

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 20

2019

№ 2

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Главный редактор:**  
ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

**Заместители главного редактора:**  
БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.  
ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.  
ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

**Ответственный секретарь:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционный совет:**  
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН  
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН  
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН  
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН  
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН  
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН  
КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН  
МИКРИН Е. А., акад. РАН  
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН  
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН  
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН  
СИГОВ А. С., акад. РАН  
СОЙФЕР В. А., акад. РАН  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН  
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН  
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН  
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН  
ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН  
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

**Редколлегия:**  
DANIELE Z., PhD, Италия  
DORANTES D. J., PhD, Турция  
GROUMPOS P. P., PhD, Греция  
ISIDORI A., PhD, Италия  
KATALINIC B., PhD, Австрия  
LIN CH.-Y., PhD, Тайвань  
MASON O. J., PhD, Ирландия  
ORTEGA R. S., PhD, Франция  
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США  
STRZELECKI R. M., PhD, Польша  
SUBUDHI B. D., PhD, Индия  
АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан  
ГАРАШЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина  
ТРОФИМЕНКО Е. Е., д.т.н., Беларусь  
БОБЦОВ А. А., д.т.н.  
БУКОВ В. Н., д.т.н.  
ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.  
ЛОХИН В. М., д.т.н.  
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д.ф.-м.н.  
ПУТОВ В. В., д.т.н.  
ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.  
РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.  
СЕРГЕЕВ С. Ф., д.пс.н.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.  
ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.  
ФУРСОВ В. А., д.т.н.  
ЮРЕВИЧ Е. И., д.т.н.

**Редакция:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Директор издательства:**  
АНТОНОВ Б. И.

## СОДЕРЖАНИЕ

### СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

- Бушуев А. Б., Григорьев В. В., Петров В. А. Синтез позитивных нелинейных систем на основе методов оптимального управления ..... 67
- Мышляев Ю. И., Пью Чжо Кхаунг, Долгов Я. А. Синтез алгоритмов слежения для линейных объектов с генерирующей моделью задающего сигнала ..... 72
- Данилова С. К., Тарасов Н. Н. Адаптивный алгоритм фильтрации с интегральными невязками ..... 80

### АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

- Furtat I. B., Nekhoroshikh A. N. Modified Backstepping Algorithm and its Application to Control of Distillation Column ..... 90

### РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Гулай А. В., Зайцев В. М. Экспертное формирование состава функциональных параметров цифровых мехатронных систем ..... 97
- Семёнов М. Е., Матвеев М. Г., Мелешенко П. А., Соловьев А. М. Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского ..... 106
- Базылев Д. Н., Пыркин А. А., Бобцов А. А. Адаптивный наблюдатель положения и магнитного потока для явнополюсного синхронного двигателя ..... 114

### ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

- Федунов Б. Е., Бойцов А. В., Гиндзе И. С., Кондратова Т. Е., Семенова М. А., Шатковская С. А. Моделирование использования бортовых интеллектуальных систем тактического уровня в аварийной посадке пассажирского самолета на реку Невы (август 1963 г.) ..... 122

*Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

THEORETICAL AND APPLIED SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

# MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL

Vol. 20

2019

No. 2

## MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Editor-in-Chief**

FILIMONOV N. B.

**Deputy Editors-in-Chief:**

BOLSHAKOV A. A.

PODURAEV Yu. V.

YUSCHENKO A. S.

**Responsible Secretary:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Editorial Board:**

ANSHAKOV G. P.

BOLOTNIK N. N.

CHENTSOV A. G.

CHERNOUSKO F. L.

FEDOROV I. B.

KALYAEV I. A.

KURZHANSKI A. B.

KUZNETSOV N. A.

MIKRIN E. A.

PESHEKHONOV V. G.

REZCHIKOV A. F.

SCHERBATYUK A. F.

SEBRYAKOV G. G.

SIGOV A. S.

SOJFER V. A.

SOLOMENTSEV Yu. M.

VASSILYEV S. N.

YUSUPOV R. M.

ZHELTOV S. Yu.

**Editorial Council:**

ALIEV T. A., Azerbaijan

DANIELE Z., PhD, Italy

DORANTES D. J., PhD, Turkey

GARASCHENKO F. G., Ukraine

GROUMPOS P. P., PhD, Greece

ISIDORI A., PhD, Italy

KATALINIC B., PhD, Austria

LIN CH.-Y., PhD, Taiwan

MASON O. J., PhD, Ireland

ORTEGA R. S., PhD, France

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA

STRZELECKI R. M., PhD, Poland

SUBUDHI B. D., PhD, India

TROFIMENKO Ye. Ye., Belarus

BOBTSOV A. A.

BUKOV V. N.

ERMOLOV I. L.

FILARETOV V. F.

FRADKOV V. L.

FURSOV V. A.

ILYASOV B. G.

KOROSTELEV V. F.

LEBEDEV G. N.

LOKHIN V.M.

PAVLOVSKY V. E.

PUTOV V. V.

PSHIKHOPOV V. Kh.

RAPOPORT E. Ya.

SERGEEV S. F.

YUREVICH E. I.

**Editorial Staff:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Director of the Publishing House:**

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and perspectives development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

## CONTENTS

### SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

- Bushuev A. B., Grigoriev V. V., Petrov V. A. Positive Nonlinear Systems Synthesis Based on Optimal Control Methods ..... 67
- Myshljaev Ju. I., Pyi Kyaw Khaung, Dolgov Ja. A. Synthesis of Tracking Algorithms for Linear Objects with a Generative Model of the Reference Signal ..... 72
- Danilova S. K., Tarasov N. N. Adaptive Algorithm of Filtration with Integrated Residuals .... 80

### AUTOMATION AND CONTROL TECHNOLOGICAL PROCESSES

- Furtat I. B., Nekhoroshikh A. N. Modified Backstepping Algorithm and its Application to Control of Distillation Column ..... 90

### ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

- Gulay A. V., Zaitsev V. M. Expert Formation of Functional Parameters Composition in Digital Mechatronic Systems ..... 97
- Semenov M. E., Matveev M. G., Meleshenko P. A., Solovyov A. M. Dynamics of a Damping Device Based on Ishlinsky Material ..... 106
- Bazylev D. N., Pyrkin A. A., Bobtsov A. A. Adaptive Observer of Rotor Position and Flux for Salient Synchronous Motor ..... 114

### DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

- Fedunov B. E., Bojtsov A. V., Gindtse I. S., Kondratova T. E., Semenova M. A., Shatkovskaja S. A. Adaptive Observer of Rotor Position and Flux for Salient Synchronous Motor .. 122

Information about the journal is available online at:  
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

**А. Б. Бушуев**, канд. техн. наук, доц., abbushuev@corp.ifmo.ru,  
**В. В. Григорьев**, д-р техн. наук, проф., vvgrigorev@corp.ifmo.ru,  
**В. А. Петров**, аспирант, vapetrov@corp.ifmo.ru  
Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург

## Синтез позитивных нелинейных систем на основе методов оптимального управления

*Рассматривается нелинейная позитивная система управления движением автономного интеллектуального агента. Целью данной работы является синтез закона управления, обеспечивающего заданную степень экспоненциальной устойчивости в замкнутой позитивной системе на основе уравнений Лотки—Вольтерры. При синтезе системы используются методы теории оптимального управления для обеспечения устойчивости. Асимптотическая устойчивость достигается за счет решения уравнения Риккати и использования полученных коэффициентов в предложенной модели. Представлены результаты расчета и моделирования предложенной модели. Результаты моделирования соответствуют требуемым показателям качества, система управления обладает заданной степенью экспоненциальной устойчивости и требуемой переходной характеристикой, что позволяет использовать предложенную модель в наземных мобильных роботах, беспилотных летательных аппаратах, автономных подводных аппаратах и других роботах при поиске на большой площади.*

**Ключевые слова:** нелинейная САУ, случайное движение, интеллектуальный агент, оптимальное управление, уравнение Риккати, модель Лотки—Вольтерры, устойчивость, моделирование

### Введение

Существует множество алгоритмов и способов управления автономными интеллектуальными агентами, такими как мобильные роботы и беспилотные летательные аппараты (БПЛА). Интеллектуальные агенты способны к самостоятельному принятию решений для достижения поставленной цели, например, при поиске опасных для человека объектов, находящихся на большой территории, и др. [1—4] При создании подобных систем используются различные биологические алгоритмы, такие как хемотаксис [5—7], скопление в группы и поиск пищи [8—12], развитие популяций или взаимодействие видов, например, модель "хищник—жертва" [13—19]. В работах [14—18] рассмотрен биологический алгоритм формирования целевых углов поворота агента, основанный на модели взаимодействия популяций Лотки—Вольтерры, для достижения источника запаха или радиоактивного излучения. В биологическом алгоритме в качестве видов, которые взаимодействуют, представлены тенденции развития углов поворота налево и направо. Алгоритм имитирует процесс принятия решения живого организма. По этому алгоритму агент, в зависимости от преобладающего из двух видов, осуществляет поворот налево или направо. Таким образом агент управляет собственными движениями для

достижения поставленной цели. При подобном управлении устойчивость системы автоматического управления является важным критерием качества, которое необходимо обеспечить. В нашей работе для обеспечения заданной степени экспоненциальной устойчивости предлагается в модели формирования поворотов интеллектуального агента использовать методы теории оптимального управления [20—23].

### Постановка задачи

Рассмотрим нелинейный непрерывный позитивный стационарный объект управления (ОУ) с уравнением движения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{F}(\mathbf{x}(t))u(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  —  $n$ -мерный вектор состояния ОУ;  $u$  — скалярное управляющее воздействие;  $\mathbf{A}$  — квадратная матрица линейной части с постоянными коэффициентами размерности  $n \times n$ ;  $\mathbf{B}$  — матрица входов размерности  $n \times 1$ . Нелинейная функция  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  допускает представление в виде  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} + \mathbf{x}^T \mathbf{F}_0 \mathbf{x}$ , где  $\mathbf{F}_0$  — матрица размерности  $n \times n$ , по крайней мере, положительно полуопределенная, причем начальные условия, порождающие процессы объекта управления, все положительно  $x_i(0) > 0$ , где  $x_i$  — компоненты вектора состояния при  $i = \overline{1, n}$ .

Поставим задачу — синтезировать управление в виде линейных и квадратичных стационарных обратных связей (ЛКСОС)  $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}^T\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ , обеспечивающих в замкнутой системе заданную степень экспоненциальной устойчивости  $\alpha$  при ограничении  $\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \geq 0$ , где  $\mathbf{K}$  — матрица ЛКСОС размерности  $1 \times n$ , элементы которой определяют коэффициенты обратных связей по соответствующим переменным вектора состояний  $\mathbf{x}(t)$ . Параметр  $\alpha$  позволяет проводить оценку времени переходных процессов  $t_n \approx \frac{3}{\alpha}$ .

### Метод синтеза системы

Рассмотрим линейный объект управления с уравнением движения

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t). \quad (2)$$

В работе [20] показано, что если для ОУ (2) выбрать закон управления в виде

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \text{sign}\mathbf{K}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}^T\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (3)$$

то в замкнутой системе

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) - \\ &- \mathbf{B}\text{sign}\mathbf{K}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{K}^T\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4)$$

обеспечивается экспоненциальная устойчивость со степенью сходимости  $\alpha$ , если матрица  $\mathbf{K}$  получена в результате решения нелинейного матричного уравнения Риккати

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \nu\mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K} + 2\alpha\mathbf{P} = -\mathbf{Q}; \quad (5)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}. \quad (6)$$

В уравнениях (5), (6)  $\mathbf{P}$  — симметрическая положительно определенная квадратная матрица размерности  $n \times n$ ;  $\mathbf{Q}$  — симметрическая матрица штрафов на вектор состояния ОУ размерности  $n \times n$ , по крайней мере, положительно полуопределенная;  $\mathbf{R}$  — ненулевой скаляр, определяющий штраф на управление;  $\nu$  — параметр, принимающий значения в пределах от 0 до 2. При  $\nu = 2$  уравнение Риккати позволяет решать задачу нахождения оптимального управления, соответствующего принципу оптимальности по принуждению [24].

Будем рассматривать позитивные [25] системы с матрицей ЛКСОС, такой что  $\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \geq 0$ , у которых координаты вектора  $x_i(t) \geq 0$ , а матрица  $\mathbf{K}$  имеет положительные коэффициенты. Тогда знаковую функцию в соотношении (4) можно опустить.

Из результатов анализа поведения позитивной замкнутой системы [25] можно сделать

вывод, что объект управления (1) с законом управления (4) будет экспоненциально устойчивым при условии, если матрица

$$\mathbf{F}_0 - \mathbf{K}^T\mathbf{K} \quad (7)$$

положительно полуопределенная, а в случае невыполнения условия (7) система будет экспоненциально устойчивой в области  $\mathbf{x} \in D$ , ограниченной гиперплоскостью

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = 1 \quad (8)$$

при значениях  $x_i \geq 0$  при  $i = \overline{1, n}$ .

### Пример синтеза системы

Для примера рассмотрим систему уравнений развития популяций, относящихся к типу уравнений Лотки—Вольтерры [26]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= c_1x_1(t)x_2(t) - c_2x_1(t); \\ \dot{x}_2(t) &= c_1x_1(t)x_2(t) - c_3x_2(t), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $x_1(t) \geq 0$  и  $x_2(t) \geq 0$  — соответственно число особей мужского и женского пола в популяции;  $c_1$  — коэффициент рождаемости;  $c_2$  и  $c_3$  — коэффициенты смертности. Если одна из координат становится равной нулю, например  $x_1(t) = 0$ , то развитие  $x_1(t)$  прекращается, поскольку правая часть первого уравнения (9) будет равна нулю. Другая координата  $x_2(t)$  в этом случае будет экспоненциально затухать при  $c_3 > 0$ .

Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  образуют координаты вектора состояния  $\mathbf{x}(t)$ . Запишем систему уравнений (9) в форме уравнения (1):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -c_2 & 0 \\ 0 & -c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0,5c_1 \\ 0,5c_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}; \quad (10) \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -c_2 & 0 \\ 0 & -c_3 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0,5c_1 \\ 0,5c_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Решаем уравнение Риккати (5), (6) с матрицами (10) при следующих значениях заданных параметров:  $R = 1$ ,  $\nu = 2$ ,  $\alpha = 0,2$ ,  $c_2 = 0,3$ ,  $c_3 = 0,25$ ,  $\mathbf{Q} = -\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  и начальных приближениях  $k_1 = k_2 = 1$  и для матрицы  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2,3 \end{bmatrix}$ . Кроме уравнения (5), (6), заданы, по критерию Сильвестра [27], условия положительной определенности  $\det \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} > 0$ ,  $p_{11} > 0$  и симметричности  $p_{12} = p_{21}$  матрицы  $\mathbf{P}$ . Решением явля-

ется следующая матрица:  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3,289 & -2,13 \\ -2,13 & 2,883 \end{bmatrix}$ , матрица  $\mathbf{K}$  ЛКСОС находится по уравнению (6)  $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = [1,159 \quad 0,753]$ .

### Моделирование системы

Результаты моделирования представлены на рис. 1, 2. На рис. 1 приведены графики собственного движения ( $u(t) = 0$ ) объекта (10) с ненулевыми начальными условиями  $x_1(0) = 5$ ,  $x_2(0) = 3$ . Видно, что объект неустойчив. На рис. 2 приведены графики движения объекта, замкнутого ЛКСОС с рассчитанной матрицей  $\mathbf{K}$ . Замкнутая система устойчива, координаты сходятся к установившимся значениям  $x_1(t) = 0$ ,  $x_2(t) = 0$ . Вторая координата  $x_2(t)$  в ходе переходного процесса принимает отрицательное значение, т.е. система относится к классу систем, более широких, чем позитивные, а именно, для которых выполняется условие неотрицательности линейной части управления  $\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \geq 0$ .

График на рис. 3 показывает, что это условие выполняется.

На рис. 4 приведены графики переходного процесса с нулевых начальных условий при подаче на оба входа единичного ступенчатого воздействия  $u(t) = 1(t)$ . Время переходного процесса не превышает 15 с, что коррелирует с заданной при синтезе обратных связей степенью устойчивости  $\alpha = 0,2$ .

На рис. 5 представлены графики изменения координат замкнутого объекта с ограничениями  $\mathbf{x}(t) \geq 0$ . Видно, что при достижении одной из координат  $x_2(t) = 0$  другая координата  $x_1(t)$  затухает по экспоненте. Развитие популяции прекращается.

Популяционные уравнения используются в системах управления мобильными роботами и квадрокоптерами [17, 18], в которых координатами являются углы поворота робота вправо-влево, а для квадрокоптера добавляются повороты вверх-вниз.

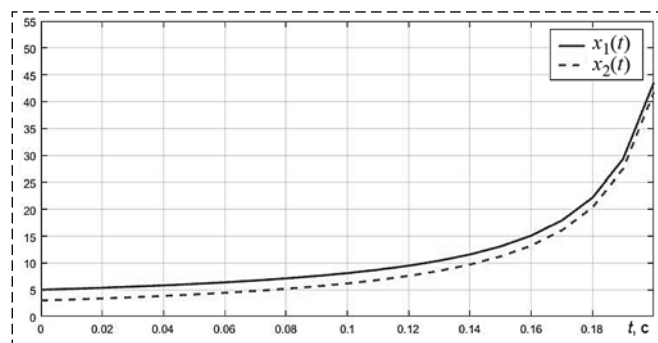


Рис. 1. Графики собственного движения разомкнутого объекта  
Fig. 1. The diagram of the dynamics of population change with  $u(t) = 0$

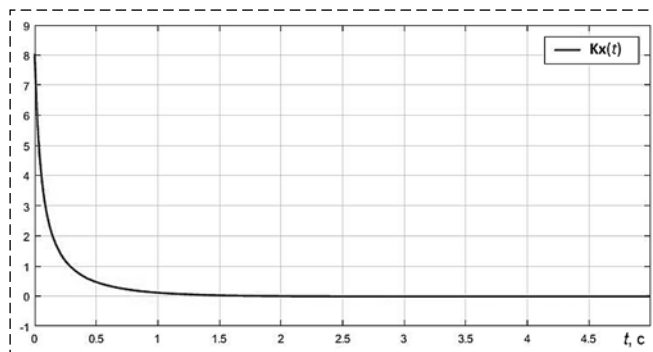


Рис. 2. Графики движения объекта, замкнутого ЛКСОС  
Fig. 2. The diagram of the dynamics of population change with linear-quadratic time-invariant feedback

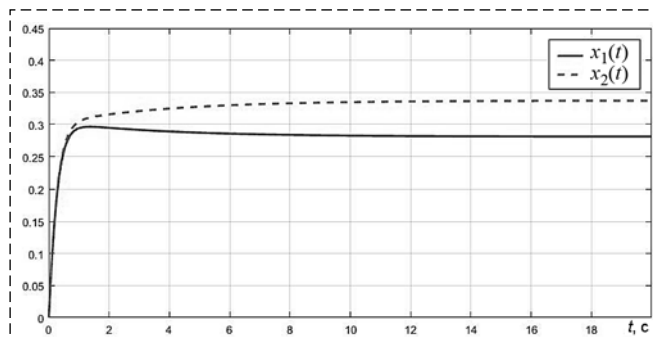


Рис. 3. График изменения функции  $\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$   
Fig. 3. The diagram of the changing function  $\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$

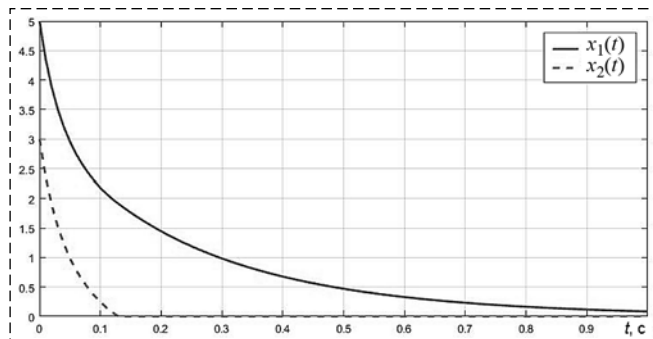


Рис. 4. Графики переходного процесса при  $u(t) = 1(t)$  на оба входа  
Fig. 4. The diagram of the transient responses with  $u(t) = 1(t)$

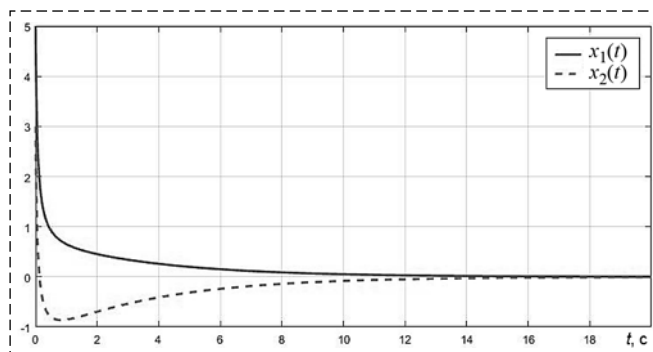


Рис. 5. Графики развития популяции  
Fig. 5. The diagram of the dynamics of population change with  $\mathbf{x}(t) \geq 0$

## Закключение

В данной работе рассматривается использование методов теории оптимального управления при синтезе системы автоматического управления роботизированным интеллектуальным агентом. Вычислены коэффициенты системы с использованием уравнения Риккати. Проведено моделирование системы, результаты которого показали, что синтезированная система экспоненциально устойчива и может быть применена в наземных мобильных роботах и квадрокоптере.

## Список литературы

1. Oyekan J., Hu H. Biologically-inspired behaviour based robotics for making invisible pollution visible: a survey // *Advanced Robotics*. 2014. Vol. 28, N. 5. P. 271–288.
2. Mair E., Augustine M., Jäger B., Stelzer A., Brand C., Burschka D., Suppa M. A biologically inspired navigation concept based on the Landmark-Tree map for efficient long-distance robot navigation // *Advanced Robotics*. 2014. Vol. 28, N. 5. P. 289–302.
3. Augustine M., Mair E., Stelzer A., Ortmeier F., Burschka D., Suppa M. Landmark-tree map: a biologically inspired topological map for long-distance robot navigation // *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. 2012. P. 128–135.
4. Jäger B., Mair E., Brand C., Stürzl W., Suppa M. Efficient navigation based on the landmark-tree map and the zinf algorithm using an omnidirectional camera // *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2013. Tokyo, Japan.
5. Muller S. D., Marchetto J., Airaghi S., Koumoutsakos P. Optimization based on bacterial chemotaxis // *IEEE Trans. Evol. Comput.* 2002;6:16–29.
6. Dhariwal A., Sukhatme G. S., Requicha A. A. G. Bacterium inspired robots for environmental monitoring. Vol. 2 // *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, New Orleans, LA, USA; 2004. p. 1436–1443.
7. Passino K. M. Biomimicry of bacterial foraging for distributed optimization and control // *IEEE Control Syst. Mag.* 2002;22:52–67.
8. Bernardine Dias M., Zinck M., Zlot R., Stentz A. Robust multirobot coordination in dynamic environments // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2004. Vol. 4. New Orleans, LA, USA. P. 3435–3442.
9. Gu D., Hu H. Using fuzzy logic to design separation function in flocking algorithms // *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 2008;16:826–838.
10. Tanner H. G., Jadbabaie A., Pappas G. J. Flocking in fixed and switching networks // *IEEE Trans. Autom. Control*. 2007;52:863–868.
11. Gazi V., Passino K. M. Stability analysis of social foraging swarms. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part B*. 2004;34:539–557.
12. Cortes J., Martinez S., Karatas T., Bullo F. Coverage control for mobile sensing networks // *IEEE Trans. Robot. Autom.* 2004;20:243–255.
13. Murray J. D. *Mathematical Biology I: An Introduction*. (3rd edition), Springer, 2002. 584 p.
14. Бушуев А. Б., Воробьев В. С., Непомнящих В. А., Сергеев А. И. Алгоритмы управления совместным поведением интеллектуальных агентов в пространстве // *Материалы 9-й Российской конференции "Информационные технологии в управлении (ИТУ-2016)*. СПб.: АО "Концерн "ЦНИИ "Электрон", 2016. С. 311–316.
15. Непомнящих В. А. Модели автономного поискового поведения // *От моделей поведения к искусственному интеллекту / Коллективная монография под общ. ред. Редько В. Г. М.: УРСС, 2006. С. 200–242.*
16. Бушуев А. Б., Воробьев В. С., Томашевич С. П., Мансурова О. К., Кульчицкий А. А. Поведение агента, заданное логистическим отображением // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2015. Т. 58, № 8. С. 600–605.
17. Bushuev A. B., Grigoriev V. V., Petrov V. A. Biological algorithms of control of a flying robot // *IEEE International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS)*. 2017. P. 364–369.
18. Бушуев А. Б., Петров В. А., Литвинов Ю. В., Мансурова О. К. Биологический алгоритм управления поисковыми движениями инерционного агента // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2017. Т. 60, № 9. С. 912–917.
19. Бушуев А. Б., Мансурова О. К. Синтез управлений в двумерной системе с гладкими нелинейностями // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2013. Т. 56, № 4. С. 38–41.
20. Быстров С. В., Григорьев В. В., Першин И. М., Мансурова О. К. Синтез линейно-квадратичных законов управления для непрерывных динамических объектов // *Международный научно-исследовательский журнал*. 2017. № 2–3(56). С. 97–100.
21. Быстров С. В., Григорьев В. В., Мансурова О. К., Першин И. М. Синтез полиномиальных законов управления для непрерывных динамических объектов // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2017. Т. 60, № 5. С. 398–403.
22. Бобцов А. А., Быстров С. В., Григорьев В. В., Дудров П. В., Козис Д. В., Костина О. В., Мансурова О. К. Построение областей допустимых изменений параметров гарантированного качества процессов динамических систем // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2006. № 10. С. 2–5.
23. Bystrov S. V., Grigoriev V. V. Qualitative exponential stability and instability of dynamical systems and range estimation of parameter acceptable changes // *Universal Journal of Control and Automation*. 2013. Vol. 1, N. 1. P. 15–18.
24. Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 247 с.
25. Григорьев В. В., Бойков В. И., Быстров С. В., Рябов А. И., Мансурова О. К. Исследование процессов позитивных систем на основе качественной экспоненциальной устойчивости // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2013. Т. 56, № 4. С. 15–19.
26. Марри Д. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях: Пер. с англ. / Под ред. А. Д. Мышкиса. М.: Мир, 1983. 397 с.
27. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2007. 308 с.

## Positive Nonlinear Systems Synthesis Based on Optimal Control Methods

A. B. Bushuev, abbushuev@corp.ifmo.ru, V. V. Grigoriev, vvgrigorev@corp.ifmo.ru,

V. A. Petrov, vapetrov@corp.ifmo.ru

ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: Petrov Vadim A., Post-Graduate Student,  
ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation,  
e-mail: vapetrov@corp.ifmo.ru

Accepted on November 16, 2018

## Abstract

This paper considers a nonlinear positive control system of autonomous intellectual agent's motions. Single or multiple intellectual agents are capable of independent decision-making to achieve an odor source or radioactive source. Various biologically inspired behaviour-based approaches, such as chemotaxis, the moth inspired casting algorithm, flocking behavior and foraging, population development or species interaction are used for creation of control system of an intellectual agent. The agent is a tracking system, for example, unmanned aerial vehicle or a multicopter. The intellectual agent searches hazardous pollutants in dangerous environments. The task of a flying robot is to find the source of invisible pollutions. The aim of this work is to synthesize the control law, that provides a predetermined degree of exponential stability in a closed-loop positive system based on Lotka—Volterra equations. The methods of optimal control theory are used in the synthesis of the system. Asymptotic stability is achieved by solving the Riccati equation. The stability of the control system is an important criterion of quality to be ensured. Therefore, the intellectual agent is able to control the movements to the right and to the left, reaching the source. With the model proposed we provide the simulation and experimental results, which correspond to the quality metrics required. In this work, the control system has a given degree of exponential stability and the transient response, which confirms the possibility of using the model proposed in terrestrial mobile robots, unmanned aerial vehicles, autonomous underwater vehicles and other robots in searching a large area.

**Keywords:** nonlinear control system, random search, intellectual agent, optimal control, Riccati equation, Lotka—Volterra equations, stability, simulation

For citation:

Bushuev A. B., Grigoriev V. V., Petrov V. A. Positive Nonlinear Systems Synthesis Based on Optimal Control Methods, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 67—71.

DOI: 10.17587/mau.20.67-71

## References

1. Oyekan J., Hu H. Biologically-inspired behaviour based robotics for making invisible pollution visible: a survey, *Advanced Robotics*, vol. 28, no. 5, 2014, pp. 271—288.
2. Mair E., Augustine M., Jäger B., Stelzer A., Brand C., Burschka D., Suppa M. A biologically inspired navigation concept based on the Land-mark-Tree map for efficient long-distance robot navigation, *Advanced Robotics*, vol. 28, no. 5, 2014, pp. 289—302.
3. Augustine M., Mair E., Stelzer A., Ortmeier F., Burschka D., Suppa M. Landmark-tree map: a biologically inspired topological map for long-distance robot navigation, *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*, 2012, pp. 128—135.
4. Jäger B., Mair E., Brand C., Stürzl W., Suppa M. Efficient navigation based on the landmark-tree map and the zinf algorithm using an omnidirectional camera, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, 2013, Tokyo, Japan.
5. Muller S. D., Marchetto J., Airaghi S., Koumoutsakos P. Optimization based on bacterial chemotaxis, *IEEE Trans. Evol. Comput.*, 2002, no. 6, pp. 16—29.
6. Dhariwal A., Sukhatme G. S., Requicha A. A. G. Bacterium inspired robots for environmental monitoring. Vol. 2, *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, New Orleans, LA, USA, 2004, pp. 1436—1443.
7. Passino K. M. Biomimicry of bacterial foraging for distributed optimization and control, *IEEE Control Syst. Mag.*, 2002;22:52—67.
8. Bernardino Dias M., Zinck M., Zlot R., Stentz A. Robust multirobot coordination in dynamic environments, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 4, 2004, New Orleans, LA, USA, pp. 3435—3442.
9. Gu D., Hu H. Using fuzzy logic to design separation function in flocking algorithms, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 2008;16:826—838.
10. Tanner H. G., Jadbabaie A., Pappas G. J. Flocking in fixed and switching networks, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2007;52:863—868.
11. Gazi V., Passino K. M. Stability analysis of social foraging swarms, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part B*, 2004;34:539—557.
12. Cortes J., Martinez S., Karatas T., Bullo F. Coverage control for mobile sensing networks, *IEEE Trans. Robot. Autom.*, 2004;20:243—255.
13. Murray J. D. Mathematical Biology I: An Introduction. (3rd edition), Springer, 2002, 584 p.
14. Bushuev A. B., Vorobiev V. S., Nepomnyashchikh V. A., Sergeev A. I. *Algoritmy upravleniya sovmeystnym povedeniem intellektual'nykh agentov v prostranstve* (The control algorithms for the collective behaviours of intellectual agents in three-dimensional space), *The 9th Conference on Information Technologies in Control (ITC-2016)*, 2016, pp. 311—316 (in Russian).
15. Nepomnyashchikh V. A. *Modeli avtonomnogo poiskovogo povedeniya, Ot modelej povedeniya k iskusstvennomu intellektu*, (Models of Autonomous search behavior. From models of behavior to artificial intelligence, Redko V. G. ed.), Moscow, URSS, 2006, pp. 200—242.
16. Bushuev A. B., Vorobiev V. S., Tomashevich S. I., Mansurova O. K., Kulchitsky A. A. *Povedenie agenta, zadannoe logisticheskim otobrazheniem* (Agent behavior defined by logistic mapping), *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie*, 2015, vol. 58, no. 8, pp. 600—605 (in Russian).
17. Bushuev A. B., Grigoriev V. V., Petrov V. A. Biological algorithms of control of a flying robot, *IEEE International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS)*, 2017, pp. 364—369.
18. Bushuev A. B., Petrov V. A., Litvinov Yu. V., Mansurova O. K. *Biologicheskij algoritim upravleniya poiskovymi dvizheniyami inercionnogo agenta* (Biological control algorithm for searching movements of inertial agent), *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie*, 2017, vol. 60, no. 9, pp. 912—917 (in Russian).
19. Bushuev A. B., Mansurova O. K. *Sintez upravlenij v dvumernoj sisteme s gladkimi nelinejnostyami* (Control synthesis in two-dimensional system with smooth nonlinearities), *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie*, 2013, vol. 56, no. 4, pp. 38—41 (in Russian).
20. Bystrov S. V., Grigoriev V. V., Pershin I. M., Mansurova O. K. *Sintez linejno-kvadrachnykh zakonov upravleniya dlya nepreryvnykh dinamicheskikh ob'ektov* (Synthesis of linear-quadratic control laws for continuous dynamic objects), *International Research Journal*, 2017, no. 2, pp. 97—100 (in Russian).
21. Bystrov S. V., Grigoriev V. V., Mansurova O. K., Pershin I. M. *Sintez polinomial'nykh zakonov upravleniya dlya nepreryvnykh dinamicheskikh ob'ektov* (Synthesis of polynomial control laws for continuous dynamic objects), *Journal of Instrument Engineering*, 2017, vol. 60, no. 5, pp. 398—403 (in Russian).
22. Bobtsov A. A., Bystrov S. V., Grigoriev V. V., Dudrov P. V., Kozis D. V., Kostina O. V., Mansurova O. K. *Postroenie oblastej dopustimyh izmenenij parametrov garantirovannogo kachestva processov dinamicheskikh sistem* (Structure of the domains of admissible variation of guarantee quality parameters of dynamic systems processes), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2006, no. 10, pp. 2—5 (in Russian).
23. Bystrov S. V., Grigoriev V. V. Qualitative exponential stability and instability of dynamical systems and range estimation of parameter acceptable changes, *Universal Journal of Control and Automation*, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 15—18.
24. Furasov V. D. *Ustojchivost' dvizheniya, ocenki i stabilizatsiya* (The stability of motion, estimates and stabilization), Nauka, 1977, 247 p.
25. Grigoriev V. V., Boykov V. I., Bystrov S. V., Mansurova O. K., Ryabov A. I. *Issledovanie processov pozitivnykh sistem na osnove kachestvennoj ehksponencial'noj ustojchivosti* (Study of positive systems processes on the base of qualitative exponential stability), *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie*, 2013, vol. 56, no. 4, pp. 15—19.
26. Marry D. *Nelinejnye differentsial'nye uravneniya v biologii: Lekcii o mo-deljah* (Nonlinear differential equations in biology: Lectures on models), Moscow, Mir, 1983, 397 p. (in Russian).
27. Beklemishev D. V. *Kurs analiticheskoy geometrii i linejnoy algebry* (Analytical geometry and linear algebra course). Moscow, Fizmatlit, 2007, 308 p. (in Russian).

Ю. И. Мышляев, канд. техн. наук, доц., uimysh@mail.ru,

Пью Чжо Кхаунг, аспирант, pyikyawkhaung1985@gmail.com,

Я. А. Долгов, студент КФ МГТУ им. Н. Э. Баумана, yaroslav2710@mail.ru

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, Калужский филиал

## Синтез алгоритмов слежения для линейных объектов с генерирующей моделью задающего сигнала

*Рассматривается класс линейных стационарных объектов со скалярным входом. Цель управления формулируется в виде слежения выхода объекта управления за заданным задающим воздействием. Для формирования генерирующей модели задающего воздействия используется принцип внутренней модели. Рассматривается решение подзадачи представления с заданной конечной точностью дискретизованного по времени задающего воздействия в форме линейного разложения по базисным функциям, соответствующим корням искомого характеристического многочлена дискретной линейной динамической системы (генератора). С использованием континуализации в пространстве состояния строится непрерывная, линейная генерирующая модель задающего сигнала с ненулевыми начальными условиями и входом, совпадающая по размерности с моделью объекта управления. Генерирующая модель позволяет сформулировать цель управления в виде слежения вектора состояния замкнутой системы за вектором состояния генерирующей модели. В общем случае генерирующая модель может быть неустойчивой. Поэтому желаемая скорость сходимости вектора ошибки слежения задается гурвицевой эталонной моделью. Разработанная методика получения генерирующей модели рассматривается в контексте решения общей задачи синтеза алгоритма слежения.*

**Ключевые слова:** генерирующая модель, стабилизация, задача слежения, метод структурного погружения, устойчивость, задающее воздействие

### Введение

В работе предлагается подход к синтезу алгоритмов слежения для линейных объектов управления (ОУ). В основе подхода лежит идея представления задающего сигнала в виде выхода линейной генерирующей модели, согласованной по размерности с вектором состояния ОУ. Подход позволяет повысить точность работы системы управления.

В работах [1, 4] приведены методика и результаты синтеза линейной обратной связи в предположении о возможности представления задающего сигнала в виде суммы порождающих функций, которые связаны с корнями обобщенного характеристического уравнения генерирующей модели. Однако в вышеуказанных работах отсутствует методика синтеза генерирующей модели для заданного задающего воздействия (получение характеристического многочлена, порождающих функций).

В публикуемой статье приведена методика формирования генерирующей модели требуемого порядка с начальными условиями и входным воздействием для заданной точности аппроксимации задающего сигнала. В основе синтеза лежит модифицированный метод структурного погружения [1, 3]. Разработанная методика получения генерирующей модели рассматривается в контексте решения общей задачи синтеза алгоритма слежения.

### Постановка задачи

Рассмотрим объект, представленный моделью состояния в форме Фробениуса

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $u \in R^1$ ,  $y \in R^1$ ,  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ -\alpha_0 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{B} = (0 \dots b)^T$ ;  $\mathbf{C} = (1 \ 0 \dots 0)$ ;  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ ,  $b$  — постоянные параметры.

Пусть задающее воздействие  $f$  представлено графически или в табулированном виде на конечном интервале времени. Не умаляя общности, будем считать, что задающее воздействие имеет вид табулированной функции  $f = \{f_1, f_2, \dots, f_{\bar{N}}\}$ , где  $f_i$  — значение функции в момент  $t_i$ ,  $i = \overline{1, \bar{N}}$ .

Ставится задача обеспечения заданного движения системы на конечном интервале времени с заданной точностью

$$|f(t_i) - y(t_i)| \leq \Delta, \forall t_i \in [0, T], \quad (2)$$

где  $\Delta > 0$  — точность слежения;  $T = \bar{N}h$  — конечное время;  $h = t_i - t_{i-1}$  — шаг дискретизации.

### Методика синтеза алгоритма управления

В основе методики лежит идея синтеза линейной непрерывной генерирующей модели

задающего сигнала  $f$ . Линейная форма генерирующей модели непосредственно связана с рассматриваемым классом линейных ОУ (1) и отражает возможность качественного решения поставленной задачи (отсутствия запаздывания, обеспечения требуемой точности и т.п.) для линейного ОУ [14].

Методика синтеза управления состоит из двух частей. В первой части по заданному воздействию  $f$  синтезируется генерирующая модель с выходом  $f_r(t)$ , который с точностью  $\Delta_r < \Delta$  совпадает с этим задающим воздействием на интервале  $t \in [0, T]$ .

Во второй части синтезируется линейная обратная связь объекта по ошибке между векторами состояния объекта управления и генерирующей модели задающего воздействия.

Генерирующая модель (ГМ) представляет собой систему, порядок которой совпадает с порядком объекта управления. ГМ обеспечивает генерацию собственного выходного сигнала  $f_r(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , аппроксимирующего с заданной точностью сигнал  $f$  так, что  $\|f(t_i) - f_r(t_i)\| \leq \Delta_r$ ,  $t_i \in [0, T]$ .

Используя полноту ГМ (существование единственного решения на полубесконечном интервале времени), можно рассмотреть следующую задачу слежения. Представим цель управления (ЦУ) как ограниченность траекторий замкнутой системы и обеспечение заданной точности в виде выполнения неравенства

$$|y(t) - f_r(t)| \leq \Delta_f, \quad \forall t \geq t_*. \quad (3)$$

Формализуем понятие ГМ.

**Определение** [14]. Генерирующей моделью назовем линейную систему, имеющую размерность и форму представления объекта (1) и генерирующую на выходе сигнал вида

$$\begin{aligned} f_r(t) &= \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) + v(t) = \\ &= \sum_{i=1}^r \left( c_i e^{(\lambda_i + j\omega_i)t} + c_i^* e^{(\lambda_i - j\omega_i)t} \right) + v(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $a_i = 2 \sum_{k=0}^{p_i-1} \tilde{c}_{ik} t^k$ ;  $b_i = -2 \sum_{k=0}^{p_i-1} \tilde{c}_{ik}^* t^k$ ;  $c_i = \tilde{c}_{ik} + j\tilde{c}_{ik}^*$ ;  $c_i^* = \tilde{c}_{ik} - j\tilde{c}_{ik}^*$ ;  $p_i$  — кратность  $i$ -го корня или пары комплексно-сопряженных корней;  $|v(t)| \leq \Delta_v$ ,  $\Delta_v$  — ошибка аппроксимации.

Предполагается, что структура задающего сигнала на ограниченном временном интервале может быть представлена меньшим ограниченным числом смешанных базисных функций (полиномиальных, гармонических, экспоненциальных и др.) по сравнению с ограниченным рядом базисных функций одного вида [16].

Пусть  $\lambda_i \pm j\omega_i$ ,  $i = \overline{0, r}$ , — взаимно-простые корни некоторого характеристического уравнения. Для определенности будем считать, что среди этих корней  $l_1$  вещественных и  $l_2$  пар комплексно-сопряженных с кратностью  $p_i$ . Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$\prod_{i=1}^{l_1} (s - \lambda_i)^{p_i} \prod_{m=1}^{l_2} (s - \lambda_m + j\omega_m)^{p_m} \times \quad (5)$$

$$\times (s - \lambda_m - j\omega_m)^{p_m} = s^N + \beta_{l-1} s^{N-1} + \dots + \beta_0 = 0,$$

где  $r = l_1 + l_2$ ,  $\beta_i$  — коэффициенты, определяемые корнями характеристического уравнения;

порядок уравнения равен  $N = \sum_{i=1}^{l_1} p_i + \sum_{m=1}^{l_2} 2p_m$  в зависимости от числа вещественных и комплексно-сопряженных корней.

Заметим, что представление (4) предполагает ограниченность основного спектра частот  $\omega_{f_r}$ .

Характеристическое уравнение (5) определяет линейное однородное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^N}{dt^N} y_r(t) + \beta_{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y_r(t) + \dots + \beta_0 y_r(t) = 0, \quad (6)$$

решение которого имеет вид

$$y_r(t) = \sum_{i=1}^N \left( C_i e^{(\lambda_i + j\omega_i)t} + C_i^* e^{(\lambda_i - j\omega_i)t} \right). \quad (7)$$

Сравнивая равенства (4) и (7), заключаем, что  $|y_r(t) - f_r(t)| \leq \Delta_v$  при  $C_i = c_i$ ,  $C_i^* = c_i^*$ ,  $i = \overline{0, N}$ , где  $C_i = \tilde{C}_{ik} + j\tilde{C}_{ik}^*$ ,  $C_i^* = \tilde{C}_{ik} - j\tilde{C}_{ik}^*$ ,  $\tilde{C}_{ik} = \tilde{c}_{ik}$ ,  $\tilde{C}_{ik}^* = \tilde{c}_{ik}^*$ ,  $k = \overline{0, n-1}$ , что обеспечивается выбором начальных условий

$$y_r(0) = \sum_{i=1}^N 2 \operatorname{Re}\{c_i\} = \sum_{i=1}^N 2\tilde{c}_{ik} = \sum_{i=1}^N a_i;$$

$$\begin{aligned} y_r(0)'_t &= \sum_{i=1}^N 2 \operatorname{Re}\{(\tilde{c}_{ik} + j\tilde{c}_{ik}^*)(\lambda_i + j\omega_i)\} = \\ &= \sum_{i=1}^N 2(\tilde{c}_{ik}\lambda_i - \tilde{c}_{ik}^*\omega_i) = \sum_{i=1}^N (a_i\lambda_i + b_i\omega_i); \end{aligned} \quad (8)$$

.....

$$y_r(0)^{(N-1)}_t = \sum_{i=1}^N 2 \operatorname{Re}\{(\tilde{c}_{ik} + j\tilde{c}_{ik}^*)(\lambda_i + j\omega_i)^{N-1}\}.$$

В общем случае генерирующую модель  $n$ -го порядка можно представить в форме Фробениуса

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r \eta, \quad y_r = \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r, \quad (9)$$

где  $\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \\ -\tilde{\beta}_0 & \dots & -\tilde{\beta}_{n-1} \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{B}_r = (0 \dots 1)^T$ ;  $\mathbf{C}_r = (1 \ 0 \dots 0)$ ;  $\mathbf{x}_r(0) = (y_r(0) \dots y_r(0)^{(n-1)})^T$  — вектор начальных условий;  $-\tilde{\beta}_0 \dots -\tilde{\beta}_{n-1}$  — коэффициенты, выбираемые из уравнения (5) по



$$\alpha_{li} = \frac{(\mathbf{f}_l, \mathbf{q}_i)}{\|\mathbf{q}_i\|^2}, \quad (13)$$

где интервалы изменения индексов определяются в соответствии с индексами матрицы  $\mathbf{Z}$ ,  $l = \overline{2, N+1}, i = \overline{1, N}$ . Данные коэффициенты формируют верхне-треугольную матрицу  $\mathbf{R}$ . Таким образом, получено указанное выше разложение  $\mathbf{Z} = \mathbf{OR}$ .

В процессе ортогонализации для индекса  $m = N + 1$  проверяется условие  $\|\mathbf{q}_{N+1}\| < \delta$ , где  $\delta$  — заданная сколь угодно малая положительная величина. Таким образом, матрица  $\mathbf{Z}$  расширяется до тех пор, пока норма очередного ортогонального вектора не станет меньше заданной константы, что характеризует вырожденность матрицы  $\mathbf{Z}$ . При этом  $N$  — искомое число членов разностного уравнения (10).

*Этап 2. Вычисление коэффициентов модели дискретного сигнала.* Из системы уравнений (11) последовательно выразим векторы ортогонального базиса через исходный базис  $\{\mathbf{f}_l\}$ , при этом учтем, что норма последнего ортогонального вектора  $\|\mathbf{q}_{N+1}\| \approx 0$ , а значит, получаем линейно выраженную комбинацию вектора  $\mathbf{f}_m$  через базис  $\{\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_{m-1}\}$ . Учитывая (13), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{f}_1, \\ \mathbf{q}_2 &= \mathbf{f}_2 - \alpha_{21}\mathbf{f}_1, \\ . &. . . . . \\ \mathbf{q}_m &= \mathbf{f}_m - \alpha_{m,1}\mathbf{f}_1 - \dots - \alpha_{m,m-1}\mathbf{f}_{m-1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя условие линейной зависимости столбца  $\mathbf{f}_1$  от векторов базиса  $\{\mathbf{f}_2 \dots \mathbf{f}_{N+1}\}$ , из соотношения (14) получаем окончательные коэффициенты для такого линейного разложения:

$$\begin{aligned} a_{N,N} &= \alpha_{N+1,N}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{N,j} &= \alpha_{N+1,j} - \alpha_{N,j} a_{N,N} - \dots - \alpha_{j+1,j} a_{N,j+1}, \\ a_{N,1} &= \alpha_{N+1,1} - \alpha_{N,1} a_{N,N} - \dots - \alpha_{2,1} a_{N,2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, идентификация минимальной структуры модели исходного процесса (любой другой функции или характеристики) на основе МСП позволяет определить наименьшую размерность  $N$  параметрической модели и сформировать базисные функции анализируемого процесса, справедливые для ограниченного интервала времени  $t \in [0, T]$ , где  $T = (2N + 1)h$ ,  $h$  — период и шаг дискретизации по времени соответственно.

*Этап 3. Определение начальных условий и оценивание точности аппроксимации.* Определим искомую модель измерений в векторно-матричной форме. Для этого к уравнению дис-

кретного сигнала формально добавим строки, связывающие векторы  $k$ -х и  $(k - 1)$ -х измерений. В векторно-матричной форме получим

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{A}_f \mathbf{F}_{k-1}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{F}_k = (f_k f_{k-1} \dots f_{k-N+1})^T$ ,  $\mathbf{F}_{k-1} = (f_{k-1} f_{k-2} \dots f_{k-N})^T$ ,

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} a_{N,N-1} & \dots & a_{N,1} & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Окончательно найдем следующее матричное представление модели исходного сигнала в  $k$ -й момент времени:

$$f_{k+1} = \mathbf{A}_f f_k. \quad (18)$$

Используя рекуррентные соотношения (16), (18) на выборке из  $N + w$  измерений, где  $w = 2j + 1$  — ширина окна наблюдений измеряемого сигнала, и процедуру метода наименьших квадратов, можно найти оценку начального вектора  $\mathbf{G}$ :

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{F}\mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{f}}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{F}\mathbf{F} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}^T$ ,  $\bar{\mathbf{f}} = (f_{N+1} \dots f_1)^T$ ,

$$\mathbf{F}^T = (\mathbf{B}\mathbf{F}_g^N \quad \mathbf{B}\mathbf{F}_g^{N-1} \quad \dots \quad \mathbf{B}\mathbf{F}_g \quad \mathbf{B}),$$

где  $\mathbf{B} = (a_{N-1} \dots a_0)$ .

На основе полученных оценок рассчитывается методическая ошибка, которая характеризует осредненную величину — "несимметричность" аппроксимации измерений авторегрессионной моделью (10) на выборке из  $N$  измерений:

$$\Delta_{\Gamma} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_i - \hat{f}_i)^2, \quad (20)$$

где  $\Delta_r$  — ошибка генерации.

*Этап 4. Получение генерирующей модели в непрерывной области.* Из разностного уравнения следует, что характеристическое уравнение для исходного сигнала в  $z$ -области имеет вид

$$\begin{aligned} Q(z) &= \prod_{i=1}^N (z - \lambda_{z_i}) = \\ &= z^N - a_{N,1} z^{N-1} - \dots - a_{N,N-1} z - a_{N,N} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\lambda_{z_i}$  — корни характеристического уравнения (21).

Проведем операцию континуализации (перехода из дискретной области в непрерывную), используя формулу  $z$ -преобразования  $z = e^{sh} \Rightarrow \lambda_{z_i} = e^{\lambda_{s_i} h}$ , где  $h$  — шаг дискретизации.

Найдем корни характеристического уравнения в непрерывной области. Получим

$$P(s) = \prod_{i=1}^N (s - \lambda_{s_i}) = s^N + \beta_{N-1}s^{N-1} + \dots + \beta_{N-2}s - \beta_0 = 0, \quad (22)$$

где  $\lambda_{s_i} = \frac{1}{h} \ln \lambda_{z_i}$ .

Таким образом, имеем характеристический многочлен в форме (5). Выбирая из  $N$  корней  $\lambda_{s_i}$  необходимое число корней  $n \leq N$  или добавляя устойчивые "быстрые" корни при  $n > N$ , согласовывая начальные условия, формируя входное воздействие  $\eta$ , получаем генерирующую модель в форме (9). Подробнее процедура формирования генерирующей модели описана в работе [14].

### Синтез обратной связи

Не умаляя общности результата синтеза, будем считать, что модель генерирующей системы задана в форме (9). Введем модель ошибки между объектом (1) и генерирующей моделью (9)

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r - \mathbf{B}_r\eta; \\ y_\epsilon &= \mathbf{C}\epsilon, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\epsilon = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r$  — вектор ошибки по состоянию.

Заметим, что матрица  $\mathbf{A}_r$  в общем случае не является гурвицевой. Этот факт не позволяет использовать генерирующую модель в качестве эталонной модели, например, при синтезе модального управления.

Введем эталонную модель стремления ошибки к нулю в виде

$$\dot{\epsilon}_\vartheta = \mathbf{A}_\vartheta \epsilon_\vartheta, \quad (24)$$

где  $\epsilon_\vartheta \in R^n$ ,  $\mathbf{A}_\vartheta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_{n-1} \\ -a_0^\vartheta & \dots & -a_{n-1}^\vartheta \end{pmatrix}$  — гурвицевая матрица с заданным расположением собственных чисел. Выберем начальные условия нулевыми  $\epsilon_\vartheta(0) = 0$ .

Введем дополнительную цель управления (ДЦУ):

$$\mathbf{e} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (25)$$

где  $\mathbf{e} = \epsilon - \epsilon_\vartheta$  — невязка.

Составим динамическую модель невязки

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r - \mathbf{B}_r\eta - \mathbf{A}_\vartheta\epsilon_\vartheta \pm \mathbf{A}_\vartheta\mathbf{e} = \\ &= \mathbf{A}_\vartheta\mathbf{e} + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u - \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r - \mathbf{B}_r\eta - \mathbf{A}_\vartheta\epsilon = \\ &= \mathbf{A}_\vartheta\mathbf{e} + (\mathbf{A} - \mathbf{A}_\vartheta)\mathbf{x} + (\mathbf{A}_\vartheta - \mathbf{A}_r)\mathbf{x}_r + \mathbf{B}u - \mathbf{B}_r\eta. \end{aligned} \quad (26)$$

Выберем управление из условия

$$\mathbf{B}u = (\mathbf{A}_\vartheta - \mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{A}_r - \mathbf{A}_\vartheta)\mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r\eta. \quad (27)$$

Существование решения уравнения (27) относительно  $u$  гарантируется управляемостью объекта (1), согласованностью структур матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{A}_\vartheta$  и матриц  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B}_r$  соответственно. Алгоритм управления имеет вид

$$u = \mathbf{k}_x\mathbf{x} + \mathbf{k}_r\mathbf{x}_r + k_\eta\eta, \quad (28)$$

где матрицы и коэффициент алгоритма управления выбираются из условий

$$\mathbf{B}\mathbf{k}_x = \mathbf{A}_\vartheta - \mathbf{A}, \quad \mathbf{B}\mathbf{k}_r = \mathbf{A}_r - \mathbf{A}_\vartheta, \quad \mathbf{B}k_\eta = \mathbf{B}_r.$$

Подставляя соотношение (28) в выражение (26), получаем  $\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_\vartheta\mathbf{e}$  и, в силу гурвицевости матрицы  $\mathbf{A}_\vartheta$ , ДЦУ (25) достигается. Из  $\mathbf{e} \rightarrow 0$  следует, что  $\epsilon - \epsilon_\vartheta \rightarrow 0$  и, в силу гурвицевости эталонной модели (24),  $\epsilon = \mathbf{x} - \mathbf{x}_r \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_r$ . Таким образом, ЦУ (2) достигается.

Ограниченность траекторий при любых ограниченных начальных условиях  $\mathbf{x}(0)$  вытекает из ограниченности  $\mathbf{x}_r(0)$ , что, в свою очередь, гарантируется ограниченностью правой части разложения (4) и ограниченностью ее производных по времени.

Заметим, что входящий в управление (28) вектор  $\mathbf{x}_r$  на практике не реализуем в форме состояния, находящейся на границе устойчивости генерирующей системы (9). Однако описание системы (9) в форме Фробениуса позволяет использовать вместо него вектор  $\boldsymbol{\phi}$ , сформированный из  $f_r(t)$  и его производных так, что  $\mathbf{x}_r(t) = \boldsymbol{\phi}(t)$ . Реализуемое управление имеет вид

$$u = \mathbf{k}_x\mathbf{x} + \mathbf{k}_r\boldsymbol{\phi} + k_\eta\eta, \quad (29)$$

где  $\boldsymbol{\phi} = (f_r, f_r', \dots, f_r^{(n-1)})^T$ .

**Теорема.** В замкнутой системе (1), (29) достигается цель управления  $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\phi}$  при  $t \rightarrow \infty$ , траектории системы ограничены при любых ограниченных начальных условиях и справедлива оценка

$$\epsilon(t)^T \mathbf{H} \epsilon(t) \leq \epsilon(0)^T \mathbf{H} \epsilon(0) e^{-\rho t},$$

где  $\epsilon(t) = \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\phi}(t)$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > 0: \mathbf{H}\mathbf{A}_\vartheta + \mathbf{A}_\vartheta^T\mathbf{H} = \mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T > 0$ ,  $\rho = \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{G})}{\lambda_{\max}(\mathbf{H})} > 0$ ;  $\lambda_{\min}(\mathbf{G})$ ,  $\lambda_{\max}(\mathbf{H})$  — минимальное и максимальное собственное число матрицы.

**Замечания.** Переменные состояния  $\mathbf{x}_r$ ,  $\mathbf{x}_\vartheta$  непосредственно не входят в алгоритм управления (29). Однако формировать генерирующую модель (5) необходимо для определения задающего воздействия  $\eta$  и матриц  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$ , которые наряду с матрицей эталонной модели  $\mathbf{A}_\vartheta$  формируют параметры алгоритма управления (29).

Собственные числа матрицы  $\mathbf{A}_3$  определяют скорость слежения и значение перерегулирования.

### Методический пример

Объект управления 3-го порядка описывается уравнением в форме Фробениуса (1)

$$\text{с матрицами } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix},$$

$\mathbf{C} = (1 \ 0 \ 0)$ ,  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 2$  и начальными условиями  $x_1(0) = 42$ ,  $x_2(0) = 0,5$ ,  $x_3(0) = 0$ .

Желаемый выход задан в табулированном виде с шагом дискретизации  $h = 1,5$  и представлен на рис. 1. Зададим точность ортогонализации  $\delta \leq 10^{-8}$ . Требуется обеспечить достижение цели управления (2). Проведем дискретизацию (если  $f$  задано графически) задающего воздействия  $f$  с учетом теоремы Шеннона — Котельникова.

Сформируем матрицу  $\mathbf{Z}$ . Для  $N = 3$  имеем

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 36,5330 & 37,6205 & 38,5149 & 39,2065 \\ 37,6205 & 38,5149 & 39,2065 & 39,6876 \\ 38,5149 & 39,2065 & 39,6876 & 39,9531 \\ 39,2065 & 39,6876 & 39,9531 & 40 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ортогональные векторы по алгоритму Грама — Шмидта. Получим матрицу  $\mathbf{Q}$  следующего вида:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 36,5330 & 0,3348 & 6,3404 \cdot 10^{-4} & -2,5662 \cdot 10^{-9} \\ 37,6205 & 0,1194 & -6,2012 \cdot 10^{-4} & 2,5043 \cdot 10^{-9} \\ 38,5149 & -0,1018 & -6,2531 \cdot 10^{-4} & 2,5281 \cdot 10^{-9} \\ 39,2065 & -0,3265 & 6,1851 \cdot 10^{-4} & -2,4953 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}.$$

Точность ортогонализации равна  $\delta = 3,979 \cdot 10^{-11}$ .

Найдем коэффициенты линейного разложения по формулам (14), (15). Характеристический полином желаемого сигнала в этом случае имеет вид

$$Q = z^3 - 2,9890z^2 + 2,98905z - 1.$$

Проведем оценку полученных результатов (рис. 2).

Ошибка генерации:  $\Delta_r = 8,7784 \cdot 10^{-9}$ .

Генерирующая модель должна иметь 3-й порядок. Найдем корни характеристического уравнения  $P(s)$  в непрерывной области. Используя формулу  $z$ -преобразования  $z = e^{sh} \Rightarrow \lambda_{z_i} = e^{\lambda_{s_i}h}$ , получим  $\lambda_{s0} = 0,0000019$ ,  $\lambda_{s1,s2} = \pm j \cdot 0,100000281$ .

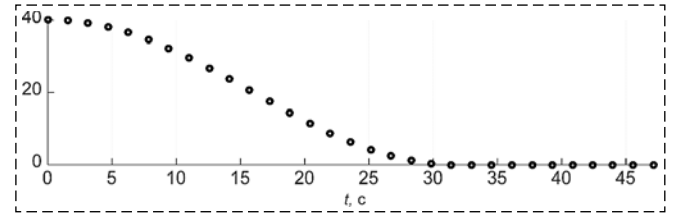


Рис. 1. График задающего воздействия  $f$   
Fig. 1. Graph of input reference  $f$

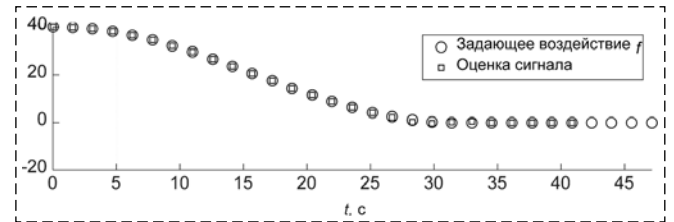


Рис. 2. Графики задающего воздействия  $f$  и его оценки при  $N = 3$   
Fig. 2. Graphs of input reference  $f$  and its estimation for  $N = 3$

Генерирующая модель (5) будет иметь матрицы вида

$$\mathbf{A}_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = 0,01$ ,  $\beta_2 = 0$ . Определим начальные условия для генерирующей модели, соответствующие второму и третьему слагаемому  $P(s) = s^3 + 0,01s$ .

Зададим желаемые собственные числа в виде  $\lambda_{0,1,2}^3 = -1$  и сформируем матрицу эталонной модели в виде

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0^3 & -a_1^3 & -a_2^3 \end{pmatrix},$$

где  $a_0^3 = 1$ ,  $a_1^3 = 3$ ,  $a_2^3 = 3$ . Параметры алгоритма управления определим по формулам

$$k_{x_1} = \frac{\alpha_0 - a_0^3}{b}; \quad k_{x_2} = \frac{\alpha_1 - a_1^3}{b}; \quad k_{x_3} = \frac{\alpha_2 - a_2^3}{b};$$

$$k_{r1} = \frac{a_0^3 - \beta_0}{b}; \quad k_{r2} = \frac{a_1^3 - \beta_1}{b}; \quad k_{r3} = \frac{a_2^3 - \beta_2}{b};$$

$$\mathbf{k}_x = (k_{x_1} \ k_{x_2} \ k_{x_3}); \quad \mathbf{k}_r = (k_{r1} \ k_{r2} \ k_{r3}).$$

Задающее воздействие для алгоритма управления имеет вид:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} c_0 + c_1 e^{\lambda_{s1}t} + c_2 e^{\lambda_{s2}t} \\ c_1 \lambda_{s1} e^{\lambda_{s1}t} + c_2 \lambda_{s2} e^{\lambda_{s2}t} \\ c_1 \lambda_{s1}^2 e^{\lambda_{s1}t} + c_2 \lambda_{s2}^2 e^{\lambda_{s2}t} \end{pmatrix},$$

где  $c_0 = 20,179$ ,  $c_1 = 10,069$ ,  $c_2 = 10,069$ . Выход генерирующей модели показан на рис. 3. Управление имеет вид

$$u = k_x x + k_\varphi \varphi.$$

На рис. 4–7 приведены результаты моделирования замкнутой системы в относительных единицах.

Из рис. 4 видно, что достигается цель управления (2). Из рис. 7 видно, что вектор ошибок по состоянию стремится к нулю.

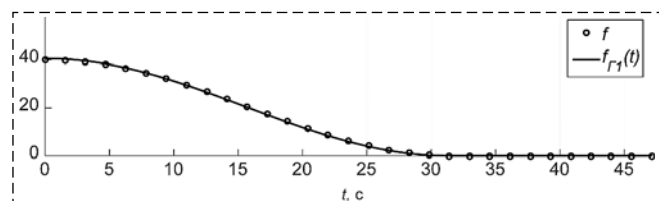


Рис. 3. Графики задающего воздействия  $f$  и выхода ГМ  
Fig. 3. Graphs of input reference  $f$  and output of generating model

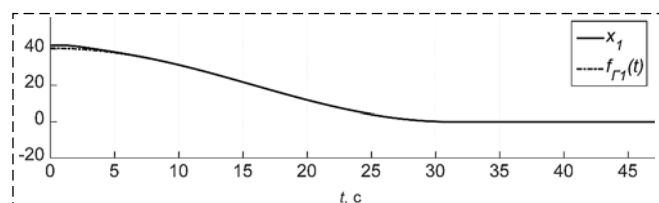


Рис. 4. Графики координат объекта и выхода ГМ  
Fig. 4. Graphs of coordinates of object and output of generating model

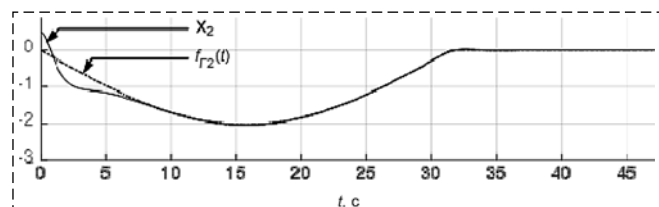


Рис. 5. Графики скорости объекта и производной выхода ГМ  
Fig. 5. Graphs of velocity of object and output derivative of generating model

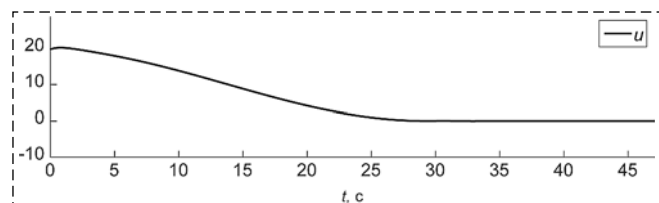


Рис. 6. График управления  
Fig. 6. Graph of control signal

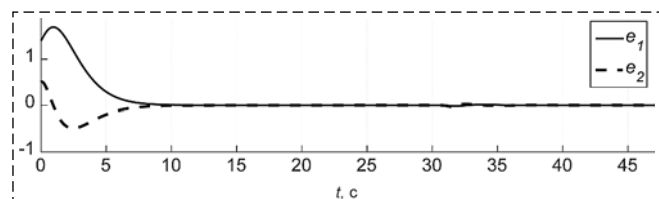


Рис. 7. Графики ошибок по состоянию  
Fig. 7. Graphs of errors by position

## Заключение

В работе представлена методика формирования генерирующей модели задающего воздействия с использованием модифицированного метода структурного погружения. Приведена методика синтеза алгоритма слежения с использованием генерирующей модели. Полученное управление обеспечивает отсутствие запаздывания и повышает точность работы системы управления.

## Список литературы

1. Johnson C. D. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. Vol. 16, N. 6. P. 635–644.
2. Джонсон С. Д. Теория регуляторов, приспособляющихся к возмущениям. Гл. VII // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К. Т. Леондеса. М.: Мир, 1980. С. 253–320.
3. Уонем У. М. Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход. М.: Наука, 1980. 376 с.
4. Филимонов Н. Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования // Мехатроника, автоматизация, управление. 2003. № 2. С. 11–15.
5. Francis B. A., Wonham W. M. The internal model principle for linear multivariable regulators // Applied Mathematics and Optimization. 1975, Vol. 2, N. 2. P. 170–194.
6. Davison E. J. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1976. Vol. 21, N. 1. P. 25–34.
7. Лукьянова Г. В., Никифоров В. О. Алгоритм компенсации внешних детерминированных возмущений: операторный метод синтеза // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО, 2003. № 10. С. 5–10.
8. Di Benedetto M. D. Synthesis of an internal model for nonlinear output regulation // International Journal of Control. 1987. Vol. 45, N. 3. P. 1023–1034.
9. Khalil H. K. Robust servomechanism output feedback controller for feedback linearizable systems // Automatica. 1994. Vol. 30, N. 10. P. 1587–1599.
10. Никифоров В. О. Нелинейная система управления с компенсацией внешних детерминированных возмущений // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 69–73.
11. Никифоров В. О. Адаптивная стабилизация линейного объекта, подверженного внешним детерминированным возмущениям // Известия РАН. Теория и системы управления. 1997. № 2. С. 103–106.
12. Nikiforov V. O. Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances // European Journal of Control. 1998. Vol. 4, N. 2. P. 132–139.
13. Nikiforov V. O. Nonlinear servocompensation of unknown external disturbances // Automatica. 2001. Vol. 37. P. 1647–1653.
14. Мышляев Ю. И. Об одном подходе к решению задачи слежения с желаемой спектральной динамикой // Труды ФГУП "НПЦАП им. академика Н. А. Пилюгина". Системы и приборы управления. 2016. № 4. С. 5–11.
15. Утробин Г. Ф., Коляда Ю. И., Журавлев Р. Д. Оперативное определение порядка и коэффициентов нестационарной волновой структуры измеряемого сигнала // Приборостроение, 1989, № 5. С. 3–7.
16. Утробин Г. Ф., Мышляев Ю. И., Краснощеченко В. И., Мышляева С. В. Фильтрация дискретных сигналов методом структурного погружения // Труды ФГУП "НПЦАП им. академика Н. А. Пилюгина". Системы и приборы управления. 2016. № 2. С. 36–44.
17. Мышляев Ю. И., Тар Яр Мио. Алгоритмы скоростного биградиента для линейных систем с желаемой спектральной динамикой по выходу конечного каскада // Экономика и менеджмент систем управления. 2016. № 3.1(21). С. 183–191.

# Synthesis of Tracking Algorithms for Linear Objects with a Generative Model of the Reference Signal

Ju. I. Myshljaev, uimysh@mail.ru, Pyi Kyaw Khaung, pyikyawkhaung1985@gmail.com,

Ja. A. Dolgov, yaroslav2710@mail.ru,

Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch, Kaluga, 248000, Russian Federation

Corresponding author: **Myshljaev Jury I.**, Ph.D., Senior lecturer,  
Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch, Kaluga, 248000, Russian Federation,  
e-mail: uimysh@mail.ru

Accepted on August 22, 2018

## Abstract

In the article the class of linear stationary objects with a scalar input is considered. The purpose of control is formulated in the form of tracking the output of the control object for a given input reference. At the same time, the principle of the internal model is used to form a generating model of the input reference. The solution of the representation subtask with a predetermined finite precision of a time-discretized input reference in the form of a linear expansion on the basic functions corresponding to the roots of the desired characteristic polynomial of a discrete linear dynamic system (generator) is considered. By using the continualization, a continuous, linear generating model of the input reference with non-zero initial conditions and input is constructed in the state space, coinciding in dimension with the model of the control object. The generating model makes it possible to formulate the control goal in the form of tracking the state vector of a closed system with the state vector of the generating model. In general, the generating model may not be stable. Therefore, the desired rate of convergence of the tracking error vector is given by the Hurwitz reference model. The developed method of generating the generating model is considered in the context of solving the general problem of the synthesis of the tracking algorithm.

**Keywords:** generative model, stabilization, tracking task, structural immersion method, stability, input reference

For citation:

Myshljaev Ju. I., Pyi Kyaw Khaung, Dolgov Ja. A. Synthesis of Tracking Algorithms for Linear Objects with a Generative Model of the Reference Signal, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 72–79.

DOI: 10.17587/mau.20.72-79

## References

1. Johnson C. D. Accommodation of external disturbances in linear regulator and servomechanism problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1971, vol. 16, no. 6, pp. 635–644.
2. Johnson C. D. *Teoriya reguljatorov, prispoblivajushhihsja k vozmushhenijam. Gl. VII v kn.: Fil'tracija i stohasticheskoe upravlenie v dinamičeskix sistemah* (Theory of regulators adapting to disturbances. Ch. VII // Filtration and stochastic control in dynamic systems). Moscow, Mir, 1980, pp. 253–320 (in Russian).
3. Wonham W. M. *Linejnye mnogomernye sistemy upravlenija: Geometričeskij podhod* (Linear multidimensional control systems: Geometric approach), Moscow, Nauka, 1980, 376 p. (in Russian).
4. Filimonov N. B. *Identifikacija sostojanija i vneshnej sredy diskretnyh dinamičeskix ob'ektov metodom polijedral'nogo programirovanija* (Identification of the state and environment of discrete dynamic objects by the method of polyhedral programming), *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2003, no. 2, pp. 11–15 (in Russian).
5. Francis B. A., Wonham W. M. The internal model principle for linear multivariable regulators, *Applied Mathematics and Optimization*, 1975, vol. 2, no. 2, pp. 170–194.
6. Davison E. J. The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, vol. 21, no. 1, pp. 25–34.
7. Luk'janova G. V., Nikiforov V. O. *Algoritmy kompensacii vneshnih determinirovannyh vozmushhenij: operatornyj metod sinteza* (Algorithm for Compensating External Deterministic Perturbations: Operator Method of Synthesis), *Nauchno-tehnicheskij vestnik SPbGU ITMO*, 2003, no. 10, pp. 5–10 (in Russian).
8. Di Benedetto M. D. Synthesis of an internal model for nonlinear output regulation, *International Journal of Control*, 1987, vol. 45, no. 3, pp. 1023–1034.
9. Khalil H. K. Robust servomechanism output feedback controller for feedback linearizable systems, *Automatica*, 1994, vol. 30, no. 10, pp. 1587–1599.
10. Nikiforov V. O. *Nelinejnaja sistema upravlenija s kompensaciej vneshnih determinirovannyh vozmushhenij* (Nonlinear control system with compensation of external deterministic disturbances), *Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija*, 1997, no. 4, pp. 69–73 (in Russian).
11. Nikiforov V. O. *Adaptivnaja stabilizacija linejnogo ob'ekta, podverzhennogo vneshnim determinirovannym vozmushhenijam* (Adaptive stabilization of a linear object subject to external deterministic disturbances), *Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija*, 1997, no. 2, pp. 103–106 (in Russian).
12. Nikiforov V. O. Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances, *European Journal of Control*, 1998, vol. 4, no. 2, pp. 132–139.
13. Nikiforov V. O. Nonlinear servocompensation of unknown external disturbances, *Automatica*, 2001, vol. 37, pp. 1647–1653.
14. Myshljaev Ju. I. *Ob odnom podhode k resheniju zadachi slezhenija s zhelaemoj spektral'noj dinamikoj* (On one approach to solving the tracking problem with the desired spectral dynamics), *Trudy FGUP "NPCAP im. akademika N. A. Piljugina". Sistemy i pribory upravlenija*, 2016, no. 4, pp. 5–11 (in Russian).
15. Utrobin G. F., Koljada Ju. I., Zhuravlev R. D. *Operativnoe opredelenie porjadka i koeficientov nestacionarnoj volnnoj struktury izmerjaемого signala* (Operative determination of the order and coefficients of the unsteady wave structure of the measured signal), *Priborostroenie*, 1989, no. 5, pp. 3–7 (in Russian).
16. Utrobin G. F., Myshljaev Ju. I., Krasnoshhechenko V. I., Myshljaeva S. V. *Fil'tracija diskretnyh signalov metodom strukturnogo pogruženija*, *Trudy FGUP "NPCAP im. akademika N. A. Piljugina". Sistemy i pribory upravlenija*, 2016, no. 2, pp. 36–44 (in Russian).
17. Myshljaev Ju. I., Tar Yar Myo. *Algoritmy skorostnogo bi-gradianta dlja linejnyh sistem s zhelaemoj spektral'noj dinamikoj po vyvodu konečnogo kaskada* (Filtering Discrete Signals by Structural Immersion), *Jekonomika i menedzhment sistem upravlenija*, 2016, no. 3.1(21), pp. 183–191 (in Russian).

С. К. Данилова, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., Lab45\_1@ipu.ru,  
Н. Н. Тарасов, канд. техн. наук, ст. науч. сотр.,  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

## Адаптивный алгоритм фильтрации с интегральными невязками

*Предложен алгоритм фильтрации, основанный на использовании не только невязок между измеряемыми и оцениваемыми координатами, как в классических алгоритмах фильтрации, но и кратных интегралов от этих невязок. Классические алгоритмы фильтрации используют достоверную информацию как о моделях движения и измерения, так и о статистических характеристиках входных случайных возмущений и помех измерения. Реальные же объекты управления работают в условиях действия не только высокочастотных случайных возмущений, но и низкочастотных сил и моментов со стороны агрессивной среды, характеристики которых известны с большими приближениями. В связи с этим эффективность использования классических алгоритмов фильтрации для реальных систем крайне низка из-за больших погрешностей. Предлагаемый же в работе алгоритм позволяет устранить данные недостатки за счет восстановления внешних низкочастотных возмущений в реальном времени. Под внешними возмущениями понимаются не только внешние воздействия со стороны среды, но и неточные знания о самой модели движения. Для интегральных невязок предложен алгоритм расчета коэффициентов усиления в обратной связи в аналитическом виде, основанный на обработке невязок, а также оценок внешних возмущений и их производных в текущем времени. Предложен алгоритм управления, включающий в себя оценки как фазовых координат, так и неизвестных возмущений. Знание оценок внешних возмущений в реальном времени позволит, с одной стороны, повысить качество управления, а с другой стороны, сократить временные и материальные затраты, связанные с исследованием динамики движения объекта управления и внешней среды. На примере модели подводного аппарата, описываемого линейной системой дифференциальных уравнений в условиях действия внешних возмущений (волновых и гидрологических сил и моментов), проведено моделирование и показана работоспособность предлагаемых алгоритмов для различного числа интегральных невязок.*

**Ключевые слова:** оптимальное управление, адаптивные алгоритмы фильтрации, подстройка параметров, морские подводные объекты, оценивание возмущений

### Введение

Качественное управление современными подвижными объектами возможно только при полной и точной информации как о самом объекте управления, так и о внешних возмущениях, действующих на него. Для получения этой информации используются всевозможные подходы, основанные на фильтрации и идентификации систем управления. Наибольшее практическое применение в настоящее время получили Калмановские алгоритмы, использующие невязки между измеряемыми  $y(t)$  и оцениваемыми  $\hat{x}(t)$  параметрами движения. Среди таких алгоритмов можно отметить оптимальный фильтр Калмана — Бьюси [1]; нелинейный фильтр Калмана [2]; расширенный фильтр Калмана [3]. Фильтры [1, 2] позволяют получать оценки фазовых координат объекта лишь при точной информации о моделях объекта управления и измерения, а также характеристиках входных помех и помех измерения. Для алгоритма, представленного в работе [3], кроме перечисленной информации необходимы также данные о моделях внешних возмущений. Получение точной информации о моделях движения и возмущения является сложной задачей, требующей больших времен-

ных и материальных затрат, связанных с моделированием исследуемого объекта управления в лабораторных условиях, проведением полунатурных испытаний и уточнением параметров модели в условиях натурных испытаний.

Альтернативой являются подходы, связанные с разработкой адаптивных [4—7] и робастных [8, 9] алгоритмов фильтрации и управления. В основном, эти работы связаны либо с оптимизацией ошибок оценивания фазовых координат  $\epsilon = x - \hat{x}$ , где  $x$ ,  $\hat{x}$  — фазовые координаты и их оценки, либо с использованием методов идентификации, либо с обработкой и исследованием невязок  $v = y - C\hat{x}$  в обратной связи.

В работе [10] была предложена попытка использования в обратной связи не только невязок, как в классических алгоритмах фильтрации, но и интегралов от этих невязок. Использование интегралов от невязок, как показали результаты моделирования для широкого класса подводных и надводных аппаратов [11—13], помогает избавиться от многих, присущих классическим алгоритмам фильтрации, недостатков, таких как знание точной и полной информации о моделях движения и возмущений.

Данная работа посвящена аналитическому конструированию алгоритмов фильтрации с интегральными невязками с подстройкой ко-

эффициентов в обратной связи, а также синтезу алгоритмов управления, компенсирующих неизвестные внешние возмущения на основе полученных оценок.

### Описание объекта управления и постановка задачи

**Модель динамики объекта.** Рассмотрим модель движения подводного аппарата, динамика которого описывается матричным линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t) + \mathbf{w}(t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  — известные матрицы размерности  $n \times n$ ,  $n \times k$  и  $n \times l$  соответственно;  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{u}(t)$  — векторы состояния и управления размерности  $n \times 1$  и  $k \times 1$ ;  $\mathbf{f}(t)$  —  $l$ -мерный вектор внешних возмущений;  $\mathbf{w}(t)$  —  $n$ -мерный случайный гауссовский процесс с нулевым средним  $M[\mathbf{w}(t)] = 0$  и известной ковариационной матрицей  $\mathbf{Q}(t)$  размерности  $n \times n$ ;  $M[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = \mathbf{Q}(t)\delta(t - \tau)$ .

**Модель измерения фазовых координат.** Современные измерительные комплексы позволяют определять достаточно большой объем информации о параметрах движения. В качестве измеряемых координат в работе рассмотрены те, в уравнения которых входят неизвестные возмущения. С достаточной степенью точности математическая модель системы измерения представляется в виде [14]

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \xi(t), \quad (2)$$

где  $\mathbf{C}$  — известная матрица наблюдений размерности  $m \times n$ ;  $\mathbf{y}(t)$  —  $m$ -мерный вектор измерений фазовых координат  $\mathbf{x}(t)$ ;  $\xi(t)$  — случайный векторный гауссовский процесс с нулевым средним  $M[\xi(t)] = 0$  и известной ковариационной матрицей  $\mathbf{R}(t)$  размерности  $m \times m$ ;  $M[\xi(t)\xi^T(\tau)] = \mathbf{R}(t)\delta(t - \tau)$ .

**Модель внешних возмущений.** К наиболее типичным возмущениям, действующим на подводные аппараты, относятся:

а) *волновые возмущения.* Модель волновых возмущений по силе  $\mathbf{f}_b = (f_{by}, f_{bz})^T$  и моменту  $\mathbf{m}_b = (m_{bz}, m_{by})^T$  задается как совокупность гармоник со своими амплитудами, частотами и случайными фазами, которые для каждого объекта управления могут быть определены по данным натурных испытаний:

$$\begin{aligned} f_{by} &= K_{fy} \sum_{i=1}^n \alpha_{fyi} \sin(\omega_i t + \varphi_{fyi}); \\ m_{bz} &= K_{mz} \sum_{i=1}^n \alpha_{mzi} \sin(\omega_i t + \varphi_{mzi}); \\ f_{bz} &= K_{fz} \sum_{i=1}^n \alpha_{fzi} \sin(\omega_i t + \varphi_{fzi}); \\ m_{by} &= K_{my} \sum_{i=1}^n \alpha_{myi} \sin(\omega_i t + \varphi_{myi}), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\alpha_{fyi}$ ,  $\alpha_{fzi}$ ,  $\alpha_{mzi}$ ,  $\alpha_{myi}$ ,  $K_{fy}$ ,  $K_{mz}$ ,  $K_{fz}$ ,  $K_{my}$  — постоянные параметры, получаемые, как правило, экспериментальным путем и зависящие от балласти, курсового угла, динамических характеристик объекта управления, частоты колебаний ( $\omega$ ), случайных значений начальных фаз колебаний ( $\varphi_{fyi}$ ,  $\varphi_{fzi}$ ,  $\varphi_{mzi}$ ,  $\varphi_{myi}$ ). Процесс получения точных значений сил и моментов, действующих на исследуемый объект управления, связан с обработкой и анализом широкого спектра параметров и, как отмечалось ранее, требует больших временных и материальных затрат. Проводить такие исследования для каждого объекта нецелесообразно. Однако для каждого конкретного объекта управления, зная их тактико-технические характеристики, можно получить оценки возможных значений возмущений;

б) *возмущения, характеризующие гидрологические силы и моменты, а также подводные течения*  $f_y$ ,  $f_z$ ,  $m_y$ ,  $m_z$ , возникающие в случайные моменты времени. Модель таких возмущений может быть представлена в виде алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} f_y &= A_p \sin(2\pi t/T_p) \\ &\text{при } (t \geq t_0) \text{ \& } (t < T_p/4); \\ f_y &= A_p \\ &\text{при } (t \geq T_p/4) \text{ \& } (t < N_1 T_p); \\ f_y &= A_p \cos(2\pi t/T_p) \\ &\text{при } (t \geq N_1 T_p) \text{ \& } (t < (2N_1 + 1)T_p/2); \\ f_y &= -A_p \\ &\text{при } (t \geq (2N_1 + 1)T_p/2) \text{ \& } (t < N_2 T_p); \\ f_y &= A_p \cos(2\pi t/T_p) - 2A_p \\ &\text{при } (t \geq N_2 T_p) \text{ \& } (t < (2N_2 + 1)T_p/2); \\ f_y &= -A_p - 2A_p \\ &\text{при } (t \geq (2N_2 + 1)T_p/2) \text{ \& } (t < N_3 T_p); \\ f_y &= A_p \cos(2\pi t/T_p) - 4A_p \\ &\text{при } (t \geq N_3 T_p) \text{ \& } (t < (2N_3 + 1)T_p/2); \\ f_y &= -A_p - 4A_p \\ &\text{при } (t \geq (2N_3 + 1)T_p/2) \text{ \& } (t < N_4 T_p) \end{aligned}$$

и т.д.

При изменении направления возмущения уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} f_y &= -A_p \cos(2\pi t/T_p) - 4A_p \\ \text{при } (t \geq N_4 T_p) \ \& \ (t < (2N_4 + 1)T_p/2); \\ f_y &= A_p - 4A_p \\ \text{при } (t \geq (2N_4 + 1)T_p/2) \ \& \ (t < N_5 T_p); \\ f_y &= -A_p \cos(2\pi t/T_p) - 2A_p \\ \text{при } (t \geq N_5 T_p) \ \& \ (t < (2N_5 + 1)T_p/2); \\ f_y &= A_p - 2A_p \\ \text{при } (t \geq N_6 T_p) \ \& \ (t < (2N_6 + 1)T_p/2); \\ f_y &= -A_p \cos(2\pi t/T_p) + 0A_p \\ \text{при } (t \geq N_6 T_p) \ \& \ (t < (2N_6 + 1)T_p/2); \\ f_y &= A_p + 0A_p \\ \text{при } (t \geq (2N_6 + 1)T_p/2) \ \& \ (t < N_7 T_p) \end{aligned}$$

и т.д., где  $A_p$  — амплитуда изменения возмущения  $f_y$ ;  $T_p$  — время изменения возмущения;  $N_1, N_2, \dots$  — числа, показывающие моменты изменения возмущения. Аналогичным образом описываются и возмущения  $f_z, m_y, m_z$ .

В результате совокупный вектор внешних возмущений запишется в виде

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{by} + f_y \\ m_{bz} + m_z \\ f_{bz} + f_z \\ m_{by} + m_y \end{pmatrix}.$$

**Постановка задачи.** Пусть дан объект управления, описываемый линейной системой (1), и вектор измеряемых координат (2), на который действует совокупность неизвестных возмущений  $\mathbf{f}(t)$ . Необходимо получить оценки фазовых координат  $\hat{\mathbf{x}}$ , оценки совокупного вектора возмущений  $\hat{\mathbf{F}}$  и на основании полученных оценок синтезировать законы управления подводным аппаратом в конкретном режиме плавания.

### Алгоритмы фильтрации

Для получения оценок фазовых координат  $\mathbf{x}$ , объекта (1) по измерениям (2), используются различные алгоритмы фильтрации. В зависимости от информации об объекте управления и возмущениях наибольшую популярность в настоящее время приобрели Калмановские алгоритмы фильтрации, использующие невязки в обратной связи [1—3].

**Калмановские алгоритмы фильтрации.** Данные фильтры используются для систем

с достоверной информацией о моделях движения и возмущений. В этом случае алгоритм фильтрации принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{f} + \mathbf{K}_0(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}); \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) &= M[\mathbf{x}(t_0)], \end{aligned} \quad (4)$$

где коэффициенты усиления определяются с помощью уравнения Риккати  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ , причем  $\mathbf{K}_0 = (\mathbf{K}_{ij}) = \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}$ . Эти коэффициенты могут быть вычислены заранее при заданных ковариационных матрицах  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{Q}$ .

Недостатком данных алгоритмов является достаточно высокое требование к качеству и точности информации о параметрах модели движения  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и внешних возмущениях  $\mathbf{f}(t)$ ,  $\mathbf{w}(t)$ ,  $\xi(t)$ . В связи с этим качество получаемых оценок фазовых координат не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к современным системам управления, работающим в реальных условиях.

**Алгоритм фильтрации с интегральными невязками.** Для устранения указанных выше недостатков в данной работе предложен алгоритм фильтрации, позволяющий получать не только оценки фазовых координат, но и оценки неизвестных внешних возмущений. Предлагаемый алгоритм, как отмечалось ранее, основан на использовании не только невязок  $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$ , но и интегралов от этих невязок:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \int (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})d\tau; \\ \mathbf{v}_2 &= \iint (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})d\tau_1 d\tau_2; \\ &\dots \\ \mathbf{v}_{r+1} &= \iiint \dots \int (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{r+1}. \end{aligned}$$

При этом алгоритм фильтрации примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_0(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{F}}; \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) &= M[\mathbf{x}(t_0)]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{K}_1 \int (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})d\tau + \mathbf{K}_2 \iint (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \dots + \mathbf{K}_{r+1} \iiint \dots \int (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{r+1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\hat{\mathbf{F}}$  — оценка неизвестных внешних возмущений. Предложенный алгоритм отличается от алгоритма (4) тем, что позволяет не только сглаживать высокочастотные возмущения  $\mathbf{w}(t)$ , но и восстанавливать низкочастотные внешние воздействия (6), что делает его работоспособным в реальных условиях даже при действии неизвестных возмущений  $\mathbf{f}(t)$ .

**Определение коэффициентов обратной связи.** Коэффициенты усиления  $\mathbf{K}_0$ , как и в фильтре Калмана (4), определяются из уравнения Риккати  $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ , причем  $\mathbf{K}_0 = (\mathbf{K}_{ij}) = \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}$ , и позволяют сглаживать высокочастотные возмущения. Коэффициенты  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_{r+1}$  при интегральных невязках, предназначенные для восстановления низкочастотных внешних воздействий, определим следующим образом.

Рассмотрим модели движения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t) + \mathbf{w}(t)$$

и фильтрации

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_0(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) + \\ &+ \mathbf{K}_1 \int (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) d\tau + \mathbf{K}_2 \iint (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \\ &+ \mathbf{K}_{r+1} \int \dots \int (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) d\tau_1 \dots d\tau_{r+1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\xi}$ , где  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{M}[\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}]$ , и вычитая из первого уравнения второе, получим

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}\mathbf{f}(t) - \\ &- \mathbf{K}_1\mathbf{C} \int \boldsymbol{\varepsilon} d\tau - \mathbf{K}_2\mathbf{C} \iint \boldsymbol{\varepsilon} d\tau_1 d\tau_2 - \dots - \\ &- \mathbf{K}_{r+1}\mathbf{C} \int \dots \int \boldsymbol{\varepsilon} d\tau_1 \dots d\tau_{r+1} + \\ &+ \mathbf{M}[\mathbf{w}(t)] + \mathbf{K}_1 \int \mathbf{M}[\boldsymbol{\xi}] d\tau + \mathbf{K}_2 \iint \mathbf{M}[\boldsymbol{\xi}] d\tau_1 d\tau_2 + \\ &+ \dots + \mathbf{K}_{r+1} \int \dots \int \mathbf{M}[\boldsymbol{\xi}] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{r+1}. \end{aligned}$$

Предполагая, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\mathbf{w}(t)] + \mathbf{K}_1 \int \mathbf{M}[\boldsymbol{\xi}] d\tau + \mathbf{K}_2 \iint \mathbf{M}[\boldsymbol{\xi}] d\tau_1 d\tau_2 + \dots + \\ + \mathbf{K}_{r+1} \int \dots \int \mathbf{M}[\boldsymbol{\xi}] d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_{r+1} = 0, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}\mathbf{f}(t) - \\ &- \mathbf{K}_1\mathbf{C} \int \boldsymbol{\varepsilon} d\tau - \mathbf{K}_2\mathbf{C} \iint \boldsymbol{\varepsilon} d\tau_1 d\tau_2 - \dots - \\ &- \mathbf{K}_{r+1}\mathbf{C} \int \dots \int \boldsymbol{\varepsilon} d\tau_1 \dots d\tau_{r+1} = \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}\mathbf{f}(t) - \mathbf{K}_1\mathbf{v}_1 - \mathbf{K}_2\mathbf{v}_2 - \dots - \mathbf{K}_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}. \end{aligned}$$

Коэффициенты обратной связи  $\mathbf{K}_i$ ,  $i = \overline{1, r+1}$ , выберем таким образом, чтобы выражение  $|\mathbf{D}\mathbf{f}(t) - \mathbf{K}_1\mathbf{v}_1 - \mathbf{K}_2\mathbf{v}_2 - \dots - \mathbf{K}_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}| \leq \varepsilon_0$  было меньше или равно величине  $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ .

Тогда система примет вид  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_0\mathbf{C})\boldsymbol{\varepsilon}$ . Данная система является устойчивой, если система (1), (2) наблюдаема по Калману.

Представим временной интервал конкретного маневра  $[t_0, T]$  в виде  $s$  последовательных отрезков и разложим функцию  $\mathbf{f}(t)$  в ряд Тейлора на каждом из них. Величина  $s$  выбирается из условия сходимости ряда Тейлора к функ-

ции  $\mathbf{f}(t)$ , т.е. чтобы каждый из отрезков принадлежал области сходимости ряда. Имеем

$$\begin{aligned} [t_0, t_1]: \mathbf{f}(t) &= \mathbf{f}_1(t_1) + \frac{\mathbf{f}_1^{(1)}(t_1)}{1!} h_1 + \\ &+ \frac{\mathbf{f}_1^{(2)}(t_1)}{2!} h_1^2 + \frac{\mathbf{f}_1^{(3)}(t_1)}{3!} h_1^3 + \dots + \frac{\mathbf{f}_1^{(r)}(t_1)}{r!} h_1^r; \\ [t_1, t_2]: \mathbf{f}(t) &= \mathbf{f}_2(t_2) + \frac{\mathbf{f}_2^{(1)}(t_2)}{1!} h_2 + \\ &+ \frac{\mathbf{f}_2^{(2)}(t_2)}{2!} h_2^2 + \frac{\mathbf{f}_2^{(3)}(t_2)}{3!} h_2^3 + \dots + \frac{\mathbf{f}_2^{(r)}(t_2)}{r!} h_2^r; \\ &\dots \\ [t_{s-1}, t_s]: \mathbf{f}(t) &= \mathbf{f}_s(t_s) + \frac{\mathbf{f}_s^{(1)}(t_s)}{1!} h_s + \\ &+ \frac{\mathbf{f}_s^{(2)}(t_s)}{2!} h_s^2 + \frac{\mathbf{f}_s^{(3)}(t_s)}{3!} h_s^3 + \dots + \frac{\mathbf{f}_s^{(r)}(t_s)}{s!} h_s^r, \end{aligned}$$

где  $t_j \in [t_{j-1}, t_j]$ ,  $j \in (1, s)$ ,  $\mathbf{f}_j^{(i)}(t_j)$  —  $i$ -я производная функции  $\mathbf{f}(t)$  на  $j$ -м отрезке,  $h_j = t_j - t_{j-1}$ .

Тогда на каждом из отрезков потребуем выполнения условия

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}\mathbf{f}(t) - \mathbf{K}_1\mathbf{v}_1 - \mathbf{K}_2\mathbf{v}_2 - \dots - \mathbf{K}_{r+1}\mathbf{v}_{r+1}| &= \\ = \left| \mathbf{D}\mathbf{f}_j(t_j) + \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(1)}(t_j)}{1!} h_j + \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(2)}(t_j)}{2!} h_j^2 + \dots + \right. \\ &+ \left. \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(r)}(t_j)}{r!} h_j^r - \mathbf{K}_1\mathbf{v}_1 - \mathbf{K}_2\mathbf{v}_2 h_j - \dots - \mathbf{K}_{r+1}\mathbf{v}_1 h_j^r \right| \leq \\ &\leq \left| \mathbf{D}\mathbf{f}_j(t_j) - \mathbf{K}_1\mathbf{v}_1 \right| + \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(1)}(t_j)}{1!} h_j - \mathbf{K}_2\mathbf{v}_1 h_j \right| + \\ &+ \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(2)}(t_j)}{2!} h_j^2 - \mathbf{K}_3\mathbf{v}_1 h_j^2 \right| + \dots + \\ &+ \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(r)}(t_j)}{r!} h_j^r - \mathbf{K}_{r+1}\mathbf{v}_1 h_j^r \right| = \\ = \left| \mathbf{D}\mathbf{f}_j(t_j) - \mathbf{K}_1\mathbf{v}_1 \right| + \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(1)}(t_j)}{1!} - \mathbf{K}_2\mathbf{v}_1 \right| h_j + \\ &+ \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(2)}(t_j)}{2!} - \mathbf{K}_3\mathbf{v}_1 \right| h_j^2 + \dots + \\ &+ \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(r)}(t_j)}{r!} - \mathbf{K}_{r+1}\mathbf{v}_1 \right| h_j^r \leq \\ &\leq \left| \mathbf{D}\mathbf{f}_j(t_j) - \mathbf{K}_1\mathbf{v}_1 \right| + \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(1)}(t_j)}{1!} - \mathbf{K}_2\mathbf{v}_1 \right| h + \\ &+ \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(2)}(t_j)}{2!} - \mathbf{K}_3\mathbf{v}_1 \right| h^2 + \dots + \\ &+ \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(r)}(t_j)}{r!} - \mathbf{K}_{r+1}\mathbf{v}_1 \right| h^r \leq \varepsilon_0. \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_0$  — заданный числовой вектор,  $h = \max\{h_1, h_2, \dots, h_s\}$ . Обозначив

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\max} &= \max\{\mathbf{f}_1(t_1), \mathbf{f}_2(t_2), \dots, \mathbf{f}_s(t_s), \dots\}; \\ \mathbf{f}_{\max}^{(1)} &= \max\{\mathbf{f}_1^{(1)}(t_1), \mathbf{f}_2^{(1)}(t_2), \dots, \mathbf{f}_s^{(1)}(t_s), \dots\}; \\ &\dots \\ \mathbf{f}_{\max}^{(r)} &= \max\{\mathbf{f}_1^{(r)}(t_1), \mathbf{f}_2^{(r)}(t_2), \dots, \mathbf{f}_s^{(r)}(t_s), \dots\} \end{aligned}$$

и учитывая, что большему значению возмущения соответствует и большая невязка, получим

$$\begin{aligned} &\max_{j \in (1, s)} \left| \mathbf{D}\mathbf{f}_j(t_j) - \mathbf{K}_1 \mathbf{v}_1 \right| + \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(1)}(t_j)}{1!} - \mathbf{K}_2 \mathbf{v}_1 \right| h + \\ &+ \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(2)}(t_j)}{2!} - \mathbf{K}_3 \mathbf{v}_1 \right| h^2 + \dots + \\ &+ \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_j^{(r)}(t_j)}{r!} - \mathbf{K}_{r+1} \mathbf{v}_1 \right| h^r \leq \left| \mathbf{D}\mathbf{f}_{\max} - \mathbf{K}_1 \mathbf{v}_{1\max} \right| + \\ &+ \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(1)}}{1!} - \mathbf{K}_2 \mathbf{v}_{1\max} \right| h + \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(2)}}{2!} - \mathbf{K}_3 \mathbf{v}_{1\max} \right| h^2 + \\ &+ \dots + \left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(r)}}{r!} - \mathbf{K}_{r+1} \mathbf{v}_{1\max} \right| h^r \leq \varepsilon_0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{v}_{1\max}$  определяется в текущем времени из условия

$$\text{ЕСЛИ } \mathbf{v}_1(t) \geq \mathbf{v}_{1\max} \text{ ТО } \mathbf{v}_{1\max} = \mathbf{v}_1(t).$$

Для определения коэффициентов  $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_{r+1}$  решим следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &\left| \mathbf{D}\mathbf{f}_{\max} - \mathbf{K}_1 \mathbf{v}_{1\max} \right| \leq \varepsilon_1; \\ &\left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(1)}}{1!} - \mathbf{K}_2 \mathbf{v}_{1\max} \right| \leq \varepsilon_2; \\ &\dots \\ &\left| \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(r)}}{r!} - \mathbf{K}_{r+1} \mathbf{v}_{1\max} \right| \leq \varepsilon_{r+1}. \end{aligned}$$

При  $\varepsilon_i \rightarrow 0, i \in (1, r+1)$ , получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 \mathbf{v}_{1\max} &= \mathbf{D}\mathbf{f}_{\max}; \\ \mathbf{K}_2 \mathbf{v}_{1\max} &= \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(1)}}{1!}; \\ &\dots \\ \mathbf{K}_{r+1} \mathbf{v}_{1\max} &= \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(r)}}{r!}. \end{aligned}$$

Для однозначного определения коэффициентов усиления при интегральных невязках представим матрицы  $\mathbf{K}_i$  в виде

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{D}\mathbf{S}_i, i \in (1, r+1),$$

$$\text{где } \mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} S_{11}^i & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{22}^i & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & S_{ll}^i & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ — матри-$$

цы размерности  $l \times m$ .

В результате получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\mathbf{S}_1 \mathbf{v}_{1\max} &= \mathbf{D}\mathbf{f}_{\max} \Rightarrow \mathbf{S}_1 \mathbf{v}_{1\max} = \mathbf{f}_{\max}; \\ \mathbf{D}\mathbf{S}_2 \mathbf{v}_{1\max} &= \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(1)}}{1!} \Rightarrow \mathbf{S}_2 \mathbf{v}_{1\max} = \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(1)}}{1!}; \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{D}\mathbf{S}_{r+1} \mathbf{v}_{1\max} = \mathbf{D} \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(r)}}{r!} \Rightarrow \mathbf{S}_{r+1} \mathbf{v}_{1\max} = \frac{\mathbf{f}_{\max}^{(r)}}{r!},$$

$$\text{где } \mathbf{v}_{1\max} = (v_{1\max,1}, v_{1\max,2}, \dots, v_{1\max,m})^T;$$

$$\mathbf{f}_{\max} = (f_{\max,1}, f_{\max,2}, \dots, f_{\max,l})^T;$$

$$\mathbf{f}_{\max}^{(1)} = (f_{\max,1}^{(1)}, f_{\max,2}^{(1)}, \dots, f_{\max,l}^{(1)})^T, \quad \text{—}$$

$\vdots$

$$\mathbf{f}_{\max}^{(r)} = (f_{\max,1}^{(r)}, f_{\max,2}^{(r)}, \dots, f_{\max,l}^{(r)})^T$$

векторы невязок, возмущений и их производных. Раскрывая уравнения (7) для каждой матрицы  $\mathbf{S}_i$ , получим систему скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} S_{11}^1 &= \frac{f_{\max,1}}{v_{1\max,1}}, & S_{22}^1 &= \frac{f_{\max,2}}{v_{1\max,2}}, & \dots & S_{ll}^1 &= \frac{f_{\max,l}}{v_{1\max,l}}; \\ S_{11}^2 &= \frac{f_{\max,1}^{(1)}}{1! v_{1\max,1}} = \frac{S_{11}^1 f_{\max,1}^{(1)}}{1 \cdot f_{\max,1}}, & S_{22}^2 &= \frac{f_{\max,2}^{(1)}}{1! v_{1\max,2}} = \frac{S_{22}^1 f_{\max,2}^{(1)}}{1 \cdot f_{\max,2}}, & \dots & S_{ll}^2 &= \frac{f_{\max,l}^{(1)}}{1! v_{1\max,l}} = \frac{S_{ll}^1 f_{\max,l}^{(1)}}{1 \cdot f_{\max,l}}; \\ S_{11}^3 &= \frac{f_{\max,1}^{(2)}}{2! v_{1\max,1}} = \frac{S_{11}^2 f_{\max,1}^{(2)}}{2 f_{\max,1}^{(1)}}, & S_{22}^3 &= \frac{f_{\max,2}^{(2)}}{2! v_{1\max,2}} = \frac{S_{22}^2 f_{\max,2}^{(2)}}{2 f_{\max,2}^{(1)}}, & \dots & S_{ll}^3 &= \frac{f_{\max,l}^{(2)}}{2! v_{1\max,l}} = \frac{S_{ll}^2 f_{\max,l}^{(2)}}{2 f_{\max,l}^{(1)}}; \\ &\vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_{11}^{r+1} &= \frac{f_{\max,1}^{(r)}}{r! v_{1\max,1}} = \frac{S_{11}^r f_{\max,1}^{(r)}}{r f_{\max,1}^{(r-1)}}, & S_{22}^{r+1} &= \frac{f_{\max,2}^{(r)}}{r! v_{1\max,2}} = \frac{S_{22}^r f_{\max,2}^{(r)}}{r f_{\max,2}^{(r-1)}}, & \dots & S_{ll}^{r+1} &= \frac{f_{\max,l}^{(r)}}{r! v_{1\max,l}} = \frac{S_{ll}^r f_{\max,l}^{(r)}}{r f_{\max,l}^{(r-1)}}. \end{aligned}$$

Недостатком данного алгоритма является незнание граничных значений возмущений и их производных  $f_{\max,j}^i$ . В предыдущих работах [10–13] для каждого конкретного объекта эта задача решалась эмпирическим путем с помощью экспертов. Как показали результаты моделирования, данный способ выбора граничных возмущений  $f_{\max,j}^i$  имеет право на существование. Так как для каждого из объектов управления с известными тактико-техническими характеристиками эти возмущения могут быть определены с определенной степенью точности. Кроме того, эти оценки лежат в достаточно широких пределах и мало влияют на качество результатов.

### Алгоритм оценивания граничных значений внешних возмущений и их производных

Основной задачей данной работы является построение адаптивного алгоритма фильтрации, т.е. алгоритма независимого от предварительного оценивания граничных значений внешних возмущений и их производных  $f_{\max,j}^i$ . Эти параметры должны вычисляться в процессе функционирования объекта управления в реальном времени. Данные оценки могут быть получены в результате обработки оценок внешних возмущений  $\hat{F}$ .

Полученные оценки возмущений  $\hat{F}$  сглаживаются с помощью апериодического звена  $\frac{1}{T_0 p + 1}$  и поступают в логический блок LB (рис. 1). В данном блоке определяются граничные значения возмущений  $f_{\max}$ . Работа блока LB основана на сравнении текущего значения  $\hat{F}(t)$  со значением  $f_{\max}$ . Если  $\hat{F}(t) > f_{\max}$ , то  $f_{\max} = \hat{F}(t)$ , причем начальные значения  $f_{\max}$  могут выбираться в достаточно широких пределах (от  $0,05 \max(f(t))$  до  $50 \max(f(t))$ ), не влияя на оценки  $f_{\max}$ .

На рис. 1 представлена структурная схема системы управления объектом при включении в контур управления фильтра с разделением невязок.

На рис. 2 представлены оценки внешних возмущений  $\hat{F}(t)$ , получаемых с помощью алгоритма фильтрации (5), (6) и оценки граничных значений возмущений  $f_{\max}$ , получаемых в логическом блоке LB.

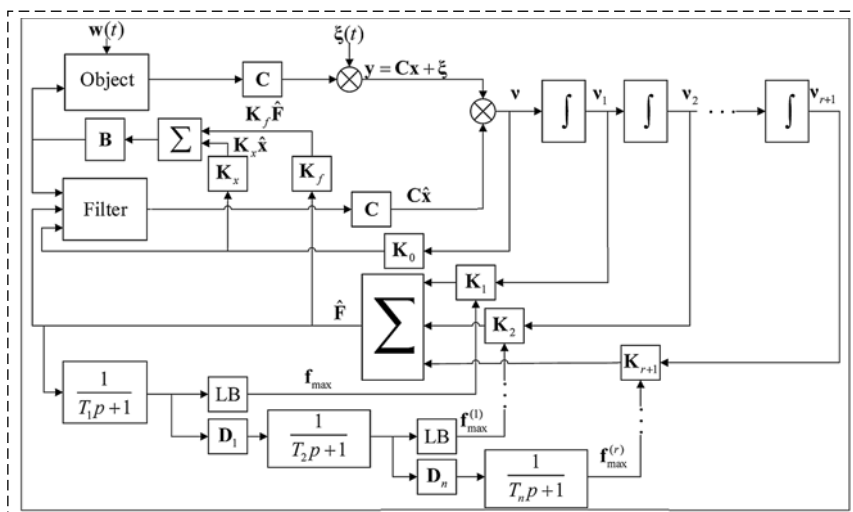


Рис. 1. Блок-схема системы управления объектом с восстановлением неизвестных внешних воздействий

Fig. 1. The block diagram of the object control system with the restoration of unknown external influences

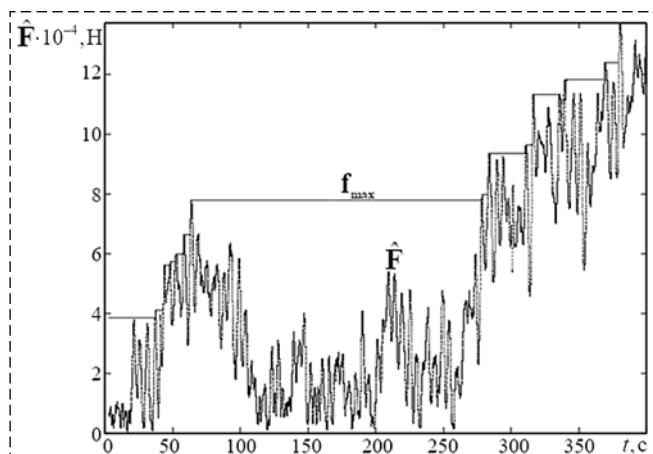


Рис. 2. Восстановленное и сглаженное возмущение  $\hat{F}$  и граничное значение возмущения  $f_{\max}$ , получаемое в блоке LB

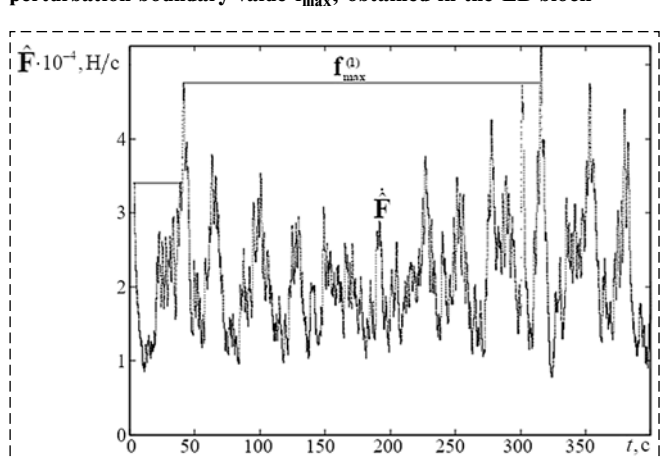


Рис. 3. Восстановленная и сглаженная производная возмущения  $\hat{F}$  и граничное значение производной возмущения  $f_{\max}^{(1)}$ , получаемое в блоке LB

Для получения оценки  $\mathbf{f}_{\max}^{(1)}$  сглаженный звеном  $\frac{1}{T_0 p + 1}$  сигнал поступает на дифференцирующее звено  $D_1$  и после дальнейшего сглаживания звеном  $\frac{1}{T_1 p + 1}$  поступает в блок LB, где и определяется значение  $\mathbf{f}_{\max}^{(1)}$  (рис. 3). Аналогичным образом получают оценки  $\mathbf{f}_{\max}^{(2)}, \mathbf{f}_{\max}^{(3)}, \dots, \mathbf{f}_{\max}^{(r)}$ .

### Алгоритмы управления с компенсацией внешних возмущений

Классические законы управления описываются в виде алгебраических уравнений

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{k}_x \hat{\mathbf{x}}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{u}_1$  — вектор управления;  $\hat{\mathbf{x}}$  — вектор координат;  $\mathbf{k}_x$  — вектор коэффициентов при координатах.

Эти законы управления работают лишь в отсутствие внешних возмущений и линейной модели движения. Для реальных систем, функционирующих в условиях действия внешних возмущений, законы управления должны включать в себя оценки возмущений, получаемых с помощью алгоритмов фильтрации. Предлагаемые в работе законы управления имеют вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{k}_x \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{k}_f \hat{\mathbf{F}}, \quad (10)$$

где  $\hat{\mathbf{F}}$  — вектор оценок возмущений;  $\mathbf{k}_f$  — вектор коэффициентов этих оценок; составляющая вектора управления  $\mathbf{u}_1$  отвечает за качество процесса управления, а составляющая  $\mathbf{u}_2$  — за компенсацию внешних возмущений.

Считая, что алгоритм фильтрации (5), (6) позволяет получать достаточно точные оценки  $\hat{\mathbf{F}}$  неизвестных возмущений  $\mathbf{f}(t)$ , управление, компенсирующее неизвестное возмущение, получим из уравнения:

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_2 + \mathbf{D}\mathbf{f}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}_2 + \hat{\mathbf{F}} - \varepsilon_u,$$

где  $\varepsilon_u$  определяет ошибку компенсации возмущений. Критерием при оценивании вектора управления  $\mathbf{u}_2$  выберем критерий минимума квадрата ошибки:

$$J = \min(\mathbf{B}\mathbf{u}_2 + \hat{\mathbf{F}})^T (\mathbf{B}\mathbf{u}_2 + \hat{\mathbf{F}}).$$

В результате получим, что вектор управления определяется в виде:

$$\mathbf{u}_2 = -(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{F}}$$

[15], а вектор коэффициентов  $\mathbf{k}_f$  равен  $\mathbf{k}_f = -(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$ .

**Компьютерная апробация алгоритмов фильтрации.** Моделирование алгоритмов фильтрации и управления проводилось на модели движения подводного аппарата в вертикальной плоскости, описываемой линейной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{f}(t) + \mathbf{w}(t),$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}V_x & a_{12}V_x & 0 & 0 \\ a_{21}V_x & a_{22}V_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & V_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11}V_x^2 & b_{12}V_x^2 \\ b_{21}V_x^2 & b_{22}V_x^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{— известные матрицы со-}$$

стояния, управления и возмущений, зависящие от продольной скорости движения ( $V_x$ );  $\mathbf{x} = (V_y \ \omega_z \ \psi \ \eta)^T$  — вектор состояния;  $V_y, \omega_z$  — линейная и угловая скорости;  $\psi$  — угол дифферента;  $\eta$  — глубина погружения;  $\mathbf{u} = (u_1 \ u_2)^T$  —

вектор управления;  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_{by} + f_y \\ m_{bz} + m_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  — сово-

купный вектор внешних возмущений;  $\mathbf{w}(t)$  — случайный векторный гауссовский процесс с нулевым средним  $M[\mathbf{w}(t)] = 0$  и известной ковариационной матрицей  $M[\mathbf{w}(t)\mathbf{w}^T(\tau)] = \mathbf{Q}(t)\delta(t - \tau)$ .

Система наблюдений описывается системой уравнений

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \xi(t),$$

где  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  — матрица наблюдений;

$\xi(t)$  — случайный векторный гауссовский процесс с нулевым средним  $M[\xi(t)] = 0$  и известной ковариационной матрицей  $M[\xi(t)\xi^T(\tau)] = \mathbf{R}(t)\delta(t - \tau)$ .

Вектор управляющих воздействий определяется в виде

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c_1(\hat{\eta} - \eta_z) + c_2\hat{V}_y + c_3(\psi - \psi_z) + c_4\hat{\omega}_z - \\ -(b_{22}\hat{F}_{V_y} - b_{12}\hat{F}_{\omega_z})/(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - \\ -(b_{11}\hat{F}_{\omega_z} - b_{12}\hat{F}_{V_y})/(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \end{pmatrix}^T,$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  — известные коэффициенты, зависящие от режима функционирования;

$\eta_z, \psi_z$  — заданные значения глубины погружения и дифферента;  $\hat{F}_{\nu}, \hat{F}_{\omega_z}$  — оценки совокупного вектора внешних возмущений  $\mathbf{f}(t)$ .

В качестве алгоритма фильтрации рассмотрен алгоритм (5), (6) с числом слагаемых в выражении (6) от 1 до 9.

**Оценивание неизвестных внешних возмущений.** С помощью фильтра Калмана получить оценки неизвестных внешних возмущений практически невозможно. Фильтр же с интегральными невязками позволяет с достаточно высокой степенью точности получать оценки неизвестных внешних возмущений, варьируя число членов в выражении (6).

На рис. 4, 5 изображены обобщенное внешнее возмущение  $F_v$ , включающее в себя меняющиеся и волновые возмущения, и оценка возмущений  $\hat{F}$  при одном и более двух членах выражения (6) соответственно.

Как видно из рис. 5, 6, увеличение числа слагаемых в выражении (6) повышает точность оценивания возмущений. Для достижения требуемой точности оценивания, как показывает практика, достаточно трех слагаемых. А для подтверждения работоспособности данного фильтра в работе рассматривалось до 9 членов в выражении (6).

**Сравнительные характеристики работы Калмановских алгоритмов и алгоритма с интегральными невязками.** На рис. 6, 7 представлены переход подводного аппарата с глубины  $\eta = 40$  м на  $\eta_z = 10$  м с использованием оценок, полученных с помощью фильтра Калмана и фильтра с интегральными невязками при скорости движения 2 м/с.

Из рис. 6, 7 видно, что алгоритм управления (9) по оценкам калмановского алгоритма фильтрации не обеспечивает требуемого качества переходных процессов по глубине при действии неизвестных возмущений. Оценки фазовых координат и внешних возмущений, получаемых с помощью фильтра с интегральными невязками, повышают качество переходных процессов при управлении с помощью алгоритма (11).

На рис. 8, 9 изображены аналогичные результаты при действии волновых и меняющихся возмущений.

Из рис. 8, 9 видно, что качество оценок фазовых координат в последнем случае намного выше, так как ошибки оценивания являются несмещенными. Это хорошо видно на переходных процессах по глубине. Кроме того, с помощью фильтра с интегральными невязками

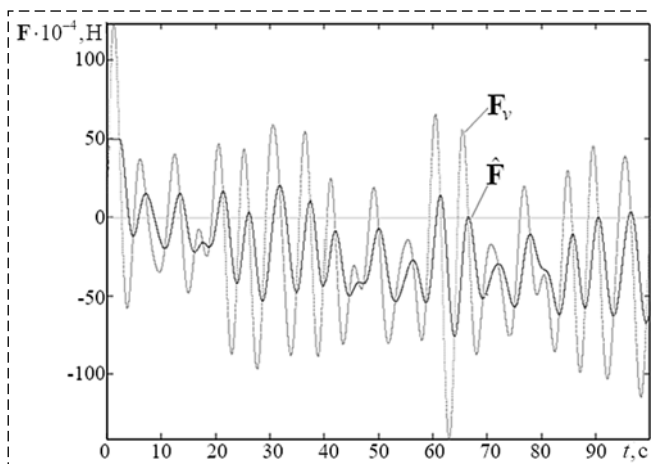


Рис. 4. Обобщенное внешнее возмущение  $F_v$  и оценка возмущения  $\hat{F}$  при  $n = 1$

Fig. 4. Generalized external perturbation and the perturbation estimate for  $n = 1$

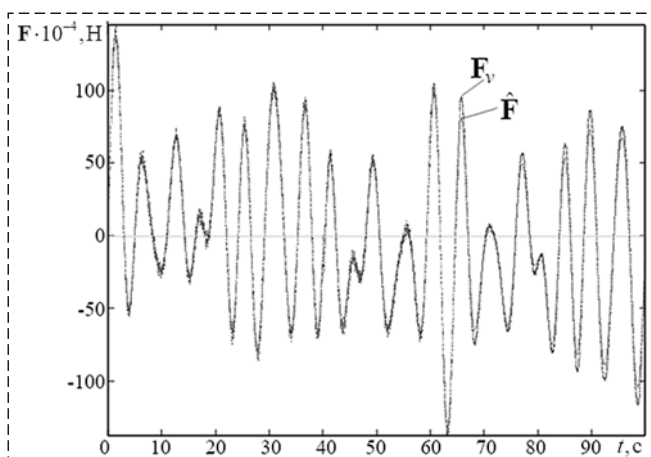


Рис. 5. Обобщенное внешнее возмущение  $F_v$  и оценка возмущения  $\hat{F}$  при  $n \geq 3$

Fig. 5. Generalized external perturbation and the perturbation estimate for  $n \geq 3$

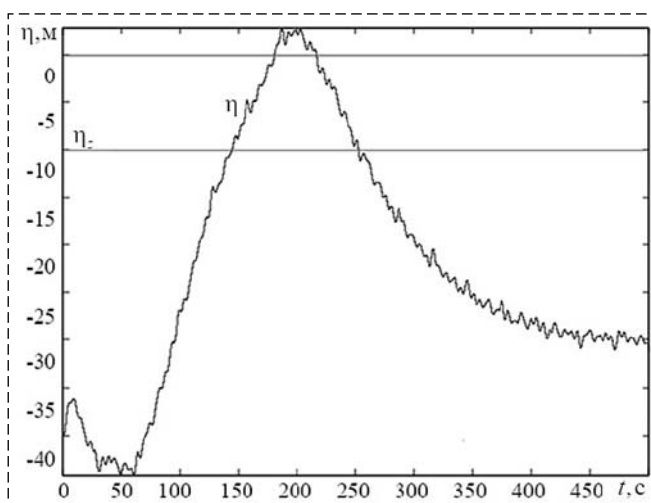


Рис. 6. Переход по глубине с  $\eta = 40$  м на  $\eta_z = 10$  м с использованием фильтра Калмана при скорости  $v = 2$  м/с

Fig. 6. Transition in depth from  $\eta = 40$  m to  $\eta_z = 10$  m using the Kalman filter at speed  $v = 2$  m/s

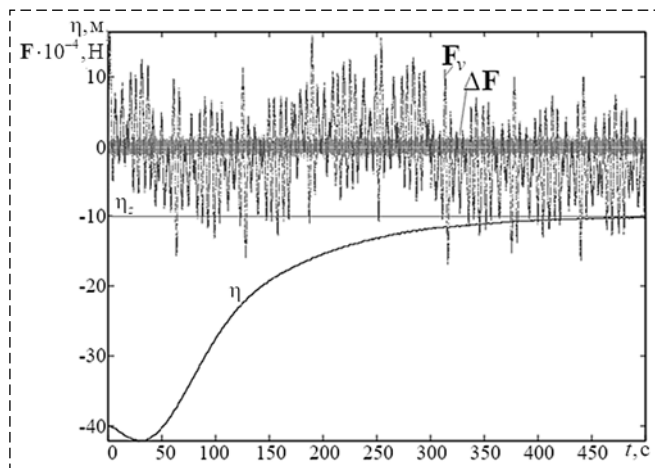


Рис. 7. Переход по глубине с  $\eta = 40$  м на  $\eta_z = 10$  м с использованием фильтра с интегральными невязками при скорости  $v = 2$  м/с, а также возмущение  $F_v$  и ошибки оценок возмущений  $\Delta F$

Fig. 7. Transition in depth from  $\eta = 40$  m to  $\eta_z = 10$  m using the integral disturbances filter at speed  $v = 2$  m/s, as well as disturbance  $F_v$  and disturbance estimation errors  $\Delta F$

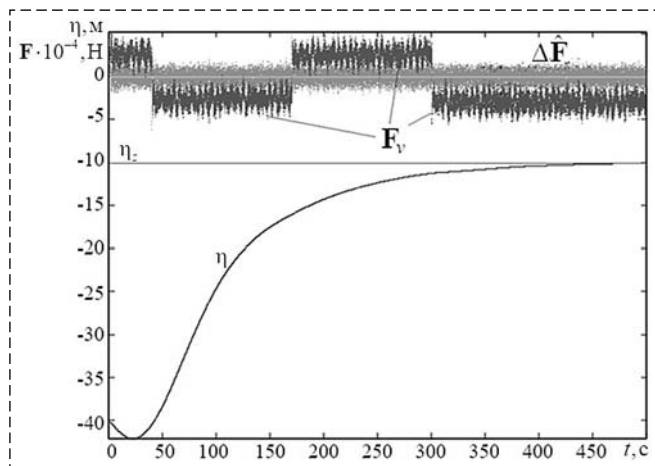


Рис. 8. Переход по глубине с  $\eta = 40$  м на  $\eta_z = 10$  м с использованием оценок фильтра с интегральными невязками при скорости  $v = 5$  м/с, а также возмущения  $F_v$  и ошибки оценок возмущений  $\Delta F$

Fig. 8. Transition in depth from  $\eta = 40$  m to  $\eta_z = 10$  m using the integral disturbances filter's estimations at speed  $v = 5$  m/s, as well as disturbance  $F_v$  and disturbance estimation errors  $\Delta F$

можно получать и оценки неизвестных внешних возмущений, включающих в себя совокупность различных воздействий среды. Эти оценки необходимы для коррекции классических законов управления и повышения качества управления подводными аппаратами.

### Заключение

Предложен адаптивный алгоритм фильтрации, позволяющий восстанавливать не только фазовые координаты, но и обобщенный вектор неизвестных внешних возмущений.

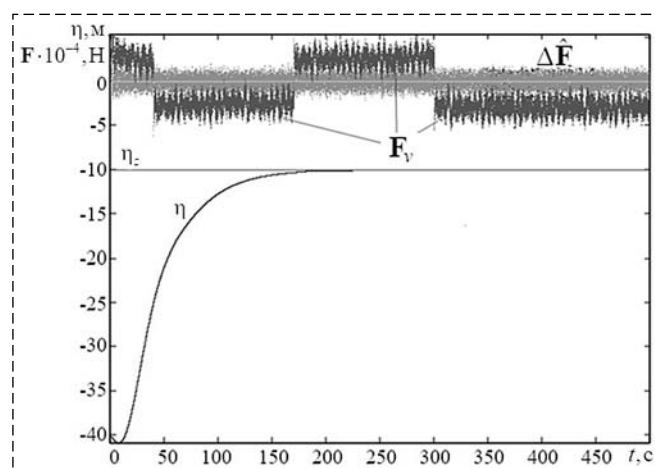


Рис. 9. Переход по глубине с  $\eta = 40$  м на  $\eta_z = 10$  м с использованием оценок фильтра с интегральными невязками при скорости  $v = 5$  м/с, а также возмущения  $F_v$  и ошибки оценок возмущений  $\Delta F$

Fig. 9. Transition in depth from  $\eta = 40$  m to  $\eta_z = 10$  m using the integral disturbances filter's estimations at speed  $v = 5$  m/s, as well as disturbance  $F_v$  and disturbance estimation errors  $\Delta F$

Предложена аналитическая зависимость выбора коэффициентов обратной связи в алгоритме фильтрации.

Предложенные алгоритмы фильтрации позволяют модифицировать классические законы управления за счет введения в них не только оценок фазовых координат, но и оценок внешних возмущений, что, в свою очередь, позволяет повысить качество управления подводным аппаратом за счет устранения статических погрешностей.

Проведенное полномасштабное моделирование подтверждает работоспособность предлагаемых алгоритмов фильтрации и управления.

### Список литературы

1. Квасернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
2. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К. Т. Леондеса, М.: Мир, 1980.
3. Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974.
4. Бобцов А. А., Пыркин А. А. Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // А и Т. 2009. № 3. С. 114–122.
5. Feuer A., Morse A. S. Adaptive control of single-input, single-output linear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1978. V. 23, N. 4. P. 557–569.
6. Семушин И. В. Эффективный алгоритм обновления оценок по измерениям // Судостроительная промышленность. Сер. Вычислительная техника. 1992. № 28. С. 55–59.
7. Khalil H. K. Universal integral controllers for minimum-phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2000. Vol. 45, N. 3. P. 490–494.
8. Хлебников М. В. Робастная фильтрация при случайных возмущениях: метод инвариантных эллипсоидов // А и Т. 2009. N. 1.
9. Kanev S., Schutter D. B., Verhaegen M. An ellipsoid algorithm for probabilistic robust controller design // Systems & Control Letters. 2003. N. 49. P. 365–375.

10. Тарасов Н. Н., Тахтамышев М. Г. Алгоритмы получения несмещенных оценок при действии неизвестных внешних возмущений // Проблемы управления. 2012. № 6. С. 69–74.

11. Острецов Г. Э., Тарасов Н. Н. Управление кораблем при действии внешних возмущений с использованием интегральных невязок // Судостроение. 2013. № 6.

12. Данилова С. К., Кусков А. М., Кусков И. М., Тарасов Н. Н. Адаптивное управление МПО в условиях действия

возмущений // Известия ЮФУ. Технические науки. 2017. № 1–2 (186–187). С. 221–235.

13. Данилова С. К., Тарасов Н. Н., Кусков И. М. Управление подводным аппаратом при неполной информации о модели движения и внешних возмущений // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 5. С. 354–360.

14. Евланов Л. Г. Контроль динамических систем. М.: Наука, 1979.

15. Алберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.

## Adaptive Algorithm of Filtration with Integrated Residuals

S. K. Danilova, Lab45\_1@ipu.ru, N. N. Tarasov, tnn53@rambler.ru,

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997, Russian Federation

Corresponding author: **Danilova Svetlana K.**, Ph.D., Leading Researcher, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 117997, Russian Federation, e-mail: Lab45\_1@ipu.ru

Accepted on November 13, 2018

### Abstract

This paper proposes a filtering algorithm based on the use of not only the residuals between the measured and estimated coordinates, as in classical filtering algorithms, but also multiple integrals of these residuals. Classical filtering algorithms use reliable information about both the motion and measurement models and the statistical characteristics of the input random disturbances and measurement noise. The real control objects operate under conditions of action not only of high-frequency random disturbances, but also under the influence of low-frequency forces and moments from an aggressive environment, the characteristics of which are known with huge approximations. In this regard, the efficiency of using classical filtering algorithms for real systems is extremely low due to large errors. The algorithm proposed in the paper allows to eliminate these drawbacks by restoring external low-frequency disturbances in real time. Under external disturbances are understood not only external influences from the environment, but inaccurate knowledge about the motion model itself. For integral residuals, an algorithm is proposed for calculating the gains in the feedback in an analytical form. This algorithm is based on the processing of residuals, as well as estimates of external disturbances and their derivatives in the current time. A control algorithm is proposed that includes estimates of both phase coordinates, which are responsible for the quality of transients, and estimates of unknown disturbances, which is responsible for the compensation of external disturbances. Knowing the estimates of external disturbances in real time will, on the one hand, improve the quality of control, and, on the other hand, reduce the time and material costs associated with the study of the control object's movement dynamics and the external environment. Using the example of an underwater vehicle model described by a linear system of differential equations under conditions of external disturbances (wave and hydrological forces and moments), the simulation was performed and the efficiency of the proposed algorithms for various numbers of integral residuals was shown.

**Keywords:** optimal control, adaptive algorithms of filtration, parameters fitting, marine moving objects, disturbances estimation.

For citation:

**Danilova S. K., Tarasov N. N.** Adaptive Algorithm of Filtration with Integrated Residuals, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 80–89.

DOI: 10.17587/mau.20.80-89

### References

1. Kvakernak H., Sivan R. Optimal linear control systems, Moscow, Mir, 1977 (in Russian).

2. Leondes K. T. ed. Filtration and stochastic control in dynamic systems, Moscow, Mir, 1980 (in Russian).

3. Seidj E. P., Melsa J. L. Identification of control systems, Moscow, Nauka, 1974 (in Russian).

4. Bobtsov A. A., Pyrkin A. A. Compensation of undefined sine disturbance for linear object with any relative degree, *A&T*, 2009, no. 3, pp. 14–122 (in Russian).

5. Feuer A., Morse A. S. Adaptive control of single-input, single-output linear systems, *IEEE Trans. Automat.Control*, 1978, vol. 23, no. 4, pp. 557–569.

6. Syomushkin I. V. Effective algorithm of estimation's update according to measurements, *Sudostroitel'naya Promyshlennost., Ser. "Vichislitel'naya tekhnika"*, no. 28, 1992, pp. 55–59 (in Russian).

7. Khalil H. K. Universal integral controllers for minimum-phase nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat.Control*, 2000, vol. 45, no. 3, pp. 490–494.

8. Khlebnikov M. V. Robust filtration in non-random disturbances: invariant ellipsoid method, *A&T*, 2009, no. 1 (in Russian).

9. Kanev S., Schutter D. B., Verhaegen M. An ellipsoid algorithm for probabilistic robust controller design, *Systems & Control Letters*, 2003, no. 49, pp. 365–375.

10. Tarasov N. N., Tachtamyshev M. G. Algorithms of evaluation of unshifted estimations with action of unknown external disturbances, *Problemy Upravleniya*, 2012, no. 6, pp. 69–74 (in Russian).

11. Ostretsov G. E., Tarasov N. N. Ship control in action of external disturbances using integral residuals, *Sudostroeniye*, 2013, no. 6 (in Russian).

12. Danilova S. K., Kuskov A. M., Kuskov I. M., Tarasov N. N. Adaptive control of MMO in case of disturbance actions, *Izvestiya YUFU, Technical sciences*. 2017, no. 1–2, pp. 221–235 (in Russian).

13. Danilova S. K., Tarasov N. N., Kuskov I. M. Underwater vehicle control using uncomplete information about a movement model and external disturbances, *Mekhatronika, avtomatizaciya, upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 5, pp. 354–360 (in Russian).

14. Evlanov L. G. Control of dynamic systems, Moscow, Nauka, 1979 (in Russian).

15. Albert A. Regression, pseudoinversion and recurrent estimation, Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).

## Modified Backstepping Algorithm and its Application to Control of Distillation Column<sup>1</sup>

I. B. Furtat, Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher, cainenash@mail.ru,

A. N. Nekhoroshikh, PhD Student, becks94@mail.ru

Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences (IPME RAS),  
ITMO University, St.-Petersburg, Russia

Corresponding author: I. B. Furtat, Doctor of Technical Sciences, Leading Researcher,  
Laboratory of Control of Complex Systems, Institute of Problems of Mechanical Engineering,  
Russian Academy of Sciences (IPME RAS) and ITMO University, St.-Petersburg, Russia  
e-mail: cainenash@mail.ru

Accepted August 25, 2018

### Abstract

A novel robust algorithm is proposed for control of plants under parametric and structural uncertainties, as well as, external bounded disturbances. The algorithm design is based on the modified backstepping approach that allows to compensate mismatched disturbances under presence of nonlinearities. The obtained results are extended to control of network systems with nonlinear agents and with nonlinear links in the presence of mismatched disturbances. Effectiveness of the proposed algorithm is demonstrated on control of a distillation column which is described by parametric and structurally uncertain differential equation in presence of external bounded disturbances. It is assumed that only scalar input and output of the distillation column are available for measurement, but not their derivatives. The developed algorithm provides output tracking of a smooth bounded reference signal with a required accuracy at a finite time. The synthesis of control algorithm is separated into  $p$  steps, where  $p$  is an upper bound of the relative degree of the distillation column model. Therefore, the dynamical order of the proposed algorithm is equal to  $p$ . The sufficient conditions of the closed-loop stability is formulated and proved by using methods of stability of singular perturbed differential equations and Lyapunov functions. The simulations illustrate effectiveness of the proposed algorithm and confirm analytical results.

**Keywords:** backstepping algorithm, mismatched disturbance, reference model, tracking, distillation column

For citation:

Furtat I. B., Nekhoroshikh A. N. Modified Backstepping Algorithm and its Application to Control of Distillation Column, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 90—96.

УДК 681.511.46

И. Б. Фуртат, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., cainenash@mail.ru,

А. Н. Нехороших, аспирант, becks94@mail.ru,

Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН), Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

## Модифицированный алгоритм бэкстеппинга и его применение для управления дистиляционной колонной<sup>1</sup>

Разработан новый робастный алгоритм управления динамическими объектами в условиях параметрической и структурной неопределенностей, а также действия внешних ограниченных возмущений. Для синтеза алгоритма используется модифицированный метод бэкстеппинга, позволяющий компенсировать несогласованные возмущения в нелинейных системах. Полученные результаты расширены на случай управления сетевыми системами с нелинейными агентами и нелинейными связями при наличии несогласованных возмущений. Эффективность работы предложенного алгоритма продемонстрирована на управлении дистиляционной колонной, которая описывается параметрически и структурно неопределенным дифференциальным уравнением с внешними ограниченными возмущениями. Предполагается, что для измерения доступны только скалярные входные и выходные сигналы дистиляционной

<sup>1</sup>Research supported by Russian Science Foundation (project no. 18-79-10104) in IPME RAS.

<sup>1</sup>Исследования выполнены при поддержке Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в ИПМаш РАН.

колонны, но не их производные. Разработанный алгоритм обеспечивает слежение выхода дистилляционной колонны за гладким ограниченным эталонным сигналом с требуемой точностью за конечное время. Синтез алгоритма управления разделяется на  $\rho$  шагов, где  $\rho$  — оценка сверху неизвестной относительной степени модели дистилляционной колонны. В результате динамический порядок предлагаемого алгоритма равен  $\rho$ . Достаточные условия устойчивости замкнутой системы сформулированы и доказаны с использованием методов устойчивости сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений и функций Ляпунова. Приведены результаты моделирования, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма и подтверждающие результаты аналитических расчетов.

**Ключевые слова:** алгоритм бэкстеппинга, несогласованные возмущения, эталонная модель, слежение, дистилляционная колонна

## Introduction

Distillation is the most important and widely used industrial separation method. Therefore, the availability of practical techniques to develop effective and reliable control systems for efficient and safe operation of distillation systems is essential. Distillation columns present challenging control problems. They have many constraints and are subjected to many disturbances. Therefore, their control is not a trivial task and now there are many approaches to solve the problem.

In [1, 2] it is assumed the plant was described by linear differential equation with known coefficients, PI and PID controllers were introduced. In [3] the transfer function of the plant was inverted to determine the control law. In [4] the control system was synthesized by using approaches such as LGQ, LGQ/LTR, DNA/INA, and IMC. In [5] optimal fuzzy control law was proposed to operate a distillation column suggested in [6], assuming that parameters of the column were known.

However, in [7] it is noted that the processes in the distillation column were significantly sensitive to changes in external disturbances and were less sensitive to changes in internal processes in the column. Hence, even small differences from the nominal model parameters (the prototype) do not achieve the desired goal or lead to stability loss by using control algorithms [1–6].

In [7–9] to control a distillation column described by linear differential equation with unknown coefficients the control system was built using H-infinity optimization approach. In [10] to solve the same problem zero control was presented.

However, the structures of control systems [7–10] and calculation of adjusted parameters are quite complicated. Therefore, there is interest in solving the control problem of the distillation column described by linear differential equations with unknown parameters and relative degree in presence of external disturbances. The proposed algorithm

has to be simple in terms of technical implementation as well as calculation of adjusted parameters.

This paper proposes a robust control law using modified backstepping approach. The paper shows that only one dynamical filter is implemented in the control system that significantly reduces the dynamical degree of the control scheme, compared to [11]. The proposed algorithm provides required accuracy and transient time. A numerical simulation example of the distillation column taken from [5, 6] shows the efficiency of the control scheme.

## 1. Problem formulation

Consider a plant model in the following form

$$Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t), \quad (1)$$

where  $y(t) \in R$  is an output,  $u(t) \in R$  is an input,  $f(t) \in R$  is an unmeasured bounded disturbance (i.e.  $|f(t)| \leq \alpha$ ),  $Q(p)$  and  $R(p)$  are linear differential operators with unknown coefficients ( $\deg Q(p) = n$ ,  $\deg R(p) = m$ ),  $p = d/dt$ .

Let a reference model be described as

$$Q_0(p)y_m(t) = k_m r(t), \quad (2)$$

where  $y_m(t) \in R$  is a reference output,  $r(t) \in R$  is a piecewise continuous bounded reference input,  $k_m > 0$ ,  $Q_0(p)$  is a linear differential operator with known coefficients.

The main goal is to design a control system such that all signals in the closed-loop system are bounded for any initial conditions and the following condition holds

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ for any } t > T, \quad (3)$$

where  $\delta > 0$  is a required accuracy,  $T > 0$  is a transient time.

Assume that the coefficients of operators  $Q(p)$  and  $R(p)$  belong to a known compact set  $\Xi$  and

their degrees are unknown. The polynomial  $Q_0(\lambda)$  is Hurwitz, where  $\lambda$  is a complex variable,  $\deg Q_0(p) = \rho \geq n - m$ . Only signals  $y(t)$ ,  $u(t)$  and  $r(t)$  are available for measurements, but not their derivatives.

## 2. Synthesis of Algorithm

Represent operators  $Q(p)$  and  $R(p)$  as

$$\begin{aligned} Q(p) &= Q_m(p) + \Delta Q(p), \\ R(p) &= R_m(p) + \Delta R(p), \end{aligned} \quad (4)$$

where  $Q_m(p)$  and  $R_m(p)$  are linear differential operators with known coefficients such that  $Q_0(p) = Q_m(p)/R_m(p)$ ,  $\Delta Q(p)$  and  $\Delta R$  are operators including parametric uncertainties.

Taking into account (4), rewrite (1) in the form

$$\begin{aligned} Q_m(p)y(t) + \Delta Q(p)y(t) &= \\ = R_m(p)u(t) + \Delta R(p)u(t) + f(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Express the output variable  $y(t)$  from (5) as follows

$$y(t) = 1/Q_0(p)u(t) + \varphi(y(t), u(t), f(t)), \quad (6)$$

where  $\varphi(y(t), u(t), f(t)) = 1/Q_m(p)(\Delta R(p)u(t) - \Delta Q(p)y(t) + f(t))$  is a function including parametric uncertainties and disturbance.

Introduce a filter

$$\dot{v}(t) = A_0 v(t) + l u(t), \quad (7)$$

where  $v(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_\rho(t)]^T$ ,

$$A_0 = \begin{bmatrix} -k_0 & & & \\ -k_1 & I_{\rho-1} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -k_{\rho-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad I_{\rho-1} \in R^{(\rho-1) \times (\rho-1)} \text{ is}$$

an identity matrix,  $l = [0, \dots, 0, 1]^T$ ,  $Q_0(p) = p^\rho + k_0 p^{\rho-1} + \dots + k_{\rho-1}$ .

From (7) it follows that

$$Q_0(p)v_1(t) = u(t). \quad (8)$$

Therefore, the tracking error  $e_1(t) = y(t) - y_m(t)$  equals to

$$e_1(t) = v_1(t) + \psi(y(t), u(t), f(t), y_m(t)), \quad (9)$$

where  $\psi(y(t), u(t), f(t), y_m(t)) = \varphi(y(t), u(t), f(t)) - y_m(t)$ .

Using (7), differentiate (9) w.r.t. time

$$\dot{e}_1(t) = -k_0 v_1(t) + v_2(t) + \tilde{f}(t), \quad (10)$$

where  $\tilde{f}(t) = \dot{\psi}(y(t), u(t), f(t), y_m(t))$ .

According to backstepping method, the synthesis of control law consists of  $\rho$  steps. From the 1st to the  $(\rho - 1)$ th step auxiliary (virtual) control laws are determined to stabilize corresponding subsystems. Finally, on the  $\rho$ th step the control law  $u(t)$  is produced.

*Step 1.* Let signal  $v_2(t)$  be the auxiliary control law in (10). Then denote  $v_2(t)$  as  $v_2(t) = U_1(t)$ . As the signal  $\psi(y(t), u(t), f(t), y_m(t))$  cannot be measured, introduce the auxiliary control law  $U_1(t)$  as follows

$$U_1(t) = -c_1 \mu^{-1} e_1(t) + k_0 v_1(t), \quad (11)$$

where  $c_1 > 0$  and  $\mu > 0$  are designed parameters.

Substituting (11) into (10), we get

$$\dot{e}_1(t) = -c_1 \mu^{-1} e_1(t) + \tilde{f}(t). \quad (12)$$

*Step 2.* Since signal  $v_2(t)$  is not the control law, introduce a new error  $e_2(t) = v_2(t) - U_1(t)$ . Taking into account (7), differentiate error  $e_2(t)$  w.r.t. time

$$\dot{e}_2(t) = -k_1 v_1(t) + v_3(t) - \dot{U}_1(t). \quad (13)$$

Let signal  $v_3(t)$  be the auxiliary control law in (13). Then denote  $v_3(t)$  as  $v_3(t) = U_2(t)$  and choose  $U_2(t)$  in the form

$$U_2(t) = -c_2 e_2(t) + k_1 v_1(t) + \hat{U}_1(t), \quad (14)$$

where  $c_2 > 0$  is a designed parameter,  $\hat{U}_1(t)$  is an estimate of the signal  $\dot{U}_1(t)$ .

Substitute (14) into (13)

$$\dot{e}_2(t) = -c_2 e_2(t) - \eta_1(t), \quad (15)$$

where  $\eta_1(t) = \dot{U}_1(t) - \hat{U}_1(t)$  is an estimate error.

*Step  $i$  ( $3 \leq i \leq \rho - 1$ ).* Since signal  $v_i(t)$  is not the control law, introduce a new error  $e_i(t) = v_i(t) - U_{i-1}(t)$ . Using (7), differentiate error  $e_i(t)$  w.r.t. time

$$\dot{e}_i(t) = -k_{i-1} v_1(t) + v_{i+1}(t) - \dot{U}_{i-1}(t). \quad (16)$$

Let signal  $v_{i+1}(t)$  be the auxiliary control law in (16). Then denote  $v_{i+1}(t)$  as  $v_{i+1}(t) = U_i(t)$  and choose  $U_i(t)$  as follows

$$U_i(t) = -c_i e_i(t) + k_{i-1} v_1(t) + \hat{U}_{i-1}(t), \quad (17)$$

where  $c_i > 0$  is a designed parameters,  $\hat{U}_{i-1}(t)$  is an estimate of the signal  $\dot{U}_{i-1}(t)$ .

Substitute (17) into (16)

$$\dot{e}_i(t) = -c_i e_i(t) - \eta_{i-1}(t), \quad (18)$$

where  $\eta_{i-1}(t) = \dot{U}_{i-1}(t) - \hat{U}_{i-1}(t)$  is an estimate error.

*Step  $\rho$ .* Since signal  $v_\rho(t)$  is not the control law, introduce a new error  $e_\rho(t) = v_\rho(t) - U_{\rho-1}(t)$ . Using (7), differentiate error  $e_\rho(t)$  w.r.t. time

$$\dot{e}_\rho(t) = -k_{\rho-1} v_1(t) + u(t) - \dot{U}_{\rho-1}(t). \quad (19)$$

Consider the control law  $u(t)$  in the following form

$$u(t) = -c_\rho e_\rho(t) + k_{\rho-1} v_1(t) + \hat{U}_{\rho-1}(t), \quad (20)$$

where  $c_\rho > 0$  is a designed parameter,  $\hat{U}_{\rho-1}(t)$  is an estimate of the signal  $\dot{U}_{\rho-1}(t)$ .

Substitute (20) into (19)

$$\dot{e}_\rho(t) = -c_\rho e_\rho(t) - \eta_{\rho-1}(t), \quad (21)$$

where  $\eta_{\rho-1}(t) = \dot{U}_{\rho-1}(t) - \hat{U}_{\rho-1}(t)$  is an estimate error.

According to Problem Statement, the signals  $\dot{U}_{i-1}(t)$ ,  $i = \overline{2, \rho}$  are not available for measurements. Thus, the signals  $\hat{U}_{i-1}(t)$  are introduced at each step. To implement signals  $\hat{U}_{i-1}(t)$  use the following observers

$$(\mu p + 1)\hat{U}_{i-1}(t) = p U_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, \rho}. \quad (22)$$

**Theorem.** *There exist coefficients  $c_i > 0$ ,  $i = \overline{2, \rho}$ , and  $\mu_0 > 0$  such that for any  $\mu \leq \mu_0$  the control system consisting of filter (7), auxiliary control laws (11), (17), control law (20) and observers (22) ensures goal (3) and all signals are bounded.*

**Proof of Theorem.** Taking into account (22), re-write equations for the estimate errors  $\eta_{i-1}(t) = \dot{U}_{i-1}(t) - \hat{U}_{i-1}(t)$ ,  $i = \overline{2, \rho}$  as follows

$$\dot{\eta}_{i-1}(t) = -\mu^{-1} \eta_{i-1}(t) + \ddot{U}_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, \rho}. \quad (23)$$

Rewrite (12), (13), (18), (21) and (23) as the following system

$$\begin{aligned} \mu_1 \dot{e}_1(t) &= -c_1 e_1(t) + \mu_2 \tilde{f}(t); \\ \dot{e}_i(t) &= -c_i e_i(t) - \eta_{i-1}(t); \\ \mu_1 \dot{\eta}_{i-1}(t) &= -\eta_{i-1}(t) + \mu_2 \ddot{U}_{i-1}(t), \quad i = \overline{2, \rho}; \\ \dot{v}(t) &= A_0 v(t) + l u(t), \end{aligned} \quad (24)$$

where  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . To analyze system (24) the following Lemma is needed.

**Lemma [12–15].** *Let the system be described by the following differential equation*

$$\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2, t), \quad (25)$$

where  $x(t) \in R^{S1}$ ,  $\mu = \text{col}(\mu_1, \mu_2) \in R^{S2}$ ,  $f(x, \mu_1, \mu_2, t)$  is Lipchitz continuous function in  $x$ . Let (25) has a bounded closed attraction set  $\Omega = \{x \mid P(x) \leq C\}$  for  $\mu_2 = 0$ , where  $P(x)$  is a piecewise-smooth, positive definite function in  $R^{S1}$ . In addition let there exist some numbers  $C_1 > 0$  and  $\bar{\mu}_1 > 0$  such that the following condition holds

$$\sup_{|\mu_1| \leq \bar{\mu}_1} \left[ \left\langle \left[ \frac{\partial P(x)}{\partial x} \right]^T, f(x, \mu_1, 0, t) \right\rangle P(x) = C \right] \leq -C_1.$$

Then there exists  $\mu_0 > 0$  such that the system (25) has the same attraction set  $\Omega$  for  $\mu_2 \leq \mu_0$ .

Let us check conditions of Lemma. Consider (24) for  $\mu_2 = 0$ . Let  $P(x) = V(t)$ , where  $V(t)$  is Lyapunov function chosen in the following form

$$V(t) = 0.5 e_1^2(t) + 0.5 \sum_{i=2}^{\rho} [e_i^2(t) + \eta_{i-1}^2(t)]. \quad (26)$$

Taking the derivative w.r.t. time of  $V(t)$  along the trajectories (24), we get

$$\dot{V} = -c_1 \mu_1^{-1} e_1^2 + \sum_{i=2}^{\rho} [-c_i e_i^2 - e_i \eta_{i-1} - \mu_1^{-1} \eta_{i-1}^2]. \quad (27)$$

Find upper bounds for the third term of (27)

$$-e_i \eta_{i-1} \leq \mu_0^{-1} e_i^2 + \mu_0 \eta_i^2, \quad i = \overline{2, \rho}. \quad (28)$$

Substituting (28) into (27), we get

$$\dot{V}(t) \leq -c_1 \mu_1^{-1} e_1^2(t) - \sum_{i=2}^{\rho} [\bar{c}_i e_i^2(t) + \hat{d} \eta_{i-1}^2(t)], \quad (29)$$

where  $\bar{c}_i = c_i - \mu_0^{-1}$ ,  $\hat{d} = \mu_1^{-1} - \mu_0$ . Obviously, there exist coefficients  $\bar{c}_i$ ,  $i = \overline{2, \rho}$ ,  $\mu_1$ , and  $\mu_0$  such that  $\bar{c}_i > 0$ ,  $i = \overline{2, \rho}$ ,  $\hat{d} > 0$  and system (24) is asymptotically stable.

Taking into account the first equation in (7), (11) and  $v_2(t) = U_1(t)$ , express  $U_1(t)$  by  $e_1(t)$  in the following form

$$U_1(t) = -\frac{c_1}{\mu} \frac{p + k_0}{p} e_1(t).$$

Since  $e_1(t)$  is asymptotically stable, then  $U_1(t)$  also is asymptotically stable. Hence, it follows from (11) and  $e_2(t) = v_2(t) - U_1(t)$  that  $v_1(t)$  and  $v_2(t)$  are asymptotically stable respectively. Asymptotically

stability of signal  $\widehat{U}_1(t)$  follows from (22). Therefore, expression (14) leads to asymptotically stability of signal  $U_2(t)$ . Similarly, it can be shown that signals  $v_i(t)$ ,  $U_{i-1}(t)$ ,  $\widehat{U}_{i-1}(t)$ ,  $i = \overline{3, \rho}$ ,  $u(t)$  are asymptotically stable. It follows from (23) that signals  $\ddot{U}_{i-1}(t)$ ,  $i = \overline{2, \rho}$  are asymptotically stable. Since  $e_1(t)$  is exponentially stable, then signals  $p^i e_1(t)$ ,  $i = 1, \dots, \rho$  are bounded that leads to boundedness of signals  $p^i y(t)$ ,  $i = 1, \dots, \rho$ . Boundedness of signals  $\varphi(y(t), u(t), f(t))$ ,  $\psi(y(t), u(t), f(t), y_m(t))$  and  $\tilde{f}(t)$  follows from (6), (9) and (10) respectively. Therefore, all signals in the closed-loop system are bounded. According to Lemma there exist  $\mu_0 > 0$  such that for  $\mu_1 \leq \mu_0$  and  $\mu_2 \leq \mu_0$  the attraction set is the same as for  $\mu_2 = 0$ . However, system (24) is not asymptotically stable for  $\mu_2 \neq 0$ . It has some attraction set. Let us find the attraction set of system (24) for  $\mu_2 \neq 0$ . Taking into account result (29), take derivative w.r.t. time of (26) along the trajectories (24) for  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -c_1 \mu_0^{-1} e_1^2 + e_1 \tilde{f} - \\ & - \sum_{i=2}^{\rho} [\bar{c}_i e_i^2 + \bar{d} \eta_{i-1}^2 - \eta_{i-1} \ddot{U}_{i-1}], \end{aligned} \quad (30)$$

where  $\bar{d} = \mu_0^{-1} - \mu_0$ .

Use the following upper bounds

$$\begin{aligned} \eta_{i-1} \ddot{U}_{i-1} & \leq 0,5 \mu_0^{-1} \eta_{i-1}^2 + 2 \mu_0 \ddot{U}_{i-1}^2; \\ e_1 \tilde{f} & \leq \mu_0^{-1} e_1^2 + \mu_0 \tilde{f}^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Taking into account (31), rewrite (30) in the form

$$\dot{V}(t) \leq -\bar{c} e_1^2(t) - \sum_{i=2}^{\rho} [\bar{c}_i e_i^2(t) + \bar{d} \eta_{i-1}^2(t)] + \mu_0 \tilde{\varphi}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{where } \bar{c} &= \mu_0^{-1} (c_1 - 1), \quad \bar{d} = \bar{d} - 0,5 \mu_0^{-1}, \\ \tilde{\varphi} &= \sup_t \left( \tilde{f}^2(t) + 2 \sum_{i=2}^{\rho} \ddot{U}_{i-1}^2(t) \right). \end{aligned}$$

Obviously,  $\bar{d} > 0$  for  $\mu_0 \in (0; \sqrt{0,5})$ . According to (26), rewrite (32) as

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha V(t) + \mu_0 \tilde{\varphi}, \quad (33)$$

where  $\alpha = 2 \min\{\bar{c}, \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_\rho, \bar{d}\}$ .

Solving inequality (33) w.r.t.  $V(t)$ , we get

$$V(t) \leq e^{-\alpha t} V(0) + (1 - e^{-\alpha t}) \mu_0 \tilde{\varphi} \alpha^{-1}. \quad (34)$$

Taking into account (26), find the upper bound for  $|e_1(t)|$  as

$$|e_1(t)| \leq \sqrt{2(e^{-\alpha t} V(0) + (1 - e^{-\alpha t}) \mu_0 \tilde{\varphi} \alpha^{-1})}. \quad (35)$$

Let  $t = T$  in (35). If the right hand side of (35) is equal to  $\delta$ , then we can rewrite the estimates of the value  $\delta$  in the form

$$\delta = \sqrt{2(e^{-\alpha T} V(0) + (1 - e^{-\alpha T}) \mu_0 \tilde{\varphi} \alpha^{-1})}. \quad (36)$$

It follows from (36) that  $\delta$  explicitly depends on  $\mu_0$ . The theorem is proved.

*Remark.* The proposed algorithms can be trivial extended to control of network systems with nonlinear agents and with nonlinear links in the presence of mismatched disturbances. This is due to the fact that all disturbances and nonlinearities are concentrated in new disturbance function that further is compensated.

### 3. Example. Control of distillation column

Consider a seven plate binary (Benzene—Toluene) distillation column (Fig. 1). Linearized around an

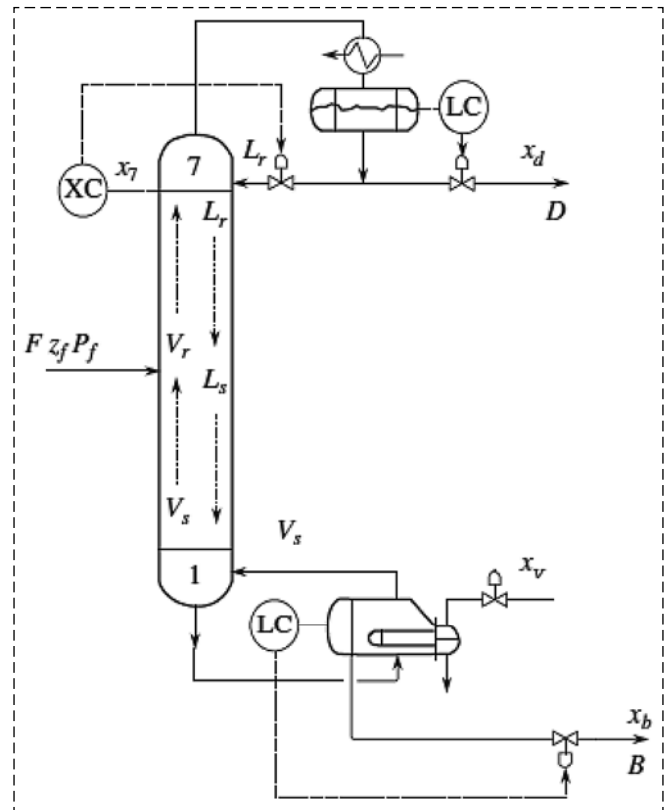


Fig. 1. The binary distillation column

operating state the dynamical model of the distillation column is represented in state-space form as

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ff(t); \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (37)$$

where  $x = (x_d, x_7, \dots, x_1, x_b, P_c, V_s)^T$ ,  $x_d$  is the mole fraction of the light component in the distillate (p.u.),  $x_7, \dots, x_1$  are the mole fractions of the light component at each stage of the column (p.u.),  $x_b$  is the mole fraction of the light component in the bottom product (p.u.),  $P_c$  is the steam pressure in the reboiler (kPa),  $V_s$  is the boilup (kmol/s);  $u = L_r$  is the reflux (kmol/s);  $f = (q, F, z_f, P_{ss}, X_v)^T$ ,  $q$  is the ratio of the increase in molar reflux rate across the feed stage to the molar feed rate ( $q = 1$  for bubble-point liquid),  $F$  is the total feed rate (kmol/s),  $z_f$  is the mole fraction of the light component in the feed (p.u.),  $P_{ss}$  is the input steam pressure (kPa),  $X_v$  is the valve capacity coefficient (p.u.);  $y = x_7$ .

Consider the reference model in the following form

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m u_m(t); \\ y_m(t) = C x_m(t), \end{cases} \quad (38)$$

where  $x_m(t) \in R^{11}$  is the reference state,  $y_m(t) \in R$  is the reference output,  $u_m(t) \in R$  is the reference input. All signals and parameters in (38) have the same physical meaning as the corresponding signals and parameters in (37). Matrices  $A_m$ ,  $B_m$  and  $C$  are given in [5, 6]. Note that the relative degree of (38) equals to one.

Let matrices  $A$  and  $B$  in (37) can be represented as follows

$$A = A_m + B_m a^T, \quad B = B_m + B_m b^T, \quad (39)$$

where  $a \in R^{11}$  is the vector of parametric uncertainties of matrix  $A$  in (37),  $b \in R^{11}$  is the vector of parametric uncertainties of matrix  $B$  in (37).

Assume that the upper bound of the relative degree of (37) equals to 2. According to proposed method, the control system consists of

- filter

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_0 & 1 \\ -k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t); \quad (40)$$

- auxiliary control law

$$U_1(t) = -c_1 \mu^{-1} e_1(t) + k_0 v_1(t), \quad (41)$$

where  $e_1(t) = y(t) - y_m(t)$ ;

- observer

$$(\mu p + 1) \hat{U}_1(t) = p U_1(t), \quad (42)$$

- control law

$$u(t) = -c_2 e_2(t) + k_1 v_1(t) + \hat{U}_1(t), \quad (43)$$

where  $e_2(t) = v_2(t) - U_1(t)$ .

There are two cases to consider.

**Case 1.** Let the parametric uncertainties  $a$  and  $b$  in (39) equal to  $(1, \dots, 1)^T$  and  $(0, -1, 0, \dots, 0)^T$  respectively. Therefore, the relative degree of (37) equals to 2.

Let vector of external disturbances  $f(t) = [f_1(t), \dots, f_5(t)]^T$  can be represented as

$$f(t) = \vartheta \sin(2\pi t/\tau) + w(t), \quad (44)$$

where vector of amplitudes  $\vartheta = 0.01[1, 0.01, 0.3, 5, 0.7]^T$  equals to 1 % of corresponding operating values,  $\tau = 1$  (h) is the time constant of the distillation column,  $w(t) = [w_1(t), \dots, w_5(t)]^T$  is a vector of band-limited white noise with power spectral density matrix  $S_w(\omega) = \vartheta \vartheta^T$ .

Dynamics of the valve actuator  $u_a(t)$  is described as

$$(\sigma p + 1) u_a(t) = u(t), \quad (45)$$

where  $\sigma = 3$  (min) is the time constant of the valve actuator.

The reference input  $u_m(t)$  is chosen using the optimal control theory. The initial conditions are zero.

Choose parameters in (40)–(43) as follows

$$\begin{aligned} \mu &= 0.01, \quad c_1 = 15000, \quad c_2 = 15, \\ k_0 &= 0.02, \quad k_1 = 0.0001. \end{aligned} \quad (46)$$

The simulation results are represented in Fig. 2, 3 (see the second side of the cover) with solid black curves.

**Case 2.** Let the parametric uncertainties  $a$  and  $b$  in (39) equal to  $(1, \dots, 1)^T$  and  $(0, \dots, 0)^T$  respectively. Therefore, the relative degree of (37) equals to 1. External disturbances  $f(t)$  are the same.

The simulation results are represented in Fig. 2, 3 with dashed blue curves. The simulation results show that the proposed control system (40)–(43) with parameters (46) ensures the goal (3) in spite of parametric and structural uncertainties of the plant (37) in presence of external disturbances.

## 4. Conclusions

This paper has proposed the robust control law for a distillation column using modified backstepping approach. The algorithm provides tracking of the plant output to smooth reference signal with the required accuracy after transient time. In comparison with existing results, the control system implementation requires only one filter which dimension is equal to the relative degree of the plant. These facts allow us to simplify the control scheme and calculation of adjusted parameters.

The proposed scheme is robust to structural uncertainties of the plant in contrast to previously known control systems using backstepping approach. Hence, suggested control law makes it possible to synthesize the single system to control the plant with unknown relative degree, for example, a distillation column.

The simulation results show that synthesized control system ensures required accuracy in both cases of structural uncertainties in agreement with theoretical basis. Both transients of the control signal look almost identical.

The value of tracking error can be reduced by varying of adjusted parameters and reducing parameter  $\mu$ . It should be mentioned that in the case with the differences the plant initial conditions and the reference model, the reduction of parameter  $\mu$  leads to control splash at the beginning of the control system operation.

## 5. Acknowledgment

Research supported by Russian Science Foundation (project no. 18-79-10104) in IPME RAS.

## References

1. Xianku Z., Yicheng J. Control of a multivariable high purity distillation column based on closed-loop gain shaping algorithm, *International Journal of Information Technology*, 2005, vol. 11, no. 5, pp. 116–123.
2. Hsu T.-S., Yu C.-C., Liou C.-T. Composition control of high-purity distillation columns, *Journal of Chinese Institute of Chemistry Engineering*, 1990, vol. 21, no. 2, pp. 105–113.
3. Tyreus B. D. Multivariable control system design for an industrial distillation column, *Industrial & Engineering Chemistry Process Design and Development*, 1979, vol. 18, no. 1, pp. 177–182.
4. Diggelen R. C., Kiss A. A., Heemink W. Comparison of control strategies for dividing-wall columns, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2010, vol. 49, no. 1, pp. 288–307.
5. Bouyahiaoui C., Grigoriev L. I., Laaouad F., Khelassi A. Optimal fuzzy control to reduce energy consumption in distillation columns, *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 2, pp. 200–208.
6. Khelassi A. Analysis and assessment of interaction in process control systems, *Ph.D. dissertation, University of Nottingham, England*, 1991.
7. Skogestad S., Morari M., Doyle J. Robust control of ill-conditioned plants: high-purity distillation, *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1988, vol. 33, no. 12, pp. 1092–1105.
8. Razzaghi K., Shahraki F. Robust control of a high-purity distillation column using  $\mu$ -synthesis, *Iranian Journal of Chemical Engineering*, 2006, vol. 3, no. 2, pp. 20–32.
9. Musch H. E., Steiner M. Robust PID control for an industrial distillation column, *IEEE Control Systems Magazine*, 1995, vol. 15, no. 4, pp. 46–55.
10. Yu W., Poznyak A. S., Alvarez J. Nero control multicomponent distillation column," in *Proc. 14th World Congress of IFAC*, Beijing, 1999, pp. 379–384.
11. Nikiforov V. O. Modified adaptive controllers for linear plants with improved parametric robustness and transient performance, *4th European Control Conference*, Brussels, 1997.
12. Furtat I., Fradkov A., Tsykunov A. Robust synchronization of linear dynamical systems with compensation of disturbances, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 2014, vol. 24, no. 17, pp. 2774–2784.
13. Furtat I., Fradkov A., Tsykunov A. Robust synchronization of linear networks with compensation of disturbances, *18th IFAC World Congress on Autom. Control*, Milan, 2011, pp. 1255–1260.
14. Furtat I. B. Robust Control for a Specific Class of Non-Minimum Phase Dynamical Networks, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 1, pp. 33–46.
15. Furtat I. B. Robust synchronization of dynamical networks with compensation of disturbances," *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 12, pp. 2516–2526.

А. В. Гулай, канд. техн. наук, доц., is@bntu.by, В. М. Зайцев, канд. техн. наук, доц., is@bntu.by,  
Белорусский национальный технический университет, г. Минск

## Экспертное формирование состава функциональных параметров цифровых мехатронных систем

*В процессе функционирования мехатронной системы вырабатываются результативные выходные параметры и параметры ее внутренних системных состояний. Предварительный выбор состава указанных параметров является достаточно сложной задачей вследствие объективной сложности систем, наличия явных и латентных взаимосвязей между параметрами. Эта задача усложняется в связи с необходимостью одновременного сокращения размерности и вариативности процедур контроля и управления в мехатронной системе. Решение данной проблемы может быть получено с помощью предварительных экспертных и эмпирических исследований комплексных моделей и макетных образцов проектируемых мехатронных систем. В работе изложены методологические аспекты обоснованного формирования состава контролируемых параметров, пределов их допусков и иных системных характеристик, необходимых для интеллектуального управления. Предложена рациональная последовательность проведения целенаправленных исследований по выявлению наиболее значимых результативных выходных параметров и параметров внутренних системных состояний. В соответствии с предложенным алгоритмом выполняется построение, исследование и ревизия начального информационно-параметрического портрета интеллектуальной мехатронной системы, формирование его групповой экспертной оценки и последующее "прореживание" списков составляющих его параметров. Проводится построение регрессионной модели, определяющей форму взаимосвязи между параметрами, а также корреляционной модели, позволяющей оценить степень статистической взаимосвязи между системными параметрами. В процессе анализа модели выявляются крайне слабые зависимости между параметрами, устраняется негативная коллинеарность факторных переменных.*

**Ключевые слова:** цифровая мехатронная система, экспертное формирование параметров, информационно-параметрический портрет, коллинеарность факторных переменных

### Введение

Функционирование большинства мехатронных систем, в том числе интеллектуальных, носит циклический характер. В каждом цикле функционирования системы в соответствии с алгоритмами и текущими значениями входных параметров (факторных переменных) обеспечиваются необходимые преобразования вещества, энергии и информации, а также вырабатываются соответствующие результативные выходные параметры и параметры внутренних системных состояний. В цифровых мехатронных системах текущие значения различных параметров формируются аналого-цифровыми, дискретно-цифровыми и импульсно-цифровыми измерительными трактами на основании сигналов соответствующих сенсоров и вычислительного оборудования. Несмотря на кажущуюся простоту выбора необходимого состава факторных и результативных параметров этот процесс в ряде случаев, особенно в многопара-

метрических системах, оказывается достаточно сложным и не всегда очевидным.

В отношении выбора указанных параметров системные аналитики, как правило, руководствуются принципом У. Р. Эшби, согласно которому целесообразно учитывать только "главные параметры" [1]. Однако из-за объективной сложности явных и латентных взаимосвязей между параметрами и одновременной необходимости сокращения размерности и вариативности процедур управления и контроля выбор совокупности "главных параметров" требует проведения предварительных исследований, анализа и обоснования. Применительно к конкретной мехатронной системе это позволяет сформировать требуемую доказательную платформу для выявления системной значимости переменных. Решение этой задачи может быть получено с помощью экспертных и эмпирических исследований комплексных моделей и макетных образцов проектируемых цифровых мехатронных систем.

## Технология получения групповой оценки значимости функциональных параметров

Предположим, что рассматривается некоторая цифровая мехатронная система  $S$ . На начальных стадиях создания системы группа аналитиков выполняет послойное построение онтологии предметной области системы, разработку ее морфологических, процессуальных и эксплуатационных описаний, а также алгоритмов функционирования [2]. Это позволяет сформировать начальный информационно-параметрический портрет системы в виде множества входных параметров — факторных переменных  $X^{(0)}[i, t]$ , результативных выходных  $Y^{(0)}[j, t]$  и результативных внутренних  $Z^{(0)}[k, t]$  параметров, которые являются функциями времени  $t$ :

$$X^{(0)}[i, t] = \{x_i^{(0)}[t]\}, i = 1, 2, \dots, m^{(0)};$$

$$Y^{(0)}[j, t] = \{y_j^{(0)}[t]\}, j = 1, 2, \dots, n^{(0)};$$

$$Z^{(0)}[k, t] = \{z_k^{(0)}[t]\}, k = 1, 2, \dots, q^{(0)},$$

где  $i, j, k$  — номера отсчетов;  $m^{(0)}, n^{(0)}, q^{(0)}$  — верхние пределы числа отсчетов. С учетом возможных связей множества  $X^{(0)}[i, t]$ ,  $Y^{(0)}[j, t]$ ,  $Z^{(0)}[k, t]$  могут иметь взаимные пересечения.

Параметры, вводимые в информационный портрет, должны обладать полнотой описания системы и, по возможности, охватывать все аспекты ее разработки, наладки, эксплуатации, контроля и ремонта. В системных спецификациях начального информационно-параметрического портрета требуется определить назначение, режимы использования, количественное выражение каждого параметра и числовое значение уровня его ранжирования. Желательна общая компактность портрета и внутримножественная структурированность параметров. В дальнейшем параметры могут применяться в соответствующих системных процессах, при этом минимальный состав результативных выходных параметров обычно определяется исходными системными требованиями. Однако при этом необходимо учитывать тот факт, что для каждой физической величины, которая имеет то или иное предназначение и отображается соответствующим параметром, в системе должны быть предусмотрены аппаратно-программные средства, обеспечивающие создание условий (иногда специального характера) для проявления этой

физической величины, ее измерения, транспортировки зафиксированных значений к требуемой контрольной точке и последующей регистрации.

Таким образом, очевидным представляется естественное стремление системных аналитиков на начальных стадиях проектирования практически любой системы обеспечить полноценную информационную поддержку разрабатываемых процессов управления и контроля за счет введения в информационно-параметрический портрет значительного числа различных переменных и, прежде всего, факторных и внутренних результативных параметров. Однако это входит в противоречие с принципом рациональной минимизации размерности и аппаратно-программной избыточности системы.

Начальный информационно-параметрический портрет системы в обязательном порядке должен подвергаться многошаговому исследованию и ревизиям группами экспертов и системных аналитиков. Экспертные исследования выполняются группой специалистов в виде экспертного оценивания, результаты которого обрабатываются системными аналитиками. В указанную группу отбираются независимые эксперты, лично не заинтересованные в конкретных результатах исследований, имеющие большой опыт работы в рассматриваемых предметной и проблемной областях и не подверженные влиянию других авторитетных специалистов.

Экспертное оценивание начального информационно-параметрического портрета предполагает интуитивно-логический анализ множеств  $X^{(0)}[i, t]$ ,  $Y^{(0)}[j, t]$ ,  $Z^{(0)}[k, t]$  и последующее присвоение каждому параметру соответствующего ранжирующего числового балла  $V_{x_i}, V_{y_j}, V_{z_k}$  по индивидуальным шкалам ценностей. Конкретное значение параметра, по мнению эксперта, отвечает уровню системной значимости этого параметра в пределах рассматриваемого множества. Обычно применяется ранжирование, при котором более значимому параметру выставляется более высокий балл и выдерживаются общие условия нормирования. Таким образом, каждый эксперт группы обеспечивает начальное ранжирование параметров в множествах  $X^{(0)}[i, t]$ ,  $Y^{(0)}[j, t]$ ,  $Z^{(0)}[k, t]$  в соответствии со следующими числовыми последовательностями:

$$\{0 \leq v_{x_i, g}^{(0)} \leq 1\}; v_{x_i}^{(0)} = V_{x_i} \left[ \sum_{i=1}^{m^{(0)}} V_{x_i, g} \right]^{-1}; \sum_{i=1}^{m^{(0)}} v_{x_i, g}^{(0)} = 1;$$

$$\{0 \leq v_{y_j, g}^{(0)} \leq 1\}; v_{y_j}^{(0)} = V_{y_j} \left[ \sum_{j=1}^{n^{(0)}} V_{y_j, g} \right]^{-1}; \sum_{j=1}^{n^{(0)}} v_{y_j, g}^{(0)} = 1;$$

$$\{0 \leq v_{z_k, g}^{(0)} \leq 1\}; v_{z_k}^{(0)} = V_{z_k} \left[ \sum_{k=1}^{q^{(0)}} V_{z_k, g} \right]^{-1}; \sum_{k=1}^{q^{(0)}} v_{z_k, g}^{(0)} = 1,$$

где  $g = 1, 2, \dots, G$  — личный номер эксперта;  $G$  — число экспертов в экспертной группе. При этом отдельные параметры в границах каждого множества могут располагаться в произвольном порядке своей значимости.

Могут быть использованы различные методы экспертного оценивания, но наиболее прозрачные, достаточно объективные и легко объясняемые результаты позволяет получить групповая экспертная оценка. Групповая оценка в ряде случаев применяется как завершающий этап парных сравнений и обобщенной ранжировки. Для обеспечения достоверности экспертизы не ниже 50 % желательно выбирать  $G \geq 4$  [3–6].

Рассмотрим возможную технологию получения групповой оценки значимости параметров на примере переранжирования факторных параметров  $X^{(0)}[i, t]$ . Предположим, что экспертным путем получены начальные оценки значимости этих параметров:

$$\left\{ \{0 \leq v_{x_i, g}^{(0)} \leq 1\}, \sum_{i=1}^{m^{(0)}} v_{x_i, g}^{(0)} = 1 \right\}.$$

Формирование групповой оценки может быть проведено с помощью последовательного выполнения шагов  $d = 1, 2, 3, \dots$  многошагового рекуррентного процесса преобразования значений двух векторных переменных  $v_{x_i}^{(d)}, K_g^{(d)}$  и вспомогательной переменной  $\lambda^{(d)}$  при начальном значении элементов вектора  $\{K_g^{(0)} = G^{-1}\}$  [5, 6]:

$$\left\{ v_{x_i}^{(d)} = \sum_{g=1}^G v_{x_i, g}^{(0)} K_g^{(d-1)} \right\};$$

$$\lambda^{(d)} = \sum_{i=1}^{n^{(0)}} v_{x_i}^{(d)} \sum_{g=1}^G v_{x_i, g}^{(0)};$$

$$\left\{ K_g^{(d)} = [\lambda^{(d)}]^{-1} \sum_{i=1}^{n^{(0)}} v_{x_i}^{(d)} v_{x_i, g}^{(0)} \right\}; g = 1, 2, \dots, G-1;$$

$$\left\{ K_G^{(d)} = 1 - \sum_{g=1}^{G-1} K_g^{(d)} \right\}.$$

Элементы вектора  $\{K_g^{(d)}\}$  целесообразно интерпретировать как коэффициенты уровней компетентности экспертов группы. На начальном шаге принимается гипотеза об их равной компетентности, при этом указанные коэффициенты нормированы и на любом шаге выполняется следующее условие:

$$\sum_{g=1}^G K_g^{(d)} = 1.$$

Совокупность из  $m^{(0)}$  первых рекуррентных уравнений обеспечивает нахождение оценок переменных  $v_{x_i}^{(d)}$  текущего шага путем усреднения оценок переменных начального шага  $v_{x_i}^{(0)}$  с учетом уровней (весов) компетентности экспертов группы. Второе уравнение определяет обобщенный коэффициент нормирования  $\lambda^{(d)}$  текущего шага. Совокупность из  $G$  последних уравнений позволяет уточнить уровни компетентности экспертов на текущем шаге.

На основании теоремы Перрона — Фробениуса можно показать, что многошаговый рекуррентный процесс является сходящимся [4]. Он завершается, если при заданной точности вычисления  $\varepsilon$  выполняется следующее условие:

$$\max \left\{ |v_{x_i}^{(d)} - v_{x_i}^{(d-1)}| \right\}; i = 1, 2, \dots, m^{(0)} \leq \varepsilon.$$

Групповая оценка  $\{v_{x_i}^{(d)}\}$  позволяет изменить начальное ранжирование факторных параметров в множестве  $X^{(0)}[i, t] = \{x_i^{(0)}[t]\}$  и преобразовать его в множество  $X[i, t] = \{x_i[t]\}$ , которое учитывает групповую экспертную оценку и сохраняет исходную мощность  $m^{(0)}$ . Аналогичным образом могут быть получены групповые оценки значимости результативных параметров, проведено переранжирование их элементов и преобразование в множества  $Y[j, t] = \{y_j[t]\}$  и  $Z[k, t] = \{z_k[t]\}$ .

Дополнительные исследования ранжированного состава параметров позволяют, в принципе, системным анализам выполнить "прореживание" начальных составов факторных и результативных переменных. Это достигается путем отбрасывания элементов соответствующих множеств, для которых  $v_{x_i}^{(d)}, v_{y_j}^{(d)}, v_{z_k}^{(d)} \leq (2 \dots 3)\varepsilon$ , в результате чего могут быть уменьшены их фактические мощности  $m, n, k$  после "прореживания", т. е. получено  $m \leq m^{(0)}, n \leq n^{(0)}, k \leq k^{(0)}$ .

В таблице приведены результаты экспертного исследования системной значимости шести факторных переменных; для оценки параметров привлекались четыре эксперта. Результаты указывают на то, что исходная расстановка факторных переменных подлежит изменению для упорядочения последовательности в порядке убывания значимости. Если точность расчета устанавливается на уровне  $\varepsilon = 0,0005$ , то групповое оценивание может быть выполнено за три шага. Предпосылок для "прореживания" списка факторных параметров проведенные экспертные исследования не выявили.

Технология формирования групповых экспертных оценок может быть распространена на любые системные характеристики, допускающие количественные оценки, в том числе на границы интервалов допустимых значений

**Результаты экспертного исследования факторных переменных**

| Номер эксперта                                                                                                   | Факторная переменная |        |        |        |        |        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|                                                                                                                  | $x_1$                | $x_2$  | $x_3$  | $x_4$  | $x_5$  | $x_6$  |
| <i>Начальные баллы значимости факторных переменных</i>                                                           |                      |        |        |        |        |        |
| 1                                                                                                                | 10                   | 8      | 5      | 7      | 1      | 3      |
| 2                                                                                                                | 10                   | 9      | 4      | 5      | 2      | 2      |
| 3                                                                                                                | 8                    | 10     | 8      | 7      | 4      | 4      |
| 4                                                                                                                | 9                    | 10     | 6      | 8      | 3      | 5      |
| <i>Начальные нормированные баллы значимости факторных переменных</i>                                             |                      |        |        |        |        |        |
| 1                                                                                                                | 0,2941               | 0,2353 | 0,1471 | 0,2059 | 0,0294 | 0,0872 |
| 2                                                                                                                | 0,3125               | 0,2813 | 0,1250 | 0,1562 | 0,0625 | 0,0625 |
| 3                                                                                                                | 0,1951               | 0,2439 | 0,1951 | 0,1707 | 0,0976 | 0,0976 |
| 4                                                                                                                | 0,2143               | 0,2381 | 0,1429 | 0,1905 | 0,0952 | 0,1190 |
| Шаг 0                                                                                                            |                      |        |        |        |        |        |
| $K_1^{(0)} = K_2^{(0)} = K_3^{(0)} = K_4^{(0)} = 0,25$                                                           |                      |        |        |        |        |        |
| $v_i^{(0)}$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ {0,2540; 0,2496; 0,1525; 0,1808; 0,0709; 0,0918}                          |                      |        |        |        |        |        |
| $\lambda^{(0)} = 0,7852$                                                                                         |                      |        |        |        |        |        |
| Шаг 1                                                                                                            |                      |        |        |        |        |        |
| $K_g^{(1)}$ для $g = 1, 2, 3, 4$ {0,2589; 0,2637; 0,2381; 0,2393}                                                |                      |        |        |        |        |        |
| $v_i^{(1)}$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ {0,2563; 0,2501; 0,1517; 0,1807; 0,0701; 0,0910}                          |                      |        |        |        |        |        |
| $\lambda^{(1)} = 0,7877$                                                                                         |                      |        |        |        |        |        |
| Шаг 2                                                                                                            |                      |        |        |        |        |        |
| $K_g^{(2)}$ для $g = 1, 2, 3, 4$ {0,2588; 0,2637; 0,2376; 0,2399}                                                |                      |        |        |        |        |        |
| $v_i^{(2)}$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ {0,2563; 0,2501; 0,1517; 0,1811; 0,0701; 0,0910}                          |                      |        |        |        |        |        |
| $\lambda^{(2)} = 0,7877$                                                                                         |                      |        |        |        |        |        |
| Шаг 3                                                                                                            |                      |        |        |        |        |        |
| Расстановка факторных переменных в порядке убывания их системной значимости: $x_1$ $x_2$ $x_4$ $x_3$ $x_6$ $x_5$ |                      |        |        |        |        |        |

тех или иных параметров, на линейные участки аппроксимации функций принадлежности лингвистических переменных к нечетким множествам исходных терм-множеств, на приоритеты обработки различных видов информации.

Комплексные модели функционирования систем и их макетные образцы позволяют провести ряд крайне важных эмпирических исследований. Практика создания многопараметрических систем показывает, что это единственное направление проектных работ, позволяющее предварительно получить достаточно реальные временные ряды факторных, выходных и внутренних системных параметров, выполнить их обработку в технологическом режиме и в дальнейшем применить полученные результаты для организации интеллектуального управления и функционального контроля.

В процессе экспериментов временные ряды представляют собой выборки параметров в некоторых точках временной оси  $t = \{t_1 = t_n, t_2, \dots, t_u = t_k\}$  при последовательном дискретном изменении времени на интервалах наблюдения ( $t_n$ ;  $t_k$ ) и при фактической мощности соответствующих множеств выборок после "прореживания"  $m \leq m^{(0)}$ ,  $n \leq n^{(0)}$ ,  $k \leq k^{(0)}$ . При этом необходимо, чтобы число  $u$  точек изменения моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_u$ , число факторных переменных  $m$  и результативных переменных  $n, q$  удовлетворяло соотношению  $u \geq 2 \max\{m, n, q\}$ .

Методология эмпирических исследований требует полноты и валидности временных рядов, которые по смысловому составу должны отвечать целям и задачам проводимых исследований и допускать распространение результатов на соответствующие системные процессы.

### Алгоритм анализа влияния факторных параметров на результативные переменные

Рассмотрим технологию исследования уровней влияния факторных параметров  $X[i, t] = \{x_i[t]\}$  на результативные переменные  $\{y_j[t]\}$  и  $\{z_k[t]\}$ . С этой целью для последовательности значений параметров, измеренных в точках  $t = \{t_1 = t_n, t_2, \dots, t_u = t_k\}$ , необходимо построить регрессионную модель системы в виде совокупности следующих уравнений регрессии:

$$Y^* = \{\Phi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)\}; Z^* = \{\Psi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)\},$$

а также в виде набора матриц парной корреляции, в том числе:

- $n$  матриц-строк

$$\{R_{Y_j, X_s} = [1, r_{Y_j, X_1}, r_{Y_j, X_2}, \dots, r_{Y_j, X_s}, \dots, r_{Y_j, X_n}]\}$$

корреляции выходных результативных и факторных переменных;

- $q$  матриц-строк

$$\{R_{Z_k, X_s} = [1, r_{Z_k, X_1}, r_{Z_k, X_2}, \dots, r_{Z_k, X_s}, \dots, r_{Z_k, X_n}]\}$$

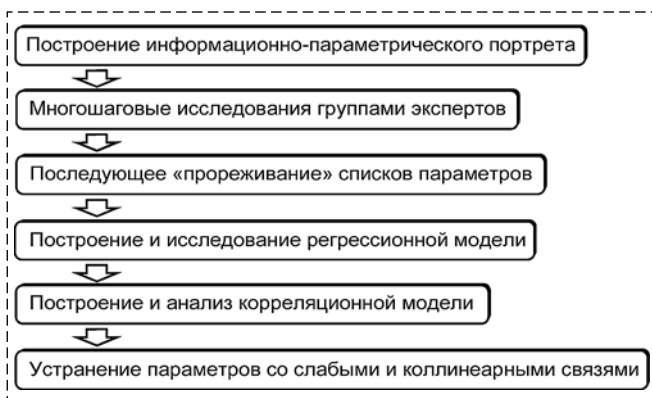
корреляции внутренних результативных и факторных переменных;

- симметричной квадратной матрицы парной корреляции факторных переменных

$$R_{X_i, X_s} = \|r_{X_i, X_s}\|. \text{ Здесь } s = 1, 2, \dots, n.$$

Построения регрессионной и корреляционной моделей преследуют различные цели. Регрессионные модели определяют форму взаимосвязи между результативными и факторными параметрами, т. е. вид функций  $\Phi_j, \Psi_k$ . Корреляционные модели позволяют оценить степень статистической взаимосвязи между всеми системными параметрами. Для любых результативных переменных  $\{y_j[t]\}$  и  $\{z_k[t]\}$  схемы построения указанных моделей и последующего их анализа полностью идентичны.

Построение указанных моделей, а также учет рассмотренных выше шагов создания и исследования информационно-параметрического портрета системы позволяют выстроить рациональную последовательность выбора ее параметров (см. рисунок). Наряду с многошаговым исследованием и ревизией информационно-параметрического портрета группами экспертов и системных аналитиков выполняется "прореживание" начальных составов факторных и результативных переменных системы. Логическим завершением этой последователь-



Алгоритм предварительных экспертных исследований комплексных моделей мехатронных систем

Algorithm of preliminary expert studies of complex models of mechatronic systems

ности операций является устранение возможной негативной коллинеарности факторных переменных, которые имеют латентные связи и обуславливают согласованные воздействия на результирующие параметры.

В многопараметрических системах, особенно в мехатронных системах с развитыми структурами, наблюдается наличие большого числа узлов и процессов функционального преобразования различных видов энергии, которым свойственны латентные, трудно формализуемые или вообще не формализуемые связи между параметрами. Выявление таких связей может быть достигнуто в ходе предварительных эмпирических исследований комплексных моделей и макетных образцов систем. Наиболее часто при исследовании многофакторных систем применяют самые "прозрачные" для системного анализа линейные уравнения регрессии. Использование уравнений второго порядка и, тем более, уравнений высших порядков или трансцендентных зависимостей резко усложняет исследования, затрудняет интерпретацию результатов и практически не приводит к сколько-нибудь существенному повышению качества анализа.

Выберем некоторую результативную переменную  $y_j[t]$ . При линейной аппроксимации зависимости  $\{y_j[t] = \Phi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$  для  $t = \{t_1 = t_n, t_2, \dots, t_u = t_k\}$  приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \{y_j[t] \approx y_j^*[t] = \\ = \alpha_{j0} + \alpha_{j1}x_1[t] + \alpha_{j2}x_2[t] + \dots + \alpha_{jm}x_m[t]\}. \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{jm}$  называют коэффициентами "чистой" регрессии. Они определяются с использованием оценок  $E_{y_j}$  по критерию минимизации квадратов отклонений расчетных (сглаживающих) значений  $y_j^*[t]$  результативных параметров от соответствующих наблюдаемых значений  $y_j[t]$  в точках  $t = t_1, t_2, \dots, t_u$  [3]:

$$E_{y_j} = \sum_{t=t_1, t_2, \dots, t_u} \{y_j[t] - y_j^*[t]\}^2 \rightarrow \min, x_0[t] = 1.$$

Для минимизации функционала находят корни системы линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \sum_{t=t_1, t_2, \dots, t_u} \{y_j[t] - y_j^*[t]\} = 0 \right\}.$$

Уравнения вытекают из общих правил минимизации многопараметрических функционалов

$$\left\{ \partial E_{Y_j} / \partial \alpha_{ji} = \left[ -2 \sum_{t=t_1, t_2, \dots, t_u} x_i[t] \right] \times \right. \\ \left. \times \sum_{t=t_1, t_2, \dots, t_u} \{y_j[t] - y_j^*[t]\} = 0 \right\}$$

после обнуления частных производных, взятых по коэффициентам регрессии  $\alpha_{j0}, \alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \dots, \alpha_{j(i-1)}, \alpha_{ji}, \alpha_{j(i+1)}, \dots, \alpha_{jm}$ . Система включает  $m+1$  уравнений с  $m+1$  неизвестными и позволяет получить однозначное решение в виде искоемых коэффициентов.

Аналогично строятся уравнения регрессии для всех других результативных переменных. Общее число уравнений  $m+q$  определяется суммарным числом результативных выходных и внутренних параметров системы.

Качество полученной модели характеризуется определенными статистическими свойствами и точностью, т.е. степенью близости к фактическим данным. Модель считается приемлемой со статистической точки зрения, если она признается адекватной и достаточно точной. Оценка качества проводится путем исследования гипотез о значимости модели в целом и каждого ее параметра, оценки доверительных интервалов и, в общем случае, анализа остатков. Однако при использовании метода наименьших квадратов последняя проверка теоретически является излишней.

Коэффициенты регрессии в какой-то мере отражают влияние того или иного факторного параметра на результативную переменную. Но прямое ("наивное") применение этих коэффициентов для оценки степени влияния соответствующих факторов нецелесообразно, а в ряде случаев просто недопустимо. Проблема заключается в различной размерности и диспергированности факторов, что уравнение регрессии никак не отражает. Однако замечательным свойством уравнения регрессии является то, что оно позволяет, хотя и приближенно, оценивать изменения результативных параметров при изменении факторных переменных, включая экстраполяцию значений параметров "вперед" и "назад".

Для оценки доли влияния факторной переменной  $x_i$  на результативную переменную  $y_j$  или  $z_k$  необходимо применять дельта-коэффициенты влияния  $\Delta_{Y_j X_i}$  и  $\Delta_{Z_k X_i}$ . Это сложные

коэффициенты, обеспечивающие построение рядов ранжирования факторных параметров на тот или иной результативный параметр:

$$\Delta_{Y_j X_i} = \alpha_{ji} \sigma_{X_i} r_{Y_j X_i} \sigma_{Y_j}^{-1} T_{Y_j}^{-2}; \\ \Delta_{Z_k X_i} = \alpha_{ki} \sigma_{X_i} r_{Z_k X_i} \sigma_{Z_k}^{-1} T_{Z_k}^{-2},$$

где  $\alpha_{ji}, \alpha_{ki}$  — коэффициенты регрессии для факторного параметра  $x_i$ ;  $\sigma_{X_i}$  — среднее квадратическое отклонение факторного параметра  $x_i$ ;  $r_{Y_j X_i}, r_{Z_k X_i}$  — коэффициенты парной корреляции факторной переменной  $x_i$  и результативных переменных  $y_j, z_k$  соответственно;  $\sigma_{Y_j}, \sigma_{Z_k}$  — средние квадратические отклонения переменных  $y_j, z_k$  соответственно;  $T_{Y_j}^2, T_{Z_k}^2$  — коэффициенты детерминации переменных  $y_j, z_k$  соответственно. Дельта-коэффициент показывает долю влияния каждого факторного параметра на результирующую переменную. Расчеты выполняются на основе значений экспериментально полученных временных рядов по известным правилам статистической обработки эмпирических данных [3]:

$$\sigma_{X_i} = \left\{ \left[ \sum_{h=1}^u (x_i[t_h] - M_{X_i})^2 \right] (u-1)^{-1} \right\}^{-0,5}; \\ M_{X_i} = \left( \sum_{h=1}^u x_i[t_h] \right) u^{-1}; \\ \sigma_{Y_j} = \left\{ \left[ \sum_{h=1}^u (y_j[t_h] - M_{Y_j})^2 \right] (u-1)^{-1} \right\}^{-0,5}; \\ M_{Y_j} = \left( \sum_{h=1}^u y_j[t_h] \right) u^{-1}; \\ T_{Y_j}^2 = 1 - \left\{ \sum_{h=1}^u \{y_j[t_h] - y_j^*[t_h]\}^2 \right\} \left\{ \sum_{h=1}^u \{y_j[t_h] - M_{Y_j}\}^2 \right\}^{-1}; \\ \sigma_{Z_k} = \left\{ \left[ \sum_{h=1}^u (z_k[t_h] - M_{Z_k})^2 \right] (u-1)^{-1} \right\}^{-0,5}; \\ M_{Z_k} = \left( \sum_{h=1}^u z_k[t_h] \right) u^{-1}; \\ T_{Z_k}^2 = 1 - \left\{ \sum_{h=1}^u \{z_k[t_h] - z_k^*[t_h]\}^2 \right\} \left\{ \sum_{h=1}^u \{z_k[t_h] - M_{Z_k}\}^2 \right\}^{-1}.$$

Если в результате расчетов значения некоторых коэффициентов  $\Delta_{Y_j X_i}$  ( $\Delta_{Z_k X_i}$ ) выходят из диапазона  $(0, 1]$ , то это указывает на необходимость вывода факторного параметра  $x_i$  из числа факторов, влияющих на соответствующую результативную переменную или на наличие ошибок в проведении вычислений.

Элементы каждой из  $n$  матриц-строк корреляции выходных результативных и факторных переменных  $\{R_{Y_j, X_s}\}$  вычисляются в соответствии с известными соотношениями [2]:

$$r_{Y_j, X_s} = (D_{Y_j} D_{X_s})^{-0,5} (u-1)^{-1} \times \\ \times \sum_{h=1}^u (y_j[t_h] - M_{Y_j})(x_s[t_h] - M_{X_s})$$

для  $s = 1, 2, \dots, m$ .

Математические ожидания и дисперсии параметров определяются на основании следующих исходных временных рядов:

$$M_{X_s} = u^{-1} \sum_{h=1}^u x_s[t_h]; D_{X_s} = u^{-1} \sum_{h=1}^u (x_s[t_h] - M_{X_s})^2$$

для  $s = 1, 2, \dots, m$ ;

$$M_{Y_j} = u^{-1} \sum_{h=1}^u y_j[t_h]; D_{Y_j} = u^{-1} \sum_{h=1}^u (y_j[t_h] - M_{Y_j})^2$$

для  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Для элементов каждой из  $k$  матриц-строк корреляции внутренних результативных и факторных переменных  $\{R_{Z_k, X_s}\}$  дополнительно применяются следующие соотношения:

$$r_{Z_k, X_s} = (D_{Z_k} D_{X_s})^{-0,5} (u-1)^{-1} \times \\ \times \sum_{h=1}^u (z_k[t_h] - M_{Z_k})(x_s[t_h] - M_{X_s})$$

для  $s = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, q$ ;

$$M_{Z_k} = u^{-1} \sum_{h=1}^u z_k[t_h]; D_{Z_k} = u^{-1} \sum_{h=1}^u (z_k[t_h] - M_{Z_k})^2$$

для  $k = 1, 2, \dots, q$ .

Симметричная квадратная матрица парной корреляции факторных переменных  $R_{X_i, X_s} = \|r_{X_i, X_s}\|$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $s = 1, 2, \dots, m$ , сводится к треугольной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & r_{X_1, X_2} & r_{X_1, X_3} & r_{X_1, X_4} & \dots & r_{X_1, X_{(m-1)}} & r_{X_1, X_m} \\ & 1 & r_{X_2, X_3} & r_{X_2, X_4} & \dots & r_{X_2, X_{(m-1)}} & r_{X_2, X_m} \\ & & 1 & r_{X_3, X_4} & \dots & r_{X_3, X_{(m-1)}} & r_{X_3, X_m} \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & 1 & r_{X_{(m-1)}, X_m} \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $r_{X_i, X_s}$  — коэффициенты взаимной парной корреляции факторных параметров:

$$r_{X_i, X_s} = (D_{X_i} D_{X_s})^{-0,5} (u-1)^{-1} \times \\ \times \sum_{h=1}^u (x_i[t_h] - M_{X_i})(x_s[t_h] - M_{X_s})$$

для  $i, s = 1, 2, \dots, m$ ,  $i \neq q$ .

Обычно используют общепринятую шкалу значений коэффициентов взаимной парной корреляции, которая позволяет оценить уровень корреляционной зависимости (связи) между некоторыми параметрами. Так, при значении коэффициента корреляции менее 0,15 зависимость считается крайне слабой, вплоть до ее полного отсутствия при нулевом значении коэффициента; от 0,15 до 0,3 — слабая зависимость; от 0,3 до 0,5 — умеренная зависимость; от 0,5 до 0,7 — средняя зависимость; выше 0,7 — сильная зависимость вплоть до проявления функциональной связи при значении коэффициента корреляции, равном единице [3].

Анализ значений элементов каждой из матриц-строк корреляции выходных или внутренних результативных и факторных параметров  $\{R_{Y_j, X_s}\}$ ,  $\{R_{Z_k, X_s}\}$  позволяет выявить крайне слабые зависимости, если таковые имеются. Входные параметры, соответствующие этим связям, в принципе, могут быть изъяты из списков факторных переменных рассматриваемых результативных выходных или внутренних параметров. При этом обеспечивается обоснованное "прореживание" входных переменных. С определенным риском потери обоснованности удалению могут подвергаться факторные переменные, соответствующие слабым и даже умеренным корреляционным зависимостям. Однако в этих случаях обязательно дополнительное применение дельта-коэффициента для оценки доли влияния удаляемого факторного параметра на результирующий выходной или внутренний параметр. Следует учитывать то, что факторная переменная, изъятая из входного списка одного из результативных параметров, может сохраняться в списках других результативных параметров.

Между факторными переменными  $X[i, t]$  может проявляться корреляционная зависимость. Если в матрице парной корреляции факторных переменных  $R_{X_i, X_s} = \|r_{X_i, X_s}\|$  имеются элементы, значения которых оказываются достаточно высокими, т. е.  $r_{X_i, X_s} \geq 0,7$ , то говорят

о частичной коллинеарности переменных  $x_i$  и  $x_s$  [5, 6]. Если отдельные элементы матрицы достаточно близки к 1, т. е.  $1 - \varepsilon \leq r_{x_i, x_s} \leq 1$  (за исключением элементов главной диагонали), то имеет место полная коллинеарность соответствующих переменных.

Причины коллинеарности кроются в наличии одной из следующих явных или латентных ситуаций:

- несколько факторных параметров, по сути, характеризуют одну и ту же сторону или аспект системы;
- несколько факторных переменных в любой момент времени дают одно и то же значение их суммы;
- некоторые факторные переменные при детальном рассмотрении оказываются составными частями других факторных переменных.

Рассматриваемое явление приводит к тому, что коллинеарные факторные переменные оказываются связанными "третьей" силой и формируют заведомо согласованные воздействия на результирующие переменные. Проявление коллинеарности крайне нежелательно, поскольку оно увеличивает диспергированность результирующих переменных, приводит к возрастанию ошибок регрессионного анализа и к затруднению оценки фактического влияния на результаты каждой факторной переменной. Объективным указателем на наличие коллинеарности факторных переменных является близость к нулю определителя матрицы парной корреляции  $R_{x_i, x_s}$  [5, 6].

В списке факторных переменных необходимо сохранять только те из них, которые объективно отражают различные стороны или аспекты системы и не провоцируют появления причин коллинеарности. Однако общего подхода к устранению этого негативного явления нет. Обычно применяют многошаговое "прореживание" факторных переменных путем их последовательного исключения из списка (или последовательного включения в список) с контролем возможных проявлений сильных корреляционных зависимостей. Практически эффективен и другой подход, при котором выявляется коллинеарность факторных параметров по матрице парных корреляций и проводится последующее "прореживание" с сохранением фактора, который имеет наименьшие корреляционные связи с другими факторными переменными.

В процессе функционирования мехатронных систем в соответствии с текущими значениями факторных переменных обеспечиваются необходимые преобразования вещества, энергии и информации. При этом осуществляется выработка соответствующих результирующих выходных параметров системы и параметров внутренних системных состояний. Предварительный выбор состава указанных параметров является достаточно сложной задачей вследствие объективной сложности систем, наличия явных и латентных взаимосвязей между параметрами. Эта задача усложняется в связи с необходимостью одновременного сокращения размерности и вариативности процедур контроля и управления в мехатронной системе. Решение данной проблемы может быть получено с помощью предварительных экспертных и эмпирических исследований комплексных моделей и макетных образцов проектируемых мехатронных систем. Указанные действия применительно к конкретной системе позволяют сформировать требуемую доказательную платформу выявления системной значимости переменных и провести их последующее "прореживание".

В работе изложены методологические аспекты обоснованного формирования состава контролируемых параметров, пределов их допусков и иных системных характеристик, необходимых для интеллектуального управления. Они являются основой выбора доступных системным аналитикам и инженерам-системотехникам методов создания полной информационно-параметрической базы функционирования цифровых мехатронных систем. Предложена рациональная последовательность проведения целенаправленных исследований по выявлению наиболее значимых результирующих выходных параметров и параметров внутренних системных состояний. Алгоритм предварительных экспертных и эмпирических исследований комплексных моделей и макетных образцов проектируемых мехатронных систем включает ряд следующих шагов:

- построение начального информационно-параметрического портрета интеллектуальной мехатронной системы;
- многошаговое исследование и ревизия информационно-параметрического портрета группами экспертов и системных аналитиков;

- формирование групповой экспертной оценки информационно-параметрического портрета и последующее "прореживание" каждого из списков параметров путем изъятия наименее значимых, по мнениям экспертов, элементов указанного портрета;
- построение "прозрачной" регрессионной модели, определяющей форму взаимосвязи между результативными и факторными параметрами, с коэффициентами "чистой" регрессии и оценка степени статистической взаимосвязи между всеми системными параметрами;
- построение корреляционной модели, позволяющей оценить степень статистической взаимосвязи между всеми системными параметрами; выявление крайне слабых зависимостей, если таковые имеются, и изъятие из информационно-параметрического пор-

трета факторных переменных, соответствующих этим связям;

- выявление и устранение возможной крайне негативной коллинеарности факторных переменных, которые оказываются связанными латентной "третьей" силой и обуславливают заведомо согласованные воздействия на результирующие параметры.

#### Список литературы

1. Эшби У. Р. Введение в кибернетику. М.: Иностранная литература, 1959.
2. Гулай А. В., Зайцев В. М. Концептуальные схемы предметных областей в технологии построения интеллектуальных систем // Электроника-инфо. 2016. № 10. С. 56—61.
3. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
5. Доугерти К. Введение в эконометрику. М.: ИНФА—М, 1999.
6. Кремер Н. Ш., Пупко Б. А. Эконометрика. М.: Юнити—Дана, 2005.

## Expert Formation of Functional Parameters Composition in Digital Mechatronic Systems

A. V. Gulay, is@bntu.by, V. M. Zaitsev, is@bntu.by

Belorussian National Technical University, 220065, Minsk, Republic of Belarus

Corresponding author: **Gulay A. V.**, Ph.D., Associate Professor, Chief of Department, Belorussian National Technical University, 220065, Minsk, Republic of Belarus

Accepted on October 10, 2018

*In the process of the mechatronic system functioning respective effective output parameters and parameters of its internal system state are generated. Preliminary selection of composition of the indicated parameters is a rather complicated task due to objective complexity of systems, availability of evident and latent interrelations between parameters. This task is complicated due to the necessity of simultaneous reduction of dimension and variation of control procedures and management in the mechatronic system. Solution of this problem may be attained with the aid of preliminary expert and empirical studies of complex models and mock-up specimens of designed mechatronic systems. In this regard, this work contains presentation of methodological aspects of adequately supported formation of composition of controlled parameters, their tolerance limits and other system features required for intellectual management. Rational sequence is described for performance of focused researches in order to reveal most important effective output parameters and parameters of internal system states. In accordance with the proposed algorithm the initial information and parameter picture of the intelligent mechatronic system is formed, studied and revised, its group expert evaluation and subsequent "thinning-out" of lists of its constituent parameters. A regression model is developed, which determines the form of interrelation between the parameters, as well as of the correlation model, which allows assessment of the volume of statistical interrelation between the system parameters. In the process of model analysis extremely weak dependences are detected between parameters, negative collinearity of factor variables is eliminated.*

**Keywords:** digital mechatronic system; expert formation of parameters; informational and parameter depiction; collinearity of factor variables.

For citation:

**Gulay A. V., Zaitsev V. M.** Expert Formation of Functional Parameters Composition in Digital Mechatronic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 97—105.

DOI: 10.17587/mau.20.97-105

#### References

1. E'shbi U. R. *Vvedenie v kibernetiku* (Introduction in Cybernetics), Moscow, *Inostrannaya literatura*, 1959 (in Russian).

2. **Gulaj A. V., Zajcev V. M.** *Konceptual'ny'e sxemy' predmetny'x oblastej v texnologii postroeniya intellektual'ny'x sistem* (Conceptual schemas of subject areas in the technology of building intelligent systems), *E'lektronika-info*, 2016, no. 10, pp. 56—61 (in Russian).
3. **Ventcel' E. S.** *Teoriya veroyatnostej* (Theory of Probabilities), Moscow, Nauka, 1969 (in Russian).
4. **Gantmaxer F. R.** *Teoriya matric* (The Array Theory), Moscow, Nauka, 1966 (in Russian).
5. **Dougerti K.** *Vvedenie v e'konometriku* (Introduction in Econometrics), Moscow, Infa—M, 1999 (in Russian).
6. **Kremer N. Sh., Pupko B. A.** *E'konometrika* (The Econometrics), Moscow, Yunita-Dana, 2005 (in Russian).

**М. Е. Семёнов**, д-р физ.-мат. наук, проф., mkl150@mail.ru,  
**М. Г. Матвеев**, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, mgmatveev@yandex.ru,  
**П. А. Мелешенко**, канд. физ.-мат. наук, доц., melechp@yandex.ru,  
**А. М. Соловьев**, канд. физ.-мат. наук, darkzite@yandex.ru,  
Воронежский государственный университет

## Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского<sup>1</sup>

*Статья посвящена исследованию динамических характеристик колебательной системы с демпфирующим звеном, находящейся под воздействием периодической вынуждающей силы. В качестве демпфирующего звена рассматривается гистерезисный демпфер на основе материала Ишлинского, а также линейный вязкий и нелинейный вязкий демпферы, проводится их сравнительный анализ. Так как рассматриваемые демпферы имеют ярко выраженные частотные свойства, исследование их эффективности целесообразно проводить в частотной области, анализируя динамику системы как в области резонанса, так и за ее пределами.*

*Исследование динамических характеристик колебательной системы, а также сравнительный анализ гистерезисного и вязкого демпфирования проводится в терминах передаточных функций, в качестве которых используются передаточная функция силы и функция "перемещение—сила". Передаточная функция силы отражает эффективность гашения внешнего воздействия в отношении передачи силы от внешнего источника к грузу. Передаточная функция "перемещение—сила" отражает эффективность гашения колебаний в плане способности демпфера уменьшать относительное перемещение груза под воздействием внешних сил.*

*Динамика изучаемой системы проиллюстрирована с помощью компьютерного моделирования, результаты которого показывают, что линейный вязкий демпфер имеет высокую эффективность за областью резонанса системы и низкую вблизи нее. Следует отметить, что увеличением коэффициента демпфирования можно добиться улучшения эффективности линейного вязкого демпфера в области резонанса, однако в этом случае его характеристики за пределами области резонанса значительно ухудшаются.*

*Решением указанной проблемы может стать использование нелинейного вязкого демпфера. Такой демпфер имеет лучшие характеристики в области резонанса и незначительно хуже за ее пределами в сравнении с линейным вязким демпфером. Также увеличение коэффициента демпфирования ведет к увеличению эффективности нелинейного вязкого демпфера в области резонанса и ухудшению за ее пределами, однако в отличие от линейного вязкого демпфера влияние коэффициента проявляется нелинейно, и при значительном улучшении характеристик в области резонанса ухудшение за ее пределами не столь значительно.*

*В случае использования демпфера на основе материала Ишлинского возможно добиться еще большей эффективности демпфирования. Подобрав параметры материала, можно получить значительное увеличение эффективности демпфирования в области резонанса при незначительном ее ухудшении вне данной области.*

**Ключевые слова:** гистерезис, материал Ишлинского, вязкое демпфирование, гистерезисный демпфер

### Введение

Демпфер представляет собой устройство, используемое для гашения (демпфирования) механических, электрических и других видов колебаний, возникающих в механических и электромеханических устройствах в процессе их функционирования. Так, например, в гидравлических системах применяются гидравлические и пневматические демпферы — гасители пульсаций и гидроударов; в электрических машинах демпферная обмотка предотвращает резкое увеличение коммутационных токов; в подвесках автомобилей и других транспортных средств используются демпфирующие устройства — амортизаторы; в авионике демп-

фер аэроупругих колебаний летательного аппарата — бортовая электронная система (на основе PID регуляторов), предназначенная для автоматического гашения короткопериодических колебаний самолета, неизбежно возникающих при изменении полетных режимов.

В случае гашения колебаний механических систем широкое распространение получило линейное вязкое демпфирование, основанное на диссипации энергии колебаний за счет работы сил вязкого трения [1–7]. Однако такой вид демпфирования имеет существенный недостаток — низкую эффективность в области резонансных частот системы. Нелинейные аналоги (моделируемые посредством степенных функциональных соотношений) частично лишены этого недостатка, однако не учитывают реальную природу материалов демпфирующих устройств. Альтернативный способ связан с использованием нелинейного вязкого

<sup>1</sup>Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 16-08-00312, № 17-01-00251).

демпфирования или демпфирующей системы с материалом гистерезисной природы (механический гистерезис может быть успешно промоделирован в рамках конструктивной модели материала Ишлинского). Отметим, что колебательным процессам в системах с гистерезисным типом нелинейности посвящено достаточно много работ, из которых выделим [8, 9].

### Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, находящуюся под действием вынуждающей периодической силы при наличии демпфирующего звена. Структурная схема рассматриваемой системы приведена на рис. 1. Механическая система состоит из цилиндра массой  $M$ , внутри которого находится груз массой  $m$ , прикрепленный к боковой стенке цилиндра посредством пружины с жесткостью  $k$ , и демпфирующего звена  $D$ ,двигающийся без трения в горизонтальной плоскости. К цилиндру приложена вынуждающая сила  $f(t)$ , которая изменяется по гармоническому закону. Без обобщения общности можно считать, что рассматриваемая система обладает одной степенью свободы.

Пусть закон изменения силы  $f(t)$ , приложенной к цилиндру  $M$ , задается следующим соотношением:

$$f(t) = Y\omega^2 \sin(\omega t), \quad (1)$$

где  $Y$  — амплитуда,  $\omega$  — частота воздействия.

Целью настоящей работы является исследование динамики механической системы под действием вынуждающих колебаний (рис. 1) при использовании вязкого демпфера, а также

демпфера с гистерезисной нелинейностью. В качестве математической модели гистерезиса рассматривается преобразователь Ишлинского, являющийся одним из видов континуальных систем гистерезиса и представляющий собой систему параллельно соединенных нелинейных звеньев типа "упор" [10].

### Вязкое демпфирование

Рассмотрим случай вязкого демпфирования, когда "гасящая" сила, приложенная к грузу  $m$  (см. рис. 1), определяется следующим образом:

$$f_d(t) = c(1+z)^n \dot{z}, \quad n \geq 0, \quad (2)$$

где  $c$  — коэффициент демпфирования;  $z = y - x$  — относительное перемещение;  $n$  — коэффициент, определяющий закон демпфирования. В случае, когда  $n = 0$ ,  $D$  представляет собой линейный вязкий демпфер. Если  $n > 0$ , имеет место нелинейное демпфирование с нелинейностью  $n$ -го порядка [1].

Составим уравнения, описывающие динамику исследуемой системы:

$$\begin{cases} M \frac{d^2 y}{dt^2} + kz + c(1+z)^n \frac{dz}{dt} = Y\omega^2 \sin(\omega t); \\ M \frac{d^2 x}{dt^2} - kz - c(1+z)^n \frac{dz}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Исключив из уравнений системы (3) переменные  $x$  и  $y$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{M+m}{Mm} \left[ c(1+z)^n \frac{dz}{dt} + kz \right] = \\ = \frac{Y}{M} \omega^2 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (4)$$

Так как исследование механической системы с демпфированием удобно проводить в частотной области, а эффективность демпфера в области резонанса и за ее пределами является одним из важных критериев его применимости, обезразмерим переменные таким образом, чтобы перейти к относительной частоте. Пусть

$$\begin{aligned} u = z, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \\ \varsigma = \frac{c}{2\omega_0 \mu}, \quad \mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad A = \frac{Y}{M}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\omega_0$  — частота резонанса системы.

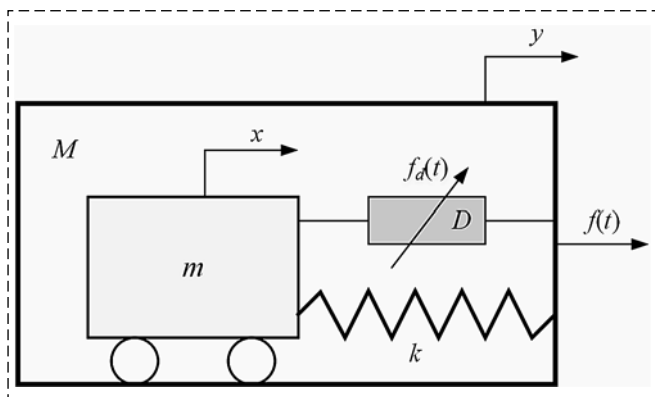


Рис. 1. Исследуемая механическая система  
Fig. 1. The considered physical system

Перепишем уравнение (5), учитывая проведенную замену:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} + 2\zeta(1+u)^n \frac{du}{d\tau} + u = A\Omega^2 \sin(\Omega\tau). \quad (6)$$

### Материал Ишлинского

Материалы, используемые для гистерезисного демпфирования, чаще всего представляют собой полимеры (синтетические резины), состав которых надлежащим образом подобран, чтобы обеспечить высокие демпфирующие свойства в определенном диапазоне частот и температур. В процессе демпфирования диссипация энергии происходит внутри самого материала. Этот эффект обусловлен трением между внутренними слоями, которые "текут" или скользят, когда имеет место демпфирование. Когда конструкция с таким типом демпфирования подвергается внешней периодической возбуждающей силе, на диаграмме "напряжение—деформация" появляется петля гистерезиса. Площадь петли определяет потерю энергии в единице объема тела за один цикл вследствие демпфирования.

Рассмотрим подробнее математическую модель гистерезиса, применяемую в данной работе. Носителем гистерезисных нелинейностей обычно является преобразователь  $W$  со скалярными входами  $u(t)$  и выходами  $x(t)$ , состояниями которого являются пары  $\{u, x\}$ , т. е. пары вход—выход. Пусть множеством возможных состояний преобразователя  $W$  является полоса  $\Omega = \Omega(W)$ , расположенная между двумя горизонтальными прямыми  $\Phi_l$  и  $\Phi_r$ , как показано на рис. 2.

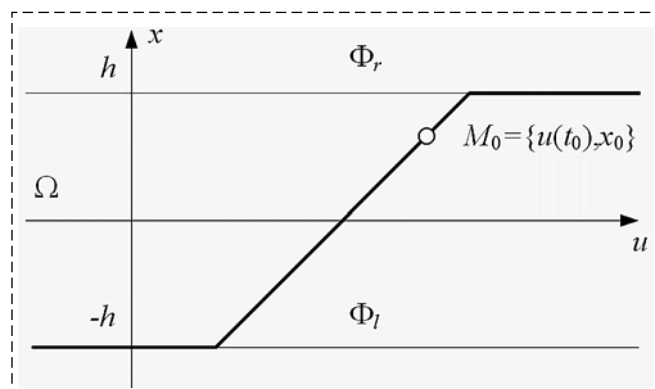


Рис. 2. Характеристика нелинейности типа "упор"  
Fig. 2. Action of hysteron-nonlinearity

Если вход  $u(t)$  при  $t \geq t_0$  непрерывен и монотонен, то определим выход

$$x(t) = W[t_0, x_0]u(t), \quad t \geq t_0, \quad (7)$$

так, чтобы переменное состояние  $\{u(t), x(t)\}$  было точкой ломаной, показанной на рис. 2 утолщенной линией; эта ломаная состоит из проходящего через начальное состояние  $M_0 = \{u(t_0), x_0\}$  отрезка с угловым коэффициентом 1 и концами на прямых  $\Phi_l$  и  $\Phi_r$  и из двух горизонтальных полупрямых. Иначе говоря, при монотонном входе выход определяется равенством

$$x(t) = \begin{cases} \min\{h, u(t) - u(t_0) + x(t_0)\}, & u(t) \text{ не убывает;} \\ \max\{-h, u(t) - u(t_0) + x(t_0)\}, & u(t) \text{ не возрастает.} \end{cases} \quad (8)$$

Описанный преобразователь называется упором.

В наиболее распространенных моделях упругопластических волокон их состояния полностью определяются значениями  $u$  деформации и  $x$  напряжения, а параметр  $h$  в этом случае называется пределом текучести материала. Такие волокна можно рассматривать как преобразователи с входом — переменной деформацией и выходом — переменным напряжением. В модели Прандтля напряжение определяется по деформации тем же способом, как в нелинейности "упор", только траектории возможных состояний между граничными горизонтальными прямыми имеют угловой коэффициент  $E$ , который может быть отличен от 1 (при малых деформациях волокно считается упругим и  $E$  — его модуль упругости).

Рассмотрим преобразователь  $W$ , представленный в виде простой схемы без обратных связей из конечного числа гистеронов  $W^1, \dots, W^N$  и простейших функциональных звеньев, как показано на рис. 3.

Такие преобразователи  $W$ , как правило, недетерминированны. Их состоянием удобно считать не пару вход—выход, а набор  $\{u, z_1, \dots, z_N\} \in R^{N+1}$ , где  $u$  — вход преобразователя, а  $z_j$  — выход участвующего в схеме гистерона  $W^j$ .

Пусть заданы гистероны  $W^1, \dots, W^N$  с областями допустимых состояний  $\Omega(W^1), \dots, \Omega(W^N)$  и вход-выходными соответствиями

$$z_j(t) = W^j[t_0, z_j(t_0)]u(t), \quad j = \overline{1, N}. \quad (9)$$

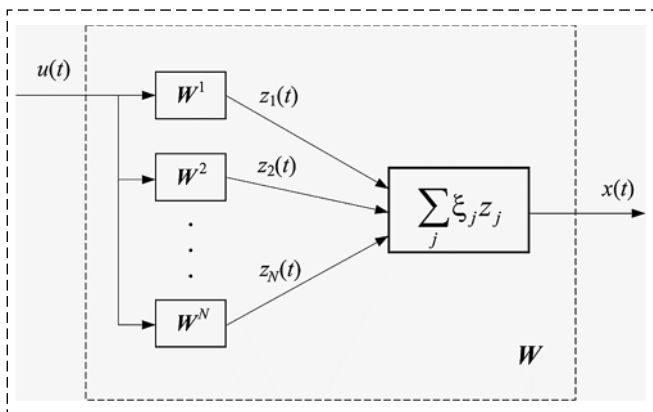


Рис. 3. Параллельное соединение гистеронов  
Fig. 3. Parallel connection of hysterons

Положим

$$\Omega(W) = \{ \{u, z_1, \dots, z_N\} : \{u, z_j\} \in \Omega(W^j), u \in R^1 \}. \quad (10)$$

Параллельным соединением с весами  $\xi_j$  гистеронов  $W^j$  назовем преобразователь  $W$  с областью возможных состояний (10), для которого при каждом начальном состоянии

$$\begin{aligned} q(t_0) &= \{u_0, z_0\} = \\ &= \{u(t_0), z_1(t_0), \dots, z_N(t_0)\} \in \Omega(W) \subset R^{N+1} \end{aligned} \quad (11)$$

допустимы все непрерывные скалярные входы  $u(t)$  при  $t \geq t_0$ , удовлетворяющие условию  $u(t_0) = u_0$ , а выход определяется по входу равенством

$$\begin{aligned} x(t) &= W[t_0, z_0]u(t) = \\ &= \sum_{j=1}^N \xi_j W^j[t_0, z_j(t_0)]u(t), \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (12)$$

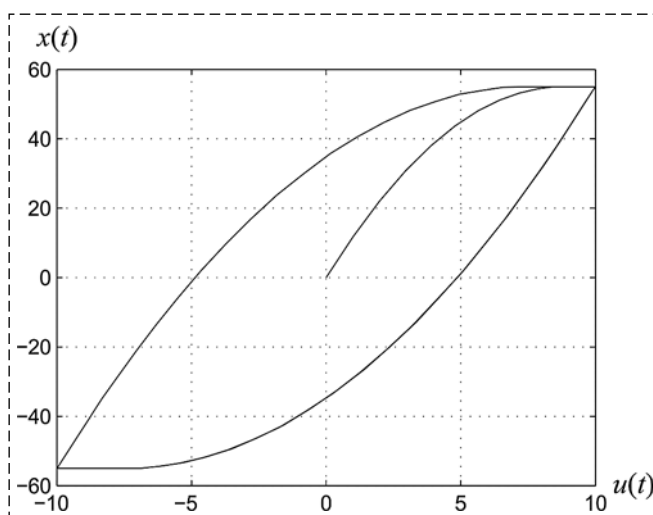


Рис. 4. Диаграмма "напряжение—деформация" материала Ишлинского  
Fig. 4. "Stress—strain" diagram for Ishlinsky material

Рассмотренный преобразователь  $W$  является одним из видов непрерывных систем гистеронов и называется материалом Ишлинского [10], а схема, приведенная на рис. 3, является его конечномерной аппроксимацией.

Рассмотрим в качестве примера реакцию материала Ишлинского на синусоидальное воздействие. Используем преобразователь  $W$ , состоящий из 10 гистеронов ( $N = 10$ ), имеющих следующие параметры: модуль упругости  $E = 1$ , начальное состояние  $W^j[t_0, z_j(t_0)] = 0$ , вес  $\xi_j = 1$ , предел текучести  $h = j$ , где  $j$  — порядковый номер гистерона. Используем входное воздействие вида  $u(t) = 12\sin(t)$ . Диаграмма "напряжение—деформация" такого преобразователя приведена на рис. 4.

### Гистерезисное демпфирование

Рассмотрим случай гистерезисного демпфирования, тогда сила, приложенная к грузу  $m$  (см. рис. 1), в относительных величинах (5) определяется следующим образом:

$$f_d(\tau) = W[\tau, z_j(\tau)]u, \quad j = \overline{1, N}, \quad (13)$$

где  $W$  — описанный выше преобразователь Ишлинского (см. рис. 3), состояние которого определяется равенством (12).

В этом случае уравнение, описывающее динамику исследуемой механической системы в относительных величинах, будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\tau^2} + \alpha W[\tau, z_j(\tau)]u + u &= A\Omega^2 \sin(\Omega\tau), \\ j &= \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (14)$$

где коэффициент  $\alpha = S/k$ ;  $S$  — площадь сечения демпфирующего материала;  $k$  — жесткость пружины.

### Основные характеристики

Целью настоящей работы является исследование динамики механической системы с вынуждающими колебаниями в случае использования вязкого демпфера, а также демпфера с гистерезисной нелинейностью. Сравнение указанных типов демпфирующих элементов наиболее репрезентативно может быть пред-

ставлено в терминах передаточных функций [11–13], отражающих эффективность использования рассматриваемого демпфера в области резонанса системы и за ее пределами.

- *Передаточная функция силы*, определяемая отношением силы, приложенной к цилиндру  $M$ , и силы, приложенной к грузу  $m$  (см. рис. 1), отражает эффективность гашения внешнего воздействия в отношении передачи силы от внешнего источника к грузу. Данная характеристика описывается следующим образом:

$$T_{ff} = \frac{\max_{\tau} \left| m \omega_0^2 \frac{d^2 x}{d\tau^2} \right|}{Y \omega^2}. \quad (15)$$

Из системы (3) и уравнения (6)  $T_{ff}$  можно выразить через переменную  $u$ :

$$T_{ff} = \max_{\tau} \left| \frac{m}{(M+m)A\Omega^2} [A\Omega^2 \sin(\Omega\tau) - \ddot{u}] \right|. \quad (16)$$

- *Передаточная функция "перемещение—сила"*, определяемая отношением перемещения груза  $m$  относительно цилиндра  $M$ , и силы, приложенной к цилиндру, отражает эффективность гашения колебаний в отношении способности демпфера уменьшать относительное перемещение груза под воздействием внешних сил. Указанная характеристика выражается следующим образом:

$$T_{fd} = \frac{\max_{\tau} |x(\tau)|}{Y \omega^2}. \quad (17)$$

Из системы (3) и уравнения (6) можно найти  $T_{fd}$  как функцию от  $u$  в следующем виде:

$$T_{fd} = \max_{\tau} \left| \frac{A \sin(\Omega\tau) + u}{(M+m)A\Omega^2 \omega_0^2} \right|. \quad (18)$$

В процессе компьютерного моделирования используем эти характеристики для сравнения линейного вязкого, нелинейного вязкого и гистерезисного демпферов колебаний.

### Результаты компьютерного моделирования

Выполним компьютерное моделирование динамики исследуемой механической системы. Построим график передаточной функции силы (15) и функции "перемещение—сила" (17) для

случая вязкого демпфирования с параметром  $n = \{0, 2, 4\}$  и гистерезисного демпфирования.

В качестве гистерезисного демпфера используем материал Ишлинского  $W$ , состоящий из 500 гистеронов ( $N = 500$ ), имеющих следующие параметры: модуль упругости  $E = 10^5$ , начальное состояние  $W_j[t_0, z_j(t_0)] = 0$ , вес  $\xi_j = 1$ , предел текучести  $h = 0,1j$ , где  $j$  — порядковый номер гистерона, параметр материала  $\alpha = 10^{-4}$  (14).

Характеристики механической системы:  $M = 1$ ,  $m = 1$ ,  $\zeta = 0,8$ ,  $\omega_0 = 10$ , внешнее воздействие с параметрами  $A = 1$ ,  $\omega = 0, \dots, 30$  (с шагом 0,2).

Результаты моделирования приведены на рис. 5 и 6.

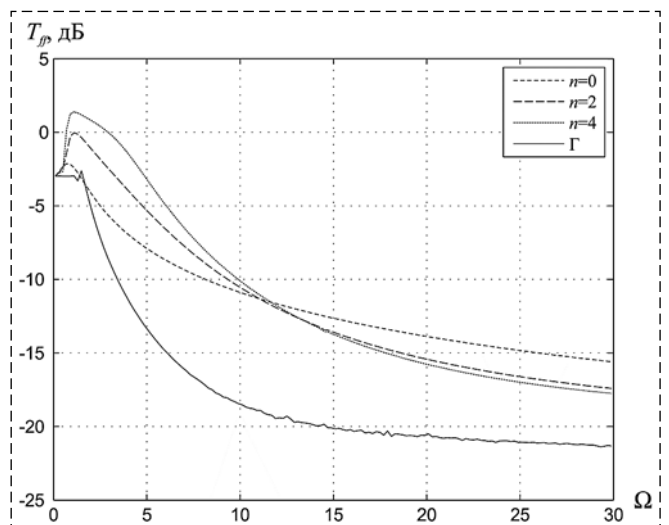


Рис. 5. Передаточная функция силы  
Fig. 5. Force transmission function

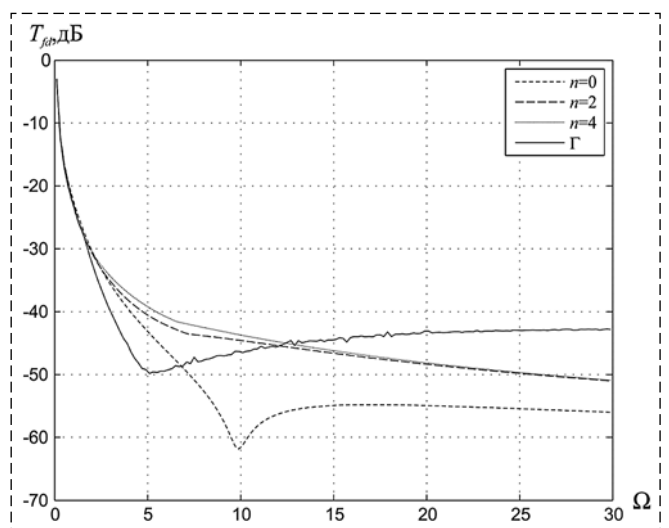


Рис. 6. Передаточная функция "перемещение—сила"  
Fig. 6. "Force—displacement" transmission function

Построим фазовые траектории динамики исследуемой системы. В качестве координат фазовой плоскости возьмем мгновенные значения перемещения груза внутри цилиндра  $x(\tau)$  и его относительную скорость  $\dot{x}(\tau)$ . Фазовые траектории приведены на рис. 7–10.

Результаты численного моделирования демонстрируют, что линейный вязкий демпфер имеет высокую эффективность за областью резонанса системы и низкую вблизи резонанса. Следует отметить, что увеличением коэффициента  $\zeta$  можно добиться улучшения эффективности демпфирования в области резонанса, однако в этом случае характеристики линейного демпфера за пределами области резонанса значительно ухудшаются.

Решением указанной проблемы может стать использование нелинейного вязкого демпфера. Такой демпфер имеет лучшие характеристики в области резонанса и незначительно хуже за ее пределами в сравнении с линейным вязким демпфером. Также увеличение коэффициента  $\zeta$  ведет к увеличению эффективности демпфирования в области резонанса и ухудшению за ее пределами, однако, в отличие от линейного вязкого демпфера, влияние коэффициента проявляется нелинейно, и при значительном улучшении характеристик в области резонанса ухудшение за ее пределами не столь значительно.

В случае использования демпфера на основе материала Ишлинского возможно добиться еще большей эффективности демпфирования. Подбором параметров материала можно добиться значительного увеличения эффективности демпфирования в области резонанса при незначительном ее ухудшении вне

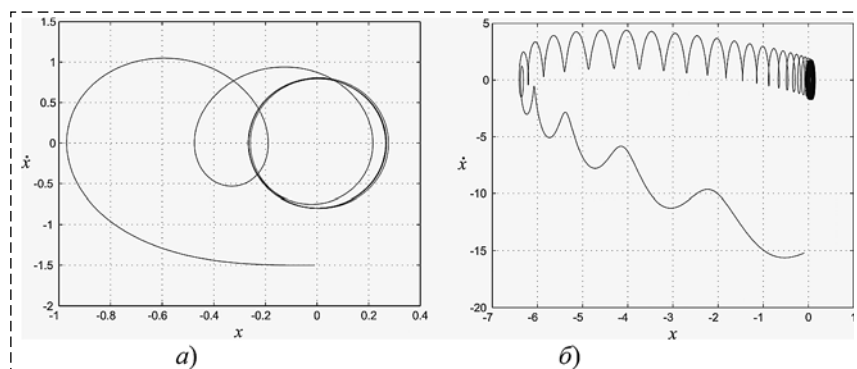


Рис. 7. Фазовый портрет линейного демпфера при  $n = 0$ ,  $\Omega = 3$  (а),  $\Omega = 30$  (б)  
Fig. 7. Phase portraits of the system in the case of linear viscous damper ( $n = 0$ ) at  $\Omega = 3$  (а) and  $\Omega = 30$  (б)

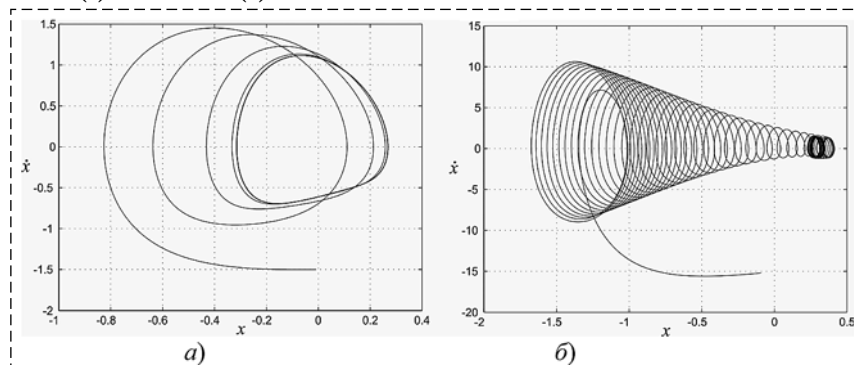


Рис. 8. Фазовый портрет нелинейного демпфера при  $n = 2$ ,  $\Omega = 3$  (а),  $\Omega = 30$  (б)  
Fig. 8. Phase portraits of the system in the case of linear viscous damper ( $n = 2$ ) at  $\Omega = 3$  (а) and  $\Omega = 30$  (б)

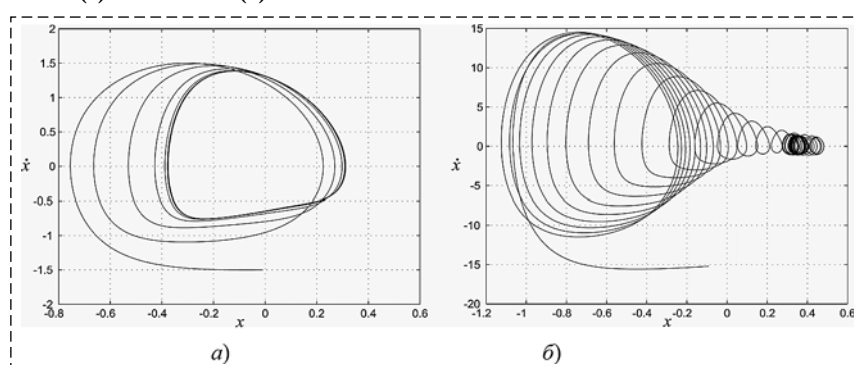


Рис. 9. Фазовый портрет линейного демпфера при  $n = 4$ ,  $\Omega = 3$  (а),  $\Omega = 30$  (б)  
Fig. 9. Phase portraits of the system in the case of linear viscous damper ( $n = 4$ ) at  $\Omega = 3$  (а) and  $\Omega = 30$  (б)

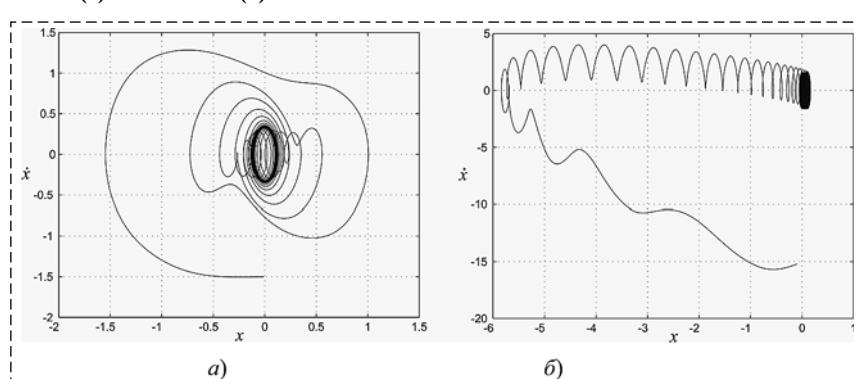


Рис. 10. Фазовый портрет гистерезисного демпфера при  $\Omega = 3$  (а),  $\Omega = 30$  (б)  
Fig. 10. Phase portraits of the system in the case of hysteretic damper at  $\Omega = 3$  (а) and  $\Omega = 30$  (б)

данной области. На характеристики демпфера оказывают влияние следующие параметры: коэффициент  $\alpha$ , число упоров  $N$ , а также тип распределения весов гистерезисов  $\xi$ .

### Заключение

В работе проведено исследование динамики линейного вязкого, нелинейного вязкого и гистерезисного демпферов колебаний. Динамика изучаемой системы проиллюстрирована с помощью компьютерного моделирования, в процессе которого было показано, что гистерезисный вибрационный демпфер на основе материала Ишлинского имеет ряд важных преимуществ по сравнению с демпферами, построенными на основе вязкого трения.

### Список литературы

1. Qibao Lv, Zhiyuan Yao. Analysis of the effects of nonlinear viscous damping on vibration isolator // *Nonlinear Dynamics*. 2014. 79 (4). P. 2325–2332.
2. Milovanovic Z., Kovacic I., Branani M. J. On the displacement transmissibility of a base excited viscously damped nonlinear vibration isolator // *Nonlinear Dynamics. J. Vib. Acoust.* 2009. 131 (5). P. 054502–054507.
3. Peng Z. K., Meng G., Lang Z. Q., Zhang W. M., Chu F. L. Study of the effects of cubic nonlinear damping on vibration isolations using harmonic balance method // *Int. J. Non-Linear Mech.* 2012. 47(10). P.1073–1080.
4. Rigaud E., Perret-Liaudet J. Experiments and numerical results on non-linear vibrations of an impacting Hertzian con-

tact. Part 1: harmonic excitation // *J. Sound Vib.* 2003. 265(2). P. 289–307.

5. Solovyov A. M., Semenov M. E., Meleshenko P. A., Barsukov A. I. Bouc-Wen model of hysteretic damping // *Proceedia Engineering*. 2017. Vol. 201. P. 549–555. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.605.
6. Semenov M. E., Solovyov A. M., Rukavitsyn A. G., Gorlov V. A., Meleshenko P. A. Hysteretic damper based on the Ishlinsky-Prandtl model // *MATEC Web of Conferences*. 3rd International Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis (CSNDD 2016), Marrakech, Morocco, May 2016. Vol. 83. DOI: 10.1051/mateconf/20168301008.
7. Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A., Balthazar J. M. Nonlinear Damping: From Viscous to Hysteretic Dampers // *Proceedings in Physics*. Vol. 199. Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics. Springer. P. 259–275. DOI: 10.1007/978-3-319-63937-6\_15.
8. Radons G., Zienert A. Nonlinear dynamics of complex hysteretic systems: Oscillator in a magnetic field // *The European Physical Journal Special Topics*. 2013. 222 (7). P. 1675–1684.
9. Семенов М. Е., Матвеев М. Г., Лебедев Г. Н., Соловьев А. М. Стабилизация обратного гибкого маятника с гистерезисными свойствами // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2017. № 8. С. 516–525.
10. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
11. Luongo A., D'Annibale F. Linear and Nonlinear Damping Effects on the Stability of the Ziegler Column // *Springer Proceedings in Physics*. SPPHY. 2015. Vol. 168. Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis. P. 335–352. DOI: 10.1007/978-3-319-19851-4\_16.
12. Luongo A., D'Annibale F. Nonlinear hysteretic damping effects on the post-critical behavior of the visco-elastic Beck's beam // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 22, Iss. 6. P. 1347–1365. DOI: 10.1177/1081286516632381.
13. Sandu C., Southward S., Richards R. Comparison of Linear, Nonlinear, Hysteretic, and Probabilistic Models for Magnetorheological Fluid Dampers // *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2010. Vol. 132, Iss. 6. Model Validation and Identification. DOI: 10.1115/1.4002480.

## Dynamics of a Damping Device Based on Ishlinsky Material

M. E. Semenov, mkl150@mail.ru, M. G. Matveev, mgmatveev@yandex.ru,  
P. A. Meleshenko, melechp@yandex.ru, A. M. Solovyov, darkzite@yandex.ru  
Voronezh State University, 394006, Voronezh, Russian Federation

Corresponding author: Semenov M. E., Professor of the Digital Technologies Department, Voronezh State University, 394006, Voronezh Russian Federation, e-mail: bobtsov@mail.ru

Accepted on October 29, 2018

### Abstract

*In present paper we consider the damping properties of the oscillating system with hysteretic nature. The mathematical model of considered system is based on the operator approach for the hysteretic nonlinearity on the example of Ishlinsky material. Such a converter is a continual analogue of the set of stops connected in parallel. In the frame of the paper we compare the various approaches to modeling of damping systems. Namely, together with the hysteretic damper we consider the so-called nonlinear viscous damper which is a generalization of a standard linear damper with dependence on the velocity. The mathematical model of the considered system is formulated in terms of second order ordinary differential equation with hysteretic nonlinearity (namely, the operator-type nonlinearity). In comparison with the phenomenological models of hysteresis (such as Bouc-Wen model) that are often used in the modeling, the Ishlinsky model allows to "feel" the hysteretic nature of the material on the physical level. The major result of the presented paper is the comparison both the hysteretic and viscous (including the linear and nonlinear cases) dampers. Such a comparison is made in terms of transmission functions that reflect the "efficiency" of suppression of the external perturbations by the force transmission from an external*

source to the load. The results of numerical simulations showed the high efficiency of hysteretic damper both in and outside the resonance region (at the same time it is well known that the linear viscous damper has a weak efficiency outside the resonance region). The disadvantage of the hysteretic damper lies in the fact that its ability to damp the relative motion of the system under external forces is insignificantly reduced outside the resonance region.

**Keywords:** hysteresis, Ishlinsky material, viscous damping, hysteretic damping.

**Acknowledgements:** This article was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-08-00312, no. 17-01-00251).

*For citation:*

Semenov M. E., Matveev M. G., Meleshenko P. A., Solovyov A. M. Dynamics of a Damping Device Based on Ishlinsky Material, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 106—113.

DOI: 10.17587/mau.20.106-113

## References

1. Qibao Lv, Zhiyuan Yao. Analysis of the effects of nonlinear viscous damping on vibration isolator, *Nonlinear Dynamics*, 2014, 79 (4), pp. 2325—2332.
2. Milovanovic Z., Kovacic I., Branan M. J. On the displacement transmissibility of a base excited viscously damped nonlinear vibration isolator, *Nonlinear Dynamics. J. Vib. Acoust.*, 2009, 131 (5), pp. 054502—054507.
3. Peng Z. K., Meng G., Lang Z. Q., Zhang W. M., Chu F. L. Study of the effects of cubic nonlinear damping on vibration isolations using harmonic balance method, *Int. J. Non-Linear Mech.* 2012, 47(10), pp. 1073—1080.
4. Rigaud E., Perret-Liaudet J. Experiments and numerical results on non-linear vibrations of an impacting Hertzian contact. Part 1: harmonic excitation, *J. Sound Vib.*, 2003, 265(2), pp. 289—307.
5. Solovyov A. M., Semenov M. E., Meleshenko P. A., Barsukov A. I. Bouc-Wen model of hysteretic damping, *Procedia Engineering*, 2017, vol. 201, pp. 549—555. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.605.

6. Semenov M. E., Solovyov A. M., Rukavitsyn A. G., Gorlov V. A., Meleshenko P. A. Hysteretic damper based on the Ishlinsky-Prandtl model, *MATEC Web of Conferences. 3rd International Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis (CSNDD 2016)*, Marrakech, Morocco, May 2016, vol. 83. DOI: 10.1051/mateconf/20168301008.

7. Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A., Balthazar J. M. Nonlinear Damping: From Viscous to Hysteretic Dampers, *Proceedings in Physics*, vol. 199, Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics. Springer, pp 259—275. DOI: 10.1007/978-3-319-63937-6\_15.

8. Radons G., Zienert A. Nonlinear dynamics of complex hysteretic systems: Oscillator in a magnetic field, *The European Physical Journal Special Topics*, 2013, 222 (7), pp. 1675—1684.

9. Semenov M. E., Matveev M. G., Lebedev G. N., Solovyov A. M. Stabilization of a Flexible Inverted Pendulum with the Hysteretic Properties, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 8, pp. 516—525 (in Russian).

10. Krasnosel'skij M. A., Pokrovskij A. V. *Sistemy s gisterезизмом* (Systems with hysteresis), Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).

11. Luongo A., D'Annibale F. Linear and Nonlinear Damping Effects on the Stability of the Ziegler Column, *Springer Proceedings in Physics. SPPHY*, 2015, vol. 168, Structural Nonlinear Dynamics and Diagnosis, pp. 335—352. DOI: 10.1007/978-3-319-19851-4\_16.

12. Luongo A., D'Annibale F. Nonlinear hysteretic damping effects on the post-critical behavior of the visco-elastic Beck's beam, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2016, vol. 22, iss. 6, pp. 1347—1365. DOI: 10.1177/1081286516632381.

13. Sandu C., Southward S., Richards R. Comparison of Linear, Nonlinear, Hysteretic, and Probabilistic Models for Magnetorheological Fluid Dampers, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2010, vol. 132, iss. 6, Model Validation and Identification. DOI: 10.1115/1.4002480.

3—7 июня 2019 года, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ), Санкт-Петербург, Россия

21—25 октября 2019 года, Белорусский национальный технический университет (БНТУ), Минск, Беларусь

30 октября — 1 ноября 2019 года, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Саратов, Россия

## XXXII Международная научная конференция

## "МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ — ММТТ-32"

1. Качественные и численные методы исследования дифференциальных и интегральных уравнений.
  2. Оптимизация, автоматизация и оптимальное управление технологическими процессами.
  3. Математическое моделирование технологических и социальных процессов.
  4. Математическое моделирование и оптимизация в задачах САПР, аддитивных технологий.
  5. Математические методы в задачах радиотехники, радиоэлектроники и телекоммуникаций, геоинформатики, авионики и космонавтики.
  6. Математические методы и интеллектуальные системы в робототехнике и мехатронике.
  7. Математические методы в медицине, биотехнологии и экологии.
  8. Математические методы в экономике и гуманитарных науках.
  9. Информационные и интеллектуальные технологии в технике и образовании.
  10. Математические и инструментальные методы технологий Индустрии 4.0.
  11. Обсуждение квалификационных работ.
- Школа молодых ученых — ШМУ. Конкурс УМНИК.

Подробная информация о конференции и условиях участия в ней размещена на сайте <http://mmtt.sstu.ru/>

Д. Н. Базылев, инженер, bazylevd@mail.ru, А. А. Пыркин, д-р техн. наук, доц., a.pyrkin@gmail.com,  
А. А. Бобцов, д-р техн. наук, проф., bobtsov@mail.ru,  
Университет ИТМО, Санкт-Петербург

## Адаптивный наблюдатель положения и магнитного потока для явнополюсного синхронного двигателя<sup>1</sup>

*Представлен алгоритм адаптивного оценивания магнитного потока и углового положения ротора явнополюсного синхронного двигателя с постоянными магнитами. Предложена новая нелинейная параметризация динамической модели двигателя, с помощью которой задача оценивания положения преобразуется в задачу идентификации неизвестных постоянных параметров. При синтезе алгоритма оценивания допущено, что силы тока и напряжения обмоток статора, а также частота вращения ротора являются известными сигналами. Предложено два варианта адаптивного наблюдателя на основе стандартного градиентного алгоритма оценивания и алгоритма динамического расширения регрессора. Доказано, что оба варианта наблюдателя обеспечивают глобальную экспоненциальную сходимость ошибок оценивания к нулю, если соответствующая регрессионная функция удовлетворяет условию незабывающего возбуждения. Также последняя версия наблюдателя обеспечивает глобальную асимптотическую сходимость, если регрессионная функция не является квадратично интегрируемой. Результаты численного моделирования демонстрируют, что наблюдатель с динамическим расширением регрессора обеспечивает лучшее качество переходных процессов оценивания по сравнению со стандартным градиентным устройством оценки.*

**Ключевые слова:** синхронный двигатель с постоянными магнитами, явнополюсный ротор, нелинейный наблюдатель, идентификация параметров

### Введение

Разработка наблюдателей магнитного потока и углового положения для синхронных двигателей с постоянными магнитами (СДПМ) является актуальной задачей, что подтверждается потребностью в недорогих, надежных и высокоэффективных электроприводах, которые могут быть использованы в различных технических системах.

На сегодняшний день большое число исследований посвящено синтезу наблюдателей для СДПМ с неявнополюсным ротором [1–3]. В случае же с явнополюсной синхронной машиной исследователи сталкиваются с более сложной математической моделью двигателя, так как динамические уравнения дополняются собственной и взаимной индуктивностями. Данная причина сдерживает развитие бессенсорных технологий для двигателей данного типа и сужает область их применения.

В ряде работ предложены методы с самоощущением, при которых оценки положения и скорости ротора используются для управления двигателем [4, 5]. В работе [6] наблюдатель положения дополнен идентификацией сопротивления статора и предложен алгоритм настройки его коэффициентов. Авторами работы [7] рассмотрена задача бессенсорного управления двигателем на низких скоростях с использованием оценивания противоЭДС. Представленный алгоритм управления обеспечивает некоторую робастность по отношению к неизвестным параметрам двигателя и сохраняет устойчивость для различных сценариев нагрузочного момента. В статье [8] адаптация тестовых напряжений статора к установившемуся напряжению позволяет снизить токовые искажения в регуляторе тока. Авторами работы [9] предложен комплексный подход, базирующийся на управлении с прогнозирующими моделями и бессенсорном наблюдателе с фазовой подстройкой частоты для оценивания положения ротора.

Особое внимание уделено задаче идентификации начального положения [10]. Информация о начальной ориентации постоянных магнитов требуется для плавного запуска при бессенсорном управлении двигателем. В работе [11] для идентификации начального положения при остановленном роторе применен

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (постановление Правительства Российской Федерации № 218 от 9.04.2010 г.) в рамках НИОКТР № 03.G25.31.0251 от 28.04.2017 в Университете ИТМО "Создание высокотехнологичного производства настраиваемых преобразователей частоты для нового поколения прецизионных высокоскоростных синхронных электромеханических двигателей высокой мощности".

алгоритм, позволяющий оценить пространственное распределение полюсов. Данная задача также может быть решена с использованием расширенного фильтра Калмана [12].

Авторами работы [13] проведен анализ робастных свойств по отношению к характеру распределения полюсов для нелинейного наблюдателя положения, который изначально был разработан для неявнополюсного синхронного двигателя с постоянными магнитами и предложен в статье [14]. Продemonстрировано, что робастные свойства наблюдателя полностью определяются исходя из установившихся синусоидальных сигналов тока.

В настоящей статье рассматривается аналогичная задача, относящаяся к синтезу наблюдателя положения и идентификации начального положения явнополюсного СДПМ. При этом допускается, что скорость вращения ротора является известным сигналом, который либо измеряется, либо оценивается независимо от углового положения ротора. Подобная задача может возникнуть в различных транспортных средствах (электропоездах, автомобилях) и технологическом оборудовании (конвейерах, прокатных станах, турбинах), оснащенных тахометром или спидометром.

### Постановка задачи

Рассмотрим классическую двухфазную  $\alpha\beta$  модель ненасыщенного явнополюсного СДПМ, приведенную в работах [15, 16]. В стационарной  $\alpha\beta$  системе координат модель двигателя представлена следующей системой уравнений:

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta} = R\mathbf{i}_{\alpha\beta} + \dot{\lambda}_{\alpha\beta}; \quad (1)$$

$$\lambda_{\alpha} = L_{\alpha\alpha}i_{\alpha} + L_{\alpha\beta}i_{\beta} + \lambda_m \cos n\theta; \quad (2)$$

$$\lambda_{\beta} = L_{\beta\alpha}i_{\alpha} + L_{\beta\beta}i_{\beta} + \lambda_m \sin n\theta; \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = \omega, \quad (4)$$

где  $\mathbf{i}_{\alpha\beta} \in R^2$  — силы тока статора;  $\mathbf{v}_{\alpha\beta} \in R^2$  — напряжения статора;  $\lambda_{\alpha\beta} \in R^2$  — магнитный поток ротора;  $\theta(t)$  — угол поворота ротора;  $\omega(t)$  — механическая угловая скорость вращения ротора;  $R, n, \lambda_m$  — положительные постоянные параметры, обозначающие сопротивление обмоток статора, число пар полюсов, постоянный магнитный поток, генерируемый постоянными магнитами ротора, соответственно;

$L_{\alpha\alpha}$  и  $L_{\beta\beta}$  — собственные индуктивности фаз  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно;  $L_{\alpha\beta}$  и  $L_{\beta\alpha}$  — взаимные индуктивности:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\alpha} &= L_s + L_g \cos 2n\theta; \\ L_{\beta\beta} &= L_s - L_g \cos 2n\theta; \\ L_{\alpha\beta} &= L_{\beta\alpha} = L_g \sin 2n\theta \end{aligned} \quad (5)$$

с усредненной  $L_s$  и дифференциальной  $L_g$  пространственными индуктивностями.

Допускается, что силы тока  $\mathbf{i}_{\alpha\beta}(t)$ , напряжения  $\mathbf{v}_{\alpha\beta}(t)$  и угловая скорость  $\omega(t)$  являются известными и абсолютно интегрируемыми сигналами. Известными параметрами двигателя считаются  $R, n, \lambda_m, L_s$  и  $L_g$ . Требуется синтезировать такой алгоритм адаптивного оценивания магнитного потока  $\lambda_{\alpha\beta}(t)$  и положения  $\theta(t)$  ротора, который обеспечит выполнение целевых условий:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_{\alpha\beta}(t) = 0; \quad (6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0. \quad (7)$$

### Наблюдатель магнитного потока и положения ротора

**Параметризация модели.** Проинтегрируем выражения (1) и (4) и введем в рассмотрение новые вспомогательные переменные:

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}(0) + \int_0^t (\mathbf{v}_{\alpha\beta} - R\mathbf{i}_{\alpha\beta}) d\tau = \lambda_{\alpha\beta}(0) + \xi; \quad (8)$$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega(\tau) d\tau = \theta_0 + \psi, \quad (9)$$

где  $\lambda_{\alpha\beta}(0)$  и  $\theta_0$  — неизвестные параметры;  $\xi = (\xi_1 \ \xi_2) = \int_0^t (\mathbf{v}_{\alpha\beta} - R\mathbf{i}_{\alpha\beta}) d\tau$  и  $\psi = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$  являются известными функциями.

Введем в рассмотрение новые переменные:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= \cos n\psi, & \varphi_2 &:= \sin n\psi, \\ \varphi_3 &:= \cos 2n\psi, & \varphi_4 &:= \sin 2n\psi, \\ \mu_1 &:= \cos n\theta_0, & \mu_2 &:= \sin n\theta_0, \\ \mu_3 &:= \cos 2n\theta_0, & \mu_4 &:= \sin 2n\theta_0, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\varphi_k, k = \overline{1,4}$ , — известные сигналы, а  $\mu_k, k = \overline{1,4}$ , — неизвестные параметры. Для удобства введем дополнительные обозначения

$$\eta_1 := \mu_1 = \cos n\theta_0, \quad \eta_2 := \mu_2 = \sin n\theta_0.$$

Используя тригонометрические преобразования совместно с выражениями (10), получим

$$\begin{aligned}\cos n(\psi + \theta_0) &= \varphi_1\mu_1 - \varphi_2\mu_2, \\ \sin n(\psi + \theta_0) &= \varphi_2\mu_1 + \varphi_1\mu_2, \\ \cos 2n(\psi + \theta_0) &= \varphi_3\mu_3 - \varphi_4\mu_4, \\ \sin 2n(\psi + \theta_0) &= \varphi_4\mu_3 + \varphi_3\mu_4.\end{aligned}\quad (11)$$

**Наблюдатель положения и магнитного потока ротора.** Исходя из выражения (9) можно заключить, что задача оценивания положения ротора преобразована в задачу идентификации начального положения  $\theta_0$ , которое, в свою очередь, может быть восстановлено посредством параметров  $\eta_1$  и  $\eta_2$ :

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_0 + \psi = \frac{1}{n} \arctan\left(\frac{\hat{\eta}_2}{\hat{\eta}_1}\right) + \psi. \quad (12)$$

Введем в рассмотрение ошибки оценивания положения ротора и неизвестных параметров:

$$\tilde{\theta} := \hat{\theta} - \theta, \quad \tilde{\eta} := \hat{\eta} - \eta. \quad (13)$$

Используя теорему Лагранжа и принимая во внимание свойства функции  $\arctan(\cdot)$ , можно доказать, что  $\tilde{\theta}$  и  $\tilde{\eta}$  обладают идентичными свойствами сходимости. Таким образом, выполняются следующие условия:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\eta}(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0; \quad (14)$$

$$|\tilde{\eta}(t)| \leq \rho e^{-\delta t} |\tilde{\eta}(0)| \Leftrightarrow |\tilde{\theta}(t)| \leq \rho e^{-\delta t} |\tilde{\theta}(0)| \quad (15)$$

для некоторых  $\rho \geq 1$  и  $\delta > 0$ .

Магнитный поток ротора может быть восстановлен исходя из оценок  $\hat{\eta}$ :

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_\alpha &= \hat{L}_{\alpha\alpha} i_\alpha + \hat{L}_{\alpha\beta} i_\beta + \lambda_m \hat{\eta}_1; \\ \hat{\lambda}_\beta &= \hat{L}_{\beta\alpha} i_\alpha + \hat{L}_{\beta\beta} i_\beta + \lambda_m \hat{\eta}_2,\end{aligned}\quad (16)$$

где оценки собственных и взаимных индуктивностей сформированы в виде

$$\begin{aligned}\hat{L}_{\alpha\alpha} &= L_s + L_g(1 - 2\hat{\eta}_2^2); \\ \hat{L}_{\beta\beta} &= L_s - L_g(1 - 2\hat{\eta}_2^2); \\ \hat{L}_{\alpha\beta} &= \hat{L}_{\beta\alpha} = 2L_g \hat{\eta}_1 \hat{\eta}_2.\end{aligned}\quad (17)$$

Введем в рассмотрение ошибки оценивания индуктивностей  $\tilde{L}_{\alpha\alpha} = \hat{L}_{\alpha\alpha} - L_{\alpha\alpha}$ ,  $\tilde{L}_{\beta\beta} = \hat{L}_{\beta\beta} - L_{\beta\beta}$ ,  $\tilde{L}_{\alpha\beta} = \tilde{L}_{\beta\alpha} = \hat{L}_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta}$  и магнит-

ного потока  $\tilde{\lambda}_{\alpha\beta} = \hat{\lambda}_{\alpha\beta} - \lambda_{\alpha\beta}$ . Используя выражения (17) и (13), получим

$$\begin{aligned}\tilde{L}_{\alpha\alpha} &= -2L_g(\tilde{\eta}_2 + 2\eta_2)\tilde{\eta}_2; \\ \tilde{L}_{\beta\beta} &= 2L_g(\tilde{\eta}_2 + 2\eta_2)\tilde{\eta}_2; \\ \tilde{L}_{\alpha\beta} &= 2L_g(\tilde{\eta}_1\tilde{\eta}_2 + \eta_2\tilde{\eta}_1 + \eta_1\tilde{\eta}_2).\end{aligned}\quad (18)$$

На основании соотношений (18) можно заключить, что свойства сходимости ошибок  $\tilde{L}_{\alpha\alpha}$ ,  $\tilde{L}_{\beta\beta}$ ,  $\tilde{L}_{\alpha\beta}$  и  $\tilde{\eta}$  идентичны. Учитывая последнее, легко показать, что пара  $\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}$  и  $\tilde{\eta}$  также обладает одинаковыми свойствами сходимости:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\eta}(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_{\alpha\beta}(t) = 0; \quad (19)$$

$$|\tilde{\eta}(t)| \leq \rho e^{-\delta t} |\tilde{\eta}(0)| \Leftrightarrow |\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}(t)| \leq \rho e^{-\delta t} |\tilde{\lambda}_{\alpha\beta}(0)|. \quad (20)$$

Выполним следующие математические преобразования: заменим собственные и взаимные индуктивности в уравнениях (2) и (3) на соотношения (5), а также используем выражения (11) и (8). В результате имеем:

$$\begin{aligned}\lambda_\alpha(0) + g_1 &= \mu_3 L_g(\varphi_3 i_\alpha + \varphi_4 i_\beta) + \\ &+ \mu_4 L_g(\varphi_3 i_\beta - \varphi_4 i_\alpha) + \lambda_m(\varphi_1 \mu_1 - \varphi_2 \mu_2); \end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}\lambda_\beta(0) + g_2 &= -\mu_3 L_g(\varphi_3 i_\beta - \varphi_4 i_\alpha) + \\ &+ \mu_4 L_g(\varphi_4 i_\beta + \varphi_3 i_\alpha) + \lambda_m(\varphi_2 \mu_1 + \varphi_1 \mu_2), \end{aligned}\quad (22)$$

где два новых известных сигнала обозначены  $g_1 := \xi_1 - L_s i_\alpha$  и  $g_2 := \xi_2 - L_s i_\beta$

Применяя к последнему уравнению фильтр  $F(p) = \frac{\alpha p}{p + \alpha}$  с дифференциальным оператором  $p = \frac{d}{dt}$  и настраиваемым параметром  $\alpha > 0$ , получим

$$\bar{g}_1 = \mu_3 \zeta_1 + \mu_4 \zeta_2 + \mu_1 \zeta_3 - \mu_2 \zeta_4; \quad (23)$$

$$\bar{g}_2 = -\mu_3 \zeta_2 + \mu_4 \zeta_1 + \mu_1 \zeta_4 + \mu_2 \zeta_3, \quad (24)$$

где постоянные  $\mu_k$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , вынесены за обозначение фильтра и использованы обозначения

$$\begin{aligned}\bar{g}_1 &:= \frac{\alpha p}{p + \alpha} [g_1]; \quad \bar{g}_2 := \frac{\alpha p}{p + \alpha} [g_2]; \\ \zeta_1 &:= \frac{\alpha p}{p + \alpha} [L_g(\varphi_3 i_\alpha + \varphi_4 i_\beta)]; \\ \zeta_2 &:= \frac{\alpha p}{p + \alpha} [L_g(\varphi_3 i_\beta - \varphi_4 i_\alpha)]; \\ \zeta_3 &:= \frac{\alpha p}{p + \alpha} [\lambda_m \varphi_1]; \quad \zeta_4 := \frac{\alpha p}{p + \alpha} [\lambda_m \varphi_2],\end{aligned}\quad (25)$$

а также пренебрегается экспоненциально затухающими компонентами, полученными фильтрацией постоянных параметров  $\lambda_\alpha(0)$  и  $\lambda_\beta(0)$ . В Лемме 1 работы [17] показано, что данное пренебрежение не оказывает влияния на свойство асимптотической сходимости наблюдателя.

С использованием соотношений

$$\mu_3 = \cos 2n\theta = 1 - 2\mu_2^2, \quad \mu_4 = \sin 2n\theta = 2\mu_1\mu_2$$

и обозначений новых сигналов

$$\begin{aligned} g_3 &:= \bar{g}_1 - \zeta_1; \quad g_4 := \bar{g}_2 + \zeta_2; \\ g_5 &:= \zeta_3 + 2\mu_2\zeta_2; \quad g_6 := \zeta_4 + 2\mu_2\zeta_1 \end{aligned} \quad (26)$$

уравнения (23) и (24) могут быть представлены в виде

$$g_3 = \mu_1 g_5 - \mu_2 g_6; \quad (27)$$

$$g_4 = \mu_1 g_6 + \mu_2 g_5. \quad (28)$$

Домножим выражения (27) и (28) на  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно и просуммируем полученные уравнения. В результате, используя тригонометрическое свойство  $\mu_1^2 + \mu_2^2 = 1$ , получим стандартную линейную регрессионную модель

$$g_5 = \mu_1 g_3 + \mu_2 g_4. \quad (29)$$

Последнее может быть представлено в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{q}^T \boldsymbol{\eta}, \quad (30)$$

где

$$\mathbf{y} := g_5, \quad \mathbf{q}^T := (g_3 \ g_4), \quad \boldsymbol{\eta} := (\mu_1 \ \mu_2)^T. \quad (31)$$

Идентификация неизвестных параметров в уравнении (30) может быть проведена несколькими способами [18]. В данном разделе используются два метода: широко известный стандартный алгоритм градиентного спуска и алгоритм динамического расширения регрессора (ДРР), недавно предложенный в работе [19].

**Градиентный алгоритм оценивания.** Применим для оценки неизвестных параметров  $\boldsymbol{\eta}$  стандартный градиентный алгоритм оценивания

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{G} \mathbf{q} (\mathbf{y} - \mathbf{q}^T \hat{\boldsymbol{\eta}}), \quad (32)$$

где  $\mathbf{G} = \mathbf{\Gamma}^T > 0$  — настраиваемый параметр адаптации.

Свойства сходимости полученного наблюдателя положения ротора устанавливаются следующим утверждением.

**Утверждение 1.** Рассмотрим модель явнополюсного СДПМ, описываемую уравнениями (1)–(5). Адаптивный наблюдатель положения и магнитного потока ротора, который задается соотношениями (12), (16), (25), (26), (31) со стандартным градиентным алгоритмом оценивания (32), обеспечивает глобальную экспоненциальную сходимость ошибки оценивания положения ротора к нулю тогда и только тогда, когда регрессионная функция  $\mathbf{q}$  удовлетворяет условию незатухающего возбуждения.

Для доказательства утверждения запишем уравнение (30) с учетом (31) и рассмотрим модель ошибки

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\eta}}} = -\mathbf{G} \mathbf{q} \mathbf{q}^T \tilde{\boldsymbol{\eta}}. \quad (33)$$

Как хорошо известно [18], нулевое положение равновесия модели (33) является глобально экспоненциально устойчивым тогда и только тогда, когда  $\mathbf{q}$  удовлетворяет условию незатухающего возбуждения.

Уравнения (15) и (20) доказывают Утверждение 1.

**Алгоритм оценивания на основе процедуры динамического расширения регрессора.** Для формирования наблюдателя с использованием процедуры ДРР [19] применим динамический оператор  $\frac{\beta}{p + \beta}$  с настраиваемым параметром  $\beta > 0$  к исходной регрессионной модели (30). В результате получим новую регрессионную модель

$$\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\eta}, \quad (34)$$

где

$$\bar{\mathbf{y}} := \frac{\beta}{p + \beta} [\mathbf{y}], \quad \bar{\mathbf{q}} := \frac{\beta}{p + \beta} [\mathbf{q}]. \quad (35)$$

Сформируем на основе исходной регрессионной модели (30) и новой фильтрованной регрессионной модели (34) расширенную регрессионную модель

$$\mathbf{Y}_e = \mathbf{Q}_e \boldsymbol{\eta}, \quad (36)$$

$$\text{где } \mathbf{Y}_e := \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \bar{\mathbf{y}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_e := \begin{bmatrix} \mathbf{q} & \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix}.$$

Домножив слева обе части уравнения (36) на союзную матрицу  $\text{adj}\{\mathbf{Q}_e\} = \begin{bmatrix} \bar{q}_2 & -q_2 \\ -\bar{q}_1 & q_1 \end{bmatrix}$ , получим

$$\chi = \Phi \eta, \quad (37)$$

где введены обозначения

$$\chi := \begin{bmatrix} \bar{q}_2 y - q_2 \bar{y} \\ q_1 \bar{y} - \bar{q}_1 y \end{bmatrix}, \quad \Phi := \bar{q}_2 q_1 - q_2 \bar{q}_1. \quad (38)$$

Уравнение (37) представляет собой две раздельных скалярных линейных регрессионных модели, по одной на каждый неизвестный параметр  $\eta_1$  и  $\eta_2$ , вместо одной двумерной регрессионной модели (30), сочетающей в себе оба неизвестных параметра.

Последним шагом в процедуре ДРР является формирование скалярных устройств оценки

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\eta}}_1 &= \gamma_1 \Phi (\chi_1 - \Phi \hat{\eta}_1); \\ \dot{\hat{\eta}}_2 &= \gamma_2 \Phi (\chi_2 - \Phi \hat{\eta}_2), \end{aligned} \quad (39)$$

где  $\gamma_1 > 0$  и  $\gamma_2 > 0$  — параметры адаптации.

**Утверждение 2.** Рассмотрим модель явнополюсного СДПМ, описываемую уравнениями (1)–(5). Адаптивный наблюдатель положения и магнитного потока ротора, который задается соотношениями (12), (16), (25), (26), (31) с устройством оценивания на основе ДРР алгоритма (35), (38), (39), обеспечивает глобальную асимптотическую сходимость ошибки оценивания положения ротора к нулю тогда и только тогда, когда регрессионная функция  $\Phi$  не является квадратично интегрируемой. Если  $\Phi$  удовлетворяет условию незатухающего возбуждения, то сходимость является экспоненциальной.

Для доказательства рассмотрим модель ошибки устройства оценки с ДРР алгоритмом, которая может быть получена подстановкой уравнения (37) в соотношение (39):

$$\dot{\tilde{\eta}}_k = -\gamma_k \Phi^2 \tilde{\eta}_k, \quad k = 1, 2.$$

Из решения последнего дифференциального уравнения следует

$$\Phi(t) \notin L_2 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\eta}(t) = 0. \quad (40)$$

Уравнение (40) совместно с (14) и (19) доказывает первую часть Утверждения 2.

Доказательством второй части Утверждения является факт, что если регрессор  $\Phi(t)$  удовлет-

воряет условию неисчезающего возбуждения (persistent excitation, далее PE), то ошибка оценивания  $\tilde{\eta}(t)$  сходится к нулю экспоненциально. Если существуют некоторые положительные константы  $\alpha$  и  $T$ , что для всех моментов времени  $t > 0$  справедливо

$$\int_t^{t+T} \Phi(s) \Phi^T(s) ds > \alpha I,$$

то

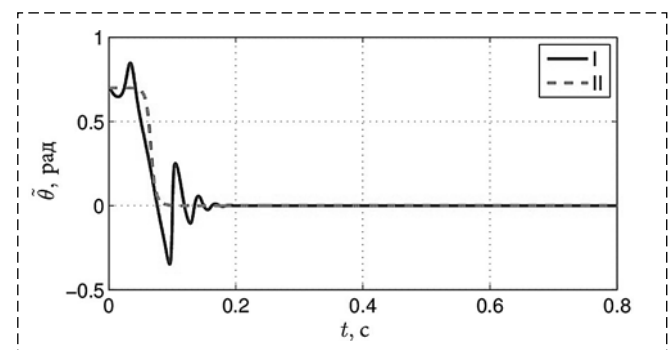
$$|\tilde{\eta}(t)| \leq \rho e^{-\delta t} |\tilde{\eta}(0)|$$

с некоторыми  $\rho \geq 1$  и  $\delta > 0$ , в совокупности с соотношениями (15) и (20).

## Результаты моделирования

В численном моделировании использован явнополюсный синхронный двигатель с постоянными магнитами из работы [20]. Параметры двигателя следующие: номинальная мощность 2,2 кВт, номинальная скорость вращения 1500 мин<sup>-1</sup>, число пар полюсов  $n = 3$ , индуктивности  $L_d = 36$  мГн,  $L_q = 51$  мГн, сопротивление статора  $R = 3,59$  Ом, момент инерции  $J = 0,015$  кг·м<sup>2</sup>, постоянный магнитный поток  $\lambda_m = 0,545$  Вб.

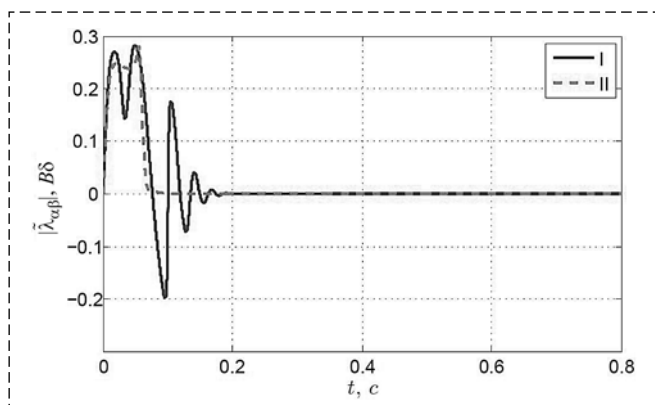
Управление двигателем осуществляется стандартным методом векторного управления [21], который включает в себя пропорционально-интегральные (ПИ) регуляторы тока статора и скорости ротора со следующими коэффициентами:  $K_p = 35$ ,  $K_i = 287$  для регулятора тока и  $K_{\omega p} = 3$ ,  $K_{\omega i} = 79$  для регулятора



**Рис. 3. Переходные процессы ошибки оценивания положения ротора  $\tilde{\theta}$ :**

I — наблюдатель положения с градиентным алгоритмом; II — наблюдатель положения с ДРР алгоритмом

**Fig. 3 — Transients for estimation error of the rotor position  $\tilde{\theta}$ :**  
I — position observer with gradient-based algorithm, II — position observer with DREM procedure



**Рис. 4. Переходные процессы ошибки оценивания модуля магнитного потока ротора  $|\hat{\lambda}_{\alpha\beta}|$ :**

I — наблюдатель положения с градиентным алгоритмом; II — наблюдатель положения с ДРП алгоритмом

**Fig. 4. Transients for estimation error of the rotor flux modulus  $|\hat{\lambda}_{\alpha\beta}|$ :**

I — position observer with gradient-based algorithm, II — position observer with DREM procedure

скорости. Начальная заданная скорость равна нулю, затем до 0,3 с линейно возрастает до номинального значения, после чего остается постоянной. Нагрузочный момент равен нулю в начальный момент времени,  $\tau_L = 14$  Н·м начиная с 0,4 с и  $\tau_L = 14$  Н·м при 0,7 с.

Начальные условия  $\theta_0 = 0,5$  рад,  $\hat{\theta}(0) = -0,2$  рад,  $\eta_1(0) = 0,83$ ,  $\eta_2(0) = -0,57$ . Настраиваемые параметры наблюдателей принимают значения  $\Gamma = \mathbf{I}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ,  $\alpha = 60$ ,  $\beta = 200$ . Как показано на рис. 1, 2 (см. вторую сторону обложки) и рис. 3, 4, переходные процессы для наблюдателя с градиентным алгоритмом характеризуются более высокой колебательностью, чем в наблюдателе с ДРП алгоритмом. Применение дополнительного динамического оператора (фильтра) в ДРП наблюдателе не только увеличивает скорость сходимости оценок к нулю, но и позволяет получить монотонные переходные процессы в рассматриваемых сценариях работы двигателя.

### Заключение

В данной работе рассмотрена задача адаптивного оценивания магнитного потока и углового положения ротора явнополюсного синхронного двигателя с постоянными магнитами. Представлен новый подход, который позволяет преобразовать задачу оценивания положения и магнитного потока ротора в другую — задачу идентификации двух не-

известных параметров. Для решения последнего предложены две версии наблюдателя: 1) использующую стандартный градиентный алгоритм оценки и 2) применяющую алгоритм динамического расширения регрессора. Было доказано, что оба решения обеспечивают глобальную экспоненциальную сходимость ошибок оценивания к нулю, если регрессионная функция удовлетворяет условию незатухающего возбуждения. Преимущество использования второго решения заключается в ослаблении строгого условия незатухающего возбуждения, накладываемого на регрессор, — наблюдатель с динамическим расширением регрессора обеспечивает глобальную асимптотическую сходимость, если регрессионная функция не является квадратично интегрируемой. Как показывают результаты численного моделирования, по сравнению со стандартным градиентным устройством оценивания применение процедуры динамического регрессора позволяет получить меньшую колебательность переходных процессов и более высокое быстродействие.

### Список литературы

1. Foo G., Rahman M. F. Sensorless vector control of interior permanent magnet synchronous motor drives at very low speed without signal injection // IET Elect. Power Appl., March 2010. Vol. 4, N. 3. P. 131–139.
2. Nam K. AC motor control and electric vehicle applications. CRC Press, 2010.
3. Xiao D., Rahman M. Sensorless direct torque control and flux controlled IPM synchronous machine fed by matrix converter over a wide speed range // IEEE Trans. on Ind. Informat. 2013. Vol. 9, N. 4. P. 1855–1867.
4. Kim S. Y. and Ha I. J. A new observer design method for hf signal injection sensorless control of ipmsms // IEEE Trans. on Industrial Electronics. 2008. Vol. 55, N. 6. P. 2525–2529.
5. Базылев Д. Н., Пыркин А. А., Бобцов А. А. Алгоритм адаптивного бессенсорного управления синхронным двигателем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2018. Т. 18, № 1(113). С. 24–31.
6. Hinkkanen M., Tuovinen T., Harnefors L., Luomi J. A combined position and stator-resistance observer for salient pmsm drives: design and stability analysis // IEEE Trans. on Power Electronics. 2012. Vol. 27, N. 2. P. 601–609.
7. Wang Z., Lu K., Blaabjerg F. A simple startup strategy based on current regulation for backemf-based sensorless control of pmsm // IEEE Trans. On Power Electronics. 2012. Vol. 27, N. 2. P. 3817–3825.
8. Belie F. D., Sergeant P., Melkebeek J. A sensorless drive by applying test pulses without affecting the average-current samples // IEEE Trans. on Power Electronics. 2010. Vol. 25, N. 4. P. 875–888.
9. Preindl M., Scholtz E. Sensorless model predictive direct current control using novel secondorder pll observer for pmsm drive systems // IEEE Trans. on Industrial Electronics. 2011. Vol. 58, N. 9. P. 4087–4095.

10. **Raca D., Garca P., Reigosa D., Briz F., Lorenz R.** Carrier-signal selection for sensorless control of pm synchronous machines at zero and very low speeds // *IEEE Trans. on Industry Applications*. 2010. Vol. 46, N. 1. P. 167–178.
11. **Kim H., Huh K. K., Lorenz R., Jahns T.** A novel method for initial rotor position estimation for ipm synchronous machine drives // *IEEE Trans. on Industry Applications*. 2004. Vol. 40, N. 5. P. 1369–1378.
12. **Boussak M.** Implementation and experimental investigation of sensorless speed control with initial rotor position estimation for interior permanent magnet synchronous motor drive // *IEEE Trans. on Power Electronics*. 2005. Vol. 20, N. 6. P. 1413–1422.
13. **Pillai H., Ortega R., Hernandez M., Devos T.** Robustness analysis of position observers for permanent magnet synchronous motors vis-a-vis rotor saliency // *Proc. of the 3rd International Electric Drives Production Conference (EDPC)*. 2013. N. 13998908.
14. **Ortega R., Praly L., Astol A., Lee J., Nam K.** Estimation of rotor position and speed of permanent magnet synchronous motors with guaranteed stability // *IEEE Transaction on Control Systems Technology*. 2013. V. 19, N. 3. P. 601–614.
15. **Chiasson J.** Modeling and High Performance Control of AC Drives. Wiley, 2005.
16. **Krause P. C.** Analysis of electric machinery. New York: McGraw Hill, 1986. P. 564.
17. **Aranovskiy S., Bobtsov A. A., Pyrkin A. A., Ortega R., Chaillet A.** Flux and position observer of permanent magnet synchronous motors with relaxed persistency of excitation conditions // *IFAC-PapersOnLine*. 2015. Vol. 48, N. 11. P. 301–306.
18. **Sastry S., Bodson M.** Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1989.
19. **Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.** Improved Transients in Multiple Frequencies Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing // *12th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*. 2016. Vol. 49, N. 13. P. 99–104.
20. **Piippo A., Hinkkanen M., Luomi J.** Adaptation of motor parameters in sensorless pmsm drives // *IEEE Trans. Ind. Appl.* 2009. Vol. 45, N. 1. P. 203–212.
21. **Nam K.** AC motor control and electric vehicle applications // CRC Press. 2010. P. 435.

## Adaptive Observer of Rotor Position and Flux for Salient Synchronous Motor

**D. N. Bazylev**, bazylevd@mail.ru, **A. A. Pyrkin**, a.pyrkin@gmail.com

**A. A. Bobtsov**, bobtsov@mail.ru,

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russian Federation

*Corresponding author: Bobtsov Aleksey A., D. Sc., Director, Professor, ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russian Federation, e-mail: bobtsov@mail.ru*

*Accepted on September 25, 2018*

### Abstract

*An algorithm of adaptive estimation of rotor flux and angular position for the salient synchronous motor with permanent magnets is presented. A new nonlinear parameterization of the dynamic motor model is proposed. Due to this parameterization the problem of position estimation is translated to the task of identification of unknown constant parameters. During the synthesis of estimation algorithm the currents and voltages of the stator windings, as well as the rotor speed, are assumed to be known signals. Two variants of the adaptive observer based on the standard gradient estimator and the algorithm of the dynamic extension of the regressor are proposed. It is proved that the both versions of the observer provide global exponential convergence of estimation errors to zero if the corresponding regression function satisfies the persistent excitation condition. Also, the latter version of the observer provides global asymptotic convergence if the regression function is square integrable. The results of numerical simulation demonstrate that the algorithm with the dynamic extension of the regressor provides a better quality of estimation transient processes in comparison with the standard gradient estimator.*

**Keywords:** synchronous motor with permanent magnets, salient rotor, nonlinear observer, parameter identification

**Aknowledgements.** This work was supported by the RF Ministry of Education and Science (RF Government resolution 218, April 9, 2010. (R&D project 03.G25.31.0251 dated April 28, 2017 at ITMO University "Creation of high-tech production of configurable frequency converters for new generation of synchronous precision high-speed high-power electromechanical drives").

For citation:

**Bazylev D. N., Pyrkin A. A., Bobtsov A. A.** Adaptive Observer of Rotor Position and Flux for Salient Synchronous Motor, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 114–121.

DOI: 10.17587/mau.20.114-121

### References

1. **Foo G., Rahman M. F.** Sensorless vector control of interior permanent magnet synchronous motor drives at very low speed without signal injection, *IET Elect. Power Appl.*, March 2010, vol. 4, no. 3, pp. 131–139.
2. **Nam K.** AC motor control and electric vehicle applications, CRC Press, 2010.
3. **Xiao D., Rahman M.** Sensorless direct torque control and flux controlled IPM synchronous machine fed by matrix converter over a wide speed range, *IEEE Trans. on Ind. Informat.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 1855–1867.
4. **Kim S. Y., Ha I. J.** A new observer design method for hf signal injection sensorless control of ipmsms, *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 2008, vol. 55, no. 6, pp. 2525–2529.
5. **Bazylev D. N., Pyrkin A. A., Bobtsov A. A.** Algoritim adaptivnogo bessensornogo upravleniâ sinhronnym dvigatelem (Algorithm for adaptive sensorless control of synchronous motors), *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2018, vol. 18, no. 1, pp. 24–31 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2018-18-1-24-31
6. **Hinkkanen M., Tuovinen T., Harnefors L., Luomi, J.** A combined position and stator-resistance observer for salient pmsm drives: design and stability analysis, *IEEE Trans. on Power Electronics*, 2012, vol.27, no. 2, pp. 601–609.

7. Wang Z., Lu K., Blaabjerg F. A simple startup strategy based on current regulation for backemf-based sensorless control of pmsm, *IEEE Trans. On Power Electronics*, 2012, vol. 27, no. 2, pp. 3817–3825.
8. Belie F. D., Sergeant P., Melkebeek J. A sensorless drive by applying test pulses without affecting the average-current samples, *IEEE Trans. on Power Electronics*, 2010, vol. 25, no. 4, pp. 875–888.
9. Preindl M., Schaltz E. Sensorless model predictive direct current control using novel secondorder pll observer for pmsm drive systems, *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 2011, vol. 58, no. 9, pp. 4087–4095.
10. Raca D., Garca P., Reigosa D., Briz F., Lorenz R. Carrier-signal selection for sensorless control of pm synchronous machines at zero and very low speeds, *IEEE Trans. on Industry Applications*, 2010, vol. 46, no. 1, pp. 167–178.
11. Kim H., Huh K. K., Lorenz R., Jahns T. A novel method for initial rotor position estimation for ipm synchronous machine drives, *IEEE Trans. on Industry Applications*, 2004, vol. 40, no. 5, pp. 1369–1378.
12. Boussak M. Implementation and experimental investigation of sensorless speed control with initial rotor position estimation for interior permanent magnet synchronous motor drive, *IEEE Trans. on Power Electronics*, 2005, vol. 20, no. 6, pp. 1413–1422.
13. Pillai H., Ortega R., Hernandez M., Devos T. Robustness analysis of position observers for permanent magnet synchronous

motors vis-a-vis rotor saliency, *Proc. of the 3rd International Electric Drives Production Conference (EDPC)*, 2013, no. 13998908.

14. Ortega R., Praly L., Astol A., Lee J., am, K. Estimation of rotor position and speed of permanent magnet synchronous motors with guaranteed stability, *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 2013, vol. 19, no. 3, pp. 601–614.

15. Chiasson J. Modeling and High Performance Control of AC Drives, Wiley, 2005.

16. Krause P. C. Analysis of electric machinery, New York, McGraw Hill, 1986, 564 p.

17. Aranovskiy S., Bobtsov A. A., Pyrkin A. A., Ortega R., Chaillet A. Flux and position observer of permanent magnet synchronous motors with relaxed persistency of excitation conditions, *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, no. 11, pp. 301–306.

18. Sastry S., Bodson M. Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1989.

19. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Improved Transients in Multiple Frequencies Estimation via Dynamic Regressor Extension and Mixing, 12th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, 2016, vol. 49, no. 13, pp. 99–104.

20. Piippo A., Hinkkanen M., Luomi J. Adaptation of motor parameters in sensorless pmsm drives, *IEEE Trans. Ind. Appl.*, 2009, vol. 45, no. 1, pp. 203–212.

21. Nam K. AC motor control and electric vehicle applications, CRC Press, 2010, 435 p.

## ГЛАВНОЕ СОБЫТИЕ В ОБЛАСТИ ПРИБОРОСТРОЕНИЯ, ТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ, МЕТРОЛОГИИ И ИСПЫТАНИЙ

МОСКОВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ИННОВАЦИОННЫЙ ФОРУМ

## ТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ – ОСНОВА КАЧЕСТВА И БЕЗОПАСНОСТИ

Москва, 15-17 мая 2019 года  
ВДНХ, Павильон №75

ОРГАНИЗАТОРЫ:

 МИНПРОМТОРГ  
РОССИИ

 РОССТАНДАРТ

ВЫСТАВОЧНЫЕ РАЗДЕЛЫ

 **METROEXPO**  
МЕТРОЛОГИЯ, ИЗМЕРЕНИЯ И ИСПЫТАНИЯ

 **CONTROL&DIAGNOSTIC**  
КОНТРОЛЬ И ДИАГНОСТИКА

 **LABTEST**  
ЛАБОРАТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ

 **PROMAUTOMATIC**  
ПРОМЫШЛЕННАЯ АВТОМАТИЗАЦИЯ

 **RESMETERING**  
УЧЁТ ЭНЕРГОРЕСУРСОВ

 **WEIGHT SALON**  
ВЕСОВОЙ САЛОН



ЦИФРЫ И ФАКТЫ 2018 года:

Участники – 296 компаний из 24 стран мира

Посетители – 5046 специалистов из 63 регионов России

Площадь экспозиции – 6870 м<sup>2</sup>

ДИРЕКЦИЯ ФОРУМА

Тел./Факс: +7 (495) 937-40-23

E-mail: metrol@expoprom.ru

Спешите забронировать стенд [www.metrol.expoprom.ru](http://www.metrol.expoprom.ru)

**Б. Е. Федунов**, д-р техн. наук, проф., нач. сектора, boris\_fed@gosniias.ru,  
ФГУП ГосНИИАС,

**А. В. Бойцов**, студент, **И. С. Гиндзе**, студент, **Т. Е. Кондратова**, студент,  
**М. А. Семенова**, студент, **С. А. Шатковская**, студент,  
МАИ (технический университет)

## Моделирование использования бортовых интеллектуальных систем тактического уровня в аварийной посадке пассажирского самолета на реку Нева (август 1963 г.)

*Бортовые интеллектуальные системы тактического уровня (БИС ТУ) в процессе полета самолета решают задачи оперативного целеполагания и конструирования способа достижения оперативно назначенной цели полета. Задачу оперативного целеполагания решают интеллектуальная информационная система "Ситуационная осведомленность экипажа" (ИИС СОЭ) и бортовая оперативно советующая экспертная система "Оперативное целеполагание" (БОСЭС-целеполагание). Среди обнаруженных потенциальных угроз ИИС СОЭ выделяет непосредственные угрозы (НУГ) выполнению текущего этапа полета (коллизия "Текущий этап полета — возникшая НУГ"). Наиболее приоритетная НУГ передается в БОСЭС-целеполагание, которая рекомендует экипажу текущую цель полета. Если экипаж принимает эту рекомендацию, то включается соответствующая бортовая оперативно советующая экспертная система "Конструирование способа достижения этой цели полета" (БОСЭС ТС "Назначенная цель полета"). Найденный способ рекомендуется экипажу для реализации. Если назначенная цель была проработана в полетном задании, то рекомендуется заранее подготовленный способ ее достижения.*

*Проиллюстрирована работа БИС-ТУ в условиях полета пассажирского самолета Ту-124, который в августе 1963 г. был вынужден совершить аварийную посадку на р. Нева в центре Ленинграда. Для условно оснащенного БИС ТУ и необходимыми для их работы измерительными системами самолета опишем роль и результат работы БИС ТУ в возникших в полете коллизиях.*

**Ключевые слова:** коллизия, непосредственные угрозы, точки невозврата, бортовая оперативно советующая экспертная система "Оперативное целеполагание", бортовые оперативно советующие экспертные системы типовых ситуаций полета, рекомендации экипажу

### Введение

Рассматривается работа бортовых интеллектуальных систем тактического уровня (БИС ТУ) на примере полета в 1963 г. пассажирского самолета Ту-124, с которым произошла нештатная ситуация [1].

Новый (на то время) пассажирский лайнер Ту-124 компании "Аэрофлот" 21 августа 1963 г. совершал регулярный рейс по маршруту Таллин — Москва. Командиром воздушного судна был Виктор Яковлевич Мостовой. Самолет вылетел из аэропорта Юлемисте в 08:55 и взял курс на аэропорт "Внуково".

Спустя некоторое время после взлета экипаж обнаружил, что переднюю стойку шасси заклинило в полуубранном положении. По-

садка в аэропорту Таллина была невозможна из-за тумана, и диспетчеры приняли решение не направлять самолет в Москву, а посадить на ближайшем аэродроме "Пулково" в Ленинграде (аэродром А-Л № 2). Самолет последовал к месту назначения на малой высоте.

К 11:00 лайнер оказался около города и начал облетать его на высоте около 500 м, вырабатывая топливо для того, чтобы уменьшить вероятность и силу возможного пожара при посадке. Малая высота была выбрана во избежание возможной декомпрессии, а также для более быстрой выработки топлива. В это же время экипаж пытался с помощью шеста через пробитую в полу дыру полностью выпустить шасси.

В 12:10 на восьмом круге, в 21 км от аэропорта, когда согласно показаниям топливо-

мера топлива оставалось около 750 л (по другим данным — 2,5 т), достаточное количество, чтобы долететь до "Пулково", остановился левый двигатель (по другой версии — топливо не поступало в двигатель). Экипажу было дано разрешение на сквозной пролет через город. Однако через короткое время остановился и второй двигатель. Таким образом, лайнер начал планировать с полукilометровой высоты над центром города. Экипажу ничего не оставалось, как попытаться совершить приводнение на поверхность Невы. Командир передал управление второму пилоту Василию Григорьевичу Чеченеву, служившему в прошлом в морской авиации и имевшему опыт посадки на воду.

Второй пилот перед приводнением грамотно сориентировал самолет и не допустил ни его занывиривания в воду, ни удара хвостовой частью фюзеляжа.

Самолет, снижаясь, пролетел над домом № 6 по Малоохтинскому проспекту, затем пролетел на 4 м выше моста Александра Невского (в то время — строящегося) и приводнился в районе Финляндского железнодорожного моста. Посадка на воду была совершена между мостом Александра Невского и железнодорожным мостом, напротив Александро-Невской лавры (на левом берегу) и улицы Таллинской (на правом берегу Невы). Ширина реки в этом месте — около 400 м.

Проходивший в тот момент паровой буксир оттянул самолет к правому берегу Невы. Для крепления буксировочного троса было разбито стекло в носовой части самолета. Пассажиры были эвакуированы и отправлены в Москву.

### **1. Бортовые интеллектуальные системы тактического уровня, которые могли бы оказать интеллектуальную поддержку экипажу в августовском полете 1963 г.**

Для определения состава БИС ТУ, которые могли бы оказать интеллектуальную поддержку экипажу ТУ-124, представим формализацию этого полета, используя концептуальную модель "Этап" [2].

Выделим возникшие в этом полете коллизии "Текущий этап полета (типовая ситуация (ТС)) — непосредственная угроза его выполнению", при возникновении каждой из которых включаются в работу:

- интеллектуальная информационная система "Ситуационная осведомленность экипажа (ИИС СОЭ)", выделяющая среди обнаруженных потенциальных угроз непосредственные угрозы (НУГ) [3] и
- бортовая оперативно советующая экспертная система "Оперативное целеполагание" (БОСЭС-целеполагание), рекомендующая экипажу текущую цель полета. БОСЭС-целеполагание работает в трех режимах, зависящих от выполняемого этапа полета и от удаленности НУГ от ее точки невозврата [4—6]

При принятии экипажем рекомендации БОСЭС-целеполагание по текущей цели полета как реакции на возникшую коллизию включается в работу соответствующая бортовая оперативно советующая экспертная система назначенной типовой ситуации/текущей цели полета (БОСЭС ТС) [7—9].

### **2. Взаимодействие систем тактического уровня и экипажа в процессе выполнения августовского полета 1963 г.**

Опишем работу БИС ТУ на всех этапах этого полета. Рекомендации, которые будут выработать БОСЭС-целеполагание и БОСЭС ТС, будем показывать на изображении многофункционального индикатора гипотетического информационно управляющего поля (ИУП) пассажирского самолета, которое взято из сети Интернет. Форма предъявления рекомендаций произвольная. Форма показа рекомендаций претендует только на смысловое содержание, которое нужно донести до экипажа. В реальности они должны быть более краткими, а источник их скорее должен обозначаться не словами, а цветом, как это принято уже сегодня.

2.1. При выполнении запланированного полета (полетное задание) в типовой ситуации полета ТС "Маршрут" экипаж самолета и ИИС СОЭ обнаружили *коллизию "ТС "Маршрут" — Угроза: не полностью убрана передняя стойка шасси"*.

БОСЭС-целеполагание, учитывая, что возврат самолета на аэродром вылета невозможен (туман), рекомендовала экипажу идти на аэродром Ленинграда (теперь Санкт-Петербург, аэродром А-Л № 2), где есть пригодная для аварийной посадки грунтовая полоса (рекомендуемая текущая цель полета). Такая же



**Рис. 2. Коллизия "ТС "Уход на заданный аэродром" — Угроза "Отказ правого двигателя":**

*a* — выявленная ИИС СОЭ непосредственная угроза; *б* — рекомендуемая БОСЭС-целеполагание текущая цель полета

**Fig. 2. The collision "TS " The leaving on the set airdrome" — Threat" The right engine failure":**

*a* — revealed IIS SOE direct threat; *б* — recommended BOSES — goal-setting "The current purpose of flight"

рекомендация поступила на борт самолета от диспетчера.

Экипаж принял рекомендацию, активизировав тем самым БОСЭС ТС "Маршрутный полет в заданную точку (А-Л № 2)", которая рекомендовала экипажу способ достижения этой точки: маршрут полета с учетом облета запретных зон и атмосферных угроз. На этом этапе полета экипаж самостоятельно принял решение механическим путем выпустить переднюю стойку шасси, попытавшись тем самым сохранить возможность выполнения полетного задания. Попытка была неудачной (в БОСЭС-целеполагание постоянно поступал сигнал "Не полностью убрана передняя стойка"), что вынудило экипаж полностью отказаться от выполнения полетного задания.

Экипаж оперативно составил и принял новый план полета: ТС "Полет до Ленинграда", ТС "Выработка "лишнего" топлива", ТС "Посадка на грунтовую полосу аэродрома А-Л № 2", ТС "Эвакуация пассажиров из самолета" и перешел к выполнению ТС "Полет до Ленинграда".

2.2. При подлете к Ленинграду БОСЭС-целеполагание, сравнив имеющийся остаток топлива с допустимым для посадки, рекомендовала экипажу текущую цель полета ТС "Выработка топлива". Экипаж принял рекомендацию, активизировав БОСЭС ТС "Выработка топлива перед посадкой".

Эта БОСЭС ТС рекомендовала экипажу траекторию выработки топлива, высотный эшелон и скорость полета, которые и начал реализовывать экипаж.

2.3. Во время этапа "Выработка топлива" система ИИС СОЭ выявила НУГ "Отказ левого двигателя" (рис. 1, *a*, см. третью сторону обложки) и передала ее в БОСЭС-целеполагание (первый режим ее работы), которая рекомендовала экипажу текущую цель полета "Уход на заданный аэродром А-Л № 2" (рис. 1, *б*, см. третью сторону обложки).

Оценив обстановку, экипаж принял рекомендацию, выработанную БОСЭС-целеполагание, тем самым активизировав БОСЭС ТС "Уход на заданный аэродром А-Л № 2". Рекомендуемый диспетчером и БОСЭС ТС "Уход на заданный аэродром" маршрут выхода на аэродром Ленинграда, проходящий над городом, был принят экипажем для реализации.

2.4. На этапе ТС "Уход на заданный аэродром А-Л № 2" ИИС СОЭ была выявлена НУГ "Отказ правого двигателя" (рис. 2, *a*). Возникшую коллизия "ТС "Уход на заданный аэродром А-Л № 2" — Угроза "Отказ правого двигателя" БОСЭС-целеполагание рекомендовала разрешить аварийной посадкой на воду (рис. 2, *б*).

Рекомендация, выданная БОСЭС-целеполагание (третий режим ее работы) — "Аварийная посадка на воду" (рис. 2), сразу активизировала БОСЭС ТС "Аварийная посадка на воду".

Эта БОСЭС ТС "Аварийная посадка на воду" проложила маршрут полета по руслу реки (рис. 3, см. третью сторону обложки) и при подлете к каждому мосту (ПрС/С "Пролет над мостом") рекомендовала экипажу высоту полета (рис. 4, см. третью сторону обложки) над мостом и прогноз приводнения между вы-



**Рис. 5. БОСЭС ТС "Эвакуация пассажиров", ПрС/С "Вызов помощи":**

*a* — выявленная ИИС СОЭ непосредственная угроза; *б* — рекомендация БОСЭС "Эвакуация пассажиров" в этой ПрС/С)

**Fig. 5. BOSES TS "The evacuation of the passengers", the problem supsituation (PrS/S) "A help call":**

*a* — the revealed IIS SOE direct threat; *b* — the recommendation BOSES TS "The evacuation of the passengers" in this PrS/S)

бренными мостами (проблемная субситуация (ПрС/С) "Приводнение").

Экипаж реализовал этот маршрут, выполнив этап полета ТС "Аварийная посадка".

2.5. После посадки самолета на воду активизировалась БОСЭС ТС "Эвакуация пассажиров". В ней при появлении НУГ "Затопление салона" (сигнал из ИИС СОЭ, рис. 5, *a*) активизировалась в базе знаний ПрС/С "Затопление салона" (рис. 5, *б*)

В следующих ПрС/С "Использование помощи буксира", ПрС/С "Причаливание к берегу" и ПрС/С "Высадка пассажиров на берег" (рис. 6, см. третью сторону обложки) БОСЭС ТС "Эвакуация пассажиров" не смогла выработать рекомендации.

Высадка всех пассажиров и экипажа прошла успешно.

### Заключение

#### 1. Описанные БИС-ТУ:

- постоянно отслеживают возникающие в полете коллизии "Текущий этап полета — непосредственная угроза его выполнению", определяя при этом точку невозврата для НУГ [2, 6] (ИИС СОЭ);
- рекомендуют экипажу при появлении НУГ текущую цель полета (БОСЭС-целеполагание), а при появлении этой НУГ вблизи ее точки невозврата (третий режим работы БОСЭС-целеполагание) сразу назначают рекомендуемую текущую цель на реализацию;

- при назначении этой новой текущей цели полета подключается соответствующая БОСЭС ТС "Назначенная текущая цель полета", которая рекомендует экипажу способ достижения назначенной текущей цели полета. Если в полетном задании для назначенной текущей цели полета был проработан способ ее достижения, то БОСЭС ТС "Назначенная текущая цель полета" будет его рекомендовать экипажу.

В случае когда НУГ находится вблизи своей точки невозврата, способ сразу передается на реализацию (уточнения описаны в работе [5]).

2. Описанный пример возможного размещения на самолете БИС ТУ показывает процедуры и содержание интеллектуальной поддержки экипажа в процессе решения им задач оперативного целеполагания и конструирования способа достижения этой оперативно назначенной текущей цели полета.

3. Для случая постоянного контроля полета наземными диспетчерами и хорошей предварительной подготовки экипажа по разрешению ожидаемых в полете коллизий читатели могут обнаружить:

- очевидность некоторых рекомендаций БИС ТУ и избыток приведенных БОСЭС ТС на самолете в рассматриваемом полете;
- необходимость слишком больших по объему знаний в базах знаний БИС ТУ и большого числа входных сигналов, поступающих в БИС ТУ и необходимых для выработки ими достаточно глубоких рекомендаций экипажу.

Это справедливо и должно аккуратно решаться в конкретных разработках БИС ТУ для конкретных классов и типов пилотируемых летательных аппаратов.

#### Список литературы

1. Как 55 лет назад на Неву сел самолет // Газета "Петербургский дневник". № 153—154. 20 августа 2018. С. 8—9.
2. Федун Б. Е. Модель "Этап" для разработки облика бортовых интеллектуальных систем антропоцентрических объектов // Онтология проектирования. 2012. № 2 (4). С. 36—43.
3. Колисниченко А. В., Федун Б. Е. Бортовая интеллектуальная информационная система "Ситуационная осведомленность экипажа вертолета" // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016, № 10. С. 703—708.
4. Желтов С. Ю., Федун Б. Е. Оперативное целеполагание в антропоцентрических объектах с позиции концептуальной модели "Этап". I. Структуры алгоритмов поддержки процесса решения задачи экипажем // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 3. С. 57—71.

5. Желтов С. Ю., Федун Б. Е. Оперативное целеполагание в антропоцентрических объектах с позиции концептуальной модели "Этап". II. Режимы работы бортовой оперативно советующей экспертной системы "Оперативное целеполагание", диалоги с экипажем // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 3. С. 55—69.

6. Федун Б. Е. "Электронный летчик": "Точка невозврата" пройдена не будет. Бортовые оперативно советующие экспертные системы тактического уровня для пилотируемых летательных аппаратов // Авианорама. 2016. № 1. С. 9—20.

7. Федун Б. Е. Базовая алгоритмическая оболочка бортовых оперативно советующих экспертных систем типовых ситуаций функционирования объекта // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 5. С. 90—101.

Fedunov B. E. Basic Algorithmic Shell of Onboard Real-Time Advisory Expert Systems for Operation Situations Typical for an Object. Journal of Computer and Systems Sciences International, 2009, Vol. 48, No. 5, pp. 752—764. © Pleiades Publishing, Ltd., 2009.

8. Федун Б. Е. Механизмы вывода в базе знаний бортовых оперативно советующих экспертных систем // Изв. РАН. ТиСУ. 2002. № 4.

9. Стефанов В. А., Федун Б. Е. Бортовые оперативно-советующие экспертные системы (БОСЭС) типовых ситуаций функционирования антропоцентрических (технических) объектов. М.: Изд-во МАИ, 2006. 191 с.

## The Onboard Intellectual Systems of Tactical Level in a Crash Landing of the Passenger Plane on the River Neva (August, 1963)

B. E. Fedunov, boris\_fed@gosniias.ru

FGUP GosNIIAS, Moscow, 125167, Russian Federation

A. V. Bojtsov, I. S. Gindtse, T. E. Kondratova, M. A. Semenova, S. A. Shatkovskaja

МАИ (Technical University), Moscow, 125080, Russian Federation

Corresponding author: Fedunov Boris E., D. Sc., Professor, Head of Sector, Moscow, 125167, Russian Federation, e-mail: boris\_fed@gosniias.ru

Accepted on October 17, 2018

#### Abstract

*In the course of the plane flight the onboard intellectual systems of tactical level (BIS-TU) operatively are solving the problem of the appointing of the current goal of the flight and the problem of the designing of the way of achievement of this goal. The problem of the appointing of the current goal of the flight is solved by intellectual information system "Situational awareness of crew" (IIS SAoC) and onboard operatively advising expert system "Operative goal-setting" (BOSES goal-setting). The problem of the appointing of the current goal of the flight is solving by the intellectual information system "Situational awareness of crew" (IIS SAoC) and the onboard operatively advising expert system "Goal-setting" (BOSES goal-setting). Among the found out the potential threats the IIS SAoC allocates the direct threats (D-Threat). The priority D-Threat is transferred (as the collision "The current stage of the flight — the arisen D-Threat) in BOSES goal-setting which recommends the current purpose of the flight for the crew. If the crew accepts this recommendation the corresponding onboard operatively advising expert system "The designing of a way of achievement of this goal of flight" (the BOSES TS "The appointed goal of the flight ") joins. It is designing the way and is recommending it to the crew for the realisation. If the appointed goal has been worked in the flight task the advance prepared way will be recommend.*

*The work of the BIS-TU in the flight conditions of the passenger plane TU-124 which in August 1963 has been compelled to land on the river Neva in the centre of Leningrad is illustrated. Conditionally the plane is having equipped by the BIS-TU and by the measuring systems which necessary for their work. We will describe the role and the result of the work of the BIS-TU in the collisions which have arisen in the flight.*

**Keywords:** *a collision, direct threats, non-return points, the onboard operatively advising expert system "Operative goal-setting", the onboard operatively advising expert systems of typical situations of flight, the recommendations for crew*

For citation:

**Fedunov B. E., Bojtsov A. V., Gindtse I. S., Kondratova T. E., Semenova M. A., Shatkovskaja S. A.** Adaptive Observer of Rotor Position and Flux for Salient Synchronous Motor, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 122–127.

DOI: 10.17587/mau.20.122-127

## References

1. **Kak 55 let nazad na Nevu sel samolet**, *Peterburgskii dnevnik*, 2018, no. 153–154, 20 avgusta, pp. 8–9 (in Russian).
2. **Fedunov B. E.** Model' "Etap" dlya razrabotki oblika bortovykh intellektual'nykh sistem antropotsentricheskikh ob"ektov, *Ontologiya Proektirovaniya*, 2012, no. 2 (4), pp. 36–43 (in Russian).
3. **Kolishchenko A. V., Fedunov B. E.** Bortovaya intellektual'naya informatsionnaya sistema "Situatsionnaya osvedomlennost' ekipazha vertoleta", *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, no. 10, pp. 703–708 (in Russian).
4. **Zhel'tov S. Yu., Fedunov B. E.** Operativnoe tselepolaganie v antropotsentricheskikh ob"ektakh s pozitsii kontseptual'noi modeli "Etap". I. Struktury algoritmov podderzhki protsessa resheniya

zadachi ekipazhem, *Izv. RAN, TiSU*, 2015, no. 3, pp. 57–71 (in Russian).

5. **Zhel'tov S. Yu., Fedunov B. E.** Operativnoe tselepolaganie v antropotsentricheskikh ob"ektakh s pozitsii kontseptual'noi modeli "Etap". II. Rezhimy raboty bortovoi operativno sovetuyushchei ekspertnoi sistemy "Operativnoe tselepolaganie", dialogi s ekipazhem, *Izv. RAN, TiSU*, 2016, no. 3, pp. 55–69 (in Russian).

6. **Fedunov B. E.** "Elektronnyi letchik": "Tochka nevozvrata" proidena ne budet. Bortovye operativno sovetuyushchie ekspertnye sistemy takticheskogo urovnya dlya pilotiruemykh letatel'nykh apparatov, *Aviapanorama*, 2016, no. 1, pp. 9–20 (in Russian).

7. **Fedunov B. E.** *Bazovaya algoritmicheskaya obolochka bortovykh operativno sovetuyushchikh ekspertnykh sistem tipovykh situatsii funktsionirovaniya ob"ekta* (Basic Algorithmic Shell of Onboard Real-Time Advisory Expert Systems for Operation Situations Typical for an Object), *Izv. RAN, TiSU*, 2009, no. 5, pp. 90–101 (in Russian).

8. **Fedunov B. E.** Mekhanizmy vyvoda v baze znaniy bortovykh operativno sovetuyushchikh ekspertnykh sistem, *Izv. RAN, TiSU*, 2002, no. 4 (in Russian).

9. **Stefanov V. A., Fedunov B. E.** Bortovye operativno — sovetuyushchie ekspertnye sistemy (BOSES) tipovykh situatsii funktsionirovaniya antropotsentricheskikh (tekhnicheskikh) ob"ektov, Moskva, Publishing house of MAI, 2006, 191 p. (in Russian).

---

## Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5510, (499) 269-5397**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *З. В. Наумова*.

Сдано в набор 29.11.2018. Подписано в печать 15.01.2018. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН219. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".  
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.



BUSINESS INFORMATION SYSTEMS 2019

## 22<sup>nd</sup> International Conference on Business Information Systems

### CALL FOR PAPERS

June 26<sup>th</sup> – 28<sup>th</sup>, 2019  
Seville, Spain

#### Dear Colleagues

we are delighted to invite You to contribute to the International Conference on Business Information Systems "BIS 2019", which will take place on 26-28 June 2019 at University of Seville, Spain.

#### About BIS

During the 22 years of the BIS conference history, it grew as a well renowned event of the scientific community. Every year it joins international researchers for scientific discussions on the development, implementation and application of business information systems, based on innovative ideas and computational intelligence methods. The conference addresses a wide scientific community and experts involved in the development of business computing applications.

#### About BIS

The conference is organized by Poznań University of Economics and Business (Poland) and University of Seville (Spain).

#### Program Committee Co-Chairs:

- Witold Abramowicz, Poznań, Poland
- Rafael Corchuelo, Seville, Spain

More information on the website:

<http://bis.ue.poznan.pl/>

#### Topics of Interest

Conference theme: **Data Science for Business Information Systems**

- Big Data and Data Science
- Artificial Intelligence
- ICT Project Management
- Smart Infrastructures
- Social Media and Web-based Business Information Systems
- Applications, Evaluations, and Experiences

#### Proceedings

BIS 2019 proceedings will be published as a volume in **Lecture Notes in Business Information Processing (LNBIP)** series by Springer Verlag, indexed in DBLP, EI, Scopus and ISI Proceedings.

#### Co-Located Events

- 11<sup>th</sup> International Conference on Subject-Oriented Business Process Management (S-BPM ONE 2019)
- Workshops and tutorials
- Doctoral Consortium

#### Important Dates

Mar, 8, 2019 Notification of acceptance  
Mar, 22, 2019 Submission of final papers  
Apr, 20, 2019 Early registration deadline