_4 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\underline{a_3}$ не может быть граничной и, следовательно, проверочной для определения степени робастной колебательной устойчивости. Поэтому получаем три вершинных полинома:

$$A_1(s) = \underline{a_3}s^3 + \overline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \overline{a_0};$$

$$A_2(s) = \overline{a_3}s^3 + \underline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \overline{a_0}; \quad (18)$$

$$A_3(s) = \overline{a_3}s^3 + \overline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \overline{a_0}.$$

Для $n = 4$ возможны два варианта расположения корней ИХП: пара комплексно-сопряженных полюсов P_3 и P_4 мигрирует левее полюсов P_1 и P_2 или два вещественных полюса P_3 и P_4 лежат в отрезке слева от полюсов P_1 и P_2. В первом случае на основании *утверждения 1* имеем $\Theta_2 + [\Theta_3] + [\Theta_4] = 90° + [0°;180°]$. Тогда с учетом $[\Theta_0] = [90°;180°]$ ДИУН примет вид

$$90° \leqslant [90°;180°]i - (90° + [0°;180°]) \pm \pi r_i \leqslant 270°, \quad i = \overline{0,n}. \tag{19}$$

После преобразования неравенства (19) получаем

$$180° \leqslant [90i - 180°;\ 180°i] \pm \pi r_i \leqslant 360°, i = \overline{0,n}. \tag{20}$$

Во втором случае на основании *утверждения 2* $\Theta_2 + [\Theta_3] + [\Theta_4] = 90° + [0°;180°]$. Для этого случая ДИУН после преобразования будет также иметь вид (20), и, следовательно, проверочные вершины будут иметь те же координаты, что для первого случая.

В результате решения (20) и на основании *утверждения 3* находим координаты следующих проверочных вершин:

$$V_1 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\overline{a_2}\,\underline{a_3}\,\underline{a_4};\quad V_2 = \overline{a_0 a_1}\,\underline{a_2}\,\overline{a_3 a_4};$$
$$V_3 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\overline{a_3}\,\underline{a_4};\quad V_4 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\overline{a_3 a_4};$$
$$V_5 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\overline{a_2 a_3}\,\underline{a_4};\quad V_6 = \overline{a_0 a_1}\,\underline{a_2}\,\underline{a_3}\,\overline{a_4};$$
$$V_7 = \overline{a_0 a_1}\,\underline{a_2}\,\overline{a_3}\,\underline{a_4};\quad V_8 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\overline{a_2}\,\underline{a_3}\,\overline{a_4}.$$

Этим вершинам соответствуют восемь вершинных полиномов:

$$\begin{aligned}
A_1(s) &= \underline{a_4}s^4 + \underline{a_3}s^3 + \overline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \overline{a_0};\\
A_2(s) &= \overline{a_4}s^4 + \overline{a_3}s^3 + \underline{a_2}s^2 + \overline{a_1}s + \overline{a_0};\\
A_3(s) &= \underline{a_4}s^4 + \overline{a_3}s^3 + \underline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \overline{a_0};\\
A_4(s) &= \overline{a_4}s^4 + \overline{a_3}s^3 + \underline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \overline{a_0};\\
A_5(s) &= \underline{a_4}s^4 + \overline{a_3}s^3 + \overline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \overline{a_0};\\
A_6(s) &= \overline{a_4}s^4 + \underline{a_3}s^3 + \underline{a_2}s^2 + \overline{a_1}s + \overline{a_0};\\
A_7(s) &= \underline{a_4}s^4 + \overline{a_3}s^3 + \underline{a_2}s^2 + \overline{a_1}s + \overline{a_0};\\
A_8(s) &= \overline{a_4}s^4 + \underline{a_3}s^3 + \overline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \overline{a_0}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Определение вершин для нахождения степени робастной апериодической устойчивости

Если ближайшим к мнимой оси является вещественный полюс P_1, то областью его локализации служит отрезок отрицательной вещественной полуоси. В этом случае $\Theta_0 = 180°$.

Утверждение 4. Если вещественный полюс P_1 мигрирует в отрезке, левее которого расположены области локализации пары комплексно-сопряженных полюсов P_2 и P_3 (рис. 3, *а*) или отрезок другого вещественного полюса P_4 (рис. 3, *б*), то сумма углов Θ_2 и Θ_3, образованных P_2, P_3 относительно P_1, равна 360°, а угол $\Theta_4 = 0°$.

Доказательство. Так как полюса P_2 и P_3 — комплексно-сопряженные, то треугольник $\Delta P_1P_2P_3$ является равнобедренным и, следовательно, $\Theta_2 = 360° - \Theta_3$. Следовательно, $\Theta_2 + \Theta_3 = 360°$. Во втором случае P_4 лежит на оси слева от P_1. Тогда по определению углов полюсов из теории корневого годографа $\Theta_4 = 0°$.

Для нахождения вершины, которая определяет степень робастной апериодической устойчивости, доказано следующее утверждение.

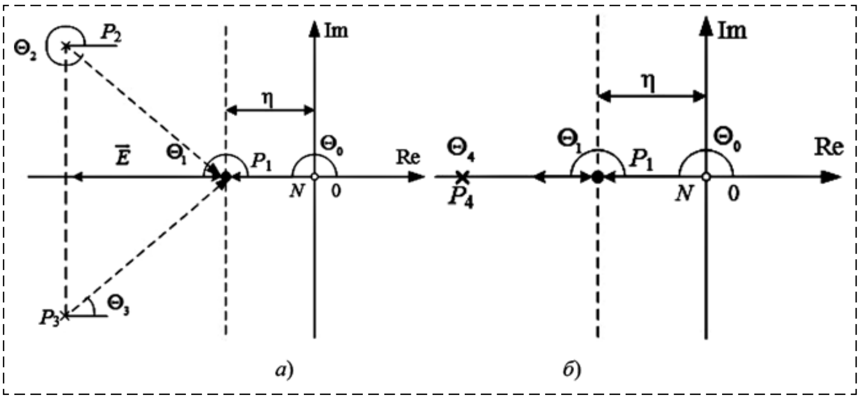


Рис. 3. Полюса левее P_1:
а — пара комплексно-сопряженных полюсов P_2 и P_3; *б* — вещественный полюс P_4
Fig. 3. Poles on the left of P_1:
a — a pair of complex-conjugate poles P_2 and P_3 ; *б* — a real pole P_4

Утверждение 5. Степень робастной апериодической устойчивости системы любого порядка определяется в вершине $\underline{a_0}, \underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, \underline{a_4} \dots$.

Доказательство. Пусть P_1 является вещественным и самым ближним к мнимой оси полюсом. При изменении любого коэффициента a_i полюс P_1 будет двигаться влево по вещественной оси. Следовательно, его углы выхода по всем a_i равны 180°. Учитывая, что сумма углов всех других полюсов относительно P_1 равна нулю (*утверждение 4*) и $\Theta_0 = 180°$, получаем уравнение углов выхода

$$180° i \pm \pi r = 180°. \qquad (22)$$

Решением (22) является следующий набор значений r_i: $r_0 = 1$; $r_1 = 0$, $r_2 = 1$; $r_3 = 0$, $r_4 = 1$. Полученные чередующиеся значения r_i соответствуют вершине $V_1 = \underline{a_0}\overline{a_1}\underline{a_2}\overline{a_3}\underline{a_4}\ldots$ и вершинному полиному:

$$A(s) = \underline{a_0} + \overline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \underline{a_4}s^4 \ldots + a_n s^n. \qquad (23)$$

Числовые примеры

Пример 1. Пусть ИХП системы имеет вид:

$$D(s) = [d_3]s^3 + [d_2]s^2 + [d_1]s^1 + [d_0], \qquad (24)$$

где $[d_3]=[0{,}03; 0{,}04]$; $[d_2]=[0{,}9; 1{,}1]$; $[d_1]=[80;100]$; $[d_0] = [250; 350]$.

Для определения степени робастной устойчивости системы найдены и приведены в табл. 1 корни вершинных полиномов (18) и (23).

Из полученных значений выбираем корень полинома $A(s)$ $s_1 = -2{,}55$, определяющий степень апериодической устойчивости системы.

Таблица 1
Table 1

Значения корней вершинных полиномов

Roots of vertex polynomials

Вершинный полином	Значения корней		
	s_1	s_2	s_3
$A_1(s)$	−4,63	−16 + j47,55	−16 − j47,55
$A_2(s)$	−4,56	−8,97 + j42,87	−8,97 − j42,87
$A_3(s)$	−4,61	−11,44 + j41,99	−11,44 − j41,99
$A(s)$	−2,55	−9,97 + j48,47	−9,97 − j48,47

Для проверки на рис. 4 (см. вторую сторону обложки) построены области локализации корней ИХП (24). Из рис. 4 видно, что степень робастной апериодической устойчивости системы $\eta = 2{,}55$ и определяется образом вершины $V_4 = \underline{a_0}\overline{a_1}\underline{a_2}\overline{a_3}$.

Пример 2. Зададим ИХП системы:

$$D(s) = [d_3]s^3 + [d_2]s^2 + [d_1]s^1 + [d_0], \qquad (25)$$

где $[d_3] = [82;176]$; $[d_2] = [587{,}25; 635]$; $[d_1]$ = $= [717{,}5; 850]$; $[d_0] = [450;1000]$. Аналогично с первым примером для анализа степени робастной устойчивости системы найдены и приведены в табл. 2 значения корней вершинных полиномов.

Из табл. 2 следует, что степень робастной колебательной устойчивости системы определяется корнями полинома $A_2(s)$ $s_{2,3} = -0{,}3639 \pm j1{,}4302$, являющимися образами вершины $V_2 = \overline{a_0}\underline{a_1}\underline{a_2}\overline{a_3}$.

На рис. 5 (см. вторую сторону обложки) представлена область локализации корней ИХП (25). Из рис. 5 можно сделать вывод, что найденное значение степени робастной колебательной устойчивости $\eta = 0{,}3639$ соответствует значению, полученному в результате отображения многогранника интервальных коэффициентов ИХП на корневую плоскость.

Пример 3. Для случая $n = 4$ рассмотрим ИХП

$$D(s) = [d_4]s^4 + [d_3]s^3 + [d_2]s^2 + [d_1]s^1 + [d_0], \qquad (26)$$

где $[d_0] = [14\ 400; 25\ 920]$; $[d_1] = [25\ 696; 33\ 933]$; $[d_2] = [29\ 888; 32\ 854]$; $[d_3] = [12\ 820; 15\ 564]$; $[d_4] = [3000;\ 5256]$.

Для нахождения степени робастной устойчивости необходимо найти корни восьми вер-

Таблица 2
Table 2

Значения корней вершинных полиномов

Roots of vertex polynomials

Вершинный полином	Значения корней		
	s_1	s_2	s_3
$A_1(s)$	−6,7108	−0,5165 + j1,2452	−0,5165 − j1,2452
$A_2(s)$	−2,6088	−0,3639 + j1,4302	−0,3639 − j1,4302
$A_3(s)$	−2,8774	−0,3653 + j1,3569	−0,3653 − j1,3569
$A(s)$	−1,1403 + j1,0587	−1,1403 − j1,0587	−1,0560

Таблица 3
Table 3

Значения корней вершинных полиномов

Roots of vertex polynomials

Вершинный полином	Значение корней			
	s_1	s_2	s_3	s_4
$A_1(s)$	−1,8501 + j2,0706	−1,8501 − j2,0706	−0,2866 + j1,0191	−0,2866 − j1,0191
$A_2(s)$	−1,2274 + j0,8821	−1,2274 − j0,8821	−0,2532 + j1,4473	−0,2532 − j1,4473
$A_3(s)$	−2,4092 + j1,0640	−2,4092 − j1,0640	−0,1848 + j1,1007	−0,1848 − j1,1007
$A_4(s)$	−1,3247 + j1,2894	−1,3247 − j1,2894	−0,1559 + j1,1911	−0,1559 − j1,1911
$A_5(s)$	−2,3827 + j1,4690	−2,3827 − j1,4690	−0,2113 + j1,0286	−0,2113 − j1,0286
$A_6(s)$	−0,2857 + j1,6919	−0,2857 + j1,6919	−0,9338 + j0,8961	−0,9338 − j0,8961
$A_7(s)$	−2,2332 + j0,1757	−2,2332 − j0,1757	−0,3608 + j1,2616	−0,3608 − j1,2616
$A_8(s)$	−0,8738 + j1,7179	−0,8738 − j1,7179	−0,3458 + j1,0991	−0,3458 − j1,0991
$A(s)$	−2,9013	−0,7612 + j1,2591	−0,7612 − j1,2591	−0,7642

шинных полиномов (21) и одного вершинного полинома (23). Их значения приведены в табл. 3.

Из табл. 3 найдем $\eta = 0{,}1559$, определяющую степень робастной колебательной устойчивости системы в образе вершины $V_4 = \overline{a_0}\,\underline{a_1}\,\underline{a_2}\,\overline{a_3 a_4}$. На рис. 6 (см. вторую сторону обложки) представлена область локализации корней ИХП (26). Из рис. 6 видно, что степень робастной колебательной устойчивости $\eta = 0{,}1559$ определяется вершинным полиномом $A_4(s) = \overline{a_4}s^4 + \overline{a_3}s^3 + \underline{a_2}s^2 + \underline{a_1}s + \overline{a_0}$.

Заключение

В статье рассмотрен интервальный характеристический полином, коэффициенты которого образуют параметрический многогранник. На основе теории корневого годографа получены условия для углов выхода реберных ветвей из полюсов системы, определяющих ее степень устойчивости. С использованием этих условий разработана процедура определения проверочных вершин многогранника интервальных коэффициентов. Найдены наборы вершинных характеристических полиномов для определения степени робастной устойчивости интервальных систем низкого порядка. Приведенные числовые примеры подтверждают правильность полученных результатов.

Список литературы

1. **Харитонов В. Л.** Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 11. С. 2086—2088.
2. **Anderson B. D. O., Kraus F., Mansour M., Desgupta S.** Easily testable sufficient conditions for the robust stability of systems with multi-affine parameter dependence // in M. Mansour, S. Balemi, Truol, editors, Robustness of dynamic systems with parameter uncertainties. Birkhauser, Basel, Switzerland, 1992. P. 81—92.
3. **Kawamura T., Shima M.** Robust stability analysis of characteristic polynomials whose coefficients are polynomials of interval parameters // Journal of Mathematical System, Estimation and Control. 1996. Vol. 6, № 4. P. 1—12.
4. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
5. **Римский Г. В.** Корневые методы исследования интервальных систем. Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1999. 186 с.
6. **Несенчук А. А.** Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода. Минск: ОИПИ, 2005. 232 с.
7. **Вадутов О. С., Гайворонский С. А.** Применение реберной маршрутизации для анализа устойчивости интервальных полиномов // Изв. АН. ТиСУ. 2003. № 6. С. 7—12.
8. **Гайворонский С. А.** Определение реберного маршрута для анализа робастной секторной устойчивости интервального полинома // Известия РАН. Теория и системы управления. 2005. № 5. С. 11—15.
9. **Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г.** Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Техническая кибернетика. 1991. № 1. С. 3—30.
10. **Гайворонский С. А.** Вершинный анализ корневых показателей качества системы с интервальными параметрами // Известия Томского политехнического университета. 2006. Т. 309, № 7. С. 6—9.
11. **Удерман Э. Г.** Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М.: Наука, 1972. 448 с.

Analyzing Robust Stability of an Interval Control System on the Basis of Vertex Polynomials

S. A. Gayvoronskiy, saga@tpu.ru, **T. A. Ezangina,** eza-tanya@yandex.ru, **I. V. Khozhaev,** ivh1@tpu.ru,
National Research Tomsk Polytechnic University, 634050, Tomsk, Russian Federation,
A. A. Nesenchuk, anes@newman.bas-net.by
United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus,
220012, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: **Ezangina Tatiana Al.,** Ph.D., Researcher,
National Research Tomsk Polytechnic University, 634050, Tomsk, Russian Federation,
e-mail: eza-tanya@yandex.ru

Accepted on January 14, 2019

Abstract

In the paper, a characteristic polynomial of an interval control system, whose coefficients are unknown or may vary within certain ranges of values, is considered. Parametric variations cause migration of interval characteristic polynomial roots within their allocation areas, whose borders determine robust stability degree of the interval control system. To estimate a robust stability degree, a projection of a polytope of interval characteristic polynomial coefficients on a complex plane must be examined. However, in order to find a robust stability degree it is enough to examine some vertices of a coefficient polytope and not the whole polytope. To find these vertices, which fully determine a robust stability degree, it is proposed to use a basic phase equation of a root locus method. Considering the requirements to placing allocation areas of system poles an interval extension of expressions for angles included to the phase equation. The set of statements, allowing to find a sum of pole angles intervals in the case of degree of oscillating robust stability, were formulated and proved. From these statements, a set of double interval angular inequalities was derived. The inequalities determine ranges of angles of all root locus edge branches departure from every pole. Considered research resulted in a procedure of finding coordinates of verifying vertices of a coefficients polytope and vertex polynomials according to these vertices. Such polynomials were found for oscillating robust stability degree analysis of interval control systems of the second, the third and the forth order. Also, similar statements were derived for aperiodical robust stability degree analysis. Numerical examples of vertex analysis of oscillating and aperiodical robust stability degree were provided for interval control systems of the second, the third and the fourth order. Obtained results were proved by examining root allocation areas of interval characteristic polynomials examined in application examples of proposed methods.

Keywords: *characteristic polynomial, polytope of interval coefficients, departure angles of root locus branches, robust stability degree, interval angle inequalitites*

Acknowledgements: This article was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research (project 18-58-00045 Bel_a).

For citation:

Gayvoronskiy S. A., Ezangina T. A., Khozhaev I. V., Nesenchuk A. A. Analyzing Robust Stability of an Interval Control System on the Basis of Vertex Polynomials, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 5, pp. 266—273.

DOI: 10.17587/mau.20.266-273

References

1. **Haritonov V. L.** *Asimptoticheskaya ustojchivost' semejstva sistem linejnyh differencial'nyh uravnenij* (Asymptotic stability of a linear differential equations family), *Differenc. Uravneniya*, 1978, vol. 14, no. 11, pp. 2086—2088 (in Russian).
2. **Anderson B. D. O., Kraus F., Mansour M., Desgupta S.** Easily testable sufficient conditions for the robust stability of systems with multi-affine parameter dependence, editors: M. Mansour, S. Balemi, Truol, Robustness of dynamic systems with parameter uncertainties, Birkhauser, Basel, Switzerland, 1992, pp. 81—92.
3. **Kawamura T., Shima M.** Robust stability analysis of characteristic polynomials whose coefficients are polynomials of interval parameters, *Journal of Mathematical System, Estimation and Control,* 1996, vol. 6, no. 4, pp. 1—12.
4. **Polyak B. T., Shcherbakov P. S.** *Robastnaya ustojchivost' i upravlenie* (Robust stability and control), Moscow, Nauka, 2002, 303 p. (in Russian).
5. **Rimskij G. V.** *Kornevye metody issledovaniya interval'nyh system* (Root methods of interval systems examining), Minsk, Institut tekhnicheskoj kibernetiki NAN Belarusi, 1999, 186 p. (in Russian).
6. **Nesenchuk A. A.** *Analiz i sintez robastnyh dinamicheskih sistem na osnove kornevogo podhoda* (Analysis and synthesis of robust dynamics systems on a base of root approach), Minsk, OIPI, 2005, 232 p. (in Russian).
7. **Vadutov O. S., Gayvoronskiy S. A.** *Primenenie rebernoj marshrutizacii dlya analiza ustojchivosti interval'nyh polinomov* (Application of edge routing to stability analysis of interval polynomials), *Izv. AN. TiSU*, 2003, no. 6, pp. 7—12 (in Russian).
8. **Gayvoronskiy S. A.** *Opredelenie rebernogo marshruta dlya analiza robastnoj sektornoj ustojchivosti interval'nogo polinoma* (Determination of the edge routing for the analysis of the robust sector stability of an interval polynomial), *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya,* 2005, no. 5, pp. 11—15 (in Russian).
9. **Gusev Yu. M., Efanov V. N., Krymskij V. G.** *Analiz i sintez linejnyh interval'nyh dinamicheskih sistem (sostoyanie problemy). Analiz s ispol'zovaniem interval'nyh harakteristicheskih polinomov* (Analysis and synthesis of linear interval dynamic systems (problem condition). Analysis with the help of interval characteristic polynomials), Tekhnicheskaya Kibernetika, 1991, no. 1, pp. 3—30 (in Russian).
10. **Gayvoronskiy S. A.** *Vershinnyj analiz kornevyh pokazatelej kachestva sistemy s interval'nymi parametrami* (Vertex analysis of root quality indexes of the system with interval parameters), *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta,* 2006, vol. 309, no. 7, pp. 6—9 (in Russian).
11. **Uderman E. G.** *Metod kornevogo godografa v teorii avtomaticheskih system* (Root locus method in control theory, Moscow, Nauka, 1972. 448 p. (in Russian).

УДК 682.51 DOI: 10.17587/mau.20.274-279

Д. П. Ким, д-р техн. наук, проф., dpkim@yandex.ru,
Московский технологический университет (МИРЭА), Москва

Алгебраический метод синтеза астатических непрерывных систем управления

Рассматривается алгебраический метод синтеза астатических непрерывных систем управления. Метод основан на построении по заданным показателям качества (времени регулирования, перерегулирования и др.) и заданной передаточной функции объекта желаемой передаточной функции (ЖПФ). Построение ЖПФ основано на использовании желаемой нормированной передаточной функции (НПФ). Желаемой НПФ называется передаточная функция, у которой в знаменателе свободный член и коэффициент при старшей степени равны единице и показатели качества, за исключением времени регулирования, совпадают с показателями качества ЖПФ. Поэтому, построив желаемую НПФ и проделав обратное преобразование с коэффициентом преобразования, равным отношению времени регулирования синтезируемой системы и времени регулирования системы с желаемой НПР, получим ЖПФ.

Желаемая НПФ строится из типовых НПФ. Известны различные типовые НПФ: биномиальные, арифметические и геометрические. Тип НПФ определяется по ее характеристическому полиному, НПФ называется биномиальной, если ее характеристический полином представляет бином Ньютона, арифметической и геометрической, если корни их характеристических полиномов образуют арифметическую и геометрическую прогрессии.

При построении желаемой НПФ нужно соблюсти три условия: физической реализуемости регулятора, разрешимости и грубости. Из этих трех условий определяются степени характеристического уравнения синтезируемой системы и степени неизвестных полиномов, которые вводятся в процессе синтеза. После этого по заданным показателям качества определяется нужный тип желаемой НПФ. При этом находим только знаменатель желаемой НПФ. Числитель желаемой НПФ, если синтезируемая система астатическая r-го порядка и объект не содержит правых полюсов и нулей, равен сумме r последних слагаемых характеристического полинома.

После того как получена ЖПФ системы, определяется передаточная функция регулятора приравниванием передаточной функции замкнутой системы ЖПФ.

Ключевые слов: *желаемая передаточная функция, нормированная передаточная функция, время регулирования, перерегулирование, порядок астатизма*

Введение

Основным и широко известным методом синтеза непрерывных систем автоматического управления по заданным прямым показателям качества (времени регулирования, перерегулированию и др.) является частотный метод. Алгебраический метод, основанный на использовании желаемой передаточной функции (ЖПФ), известен также давно [1—3], однако он не нашел широкого распространения.

Желаемая нормированная передаточная функция

Определение ЖПФ основано на использовании нормированной передаточной функции (НПФ). НПФ, или передаточной функцией в форме Вишнеградского, называется передаточная функция, у которой в знаменателе свободный член и коэффициент при старшей степени равны единице.

Пусть задана ненормированная передаточная функция

$$W(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}. \qquad (1)$$

Ее всегда можно преобразовать в НПФ. Для этого достаточно провести замену переменных

$$q = \alpha s,\ \alpha = \sqrt[n]{a_0/a_n}. \qquad (2)$$

Тогда получим

$$\tilde{\Phi}(q) = \frac{\tilde{b}_0 q^m + \tilde{b}_1 q^{m-1} + \cdots + \tilde{b}_m}{q^n + \tilde{a}_1 q^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_{n-1} q + 1}, \qquad (3)$$

где

$$\tilde{b}_i = \frac{b_i}{a_n \alpha^{m-i}},\ i = 0, 1, \ldots, m; \qquad (4а)$$

$$\tilde{a}_k = \frac{a_k}{a_n \alpha^{n-k}},\ k = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (4б)$$

Коэффициенты ненормированной передаточной функции (1) связаны с коэффициентами НПФ соотношениями

$$b_i = \alpha^{m-i}\tilde{b}_i, i = 0, 1, \ldots, m; \qquad (5а)$$

$$a_0 = \alpha^n,\ a_n = 1,\ a_k = \alpha^{n-k}\tilde{a}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (5б)$$

Между свойствами систем с передаточными функциями (1) и (3) существует тесная связь. Характер переходных процессов (монотонность, апериодичность, показатели качества в установившемся режиме и т. д.) за исключением времени регулирования системы с ненормированной передаточной функцией и системы с НПФ совпадают. А время регулирования $t_р$ системы (1) и время регулирования $\tau_р$ системы (3) отличаются и связаны соотношением

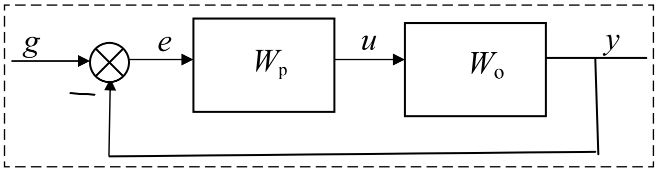
$$\alpha = t_р/\tau_р. \qquad (6)$$

Поэтому, если найдем НПФ, обладающую всеми заданными требованиями к синтезируемой системе (кроме требований к времени регулирования), то, проделав обратное преобразование (5) с коэффициентом преобразования (6), получим ЖПФ. Дальше такую НПФ будем называть желаемой НПФ.

Известны различные типовые НПФ: *биномиальные, арифметические, геометрические и колебательные.* Тип НПФ определяется по ее характеристическому полиному. НПФ называется *биномиальной*, если ее характеристический полином представляет бином Ньютона, *арифметической* и *геометрической*, если корни их характеристических полиномов образуют арифметическую и геометрическую прогрессии соответственно, и *колебательной*, если корни ее характеристического полинома являются комплексными. Нули НПФ от ее типа не зависят. Они полностью определяются объектом и требованием к качеству синтезируемой системы. Итак, для нахождения ЖПФ нужно прежде всего найти желаемую НПФ, а для этого необходимо знать его порядок. Естественно, порядок желаемой НПФ совпадает с порядком ЖПФ, а последний зависит от порядка передаточной функции объекта. Сначала рассмотрим, как определяется требуемая передаточная функция регулятора при известной ЖПФ.

Пусть задана передаточная функция объекта

$$W_о(s) = P(s)/R(s)$$



Структурная схема
Structural scheme

и определена ЖПФ $W_ж(s)$. Тогда передаточная функция регулятора $W_р(s)$ может быть получена из равенства передаточной функции $W_{yg}(s)$ замкнутой системы (см. рисунок) с $W_ж(s)$:

$$W_{yg}(s) = \frac{W_р(s)W_о(s)}{1 + W_р(s)W_о(s)} = W_ж(s).$$

Разрешив это равенство относительно передаточной функции регулятора, получим

$$W_р(s) = \frac{R(s)}{P(s)}\frac{W_ж(s)}{1 - W_ж(s)}. \qquad (7)$$

Следует иметь в виду, что при определении ЖПФ $W_ж(s)$ нельзя задавать ее произвольно исходя только из требования к качеству синтезируемой системы. Ее выбор, помимо зависимости от требования к заданным показателям качества, естественно зависит от передаточной функции объекта. При определении передаточной функции регулятора $W_р(s)$ необходимо учитывать его *физическую осуществимость* (*реализуемость*) и *грубость* (робастность) синтезируемой системы.

Напомним, система называется *грубой* или *робастной*, если при малом изменении ее параметров свойство системы качественно не меняется. И в случае линейной системы *не грубость* означает, что устойчивая система при малом изменении параметров становится не устойчивой. Для того чтобы синтезированная система была грубой, необходимо, чтобы правые полюса объекта не компенсировались правыми нулями регулятора и правые нули объекта не компенсировались правыми полюсами регулятора.

Пусть передаточная функция объекта факторизована

$$W_о(s) = \frac{P(s)}{R(s)} = \frac{P^-(s)P^+(s)}{R^-(s)R^+(s)}. \qquad (8)$$

Подставим это выражение в передаточную функцию регулятора (7):

$$W_р(s) = \frac{R^-(s)R^+(s)}{P^-(s)P^+(s)}\frac{W_ж}{1 - W_ж}. \qquad (9)$$

Для того чтобы синтезированная система была грубой, необходимо, чтобы правые полюса $R^+(s)$ и нули $P^+(s)$ передаточной функции объекта (8) не компенсировались соответственно правыми нулями $R^+(s)$ и полюсами $P^+(s)$ передаточной функции регулятора (9). Для этого последняя не должна содержать полиномы $P^+(s)$ и $R^+(s)$. Это возможно, если в выражении (9) $W_ж(s)$ содержит множитель $P^+(s)$, а $(1 - W_ж(s))$ — множитель $R^+(s)$, т. е. если ЖПФ удовлетворяет условиям

$$W_ж(s) = \frac{P^+(s)M(s)}{G(s)}; \qquad (10а)$$

$$1 - W_ж(s) = \frac{R^+(s)N(s)s^{r_р}}{G(s)}. \qquad (10б)$$

Здесь $M(s)$ и $N(s)$ — неизвестные полиномы, которые должны быть определены в дальнейшем в процессе синтеза; $G(s)$ — знаменатель ЖПФ. В (10б) множитель $s^{r_р}$ правой части вводится для обеспечения требуемого порядка астатизма синтезируемой системы. Условимся называть этот показатель *порядком астатизма регулятора*. Аналогично, если передаточная функция объекта будет содержать множитель $s^{r_о}$ в знаменателе, то показатель $r_о$ будем называть *порядком астатизма объекта. Порядок астатизма синтезированной системы* r относительно задающего воздействия равен сумме $r = r_р + r_о$.

Подставив выражение (10) в соотношение (9), получим

$$W_р(s) = \frac{R^-(s)}{P^-(s)} \frac{M(s)}{N(s)s^{r_р}}. \qquad (11)$$

Исключив $W_ж(s)$ из выражений (10), найдем *полиномиальное уравнение*

$$P^+(s)M(s) + R^+(s)N(s)s^{r_р} = G(s). \qquad (12)$$

В уравнении (12) полиномы $M(s)$ и $N(s)$ должны быть представлены как полиномы определенной степени с неизвестными коэффициентами. Дальше коэффициенты этих полиномов будут найдены из системы уравнений, которые будут получены путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях левой и правой частей полиномиального уравнения (6).

Рассмотрим, каким условиям должны удовлетворять степени неизвестных полиномов $M(s)$ и $N(s)$, чтобы регулятор был физически реализуем, синтезированная система была грубой и полиномиальное уравнение было разрешимым. При этом условимся степень полиномов обозначать буквой n с индексом, обозначающим сам полином. Например, n_k будет обозначать степень полинома $k(s)$.

Условие разрешимости. Коэффициенты полиномов $M(s)$ и $N(s)$ определяются, как отмечалось, из системы уравнений, которые получаются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях обоих частей полиномиального уравнения (12). Число уравнений равно $(n_G + 1)$, а число неизвестных — $(n_M + n_N + 2)$. Чтобы система была разрешима, число уравнений $n_G + 1$ не должно превышать числа неизвестных $n_M + n_N + 2$:

$$n_G \leqslant n_M + n_N + 1. \qquad (13а)$$

Условие физической осуществимости. Относительная степень передаточной функции регулятора (11) будет неотрицательной, если

$$n_{R^-} + n_M \leqslant n_{P^-} + n_N + r_р. \qquad (13б)$$

Условие грубости. В левой части соотношения (10б) относительный порядок равен нулю. Поэтому относительный порядок его правой части также должен быть равен нулю, т. е. степени полиномов числителя и знаменателя должны быть равны между собой:

$$n_G = n_{R^+} + n_N + r_р. \qquad (13в)$$

Соотношение (10б) получено из условия обеспечения грубости синтезируемой системы. Поэтому условие (13в), полученное из этого соотношения, будем называть *условием грубости*.

Решив систему (13), включающую условия разрешимости, физической осуществимости и грубости, относительно порядка ЖПФ n_G, получим

$$n_G - n_R \geqslant n_{R^+} + r_р - n_{P^-} - 1. \qquad (14)$$

Отсюда находим прядок желаемой ЖПФ. После этого по заданным показателям качества выбираем нужный тип желаемой НПФ. При этом находим только знаменатель желаемой НПФ. Числитель желаемой НПФ, если синтезируется астатическая система r-го порядка и объект не содержит правых полюсов и нулей, равен сумме r последних слагаемых характеристического полинома (т. е. ее знаменателя). Последнее следует из следующего утверждения.

Утверждение. *Если передаточная функция объекта не содержит правых нулей и полюсов и синтезируемая система обладает астатизмом r-го порядка, то числитель ЖПФ совпадает суммой r последних слагаемых знаменателя [4—6].*

Естественно, такой же вид будет иметь желаемая НПФ. Отсюда следует алгоритм построения желаемой НПФ:

- проводится факторизация передаточной функции объекта;
- записываются условия разрешимости, физической осуществимости и грубости и определяется порядок желаемой НПФ;
- выбрав типовую НПФ, строится желаемая НПФ и путем моделирования системы с желаемой НПФ определяется время регулирования $\tau_р$;
- рассчитав коэффициент $\alpha = t_р/\tau_р$ и проведя обратное преобразование, можно найти ЖПФ.

Синтез передаточной функции регулятора при известной ЖПФ

Пусть ЖПФ известна и в процессе ее определения проведена факторизация передаточной функции объекта, выписаны условия разрешимости, физической осуществимости, грубости (13б) и определены наименьшие возможные значения степеней n_M и n_N неизвестных полиномов $M(s)$ и $N(s)$. Тогда можно порекомендовать следующий порядок определения передаточной функции регулятора:

- записать полиномы $M(s)$ и $N(s)$ с неопределенными коэффициентами, степени которых равны найденным значениям n_M и n_N, а затем, используя их, составить полиномиальное уравнение (6);
- записать систему уравнений приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях в левой и правой частях полиномиального уравнения и, решив эту систему, определить неизвестные коэффициенты полиномов $M(s)$ и $N(s)$;
- подставив найденные полиномы $M(s)$ и $N(s)$, а также полученные при факторизации передаточной функции объекта полиномы $P^{-}(s)$ и $R^{-}(s)$ в формулу (5)

$$W_р(s) = \frac{R^{-}(s)}{P^{-}(s)} \frac{M(s)}{N(s)s^{r_р}},$$

определить искомую передаточную функцию регулятора.

Пример. Передаточная функция объекта имеет вид

$$W_о(s) = \frac{0,5s+1}{(s+1)(2s+1)s}.$$

Коэффициенты позиционной и скоростной ошибки равны нулю, время регулирования $t_р = 4$, перерегулирование $\sigma = 20$. Определить передаточную функцию регулятора, обеспечивающую заданные требования к синтезированной системе.

Решение. Система должна обладать астатизмом второго порядка, чтобы обеспечить равенство нулю коэффициентов позиционной и скоростной ошибок. Но поскольку объект обладает астатизмом только первого порядка ($r_о = 1$), то регулятор должен также обладать астатизмом первого порядка ($r_р = 1$)

Найдем степень ЖПФ. Из соотношения (14) имеем

$$n_G - 3 \geqslant 1+1-1-1,\ n_G = 3.$$

В качестве типовой примем геометрическую НПФ, так как при астатической системе высокого порядка перерегулирование получается минимальным именно при геометрической НПФ [4].

Первый член a знаменатель q нормированного геометрического полинома порядка n вязаны соотношением

$$q = 1/a^{2/(n-1)}.$$

Поэтому нормированный геометрический полином третьего порядка при первом члене прогрессии $a = 0,5$ и соответственно знаменателе прогрессии $q = 2$ имеет вид

$$(q+a)(q+aq)(q+aq^2) = q^3 + 3,5q^2 + 3,5q + 1.$$

Допустим, выбором типа и параметров нормированного характеристического полинома мы обеспечили требуемые показатели качества, кроме времени регулирования. Тогда желаемой НПФ будет

$$W_н^*(q) = (3,5q+1)/(q^3 + 3,5q^2 + 3,5q + 1).$$

Время регулирования $\tau_р$ и перерегулирования σ (определяется путем моделирования) системы с желаемой НПФ соответственно равны $\tau_р = 7{,}1$; $\sigma = 20$.

Коэффициент преобразования

$$\alpha = t_р/\tau_р = 4/7{,}1 = 0{,}56.$$

Чтобы получить ЖПФ, нужно проделать обратное преобразование (12), положив $a_n = 1$:

$$b_0 = 0{,}56 \cdot 3{,}5 = 1{,}6;\ b_1 = 1;$$
$$a_0 = 0{,}56^3 = 0{,}1756;\ a_1 = 0{,}56^2 \cdot 3{,}5 = 1{,}098;$$
$$a_2 = 0{,}56 \cdot 3{,}5 = 1{,}96;\ a_3 = 1.$$

Таким образом, ЖПФ имеет вид

$$W_ж = (1{,}96s + 1)/(0{,}1756s^3 + 1{,}098s^2 + 1{,}96s + 1).$$

Условия разрешимости, физической реализуемости и грубости принимают вид

$$3 \leqslant n_M + n_N + 1;$$
$$1 + n_M \leqslant 1 + n_N + 1;$$
$$3 = 1 + n_N + 1.$$

Решив эту систему, находим

$$n_N = 1,\ \ n_M = 1,$$
$$M(s) = b_0 s + b_1,\ N(s) = a_0 s + a_1.$$

Полиномиальные уравнения (6) принимают вид

$$b_0 s + b_1 + s(a_0 s + a_1)s =$$
$$= 0{,}1756s^3 + 1{,}098s^2 + 1{,}96s + 1.$$

Отсюда получаем

$$a_0 = 0{,}1756;\ a_1 = 1{,}098;\ b_0 = 1{,}9;\ b_1 = 1;$$
$$M(s) = 1{,}9s + 1;\ N(s) = 0{,}1756s + 1{,}098.$$

Поставив найденные полиномы и полиномы, полученные в процессе факторизации передаточной функции объекта $P^-(s)$ и $R^-(s)$, в соотношение (5), находим

$$W_p(s) = \frac{(s+1)(2s+1)(1{,}9s+1)}{(0{,}5s+1)(0{,}1756s+1{,}098)s}.$$

Как показывает моделирование, синтезированная система удовлетворяет заданным требованиям качества: время регулирования $t_р = 4$ и перерегулирование $\sigma = 20$.

Заключение

Если синтезируемая система обладает астатизмом первого порядка, то переходный процесс получается монотонным, если в качестве типового НПФ выбрать биномиальную НПФ.

Если система обладает астатизмом второго порядка и выше, то перерегулирование получается большим. Оно тем больше, чем выше порядок астатизма и выше порядок синтезируемой системы. В этом случае перерегулирование получается меньшим, если в качестве типовой выбрать геометрическую или арифметическую НПФ. Если при построении характеристического полинома в качестве его корней принимается возрастающая геометрическая прогрессия, то ее первый член будет степенью устойчивости, и чем меньше степень устойчивости, тем меньше перерегулирование. Поэтому, имея таблицы или графики зависимости перерегулирования от степени устойчивости геометрической НПФ, путем выбора первого члена характеристического полинома можно обеспечить заданное перерегулирование.

Список литературы

1. **Солодовников В. В., Филимонов Н. Б.** Динамическое качество систем автоматического регулирования. М.: МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1987.

2. **Красовский А. А., Поспелов Г. С.** Основы автоматики и технической кибернетики. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962.

3. **Соколов Н. И.** Аналитический метод синтеза систем управления. М.: Машиностроение, 1966.

4. **Ким Д. П.** Алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 164 с.

5. **Ким Д. П.** Алгебраический метод синтеза систем линейных непрерывных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 9—15.

6. **Ким Д. П.** Определение желаемой передаточной функции при синтезе систем управления алгебраическим методом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 5. С. 15—21.

Algebraic Method for the Synthesis of Astatic Continuous-Time Control Systems

D. P. Kim, dpkim@yandex.ru,
Moscow Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation

Corresponding author: **Kim Dmitry P.,** D. Sc., Professor,
Moscow Technological University (MIREA), Moscow, Russian Federation,
e-mail: dpkim@yandex.ru

Accepted on December 25, 2018

Abstract

An algebraic method for the synthesis of astatic continuous-time control systems is considered. The method is based on the construction of the desired transfer function (DTF) from given performance indicators (setting time, overshoot, etc.) and a given plant transfer function. The construction of DTF is based on the use of the desired normalized transfer function (NTF). The desired NTF is the transfer function whose denominator is a monic polynomial with unit free term and whose performance indicators, except for the setting time, coincide with those of the DTF. Therefore, one can obtain the DTF by constructing the desired NTF and then by applying the inverse transform with transformation ratio equal to the ratio of the setting time of the system to be synthesized to that of the system with the desired NTF. The desired NTF is assembled from standard NTFs. There are various standard NTFs: binomial, arithmetic, and geometric. The type of an NTF is determined by its characteristic polynomial; an NTF is said to be binomial if its characteristic polynomial is the Newton binomial and arithmetic or geometric if the roots of its characteristic polynomial form an arithmetic or a geometric progression, respectively. When constructing the desired NTF, three conditions must be met: the physical feasibility of the controller, solvability, and robustness. These three conditions determine the degrees of the characteristic equation of the system to be synthesized and the degrees of the unknown polynomials that are introduced in the synthesis process. After that, according to the given performance indicators, the type of the desired NTF is determined. Here we find only the denominator of the desired NTF. If the system to be synthesized is r^{th}-order astatic and the plant does not contain right poles and zeros, then the numerator of the desired NTF is equal to the sum of the last r terms of the characteristic polynomial. After the system DTF has been obtained, the transfer function of the controller is determined by equating the transfer function of the closed-loop system with the DTF.

Keywords: *the desired transfer function of the normalized transfer function, control time, overshoot, order astatism*

For citation:

Kim D. P. Algebraic Method for the Synthesis of Astatic Continuous-Time Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 5, pp. 274—279.

DOI: 10.17587/mau.20.274-279

References

1. **Solodovnikov V. V., Filimonov N. B.** *Dinamicheskoe kachestvo sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* (Dynamic Performance of Automatic Control Systems), Moscow, Bauman Technical University, 1987 (in Russian).
2. **Krasovsky A. A., Pospelov G. S.** *Osnovy avtomatiki i tekhnicheskoj kibernetiki* (Foundations of Automation and Technical Cybernetics), Moscow-Leningrad, GOSENERGOIZDAT, 1962 (in Russian).
3. **Sokolov N. I.** *Analiticheskij metod sinteza sistem upravleniya* (An Analytical Method for the Synthesis of Control Systems), Moscow, Mashinostroenie, 1966 (in Russian).
4. **Kim D. P.** *Algebraicheskie metody sinteza sistem avtomaticheskogo uprav-leniya* (Algebraic Methods for the Synthesis of Automatic Control Systems), Moscow, Fizmatlit, 2014 (in Russian).
5. **Kim D. P.** *Algebraicheskij metod sinteza sistem linejnykh nepreryvnykh sistem upravleniya* (Algebraic method for the synthesis of systems of linear continuous control systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2011, no. 1, pp. 9—15 (in Russian).
6. **Kim D. P.** *Opredelenie zhelaemoj peredatochnoj funktsii pri sinteze sistem upravleniya algebraicheskim metodom* (Determination of the desired transfer function in the synthesis of control systems by the algebraic method), *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2011, no. 5, pp. 15—21 (in Russian).

DOI: 10.17587/mau.20.280-290

M. Yu. Rachkov, michyur@gmail.com,
Moscow Politech

Corresponding author: **Rachkov Mikhail Yu.,** D. Sc., Prof.,
Moscow Politech, Moscow, 107023, Russian Federation, e-mail: michyur@gmail.com

Accepted Desember 28, 2018

Modelling of Demining Manipulator Optimal Functioning

Abstract

The paper describes the modelling of a demining manipulator that contains a pneumatic drive, an infrared mine detector and a mine neutralizator. The infrared mine detector identifies the mine position in the scanning mode of the manipulator and gives a control signal to an input of a manipulator drive control unit for accurate positioning of the neutralizator above the detected mine. A problem of the optimal manipulator positioning in the sense of the control energy consumption minimization is solved. The feedback loop contains only one sensor to perform the optimal positioning of the third-order control object due to an observer application. Modelling results of the infrared detector mine searching and of the neutralizator positioning by means of a pneumatic manipulator are presented. A comparison of modelling and experimental results shows that modelling assumptions correspond enough to real process parameters.

Keywords: *modelling, demining manipulator, pneumatic drive, optimal positioning, infrared mine detector, observer*

For citation:

Rachkov M. Yu. Modelling of Demining Manipulator Optimal Functioning, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 5, pp. 280—290.

УДК 004.896:621.865

DOI: 10.17587/mau.20.280-290

М. Ю. Рачков, д-р техн. наук, проф., michyur@gmail.com,
Московский Политех

Моделирование оптимального режима работы манипулятора для разминирования

Описывается моделирование манипулятора для разминирования, который содержит пневматический привод, инфракрасный датчик и нейтрализатор мин. Инфракрасный датчик определяет положение мины в режиме сканирования манипулятора и подает управляющий сигнал на вход блока управления привода манипулятора для точного позиционирования нейтрализатора над обнаруженной миной. Решена задача оптимального позиционирования манипулятора в смысле минимизации энергопотребления на управление. Контур обратной связи содержит только один датчик для выполнения оптимального позиционирования системы благодаря применению наблюдателя. Управление системой осуществляется с помощью пневматического сигнала. Информация о текущем состоянии системы подается от датчика давления, подключенного к пневматическим цилиндрам, и от наблюдателя. Представлена реализация системы оптимального управления, которая требует только трех блоков масштабирования и одного сумматора, при этом модель манипулятора состоит из двух интеграторов, одного сумматора и двух блоков масштабирования. Реализовано компьютерное моделирование работы инфракрасного датчика мин. Рассчитано затухание микроволн и потребляемая мощность на заданной глубине залегания мины в грунте. Работа инфракрасного датчика моделируется в двухфазном режиме поиска мин. Полученное распределение температуры внутри объема грунта, содержащего мину, после воздействия на рабочую зону микроволнами, позволяет получать информацию о местонахождении мины. Представлены результаты моделирования поиска мины инфракрасным датчиком и моделирования позиционирования нейтрализатора с помощью пневматического манипулятора. Сравнение результатов моделирования и эксперимента показывает, что допущения, принятые при моделировании, достаточно точно соответствуют параметрам реального процесса.

Ключевые слова*: моделирование, манипулятор, разминирование, пневматический привод, оптимальное позиционирование, инфракрасный датчик, наблюдатель*

Introduction

Landmines affect almost every aspect of life in states recovering from conflict. According to the UN Mine Action Service, there are more than 110 million mines spread across 68 countries [1]. The Convention on the Prohibition of the Use, Stockpiling, Production and Transfer of Anti-Personnel Mines and on their Destruction, known informally as Mine Ban Treaty, aims at eliminating anti-personnel landmines (AP-mines) around the world. To date, there are 164 state parties to the treaty.

If the cost of the mine removing would be about the cost of the mine, the main advantages of using the mine would disappear. Automation of demining operations can carry out this task with substantially reduced costs due to the special design of the demining system [2—6].

Automation of demining can be performed by means of autonomous robots equipped with a mine detection block and a mine neutralizator. A robot manipulator carries out searching trajectories of the detection block and positioning of the mine neutralizator.

For autonomous robots high payload-to-weight ratio of the manipulator is important. Pneumatic manipulators have such a possibility, compared to electric driven manipulators. Another desirable characteristic for autonomous systems is the minimization of the energy consumption of the onboard supply unit. This demands applying an optimal feedback control of the manipulator motion.

It was concluded in [7] that the third-order control provides a practical choice for effective control of pneumatic manipulators. Sometimes, in practice, it is impossible to measure a full phase vector because of design parameters of the manipulator. Minimizing the sensors number used for optimal control is important in this case.

The demining manipulator should fulfill the searching motion of the mine detector and the positioning of the demining equipment. Modelling of the infrared (IR) detector mine searching and of the mine neutralizator positioning by means of the pneumatic manipulator is presented.

1. System description

The demining system consists of the manipulator that is installed on a mobile robot (Fig. 1.1). The end-effector of the manipulator contains a mine detector and a mine neutralizator.

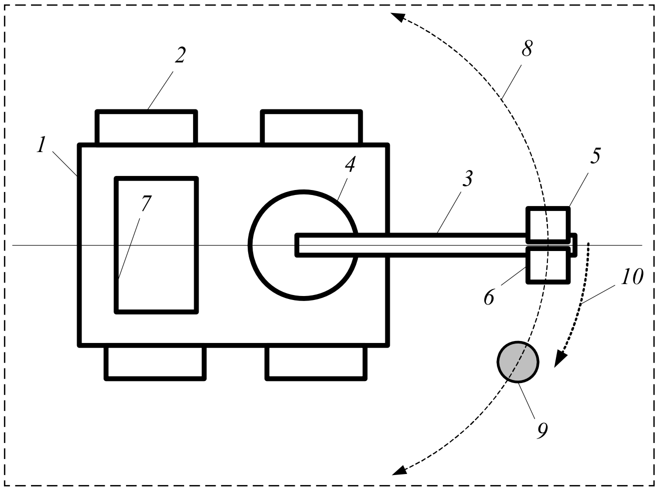


Fig. 1.1. General diagram of the system:
1 — mobile robot; *2* — wheels; *3* — manipulator; *4* — manipulator drive; *5* — mine detector; *6* — mine neutralizator; *7* — control and supply block; *8* — scanning trajectory; *9* — mine; *10* — neutralizator positioning trajectory

The mine detector performs scanning trajectories by means of the manipulator during robot motion across a minefield. After a mine is detected, the manipulator should perform the neutralizator positioning trajectory to place it over the detected mine.

The neutralizator is based on laser heating of the mine until the explosive filler ignites and starts to burn. If the mine has a metal case, the heat is conducted through the case and target irradiation is continued until the temperature of the inside wall and the temperature of the explosive filler exceeds its combustion temperature [8]. If it is a plastic case, the case is irradiated until it has been penetrated and the explosive filler is ignited, either directly from the laser radiation or from the flames burning the plastic case.

A functional diagram of the system is shown in Fig. 1.2.

The mine detector provides information about the mine angle position in the scanning mode of the manipulator. This information goes by a feedback loop to the control unit and changes the scanning mode

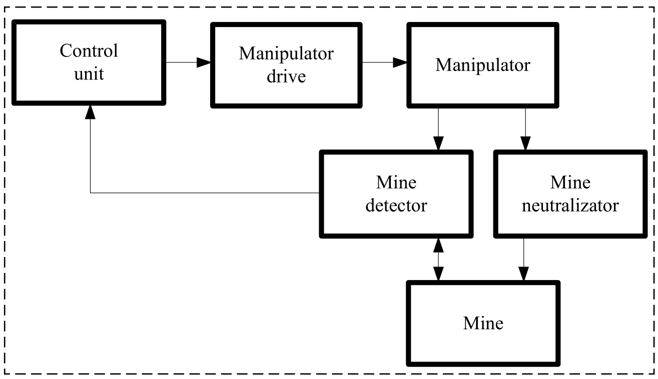


Fig. 1.2. Functional diagram of the system

with 180° rotation to the neutralizator positioning mode with rotation to the detected area. The manipulator drive performs positioning of the neutralizator according to the given angle. The angle is measured relatively to the central axis of the manipulator taking into account the design parameters of the neutralizator and its connection to the manipulator.

2. Mine detector modelling

The mine sensing is based on an infrared image analysis obtained during microwave soil heating and posterior cooling. The detector prototype contains a microwave klystron emitting 1 kW power at the frequency of 2.45 GHz and two infrared sensors sensitive in the range of 8—14 μm. Depending on the soil dielectric properties, the emitted radiation will be absorbed, reflected or transmitted through. Common plastic materials are transmissive, metals reflect the microwaves, and wet soil absorbs and converts the radiation to heat. Using this sensor, it is possible to image thermal gradients in the soil surface and detect different rates of temperature changes depending on the soil content [9].

The mine detector uses temperature gradients sensed over a homogeneous soil surface containing a plastic mine. According to the electromagnetic theory, a plane wave propagating in a lossy dielectric can be expressed by [10]:

$$E = E_0 e^{-\gamma z} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}, \tag{2.1}$$

where z is the propagation direction, E_0 is the electric field in position $z = 0$, and α and β are attenuation and phase constants for the material in which the wave is propagating. The propagation constant γ can be expressed by the following equation

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}, \tag{2.2}$$

where $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ and $\mu = \mu_r\mu_0$ are the dielectric permittivity and the magnetic permeability of the material expressed here relatively to the permittivity ε_0 and permeability μ_0 in free space, σ is the material conductivity and ω is the angular frequency of the wave. If σ is much bigger then $\omega\varepsilon$, the medium can be considered as a perfect conductor, if σ is much smaller then $\omega\varepsilon$ the medium can be considered as a perfect dielectric.

When a planar electromagnetic wave propagates into a soil surface, part of it will be refracted into the soil and the other part will be reflected to the air (Fig. 2.1).

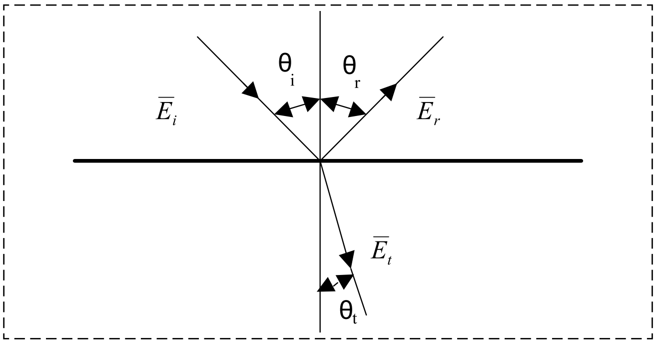


Fig. 2.1. Electromagnetic wave reflection and refraction

According to the Snell's law, reflection and refraction angles can be expressed by the following equations:

$$\theta_i = \theta_r; \tag{2.3}$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = n, \tag{2.4}$$

where θ_i, θ_r and θ_t are incident, reflection and refraction angles respectively, n — refraction coefficient.

The ratio between the reflected (E_r) and the incident electric field (E_i) is the reflection coefficient. Depending on the type of wave polarization used (horizontal or vertical), this ratio can be expressed by R_h or R_v:

$$R_h = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta_i}}; \tag{2.5}$$

$$R_v = \frac{E_r}{E_i} = \frac{\varepsilon_r\cos\theta_i - \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta_i}}{\varepsilon_r\cos\theta_i + \sqrt{\varepsilon_r - \sin^2\theta_i}}. \tag{2.6}$$

These expressions are useful to determine optimum incident angle in order to maximize the energy propagated into the second medium. The electric field can be related with the transmitted power using the Poynting vector expression and Maxwell laws [11]. In the far field, the electromagnetic power P can be expressed by:

$$P = \frac{1}{2\eta}|E|^2 A, \text{ [W]} \tag{2.7}$$

where η is the impedance seen by the wave ($\eta = 120\pi$ in free space) and A is the soil area enclosed by the valve radiation (in our case $A = 0.1225$ m^2). The heat generated in an elemental volume of material by a microwave electric field depends mainly on the frequency and on the dielectric properties of the material [12]. The power P_v absorbed per unit of volume can be calculated through the following equation,

$$Pv = \omega E^2 \varepsilon \tan\delta, \text{ [W/m}^3\text{]} \tag{2.8}$$

where ω is the angular frequency, E is the absolute value of the electrical field, ε is the material permittivity, and $\tan(\delta)$ is the tangent of losses in the medium that can be expressed by the following equation [13]:

$$\tan\delta = \frac{\omega\varepsilon'' + \sigma}{\omega\varepsilon'}, \qquad (2.9)$$

where ε' and ε'' are real and complex parts of the permittivity

$$\varepsilon = \varepsilon' + j\varepsilon'' = \varepsilon'\left(1 - j\tan\delta\right). \qquad (2.10)$$

A computational implementation of the model was done by Matlab [14]. It calculates the microwave attenuation and the power absorbed from the valve output, above the ground, up to a specified depth in the ground. Vertical polarity is used by default in the implementation. The user can choose to visualize the power or the electrical field and can model the soil with or without a mine. It is also possible to visualize the power absorbed by the soil and by the landmine [15, 16]. A plastic landmine with $\varepsilon_r = 2.3$ and $\tan(\delta) = 0.66 \cdot 10^{-4}$ was considered. It is assumed that the microwaves do not suffer attenuation while passing through the mines, since these are constituted, in its bigger part, by plastic material. The model includes a value for the dielectric constant of the ground. In general case, the ground is an anisotropic medium whose properties are changed with the frequency, moisture content and temperature. The model contains the following parameters: $f = 2.45$ GHz, common frequency of microwave heating systems, $P_t = 1000$ W, power emitted by the microwave klystron, *depth* = 0.5 m, $\varepsilon_r = 10$, typical relative permittivity for sand, $\sigma = 10$ mS/m, idem, $\theta_i = 65°$. The reflection coefficient of 0.1649 and the optimal incidence angle of 72° were used in the model.

The following graphics (Fig. 2.2—2.5) show the electrical field and absorbed power without the

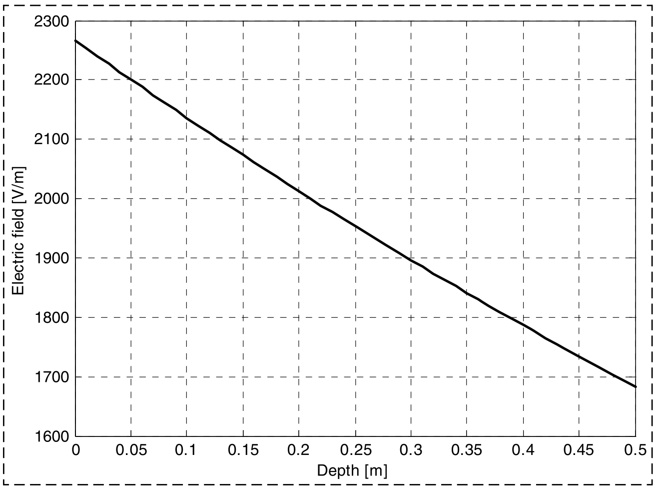


Fig. 2.2. Electric field (without mine)

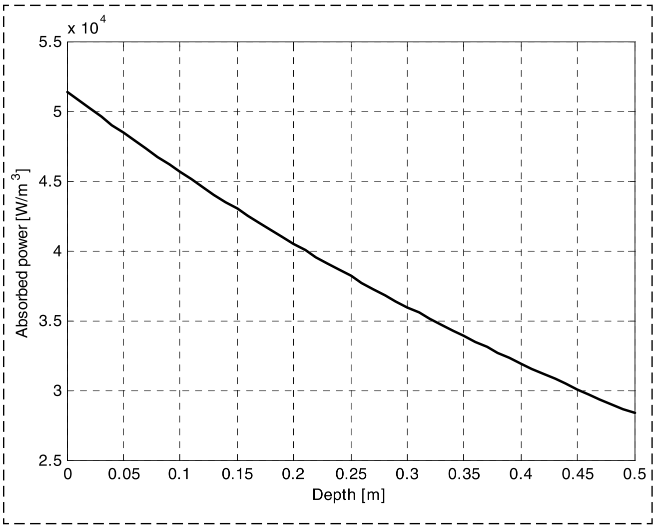


Fig. 2.3 Absorbed power (without mine)

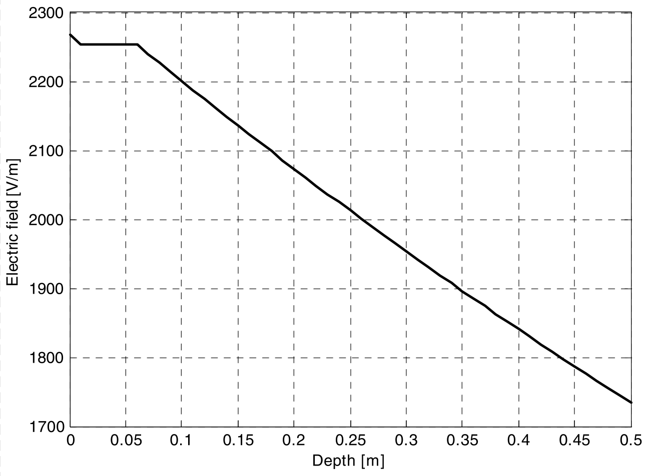


Fig. 2.4. Electric field (with mine)

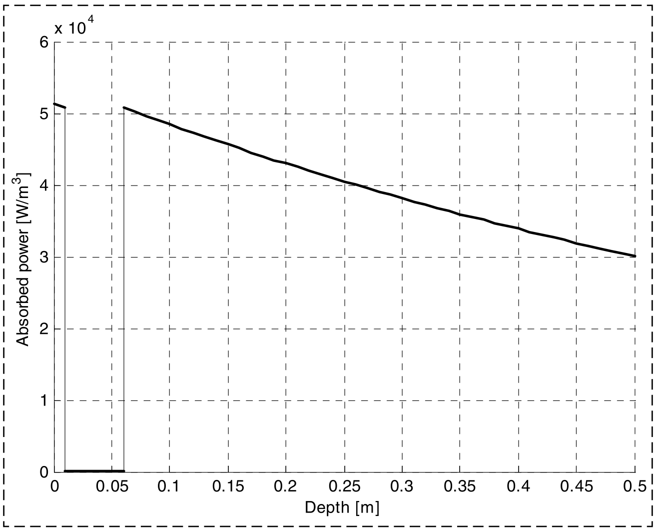


Fig. 2.5. Absorbed power (with mine)

mine and with the mine of 5 cm height, as a function of depth.

An analysis of the graphics shows that the electric field does not suffer attenuation through the mine and, therefore, the mine absorbs almost no power. The heat transfer has a central role in electric heating applications. A heat transfer process can occur by conduction, convection or radiation. By the application of electric heating, all these mechanisms are important and can actuate independently or in combination. According to the Fourier law, the rate of heat transfer from one body to another body at a different temperature can be expressed by the following equation

$$q = -Ak\frac{dT}{dx}, \quad (2.11)$$

where k is the thermal conductivity, dT/dx is the thermal gradient in the heat flux direction and A is the heat flux cross-sectional area.

The equation for convection heat transfer phenomena is

$$q = Ah_\tau(T_s - T_\infty), \quad (2.12)$$

where h_τ is the heat transfer coefficient and A is the characteristic area, T_s is the surface temperature, T_∞ is the atmospheric temperature. The heat transfer coefficient is a complex value that depends on the specific heat, viscosity, thermal conductivity, density, and temperature difference.

Radiation represents the main heating process by electromagnetic energy. The heat exchange between two gray surfaces, A_1 and A_2, can be expressed by Stefan-Boltzmann law,

$$q_R = F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, A_1, A_2)\sigma(T_1^4 - T_2^4), \quad (2.13)$$

where σ is the Stefan-Boltzmann constant and $F(\varepsilon_1, \varepsilon_2, A_1, A_2)$ is a view factor that considers the system geometry, particularly the relative orientation of areas A_1 and A_2. The parameter ε represents the material emissivity.

By the energy conservation law, the energy flowing into a surface, Π_ι, plus the internal heat generation, Pv, should equal the energy stored in the surface, Π_σ, plus the energy abandoning the surface, Π_ε:

$$\Pi_\iota + Pv = \Pi_\sigma + \Pi_\varepsilon. \quad (2.14)$$

The internal heat generation in a material is a process that can be provoked by the Joule effect with the flow of an electrical current, or by dielectric heating with microwaves. Dielectric heating occurs when a substance is exposed to an electromagnetic field with frequencies between 10 and 10^5 MHz, corresponding to wavelengths from 30 m to 3 μm respectively.

The heating rate of material exposed to microwaves (dielectric heating) can be calculated by the energy conservation law, supposing the inexistence of boundary losses by radiation or convection:

$$\rho_0 c\frac{dT}{dx} = Pv \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{\omega E^2 \varepsilon \tan\delta}{c\rho_0}, \quad (2.15)$$

where c is the specific heat and ρ_0 is the material density. The rate of a temperature variation is expressed in terms of conductivity or heat loss, electric field and operating frequency. This equation is a good approximation of the temperature variation inside the material, since the thermal conductivity can be neglected in this case.

The general equation for mass and heat transfer, particularly in non-homogeneous materials is very complex. The general equation for heat transfer, including the term of convection and the volumetric source of heat P_v can be written as

$$c\rho_0\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon\nabla T\right) = -\nabla q + Pv, \quad (2.15)$$

where T is the temperature, q is the vector of total heat flux, ρ_0 is the material density and υ is the speed vector for the heat transfer fluid. The term $\nabla(p\upsilon)$ relative to compressible fluids at a pressure p was ignored in the above equation. If the material is submitted to radiation, then the heat flux q should include the radiation term (q_R) and the conduction term q_c:

$$q = q_c + q_R = -k_e\nabla T + q_R, \quad (2.16)$$

where k_e is the effective thermal conductivity. Replacing the equation (2.16) in the equation (2.15) we obtain

$$c\rho_0\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k_e\nabla T) - c\rho_0\upsilon\nabla T - \nabla q_R + Pv. \quad (2.17)$$

The volumetric heating can be a consequence of ohmic heating by an electric current flow in the material, surface currents generated by induction heating, or reorientation of electric dipoles due to dielectric heating.

The modelling of a volume heating by microwave radiation can be done using the Partial Differential Equations (PDE) toolbox of Matlab. This toolbox provides a graphical interface that allows modelling the shape and properties of the materials to be studied.

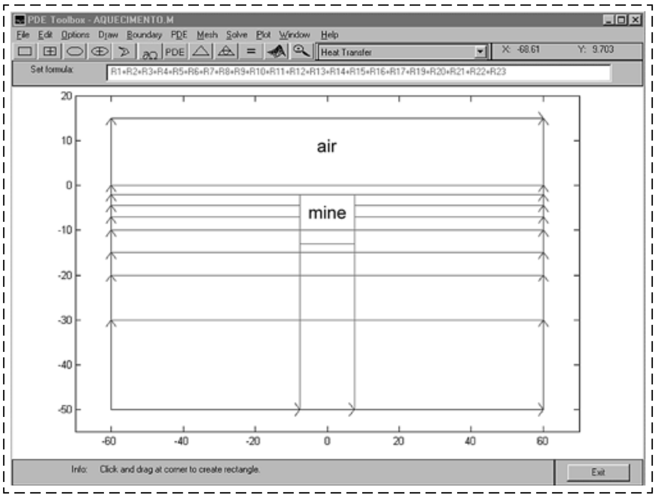


Fig. 2.6. Definition of the problem boundary

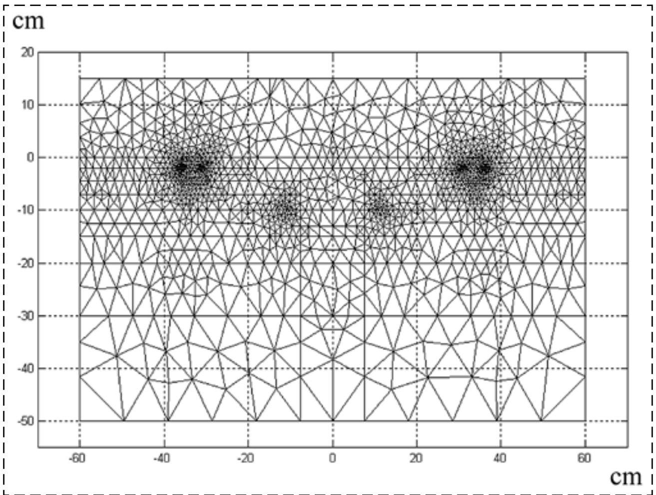


Fig. 2.7. Mesh of triangular finite elements

The following equation was calculated over the mesh of finite elements generated by the toolbox:

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla\left(k \nabla T\right) = Pv + h\left(T_{ext} - T\right), \quad (2.18)$$

where ρ_0 is the material density, c is the specific heat, T is the temperature, T_{ext} is the external temperature, k is the conduction coefficient, Pv represents the source of heat and h is the heat transfer coefficient by convection.

This example considers the absorbed power equal to power released by the source of heat. The first step to simulate the soil heating is to draw the geometry of the problem boundaries using the toolbox graphical interface.

In Fig. 2.6, the model representation of the soil, a mine and the surrounding air can be seen.

The next step is to specify the boundary conditions. The Dirichlet type of boundary conditions allows specifying the temperature in the boundary. After specifying the boundary conditions, it is necessary to specify the parameters for each type of material. To finish the modelling, it is necessary to generate a mesh of triangular finite elements. The mesh can be automatically generated by the PDE toolbox (see Fig. 2.7), but it can be adjusted manually.

The zones with higher temperature variation have finer mesh (mine and surface areas) in order to model the process accurately. The mesh of triangular finite elements is used for calculations of the heat distribution in the soil containing a mine.

Fig. 2.8 shows the temperature distribution inside a volume of soil containing a plastic mine in the interior after exposing the workspace with microwaves. The simulation initial temperature of 290 °K was considered for all the materials.

The simulation is composed of two phases. In the first phase, the workspace is exposed to homogeneous electromagnetic radiation. The temperature raises according to the materials properties.

The initial values of the second phase are the final values of the first phase. In this phase the material is not exposed to radiation, so only diffusion phenomena's occur by heat conduction. As it can be seen in Fig. 2.9, the surface over the mine is colder

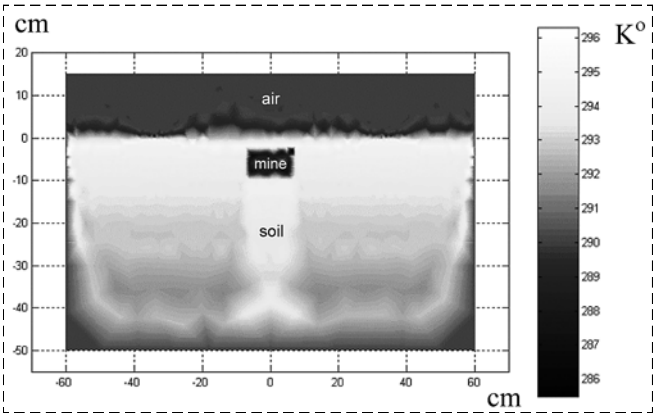


Fig. 2.8. Heat distribution after the first phase

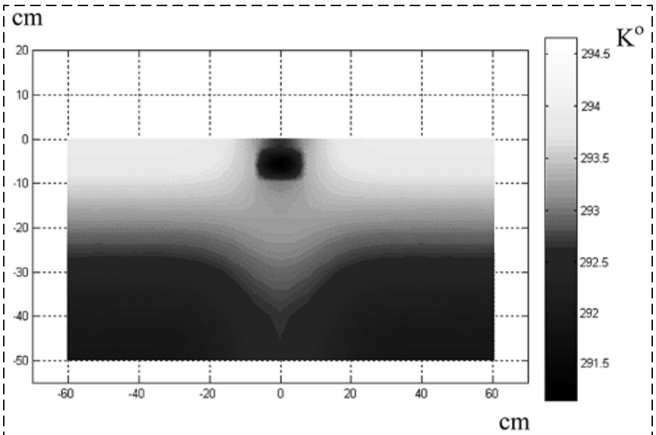


Fig. 2.9. Heat distribution in the end of second phase

than the neighborhood because the quantity of heat accumulated over the landmine is smaller than in the other regions, leading to faster cooling.

As a result, a signal about the mine position is generated by the detector. The control unit uses this signal to identify a mine angle position relative to the manipulator end-effector and gives a control signal to the manipulator drive for positioning of the neutralizator above the detected mine.

3. Manipulator drive modelling

A diagram of the drive control unit is shown in Fig. 3.1. The observer is placed in the control loop to minimize the number of sensors for the control.

A diagram of the manipulator drive is presented in Fig. 3.2.

The manipulator of a length L and an end-effector with the technological load (detection block and neutralizator) of mass m, is actuated by double-acting pneumatic power cylinders by means a gear with a lever d. The considered drive system with pressure variation in pneumatic power cylinders [7] is described by non-linear differential equations of the third order

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= p\frac{2F_n l}{mL^2} - f(\dot{\varphi}); \\ \dot{p} &= -\frac{2PF_n l}{V}\dot{\varphi} + \frac{RT}{V}g, \end{aligned} \quad (3.1)$$

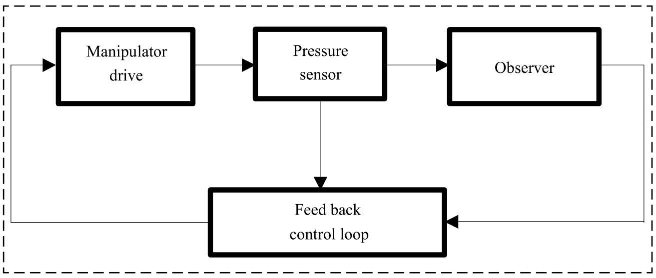


Fig. 3.1. Diagram of the drive control unit

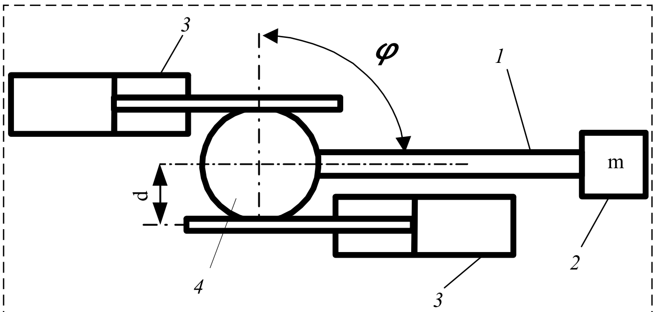


Fig. 3.2. Manipulator drive:
1 — manipulator; *2* — technological load; *3* — cylinders; *4* — gear

where φ is the angular position of the manipulator gripper, p is the current pressure difference in pneumatic cylinder volumes, F_n is the cross section of the cylinder piston, d is a lever of the acting force, R is the gas constant, T is the absolute temperature of working gas, V is the full volume of the pneumatic cylinder, P is the pressure inside the cylinder chambers in an equilibrium position of the cylinder pistons, g is the molar gas consumption in the pneumatic cylinder chambers, $f(\dot{\varphi})$ is the summand taking into account the friction force of the drive system.

The force of inertia for rather large values of mass m considerably exceeds the friction force in the drive system. In this case, it is possible to transform the system (3.1) as follows

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{13}x_3; \\ \dot{x}_2 &= x_1; \\ \dot{x}_3 &= -a_{31}x_1 + u, \end{aligned} \quad (3.2)$$

where

$$\begin{aligned} &x_1 = \dot{\varphi};\ x_2 = \varphi;\ x_3 = p; \\ &a_{13} = \frac{2F_n d}{mL^2};\ a_{31} = \frac{2PF_n d}{V};\ u = \frac{RT}{V}g. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Thus, the phase coordinates of the system are the angular position, the angular velocity of the manipulator end-effector, and the pressure in pneumatic power cylinders. The control parameter is gas consumption. The problem of minimization of the positioning coordinates of the system (3.2) and, simultaneously, of the control energy consumption should be solved. It is possible to solve the task by means of the following quadratic criterion

$$I = \int_0^\infty (r_2x_2^2 + r_3x_3^2 + \rho u^2)dt, \quad (3.4)$$

where r_2, r_3, ρ are adjustable coefficients. The control of the system is carried out by means of a gas flow valve. Information about the current system state is obtained from the pressure sensor, connected with the pneumatic cylinders, and from the observer [17].

The following moving object is considered:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t); \quad (3.5)$$

$$y(t) = C(t)x(t), \quad (3.6)$$

where x is an unknown n vector of the object state, u is a known control p vector, y is a vector of measured output parameters, A, B, C are given matrixes of corresponding dimensions.

To determine the state vector of an observed n system with linearly independent m outputs, it is enough to have an $n - m$ observer. Let us consider a $(n - m)$ n matrix D with independent constant row elements using the matrix C. If a vector z is a result of transforming of the state vector $x(t)$ by the matrix D, then

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} x(t). \quad (3.7)$$

The observation problem can be resolved if it is possible to obtain an estimation $\hat{z}$ of the vector z, and that an error $\tilde{z} = z - \hat{z}$ tends to zero. Let us suppose that a variation of the estimation is described as:

$$\frac{d}{dt}\hat{z} = F\hat{z}(t) + Gu(t) + Hy(t). \quad (3.8)$$

To study the time behavior of the error $\hat{z}$ it is possible to use the following differential equation:

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = \frac{d}{dt}(z - \hat{z}) = D\dot{x}(t) - \frac{d}{dt}\hat{z}(t).$$

Replacing the derivatives according to differential equations (3.1) and (3.4), we obtain

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = DAx - F\hat{z} + (DB - G)u - Hy.$$

Substituting here $\hat{z} = Dx - \tilde{z}$ and $y = Cx$, we have:

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = F\tilde{z}(t) + \left(DA - FD - HC\right)x(t) + (DB - G)u(t).$$

It means that the error $\hat{z}$ tends to zero irrespective of x and u, if the matrixes in the equation (3.8) are chosen as follows:

F — asymptotically stable,

$$G = DB; \quad (3.9)$$

$$DA - FD = HC. \quad (3.10)$$

It then results in:

$$\frac{d}{dt}\tilde{z}(t) = F\tilde{z}(t).$$

Therefore,

$$\tilde{z}(t) = \exp(Ft)\,\tilde{z}(0)$$

or

$$\hat{z}(t) = Dx(t) - \exp(Ft)\tilde{z}(0).$$

The function $\tilde{z}(t)$ can be used as an approximation for $z(t)$ in the equation (3.3). Now the synthesis of the observer is reduced to a solution of the equation (3.10) with additional limitations about the stability of the matrix F and the mutual lines independence of the matrixes D and C. The indicated solution exists if the matrixes A and F have different eigenvalues [18].

Defining:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix};\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix};\ A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ -a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

it is possible to record the system (3.2) in a matrix form

$$\dot{X} = AX + BU. \quad (3.12)$$

Taking into account, that for the considered case

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

and accepting:

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix};\ D = \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

we can obtain equations for the observer. The equation (3.7), taking into account (3.13) and (3.14), can be written as:

$$\begin{bmatrix} y \\ \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

and the equation (3.10) can be presented as:

$$\begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ -a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

From (3.16) we have the following equation system:

$$\begin{aligned} & d_{22} - a_{31}d_{23} + d_{21} = 0; \\ & d_{32} - a_{31}d_{33} + 2d_{21} = 0; \\ & d_{22} = 0; \\ & a_{13}d_{21} + d_{23} = 1; \\ & a_{13}d_{31} + 2d_{23} = 1. \end{aligned} \quad (3.17)$$

It is possible now to determine the elements of the matrix D from the system (3.17) as:

$$D = \begin{bmatrix} a_{31}(1 + a_{13}a_{31})^{-1} & 0 & (1 + a_{13}a_{31})^{-1} \\ a_{13}^{-1}\left[1 - 2(1 + a_{13}a_{31})^{-1}\right] & -2a_{31}(1 + a_{13}a_{31})^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

According to the equation (3.9), we have:

$$G = \begin{bmatrix} (1 + a_{13}a_{31})^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.19)$$

Taking into account equations (3.14) and (3.19), it is possible to present (3.8) as:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 + a_{13}a_{31})^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} U(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y(t) \qquad (3.20)$$

or

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_1 &= -\hat{z}_1 + (1 + a_{13}a_{31})^{-1} u + y; \\ \dot{\hat{z}}_2 &= -2\hat{z}_2 + y. \end{aligned} \qquad (3.21)$$

According to the equation (3.15) and determining $k = (1 + a_{13}a_{31})$, we have:

$$\begin{aligned} y &= x_3; \\ \hat{x}_1 &= a_{31}^{-1}k^{-1}\hat{z}_1 - a_{31}^{-1}x_3; \\ \hat{x}_2 &= -\frac{1}{2}a_{31}^{-1}k\hat{z}_2 + \frac{1}{2}a_{31}{}^{-1}a_{13}{}^{-1}(k-2)\hat{x}_1. \end{aligned} \qquad (3.22)$$

The obtained observer is described by equations (3.21) and (3.22).

Thus, measuring the variable $x_3 = p$ and receiving by an observer output the variables $\hat{x}_1 = \hat{\varphi}$ and $\hat{x}_2 = \hat{\varphi}$, we have necessary information to design a feedback control system of the pneumatic manipulator by the criterion (3.4).

An implementation of the observer model according to equations (3.21) and (3.22) is shown in Fig. 3.3.

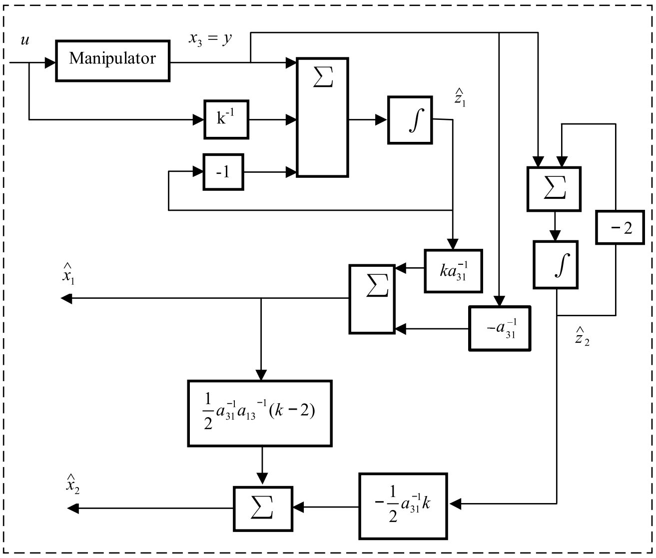


Fig. 3.3. Implementation of the observer model

The implementation of the observer demands two integrators, four summators and seven scaling blocks. The observer output gives the necessary information for the synthesis of the control system.

For the considered stationary system we can use the equation [19]:

$$R_1 - PBR_2^{-1}B'P + AP + PA = 0 \qquad (3.23)$$

where the matrixes A and B are determined according to the equations (3.11), and:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}; \; R_2 = \rho; \; P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}. \qquad (3.24)$$

An optimal control of the system (3.2), (3.4) can be written as follows:

$$u_o = -R_2^{-1}B'PX = -\rho^{-1}(P_{31}x_1 + P_{32}x_2 + P_{33}x_3), \qquad (3.25)$$

where the elements $i = 1, 2, 3$ are amplifying coefficients in the feedback loop of the control system.

The problem of the optimal control is reduced to the determination of necessary elements of the matrix P, which can be obtained from the equation (3.23). For such a purpose a solution algorithm of the equation (3.23) for stationary systems with infinite time of observation can be used.

Let us introduce the following matrix:

$$R = \begin{bmatrix} -A & BR_2^{-1}B' \\ R_1 & A' \end{bmatrix}, \qquad (3.26)$$

and an expression for a matrix

$$\lambda I - R \qquad (3.27)$$

where I is the identity matrix, λ is an eigenvalue of the matrix (3.4). A determinant of the matrix (3.27) is:

$$\det(\lambda I - R) = \lambda^3\left(\lambda^3 - \lambda\frac{r_3}{\rho} + \lambda a_{13}a_{31}\right) + \lambda a_{13}a_{31}(\lambda^3 + \lambda a_{13}a_{31}) + \frac{a_{13}}{\rho}(-r_2a_{13}).$$

Considering:

$$\lambda^2 = \alpha \qquad (3.28)$$

then, rewriting the expression for $\det(\lambda I - R)$ with usage of (3.28) and equating it to zero, we have:

$$\alpha^3 + \alpha^2\left(a_{13}a_{31} - \frac{r_3}{\rho}\right) + \alpha^2 a_{13}a_{31} + \alpha(a_{13}a_{31})^2 - \frac{a_{13}}{\rho}r_2a_{13} = 0. \qquad (3.29)$$

It is possible to solve the equation (3.29) using equations (3.3) and defining λ_1, λ_2, λ_3 that are located to the left of an imaginary axis. We can introduce the determinant of the matrix (3.27) as:

$$\det(\lambda I - R) = (-1)^n \Delta(\lambda)\Delta(-\lambda), \qquad (3.30)$$

where $\Delta(\lambda)$ — scalar polynomial of power n. Thus,

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3). \qquad (3.31)$$

Substituting values λ_1, λ_2, λ_3 in the equation (3.31), we can obtain a numerical value for $\Delta(\lambda)$. Then, making a substitution λ and R, we form a matrix

$$\Delta(R) = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{bmatrix}. \qquad (3.32)$$

The matrix R is defined by the equation (3.4) and is equal to

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{31} \\ 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & a_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (3.33)$$

Now it is possible to have values R_2 and R_4 from equations (3.32) and (3.33). According to [17],

$$P = R_4 R_2^{-1}. \qquad (3.34)$$

The necessary elements of the matrix P are defined from the equation (3.34). Using them in the equation (3.3), we obtain the optimal control solution as:

$$u_o = -\rho^{-1}(P_{31}\dot{\varphi} - P_{32}\varphi - P_{33}p). \qquad (3.\ 35)$$

The system using the optimal control (3.35) is asymptotically stable.

An implementation of the optimal control (3.35) with a simulation of the object (3.2) is shown in Fig. 3.4.

Thus, the implementation of the optimal control demands only three scaling blocks and one summator. The simulation of the object consists of two integrators, one summator and two scaling blocks. The control signal is used in the drive for the optimal positioning of the manipulator.

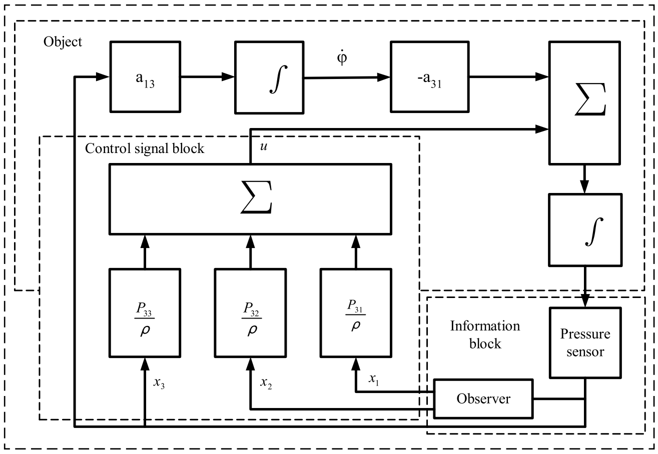


Fig. 3.4. Implementation of the optimal control modelling

The simulation and an experimental test with the industrial pneumatic manipulator Tsyklon [7] with the following numerical parameters: $P = 60$ N/cm^2, $d = 8$ cm, $m = 200$ N, $L = 80$ cm, $F_n = 133$ cm^2, $V = 2790$ cm^3, $r_2 = 10$, $r_3 = 1$, $\rho = 28$ were done. For these parameters, the optimal control solution according to (3.35) is

$$u_o = 1{,}249 \cdot 10^5 \dot{\varphi} - 1{,}130 \cdot 10^5 \varphi - 11{,}06 \cdot 10^5 p. \qquad (3.36)$$

Simulation and experimental results for the 30° angle positioning (Fig. 3.5, *a*) and 90° angle positioning (Fig. 3.5, *b*) show that end-effector trajectories tend to the set angle exponentially quickly.

An accuracy difference between modelling trajectories and experimental trajectories is inside 15 %. This difference is caused by the friction influence in the pneumatic elements of the real manipulator. The accuracy discrepancy decreases by increasing of the rotation angle value. Therefore, the modelling assumptions correspond in a satisfactory manner to the real positioning process parameters.

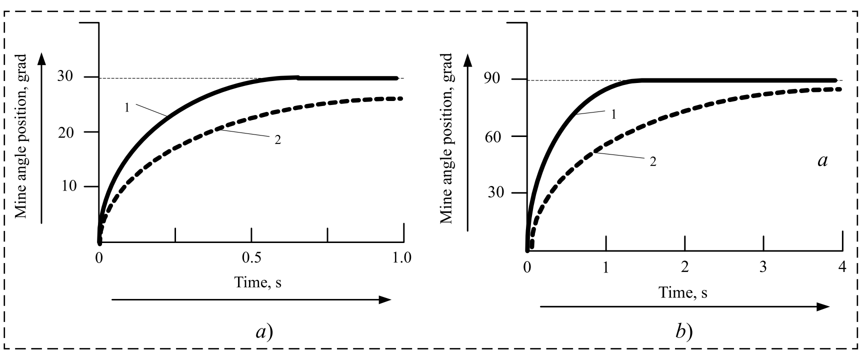


Fig. 3.5. Simulation results of manipulator positioning:
a — 30° angle positioning; *b* — 90° angle positioning (*1* — modelling trajectory; *2* — experimental trajectory)

The described modelling method can be applied to manipulators with other design parameters for the double-acting pneumatic drive.

Conclusions

Modelling of the demining manipulator is an important task while developing demining robots, in order to estimate the design and the dynamic parameters of the detection block and the manipulator drive unit. This methodology appears well suited to achieve the effective functioning of the automatic demining system.

The IR detector functioning is modelled in the mine searching two-phase mode. The obtained temperature distribution inside a volume of soil containing a plastic mine after exposing the workspace with microwaves, permits generating information about the location of the mine. This information is used as an input signal for modelling of the position control of the mine neutralizator by means of the double-acting pneumatic manipulator drive.

The problem of the optimal manipulator positioning in the sense of the control energy consumption minimization is solved. The feedback loop contains only one sensor to perform the optimal positioning of the third-order control object due to an observer application. Simulation results with numerical design parameters of the industrial pneumatic manipulator show that end-effector trajectories tend to the set angle exponentially quickly.

The comparison of the modelling and of the experimental results shows that the modelling assumptions are well adapted to the real process and that the proposed technique provides effectiveness in the system operation.

References

1. **Landmine** Monitor 2015, International Campaign to Ban Landmines — Cluster Munition Coalition (ICBL-CMC), 2015.
2. **de Almeida A. T., Khatib O. K.** Autonomous Robotics Systems, Springer, 1998.
3. **Mikulic D.** Design of demining machines, Springer, 2013.
4. **de Santos P. G., Cobano J. A., Garcia E., Estremera J., Armada M.** A six-legged robot-based system for humanitarian demining missions, *Mechatronics*, 2007, vol. 17, no. 8, pp. 417—430.
5. **Santana P. F., Barata J., Correia L.** Sustainable robots for humanitarian demining, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2007, vol. 4, no. 2, pp. 207—218.
6. **Rachkov M., Marques L., de Almeida A. T.** Automation of Demining, University Press, University of Coimbra, 2002.
7. **Rachkov M. Yu., Crisóstomo M., Marques L., de Almeida A. T.** Positional control of pneumatic manipulators for construction tasks, Automation in Construction, Elsevier Science, 2002, 11 (6), pp. 655—665.
8. **Yinon J.** Forensic and environmental detection of explosives, Wiley, 1999.
9. **Noro D., Sousa N., Marques L., de Almeida A. T.** Active Detection of Antipersonnel Landmines by Infrared, Annals of Electrotechnical Engineering Technology, Portuguese Engineering Society, 1999.
10. **Pozar D. M.** Microwave Engineering, Second Edition, John Wiley & Sons, 1998.
11. **Griffiths J.** Radio Wave Propagation and Antenas: an introduction, Prentice-Hall, 1987.
12. **Bengtsson N. E., Ohlsson T.** Microwave Heating in the Food Industry, *Proc. of the IEEE*, 1974, vol. 62, no. 1.
13. **Metaxas A. C.** Foundations of Electroheat — a unified approach, John Wiley & Sons, 1996.
14. **MATLAB,** High-Performance Numeric Computation and Visualization Software, The Math Works, Inc., 2016.
15. **Hipp J. E.** Soil Electromagnetic Parameters as Functions of Frequency, Soil Density, and Soil Moisture, *Proc. of the IEEE*, 1974, vol. 62, no. 1.
16. **Hallikainen M. T.** et al. Microwave Dielectric Behavior of Wet Soil — Part I: Empirical Models and Experimental Observations, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1985, vol. GE-23, no. 1.
17. **Luenberger D.** Observers for multivariable systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-11, 1966.
18. **Brammer K., Ziffling G.** Kalman-Bucy filter, Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
19. **Reutenberg Ya. N.** Automatic control, Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).

УДК 681.51 DOI: 10.17587/mau.20.291-298

О. Б. Шагниев, аспирант, shagnoleg@yandex.ru,
И. К. Шаньшин, магистрант, ivan.fizik92@yandex.ru,
С. Ф. Бурдаков, д-р техн. наук, проф., burdakov.s@yandex.ru,
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург

Управление регенеративными автоколебаниями в процессе фрезерования

Рассматривается проблема возникновения и оперативного подавления автоколебаний, возникающих в процессе фрезерования с помощью робота-манипулятора. Предполагается, что инструмент (фреза) связан с роботом упругим подвесом, который используется для силового очувствления робота. На основе математической модели регенеративных автоколебаний (chattering) проведено моделирование системы "робот—инструмент—обрабатываемая поверхность". Инструмент равномерно двигается вдоль обрабатываемой поверхности с заданным прижатием к ней. Прижатие фрезы, обеспечивающее необходимую осевую глубину резания (axial depth of cut), осуществляется с помощью позиционно-силового алгоритма управления. Данный алгоритм управления реализуется средствами двух ПИД регуляторов с позиционной и силовой обратными связями. Равномерное движение вдоль обрабатываемой поверхности, обеспечивающее требуемую подачу инструмента, осуществляется с помощью алгоритма управления по скорости. Управление по скорости осуществляется средствами отдельного ПИД регулятора. Настройки всех регуляторов обеспечивают быстродействие и плавность переходных процессов. Для сглаживания нежелательной динамики при нелинейной форме обрабатываемой поверхности возможно использование обучения на пробных циклах движения. Рядом авторов экспериментально и аналитически показано, что при фрезеровании "по следу", который остается на обрабатываемой поверхности при предыдущем проходе инструмента, возможно возникновение неустойчивых (регенеративных) автоколебаний. Неустойчивые автоколебания являются сдерживающим фактором для повышения производительности, которая главным образом зависит от глубины резания и скорости вращения инструмента. В настоящей работе рассматривается возможность оперативного детектирования начала возникновения неустойчивых автоколебаний по амплитудному спектру показаний датчиков горизонтальных сил взаимодействия инструмента с обрабатываемой поверхностью. Амплитудный спектр строится с помощью быстрого преобразования Фурье, что позволяет оперативно определять начало ухода процесса резания в неустойчивую зону. Следующее за этим небольшое уменьшение осевой глубины резания (в пределах 1...2 %) практически полностью стабилизирует процесс резания. В работе предлагается вариант построения контура адаптации для системы управления вертикальным движением робота, основанный на допустимом изменении осевой глубины резания.

Ключевые слова: *механообработка, упругая система "робот—инструмент—обрабатываемая поверхность", силовое очувствление, позиционно-силовое управление, вибрации, регенеративные автоколебания, амплитудный спектр, быстрое преобразование Фурье, адаптация*

Введение

Механическая обработка металлов является одним из основных методов изготовления деталей в машиностроении. Наиболее распространенной операцией механообработки является операция фрезерования [1—3], которая в последнее время все больше осуществляется с помощью робототехнических комплексов. Для расширения области применения и повышения производительности актуальными являются оптимизация и интенсификация процесса механообработки. Главным сдерживающим фактором повышения производительности фрезерования является возможная потеря динамической устойчивости системы "робот—инструмент—обрабатываемая поверхность", вызванная вибрациями инструмента [4—6]. Вибрации становятся причиной поломок инструмента, преждевременного износа режущих кромок, снижения качества и точности механообработки. На практике для исключения возможности потери устойчивости системы технологические параметры режимов механообработки осознанно занижаются, что, естественно, приводит к снижению производительности.

В настоящее время существует ряд гипотез относительно механизма возникновения вибраций при механообработке и последующих регенеративных автоколебаний, которые, в свою очередь, приводят к неустойчивости процесса фрезерования. Наиболее популярной является гипотеза о запаздывании изменения силы резания при изменении толщины срезаемого слоя из-за относительного смещения инструмента и обрабатываемой поверхности. В работах [7, 8] показано, что вследствие модуляции толщины снимаемого слоя в систему вносится энергия, необходимая для поддержания автоколебаний. Учитывая, что регенеративные автоколебания могут приводить к потере устойчивости, оператору необходимо постоянно контролировать процессы в системе.

Экспериментальные и теоретические исследования многих авторов в большинстве случаев позволяют получить лишь качественное представление о процессах. Так, в результате анализа устойчивости процесса резания с помощью нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием получаются так называемые лепестковые диаграммы устойчивости, позволяющие оператору подбирать корректные технологические параметры резания [9, 10]. Однако эта процедура не всегда гарантирует нахождение процесса в устойчивой зоне в силу приближенности модели.

Для процессов точения и фрезерования E. Budak и Y. Altintas разработали методы определения условий динамической устойчивости системы, позволяющие связать значение осевой глубины резания и скорости вращения фрезы, соответствующие устойчивой области [11—13]. Дальнейшие исследования этих авторов позволили разработать целый ряд практических способов снижения вибраций при фрезеровании. На данный момент наиболее распространены offline способы борьбы с вибрациями (нерегулярные фрезы, модуляторы скорости [14]). Вместе с тем актуальной в этом смысле остается задача построения адаптивной системы управления процессом фрезерования, способной в режиме online корректировать параметры механообработки в целях поддержания устойчивости процессов резания. В работах [15—17] описаны методы борьбы с вибрациями с помощью активного подвеса с настройкой по частоте вращения фрезы. В этих работах основной акцент делается на учете конструктивных особенностей станков с ЧПУ, что серьезно ограничивает возможность оперативной корректировки параметров механообработки в режиме online. С точки зрения гибкости системы управления и возможности пространственной обработки деталей произвольного профиля перспективным является использование многокоординатных роботов с инструментом, установленным в упругом подвесе. Упругий подвес обеспечивает силовое очувствление робота как минимум по трем осям [18]. Такая конфигурация позволяет использовать стандартный робот-манипулятор в режиме гибридного позиционно-силового управления, при котором перемещение робота в пространстве происходит с учетом контактных сил взаимодействия между инструментом и обрабатываемой поверхностью [19]. Применительно к задаче управления режимом механообработки установка инструмента в упругий подвес дает дополнительные возможности для организации контуров адаптации, способных своевременно контролировать возможную потерю устойчивости процесса механообработки и обеспечивать необходимое соотношение технологических параметров резания, при котором вибрации системы "робот—инструмент—обрабатываемая поверхность" находятся на допустимом уровне [20, 21].

В настоящей работе исследуется возможность автоматической коррекции осевой глубины резания при появлении признаков потери динамической устойчивости. При этом соответствующий момент времени фиксируется с помощью амплитудного спектра горизонтальной силы резания. Представлены результаты компьютерного моделирования работы контура адаптации, демонстрирующие его эффективность.

Постановка задачи

Будем считать, что робот, оснащенный фрезой в упругом подвесе, в соответствии с технологической задачей двигается с некоторой скоростью вдоль обрабатываемой поверхности с заданным прижатием к ней. Рассматривается торцевое фрезерование. Для обеспечения заданного уровня прижатия инструмента к поверхности используется позиционно-силовой алгоритм управления, реализованный на базе штатной системы позиционного управления робота [22]. В режиме возникновения контакта инструмента с поверхностью происходит переключение с режима позиционирования на режим позиционно-силового управления, которое осуществляется с помощью дополнительной обратной связи по информации, получаемой от датчика вертикального усилия. На основании этих данных формируется скорректированное задание, которое определяет осевую глубину резания. Своевременное уменьшение осевой глубины резания позволяет сгладить негативное влияние сил резания на динамику системы практически без потери производительности.

Управление горизонтальным движением робота осуществляется на базе алгоритма управления по скорости. Целью управления является поддержание желаемой подачи инструмента. Расчетная схема робота в режиме контактного взаимодействия с обрабатываемой поверхностью представлена на рис. 1.

На рис. 1 введены следующие обозначения: m — приведенная масса руки робота; m_s — приведенная масса инструмента; c_{sx}, c_{sy} и c_{sz} — эквивалентные жесткости подвеса инструмента в трех направлениях; y — вертикальная координата руки робота; y_s — вертикальная координата инструмента; x, z — горизонтальные координаты руки робота; x_s, z_s — горизонтальные координаты инструмента; $y_{sf}(x)$ — уравнение обрабатываемой поверхности; F_x, F_y, F_z — силы, развиваемые приводами вдоль соответствующих осей; R_x, R_y, R_z — силы резания, действующие на инструмент со стороны обрабатываемой поверхности; S — горизонтальная подача; n — частота вращения фрезы; a — осевая глубина резания. Предполагается, что координаты робота и инструмента учитывают их конструктивные размеры.

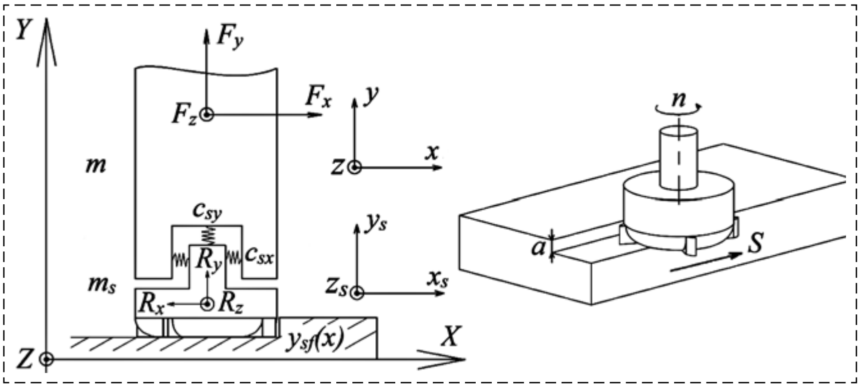


Рис. 1. Расчетная схема системы "робот—инструмент—обрабатываемая поверхность"
Fig. 1. The calculation scheme of the "robot—tool—working surface" system

В режиме контакта с обрабатываемой поверхностью математическая модель очувствленного робота как объекта управления имеет следующий вид:

$$m\ddot{y} + b_y\dot{y} + c_{sy}(y - y_s) = F_y - mg;$$

$$y_s = y_{sf}(x, z);$$

$$F_y = \left(k_p + k_i\frac{1}{p} + k_d\frac{N_y}{1 + N_y\frac{1}{p}}\right)(\tilde{y}^d - y);$$

$$\tilde{y}^d = \left(\theta_p + \theta_i\frac{1}{p} + \theta_d\frac{N_f}{1 + N_f\frac{1}{p}}\right)(F_{sy}^d - F_{sy});$$

$$m\ddot{x} + b_x\dot{x} + c_{sx}(x - x_s) = F_x;$$

$$m_s\ddot{x}_s + b_{sx}\dot{x}_s + c_{sx}(x_s - x) = R_x;$$

$$F_x = \left(k_{px} + k_{ix}\frac{1}{p} + k_{dx}\frac{N_x}{1 + N_x\frac{1}{p}}\right)(\dot{x}^d - \dot{x});$$

$$m\ddot{z} + b_z\dot{z} + c_{sz}(z - z_s) = F_z;$$

$$m_s\ddot{z}_s + b_{sz}\dot{z}_s + c_{sz}(z_s - z) = R_z;$$

$$F_z = \left(k_{pz} + k_{iz}\frac{1}{p} + k_{dz}\frac{N_z}{1 + N_z\frac{1}{p}}\right)(\dot{z}^d - \dot{z}).$$

Задающие параметры F_{sy}^d, $\dot{x}^d$, $\dot{z}^d$ устанавливаются оператором в соответствии с технологическими требованиями. Задание $\tilde{y}^d$ формируется с помощью второго ПИД регулятора на основании обратной связи по силе вертикального взаимодействия инструмента и обрабатываемой поверхности $F_{sy} = c_{sy}(y - y_s)$. Настройки всех ПИД регуляторов (k_p, k_i, k_d, N_y, θ_p, θ_i, θ_d, N_f, k_{px}, k_{ix}, k_{dx}, N_x, k_{pz}, k_{iz}, k_{dz}, N_z) обеспечивают максимальное быстродействие и плавность переходных процессов движения вдоль осей X, Y, Z. Динамическая взаимосвязь движений вдоль обрабатываемой поверхности осуществляется через горизонтальные силы резания R_x, R_z и силу $R_y = F_{sy}$, определяющую осевую глубину резания.

При компьютерном моделировании предполагается, что настройки ПИД регуляторов таковы, что движения робота осуществляются по предписанным законам. В дальнейшем используются следующие значения параметров системы:

$$m = 2 \text{ кг}; \; m_s = 0{,}2 \text{ кг};$$
$$b_s = b_{sx} = b_{sy} = b_{sz} = 50 \text{ Н}\cdot\text{с/м};$$
$$b = b_x = b_y = b_z = 20 \text{ Н}\cdot\text{с/м};$$
$$c_s = c_{sx} = c_{sy} = c_{sz} = 2{,}2\cdot10^5 \text{ Н/м}.$$

Принятые значения параметров соответствуют характерным диапазонам рабочих частот для роботов-манипуляторов, выполняющих операции фрезерования. Они позволяют сделать следующую оценку парциальных частот колебаний инструмента в горизонтальной плоскости:

$$\omega_x = \omega_z \cong \sqrt{\frac{c_s}{m_s}} = 1049\,\frac{\text{рад}}{\text{с}} = 167 \text{ Гц}.$$

Эта оценка определяет диапазон возможных колебаний в системе.

Расчетная схема процесса фрезерования

Для пояснения характера сил резания R_x, R_z, возникающих между инструментом и обрабатываемой поверхностью, приведем расчетную схему фрезы (рис. 2).

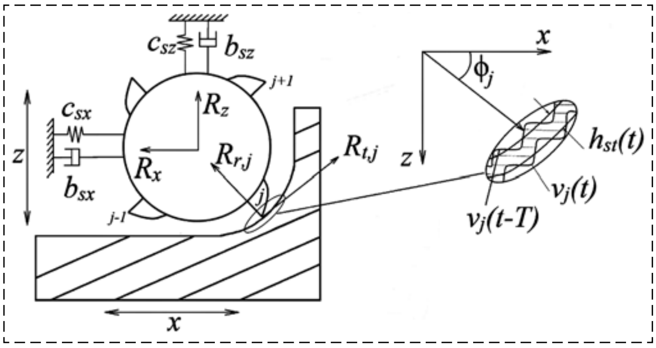


Рис. 2. Расчетная схема фрезы
Fig. 2. The calculation scheme of cutter

Расчетная схема построена в предположении, что настройки ПИД регуляторов таковы, что движение робота осуществляется по предписанным значениям задающих параметров F_{sy}^d, $\dot{x}^d$, $\dot{z}^d$. На ней отображено возникновение вибрационной компоненты в процессе съема материала фрезой. Соответствующая математическая модель имеет следующий вид:

$$m_s\ddot{x}_s + b_{sx}\dot{x}_s + c_{sx}x_s = R_x;$$
$$m_s\ddot{z}_s + b_{sz}\dot{z}_s + c_{sz}z_s = R_z,$$

где R_x, R_z — горизонтальные силы резания, определяющие нелинейную динамику процесса.

На расчетной схеме (рис. 2) введены следующие обозначения:

$h_{st} = S\sin\varphi_j$ — расчетная составляющая толщины стружки, зависящая от подачи S: $v_j(t)$ и $v_j(t - T)$ — динамические перемещения инструмента на текущем и предыдущем проходах j-го зуба фрезы; $T = 60/(Nn)$ — период врезания зубов фрезы в материал; частота вращения фрезы n (измеряется в мин$^{-1}$); N — число зубов фрезы; φ_j — угол поворота j-го зуба.

Реальная толщина снимаемой стружки зависит от целого ряда факторов, основным из которых является угол поворота фрезы [11]. Помимо расчетной составляющей она содержит динамическую составляющую. В сумме они имеют вид

$$\begin{aligned} h(\varphi_j) &= (S\sin\varphi_j + v_j(t-T) - v_j(t))g(\varphi_j) = \\ &= (S\sin\varphi_j + (x(t) - x(t-T))\sin\varphi_j + \\ &+ (z(t) - z(t-T))\cos\varphi_j)g(\varphi_j) = \\ &= (S\sin\varphi_j + \Delta x\sin\varphi_j + \Delta z\cos\varphi_j)g(\varphi_j); \\ g(\varphi_j) &= 1 \text{ при } \varphi_{st} < \varphi_j < \varphi_{ex}; \\ g(\varphi_j) &= 0 \text{ при } \varphi_j < \varphi_{st} \text{ или } \varphi_j > \varphi_{ex}, \end{aligned}$$

где $g(\varphi_j)$ — это функция, определяющая, режет ли материал в данный момент j-й зуб или нет; φ_{st} и φ_{ex} — углы входа зуба в заготовку и выхода зуба из заготовки соответственно (при известной конструкции фрезы эти углы характеризуют ширину резания).

Считается [11], что тангенциальная и радиальная составляющие сил резания пропорциональны толщине снимаемой стружки $h(\varphi_j)$:

$$R_{t,j} = K_t a h(\varphi_j),\ \ R_{r,j} = K_r R_{t,j},$$

где K_t, K_r — постоянные резания; a — осевая глубина резания.

Спроецировав силы резания на оси X и Y, получим

$$R_{x,j} = -R_{t,j}\cos\varphi_j - R_{r,j}\sin\varphi_j;$$
$$R_{z,j} = R_{t,j}\sin\varphi_j - R_{r,j}\cos\varphi_j.$$

С учетом числа режущих кромок фрезы N окончательно получим

$$R_x = \sum_{j=0}^{N-1} R_{x,j}(\varphi_j),\ R_z = \sum_{j=0}^{N-1} R_{z,j}(\varphi_j).$$

При появлении фазового сдвига между предыдущей $v_j(t - T)$ текущей $v_j(t)$ волнами (рис. 2), образующимися на обрабатываемой поверхности в процессе фрезерования, в системе возникают так называемые регенеративные автоколебания, которые, в свою очередь, могут привести к неустойчивости всего процесса фрезерования [7—9].

Подобные расчетные схемы хорошо согласуются с экспериментальными данными и используются многими авторами для приближенного построения диаграмм устойчивости в пространстве технологических параметров резания. Примером может служить лепестковая диаграмма, приведенная на рис. 3.

Лепестковая диаграмма построена с использованием метода D-разбиения для принятых выше параметров системы. Она показывает зависимость критической осевой глубины резания $a_{\text{кр}}$ от частоты вращения фрезы n. Лепестковая диаграмма выделяет область устойчивого фрезерования при $a < a_{\text{кр}}$. Видно, что существует осевая глубина резания a^*, при которой устойчивость имеет место для любых частот вращения фрезы. Вместе с тем диаграмма показывает, что глубину резания можно устанавливать значительно больше a^*, если настроиться на определенную частоту вращения фрезы (точка *1* на рис. 3). Дальнейшее увеличение глубины резания (переход к точке *2* на рис. 3) приводит к неустойчивости. Таким об-

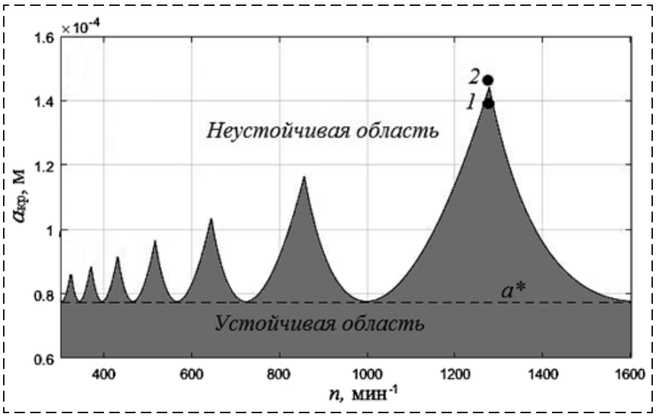


Рис. 3. Диаграмма устойчивости процесса фрезерования
Fig. 3. Milling process stability lobe diagram

разом, лепестковая диаграмма может служить качественным подтверждением правильности выбора технологических параметров резания.

В принятой выше расчетной схеме (см. рис. 1) осевая глубина резания косвенно связана с заданием по вертикальной силе прижатия F_{sy}^{d}. Меняя задание F_{sy}^{d}, можно корректировать осевую глубину резания. Осевая глубина резания при высоких требованиях к производительности процесса фрезерования является определяющим фактором возникновения неустойчивости (см. точки *1*, *2* на рис. 3). Вместе с тем подача S, как оказалось, влияет только на амплитуду колебаний инструмента. Подобный анализ с использованием D-разбиения можно проводить и относительно других комбинаций параметров резания (осевая глубина резания, ширина резания, подача, частота вращения фрезы). Таким образом, диаграмма устойчивости показывает, что существуют рациональные комбинации параметров резания, но точно определить их по диаграмме в силу приближенности модели резания не представляется возможным. Поэтому

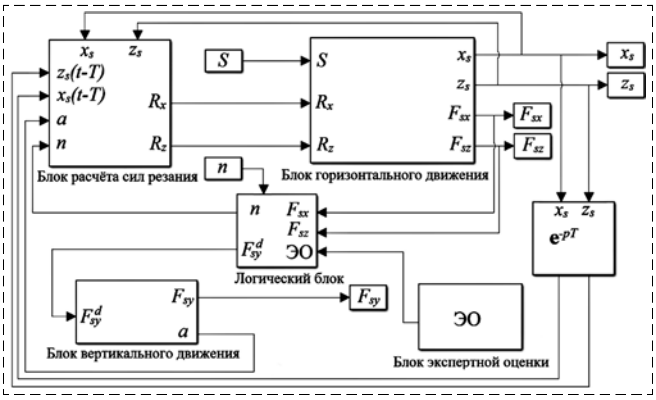


Рис. 4. Структурная схема компьютерного моделирования
Fig. 4. Block diagram of computer simulation

более целесообразным для определения расчетных параметров резания может быть прямое компьютерное моделирование. Структурная схема компьютерного моделирования процесса фрезерования представлена на рис. 4.

Здесь подача S определяет задание для системы управления горизонтальным движением. Осевая глубина резания a связана с заданием на силу прижатия F_{sy}^{d} по вертикальной координате для системы управления вертикальным движением. Уровень силы прижатия выбирается таким, чтобы обеспечить требуемую осевую составляющую сил резания R_y. На основании измерений датчиков силы по горизонтальным направлениям F_{sx} и F_{sz} с учетом экспертной информации в логическом блоке при появлении неустойчивости формируется скорректированное задание по вертикальной силе прижатия для того, чтобы в автоматическом режиме уменьшить осевую глубину резания и вывести систему из зоны неустойчивости. Учитывая, что горизонтальные силы резания R_x, R_z зависят от толщины стружки, которая, в свою очередь, зависит от координат зубов фрезы в моменты времени t и $t - T$, в схеме выделен блок расчета горизонтальных сил резания R_x и R_z, которые выступают в роли возмущающего воздействия для системы управления вертикальным движением. Блок экспертной оценки подразумевает участие в процессе управления оператора на этапе формирования предпочтительных значений параметров резания. Блок содержит экспертные данные, качественные данные типа лепестковых диаграмм и другие данные.

Результаты компьютерного моделирования

Форму обрабатываемой поверхности считаем плоской $y_{sf}(x, z) = \mathrm{const}$, число зубов фрезы $N = 4$. Исходя из характерных для фрезеровки стали диапазонов значений подачи $S =$ $= 0{,}1...0{,}2$ мм/зуб устанавливается задание по скорости горизонтального движения $\dot{x}^{d} =$ $= 0{,}01$ м/с. Трение считаем линейным. Заданный уровень силы вертикального прижатия принят равным $F_{sy}^{d} = 40$ Н. Постоянные резания принимались равными $K_t = 1000$ МПа, $K_r = 0{,}6$. Углы φ_{st} и φ_{ex} принимались равными 0 и $\pi/2$ соответственно. Расчетная частота вращения фрезы $n = 1260$ мин$^{-1}$.

На рис. 5 и 6 представлены графики вибраций по координате инструмента x_s, результирующей горизонтальной режущей силы $R_{рез}$ и ам-

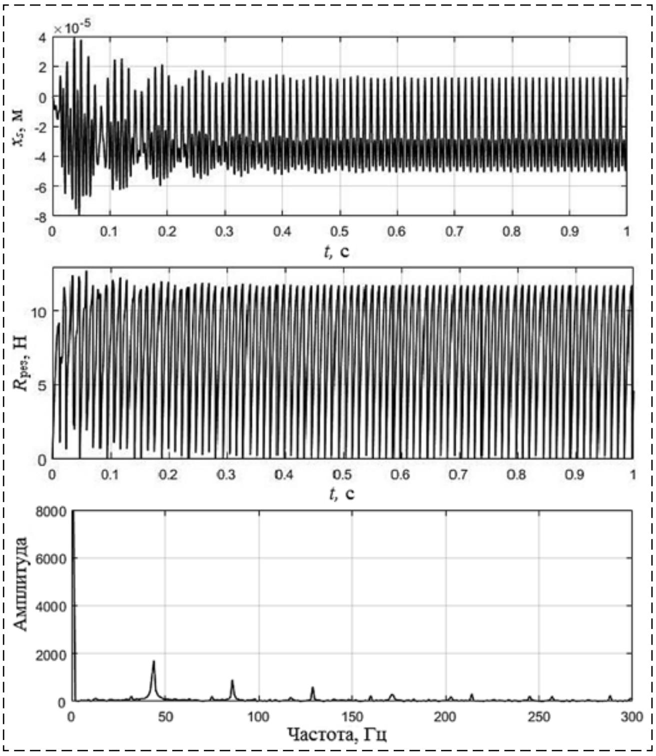


Рис. 5. Графики координаты инструмента x_s, результирующей горизонтальной режущей силы и ее амплитудного спектра (для точки *1* на рис. 3)

Fig. 5. Time-histories of the instrument coordinate x_s, the total horizontal cutting force and its amplitude spectrum (point *1* in Fig. 3)

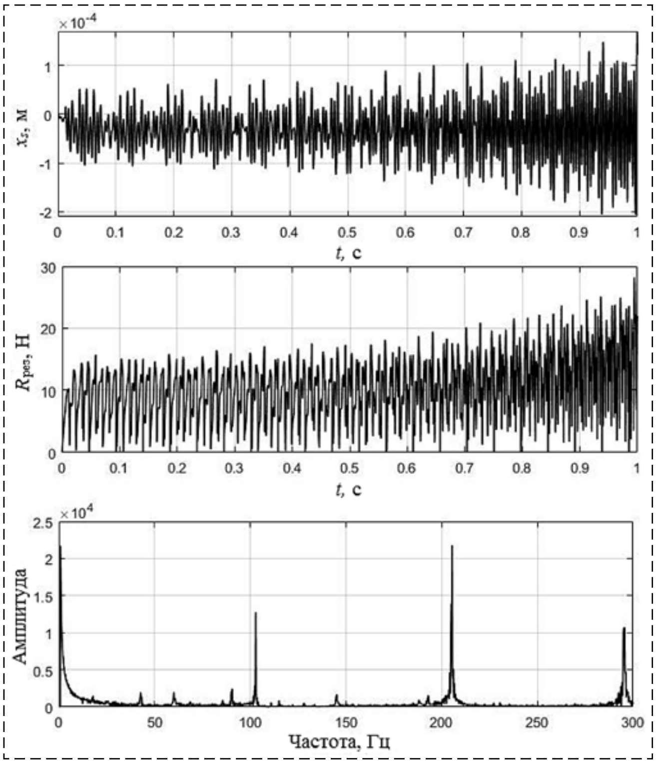


Рис. 6. Графики координаты инструмента x_s, результирующей горизонтальной режущей силы и ее амплитудного спектра (для точки *2* на рис. 3)

Fig. 6. Time-histories of the instrument coordinate x_s, the total horizontal cutting force and its amplitude spectrum (point *2* in Fig. 3)

плитудного спектра суммарной режущей силы для устойчивого (точка *1* на рис. 3) и неустойчивого (точка *2* на рис. 3) режимов фрезерования соответственно. Амплитудный спектр получается с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ). Координата инструмента x_s учитывает только вибрационную составляющую.

Моделировалась ситуация, когда из-за неточного подбора параметров резания система оказалась в неустойчивой области. Необходимо оперативно (за короткое время) обнаружить нарастание пика на амплитудном спектре на частоте автоколебаний для того, чтобы средствами управления перевести систему из неустойчивого состояния (точка *2* на рис. 3) в устойчивое (точка *1* на рис. 3). Видно, что в отличие от устойчивого (см. рис. 5) в неустойчивом (рис. 6) режиме резко возрастает составляющая амплитудного спектра на частоте порядка 200 Гц. Это состояние передается в логический блок (см. рис. 4), в котором корректируются параметры резания (в рассматриваемом случае осевая глубина резания).

На рис. 7 представлены графики координаты инструмента x_s и результирующей горизонтальной режущей силы $R_{рез}$ для режима перехода системы из неустойчивого (точка *2* на рис. 3) в устойчивое (точка *1* на рис. 3) состояние.

Видно, что в некоторый момент времени (примерно при $t = 2$ с) с помощью амплитудного спектра установлено нарастание амплитуд

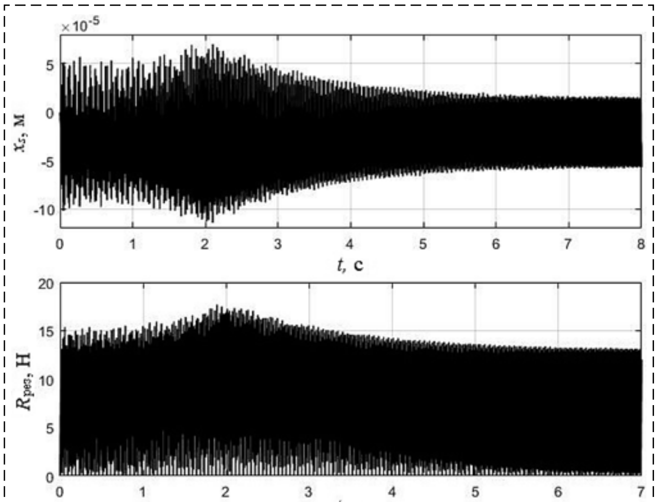


Рис. 7. Графики координаты инструмента x_s и результирующей горизонтальной режущей силы

Fig. 7. Time-histories of the instrument coordinate x_s and total horizontal cutting force

колебаний. В этот момент времени с помощью логического блока происходит уменьшение осевой глубины резания в пределах 1 %, что количественно укладывается в допуск на точность для процессов механообработки. В результате уменьшения осевой глубины резания процесс выходит на установившийся вибрационный режим.

Заключение

В реальных ситуациях согласовать желаемые параметры резания расчетным путем с высокой точностью практически невозможно. Лепестковые диаграммы устойчивости могут служить лишь ориентиром при настройке параметров механообработки. Кроме того, в силу ряда причин, в том числе и причин случайного характера, возможны отклонения процесса резания от расчетного. Разработанная система управления позволяет для случая малых отклонений от устойчивого состояния практически мгновенно в режиме online обнаружить нарастание вибраций и скорректировать режим резания, не нарушив технологию механообработки.

Внедрение робототехнических комплексов наряду со станками с ЧПУ на массовом производстве является актуальной задачей промышленности. С точки зрения управления перспективным видится направление на интеллектуализацию контуров адаптации с помощью обучаемых нейронных сетей [23]. При наличии большого объема экспериментальных и экспертных данных в системах с обучением появляется дополнительная возможность для адаптации системы управления к возможной потере устойчивости процесса резания. Речь может идти не только об установлении факта начала развития неустойчивости процесса, как это сделано в настоящей работе, но и о прогнозировании появления нежелательных режимов, таких как регенеративные автоколебания. Это дает возможность коррекции параметров механообработки в режиме реального времени. Внедрение подобных систем на производстве позволит на больших партиях серьезно снизить процент брака и увеличить производительность.

Список литературы

1. **Панов А. А., Аникин В. В., Бойм М. Г.** и др. / под общ. ред. А. А. Панова. Обработка металлов резанием. Справочник технолога. М.: Машиностроение, 2004. 784 с.
2. **URL:** https://www.youtube.com/watch?v=VJqvMY5cTl0
3. **URL:** https://www.youtube.com/watch?v=iBfPC88xaJo
4. **Кудинов В. А.** Динамика станков. М.: Машиностроение, 1967. 359 с.
5. **Кедров С. С.** Колебания металлорежущих станков. М.: Машиностроение, 1978. 200 с.
6. **Мурашкин Л. С., Мурашкин С. Л.** Прикладная нелинейная механика станков. Л.: Машиностроение, 1977. 192 с.
7. **Tobias S. A., Fishwick W.** The chatter of lathe tools under orthogonal cutting conditions // Transactions of ASME. 1958. Vol. 80, Iss. 1. P. 1079—1088.
8. **Tlusty J., Polacek M.** The stability of the machine tools against self-excited vibrations in machining // International Research in Production Engineering. 1963. Vol. 1, Iss. 1. P. 465—474.
9. **Tobias S. A.** Machine tool vibration. New York: Wiley, 1961. 352 p.
10. **Воронов С. А., Непочатов А. В., Киселев И. А.** Критерии оценки устойчивости процесса фрезерования нежестких деталей // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 1. С. 50—62.
11. **Altintas Y.** Metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design. Cambridge University press, 2012. 382 p.
12. **Altintas Y., Stepan G., Merdol D., Dombovari Z.** Chatter stability of milling in frequency and discrete time domain // CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology. 2008. № 1. P. 35—44
13. **Budak E.** Maximizing Chatter Free Material Removal Rate in Milling through Optimal Selection of Axial and Radial Depth of Cut Pairs // CIRP Annals — Manufacturing Technology. 2005. Vol. 54, Iss. 1. P. 353—356.
14. **Свинин В. М.** Исследование кинематических и динамических характеристик головки для модуляции скорости резания и выбор ее конструктивных параметров // Ученые записки Забайкальского государственного университета. Физика, математика, техника, технология. 2010. С. 85—97.
15. **Иванов И. И., Воронов С. А., Николаев С. М., Куцъ В. А.** Моделирование вибраций при плоском фрезеровании с коррекцией частоты вращения в режиме реального времени // Наука и Образование МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. Журн. 2017. № 3. С. 1—16.
16. **van Dijk N., van de Wouw N., Doppenberg E., Oosterling H., Nijmeijer H.** Chatter control in the high-speed milling process using μ-synthesis // American Control Conference (ACC). 2010. P. 6121—6126.
17. **van Dijk N., van de Wouw N., Doppenberg E., Oosterling H., Nijmeijer H.** Robust active chatter control in the high-speed milling process // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2012. Vol. 20, Iss. 4. P. 901—917.
18. **Юревич Е. И.** Сенсорные системы в робототехнике: учеб. пособ. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. 100 с.
19. **Гориневский Д. М., Формальский А. М., Шнейдер А. Ю.** Управление манипуляционными системами на основе информации об усилиях / Под ред. В. С. Гурфинкеля и Е. А. Девянина. М.: Физматлит, 1994. 368 с.
20. **Егоров И. Н.** Позиционно-силовое управление робототехническими и мехатронными устройствами. Владимир: Изд-во Владимир. гос. ун-та, 2010. 192 с.
21. **Байдина Т. А., Шагниев О. Б., Бурдаков С. Ф.** Управление вибрационным состоянием робота при силовом взаимодействии с шероховатой поверхностью неопределенного профиля // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2016. № 4. С. 43—52.
22. **Бурдаков С. Ф., Шагниев О. Б.** Модели механики в задаче управления силовым взаимодействием робота с поверхностью неопределенного профиля // Научно-технические ведомости СПбПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2015. № 4. С. 68—79.
23. **Юревич Е. И., Каляев И. А., Лохин В. М., Макаров И. М.** Интеллектуальные роботы: учебное пособие для вузов / Под общей ред. Е. И. Юревича. М.: Машиностроение, 2007. 360 с.

Control of Regenerative Self-Excited Vibrations in the Milling Process

O. B. Shagniev, shagnoleg@yandex.ru, **I. K. Shanshin,** ivan.fizik92@yandex.ru,
S. F. Burdakov, burdakov.s@yandex.ru,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation

Corresponding author: **Shagniev Oleg B.,** Ph. D. Student, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russian Federation, e-mail: shagnoleg@yandex.ru

Abstract

The problem of the occurrence and rapid suppression of vibrations arising in the process of milling using robot arm is considered. It is assumed that the tool (cutter) is connected with the robot by an elastic suspension, which is used for the force sensation of the robot. Based on the mathematical model of regenerative self-excited vibrations (chattering), the simulation of the system "robot-tool-work surface" was carried out. The tool moves evenly along the work surface with a given pressure on it. The cutter is pressed using the position-force control algorithm based on two PID-controllers with coordinate and force feedbacks. It provides the necessary axial depth of cut. Uniform movement along the work surface is carried out using the velocity control algorithm based on PID-controller with velocity feedback. It provides the required tool feed. Several authors have experimentally and analytically shown that in the process of milling "on the track" unstable regenerative self-oscillations can occur. Track remains on the machined surface during the previous cutter tooth pass. Chattering is a deterrent to increase productivity which mainly depends on rotation speed of cutter and the axial depth of cut. In this paper we consider the possibility of promptly detecting the onset of unstable auto-oscillations from the amplitude spectrum of the sensor readings of the horizontal forces of interaction between the instrument and the work surface. The amplitude spectrum is obtained using the fast Fourier transform, which allows to promptly determine the beginning of unstable processes in system. The subsequent decrease of the axial depth of cut (within one to two percent) almost completely stabilizes the cutting process. This paper proposes a variant of adaptation contour for the robot vertical movement control system based on the allowable change of the axial depth of cut.

Keywords: *machining, elastic system "robot-tool-machined surface", force sensing, position-force control, chattering, regenerative self-oscillations, amplitude spectrum, fast Fourier transform, adaptation*

For citation:

Shagniev O. B., Shanshin I. K., Burdakov S. F. Control of Regenerative Self-Excited Vibrations in the Milling Process, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 5, pp. 291—298.

DOI: 10.17587/mau.20.291-298

References

1. **Panov A. A., Anikin V. V., Boym M. G.** i dr. *Obrabotka metallov rezaniyem. Spravochnik tekhnologa* (Metal cutting. Technology handbook), Moscow, Mashinostroyeniye, 2004, 784 p. (in Russian).
2. Available at: https://www.youtube.com/watch?v=VJqvMY5cTl0
3. Available at: https://www.youtube.com/watch?v=iBfPC88xaJo
4. **Kudinov V. A.** *Dinamika stankov* (Machine tools dynamics), Moscow, Mashinostroyeniye. 1967. 359 p. (in Russian).
5. **Kedrov S. S.** *Kolebaniya metallorezhushchikh stankov* (Machine tools vibrations), Moscow, Mashinostroyeniye, 1978, 200 p. (in Russian).
6. **Murashkin L. S., Murashkin S. L.** *Prikladnaya nelineynaya mekhanika stankov* (Applied nonlinear dynamics of machine tools), Leningrad, Mashinostroyeniye. 1977, 192 p. (in Russian).
7. **Tobias S. A., Fishwick W.** The chatter of lathe tools under orthogonal cutting conditions, *Transactions of ASME*, 1958, vol. 80, iss. 1, pp. 1079—1088.
8. **Tlusty J., Polacek M.** The stability of the machine tools against self-excited vibrations in machining, *International Research in Production Engineering*, 1963, vol. 1, iss. 1, pp. 465—474.
9. **Tobias S. A.** Machine tool vibration, New York, Wiley, 1961, 352 p.
10. **Voronov S. A., Nepochatov A. V., Kiselev I. A.** *Kriterii otsenki ustoychivosti protsessa frezerovaniya nezhestkikh detaley* (Criteria for assessing the stability of the milling process of non-rigid parts), *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroyeniye,* 2011, iss. 1, pp. 50—62 (in Russian).
11. **Altintas Y.** Metal cutting mechanics, machine tool vibrations, and CNC design, Cambridge University press, 2012, 382 p.
12. **Altintas Y., Stepan G., Merdol D., Dombovari Z.** Chatter stability of milling in frequency and discrete time domain, *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, 2008, iss. 1, pp. 35—44.
13. **Budak E.** Maximizing Chatter Free Material Removal Rate in Milling through Optimal Selection of Axial and Radial Depth of Cut Pairs, *CIRP Annals — Manufacturing Technology*, 2005, vol. 54, iss. 1, pp. 353—356.
14. **Svinin V. M.** *Issledovaniye kinematicheskikh i dinamicheskikh kharakteristik golovki dlya modulyatsii skorosti rezaniya i vybor yeye konstruktivnykh parametrov* (Investigation of the kinematic and dynamic characteristics of the head for cutting speed modulation and the choice of its design parameters), *Uchenyye zapiski Zabaykalskogo gosudarstvennogo universiteta. Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya*, 2010, pp. 85—97 (in Russian).
15. **Ivanov I. I., Voronov S. A., Nikolayev S. M., Kuts V. A.** *Modelirovaniye vibratsiy pri ploskom frezerovanii s korrektsiyey chastoty vrashcheniya v rezhime realnogo vremeni* (Vibration simulation during face milling with real-time rotation speed correction), *Nauka i Obrazovaniye MGTU im. N. E. Baumana. Elektron. Zhurn.*, 2017, iss. 3, pp. 1—16 (in Russian).
16. **van Dijk N., van de Wouw N., Doppenberg E., Oosterling H., Nijmeijer H.** Chatter control in the high-speed milling process using μ-synthesis, *American Control Conference (ACC)*, 2010, pp. 6121—6126.
17. **van Dijk N., van de Wouw N., Doppenberg E., Oosterling H., Nijmeijer H.** Robust active chatter control in the high-speed milling process, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2012, vol. 20, iss. 4, pp. 901—917.
18. **Yurevich Ye. I.** *Sensornyye sistemy v robototekhnike* (Sensor systems in robotics), SPb., Publishing house of Politekhn. un-ta, 2013, 100 p. (in Russian).
19. **Gorinevskiy D. M., Formalskiy A. M., Shneyder A. Yu.** Upravleniye manipulyatsionnymi sistemami na osnove informatsii ob usiliyakh, Pod red. V. S. Gurfinkelya i Ye.A. Devyanina, Moscow, Fizmatlit, 1994, 368 p. (in Russian).
20. **Yegorov I. N.** *Pozitsionno-silovoye upravleniye robototekhnicheskimi i mekhatronnymi ustroystvami* (Position-force control of robotic and mechatronic devices), Vladimir, Publishing house of Vladimir. Gos. Un-ta. 2010, 192 p. (in Russian).
21. **Baydina T. A., Shagniyev O. B., Burdakov S. F.** *Upravleniye vibratsionnym sostoyaniyem robota pri silovom vzaimodeystvii s sherokhovatoy poverkhnostyu neopredelennogo profilya* (Control of vibrational state of a robot interacting with a rough free-formed surface), *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravleniye*, 2016, iss. 4. pp. 43—52 (in Russian).
22. **Burdakov S. F., Shagniyev O. B.** *Modeli mekhaniki v zadache upravleniya silovym vzaimodeystviyem robota s poverkhnostyu neopredelennogo profilya* (Mechanics models in the control problem of the force interaction between a robot and a free-formed surface), *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU. Informatika. Telekommunikatsii. Upravleniye*, 2015, iss. 4, pp. 68—79 (in Russian).
23. **Yurevich Ye. I., Kalyayev I. A., Lokhin V. M., Makarov I. M.** *Intellektualnyye roboty: uchebnoye posobiye dlya vuzov* (Intelligent robots: textbook for universities), Moscow, Mashinostroyeniye, 2007, 360 p. (in Russian).

УДК 531.383-11:534.1 DOI: 10.17587/mau.20.299-307

В. П. Сизов[1], д-р техн. наук, проф., valpalsiz@yandex.ru,
В. А. Погорелов[1,2], д-р техн. наук, доц., vadim.pogorelov.rnd@gmail.com,
Ю. В. Вахтин[1], нач. отдела, wyw_rost@mail.ru,
[1]ФГУП "Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи", Ростов-на-Дону
[2]Российский университет дружбы народов, г. Москва

Двухосевой твердотельный микрогироскоп на поверхностных акустических волнах*

Статья посвящена разработке двухосевого твердотельного микрогироскопа (ТМГ) на поверхностных акустических волнах (ПАВ). Предлагаемый гироскоп относится к классу недорогих чувствительных элементов, обладающих высокой устойчивостью к действию перегрузок на длительном интервале времени. Данное преимущество делает приоритетным использование ТМГ на ПАВ в системах навигации и управления объектами, функционирующими в условиях действия перегрузок, достигающих 65 000 g. На сегодняшний день известен целый ряд принципов построения ТМГ на ПАВ: ТМГ на стоячих ПАВ и ТМГ на бегущих ПАВ. В статье исследуется первый тип гироскопов. Общим недостатком существующих ТМГ на стоячих ПАВ является возможность их использования для измерения угловой скорости только относительно одной оси. В связи с этим в статье предложена оригинальная схема двухосевого ТМГ на стоячих ПАВ. Ее применение потребовало исследования влияния вращения основания на параметры упругих волн, распространяющихся в конструкции из слоя на подложке и построения моделей падающих и отраженных волн. Приведены результаты численного моделирования, показывающие влияние вращения основания на комплексные коэффициенты отражения объемных волн от слоя на подложке, фазовую скорость и частоту, а также амплитуду колебаний частиц, участвующих в переносе ПАВ, и форму эллиптической траектории движения частиц. Дан сравнительный анализ ТМГ на ПАВ с существующими микромеханическими гироскопами и рассмотрены основные технологические процессы производства ТМГ на ПАВ.

Ключевые слова: *твердотельный микрогироскоп на поверхностных акустических волнах, упругие волны*

Введение

На сегодняшний день известен ряд принципов построения гироскопов, широко используемых в системах навигации и ориентации подвижных объектов. В ракетно-космической технике наиболее широкое распространение получили поплавковые гироскопы и гироскопы с электростатическим подвесом ротора. Их преимуществом является высокая точность, а недостатком — высокая стоимость и большие массогабаритные параметры [1—3].

Потребность в применении недорогих, но обладающих высокой точностью гироскопов, появилась с созданием высокоточных средств поражения [4—10]. К этой категории, в первую очередь, относятся микромеханические гироскопы (ММГ), которые представляют собой гироскопы вибрационного типа, сконструированные в виде электронного чипа с кварцевой подложкой площадью в несколько квадратных миллиметров [11]. Принципиальной особенностью этих датчиков является использование при их производстве материалов и технологий современной твердотельной микроэлектроники и высокодобротных неметаллических материалов. ММГ имеют встроенные средства управления и обработки информации, малые массу и габаритные размеры, низкое энергопотребление.

Однако существуют области, в которых применение ММГ практически невозможно, поскольку они не обладают достаточной ударопрочностью, например, их нельзя применять в артиллерийских снарядах [4, 5]. В связи с этим в последние годы наблюдается рост интереса к твердотельным микрогироскопам (ТМГ) на поверхностных акустических волнах (ПАВ), отличающимся стойкостью к вибрациям и ударам и простотой производства, основанного на хорошо отработанной 2D-технологии, а также низкой стоимостью.

*Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН "5-100".

В современных технологиях построения ТМГ на ПАВ можно выделить два основных направления: ТМГ на стоячих ПАВ и ТМГ на бегущих ПАВ. Известен целый ряд конструкций таких гироскопов: ТМГ на ПАВ с цилиндрическим звукопроводом, с линиями задержки, с двойным преобразованием и ТМГ на горизонтально-поляризованных ПАВ [12—15].

Наибольшее распространение получили ТМГ на стоячих ПАВ. Идея их создания принадлежит М. Куросаве и его соавторам [13]. Суть идеи, предложенной ими, состоит в том, что частицы

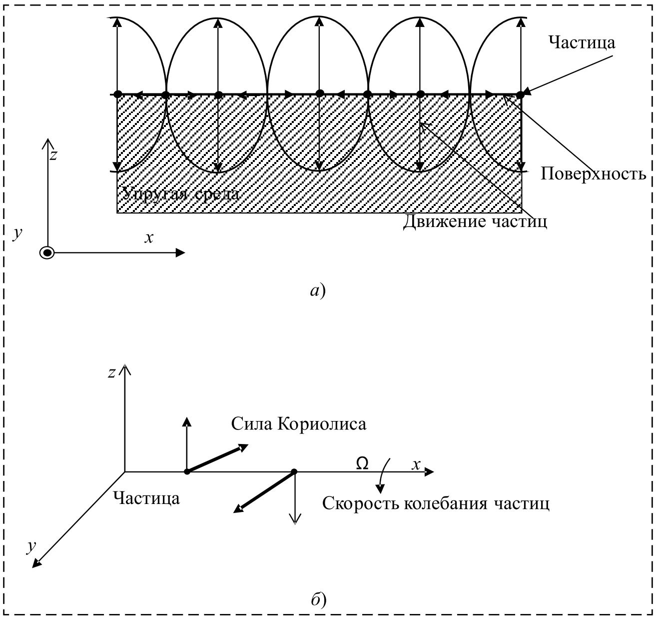


Рис. 1. Движение частиц в поле стоячей рэлеевской волны в отсутствие вращения (*а*); движение частиц в поле стоячей рэлеевской волны при вращении (*б*)

Fig. 1. Movement of particles in Rayleigh standing wave field without rotation (*a*); movement of particles in Rayleigh standing wave field with rotation (*б*)

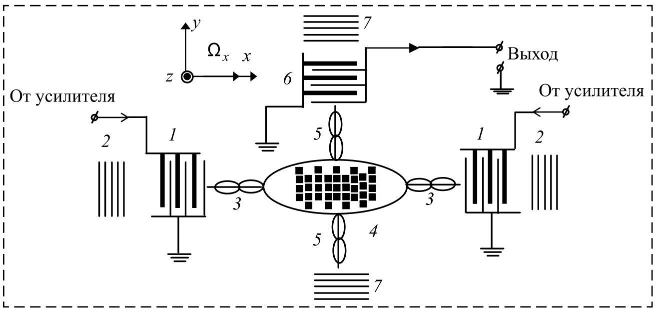


Рис. 2. ТМГ на ПАВ с распределенными навесными массами:
1 — возбуждающие ВШП; *2* — отражатели возбуждающего резонатора; *3* — первичная стоячая волна; *4* — матрица навесных масс; *5* — вторичные стоячие волны; *6* — приемный ВШП; *7* — отражатели вторичного (приемного) резонатора

Fig. 2. SMG on SAW with distributed mounted masses:
1 — exciting IDTs; *2* — reflectors of exciting resonator; *3* — primary standing wave; *4* — mounted masses matrix; *5* — secondary standing waves; *6* — receiver IDT; *7* — secondary (receiver) resonator reflectors

инерциальных масс, расположенные в пучностях стоячей волны, совершают колебательные движения в направлении, перпендикулярном плоскости звукопровода (рис. 1, *а*). Наличие колебаний позволяет возбудить силу Кориолиса при вращении и, следовательно, определить значение угловой скорости (рис. 1, *б*).

В предложенном М. Куросавой гироскопе информативным параметром является амплитуда вторичной ПАВ. Она определяется силой Кориолиса, которая, в свою очередь, пропорциональна массе движущихся частиц звукопровода.

Однако амплитуда возникающей вторичной волны слишком мала для детектирования. Поэтому в площади ПАВ-резонатора размещается матрица миниатюрных навесных масс (66×61 мкм, $1{,}5 \cdot 10^{-11}$ г). Структурная схема такого датчика угла представлена на рис. 2.

Здесь с помощью возбуждающих встречноштыревых преобразователей (ВШП) *1* и отражателей *2* генерируется первичная стоячая волна *3*, в пучностях которой навешиваются миниатюрные массы, образующие матрицу *4*. Вместе с частицами звукопровода они совершают колебания вдоль оси z. При наличии угловой скорости возникают ускорение Кориолиса и соответствующие ему силы, ортогональные направлению первичной волны *3*. Под их действием частицы звукопровода вместе с навесными массами совершают колебательные движения вдоль направления y, возбуждая вторичную ПАВ *5*, которая фиксируется ВШП *6*.

Существенным недостатком описанных в работах [12, 13, 15] технических решений является ограничение их функциональных возможностей, обусловленное тем, что данные гироскопы обеспечивают регистрацию угловой скорости вращения несущего основания только относительно одного направления его вращения. Для регистрации угловых скоростей относительно двух направлений вращения несущего основания необходимо дополнительно установить второй аналогичный гироскоп, что приводит к усложнению конструкции и увеличению ее стоимости.

Цель работы — разработка двухосевого ТМГ на ПАВ и получение соотношений для расчета зависимости параметров упругих волн от скорости вращения несущего основания.

Схема и принцип действия двухосевого ТМГ на ПАВ

Устройство двухосевого ТМГ на ПАВ показано на рис. 3 [14]. Гироскоп содержит несу-

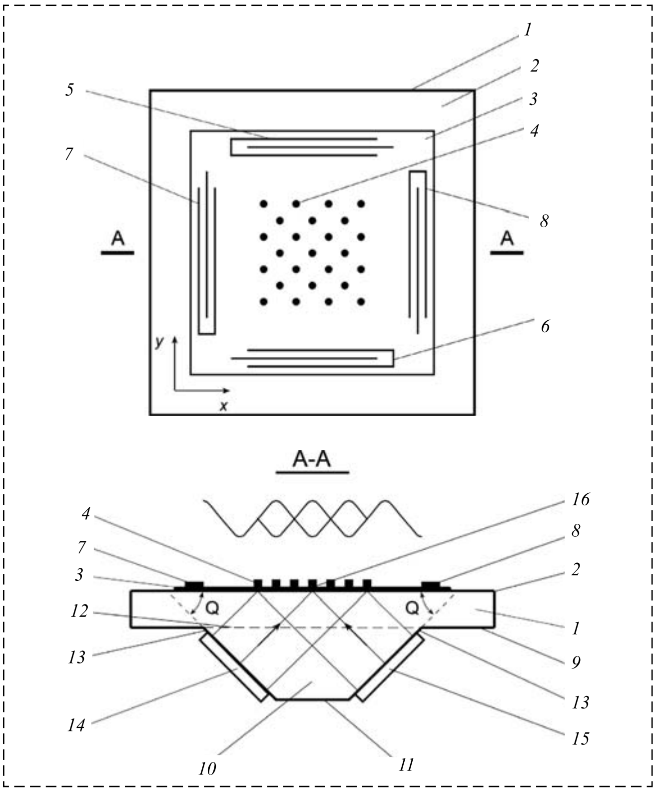


Рис. 3. Схема предлагаемого микроакустомеханического гироскопа

Fig. 3. Drawing of proposed micro-acoustical mechanical gyroscope

щее основание *1*, выполненное из изотропного материала, на внешней поверхности *2* которого нанесена тонкая пленка *3* из пьезоэлектрика с установленными на ней регулярной структурой инерционных масс *4* и измерительными ВШП *5*, *6* (относительно оси *X*) и *7*, *8* (относительно оси *Y*) соответственно. Суммарное поле ПАВ от регулярной структуры инерционных масс *4* состоит из дифракционных и сигнальных от сил Кориолиса полей ПАВ.

На внутренней поверхности *9* несущего основания *1* выполнен трапецеидальный выступ *10*, имеющий малое основание *11*, большее основание *12* и боковые поверхности *13*, при этом большее основание *12* обращено в сторону внешней поверхности *2* несущего основания *1*.

Боковые поверхности *13* трапецеидального выступа *10* образуют с внешней поверхностью *2* несущего основания *1* угол *Q*, который выбирается из условия оптимального возбуждения ПАВ на внешней поверхности *2* несущего основания *1*:

$$\sin Q = \nu_l / \nu_R,$$

где ν_l — скорость продольных волн в материале несущего основания *1*, ν_r — скорость ПАВ.

Угол *Q* задан положением боковых поверхностей *13* трапецеидального выступа *10* относительно внешней поверхности *2* несущего основания *1*.

На боковых поверхностях *13* трапецеидального выступа *10* симметрично друг другу установлены активные пьезоэлектрические преобразователи *14* и *15*, которые обеспечивают возбуждение продольных акустических волн в материале несущего основания *1* в направлениях, определяемых углом *Q*.

Измерительные ВШП *5*, *6* (относительно оси *X*) и *7*, *8* (относительно оси *Y*) установлены на пленке *3* симметрично относительно положения регулярной структуры инерционных масс *4* и перпендикулярно осям вращения несущего основания *1*.

Инерционные массы в регулярной структуре *4* размещены в шахматном порядке на расстоянии, обеспечивающем преимущественное излучение в направлении измерительных ВШП *5*, *6* и *7*, *8*.

Принцип действия предлагаемого микроакустомеханического гироскопа заключается в следующем. Активные пьезоэлектрические преобразователи *14* и *15* возбуждают в несущем основании *1* продольные волны, которые при взаимодействии с его внешней поверхностью *2* возбуждают ПАВ, бегущие в разные стороны по оси *X*.

В области *16* интерференции пучков продольных волн на внешней поверхности *2* несущего основания *1* по месту размещения регулярной структуры инерционных масс *4* образуется стоячая волна с расстояниями между пучностями, равными $\lambda_R/2$, где $\lambda_R = \nu_R/f$; f — частота возбуждения.

Под воздействием стоячих волн инерциальные массы регулярной структуры *4* совершают вертикальные (вдоль оси *Z*) колебания и, в свою очередь, являются источниками ПАВ, которые распространяются вдоль осей *X* и *Y*.

Таким образом, из области *16* интерференции пучков продольных волн в стороны измерительных ВШП *5*, *6* и *7*, *8* распространяются бегущие волны, которые детектируются данными ВШП. В результате на выходах измерительных ВШП *5*, *6* и *7*, *8* возникают соответствующие сигналы.

При вращении несущего основания *1* относительно оси *X* на движущиеся вдоль оси *Z* массы воздействует сила Кориолиса, направленная вдоль оси *Y*:

$$F = 2m[\Omega \times V],$$

где m — масса колеблющейся структуры; Ω — угловая скорость вращения гироскопа; V — колебательная скорость массы.

Под воздействием этой силы генерируется дополнительная ПАВ, которая изменяет электрические сигналы на выходах ВШП *7* и *8*. Это изменение пропорционально угловой скорости Ω, направленной вдоль оси X, и фиксируется соответствующим измерителем. На выходе ВШП *5* и *6* сигналы остаются практически неизменными.

При вращении несущего основания *1* относительно оси Y происходят аналогичные явления, а полезные сигналы возникают на выходах ВШП *5* и *6*.

При одновременном вращении несущего основания *1* относительно осей X и Y полезные сигналы возникают на всех измерительных ВШП *5*, *6* и *7*, *8*, причем уровень сигналов на выходах ВШП *7* и *8* соответствует его скорости вращения относительно оси X, а уровень сигналов на выходах ВШП *5*, *6* соответствует скорости вращения относительно оси Y. Таким образом, регистрируются полезные сигналы, позволяющие определить скорости вращения несущего основания *1* относительно двух осей его вращения.

Предложенный гироскоп может быть изготовлен на подложке ниобата лития ($LiNbO_3$) 128° Y-среза с рабочей частотой 15 МГц. Матрица миниатюрных навесных масс, размещенных в шахматном порядке, имеет размер 66 × 61 мкм. Масса каждой миниатюрной массы $\approx 1,5 \cdot 10^{-11}$ г. Расстояние между строками и столбцами миниатюрных масс $\lambda/4$. Апертура электродов ВШП 40λ. Ширина штыря ВШП $\lambda/4$. Число штырей 40. Скорость ПАВ 3961 м/с. Расчетный размер ТМГ на ПАВ — 25 мм в длину и 45 мм в ширину.

Математическое моделирование показывает, что при входном напряжении 0,1 В и угловой скорости 2π рад/с выходное напряжение на ВШП не превышает нескольких десятков микровольт.

Одной из нерешенных проблем, возникающих при проектировании рассмотренного ТМГ на ПАВ, является влияние вращения основания на параметры упругих волн, распространяющихся в конструкции из слоя на подложке. Подробное решение этой проблемы рассмотрено в приложении к данной статье и в работе [17].

Результаты имитационного моделирования

Полученные в приложении соотношения позволяют проводить численные исследования. Были рассчитаны коэффициенты отражения для вращающейся конструкции из слоя с параметрами $V_{l2} = 6084$ м/с, $V_{t2} = 3568$ м/с, $\rho_2 = 7454$ кг/м^3 и подложки из стекла $V_{l1} = 2700$ м/с, $V_{t1} = 1125$ м/с, $\rho_1 = 1180$ кг/м^3 [18], где индекс "1" относится к параметрам подложки, а индекс "2" — к параметрам слоя. Вычисленные значения модуля и фазы коэффициента отражения $\Gamma_{\varphi\varphi}$ от угла падения продольной волны при различной скорости вращения для конструкции с толщиной слоя $h = 0,13\lambda$ и $h = 0,25\lambda$ (при $\Omega/\omega = 0$, $\Omega/\omega = -0,001$ и $\Omega/\omega = -0,01$) показывают, что комплексный коэффициент $\Gamma_{\varphi\varphi}$ меняет свое значение при вращении конструкции. Отметим, что это более ярко выражено в конструкции с $h = 0,25\lambda$ по сравнению с подложкой, имеющей слой толщиной $h = 0,13\lambda$.

Приведем также результаты расчета для полупространства в ситуации возникновения поверхностных волн Рэлея.

Об изменении скорости Рэлея при $h = 0$ в зависимости от вращения подложки с $q = 0,33$ ($q = k^2/\chi^2$, где k — волновое число продольных волн, а χ — волновое число поперечных волн) можно судить из графика на рис. 4, полученного из соотношения (7) (см. *Приложение*).

При малых скоростях вращения эта зависимость показана на рис. 4.

Как видно, скорость ПАВ увеличивается или уменьшается в зависимости от направления вращения $w = \Omega/\omega$.

О влиянии толщины слоя на изменение скорости Рэлея при $w = 0,01$ можно судить по графику на рис. 5.

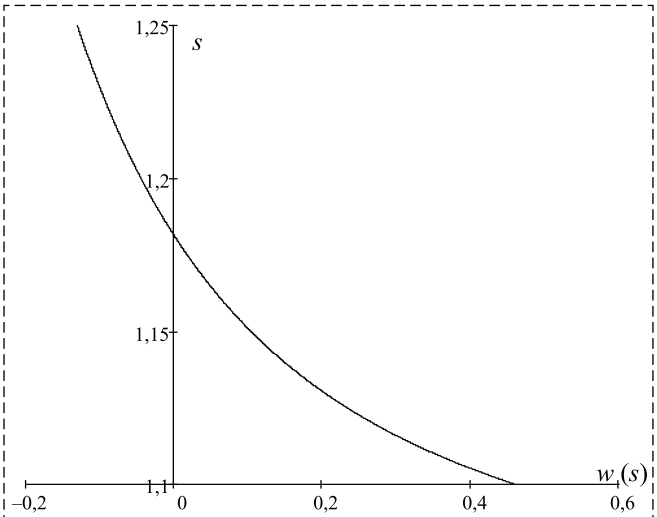


Рис. 4. Изменение скорости Рэлея в зависимости от угловой скорости вращения подложки при $q = 0,33$, $w = \Omega/\omega$, $s = \frac{V_t^2}{V_R^2}$

Fig. 4. Rayleigh speed change depending on substrate angular rotation rate at $q = 0,33$, $w = \Omega/\omega$, $s = \frac{V_t^2}{V_R^2}$

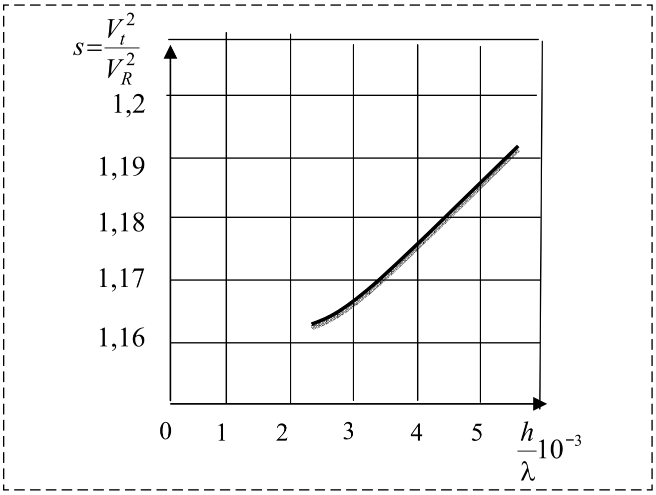


Рис. 5. Изменение скорости Рэлея при вращении подложки со скоростью w = 0,01 в зависимости от толщины слоя

Fig. 5. Rayleigh speed change at substrate rotation rate w = 0,01 depending on layer thickness

Как видно из рис. 5, при малых значениях $h/\lambda \ll 1$ (когда не возникают моды высшего порядка) имеет место линейная зависимость изменения скорости от h/λ.

На рис. 6 показана зависимость соотношения осей эллипса, по которому перемещаются частицы вблизи поверхности, от скорости вращения, а на рис. 7 приведены траектории движения этих частиц при $w = 0{,}08$, $w = 0$, $w = -0{,}08$.

Соотношение осей увеличивается или уменьшается в зависимости от направления вращения, что можно использовать для его определения. По этим же графикам также можно найти и скорость вращения основания.

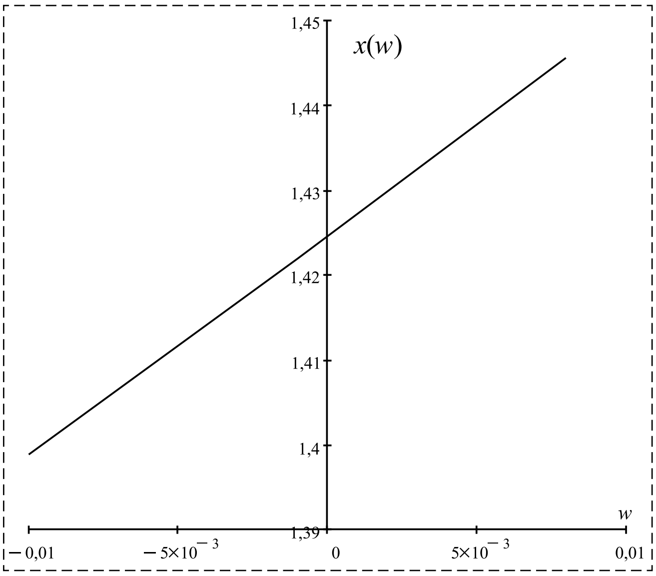


Рис. 6. Зависимость отношения $x(w) = \dfrac{b(w)}{a(w)}$ большой оси b к малой оси a от скорости вращения основания $w = \Omega/\omega$ для $q = 1/3$.

Fig. 6. Dependence of relation $x(w) = \dfrac{b(w)}{a(w)}$ of major axis b to minor axis a on substrate rotation rate $w = \Omega/\omega$ for $q = 1/3$

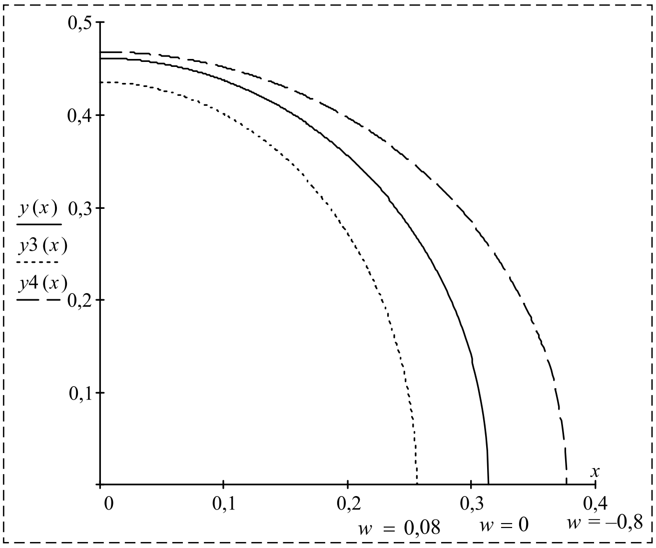


Рис. 7. Траектория движения частиц при w = −0,08, w = 0, w = 0,08, $w = \Omega/\omega$

Fig. 7. Particle movement paths at w = −0,08, w = 0, w = 0,08, $w = \Omega/\omega$

Из рисунков видно, что скорость вращения подложки влияет как на амплитуду колебаний частиц, так и на форму эллиптической траектории.

Следует заметить, что отношение сигнал—шум на входе электронной части в гироскопах, использующих изменение параметров ПАВ при вращении, зависит от величины Ω/ω и может меняться в диапазоне от нескольких единиц микровольт до нескольких десятков микровольт при скоростях вращения управляемого средства поражения от ±1000 °/с до ±2000 °/с и более [4—7]. При этом отношение сигнал—шум не будет превышать единиц микровольт.

В завершении кратко остановимся на технологии изготовления ТМГ на ПАВ.

Особенности технологии изготовления ТМГ на ПАВ

Основным конструктивным элементом гироскопов на ПАВ является кварцевая пластина с напыленной на нее топологией [19]. Процесс ее формирования базируется на технологии фотолитографии (рис. 8).

На первом этапе (рис. 8, *а*, *б*) пластина из ниобата лития покрывается слоем алюминия толщиной 300 нм. Поверх него наносится слой фоторезиста AZ 1512 толщиной 1 мкм, на котором после экспонирования создается шаблон топологии ПАВ-резонатора (рис. 8, *в*). На

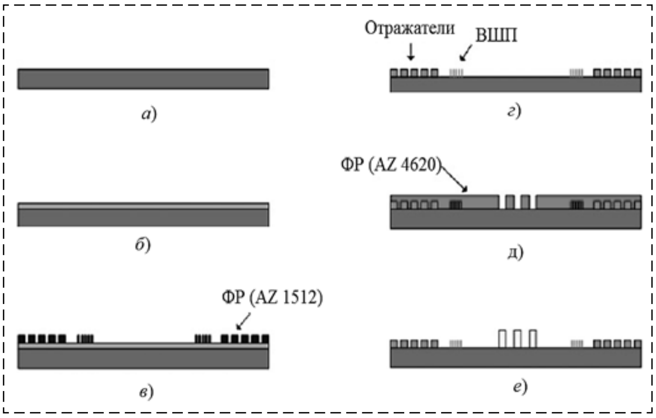


Рис. 8. Процесс нанесения топологии ТМГ на ПАВ:
а — подложка из ниобата лития; *б* — нанесение алюминия; *в* — нанесение фоторезиста и создание шаблона резонатора; *г* — травление алюминия и удаление фоторезиста; *д* — шаблон фоторезиста для напыления слоя хрома/золота; *е* — нанесение слоя хрома/золота и удаление фоторезиста

Fig. 8. Topology application process for the SAW SMG:
а — lithium niobate substrate; *б* — application of aluminum; *в* — applying the photoresist and forming the resonator template; *г* — pickling the aluminum and removing the photoresist; *д* — photoresist template for chromium/gold layer application; *е* — application of chromium/gold layer and removal of photoresist (Отражатели — Reflectors; ВШП — IDT; ФР — PR)

следующем этапе лишний алюминий вытравливается жидким растворителем, а фоторезист смывается с помощью ацетона (рис. 8, *г*). Далее наносится слой нового фоторезиста AZ 4620 толщиной 10 мкм, формирующий маску для нанесения инерционных масс из золота (рис. 8, *д*). Для лучшей адгезии золотое покрытие наносится не на поверхность кристалла, а на промежуточный слой хрома. На завершающем этапе производства оставшийся фоторезист смывается ацетоном (рис. 8, *е*).

Описанный технологический процесс является типовым для производства различных структур на ПАВ: резонаторов, линий задержки, фильтров и др. Таким образом, изготовление гироскопов на ПАВ не требует введения новых производственных линий и имеет широкие возможности для массового производства.

В таблице дана сопоставительная оценка параметров лабораторных макетов ТМГ на ПАВ и серийно выпускаемых ММГ [20].

Выводы

1. Разработанная схема двухосевого ТМГ на ПАВ обеспечивает измерение абсолютной угловой скорости вращения несущего основания относительно двух осей. Отсутствие в рассмотренном гироскопе торсионных подвесов, свойственных традиционным ММГ, делает его устойчивым к перегрузкам, достигающим 65 000 g. Это преимущество делает приоритетным использование ТМГ на ПАВ в системах навигации ракет, высокоточных управляемых авиационных бомб и артиллерийских снарядов.

2. Полученная аналитическая модель позволяет проводить численный анализ влияния вращения несущего основания на параметры упругих волн, распространяющихся в конструкции из слоя на подложке, выполненной из различных материалов. Ее использование применительно к предложенной схеме ТМГ на ПАВ обеспечивает достижение поставленной в работе цели.

3. Как следует из результатов моделирования, наличие вращения существенно изменяет комплексные коэффициенты отражения объемных волн от слоя на подложке. В случае распространения ПАВ вращение приводит к изменению фазовой скорости и, следовательно, к изменению частоты. Кроме того, при вращении основания изменяется амплитуда колебаний частиц, участвующих в переносе ПАВ, а также форма эллиптической траектории движения частиц. Все эти факторы необходимо учитывать при конструировании твердотельных микрогироскопов на акустических волнах.

Сопоставительная оценка параметров лабораторных макетов ТМГ на ПАВ и серийно выпускаемых ММГ

Parameter comparison: SMG on SAW prototypes vs commercial MMGs

Параметр	ТМГ с двойным преобразованием	ТМГ на 2 ЛЗ (ПАВ с горизонтальной поляризацией)	ТМГ на 2 ЛЗ (ПАВ с вертикальной поляризацией)	ADXRS 401	ADXRS 300
Масштабный коэффициент	119 Гц/...°/с	1,268 Гц/...°/с	0,431 Гц/...°/с	15 мВ/...°/с	5 мВ/...°/с
Нелинейность, % от диапазона	7,6	0,22	-	0,1	0,1
Диапазон	± 1000	±2000	±2000	±75	±300
Температурная чувствительность	—	0,28 Гц/°С	0,08 Гц/°С	8,4 мВ/K	
Предельная чувствительность, °/с	0,008	0,79	2,32	0,07	0,2
Время готовности	—	20 мин	100 с	35 мс	35 мс
Материал звукопровода	LiNb03 срез 128° YX	Кварц срез ST-90° X	Кварц срез ST	—	—

Список литературы

1. **Пешехонов В. Г.** Проблемы и перспективы современной гироскопии // Изв. ВУЗ. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 1—2. С. 49—55.
2. **Волынцев А. А., Дудко Л. А., Казаков Б. А., Козлов В. В.** и др. Опыт создания высокоточных поплавковых гироприборов, применяемых в системах угловой ориентации и стабилизации космических аппаратов и станций // Гироскопия и навигация. 2004. № 1 (44). С. 45—57.
3. **Доронин В. П., Мезенцев А. П., Новиков Л. З., Решетников В. И.** и др. Гироскопические чувствительные элементы для систем управления ориентацией и стабилизации орбитальных космических аппаратов // VIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ "Электроприбор". 2001. С. 17—29.
4. **Barbour N., Anderson R., Connelly J., Hanson D., Kourepenis A., Sitomer J., Ward P.** Inertial MEMS System Applications // RTO lecture series 232. 2004. Preprints.
5. **Coskren D., Easterly T., PolutchkoR.** Low-Cost GPS/INS Guidance for Navy Munitions Launches, GPS World, Vol 16, Issue 9, September 2005.
6. **Гришин Ю.** Пути совершенствования артиллерийского вооружения основных боевых кораблей ВМС США // Зарубежное военное обозрение. 2011. № 4. С. 78—83.
7. **Русинов В.** Артиллерийские боеприпасы повышенной точности: история, состояние, развитие // Зарубежное военное обозрение. 2012. № 6. С. 48—53.
8. **Русинов В.** Артиллерийские боеприпасы повышенной точности: история, состояние, развитие // Зарубежное военное обозрение. 2012. № 7. С. 44—50.
9. **Ильин С.** Управляемое авиационное оружие малого калибра // Зарубежное военное обозрение. 2012. № 12. С. 59—64.
10. **Калиничев Б.** Основные направления развития за рубежом реактивных систем залпового огня // Зарубежное военное обозрение. 2015. № 11. С. 51—59.
11. **Распопов В. Я.** Микромеханические приборы. Тула: Изд. Тул. гос. университета, 2002. 389 с.
12. **Лукьянов Д. П., Филатов Ю. В., Шевченко С. В., Шевелько М. М.** и др. Современное состояние и перспективы развития твердотельных микрогироскопов на поверхностных акустических волнах // Гироскопия и навигация. 2011. № 3(74). С. 75—87.
13. **Kurosawa M., Fukuda Y., Takasaki M., Higuchi T.** A surface-acoustic-wave gyro sensor // Sensors Actuators, vol. A66, no. 1, pp. 33—39, 1998.
14. **Патент** № 2543706, Россия, 2015. Микроакустомеханический гироскоп / Вахтин Ю. В., Мирошниченко И. П., Сизов В. П., Погорелов В. А.
15. **Patent** № 6516665 B1, US, 2003. Micro-electro-mechanical gyroscope / V. K. Varadan, P. B. Xavier, W. D. Suh, J. S. Kollakompil et al.
16. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
17. **Сизов В. П., Погорелов В. А., Вахтин Ю. В.** Влияние вращения на параметры упругих волн, распространяющихся в подложке твердотельного гироскопа на акустических волнах // Гироскопия и навигация. 2015. № 4(91). С. 77—90.
18. **Шутилов В. А.** Основы физики ультразвука. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1980. 280 с.
19. **Wang W., Oh H., Lee K., Yoon S., Yang S.** Enhanced Sensitivity of Novel Surface Acoustic Wave Microelectromechanical System-Interdigital Transducer Gyroscope // JJAP. 2009. № 48.
20. **Лукьянов Д. П., Распопов В. Я., Филатов Ю. В.** Прикладная теория гироскопов. СПб.: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор", 2015. 316 с.

Приложение

Определение влияния вращения ТМГ на ПАВ на параметры упругих волн

Рассмотрим конструкцию, состоящую из слоя толщиной h на полубесконечной подложке (рис. П1). Вращающаяся вокруг оси y с постоянной угловой скоростью Ω конструкция возбуждается упругими волнами, падающими из полупространства на слой под углом θ. Будем считать, что поле не зависит от координаты y.

Возникающие волны должны удовлетворять уравнениям движения во вращающейся системе координат и граничным условиям свободной поверхности слоя при $z = h$, а также условиям жесткой склейки слоя с полупространством $z = 0$.

Для гармонических волн уравнение движения в изотропной вращающейся среде, пренебрегая центробежными силами, запишем следующим образом [11]:

$$\omega^2\rho u + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u + \mu\Delta u = -i\omega\rho 2[\Omega \times u], \quad (1)$$

где u — вектор перемещений; λ, μ — упругие константы Ламе; ω — частота; ρ — плотность

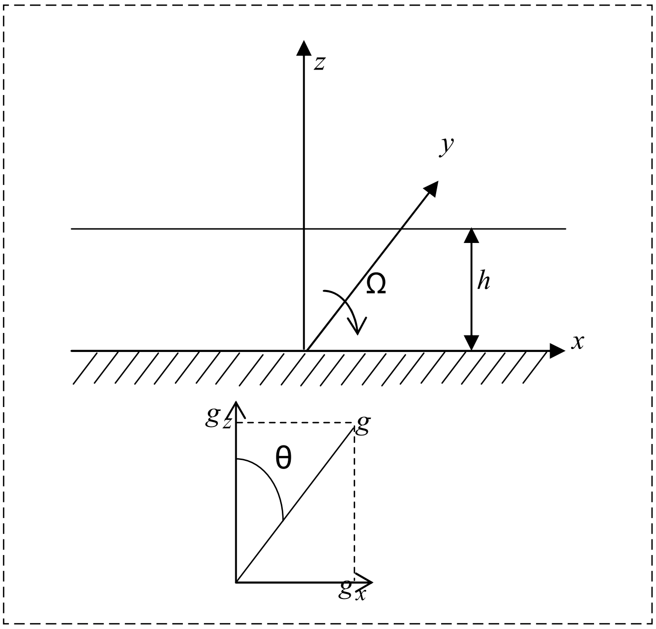


Рис. П1. Конструкция в виде слоя толщиной *h* на полубесконечной подложке

Fig. П1. Structure represented by *h*-thickness layer on semi-infinite substrate

материала. В правой части этого уравнения выражен вектор плотности сил Кориолиса.

Для компонент перемещений, поляризованных в плоскости падения волн ($y = 0$), из уравнения (1) получим:

$$\frac{\omega^2\rho}{\mu}u_z + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \Delta u_z = i\frac{\omega^2\rho}{\mu}\frac{\Omega}{\omega}u_x, \quad (2)$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\omega^2\rho}{\lambda+2\mu} + \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u_x + \\ + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = -i\frac{2\omega^2\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\Omega}{\omega}u_z.\end{gathered} \quad (3)$$

Компоненты напряжения могут быть определены из закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda\frac{\partial u_k}{\partial x^k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \quad (4)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. По повторяющемуся индексу (k) необходимо провести суммирование.

Используя метод скаляризации, следуя [12], представим перемещение через потенциальные функции для продольных волн φ и поперечных W в виде

$$u_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi - \frac{i}{g_x}\left(\delta_{iz}g^2 + \frac{\partial^2}{\partial z \partial x_i}\right)W. \quad (5)$$

Потенциалы φ и W являются решением волновых уравнений Гельмгольца

$$\Delta\begin{pmatrix}\varphi \\ W\end{pmatrix} + g^2\begin{pmatrix}\varphi \\ W\end{pmatrix} = 0, \quad (6)$$

где $g = \omega/V_ф$, $V_ф$ — фазовая скорость продольных или поперечных волн при вращении полупространства.

Общее решение этих уравнений представляется в виде падающих и отраженных волн. Используя это решение, можно найти элементы C_{ij} [17], через которые могут быть выражены компоненты перемещений следующим образом:

$$\begin{aligned} u_z &= A_0\left(C_{(11)}C_{(42)}\mathbf{e}^{i\overset{(L)}{g_z}z} - C_{(12)}C_{(41)}\mathbf{e}^{i\overset{(T)}{g_z}z}\right)\mathbf{e}^{-i\omega t}\mathbf{e}^{ig_x x}; \\ u_x &= A_0\left(C_{(21)}C_{(42)}\mathbf{e}^{i\overset{(L)}{g_z}z} - C_{(22)}C_{(41)}\mathbf{e}^{i\overset{(T)}{g_z}z}\right)\mathbf{e}^{-i\omega t}\mathbf{e}^{ig_x x}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\overset{(L)}{g_z}$ и $\overset{(T)}{g_z}$ — проекции волнового вектора на ось z для продольных и поперечных волн соответственно; g_x — проекция волнового вектора на ось x, которая в силу закона Снеллиуса одинакова для продольных и поперечных волн.

Для поверхностных волн, убывающих при удалении от границы, величины g_z являются мнимыми $\overset{(L)}{g_z} = i\overset{(L)}{\alpha}$, $\overset{(T)}{g_z} = i\overset{(T)}{\alpha}$, и вещественные значения u_z и u_x описывают траекторию частиц, участвующих в переносе ПАВ.

Движение частиц вблизи поверхности может быть найдено из (8) при $z = 0$.

Two-Axis Solid-State Microgyroscope on Surface Acoustic Waves

V. P. Sizov[1], valpalsiz@yandex.ru, **V. A. Pogorelov**[1,2], vadim.pogorelov.rnd@gmail.com,
Yu. V. Vakhtin[1], wyw_rost@mail.ru,
[1] Rostov-on-Don Research Institute of Radio Communication, Rostov-on-Don, 344038, Russian Federation
[2] People's Friendship University of Russia (RUDN) University, Institute of innovative engineering technologies, Moscow, Russian Federation

Corresponding author: **Pogorelov Vadim A.,** Ph. D., Associate Professor,
Rostov-on-Don Research Institute of Radio Communication, Rostov-on-Don, 344038, Russian Federation,
e-mail: vadim.pogorelov.rnd@gmail.com

Accepted on February 04, 2019

Abstract

This article focuses on the development of a two-axis solid state micro gyroscope (SMG) on surface acoustic waves (SAW). The described gyroscope belongs to the category of inexpensive sensing elements featuring a high degree of long-time overload stability. This advantage seems to make SAW SMGs a priority choice for navigation and control systems functioning in severe overload environments of up to 65,000 g. As of today SAW SMGs are designed according to a number of known principles. Such SMGs may also operate on standing SAWs or traveling SAWs. This article addresses the first gyro type. Unfortunately, the existing standing SAW SMGs share a common limitation of measuring angular rates in rela-

tion to one axis only. This research attempts to introduce an innovative two-axis standing SAW SMG. The influence of the basis rotation on the parameters of the elastic waves traveling within the substrate layer was carefully studied. Incident and reflected wave models were also elaborated. The numerical simulation results demonstrate the effects of the basis rotation on the complex factors of the volume waves reflected by the substrate layer and on the phase velocity and frequency thereof as well as on the oscillation amplitude of the particles involved in SAW transition, and on the elliptical particle movement path configuration. Also, the SAW SMG is compared to the existing micromechanical gyroscopes, and the basic SAW SMG production technologies are reviewed.

Keywords: *micromechanical gyroscope, acoustic waves, surface acoustic waves*

Acknowledgements: The publication has been prepared with the support of the "RUDN University Program 5-100".

For citation:

Sizov V. P., Pogorelov V. A., Vakhtin Yu. V. Two-Axis Solid-State Microgyroscope on Surface Acoustic Waves, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 5, pp. 299—307.

DOI: 10.17587/mau.20.299-307

References

1. **Peshekhonov V. G.** Problemy i perspektivy sovremennoj giroskopii (Problems and Prospects of Modern Gyroscopics), *Izv. VUZ. Priborostroenie*, 2000, vol. 43, no. 1—2, pp. 49—55 (in Russian).

2. **Volyncev A. A., Dudko L. A., Kazakov B. A., Kozlov V. V.** et al. *Opyt sozdaniya vysokotochnyh poplavkovyh giropriborov, primenyaemyh v sistemah uglovoj orientacii i stabilizacii kosmicheskih apparatov i stancij* (The Experience of Creating High Precision Floated Gyroscopes for Use in Angular Orientation and Stabilization of Space Vehicles), *Giroskopiya i Navigaciya*, 2004, no. 1 (44), pp. 45—57 (in Russian).

3. **Doronin V. P., Mezencev A. P., Novikov L. Z., Reshetnikov V. I.** et al. *Giroskopicheskie chuvstvitel'nye ehlementy dlya sistem upravleniya orientaciej i stabilizacii orbital'nyh kosmicheskih apparatov* (Gyroscopic Sensing Elements for Orbit Space Vehicles' Orientation Stabilization Control Systems), *VIII Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferenciya po integrirovannym navigacionnym sistemam*, SPb., CNII "Ehlektropribor", 2001, pp. 17—29 (in Russian).

4. **Barbour N., Anderson R., Connelly J., Hanson D., Kourepenis A., Sitomer J., Ward P.** Ward Inertial MEMS System Applications / RTO lecture series 232 (2004) pre-prints.

5. **Coskren D., Easterly T., Polutchko R.** Low-Cost GPS/INS Guidance for Navy Munitions Launches, GPS World, Vol. 16, Iss. 9, September 2005.

6. **Grishin Yu.** *Puti sovershenstvovaniya artillerijskogo vooruzheniya osnovnyh boevyh korablej VMS SSHA* (Ways of Improving of US Navy Main Battleship Artillery Armaments), *Zarubezhnoe Voennoe Obozrenie*, 2011, no. 4, pp. 78—83 (in Russian).

7. **Rusinov V.** *Artillerijskie boepripasy povyshennoj tochnosti: istoriya, sostoyanie, razvitie* (Increased Accuracy Artillery Munitions: History, Current State, Development), *Zarubezhnoe Voennoe Obozrenie*, 2012, no. 6, pp. 48—53 (in Russian).

8. **Rusinov V.** *Artillerijskie boepripasy povyshennoj tochnosti: istoriya, sostoyanie, razvitie* (Increased Accuracy Artillery Munitions: History, Current State, Development) *Zarubezhnoe Voennoe Obozrenie*, 2012, no. 7, pp. 44—50 (in Russian).

9. **Il'in S.** *Upravlyaemoe aviacionnoe oruzhie malogo kalibra* (Guided Small Caliber Aviation Weapons), *Zarubezhnoe Voennoe Obozrenie*, 2012, no. 12, pp. 59—64 (in Russian).

10. **Kalinichev B.** *Osnovnye napravleniya razvitiya za rubezhom reaktivnyh sistem zalpovogo ognya* (Main Guidelines of Multiple-Launch Rocket System Development in Foreign Countries), *Zarubezhnoe Voennoe Obozrenie*, 2015, no. 11, pp. 51—59 (in Russian).

11. **Raspopov V. Ya.** *Mikromekhanicheskie pribory* (Micromechanical Instruments), Tula, Tul. gos. universitet. 2002, 389 p. (in Russian).

12. **Luk'yanov D. P., Filatov Yu. V., Shevchenko S. V., Shevel'ko M. M.** et al. *Sovremennoe sostoyanie i perspektivy razvitiya tverdotel'nyh mikrogiroskopov na poverhnostnyh akusticheskih volnah* (Current State and Development Prospects of Solid State Gyroscopes on Surface Acoustic Waves), *Giroskopiya i Navigaciya*, 2011, no. 3(74), pp.75—87 (in Russian).

13. **Kurosawa M., Fukuda Y., Takasaki M., Higuchi T.** A surface-acoustic-wave gyro sensor // Sensors Actuators, vol. A66, no. 1, pp. 33—39, 1998.

14. **Patent** № 2543706, Rossiya, 2015. *Mikroakustomekhanicheskij giroskop* (Micro-Acoustic-Mechanical Gyroscope), Vahtin YU. V., Miroshnichenko I. P., Sizov V. P., Pogorelov V. A. (in Russian).

15. **Patent** № 6516665 B1, US, 2003. Micro-electro-mechanical gyroscope, V. K. Varadan, P. B. Xavier, W. D. Suh, J. S. Kollakompil et al. (in Russian).

16. **Novackij V.** Teoriya uprugosti (Theory of elasticity), Moscow, Mir, 1975, 872 p. (in Russian).

17. **Sizov V. P., Pogorelov V. A., Vahtin Yu. V.** *Vliyanie vrashcheniya na parametry uprugih voln, rasprostranyayushchihsya v podlozhke tverdotel'nogo giroskopa na akusticheskih volnah* (Influence of Rotation on the Acoustic Wave Parameters of the Acoustic Waves Traveling in the Solid State Acoustic Gyroscope Substrate), *Giroskopiya i Navigaciya*, 2015, no. 4(91), pp. 77—90 (in Russian).

18. **Shutilov V. A.** *Osnovy fiziki ul'trazvuka.*(Fundamentals of Ultrasound Physics), Leningrad, Izdatel'stvo leningradskogo universiteta, 1980, 280 p. (in Russian).

19. **Wang W., Oh H., Lee K., Yoon S., Yang S.** Enhanced Sensitivity of Novel Surface Acoustic Wave Microelectromechanical System-Interdigital Transducer Gyroscope, *JJAP*, 2009, no. 48.

20. **Luk'yanov D. P., Raspopov V. Ya., Filatov Yu. V.** *Prikladnaya teoriya giroskopov* (The Gyroscope Applied Theory), SPb., GNC RF OAO "Koncern "CNII "EHlektropribor", 2015, 316 p. (in Russian).

УДК 629.78 DOI: 10.17587/mau.20.308-313

М. В. Палкин, канд. техн. наук, mpalkin@vpk.npomash.ru,
АО "ВПК "НПО машиностроения", г. Реутов,
И. П. Титков, аспирант, titkov.ivan.bmstu@gmail.com,
МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва

Управление маневрами космических аппаратов группового полета

Представлена прикладная задача управления маневрами группы автоматических космических аппаратов (КА). К важнейшим критериям баллистического проектирования группы КА относятся максимизация срока активного существования КА группы, обеспечение заданной точности формирования конфигурации, предотвращение столкновения КА.

Предложены методы поддержания пространственной конфигурации КА различного назначения (методы "постоянного" строя, "переменного" строя, "смешанный"), выданы рекомендации по их применению.

Среди идеологий управления конфигурацией КА группового полета возможно выделить две. Первая подразумевает независимое выдерживание каждым КА группы собственных априори заданных параметров орбиты. Вторая подразумевает выделение из группы КА лидеров, задающих конфигурации для ведомых КА.

Для управления маневрами КА группы целесообразно применение подходов теории оптимального управления многообъектными многокритериальными системами.

Разработанный на основе такой теории алгоритм состоит из трех повторяющихся этапов: 1) определение текущих параметров движения КА группы; 2) выбор направления, величины и длительности импульса управления каждого активного космического аппарата на основе прогноза параметров движения КА и критериев оптимизации; 3) выдача импульсов управления.

В работе такой алгоритм адаптирован для решения задачи управления группой КА по критериям минимизации изменения конфигурации и максимизации расстояния между КА при пересечении узловых точек (точек максимального сближения орбит) по методу "переменного строя".

Алгоритм включает этапы расчета относительного положения КА группы; прогноза относительного положения КА в момент прохождения "узловой точки"; расчета для каждого КА параметров маневра, обеспечивающего максимальное относительное расстояние между КА в момент ее прохождения.

Рассмотрен модельный пример определения параметров конфигурации группы КА для решения указанной задачи. Исследуется зависимость длительности вычислений от параметров алгоритма и числа КА группы.

Представлены рекомендации и проведен анализ возможности практического применения полученных результатов.

Ключевые слова: *космический аппарат, групповой полет, оптимальное управление, баллистическое проектирование, относительное движение*

Введение

В связи с активным развитием техники и информационных технологий, усиливающейся борьбой за лидерство в "космических инновациях" интерес исследователей начинают привлекать ранее казавшиеся "экзотическими" концепции спутниковых систем. Одной из них является концепция систем космических аппаратов (КА), летящих на сравнительно близком взаимном расстоянии (от сотен метров до сотен километров) и функционирующих как единое целое.

В отечественной литературе такие системы (конфигурации) называются КА группового полета (КА ГП), или формациями. В англоязычной литературе появился и стал устоявшимся термин "Formation Flying".

Некоторые вопросы баллистического построения и управления конфигурациями с применением методов теории оптимального управления рассматриваются в настоящей работе.

Баллистическое построение конфигурации группы КА

Существуют четыре основных метода поддержания пространственных конфигураций КА ГП: метод "постоянного" строя, метод "переменного" строя, использование тросовых систем и "совмещенный" метод. Ниже дано описание каждого из методов.

1. *Метод "постоянного" строя* [8]. Подразумевает периодическое корректирование активными КА ГП относительного пространственного положения, в том числе на некомпланарных орбитах, с помощью бортовых двигательных установок. Метод, очевидным недостатком которого являются значительные затраты характеристической скорости, может применяться либо для кратковременного формирования конфигурации, либо в совокупности с другими методами.

Мерами уменьшения расхода топлива и повышения срока существования группы являются:

- попеременное маневрирование аппаратов группы и динамическое изменение трассы полета КА;
- варьирование частоты выдачи корректирующего импульса и допуска относительного пространственного положения КА.

2. *Метод "переменного" строя (формирование "роя" КА)* [8]. Позволяет периодически (два раза за виток) формировать конфигурацию при движении КА на некомпланарных орбитах в соответствии с выражением

$$\begin{cases} 0 < \Delta B_{ij} \leqslant A; \\ \omega_1^{\text{ср}} \approx \omega_2^{\text{ср}} \approx \ldots \approx \omega_n^{\text{ср}}, \end{cases}$$

где $\omega_1^{\text{ср}}, \omega_2^{\text{ср}}, \ldots, \omega_n^{\text{ср}}$ — средние угловые скорости на витке разведенных по фронту КА; ΔB_{ij} — разница в эксцентриситетах орбит двух любых пар i и j КА; n — число КА; A — допуск.

При приближении к "узловым точкам" (точкам максимального сближения орбит) "рой" будет смешиваться и далее перестраиваться в зеркальном порядке.

Особенностью метода являются относительно небольшие затраты характеристической скорости при поддержании конфигурации (в основном на начальное разведение КА по орбитам).

3. *Формирование конфигурации КА ГП на одной орбите путем их тросовой связи.* Метод основан на сепарации остаточной атмосферой (вдоль вектора орбитальной скорости) связанных неэлектропроводным тросом КА с существенно различающимися (увеличивающимися по мере удаления от головного КА, в том числе и по длине каждого КА) баллистическими коэффициентами:

$$\begin{cases} B_i = \dfrac{C_{xi} S_i}{m_i}; \\ B_i > \dfrac{6 l_i}{\rho_a L^2}, \end{cases}$$

где для i-го элемента связки КА C_{xi} — аэродинамический коэффициент лобового сопротивления; S_i — взаимодействующая с атмосферой площадь (мидель); m_i — масса; B_i— проектные ограничения на баллистический коэффициент; L — радиус орбиты; l_i — расстояние по направлению полета от начала "связки" КА; ρ_a — плотность атмосферы.

Метод может применяться на низких (до ~300 км) полетных траекториях для формирования группы пассивных (неманеврирующих) или активного (головного) и пассивных КА.

4. *"Совмещенный" метод.* Предполагает совместное или последовательное использование представленных выше методов.

Например, КА ГП, расположенные на центральной орбите или на нескольких орбитах по методу "переменного" строя, могут быть соединены тросовыми связями.

При необходимости кратковременного формирования сложной конфигурации на основе более простой КА, расположенные по методу "переменного" строя, могут совершить маневр временного перестроения. Или наоборот, в случае отказа части аппаратов группы при поддержании конфигурации по энергетически затратному "методу" "постоянного" строя возможен переход на более экономичный вариант "переменного" строя.

Алгоритм управления маневрами КА группового полета при поддержании конфигурации

Возможны следующие способы управления конфигурацией КА ГП:
- выдерживание каждым КА априори заданной собственной орбиты. В этом случае аппараты группы равноправны и идентичны по оборудованию системы управления, конфигурация формируется путем начального разведения КА [3];
- иерархическое управление [8]. Подразумевает специализацию аппаратов на лидера (лидеров), определяющих навигацию группы, и формирование конфигурации ведомых КА, корректирующих свое положение на основе получаемой информации.

Для управления маневрами при формировании конфгурации целесообразно применять подходы теории оптимального управления многообъектными многокритериальными системами [1]. Рассмотрим равновесно-арбитражный алгоритм последовательной оптимизации стабильно-эффективного компромисса в форме Нэш — Парето.

Алгоритм предполагает выполнение с определенным временным шагом T следующих этапов:

1) определение в начале временного интервала T текущего пространственного положения, направления и скорости полета каждого КА группы;

2) выбор в начале временного интервала T направления, значения и длительности импульса управления каждого активного КА на основе:
- прогноза положения КА при выдаче импульса управления (в конце T) на основании математической модели движения КА группы;
- критериев оптимизации (например, расхода топлива, точности взаимного положения КА в конфигурации);

3) выдача импульса управления;

4) повторение расчетов по п. 1, 2 в конце очередного интервала.

Одним из важнейших видов маневров группы КА по методу "переменного" строя являются маневры, обеспечивающие безопасное прохождение (без столкновения КА, перепутывания тросовых элементов нескольких КА) "узловых точек".

Для осуществления прохождения "узловых точек" без столкновения необходимо обеспечить безопасные расстояния между КА группы.

В этом случае алгоритм расчета управляющего воздействия для каждого КА группы для расположения их на максимальных относительных расстояниях при пересечении "узловой" точки предполагает следующие этапы:

1) периодический с временным интервалом T расчет относительного положения КА группы;

2) прогноз на основе информации п. 1 относительного положения КА в момент прохождения "узловой" точки;

3) расчет для каждого КА значения и направления импульса тяги (например, выдаваемого за один интервал T до прохождения "узловой" точки), обеспечивающего максимальное относительное расстояние между КА в момент ее прохождения.

Выбор параметров управления при маневрировании КА группового полета в конфигурации

Решение задачи обеспечения безопасного прохождения узловой точки рассмотрим на примере близких по форме траекторий четырех КА, расположенных на некомпланарных околокруговых орбитах (с эксцентриситетами $e \neq 0$, $e \to 0$) с одинаковым шагом по углу долготы.

Введем систему координат, в которой ось $0x$ направлена вдоль радиус-вектора "ведущего" КА, ось $0z$ — вдоль вектора орбитального углового момента, ось $0y$ дополняет оси до правой тройки векторов.

Относительное невозмущенное движение каждой пары КА описывается системой уравнений Клохесси — Уилтшира [8]:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 3n^2 x + 2n\dot{y}; \\ \ddot{y} = -2n\dot{x}; \\ \ddot{z} = -n^2 z, \end{cases}$$

где $n = \sqrt{\mu / a^3}$, μ — гравитационный параметр; a — длина большой полуоси эллипса или радиус круговой орбиты "ведущего" КА.

Система дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = 3n^2 x_1 + 2n x_4; \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = -2n x_2; \\ \dot{x}_5 = x_6; \\ \dot{x}_6 = -n^2 x_5. \end{cases}$$

Решение системы уравнений может быть представлено в матричном виде:

$$X = AX_0,$$

где $X(t) = (x(t), y(t), z(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^{\mathrm{T}}$ — вектор состояния; X_0 — вектор начальных условий для решения задачи Коши. Матрица состояния A имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 4 - 3\cos nt & 0 & 0 & n^{-1}\sin nt & 2n^{-1}(1 - \cos nt) & 0 \\ 6(\sin nt - nt) & 1 & 0 & -2n^{-1}(1 - \cos nt) & n^{-1}(4\sin nt - 3nt) & 0 \\ 0 & 0 & \cos nt & 0 & 0 & n^{-1}\sin nt \\ 3n\sin nt & 0 & 0 & \cos nt & 2\sin nt & 0 \\ -6n(1 - \cos nt) & 0 & 0 & -2n\sin t & 4\cos nt - 3 & 0 \\ 0 & 0 & -n\sin t & 0 & 0 & \cos nt \end{bmatrix},$$

и определяет решение системы дифференциальных уравнений, записанной в нормальной форме Коши.

Относительное движение i-го и j-го КА определяется выражением

$$X_{ij} = X_j - X_i.$$

Введем вектор варьируемых параметров $\Delta q_s = (\Delta x_{s0}, \Delta y_{s0}, \Delta z_{s0}, \Delta \dot{x}_{s0}, \Delta \dot{y}_{s0}, \Delta \dot{z}_{s0})$, каждая составляющая в скобках — отклонение для s-го КА k-го параметра в начальный момент времени от программного (эталонного) значения.

Показатель качества управления (критерий оптимизации) может быть представлен в виде задачи минимизации суммы нормированных показателей:

$$J = \alpha^{\Delta q} J_{\Delta q} + (1 - \alpha^{\rho}) J_{\rho} \to \min, \qquad (1)$$

где $J_{\Delta q}$ — функция отклонения координат вектора состояния каждого КА от заданного (программного или эталонного) значения в начальный момент времени; J_{ρ} — функция расстояния между КА в "узловой" точке; $\alpha^{\Delta q}$ и α^{ρ} — нормированные весовые коэффициенты степени значимости нормированных показателей.

Оптимизация по критерию (1) имеет смысл одновременного сохранения эталонной конфигурации орбитальной структуры (минимизации отклонений от эталонных параметров) и обеспечения траекторной безопасности (минимизации опасности столкновения или максимизации расстояний между аппаратами) при сближении траекторий в "узловой" точке.

При моделировании полета, например четырех КА, определим следующие параметры конфигурации: в начальный момент времени $y_s^0 = 0$, $z_s^0 \neq 0$; прохождение КА узловой точки — через четверть периода обращения КА по орбите.

Для наглядности выберем только один управляющий параметр — начальное расстояние по дистанции между каждой парой КА в конфигурации. Вектор варьируемых параметров в этом случае $\Delta q_s = (0, \Delta y_s, 0, 0, 0, 0)^{\text{т}}$.

Для рассматриваемого случая движение пары КА описывается вектором

$$X \equiv (0, y_j^0 + \Delta y_j - y_i^0 - \Delta y_i, 0, 0, 0, 0)^{\text{т}}.$$

Показатели качества до нормирования имеют следующий вид:

$$J_{\Delta q} = \sum_{s=1}^{S_N} \left| y_s^0 - \Delta y_s^0 \right|,$$

$$J_\rho = \sum_{i=1}^{S_N} \sum_{j=1}^{S_N} \left| y_j^0 - \Delta y_j^0 + y_i^0 - \Delta y_i^0 \right|,$$

где S_N — число КА в группе; y_s^0 — смещение по дистанции s-го КА в эталонной конфигурации в начальный момент времени; Δy_s^0 — отклонение (управляемое) s-го КА от эталонной конфигурации в начальный момент времени.

Для практического применения вводится дополнительное ограничение на допустимые решения, например, в виде "интервала безопасности" — минимально допустимого расстояния между КА в окрестности "узловой" точки:

$$\min(\rho_{ij}) \geqslant R_\rho,$$

где R_ρ — радиус "интервала" безопасности [7].

При математическом моделировании проводят расчет расстояния между КА в "узловой" точке при различных вариациях отклонений каждого КА от программных параметров орбиты в начальный момент времени (за время T до достижения узловой точки).

На рис. 1 (см. третью сторону обложки) представлены результаты такого моделирования. Максимальный допустимый диапазон начального отклонения КА от программной траектории $|\Delta y_s^0| \leqslant 50$ м, шаг варьирования отклонения — 5 м, радиус "сферы безопасности" в окрестности узловой точки $R_\rho = 30$ м, весовые коэффициенты значимости равны 0,5.

На рис. 1 ось "Опасность" (J_ρ) характеризует близость КА при пересечении "узловых точек" (значение показателя тем меньше, чем больше расстояние между КА). Показатель "Отклонение" ($J_{\Delta q}$) характеризует отклонение координат каждого КА от заданного (эталонного) значения.

Обведенные точки на графике — допустимые значения показателей, для которых минимальное расстояние между КА при пересечении некомпланарных траекторий более $R_\rho = 30$ м.

Из области допустимых решений выбираются оптимальные значения, минимизирующие скаляризованный критерий близости значения к точке (0;0) с учетом весовых коэффициентов. Таким образом, одновременно минимизируются показатели "Опасности" и "Отклонения": выбранным значениям соответствуют минимальные отклонения от программной траектории, обеспечивающие безопасное сближение КА в узловых точках.

Вычислительная сложность расчета управляющих параметров КА группового полета

В общем виде число комбинаций управляющих параметров для s-го КА может быть определено следующим образом:

$$n_s^{Q_S} = \prod_{q \in Q_S} n_q,$$

где n_q — число узлов разбиения сети управляющего параметра q; Q_S — множество управляющих параметров s-го КА. Для одного КА в конфигурации максимальное число управляющих параметров принимается равным шести: отклонение от соседнего КА по дистанции, высоте, фронту и трем относительным скоростям по этим же каналам.

При одинаковой плотности разбиения сетки управляющих параметров число комбинаций управляющих параметров может быть найдено следующим образом:

$$n_S^Q = (n_q)^{N_Q},$$

где N_Q — число варьируемых параметров или число варьируемых координат.

В этом случае число вычислений функционала качества для группы КА может быть найдено по формуле

$$n_J = (n_S^Q)^{N_S}$$

или

$$n_J = ((n_q)^{N_Q})^{N_S},$$

где N_S — число КА группы.

В приведенном выше примере рассматривалось разбиение одного управляющего параметра на 21 узел для четырех КА, что соответствует 194 481 вычислению показателя качества. Поиск решения с использованием персонального компьютера (под управлением операционный системы Windows 7 с процессором Intel Core i5), работающем на частоте 3200 МГц, и 16 Гб оперативной памяти типа DDR3 с использованием программного комплекса MATLAB занял менее одной секунды.

На рис. 2 (см. третью сторону обложки) представлена зависимость числа вычислений функционала качества от числа КА для фиксированной плотности сетки в логарифмическом масштабе: число узлов в сетке разбиения управляющих параметров $n_q = 7$, число управляющих параметров $N_Q \in \{1, 2, 4, 6\}$, число КА $N_S \in \{1,...,12\}$; на рис. 3 (см. третью сторону обложки) представлена зависимость длительности вычислений в предположении о возможности выполнения 1 млн вычислений функционала качества в секунду.

Из анализа представленной зависимости следует, что присутствует "взрывной рост" числа вычислений с увеличением числа КА и числа управляющих параметров (ограничение алгоритма).

В этой ситуации рекомендациями, способствующими применению рассмотренного метода и уменьшению числа вычислений, являются:

- увеличение допустимой длительности вычислений, что может способствовать снижению требований к вычислительной мощности: в зависимости от высоты орбиты и горизонта прогнозирования на вычисления может быть выделено до нескольких десятков минут;
- по возможности, выбор меньшего числа управляющих параметров (определяется спецификой решаемой задачи). Например, для группы из четырех КА, находящихся на некомпланарных орбитах с близкой высотой, допустимо обеспечить только соблюдение дистанции (один управляющий параметр) на момент прохождения узловой точки. При увеличении группы, например до восьми КА, возможно соблюдать не только дистанцию, но и относительную высоту (два управляющих параметра);
- для повышения точности и уменьшения числа вычислений целесообразно использовать методы ускорения параметрической оптимизации, например, изменять плотность сети управляющих параметров вблизи экстремумов функционала качества;
- к предложенному алгоритму возможно применить распараллеливание вычислений для увеличения быстродействия.

В последнем случае группу КА возможно рассматривать как вычислительный кластер.

Заключение

Рациональными методами формирования пространственной конфигурации группы являются: методы "постоянного" и "переменного" строя, "смешанный" метод, соединение КА тросовой связью. Представленные рекомендации и особенности этих методов могут являться базой для принятия решений на этапе баллистического проектирования группы КА ГП.

Подходы теории оптимального управления многообъектными многокритериальными системами представляют практический интерес для управления конфигурациями КА ГП за счет обеспечения возможности одновременного решения задачи управления группой КА по критериям минимизации расхода топлива и относительной точности поддержания конфигурации. Использование двухэтапного равновесно-арбитражного алгоритма последовательной оптимизации стабильно-эффективного компромисса в форме Нэш — Парето представляет целесообразность для решения этой задачи.

Рассмотренный модельный пример показал возможность решения задачи обеспечения прохождения узловых точек без столкновения КА группы с использованием методов параметрической оптимизации. Проведенный анализ зависимости длительности вычислений от параметров алгоритма и числа КА группы подтвердил высокую вычислительную сложность задачи управления группой КА. Предложенные рекомендации по уменьшению числа и длительности вычислений могут способствовать практическому применению предложенного подхода для групп большей численности.

Список литературы

1. **Воронов Е. М.** Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных игровых решений / Под ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2001.
2. **Воронов Е. М., Карпунин А. А., Палкин М. В.** и др. Формирование конфигурации группы спутников и многокритериальное управление по конфигурационной точности и расходу // Труды XXXVIII академических чтений по космонавтике. Москва, январь 2014, под общей редакцией А. К. Медведевой. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2014. 418 с.
3. **Палкин М. В.** Некоторые аспекты формирования групп космических аппаратов и управления ими // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т. 21, № 3. С. 29—35.
4. **Палкин М. В.** Концептуальные вопросы создания и применения космических аппаратов группового полета // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2015. № 08. С. 100—115.
5. **Патент** 2592121 РФ. Способ группового орбитального движения искусственных спутников / М. В. Палкин,

А. Н. Лавренов, Р. А. Петухов // Федеральный институт промышленной собственности. Заявл. 27.12.2011.

6. **Патент** 2569236 РФ. Способ группового орбитального движения искусственных спутников / М. В. Палкин, А. Н. Лавренов, Р. А. Петухов // Федеральный институт промышленной собственности. Заявл. 01.07.2014.

7. **Титков И. П.** Алгоритм формирования оптимальных периодических структур по критерию безопасности и точности // Электронный журнал "Молодежный научно-технический вестник". 2015. № 12. 7 с. URL: http://sntbul.bmstu.ru/doc/825956.html.

8. **Clohessy W. H., Wiltshire R. S.** Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous // Journal of the Astronautical Sciences. 1960. Vol. 27, N. 9. P. 653—678.

9. **LaPointe M. R.** Formation Flying with Shepherd Satellites // NIAC Phase I Final Report. 2001. P. 1—3. URL: www.niac.usra.edu.

10. **Alfriend K., Vadali S. R., Gurfil P. et al.** Spacecraft Formation Flying: Dynamics, Control and Navigation. Elsevier, 2009. 402 p.

Satellite Formation Flying Maneuver Control

M. V. Palkin, mpalkin@vpk.npomash.ru,
MIC "NPO Mashinostroenia", Reutov, 143966, Russian Federation,
I. P. Titkov, titkov.ivan.bmstu@gmail.com,
MSTU named after N. E. Bauman, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: **Palkin Maksim V.,** Ph. D., MIC "NPO Mashinostroyenia", 143966, Reutov, Russian Federation, e-mail: mpalkin@vpk.npomash.ru

Accepted on December 18, 2018

Abstract

A problem of a formation flying satellites maneuver control is presented. Among the most important criteria for satellite formation flying control system are active period maximization, precision of the configuration, secure motion (without collisions of satellites). Several methods for group configuration are presented: periodic impulse correction of each flying satellite position formation ("continuous order"); method of a satellite positioning on non-coplanar orbits ("variable order"). Other methods include combinations of methods mentioned above. Recommendations for their application are given. Two ideologies for satellite formation flying can be presented. The first one includes independent maintenance of each satellite a priori specified orbital parameters. The second one implies specialization of satellites: leaders provide orbital parameters for following satellites. Theory of the optimal control of multiobject multi-criteria systems is supposed to be rational for the maneuver control of a group of satellites. Based on this theory algorithm consists of the following phases. On the first phase current intergroup orbiting parameters are measured. On the second phase direction, capacity and duration of the control impulse are estimated based on the forecast of satellite orbital parameters and optimization criteria. On the last phase, the thrusters are used to issue a control impulse. In the presented paper such algorithm is adopted for a task of a formation flying control based on criterion, which consists of two parts. The first part is a configuration deformation minimization. The second one is a distance maximization near orbital node. Algorithm consists of three phases. On the first phase current intergroup orbiting parameters are measured. On the second phase orbital parameters in the "node" points are forecasted. On the third phase control parameters are estimated. A model example is given, computational complexity for different number of satellites is determined. Recommendations for practical application of the algorithm are given.

Keywords: *satellite, formation flying, relative motion, optimal control, ballistic design*

For citation:

Palkin M. V., Titkov I. P. Satellite Formation Flying Maneuver Control, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 5, pp. 308—313.

DOI: 10.17587/mau.20.308-313

References

1. **Voronov E. M.** *Metodi optimizatsii upravlenia mnogoobektnimi mnogokriterialnimi sistemami na osnove stabilno-effectivnih igrovih rewenii* (Methods for optimizing the management of multi-object multi-criteria systems based on stable-effective gaming solutions), Moscow, Publishing house of MSTU n.a. Bauman, 2001 (in Russian).

2. **Voronov E. M., Karpunin A. A., Palkin M. V.** Formation flying configuration design and multycriteria control, *Proceedings of the XXXVIII academic conference on Cosmonautics*, Moscow, Komissiya RAN po razrabotke nauchnogo naslediya pionerov osvoeniya kosmicheskogo prostranstva,, 2014, 418 p. (in Russian).

3. **Palkin M. V.** *Nekotorye aspekty formirovaniya grupp kosmicheskikh apparatov i upravleniya imi* (Questions of satellite formation flying design and control), *Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta,* 2014, vol. 21, no. 3, pp. 29—35 (in Russian).

4. **Palkin M. V.** *Kontseptual'nye voprosy sozdaniya i primeneniya kosmicheskikh apparatov gruppovogo poleta* (Conceptual problems of development and application of space vehicles for group flight), *Science and Education*, 2015, no. 08, pp. 100—115 (in Russian).

5. **Leonov A. G., Palkin M. V., Lavrenov A. N.** and al. *Sposob gruppovogo orbitalnogo dvigenia iskusstvennih sputnikov* (The method of group orbital motion of artificial satellites), Patent № 2592121 (RU) (in Russian).

6. **Leonov A. G., Palkin M. V., Lavrenov A. N.** and al. *Sposob gruppovogo orbitalnogo dvigenia iskusstvennih sputnikov* (The method of group orbital motion of artificial satellites), Patent № 2569236 (RU) (in Russian).

7. **Titkov I. P.** Algoritm formirovania optimalnih periodicheskih strultur po kriteriu bezopasnosti i tochnosti (Algorithm for the formation of optimal periodic structures by the criterion of safety and accuracy), available at: http://sntbul.bmstu.ru/doc/825956.html (in Russian).

8. **Clohessy W. H., Wiltshire R. S.** Terminal Guidance System for Satellite Rendezvous, *Journal of the Astronautical Sciences*, 1960, vol.27, no. 9, pp. 653—678.

9. **LaPointe M. R.** Formation Flying with Shepherd Satellites, *NIAC Phase I Final Report,* 2001, pp. 1—3, available at: www.niac.usra.edu.

10. **Alfriend K., Vadali S. R., Gurfil P.** et al. Spacecraft Formation Flying: Dynamics, Control and Navigation, Elsevier, 2009, 402 p.

УДК 004.942 DOI: 10.17587/mau.20.314-320

Ю. И. Буряк, д-р техн. наук, нач. подразделения, buryak@gosniias.ru,
А. А. Скрынников, канд. техн. наук, нач. сектора, a1260@mail.ru,
Государственный НИИ авиационных систем, Москва

Алгоритм рационального планирования и распределения ресурсов в задаче подготовки группы летательных аппаратов к применению[1]

Работа посвящена решению задачи обоснования рационального состава бригады специалистов, обеспечивающих подготовку группы летательных аппаратов в течение заданного времени, для чего необходимо решить задачу планирования работ, выполняемых на группе летательных аппаратов различным составом специалистов. Это, в свою очередь, требует рассмотрения огромного числа вариантов упорядочивания работ, выполняемых на каждом летательном аппарате, и вариантов организации последовательности обслуживания одним специалистом нескольких летательных аппаратов. Поиск решения с использованием комбинаторной оптимизации требует неприемлемо больших вычислительных затрат.

В статье предлагается подход, ориентированный на нахождение не оптимального, а некоторого рационального допустимого решения, которое не намного хуже оптимального, но его определение не требует больших вычислительных ресурсов.

Предложен алгоритм рационального планирования работ, основанный на дискретно-событийном моделировании. Планирование ведется последовательно по времени. При планировании очередности выполнения работ предложено, в первую очередь, по возможности ставить работы, имеющие максимальную длительность. Разработанный алгоритм программно реализован, что позволило исследовать некоторые свойства получаемых решений. Приведены примеры расчета календарного графика выполнения работ на группе летательных аппаратов при различном составе бригады специалистов.

Задача обоснования рационального состава бригады решается с помощью алгоритма рационального планирования работ путем последовательного увеличения числа специалистов.

Приведен и подробно проанализирован пример обоснования рационального состава бригады специалистов, выполняющих подготовку группы из восьми летательных аппаратов, на каждом из которых выполняется пять видов работ. Высокая скорость выполнения расчетов по рациональному планированию работ заданным составом бригады позволила рассмотреть все возможные варианты состава бригады (десятки тысяч вариантов) и обосновать такой вариант, при котором число специалистов в бригаде было бы минимальным, но они обеспечивали бы подготовку авиационной техники в течение заданного времени.

Низкие требования к вычислительным ресурсам позволяют решать задачи при достаточно большом числе видов работ, выполняемых на каждом летательном аппарате группы.

Ключевые слова: *группа летательных аппаратов, техническое обслуживание, алгоритм расчета состава бригады специалистов, реальное время*

Введение

При проведении технического обслуживания авиационной техники (АТ) возникает необходимость организации всего комплекса требуемых технологических операций, в том числе планирования и распределения инженерно-технического состава (ИТС) и средств технического обслуживания.

Вопросы совершенствования процессов инженерно-авиационного обеспечения (ИАО) неоднократно рассматривались в работах различных исследователей, прежде всего, сотрудников ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 13 ГНИИ Минобороны России и др. Так, например, в работах [1—5] изложены порядок организации ИАО в мирное и военное время, правила организации технической эксплуатации, технического обслуживания и ремонта АТ, подготовки АТ к полетам, в том числе порядок построения типового технологического и сетевого графиков подготовки АТ к полету, вопросы оценки надежности АТ, эффективности ИАО и др. В работе [6] обсуждается применение теории массового обслуживания в задачах ИАО для количественной оценки эффективности ИАО боевых действий, приводятся примеры количественной оценки эффективности использования ИТС, самолетов и средств аэродромно-технического обеспечения.

В работах [7, 8] предложены математические модели задач оптимального планирования предполетной подготовки АТ и показано, что они относятся к классу экстремальных комбинаторных задач с линейной структурой.

Доказано, что подобные задачи относятся к числу так называемых NP-полных задач, для которых характерна неполиномиальная зависимость продолжительности решения задачи

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-08-00488а.

от ее размерности. Такие задачи считаются "труднорешаемыми" с вычислительной точки зрения, т. е. не поддающимися эффективному алгоритмическому решению. Решение подобных задач тривиальными методами может потребовать неприемлемо больших затрат машинного времени. Поэтому предлагаются алгоритмы комбинаторной оптимизации, направленные на использование свойства конечности множества вариантов решений и максимальное сокращение их перебора.

Задачи, связанные с упорядочиванием работ по времени, по исполнителям, по приборам с учетом накладываемых ограничений, решаются и с использованием теории расписаний [9, 12]. Целью решения таких задач является построение оптимального допустимого расписания.

В статье [12] автором рассмотрена задача оптимального планирования обработки различных деталей на двух станках (сначала деталь должна быть обработана на первом станке, а затем на втором). В связи с тем что при любой последовательности обработки деталей первый станок простаивать не будет, для минимизации общего времени обслуживания необходимо минимизировать время простоя второго станка. Анализ зависимости простоя второго станка от порядка следования деталей позволил сформулировать достаточно простой алгоритм для составления расписания работы двух станков.

Аналогичный подход можно использовать для решения задачи планирования работ на группе летательных аппаратов (ЛА).

Ограничения, связанные с требуемой очередностью выполнения работ, с возможностью одновременной работы на одном ЛА нескольких специалистов и возможностью одновременного использования средств технического обслуживания, достаточно просто формализуются, и задача оптимизации сводится к задаче линейного программирования. Однако необходимость рассмотрения огромного числа вариантов упорядочивания работ, выполняемых на одном ЛА, вариантов организации последовательности обслуживания одним специалистом нескольких ЛА может потребовать неприемлемо большого времени для проведения расчетов.

В значительной мере объемы вычислений будут расти при решении задачи обоснования требуемого числа специалистов, обслуживающих группу ЛА при заданном ограничении на время ее подготовки. В связи с этим возникает необходимость нахождения не оптимального, а некоторого рационального допустимого решения, которое было бы не намного хуже оптимального, но для нахождения которого не требовались бы большие вычислительные ресурсы.

В данной работе предлагается алгоритм обоснования состава бригады специалистов, которая обеспечила бы возможность подготовки группы однотипных ЛА к применению в течение заданного времени. При решении задачи для каждого рассматриваемого варианта состава бригады находится рациональное допустимое расписание.

Постановка задачи

Известно множество I группы ЛА, которые необходимо подготовить к применению в течение заданного периода времени $T_{\max}$, характеризуемого числом λ полуоткрытых интервалов, каждый из которых имеет длину $T_{\max}/\lambda$. Заданное время вылета i-го ЛА, $i \in I$, соответствует $k_i^{\text{в}}$-му интервалу, укладывающемуся в период времени $T_{\max}$, $k_i^{\text{в}} \leqslant \lambda$.

Подготовка i-го ЛА состоит из последовательного набора технологических операций (работ), число которых R_i. Для операции под номером $1 \leqslant r \leqslant R_i$ известны номера $k_{i,r}^{no}, k_{i,r}^{ko}$ интервалов времен начала и окончания выполнения этой операции. Операции выполняются последовательно, т. е. для $1 \leqslant r \leqslant R_i - 1$ выполняется $k_{i,r+1}^{no} = k_{i,r}^{ko} + 1$. Понятно также, что должно выполняться свойство $k_{i,R_i}^{ko} \leqslant k_i^{\text{в}} - 1$, означающее, что вылет ЛА может произойти только тогда, когда все операции выполнены.

Для подготовки группы ЛА к вылету имеется бригада из специалистов различных категорий, множество которых мы обозначим J. Для $j \in J$ обозначим n_j число имеющихся специалистов j-й категории. Для каждой r-й технологической операции подготовки i-го ЛА определено множество $J_{i,r} \in J$ категорий необходимых специалистов. Предполагается, что для выполнения r-й работы необходим один специалист каждой категории из множества $J_{i,r}$.

Для определения потребности в специалистах различных категорий, участвующих в процессе подготовки i-го ЛА, определим функцию $\Delta_{i,r,j} : \{1, 2, \ldots, \lambda\} \to \{0, 1\}$, $i \in I, 1 \leqslant r \leqslant R_i, j \in J$:

$$\Delta_{i,r,j}(k) = \begin{cases} 1, \text{если } j \in J_{i,r} \text{ и } k_{i,r}^{no} \leqslant k \leqslant k_{i,r}^{ko}, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, функция $\Delta_{i,r,j}(k)$ принимает значение 1 тогда и только тогда, когда k-й интервал времени попадает на период выполнения r-й операции, а также для выполнения этой операции необходим специалист категории j. В противном случае функция $\Delta_{i,r,j}(k)$ принимает значение 0. Удобно продолжить функцию $\Delta_{i,r,j}$ на все целые числа: $\Delta_{i,r,j}(k) = 0$ для $k \in Z\backslash\{1, 2, ..., \lambda\}$.

Начало выполнения r-й операции подготовки i-го ЛА может произойти с задержкой, вызванной занятостью нужного специалиста на другом ЛА. Обозначим эту задержку $\mathrm{del}_{i,r}$. Тогда условие того, что каждое ЛА будет готово ко времени вылета, записывается в виде

$$k_{i,R_i}^{ko} + \sum_{r=1}^{R_i} \mathrm{del}_{i,r} \leqslant k_i^{\text{в}} - 1,\ i \in I, \qquad (1.1)$$

а условие того, что в любой момент времени будет обеспечиваться необходимое число специалистов, — в виде

$$\sum_{i \in I} \sum_{r=1}^{R_i} \Delta_{i,r,j}\left(k - \sum_{r'=1}^{r} \mathrm{del}_{i,r'}\right) \leqslant n_j,\quad j \in J,\ k = 1, \ldots, \lambda. \qquad (1.2)$$

Таким образом, задача о минимизации бригады специалистов для подготовки группы ЛА ставится следующим образом. Необходимо найти такие наборы чисел $(n_j)_{j \in J}$ и $(\mathrm{del}_{i,r})_{i \in I,\, 1 \leqslant r \leqslant R_i}$, при которых:

1) $\sum_{j \in J} n_j = \min$;

2) выполняются ограничения

$$k_{i,R_i}^{ko} + \sum_{r=1}^{R_i} \mathrm{del}_{i,r} \leqslant k_i^{\text{в}} - 1,\ i \in I;$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{r=1}^{R_i} \Delta_{i,r,j}\left(k - \sum_{r'=1}^{r} \mathrm{del}_{i,r'}\right) \leqslant n_j,\ j \in J,\ k = 1, \ldots, \lambda.$$

Алгоритм рационального планирования работ при заданном составе бригады

Для решения поставленной задачи используется дискретно-событийное моделирование, при котором каждый ЛА группы может находиться в одном из состояний: "ожидание обслуживания", "обслуживание (выполнение i-й работы)", "готовность к выполнению полета", а событие перехода из одного состояния в другое осуществляется в дискретные моменты времени.

В качестве примера на рис. 1 приведена схема моделирования процесса обслуживания двух ЛА бригадой, выполняющей три вида работ; в состав бригады входят два специалиста, допущенных к выполнению работы № 1 и по одному специалисту, допущенных к выполнению работ № 2 и № 3. В моменты начала и окончания работ происходит смена состояний специалистов ("работник свободен", "работник занят").

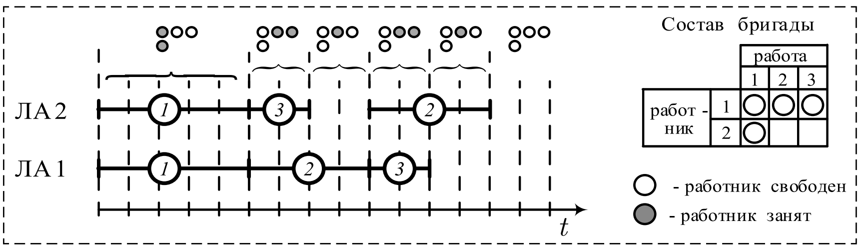


Рис. 1. Схема моделирования процесса обслуживания группы ЛА

Fig. 1. The scheme of modeling the process of servicing a group of aircraft

Сначала рассмотрим общий случай — работы не упорядочены. Анализируя календарный график работ при различных вариантах их упорядочивания при $K = \{1, 1, ..., 1\}$ (т. е. когда в составе бригады по одному специалисту каждой специальности), можно сделать вывод о том, что необходимым условием для минимизации времени обслуживания всей группы ЛА является отсутствие простоев у специалиста, длительность работы которого максимальна.

В связи с этим при планировании очередности выполнения работ предлагается в первую очередь по возможности ставить работы, имеющие максимальную длительность.

Планирование предлагается вести последовательно по времени, начиная с $t = 0$, с шагом Δt.

Алгоритм заключается в следующем.

Определяем текущее время t. Рассматриваем j-й ЛА (начиная с $j = 1$). Для рассматриваемого ЛА формируются множества $A_j(t)$ и $B_j(t)$. Множество $A_j(t) = \{a_1(t), ..., a_m(t)\}$ включает элементы $a_i(t)$, каждый из которых принимает два возможных значения: $a_i(t) = 0$, если i-й работы на j-м ЛА к моменту времени t выполнена (или же начата), и $a_i(t) = 1$ в противном случае. Множество $B_j(t) = \{b_1(t), ..., b_m(t)\}$ включает элементы $b_i(t)$, значения которых равны числу свободных к моменту времени t специалистов, допущенных к выполнению i-й работы. Тогда $C_j(t) = A_j(t)B_j(t)$ будет включать множество свободных специалистов, готовых к выполнению еще не начатых работ на j-м ЛА. Если множество $C_j(t)$ имеет отличные от нуля элементы, то к выполнению в момент времени t j-м ЛА назначается такая работа i^*, время выполнения которой максимально среди всех работ, для которых $c_{i^*}(t) > 0$:

$$i^* : t_{i^*} = \max\{t_1, \ldots, t_m\} \wedge c_{i^*}(t) > 0.$$

Принимаем $a_{i^*}(t) = 0$, а значение элемента $b_{i^*}(t)$ уменьшается на единицу.

После этого переходим к $(j + 1)$-му ЛА $(j + 1 \leqslant n)$. При $j + 1 > n$ переходим к следующему моменту времени $t + \Delta t$.

Программная реализация предложенного алгоритма показала высокую скорость расчетов рационального варианта, в том числе при большом числе выполняемых работ, при большой численности группы ЛА и любой численности специалистов каждого направления.

В качестве примера на рис. 2 приведен календарный график выполнения пяти работ на двух ЛА при $K = \{1, 1, 1, 1, 1\}$, $t_1 = 1$; $t_2 = 8$; $t_3 = 3$; $t_4 = 4$; $t_5 = 2$.

Для рассматриваемого примера время подготовки группы составило бы 18 единиц времени. Полученный план при заданных условиях не является оптимальным — все работы будут завершены за 19 единиц времени. Это объясняется тем, что в соответствии с предложенным алгоритмом при $t = 7$ на втором ЛА началась работа J_5, которая еще не закончилась в момент освобождения специалиста 2, выполняющего работу наибольшей продолжительности.

Предложенный алгоритм хорошо работает и при $k_i > 1$. В качестве примера на рис. 3 приведены результаты расчетов календарного плана при $K = \{1, 2, 1, 1, 1\}$ и тех же значениях t_i. Так как два человека выполняют вторую работу, то для справки на календарном графике выполнения этой работы обозначен порядковый номер специалиста.

При частично упорядоченных работах при выборе очередной работы проводится проверка соблюдения порядка выполнения работ.

Анализ решений, полученных для различных исходных данных, показал, что рациональное планирование с использованием предложенного алгоритма не намного хуже потенциально возможного оптимального решения, а простота реализации позволяет оперативно рассмотреть различные варианты комплектования бригады специалистами.

Обоснование рационального состава бригады специалистов

Так как решение о планировании очередности выполнения работ является рациональным, то и решение о составе бригады, необходимой для подготовки группы ЛА в заданный срок, также будет рациональным.

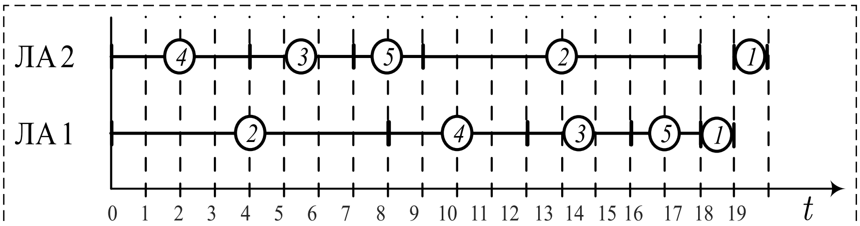


Рис. 2. Календарный график выполнения работ на группе ЛА
Fig. 2. Schedule of work on the aircraft group

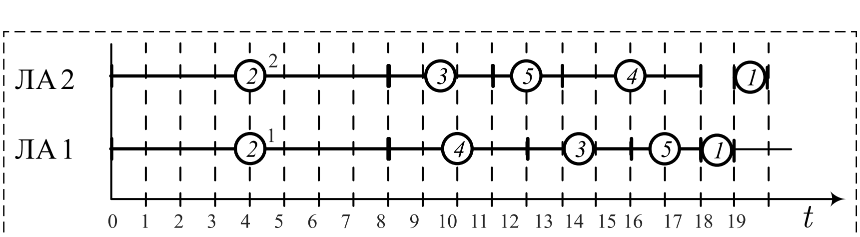


Рис. 3. Результаты рационального расчета календарного плана выполнения работ на группе ЛА
Fig. 3. The results of the rational calculation of the schedule of work on a group of aircraft

Задачу предлагается решать путем последовательного увеличения числа специалистов группы.

Рассмотрим пример. К вылету готовится группа, состоящая из восьми ЛА. На каждом из ЛА проводится пять видов работ ($t_1 = 1$; $t_2 = 8$; $t_3 = 3$; $t_4 = 4$; $t_5 = 2$).

Теоретически состав бригады может изменяться от минимального (при $K = \{1, 1, 1, 1, 1\}$) до максимального (при $K = \{8, 8, 8, 8, 8\}$), т. е. суммарное число s специалистов может варьироваться от 5 до 40 человек. При $K = \{8, 8, 8, 8, 8\}$ на каждый ЛА выделяется полный комплект специалистов и полное время подготовки группы ЛА не превышает времени подготовки одного ЛА. Увеличение бригады

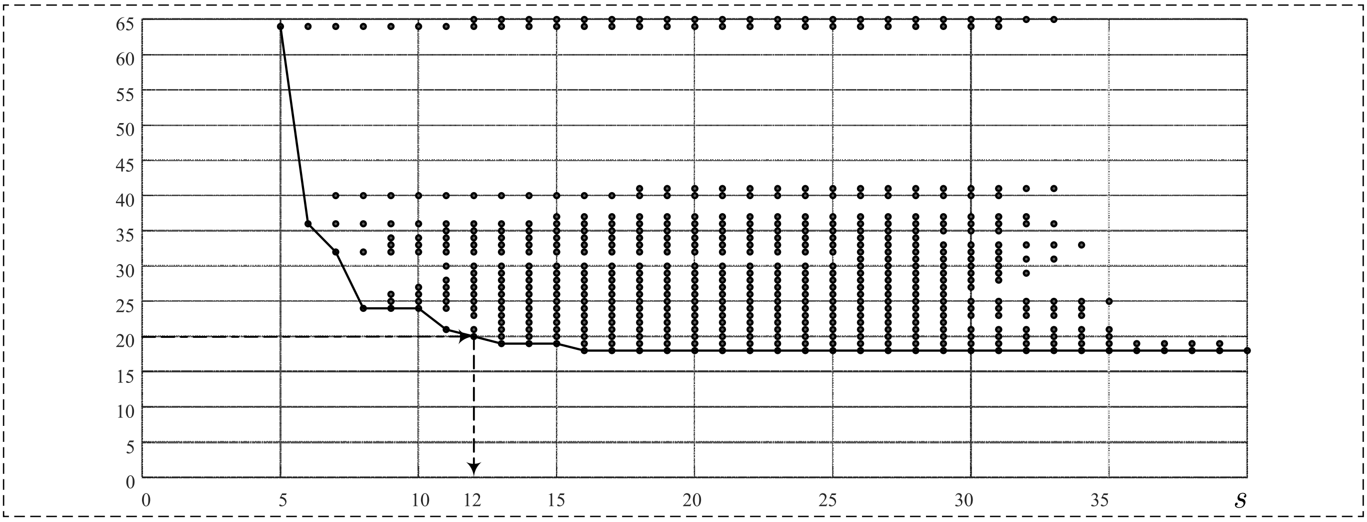


Рис. 4. Зависимость времени подготовки группы ЛА от числа привлеченных специалистов
Fig. 4. Dependence of the training time of the aircraft group on the number of specialists involved

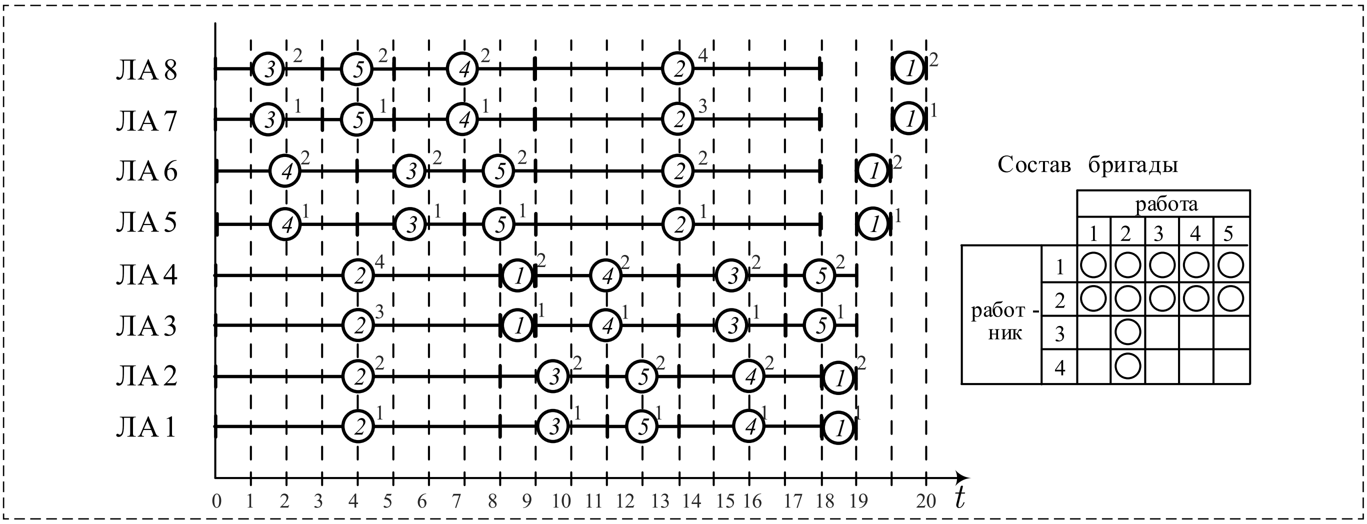


Рис. 5. Результаты рационального планирования последовательности работ для бригады расчетного состава
Fig. 5. The results of the rational planning of the sequence of work for the brigade of the estimated composition

с 5 до 6 человек требует рассмотрения 5 вариантов состава специалистов, до 7 человек — еще 35 вариантов, до 8 — еще 70 вариантов и т.д. При увеличении состава бригады от минимального размера до максимального при $n = 8$, $m = 5$ необходимо рассмотреть 32 768 вариантов. В такой ситуации большим достоинством рассматриваемого алгоритма является его быстродействие.

Результаты рационального планирования работ на группе самолетов приведены на рис. 4; по оси абсцисс отложены значения суммарного числа s специалистов, по оси ординат — время подготовки группы ЛА.

Так, например, при $s = 5$ подготовка группы ЛА занимает 65 ед. времени; при s = 7—36 ед. времени; при s = 8—24 ед. времени и т. д. Очевидно, что в предельном случае (при $s = 40$) время подготовки группы ЛА будет минимальным и равно времени подготовки одного ЛА, т. е. 18 ед. времени. Но, как видно из результатов расчетов, этого же результата можно добиться и существенно меньшим составом; так, при $s = 16$ время подготовки группы ЛА также равно 18 ед. времени.

Пусть допустимое время подготовки ЛА составляет 20 ед. времени. В соответствии с результатами расчетов бригада должна включать 12 человек (рис. 4); состав бригады определяется множеством $K = \{2, 4, 2, 2, 2\}$. Результаты рационального планирования работ для такого состава бригады приведены на рис. 5.

Заключение

Предложен подход к решению задачи определения состава бригады специалистов, которая обеспечила бы возможность подготовки группы однотипных ЛА к применению в течение заданного времени. Разработан алгоритм рационального планирования работ при заданном составе бригады. Показано, что использование рационального алгоритма планирования работ на АТ позволяет избежать громоздких вычислений, связанных с комбинаторной оптимизацией. Большая скорость вычислений позволяет легко решать задачу обоснования требуемого числа специалистов ИТС, необходимого для обслуживания группы ЛА в течение заданного времени. Проведено обоснование рационального состава бригады специалистов, обеспечивающих подготовку определенного состава группы ЛА к заданному времени, доказывающее применимость предложенного подхода.

Список литературы

1. **Яблонский С. Н., Яковышенко О. В., Шумский А. В.** Инженерно-авиационное обеспечение боевых действий и боевой подготовки частей авиации Вооруженных Сил: учебник для инженерно-технических вузов ВВС / Под ред. С. Н. Яблонского. М.: Изд-во ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, 2009.
2. **Инженерно**-авиационная служба, эксплуатация и ремонт авиационной техники / Под ред. К. М. Шпилева. М.: Воениздат, 1979.
3. **Шпилев К. М., Сидяев Н. М.** Инженерно-авиационная служба и эксплуатация летательных аппаратов / Под ред. Н. М. Сидяева. М.: Воениздат, 1970.
4. **Новиков И. А., Романов Н. М., Степанов С. В.** Эксплуатация боевой авиационной техники / Под ред. В. В. Филиппова. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1982.
5. **Ефименко А. Ф., Ковалюк Н. П.** Эксплуатация боевой авиационной техники: учебник для инженерно-технических вузов ВВС / Под ред. М. В. Кузнецова. М.: Изд-во ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1999.
6. **Писарев В. Н.** Применение теории массового обслуживания в задачах инженерно-авиационного обеспечения. М: Изд-во ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1965.
7. **Математические** модели задач оптимального планирования предполетной подготовки летательных аппаратов. URL: https://pandia.ru/text/80/171/33237.php/ (дата обращения 26.08.2018).
8. **Алгоритмы** решения задач оптимального планирования предполетной подготовки летательных аппаратов. URL: https://gigabaza.ru/doc/177593.html/ (дата обращения 30.08.2018).
9. **Лазарев А. А., Гафаров Е. Ф.** Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011.
10. **Портал В. М., Семенов А. И.** Теория расписаний. М.: Знание, 1972.
11. **Brucker P.** Scheduling algorithms. New York: Springer, 2007.
12. **Johnson S. M.** Optimal two-and-three-stage production schedules with set-up times included // Naval Research Logistic. 1954. Vol. 1. P. 61—68.

Algorithm of Rational Planning and Resource Distribution in the Task of Preparing the Aircraft Group for Use

Yu. I. Buryak, buryak@gosniias.ru, **A. A. Screennikov**, a1260@mail.ru,
The State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, 125319, Russian Federation

Corresponding author: **Buryak Yury I.**, D. Sc., Head of Unit, The State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, 125319, Russian Federation, e-mail: buryak@gosniias.ru

The work is devoted to solving the problem of justifying the rational composition of a team of specialists who provide preparing for a group of aircraft for a given time. To substantiate the optimal composition of the team, it is necessary to solve the problem of scheduling work on a group of aircraft with different composition of specialists. This, in turn, requires consideration of the huge number of options for streamlining work performed on each aircraft, and options for organizing the sequence of maintenance by one specialist of several aircraft. Finding solutions using combinatorial optimization requires an unacceptably high computational cost. The article proposes an approach for finding not the optimal, but some rational admissible solution, which is not much worse than the optimal one, but its definition does not require large computational resources. An algorithm for rational work scheduling based on discrete-event modeling is proposed. Planning is carried out sequentially in time. When planning the sequence of work, it was suggested first of all to put the work with the maximum duration possible. The developed algorithm is software implemented, which allowed to investigate some properties of the solutions obtained. Examples of calculating the schedule of work on a group of aircraft with a different composition of the team of specialists are given. The problem of justification of rational structure of the team is solved by rational planning algorithm works by sequentially increasing the number of specialists. An example of substantiating the rational composition of a team of specialists performing preparing of a group of eight aircraft, each of which performs five types of work, is given and analyzed in details. The high speed of the calculations for the rational planning of work by a given team allowed to consider all possible options for the team (tens of thousands of options) and substantiate such an option that the number of specialists in the team would be minimal, but they would ensure the preparation of aircraft for a given time. Low requirements for computing resources allow solving problems with a sufficiently large number of types of work performed on each aircraft of the group.

Keywords: *group of aircraft, maintenance, algorithm for calculating the composition of the team of specialists, real time*

Acknowledgements: This work was supported by RFBR, project number № 18-08-00488a.

For citation:

Buryak Yu. I., Screennikov A. A. Algorithm of Rational Planning and Resource Distribution in the Task of Preparing the Aircraft Group for Use, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2019, vol. 20, no. 5, pp. 314—320.

DOI: 10.17587/mau.20.314-320

References

1. **Yablonskij S. N., Yakovyshenko O. V., Shumskij A. V.** *Inzhenerno-aviacionnoe obespechenie boevyh dejstvij i boevoj podgotovki chastej aviacii Vooruzhennyh Sil* (Engineering and aviation support of combat operations and combat training of aviation units of the Armed Forces), Moscow, Publishing house of VVA im. prof. N. E. Zhukovskogo i Yu. A. Gagarina, 2009 (in Russian).

2. **Shpilev K. M.** ed. Inzhenerno-aviacionnaya sluzhba, ehkspluataciya i remont aviacionnoj tekhniki (Engineering and aviation service, operation and repair of aircraft), Moscow, Voenizdat, 1979 (in Russian).

3. **Shpilev K. M., Sidyaev N. M.** *Inzhenerno-aviacionnaya sluzhba i ehkspluataciya letatel'nyh apparatov* (Engineering and aviation service and operation of aircraft), Moscow, Voenizdat, 1970 (in Russian).

4. **Novikov I. A., Romanov N. M., Stepanov S. V.** *Ehkspluataciya boevoj aviacionnoj tekhniki* (Operation of combat aircraft), Moscow, Publishing house of VVIA im. prof. N. E. Zhukovskogo, 1982 (in Russian).

5. **Efimenko A. F., Kovalyuk N. P.** *Ehkspluataciya boevoj aviacionnoj tekhniki* (Operation of combat aircraft), Moscow, Publishing house of VVIA im. prof. N. E. Zhukovskogo, 1999 (in Russian).

6. **Pisarev V. N.** *Primenenie teorii massovogo obsluzhivaniya v zadachah inzhenerno-aviacionnogo obespecheniya* (Application of queuing theory in the problems of engineering and aviation support), Moscow, Publishing house of VVIA im. prof. N. E. Zhukovskogo, 1965 (in Russian).

7. ***Matematicheskie*** *modeli zadach optimal'nogo planirovaniya predpoletnoj podgotovki letatel'nyh apparatov* (Mathematical models of problems of optimal planning of pre-flight preparation of aircraft), available at: https://pandia.ru/text/80/171/33237.php/ (дата обращения 26.08.2018) (in Russian).

8. ***Algoritmy*** *resheniya zadach optimal'nogo planirovaniya predpoletnoj podgotovki letatel'nyh apparatov* (Algorithms for solving problems of optimal planning of pre-flight preparation of aircraft), available at: https://gigabaza.ru/doc/177593.html/ (дата обращения 30.08.2018) (in Russian).

9. **Lazarev A. A., Gafarov E. F.** *Teoriya raspisanij. Zadachi i algoritmy* (The theory of schedules. Tasks and algorithms), Moscow, Publishing house MGU im. M. V. Lomonosova, 2011 (in Russian).

10. **Portal V. M., Semyonov A. I.** *Teoriya raspisanij* (The theory of schedules), Moscow, Znanie, 1972 (in Russian).

11. **Brucker P.** Scheduling algorithms, New York, Springer, 2007.

12. **Johnson S. M.** Optimal two-and-three-stage production schedules with set-up times included, *Naval Research Logistic*, 1954, vol. 1, pp. 61—68.

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5510, (499) 269-5397**

Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *Е. В. Комиссарова.*

Сдано в набор 27.02.2019. Подписано в печать 10.04.2019. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН519. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.