

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 20

2019

№ 1

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Главный редактор:**  
ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

**Заместители главного редактора:**  
БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.  
ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.  
ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

**Ответственный секретарь:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционный совет:**  
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН  
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН  
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН  
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН  
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН  
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН  
КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН  
МИКРИН Е. А., акад. РАН  
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН  
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН  
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН  
СИГОВ А. С., акад. РАН  
СОЙФЕР В. А., акад. РАН  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН  
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН  
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН  
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН  
ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН  
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

**Редколлегия:**  
DANIELE Z., PhD, Италия  
DORANTES D. J., PhD, Турция  
GROUMPOS P. P., PhD, Греция  
ISIDORI A., PhD, Италия  
KATALINIC B., PhD, Австрия  
LIN CH.-Y., PhD, Тайвань  
MASON O. J., PhD, Ирландия  
ORTEGA R. S., PhD, Франция  
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США  
STRZELECKI R. M., PhD, Польша  
SUBUDHI B. D., PhD, Индия  
АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан  
ГАРАШЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина  
ТРОФИМЕНКО Е. Е., д.т.н., Беларусь  
БОБЦОВ А. А., д.т.н.  
БУКОВ В. Н., д.т.н.  
ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.  
ЛОХИН В. М., д.т.н.  
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д.ф.-м.н.  
ПУТОВ В. В., д.т.н.  
ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.  
РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.  
СЕРГЕЕВ С. Ф., д.п.с.н.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.  
ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.  
ФУРСОВ В. А., д.т.н.  
ЮРЕВИЧ Е. И., д.т.н.

**Редакция:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Директор издательства:**  
АНТОНОВ Б. И.

## СОДЕРЖАНИЕ

### СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

**Фуртат И. Б., Гуцин П. А., Перегудин А. А.** Алгоритм управления по выходу нелинейными системами с компенсацией возмущений и помех измерения ..... 3

**Гайдук А. Р.** Синтез астатических цифровых систем с применением стандартных нормированных передаточных функций ..... 16

### РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

**Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivaschenko V. A., Fominykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu.** Controlling the Welding Process in Robotic Technological Complexes by the Criterion of Product Quality ..... 29

**Афонин В. Л., Гаврилина Л. В., Смоленцев А. Н.** Позиционно-силовое управление шестикоординатным промышленным роботом при обработке сложных поверхностей . 44

### ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

**Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю., Гуренко Б. В.** Алгоритмы терминального управления подвижными объектами мультикоптерного типа ..... 44

**Палкин М. В.** Управление конфигурацией космических аппаратов группового полета на основе обработки видеoinформации ..... 52

**Воробьев А. В., Сильвестров М. М., Бегичев Ю. И., Котицын Л. О., Левин Д. Н.** Концепция построения эргатического интерфейса многофункционального авиационного комплекса с интегрированной модульной авионики ..... 59

*Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

# MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



## MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Editor-in-Chief**

FILIMONOV N. B.

**Deputy Editors-in-Chief:**

BOLSHAKOV A. A.

PODURAEV Yu. V.

YUSCHENKO A. S.

**Responsible Secretary:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Editorial Board:**

ANSHAKOV G. P.

BOLOTNIK N. N.

CHENTSOV A. G.

CHERNOUSKO F. L.

FEDOROV I. B.

KALYAEV I. A.

KURZHANSKI A. B.

KUZNETSOV N. A.

MIKRIN E. A.

PESHEKHONOV V. G.

REZCHIKOV A. F.

SCHERBATYUK A. F.

SEBRYAKOV G. G.

SIGOV A. S.

SOJFER V. A.

SOLOMENTSEV Yu. M.

VASSILYEV S. N.

YUSUPOV R. M.

ZHELTOV S. Yu.

**Editorial Council:**

ALIEV T. A., Azerbaijan

DANIELE Z., PhD, Italy

DORANTES D. J., PhD, Turkey

GARASCHENKO F. G., Ukraine

GROUMPOS P. P., PhD, Greece

ISIDORI A., PhD, Italy

KATALINIC B., PhD, Austria

LIN CH.-Y., PhD, Taiwan

MASON O. J., PhD, Ireland

ORTEGA R. S., PhD, France

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA

STRZELECKI R. M., PhD, Poland

SUBUDHI B. D., PhD, India

TROFIMENKO Ye. Ye., Belarus

BOBTSOV A. A.

BUKOV V. N.

ERMOLOV I. L.

FILARETOV V. F.

FRADKOV V. L.

FURSOV V. A.

ILYASOV B. G.

KOROSTELEV V. F.

LEBEDEV G. N.

LOKHIN V.M.

PAVLOVSKY V. E.

PUTOV V. V.

PSHIKHOPOV V. Kh.

RAPOPORT E. Ya.

SERGEEV S. F.

YUREVICH E. I.

**Editorial Staff:**

BEZMENOVA M. Yu.

**Director of the Publishing House:**

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

## CONTENTS

### SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

- Furtat I. B., Gushchin P. A., Peregudin A. A. Output Feedback Algorithm for Nonlinear Systems with Compensation of Bounded Disturbances and Measurement Noises ..... 3
- Gaiduk A. R. Design of Astatic Digital Systems with Application of Standard Normalized Transfer Functions ..... 16

### ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

- Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivaschenko V. A., Fominykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. Controlling the Welding Process in Robotic Technological Complexes by the Criterion of Product Quality ..... 29
- Afonin V. L., Gavrilina L. V., Smolentsev A. N. Position-Force Control for a Six Coordinate Industrial Robot when Performing Complicated Surface Treatment ..... 34

### DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

- Pshikhopov V. Kh., Medvedev M. Yu., Gurenko B. V. Algorithms of Terminal Control of Multi-Copters ..... 44
- Palkin M. V. Satellite Formation Flying Control Using Image Processing ..... 52
- Vorobyov A. V., Silvestrov M. M., Begichev Y. I., Kotitsyn L. O., Levin D. N. Concept of Construction of Ergatical Interface of Multifunctional Aviation Complex with Integrated Modular Avionics ..... 59

Information about the journal is available online at:  
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

**И. Б. Фуртат**, д-р техн. наук, доц., вед. науч. сотр., cainenash@mail.ru,  
**П. А. Гущин**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., guschin.p@mail.ru,  
**А. А. Перегудин**, инженер-исследователь, zeekless@mail.ru,  
Институт проблем машиноведения РАН, Университет ИТМО, Санкт-Петербург

## Алгоритм управления по выходу нелинейными системами с компенсацией возмущений и помех измерения<sup>1</sup>

*Синтезирован алгоритм управления динамическими объектами с компенсацией параметрической неопределенности, внешних возмущений и помех измерения. Предполагается, что доступны измерению только выходные сигналы объектов, а не их производные. Объекты описываются нелинейной системой дифференциальных уравнений с векторными входными и выходными сигналами. В отличие от большинства существующих схем управления в настоящей статье размерности помехи измерения и выходного сигнала равны, источники сигналов помех и возмущений различны, параметрические и внешние возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Для одновременной компенсации возмущений и помех измерения предлагается выделить два канала. По первому каналу будет оцениваться часть помехи измерения, которая позволит частично восстановить информацию о не зашумленном выходе объекта. По второму каналу будет осуществляться компенсация возмущения. Таким образом, для одновременной компенсации возмущений и помех измерения требуется минимум два независимых канала измерения. Получены достаточные условия расчета параметров алгоритма в виде разрешимости линейного матричного неравенства. Показано, что уравнение замкнутой системы, полученной на базе предложенного алгоритма, зависит от возмущения и наименьшей составляющей помехи. Если же в сигнале помехи нельзя выделить наименьшую компоненту, то результаты переходных процессов зависят от той компоненты помехи, которая будет выбрана при синтезе системы управления. Таким образом, в отличие от большинства существующих схем управления, где уравнение замкнутой системы зависит от возмущения и помехи, полученный алгоритм обеспечивает лучшие результаты переходных процессов, поскольку они зависят не от всего вектора помехи, а только от ее наименьшей (одной) компоненты. Приведены результаты моделирования для нелинейного объекта третьего порядка и результаты синхронизации электрического генератора, подключенного к электроэнергетической сети. Численные примеры иллюстрируют эффективность предложенной схемы и робастность по отношению к случайным составляющим в помехе измерения и возмущениях.*

**Ключевые слова:** нелинейная система, компенсация, возмущение, помеха, S-процедура, линейное матричное неравенство

### Введение

Задачи управления в условиях возмущений и помех измерения достаточно широко распространены на практике, например, при управлении через сеть [1–4], управлении летательными аппаратами [5], управлении в электроэнергетических сетях [6], управлении в навигационных системах [7], в области цифровой обработки сигналов и изображений [8], управлении в химической промышленности [9] и т. д. Возмущения могут быть обусловлены влиянием внешней среды, неопределенностью параметров и структуры модели объекта. Помехи

измерения (шумы) могут быть связаны с ограничениями в канале передачи данных, с влиянием внешней среды на измеряемые сигналы и средства измерения, а также с особенностью самих измерительных устройств (абсолютная и относительная погрешности, класс точности, тип устройства и т. п.). В таких условиях проектируемая система управления должна обеспечивать выполнение поставленной цели. Нередко неучет возмущений или помех измерения приводит к нарушению целевого условия или к потере устойчивости замкнутой системы.

Задача управления в условиях возмущений и помех измерения усложняется, если доступен измерению только выходной сигнал объекта, а не вектор состояния. На сегодняшний день предложено достаточно много решений

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в ИПМаш РАН.

в данной области. Часть работ посвящена использованию различного рода линейных [10] и нелинейных [11, 12] фильтров для выделения или подавления сигналов с определенными частотами. В ряде других работ синтез систем управления основан на использовании фильтра Калмана для оценки вектора состояния объекта в условиях шумов [13, 14]. В работах [15–21] предложены решения проблемы влияния помех измерения (как правило, высокочастотных) на качество оценивания производных с использованием наблюдателя с большим коэффициентом усиления (high-gain observer). Большая погрешность оценки производных при наличии высокочастотной помехи ведет к значительному росту значения сигнала управления, что не допустимо на практике. В статье [17] данная проблема решается с использованием адаптивной настройки коэффициента наблюдателя. В работах [19, 20] используется наблюдатель повышенного динамического порядка. В статье [21] перед наблюдателем с большим коэффициентом усиления последовательно подключается фильтр низких частот для исключения влияния высокочастотных помех измерения. В работе [22] предложено решение задачи управления с использованием  $H^\infty$ -оптимизации. В работе [23], предполагая, что помехи измерения описываются синусоидальными сигналами, осуществлялась идентификация параметров данных сигналов и их дальнейшая компенсация. В статье [24] синтезирован статический закон управления по выходу с использованием метода инвариантных эллипсоидов и аппарата линейных матричных неравенств. В работе [25] рассмотрена компенсация возмущений и помех измерения с использованием метода вспомогательного контура. В статьях [1–4] проведен анализ влияния помех измерения, вызванных квантизацией выходного сигнала по уровню и ограниченной пропускной способностью канала передачи данных, на устойчивость системы управления, построенной с использованием алгоритма скоростного градиента.

Среди всех вышеприведенных алгоритмов в данной статье особый интерес вызывает алгоритм, предложенный в работе [25]. В [25] решена задача управления в условиях возмущений и помех измерения при более общих условиях на параметры модели, чем в работах [22–24]. Также, в отличие от работ [22–24], в [25] источники возмущений и помех измерения неза-

висимые, а произведение матриц перед возмущением и помехой не обязательно равно нулю. Однако в работе [25] размерность помех измерения меньше размерности измеряемого сигнала, параметрические и внешние возмущения могут присутствовать только в определенных уравнениях модели объекта, а также отсутствуют аналитические условия расчета параметров алгоритма. В работе [26] предложен алгоритм управления, позволяющий преодолеть данные проблемы. Однако алгоритм [26] разработан для линейных объектов с измеряемым вектором состояния и скалярным управлением. Настоящая статья посвящена обобщению результата, представленного в работе [26], на нелинейные объекты с векторными входными и выходными воздействиями, когда не доступен измерению вектор состояния.

В данной статье рассматривается нелинейный объект управления с векторными входными и выходными сигналами. Измерению доступен сигнал, равный сумме выхода объекта и помехи измерения, размерности которых совпадают, а источники помехи измерения и возмущения независимы. Параметрические и внешние возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Получено условие расчета параметров алгоритма в виде разрешимости линейного матричного неравенства (ЛМН).

В статье будут использованы следующие обозначения:  $R$  — множество действительных чисел;  $I_l$  — единичная матрица порядка  $l$ ;  $\tilde{I}$  — матрица размерности  $(m-1) \times m$ , полученная из единичной матрицы порядка  $m$  путем вычеркивания  $i$ -й строки;  $O_{n \times l}$  — нулевая матрица размерности  $n \times l$ ;  $A^+$  — псевдообратная матрица к  $A$ ;  $E_j = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$  — вектор соответствующей размерности, у которого  $j$ -я компонента равна 1, а остальные — нулю;  $|\cdot|$  и  $\|\cdot\|$  означает евклидову норму вектора и согласованную с ней норму матрицы соответственно;  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, модель которого описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + D(\psi(x) + c_0 u(t) + \varphi(t)), \\ y(t) &= Lx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$z(t) = y(t) + \xi(t), \quad (2)$$

где  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  — вектор состояния;  $u(t) \in R^l$  — сигнал управления;  $y(t) \in R^m$  — выходной сигнал объекта, недоступный измерению ( $m \geq 2$ );  $z(t) \in R^m$  — сигнал, доступный измерению;  $\xi(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_m(t)]^T$  — ограниченная помеха измерения. Неизвестные функции  $\psi(x) \in R^l$  и  $\varphi(x, t) \in R^l$

удовлетворяют следующим условиям:  $\varphi(t)$  — ограниченная функция,  $|\dot{\varphi}(t)| \leq \chi_1$ ,  $|\psi(x)| \leq \alpha_1 |x|$  и  $\left\| \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right\| \leq \alpha_2$ ,  $\chi_1 > 0$ ,  $\alpha_1 > 0$  и  $\alpha_2 > 0$ . Матрицы  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times l}$ ,  $D \in R^{n \times l}$  и  $L \in R^{m \times n}$  — известны, причем  $A$  — гурвицева,  $(LD)^+(LD) = I_b$ ,  $(LD)^+(LB) = kI_b$ ,  $k \in R$ . Неизвестный коэффициент  $c_0$  принадлежит известному отрезку, а именно  $c_0 \in [c_{\min}, c_{\max}]$ , причем  $c_{\min} + k > 0$ .

Выполнение условий  $(LD)^+(LD) = I_b$ ,  $(LD)^+(LB) = kI_b$  потребуется в доказательстве Утверждения 1 (см. раздел 3) для формирования скалярного дифференциального оператора. Данный оператор позволит для объекта (1) с векторным входом и векторным выходом сформировать требуемую модель замкнутой системы и затем получить линейное матричное неравенство. Также из доказательства утверждения 1 будет видно, что выполнение условия  $c_{\min} + k > 0$  позволит обеспечить ограниченность сигнала управления. С практической точки зрения условие  $c_{\min} + k > 0$  равносильно обеспечению отрицательной обратной связи в замкнутой системе.

Предположим, что существует  $i$ -я компонента вектора  $\xi(t)$ , для которой выполнено следующее соотношение:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \xi_i(t) < \limsup_{t \rightarrow \infty} \xi_g(t), \quad (3)$$

где  $i \in \{1, \dots, m\}$  и  $g \in \{1, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$ .

Поясним необходимость выполнения условия (3). Для одновременной компенсации независимых возмущений и помех измерения требуются минимум два независимых измерения выходного сигнала объекта. Пусть *априори* известно, что предельное значение  $i$ -й компоненты вектора  $\xi$  меньше, чем предельные значения остальных. Тогда сначала оценивается сигнал  $\tilde{\xi} = [\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m]^T$ , который является частью помехи измерения  $\xi$  без  $i$ -й компоненты. Как будет показано в конце следующего раздела, от значения  $i$ -й компоненты вектора  $\xi$

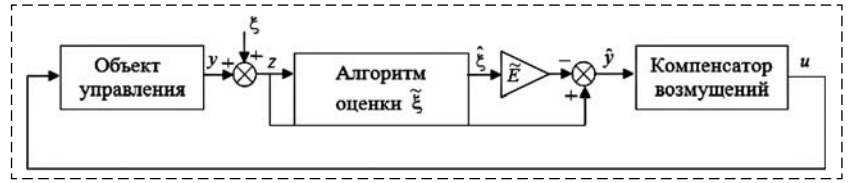


Рис. 1. Структурная схема системы управления  
Fig. 1. Block diagram of the control scheme

будет зависеть точность оценки вектора  $\tilde{\xi}$ , поэтому и требуется выполнение условия (3). Далее, зная оценку вектора  $\tilde{\xi}$ , можно построить оценку истинного выходного сигнала объекта и сформировать оценку возмущения, которую затем можно скомпенсировать.

Дополнительно предположим, что  $\dot{\xi}_i(t)$  — ограниченный сигнал и обозначим  $|\xi_i(t)| \leq \chi_2$  и  $|\dot{\xi}_i(t)| \leq \chi_3$ , где  $\chi_2$  и  $\chi_3$  — положительные константы.

Требуется разработать алгоритм управления, который обеспечит выполнение целевого условия

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |y(t)| \leq \delta, \quad (4)$$

где значение  $\delta > 0$  будет определено в Утверждении 1 (см. раздел 3).

Сформулированную задачу будем решать в два этапа. На первом этапе (раздел 2) будет синтезирован алгоритм оценки вектора  $\tilde{\xi}$  (рис. 1). С использованием  $\tilde{\xi}$  на втором этапе (раздел 3) будет сформирована оценка  $\hat{y}$  выходного сигнала  $y$  и будет разработан алгоритм компенсации параметрических и внешних возмущений ("Компенсатор возмущений" на рис. 1).

## 2. Алгоритм компенсации помех измерения

Введем обозначения

$$\tilde{\xi}(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_{i-1}(t), \xi_{i+1}(t), \dots, \xi_m(t)]^T, \\ \tilde{E} = [E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, \dots, E_m]$$

и, принимая во внимание второе уравнение (1), перепишем (2) в виде

$$z(t) = Lx(t) + \tilde{E}\tilde{\xi}(t) + E_i\xi_i(t). \quad (5)$$

Исключим  $i$ -е уравнение в соотношении (5). Для этого, умножив (5) слева на матрицу  $\tilde{I} = \tilde{E}^T$ , получим

$$\tilde{z}(t) = \tilde{I}Lx(t) + \tilde{\xi}(t), \quad (6)$$

где  $\tilde{z}(t) = \tilde{I}z(t)$ . Обозначим

$$f(x, u, t) = \psi(x) + c_0 u(t) + \varphi(t). \quad (7)$$

Продифференцировав уравнение (6) по времени вдоль траекторий системы (1), имеем

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{I}L A x(t) + \tilde{I}L B u(t) + \tilde{I}L D f(x, u, t) + \dot{\tilde{\xi}}(t). \quad (8)$$

Из постановки задачи известно, что сигнал  $x(t)$  не доступен измерению. Поэтому, следуя структуре выражения (5), введем новую переменную  $\tilde{x}(t)$  в виде

$$\tilde{x}(t) = L^+ [z(t) - \tilde{E}\tilde{\xi}(t) - E_i \xi_i(t)]. \quad (9)$$

С учетом соотношения (9) перепишем выражение (8) как

$$\dot{\tilde{z}}(t) = \tilde{I}L A L^+ [z(t) - \tilde{E}\tilde{\xi}(t) - E_i \xi_i(t)] + \tilde{I}L B u(t) + \tilde{I}L D f(x, u, t) + \tilde{I}L A (x(t) - \tilde{x}(t)) + \dot{\tilde{\xi}}(t). \quad (10)$$

Принимая во внимание выражения (5) и (9), преобразуем предпоследнее слагаемое в (10) как  $\tilde{I}L A (x(t) - \tilde{x}(t)) = \tilde{I}L A (I_n - L^+ L)x$ . Введем новые обозначения:

$$\tilde{A} = \tilde{I}L A L^+ \tilde{E}, \quad \tilde{A}_1 = \tilde{I}L A L^+, \quad \tilde{A}_2 = \tilde{I}L A (I_n - L^+ L), \\ \tilde{A}_3 = \tilde{I}L A L^+ E_i, \quad \tilde{B} = \tilde{I}L B, \quad \tilde{D} = \tilde{I}L D$$

и перепишем выражение (10) в виде

$$\dot{\tilde{\xi}}(t) = \tilde{A}\tilde{\xi}(t) - \tilde{A}_1 z(t) + \dot{\tilde{z}}(t) - \tilde{B}u(t) - \tilde{D}f(x, u, t) - \tilde{A}_2 x(t) + \tilde{A}_3 \xi_i(t). \quad (11)$$

Проинтегрировав выражение (11) по  $t$ , получим

$$\tilde{\xi}(t) = \int_0^t [\tilde{A}\tilde{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)] ds + \tilde{z}(t) - \int_0^t [\tilde{B}u(s) + \tilde{D}f(x, u, s) + \tilde{A}_2 x(s) - \tilde{A}_3 \xi_i(s)] ds + \tilde{\xi}(0) - \tilde{z}(0). \quad (12)$$

Очевидно, что выражение (12) не может быть использовано для оценки помехи измерения, поскольку содержит недоступные измерению сигналы. Однако, следуя структуре (12), введем алгоритм оценки вектора  $\tilde{\xi}(t)$  (рис. 1) в виде

$$\hat{\xi}(t) = \int_0^t [\tilde{A}\hat{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)] ds + \tilde{z}(t) + \gamma, \quad (13)$$

где  $\hat{\xi}(t)$  — вектор оценки сигнала  $\tilde{\xi}(t)$ ,  $\gamma \in R^{m-1}$  — вектор, выбираемый разработчиком.

Исследование влияния значений вектора  $\gamma$  на качество переходных процессов в замкнутой системе приведено в конце раздела 4.

Для оценки качества работы алгоритма (13) рассмотрим ошибку

$$e(t) = \tilde{\xi}(t) - \hat{\xi}(t). \quad (14)$$

Учитывая соотношения (11) и (13), продифференцируем выражение (14) по времени и результат запишем в виде

$$\dot{e}(t) = \tilde{A}e(t) - \tilde{B}u(t) - \tilde{D}f(x, u, t) - \tilde{A}_2 x(t) + \tilde{A}_3 \xi_i(t). \quad (15)$$

Из уравнения (15) следует, что значение ошибки  $e$  зависит от значения  $\xi_i$ , поэтому требуется *априори* выполнение условия (3). Кроме того, значение ошибки  $e$  зависит от  $f$  и  $u$ , причем соответствующим выбором управления  $u$  можно уменьшить влияние возмущения  $f$  на качество оценивания  $\tilde{\xi}$ . Решение проблемы компенсации возмущения рассмотрим в следующем разделе.

### 3. Алгоритм компенсации возмущений

В разделе 2 синтезирован алгоритм (13), который позволяет оценить часть сигнала помехи  $\xi(t)$  в виде сигнала  $\hat{\xi}(t)$ . Воспользуемся  $\hat{\xi}(t)$  для уточнения информации о сигнале  $y(t)$ . Пусть  $\hat{y}(t)$  — оценка  $y(t)$ . Принимая во внимание соотношения (5) и (13), введем выражение для  $\hat{y}(t)$  (рис. 1) в виде

$$\hat{y}(t) = z(t) - \tilde{E}\hat{\xi}(t) = Lx(t) + \tilde{E}e(t) + E_i \xi_i(t). \quad (16)$$

С учетом выражений (1) и (7) продифференцируем соотношение (16) по времени и результат запишем как

$$L D f(x, u, t) = \dot{\hat{y}}(t) - L A x(t) - L B u(t) - \tilde{E}\dot{e}(t) - E_i \dot{\xi}_i(t). \quad (17)$$

Следуя работе [27] и используя структуру уравнения (17), введем оценку  $\hat{f}$  возмущения  $f$  в виде

$$\hat{f}(t) = (LD)^+ (\dot{\hat{y}}(t) - LAL^+ \hat{y}(t) - \alpha(p)LBv(t)), \quad (18)$$

где  $\alpha(p)$  — скалярный дифференциальный оператор, структура которого будет задана ниже,  $v(t) \in R^l$  — вспомогательное управляющее воздействие, которое понадобится для формирования сигнала компенсации возмущений.

Введем вспомогательное управляющее воздействие:

$$v(t) = -\hat{f}(t). \quad (19)$$

Подставив (18) в (19), получим следующее выражение:

$$(I_l - (LD)^+ LB\alpha(p))v(t) = -(LD)^+ [\hat{y}(t) - LAL^+ y(t)]. \quad (20)$$

Зададим  $\alpha(p) = \frac{1-\mu p}{k}$ , где  $\mu > 0$  — достаточно малое число, и проинтегрируем выражение (20) по  $t$ :

$$v(t) = -\frac{1}{\mu}(LD)^+ \times \left[ \hat{y}(t) - LAL^+ \int_0^t \hat{y}(s) ds - y(0) \right] + v(0). \quad (21)$$

Для компенсации возмущений закон управления можно сформировать в виде  $u(t) = v(t)$ . Однако, как будет показано в доказательстве Утверждения 1, работоспособность закона управления не зависит от точного знания начальных условий  $\hat{y}(0)$  и  $v(0)$ . Таким образом, закон управления ("Компенсатор возмущений" на рис. 1) можно сформировать в виде

$$u(t) = -\frac{1}{\mu}(LD)^+ \left[ \hat{y}(t) - LAL^+ \int_0^t \hat{y}(s) ds - \theta \right], \quad (22)$$

где  $\theta \in R^m$  — вектор, выбираемый разработчиком. Исследование влияния значений вектора  $\theta$  на качество переходных процессов в замкнутой системе приведено в конце раздела 4.

Перед формулировкой утверждения введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{21} &= \frac{1}{\mu} [c_0 A + kA - B(LD)^+ LA(I_n - L^+ L) - \\ &\quad - c_0 D(LD)^+ LA(I_n - L^+ L)]; \\ A_{22} &= \frac{1}{\mu} (-c_0 I_n - kI_n + \mu A); \\ A_{23} &= \frac{1}{\mu} [B(LD)^+ LAL^+ \tilde{E} + c_0 D(LD)^+ LAL^+ \tilde{E}]; \\ A_{24} &= \frac{1}{\mu} [-B(LD)^+ \tilde{E} - c_0 D(LD)^+ \tilde{E}]; \\ A_{41} &= \frac{1}{\mu} [-c_0 \tilde{A}_2 - k\tilde{A}_2 + \tilde{B}(LD)^+ LA(I_n - L^+ L) + \\ &\quad + c_0 \tilde{D}(LD)^+ LA(I_n - L^+ L)]; \\ A_{42} &= -\tilde{A}_2; \end{aligned}$$

$$A_{43} = \frac{1}{\mu} [c_0 \tilde{A} + k\tilde{A} - \tilde{B}(LD)^+ LAL^+ \tilde{E} - c_0 \tilde{D}(LD)^+ LAL^+ \tilde{E}];$$

$$A_{44} = \frac{1}{\mu} (-c_0 I_{m-1} - kI_{m-1} + \mu \tilde{A} + \tilde{B}(LD)^+ \tilde{E} + c_0 \tilde{D}(LD)^+ \tilde{E});$$

$$G_{21} = \frac{1}{\mu} (-B + kD); \quad G_{41} = \frac{1}{\mu} (\tilde{B} - k\tilde{D}),$$

$$F_{21} = D, \quad F_{41} = -\tilde{D},$$

$$B_{21} = \frac{1}{\mu} (-B + kD), \quad B_{22} = D;$$

$$B_{23} = \frac{1}{\mu} [B(LD)^+ + c_0 D(LD)^+] LAL^+ E_i;$$

$$B_{24} = \frac{1}{\mu} [-B(LD)^+ - c_0 D(LD)^+] E_i;$$

$$B_{41} = \frac{1}{\mu} (\tilde{B} - k\tilde{D}); \quad B_{42} = -\tilde{D}; \quad (23)$$

$$B_{43} = \frac{1}{\mu} (-\tilde{B}(LD)^+ LAL^+ E_i - c_0 \tilde{D}(LD)^+ LAL^+ E_i + c_0 \tilde{A}_3 + k\tilde{A}_3);$$

$$B_{44} = \frac{1}{\mu} (c_0 \tilde{D}(LD)^+ E_i + \tilde{B}(LD)^+ E_i + \mu \tilde{A}_3);$$

$$G_e = \begin{bmatrix} O_{n \times l} \\ G_{21} \\ O_{(m-1) \times l} \\ G_{41} \end{bmatrix}; \quad F_e = \begin{bmatrix} O_{n \times l} \\ F_{21} \\ O_{(m-1) \times l} \\ F_{41} \end{bmatrix};$$

$$C_1 = [I_n \quad O_{n \times n} \quad O_{n \times (m-1)} \quad O_{n \times (m-1)}];$$

$$C_2 = [O_{n \times n} \quad I_n \quad O_{n \times (m-1)} \quad O_{n \times (m-1)}];$$

$$A_e = \begin{bmatrix} O_{n \times n} & I_n & O_{n \times (m-1)} & O_{n \times (m-1)} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ O_{(m-1) \times n} & O_{(m-1) \times n} & O_{(m-1) \times (m-1)} & I_{m-1} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix};$$

$$B_e = \begin{bmatrix} O_{n \times 1} & O_{n \times 1} & O_{n \times 1} & O_{n \times 1} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ O_{(m-1) \times 1} & O_{(m-1) \times 1} & O_{(m-1) \times 1} & O_{(m-1) \times 1} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix};$$

$$\Psi =$$

$$= \begin{bmatrix} A_e^T P + PA_e + 2\beta P + & PG_e & PF_e & PB_e \\ + \tau_1 \alpha_1^2 C_1^T C_1 + \tau_2 \alpha_2^2 C_2^T C_2 & * & * & * \\ * & -\tau_1 I_l & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & -\tau_2 I_l & O_{l \times 4} \\ * & * & * & -\rho I_4 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $\beta > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$ ,  $P > 0$  — положительно определенная матрица, "\*" обозначает симметричный блок симметричной матрицы. Последовательность получения матриц (23) будет приведена в Приложении (доказательстве Утверждения 1) при выводе уравнения замкнутой системы.

**Утверждение 1.** Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1), (2), алгоритма оценки помехи (13), (6) и закона управления (22), (16). Пусть для заданных чисел  $\beta > 0$  и  $\mu > 0$  существуют коэффициенты  $\tau_1 > 0$ ,  $\tau_2 > 0$ ,  $\rho > 0$  и матрица  $P > 0$  такие, что выполнено линейное матричное неравенство (ЛМН)

$$\Psi < 0. \quad (24)$$

Тогда алгоритм (6), (13), (16), (22) обеспечивает выполнение целевого условия (4), где

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho \sum_{i=1}^3 \chi_i^2}{2\beta \lambda_{\min}(P)}}, \quad (25)$$

$\lambda_{\min}(P)$  — наименьшее собственное число матрицы  $P$ .

В Утверждении 1 ЛМН  $\Psi < 0$  зависит от неизвестного параметра  $c_0$ , который принадлежит известному отрезку  $[c_{\min}, c_{\max}]$ . Поэтому для проверки  $\Psi < 0$  сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 2.** ЛМН (24) выполнено, если выполнены следующие два ЛМН:

$$\Psi^- < 0 \text{ и } \Psi^+ < 0, \quad (26)$$

где  $\Psi^- = \Psi|_{A_e=A_e^-, B_e=B_e^-}$ ;  $\Psi^+ = \Psi|_{A_e=A_e^+, B_e=B_e^+}$ ;  $A_e^- = A_e|_{c_0=c_{\min}}$ ;  $A_e^+ = A_e|_{c_0=c_{\max}}$ ;  $B_e^- = B_e|_{c_0=c_{\min}}$ ;  $B_e^+ = B_e|_{c_0=c_{\max}}$ .

#### 4. Примеры

1. Рассмотрим объект управления (1), (2), где

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$c_0 \in [-0,4; 25]$  и  $\alpha_1 = \alpha_2 = 2\sqrt{3}$ . Остальные параметры в объекте (1), (2) будут определены ниже. Предположим, что выполнено условие (3) для  $i = 2$  и  $g = 1$ .

Для заданных параметров объекта легко проверить, что выполнены следующие условия:  $(LD)^+(LD) = 1$  и  $(LD)^+(LB) = k = 0,495$ .

Сформируем алгоритм управления. Так как  $i = 2$ , то  $\tilde{I} = [1 \ 0]$  и  $\tilde{E} = [1 \ 0]^T$ . Учитывая, что

$$L^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \text{ вычислим } \tilde{A} = -1 \text{ и } \tilde{A}_1 = [-1 \ 1].$$

Примем  $\gamma = 0$  и сформируем алгоритм оценки помехи (12) в виде

$$\hat{\xi}(t) = -\int_0^t (\hat{\xi}(s) + [-1 \ 1]z(s))ds + \tilde{z}(t), \quad (27)$$

где  $\tilde{z}(t) = z_1(t)$ . Вычислив  $(LD)^+ = [0,0495 \ 0,495]$ ,

$LAL^+ = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$  и задав  $\theta = [0 \ 0]^T$ , запишем закон управления (22) в виде

$$u(t) = -\frac{1}{\mu} [0,0495 \ 0,495] \times \left( \hat{y}(t) - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \int_0^t \hat{y}(s)ds \right), \quad (28)$$

где, согласно (16),  $\hat{y}(t) = z(t) - [1 \ 0]^T \hat{\xi}(t)$ .

Проверим условия Утверждения 2 с помощью пакета Yalmip. ЛМН, заданные (26), выполнены при  $\mu \in [2 \cdot 10^{-5}; 0,0057]$ . Проверка моделированием в MATLAB Simulink для  $\psi(x) = \sum_{i=1}^3 (x_i(t) + \sin x_i(t))$  показала, что решения (1) ограничены при  $\mu \in (0; 0,02]$ .

Продемонстрируем качество функционирования системы управления. Пусть в (1), (2)  $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$ ,  $\psi(x) = \sum_{i=1}^3 (x_i(t) + \sin x_i(t))$  и

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 0,2 + 0,5 \sin 0,7t + \cos 1,3t; \\ \xi_1(t) &= 1 + 10 \sin 3t; \xi_2(t) = 0,01 \sin 0,8t. \end{aligned} \quad (29)$$

На рис. 2, а (см. вторую сторону обложки) представлена зависимость  $\delta(\mu, c_0)$ , которая рассчитана с помощью выражения (25). На рис. 2, б изображена зависимость  $\delta(\mu, c_0)$ , полученная путем моделирования замкнутой системы на базе алгоритма (27), (28) в MATLAB Simulink. Видно, что оценка (25) достаточно грубая. Однако из рис. 2, а, б (см. вторую сторону обложки) следует, что при одном и том же значении  $\mu = 0,0057$  обеспечивается наименьшее значение  $\delta$ . *Априори* указать более точную оценку  $\delta$  нельзя, однако ее можно получить на этапе моделирования, как показано на рис. 2, б.

Зададим  $\mu = 0,005$  в (28) и  $c_0 = 0$  в (1). На рис. 3 приведены результаты переходных процессов по  $y(t) = [y_1(t) \ y_2(t)]^T$  при  $u(t) = 0$  (рис. 3, а) и использовании алгоритма (27), (28) (рис. 3, б).

Предложенный алгоритм управления обоснован только для случая дифференцируемых шумов и возмущений. Поэтому далее рассмот-

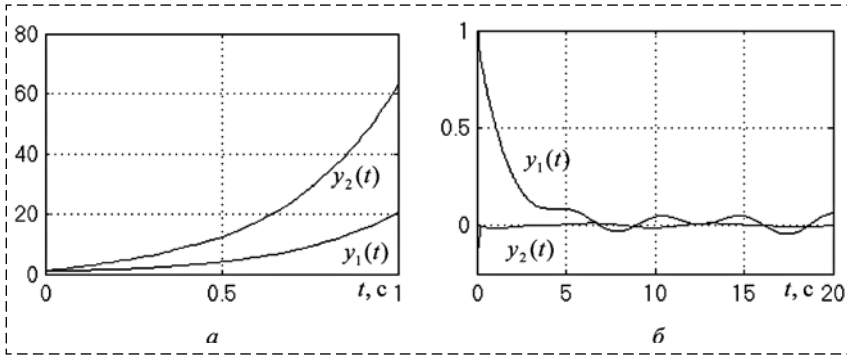


Рис. 3. Переходные процессы по  $y(t)$  при  $u(t) = 0$  (а) и при использовании алгоритма (27), (28) (б)

Fig. 3. The transients of  $y(t)$  obtained for  $u(t) = 0$  (a) and (27), (28) (б)

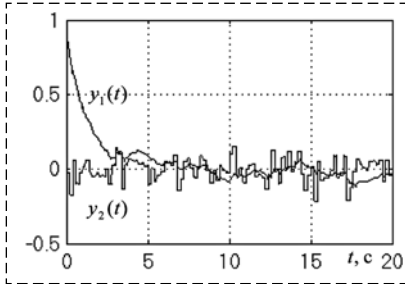


Рис. 4. Переходные процессы по  $y(t)$  при случайном возмущении и помехе вида (30)

Fig. 4. The transients of  $y(t)$  under random disturbance and measurement noise given by (30)

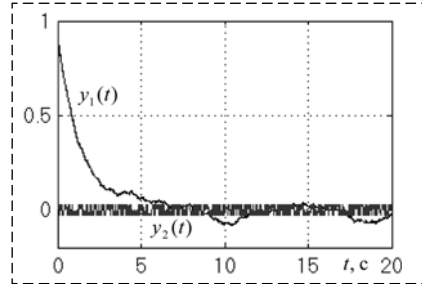


Рис. 5. Переходные процессы по  $y(t)$  в условиях (31)

Fig. 5. The transients of  $y(t)$  under (31)

рим численные исследования алгоритма в условиях недифференцируемых составляющих в шумах измерения и возмущениях. С этой целью сначала рассмотрим наличие случайных составляющих в возмущении и помехе в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 0,2 + 0,5 \sin 0,7t + \cos 1,3t + d_1(t); \\ \xi_1(t) &= 1 + 10 \sin 3t + d_2(t); \\ \xi_2(t) &= 0,01 \sin 0,8t + d_3(t), \end{aligned} \quad (30)$$

где сигналы  $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$  и  $d_3(t)$  получены с помощью генераторов белого шума в MATLAB Simulink со следующими параметрами: мощность шума (noise power) 3; 10;  $10^{-4}$  и время выборки (sample time) 0,05; 0,1; 0,2 с соответственно. На рис. 4 приведены результаты переходных процессов по  $y(t)$  при  $c_0 = 10$ .

Проверим теперь качество функционирования системы управления при следующих условиях:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= 0,2 + 0,5 \sin 0,7t + \cos 1,3t + d_1(t); \\ z_1 &= q_1(x_1); z_2 = q_2(x_2), \end{aligned} \quad (31)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — функции квантования по уровню с интервалами квантования 0,5 и 0,05 соответственно. На рис. 5 приведены результаты моделирования по  $y(t)$  при  $c_0 = 10$ .

Результаты моделирования продемонстрировали, что расчет предельного значения параметра  $\mu$  с использованием условий Утверждения 2 дает допустимое отклонение от предельного значения, полученного с помощью моделирования в MATLAB Simulink. Также продемонстрирована робастность системы управления по отношению к случайным составляющим в возмущении и сигналах помехи. Как видно из рис. 3—5, величина  $\delta$  в (4) не превышает значения 0,3 спустя 4 с с начала моделирования во всех трех случаях.

Отметим, что от выбора значений векторов  $\gamma$  в (13) и  $\theta$  в (22) не зависит величина  $\delta$  в целевом условии (4). Однако от значений  $\gamma$  и  $\theta$  зависит качество переходных процессов по  $y(t)$ . Так, в ходе моделирования наилучшие результаты переходных процессов были получены при согласовании начальных условий  $\xi$  и  $\tilde{\xi}$ , а также  $u$  и  $v$ .

Продemonстрируем теперь качество работы алгоритма (27), (28) при  $D = B$  (т. е. рассматриваются согласованные возмущения) и  $\xi_2(t) = 0$  в (1), (2). Остальные параметры в (1), (2) заданы в начале примера и в (29). В данном случае значение  $\delta$  в целевом условии (4) уменьшается с уменьшением числа  $\mu$  почти пропорционально (рис. 6).

2. Рассмотрим модель электрического генератора [28, 29], которая описывается следующими уравнениями:

♦ *движения ротора генератора:*

$$\dot{\vartheta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -0,5H^{-1}D\omega - 0,5H^{-1}\omega_0\Delta P_e; \quad (32)$$

♦ *контур возбуждения:*

$$\dot{E}'_q = T_{d0}^{-1}(E_f - E_q); \quad (33)$$

♦ *статорные контуры:*

$$\begin{aligned} E_q &= \frac{x_{ds}}{x'_{ds}} E'_q - \frac{x_d - x'_d}{x'_{ds}} V_s \cos \vartheta; E_f = k_c u_f; \\ P_e &= \frac{V_s E_q}{x_{ds}} \sin \vartheta; I_q = \frac{V_s}{x_{ds}} \sin \vartheta = \frac{P_e}{x_{ad} I_f}; \\ Q_e &= \frac{V_s}{x_{ds}} E_q \cos \vartheta - \frac{V_s^2}{x_{ds}}; E_q = x_{ad} I_f. \end{aligned} \quad (34)$$

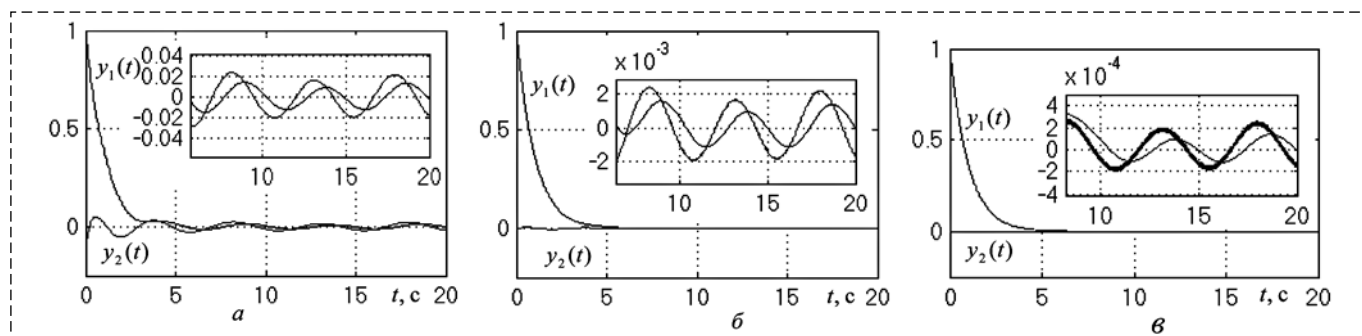


Рис. 6. Переходные процессы по  $y(t)$  при  $D = B$ ,  $\xi_2(t) = 0$  в (1), а также  $\mu = 0,01$  (а),  $\mu = 0,001$  (б) и  $\mu = 0,0001$  (в)  
 Fig. 6. The transient of  $y(t)$  for  $D = B$ ,  $\xi_2(t) = 0$  in (1) and  $\mu = 0,01$  (а),  $\mu = 0,001$  (б) and  $\mu = 0,0001$  (в)

Здесь  $\vartheta(t)$  — угол поворота ротора генератора относительно синхронной оси вращения (угол нагрузки), рад;  $\omega(t)$  — относительная скорость ротора (рад/с);  $\Delta P_e(t) = P_e(t) - P_m(t)$  (отн. ед.),  $P_e(t)$  — активная мощность генератора (отн. ед.),  $P_m(t)$  — механическая мощность генератора (отн. ед.);  $D$  — коэффициент демпфирования (отн. ед.);  $H$  — механическая инерционная постоянная (с);  $\omega_0$  — скорость ротора в синхронном режиме (рад/с);  $T_{d0}$  — постоянная времени контура возбуждения при разомкнутом статоре (с);  $x'_{ds} = x_T + 0,5x_L + x'_d$  (отн. ед.),  $x_T$  — реактивное сопротивление трансформатора (отн. ед.),  $x_L$  — реактивное сопротивление линии электропередачи (отн. ед.),  $x'_d$  — переходное реактивное сопротивление генератора по продольной оси (отн. ед.);  $x_{ds} = x_T + 0,5x_L + x_d$ ,  $x_d$  — синхронное реактивное сопротивление по продольной оси (отн. ед.);  $x_{ad}$  — сопротивление взаимоиנדукции между обмотками возбуждения и статора (отн. ед.);  $V_s$  — напряжение на шинах бесконечной мощности (отн. ед.);  $k_c$  — коэффициент приведения (отн. ед.),  $u_f(t)$  — напряжение на обмотке возбуждения ротора (отн. ед.);  $E_q(t)$  — ЭДС генератора по поперечной оси (отн. ед.);  $E'_q(t)$  — эквивалентная ЭДС возбуждения;  $E'_q(t)$  — переходная ЭДС по поперечной оси (отн. ед.);  $I_q(t)$  — ток статора по поперечной оси (отн. ед.);  $I_f(t)$  — ток возбуждения (отн. ед.);  $Q_e(t)$  — реактивная мощность (отн. ед.).

Предположим, что следующие сигналы доступны измерению:

$$z_1 = \vartheta + \xi_1, z_2 = \omega + \xi_2, z_3 = E'_q + \xi_3, \quad (35)$$

где  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и  $\xi_3$  — шумы измерения. В работах [28, 29] отмечается, что в аварийных ситуациях угол нагрузки и относительная скорость измеряются с большим уровнем шумов, в то время

как величина  $E'_q$  измеряется с низким уровнем шумов. В нормальном режиме работы генератора измерения содержат низкий уровень шумов.

Согласно работе [30] линеаризованная модель (32)—(34) в окрестности точки равновесия  $\vartheta^* = \pi/3$  (рад),  $\omega^* = 0$  (рад/с) и  $E'_q^* = 0,9$  (отн. ед.) запишется в виде

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,9 & -1,625 & -0,5 \\ -0,5 & 0 & -5,1635 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,52 \end{bmatrix} (u + f). \quad (36)$$

Здесь  $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ ,  $x_1 = \vartheta - \vartheta^*$ ,  $x_2 = \omega - \omega^*$  и  $x_3 = E'_q - E'_q^*$ ,  $f$  — возмущение, зависящее от параметрической неопределенности, сопротивления линии электропередач и остатка [30].

Пусть  $i$ -е уравнение будет третьим уравнением в (36) (см. условие (3)). Введем алгоритм (6), (13), (16), (22), где  $\mu = 0,01$  и  $\theta = 0$ .

Положим, что до  $t = 10$  с

$$\begin{aligned} f &= 1 + 0,2 \sin t + 0,1 \sin 0,3t + d_1, \\ \xi_1 &= 0,1 + 0,1 \sin 0,8t + d_2, \\ \xi_2 &= 0,2 + 0,1 \sin 1,1t + d_3, \\ \xi_3 &= 0,02 + 0,01 \sin 0,7t + d_4. \end{aligned} \quad (37)$$

Аварийная ситуация (например, короткое замыкание в линии электропередач [29]) произошла в момент  $t = 10$  с, при этом изменились следующие параметры:

$$\begin{aligned} f &= 10(1 + 0,2 \sin t + 0,1 \sin 0,3t + d_1), \\ \xi_1 &= 1 + 0,9 \sin 0,9t + 10d_2, \\ \xi_2 &= 3 + 2 \sin 1,1t + 10d_3, \\ \xi_3 &= 0,03 + 0,02 \sin 0,8t + d_4. \end{aligned} \quad (38)$$

Аварийная ситуация устранена с помощью открытия блокираторов в линии электропередач в момент времени  $t = 20$  с с восста-

новлением параметров (37). В (37) и (38) сигналы  $d_1, d_2, d_3$  и  $d_4$  получены с помощью генераторов белого шума в MATLAB Simulink со следующими параметрами: мощность шума 0,1; 0,3;  $10^{-4}$  и 0,7 и время выборки 0,07; 0,01; 0,03 и 0,1 с соответственно.

Сравним предложенный алгоритм с алгоритмом из работы [29]. Согласно [29], рассмотрим закон управления  $u = [1 \ 1,5 \ 2,1]x$ . На рис. 7 приведены результаты переходных процессов для предложенной системы управления (рис. 7, а) и алгоритма из работы [29] (рис. 7, б). Из рис. 7, а следует, что предложенный алгоритм управления обеспечивает компенсацию возмущений и помех измерения после 6 с с точностью 0,05. Алгоритм из работы [29] не обеспечивает одновременную компенсацию возмущений и помех измерения (рис. 7, б).

### Заключение

В статье разработан алгоритм управления с компенсацией возмущений и помех измерения для нелинейных объектов. В отличие от существующих результатов, в представленной статье: 1) алгоритм работоспособен в условиях помех измерения, размерности которых равны размерности выходного сигнала объекта управления; 2) значения возмущений и помех могут не совпадать; 3) не используется наблюдатель производных; 4) параметрические и внешние возмущения могут присутствовать в любом уравнении модели объекта. Получено линейное матричное неравенство, разрешимость которого гарантирует предельную ограниченность решений уравнения объекта в замкнутой системе. Результаты моделирования подтвердили результаты аналитических расчетов и продемонстрировали эффективность предложенной схемы управления в условиях случайных возмущений и помех измерения и при возможном наличии запаздывания в канале состояния. Полученные результаты имеют тривиальное обобщение на управление нелинейными сетевыми системами в условиях параметрической интервальной неопределенности, внешних ограниченных возмущений, помех в канале измерения и наличия коммуникационного запаздывания.

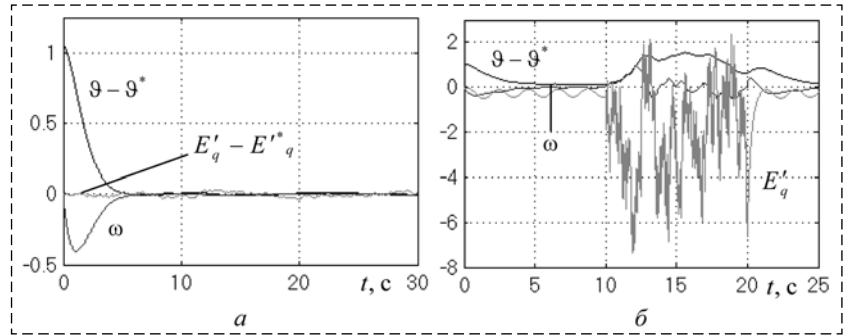


Рис. 7. Переходные процессы по  $9 - 9^*$ ,  $\omega$  и  $E'_q - E''_q$  для предложенного алгоритма (а) и алгоритма из [29] (б)

Fig. 7. The transients of  $9 - 9^*$ ,  $\omega$  and  $E'_q - E''_q$  for the proposed algorithm (а) and algorithm from [29] (б)

### ПРИЛОЖЕНИЕ

**Доказательство Утверждения 1.** Доказательство Утверждения 1 разделим на четыре шага. На шаге 1 будет получено уравнение по переменной  $x$  с учетом выражений (1), (7), (14), (16), (17), (19). На шаге 2 будет получено уравнение по переменной  $e$  с учетом выражений (1), (7), (14), (16), (17), (19). На базе полученных уравнений по переменным  $x$  и  $e$  на шаге 3 будет сформировано уравнение замкнутой системы и проведен анализ его устойчивости. На шаге 4 будет показана ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

*Шаг 1.* Из соотношений (21) и (22) следует, что  $u(t) - v(t) = \zeta$ , где  $\zeta = \frac{1}{\mu}(LD)^+[\theta - y(0)] - v(0)$ . Принимая во внимание соотношения (1), (7) и условие  $(LD)^+(LD) = I_p$ , перепишем выражение (20) в виде

$$v(t) = \underbrace{-\psi(x) - c_0 u(t) - \varphi(t)}_{-f(x,u,t)} + (LD)^+ [L\dot{x}(t) - LAx(t) - LBu(t)] + (LD)^+ \underbrace{\begin{bmatrix} -L\dot{x}(t) - \tilde{E}\dot{e}(t) - E_i\dot{\xi}_i(t) + \\ + LAL^+Lx(t) + LAL^+\tilde{E}e(t) + \\ + LAL^+E_i\xi_i(t) + \alpha(p)LBv(t) \end{bmatrix}}_{-\tilde{f}(x,u,t)}. \quad (\text{П.1})$$

Приняв  $\alpha(p) = \frac{1 - \mu p}{k}$  и учитывая, что  $v(t) = u(t) - \zeta$ , перепишем (П.1) как

$$[c_0 + k + \mu p]u(t) = -\psi(x) - \varphi(t) + (LD)^+ [-\tilde{E}\dot{e}(t) - E_i\dot{\xi}_i(t) - LA(I_n - L^+L)x(t) + LAL^+\tilde{E}e(t) + LAL^+E_i\xi_i(t)]. \quad (\text{П.2})$$

Умножив слева  $f(x, u, t)$  на оператор  $[c_0 + k + \mu p]$  и принимая во внимание выражения (7) и (П.2), результат запишем в виде

$$\begin{aligned} & [c_0 + k + \mu p]f(x, u, t) = \\ & = \mu \dot{\psi}(x) + \mu \dot{\varphi}(t) + k\psi(x) + k\varphi(t) + \\ & + c_0(LD)^+ [-\tilde{E}\dot{e}(t) - E_i \dot{\xi}_i(t) - LA(I_n - L^+L)x(t) + \\ & + LAL^+ \tilde{E}e(t) + LAL^+ E_i \xi_i(t)]. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Умножив слева (1) на оператор  $[c_0 + k + \mu p]$  и учитывая соотношения (П.2), (П.3), перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned} \mu \ddot{x}(t) & = (-c_0 I_n - kI_n + \mu A)\dot{x}(t) + \\ & + [c_0 A + kA - B(LD)^+ LA(I_n - L^+L) - \\ & - c_0 D(LD)^+ LA(I_n - L^+L)]x(t) + (-B + kD)\psi(x) + \\ & + (-B + kD)\varphi(t) + \mu D\dot{\psi}(x) + \mu D\dot{\varphi}(t) + \\ & + [-B(LD)^+ \tilde{E} - c_0 D(LD)^+ \tilde{E}]\dot{e}(t) + \\ & + [B(LD)^+ LAL^+ \tilde{E} + c_0 D(LD)^+ LAL^+ \tilde{E}]e(t) + \\ & + [-B(LD)^+ - c_0 D(LD)^+]E_i \dot{\xi}_i(t) + \\ & + [B(LD)^+ + c_0 D(LD)^+]LAL^+ E_i \xi_i(t). \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Обозначим  $\eta_1(t) = x(t)$ ,  $\eta_2(t) = \dot{x}(t)$  и с учетом обозначений (23) перепишем (П.4) в виде системы:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1(t) & = \eta_2(t), \\ \dot{\eta}_2(t) & = A_{21}\eta_1(t) + A_{22}\eta_2(t) + A_{23}e(t) + \\ & + A_{24}\dot{e}(t) + G_{21}\psi(\eta_1) + F_{21}\dot{\psi}(\eta_1) + B_{21}\varphi(t) + \\ & + B_{22}\dot{\varphi}(t) + B_{23}\xi_i(t) + B_{24}\dot{\xi}_i(t). \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

*Шаг 2.* Умножим слева выражение (15) на  $[c_0 + k + \mu p]$  и, учитывая соотношения (П.2) и (П.3), перепишем (15) как

$$\begin{aligned} \mu \ddot{e}(t) & = (-c_0 I_{m-1} - kI_{m-1} + \mu \tilde{A} + \tilde{B}(LD)^+ \tilde{E} + \\ & + c_0 \tilde{D}(LD)^+ \tilde{E})\dot{e}(t) + [c_0 \tilde{A} + k\tilde{A} - \\ & - \tilde{B}(LD)^+ LAL^+ \tilde{E} - c_0 \tilde{D}(LD)^+ LAL^+ \tilde{E}]e(t) + \\ & + [-c_0 \tilde{A}_2 - k\tilde{A}_2 + \tilde{B}(LD)^+ LA(I_n - L^+L) + \\ & + c_0 \tilde{D}(LD)^+ LA(I_n - L^+L)]x(t) - \mu \tilde{A}_2 \dot{x}(t) + \\ & + \tilde{B}\psi(x) + \tilde{B}\varphi(t) - \mu \tilde{D}\dot{\psi}(x) - \mu \tilde{D}\dot{\varphi}(x, t) - \\ & - k\tilde{D}\psi(x) - k\tilde{D}\varphi(t) + (c_0 \tilde{D}(LD)^+ E_i + \\ & + \tilde{B}(LD)^+ E_i + \mu \tilde{A}_3)\dot{\xi}_i(t) + \\ & + (-\tilde{B}(LD)^+ LAL^+ E_i - \\ & - c_0 \tilde{D}(LD)^+ LAL^+ E_i + c_0 \tilde{A}_3 + k\tilde{A}_3)\xi_i(t). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Обозначим  $\sigma_1(t) = e(t)$ ,  $\sigma_2(t) = \dot{e}(t)$  и с учетом обозначений (23) преобразуем уравнение (П.6) к виду

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1(t) & = \sigma_2(t), \\ \dot{\sigma}_2(t) & = A_{41}\eta_1(t) + A_{42}\eta_2(t) + A_{43}\sigma_1(t) + \\ & + A_{44}\sigma_2(t) + G_{41}\psi(\eta_1) + F_{41}\dot{\psi}(\eta_1) + \\ & + B_{41}\varphi(t) + B_{42}\dot{\varphi}(x, t) + B_{43}\xi_i(t) + B_{44}\dot{\xi}_i(t). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

*Шаг 3.* Введем векторы  $x_e = \text{col}\{\eta_1, \eta_2, \sigma_1, \sigma_2\}$  и  $d = \text{col}\{\varphi, \dot{\varphi}, \xi_i, \dot{\xi}_i\}$ . Принимая во внимание обозначения (23), объединим системы (П.5) и (П.7) в виде

$$\dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + G_e \psi(\eta_1) + F_e \dot{\psi}(\eta_1) + B_e d(t). \quad (\text{П.8})$$

Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = x_e^T(t) P x_e(t). \quad (\text{П.9})$$

Найдем условие, при котором будет выполнено неравенство

$$\dot{V} + 2\beta V - \rho d^T d \leq 0. \quad (\text{П.10})$$

Для этого, принимая во внимание соотношения (П.8) и (П.9), перепишем неравенство (П.10) как

$$\begin{aligned} x_e^T(t) (A_e^T P + P A_e) x_e(t) + 2x_e^T(t) P G_e \psi(\eta_1) + \\ + 2x_e^T(t) P F_e \dot{\psi}(\eta_1) + 2x_e^T(t) P B_e d(t) + \\ + 2\beta x_e^T(t) P x_e(t) - \rho d^T(t) d(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

С учетом обозначений (23) и того, что  $\dot{\psi}(\eta_1) = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} C_2 x_e$ ,  $|\psi(x)| \leq \alpha_1 |x|$  и  $\left\| \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right\| \leq \alpha_2$ , рассмотрим следующие оценки сверху:

$$\begin{aligned} \psi^T(\eta_1) \psi(\eta_1) & \leq \alpha_1^2 x_e^T C_1^T C_1 x_e, \\ \dot{\psi}^T(\eta_1) \dot{\psi}(\eta_1) & \leq \alpha_2^2 x_e^T C_2^T C_2 x_e. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Ведем вектор  $z = \text{col}\{x_e, \psi(\eta_1), \dot{\psi}(\eta_1), d\}$  и перепишем выражения (П.11) и (П.12) соответственно как

$$z^T \begin{bmatrix} A_e^T P + P A_e + 2\beta P & P G_e & P F_e & P B_e \\ * & O_{l \times l} & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & * & -\rho I_4 \end{bmatrix} z \leq 0;$$

$$\tau_1 z^T \begin{bmatrix} \alpha_1^2 C_1^T C_1 & O_{2(n+m-1) \times l} & O_{2(n+m-1) \times l} & O_{2(n+m-1) \times 4} \\ * & -I_l & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & * & O_{4 \times 4} \end{bmatrix} z \geq 0; \quad (\text{П.13})$$

$$\tau_2 z^T \begin{bmatrix} \alpha_2^2 C_2^T C_2 & O_{2(n+m-1) \times l} & O_{2(n+m-1) \times l} & O_{2(n+m-1) \times 4} \\ * & O_{l \times l} & O_{l \times l} & O_{l \times 4} \\ * & * & -I_l & O_{l \times 4} \\ * & * & * & O_{4 \times 4} \end{bmatrix} z \geq 0.$$

Согласно S-процедуре для одновременного выполнения условий (П.13) достаточно, чтобы было выполнено ЛМН  $\Psi < 0$ , где  $\Psi$  определена в форме (23). Таким образом, неравенство (П. 10) выполнено при  $\Psi < 0$ . Вместе с тем, из соотношений (П. 9) и (П.1 0) следует, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} (x_e^T P x_e) \leq \frac{\rho \sum_{i=1}^3 \chi_i^2}{2\beta \lambda_{\min}(P)}. \quad \text{С учетом соотно-}$$

шений  $\lambda_{\min}(P)x^T x \leq \lambda_{\min}(P)x_e^T x_e \leq x_e^T P x_e$  получим оценку для  $\delta$  в виде (25).

**Шаг 4.** Поскольку вектор  $x_e$  — предельно ограниченный, то сигналы  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $e$  и  $\dot{e}$  предельно ограниченные. Предельная ограниченность сигналов  $z$ ,  $\tilde{z}$  и  $\dot{z}_i$  следует из соотношений (5), (6) и ограниченности  $\xi$ ,  $\xi_i$ . Сигналы  $\hat{y}$  и  $\dot{\hat{y}}$  ограничены в силу (16). Из (П.2) и условия  $c_{\min} + k > 0$  следует ограниченность сигнала  $u$ . Ограниченность  $\int_0^t \hat{y}(s) ds$  следует из закона (22). Сигнал  $\hat{\xi}$  ограничен из (14). Таким образом, функция  $\int_0^t [\tilde{A}\hat{\xi}(s) - \tilde{A}_1 z(s)] ds$  ограничена в силу (13). Следовательно, все сигналы ограничены в замкнутой системе.

**Доказательство Утверждения 2.** Из обозначений (23) следует, что матрица  $\Psi$  аффинна по матрицам системы (П.8), матрицы  $A_e$ ,  $G_e$ ,  $F_e$  и  $B_e$  линейно зависят от параметра  $c_0$ . Таким образом, согласно замечанию 2 в работе [31], для проверки ЛМН  $\Psi < 0$  достаточно вычислить  $\Psi$  в вершинах  $c_0 \in [c_{\min}, c_{\max}]$ , т. е. достаточно проверить два ЛМН (26).

#### Список литературы

1. Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J. Synchronization of Passifiable Lurie Systems Via Limited-Capacity Communication Channel // IEEE Trans. on Circuits and Systems—I: Regular papers. 2009. Vol. 56, N. 2. P. 430—439.
2. Андриевский Б. Р., Матвеев А. С., Фрадков А. Л. Управление и оценивание при информационных ограниче-

ниях: к единой теории управления, вычислений и связи // АиТ. 2010. № 4. С. 34—99.

3. Fradkov A. L., Andrievsky B., Ananyevskiy M. S. Passification based synchronization of nonlinear systems under communication constraints and bounded disturbances // Automatica. 2015. Vol. 55. P. 287—293.

4. Furtat I. B., Fradkov A. L., Liberzon D. Compensation of disturbances for MIMO systems with quantized output // Automatica. 2015. Vol. 60. P. 239—244.

5. Fradkov A. L., Andrievsky B., Peaucelle D. Estimation and Control Under Information Constraints for LAAS Helicopter Benchmark // IEEE Trans. on Control Systems Technology. 2010. Vol. 18, N. 5. P. 1180—1187.

6. Furtat I. B., Fradkov A. L. Robust control of multi-machine power systems with compensation of disturbances // International Journal of Electrical Power & Energy Systems. 2015. Vol. 73. P. 584—590.

7. Степанов О. А. Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации: учеб. пособие для вузов. СПб: Электронприбор, 2009.

8. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2007.

9. Квакуернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.

10. Raumann L. D. Design and Analysis of Analog Filters: A Signal Processing Perspective. Springer Science & Business Media, 2001.

11. Haykin S. Adaptive Filter Theory. Prentice-Hall, Inc., 1991.

12. Katzenelson J., Gould L. A. The design of nonlinear filters and control systems. Part II // Information and Control. 1964. Vol. 7, N. 2. P. 117—145.

13. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. Детерминированное наблюдение и стохастическая фильтрация. М.: Наука, 1982.

14. Степанов О. А. Фильтр Калмана. История и современность. (К 80-летию Рудольфа Эмиля Калмана) // Гирскопия и навигация. 2010. № 2 (69). С. 107—121.

15. Ahrens J., Khalil K. High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach // Automatica. 2009. Vol. 45. P. 936—943.

16. Boizot N., Busvelle E., Gauthier J. An adaptive high-gain observer for nonlinear systems // Automatica. 2010. Vol. 46. P. 1483—1488.

17. Sanfelice R., Praly L. On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise // Automatica. 2011. Vol. 47. P. 2165—2176.

18. Prasov A., Khalil H. A nonlinear high-gain observer for systems with measurement noise in a feedback control framework // IEEE Trans. Automat. Contr. 2013. Vol. 58. P. 569—580.

19. Wang L., Astolfy D., Hongye S., Marconi L., Isidori A. Output stabilization for a class of nonlinear systems via high-gain observer with limited gain power // IFAC PapersOnLine. 2015. Vol. 48 P. 730—735.

20. Astolfy D., Marconi L. A high-gain nonlinear observer with limited gain power // IEEE Trans. Automatic Control. 2015. Vol. 60. P. 3059—3064.

21. Nekhoroshikh A., Furtat I. Robust Stabilization of Linear Plants under Uncertainties and High-Frequency Measurement Noises // Proc. of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation, Malta. 2017.

22. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / Под ред. Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МТТУ им. Н. Э. Баумана, 2002.

23. Pigg S., Bodson M. Adaptive Algorithms for the Rejection of Sinusoidal Disturbances Acting on Unknown Plants // IEEE Trans. on Control Systems Technology. 2010. Vol. 18, N. 4. P. 822—836.

24. Поляк Б. Т., Топунов М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений: управление по выходу // АиТ. 2008. № 5. С. 72—90.

25. **Цыкунов А. М.** Робастное управление с компенсацией возмущений. М.: Физматлит, 2012.

26. **Furtat I. B.** Control of Linear Time-Invariant Plants with Compensation of Measurement Noises and Disturbances // Accepted at the 56th IEEE Conference on Decision and Control (CDC2017), December 12–15, 2017, Melbourne, Australia.

27. **Furtat I. B.** Disturbance Compensation Algorithm Under Saturation of Control Signal // Proc. of the 20th World Congress of The International Federation of Automatic Control, France. 2017. P. 6724–6729.

28. **Anderson P. M., Fouad A. A.** Power Systems Control and Stability. Iowa State University Press, 1997.

29. **Guo G., Hill D. J., Wang Y.** Nonlinear output stabilization control for multimachine power systems // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 2000. Part I. Vol. 47, N. 1. P. 46–53.

30. **Dehghani M., Nikraves S. K. Y.** Nonlinear state space model identification of synchronous generator // Electric Power Systems Research. 2008. Vol. 78. P. 926–940.

31. **Fridman E.** A refined input delay approach to sampled-data control // Automatica. 2010. Vol. 46. P. 421–427.

## Output Feedback Algorithm for Nonlinear Systems with Compensation of Bounded Disturbances and Measurement Noises

I. B. Furtat, P. A. Gushchin, A. A. Peregudin

Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences,  
199178, St. Petersburg, Russian Federation

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russian Federation

Corresponding author: **Furtat Igor B.**, D. Sc., Assistant Professor,  
Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, 199178, St. Petersburg, Russia,  
ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russian Federation, e-mail: cainenash@mail.ru

Accepted on August 21, 2018

### Abstract

The output feedback algorithm for dynamic plants with compensation of parametric uncertainty, external disturbances and measurement noises is synthesized. The plants are described by a nonlinear system of differential equations with vector input and output signals. Unlike most existing control schemes in this paper the dimensions of the measurement interference and the output signal are equal, the sources of the signals of disturbances and disturbances are different, parametric and external disturbances can be present in any equation of the plant model. For simultaneous compensation of disturbances and measurement noises it is proposed to consider two channels. On the first channel a part of the measurement noises will be estimated which will allow partial recovery of the information about the plant noisy output. On the second channel the disturbances will be compensated. Thus, at least two independent measurement channels are required for simultaneous compensation of disturbances and measurement noises. Sufficient conditions for calculating the parameters of the algorithm in the form of solvability of the linear matrix inequality are obtained. It is shown that the equation of a closed-loop system obtained on the basis of the proposed algorithm depends on the disturbances and the smallest component of the measurement noise. However, if the smallest component cannot be identified a priori, the results of the transients depend on the component of the noise that will be selected in the synthesis of the control system. Thus, unlike most existing control schemes, where the equation of a closed-loop system depends on disturbance and noise, the resulting algorithm provides better transients, because they do not depend on the entire noise vector, but only on its smallest (one) component. The simulations for a third-order nonlinear plant and the synchronization of an electrical generator connected to the power grid are presented. Numerical examples illustrate the effectiveness of the proposed scheme and the robustness with respect to random components in the noises and disturbances.

**Keywords:** nonlinear system, compensation, disturbance, noise, S-procedure, linear matrix inequality

**Acknowledgements.** The study was performed by a grant from the Russian Science Foundation (Project № 18-79-10104) in IPME RAS

For citation:

**Furtat I. B., Gushchin P. A., Peregudin A. A.** Output Feedback Algorithm for Nonlinear Systems with Compensation of Bounded Disturbances and Measurement Noises, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 3–15.

DOI: 10.17587/mau.20.3-15

### References

1. **Fradkov A. L., Andrievsky B., Evans R. J.** Synchronization of Passifiable Lurie Systems Via Limited-Capacity Communication Channel, *IEEE Trans. on Circuits and Systems—I: Regular papers*, 2009, vol. 56, no. 2, pp. 430–439.

2. **Andrievskij B. R., Matveev A. S., Fradkov A. L.** *Upravlenie i ocenivanie pri informacionnyh ogranichenijah: k edinoj teorii upravlenija, vychislenij i svjazi* (Control and estimation with informational limitations), *Automatika i Telemekhanika*, 2010, no. 4, pp. 34–99 (in Russian).

3. **Fradkov A. L., Andrievsky B., Ananyevskiy M. S.** Passification based synchronization of nonlinear systems under communication constraints and bounded disturbances, *Automatica*, 2015, vol. 55, pp. 287–293.

4. **Furtat I. B., Fradkov A. L., Liberzon D.** Compensation of disturbances for MIMO systems with quantized output, *Automatica*, 2015, vol. 60, pp. 239–244.

5. **Fradkov A. L., Andrievsky B., Peaucelle D.** Estimation and Control Under Information Constraints for LAAS Helicopter Benchmark, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2010, vol. 18, no. 5, pp. 1180–1187.

6. **Furtat I. B., Fradkov A. L.** Robust control of multi-machine power systems with compensation of disturbances, *Interna-*

tional Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2015, vol. 73, pp. 584–590.

7. **Stepanov O. A.** *Osnovy teorii ocenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigacionnoj informacii, uchebnoe posobie dlja vuzov* (Basics of estimation theory with applications), SPb, Jeletropribor, 2009 (in Russian).

8. **Oppengejm A., Shafer R.** *Cifrovaja obrabotka signalov* (Digital signal processing), Moscow, Tehnosfera, 2007 (in Russian).

9. **Kvakernaak H., Sivan R.** *Linejnye optimal'nye sistemy upravlenija* (Linear optimal control systems), Moscow, Mir, 1977 (in Russian).

10. **Paarmann L. D.** *Design and Analysis of Analog Filters: A Signal Processing Perspective*, Springer Science & Business Media, 2001.

11. **Haykin S.** *Adaptive Filter Theory*, Prentice-Hall, Inc., 1991.

12. **Katzenelson J., Gould L. A.** The design of nonlinear filters and control systems. Part II, *Information and Control*, 1964, vol. 7, no. 2, pp. 117–145.

13. **Brammer K., Ziffing G.** *Fil'tr Kalmana-B'jusi. Determinirovannoe nabljudenie i stohasticheskaja fil'tracija* (The Kalman-Busch filter. Deterministic observation and stochastic filtration), Moscow, Nauka, 1982 (in Russian).

14. **Stepanov O. A.** *Fil'tr Kalmana. Istorija i sovremennost'* (Kalman Filter. History and modernity), *Giroskopija i Navigacija*, 2010, no. 2 (69), pp. 107–121 (in Russian).

15. **Ahrens J., Khalil K.** High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach, *Automatica*, 2009, vol. 45, pp. 936–943.

16. **Boizot N., Busvelle E., Gauthier J.** An adaptive high-gain observer for nonlinear systems, *Automatica*, 2010, vol. 46, pp. 1483–1488.

17. **Sanfelice R., Praly L.** On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise, *Automatica*, 2011, vol. 47, pp. 2165–2176.

18. **Prasov A., Khalil H.** A nonlinear high-gain observer for systems with measurement noise in a feedback control framework, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 2013, vol. 58, pp. 569–580.

19. **Wang L., Astolfy D., Hongye S., Marconi L., Isidori A.** Output stabilization for a class of nonlinear systems via high-gain observer with limited gain power, *IFAC PapersOnLine*, 2015, vol. 48, pp. 730–735.

20. **Astolfy D., Marconi L.** A high-gain nonlinear observer with limited gain power, *IEEE Trans. Automatic Control*, 2015, vol. 60, pp. 3059–3064.

21. **Nekhoroshikh A., Furtat I.** Robust Stabilization of Linear Plants under Uncertainties and High-Frequency Measurement Noises, *Proc. of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Malta, 2017.

22. **Egupov N.D.** ed. *Metody robustnogo, nejro-nechetkogo i adaptivnogo upravlenija* (Methods of robust, fuzzy and adaptive control), Moscow, Publishing house of MTTU im. N. Je. Bauman, 2002 (in Russian).

23. **Pigg S., Bodson M.** Adaptive Algorithms for the Rejection of Sinusoidal Disturbances Acting on Unknown Plants, *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2010, vol. 18, no. 4, pp. 822–836.

24. **Poljak B. T., Topunov M. V.** *Podavlenie ogranichenykh vneshnih vozmushhenij: upravlenie po vyvodu* (Suppression of bounded exogenous disturbances: Output feedback), *Automatika i Telemekhanika*, 2008, no. 5, pp. 72–90 (in Russian).

25. **Cykunov A. M.** *Robustnoe upravlenie s kompensaciej vozmushhenij* (Robust control with compensations of disturbances), Moscow, Fizmatlit, 2012 (in Russian).

26. **Furtat I. B.** Control of Linear Time-Invariant Plants with Compensation of Measurement Noises and Disturbances, Accepted at the *56th IEEE Conference on Decision and Control (CDC2017)*, December 12–15, 2017, Melbourne, Australia.

27. **Furtat I. B.** Disturbance Compensation Algorithm Under Saturation of Control Signal, *Proc. of the 20th World Congress of The International Federation of Automatic Control*, France, 2017, pp. 6724–6729.

28. **Anderson P. M., Fouad A. A.** *Power Systems Control and Stability*, Iowa State University Press, 1997.

29. **Guo G., Hill D. J., Wang Y.** Nonlinear output stabilization control for multimachine power systems, *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 2000, Part 1, vol. 47, no. 1, pp. 46–53.

30. **Dehghani M., Nikravesh S. K. Y.** Nonlinear state space model identification of synchronous generator, *Electric Power Systems Research*, 2008, vol. 78, pp. 926–940.

31. **Fridman E.** A refined input delay approach to sampled-data control, *Automatica*, 2010, vol. 46, pp. 421–427.



27–29 мая 2019 г. в Санкт-Петербурге  
на базе АО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор" состоится

**XXVI Санкт-Петербургская  
МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ  
(МКИНС 2019)**



Председатель программного комитета — Академик РАН, проф. **В. Г. Пешехонов**

**Тематика конференции**

- ◆ Инерциальные датчики, системы навигации и ориентации
- ◆ Интегрированные системы навигации и управления движением
- ◆ Глобальные навигационные спутниковые системы
- ◆ Средства гравиметрической поддержки навигации

На конференции не рассматриваются вопросы, затрагивающие военно-техническое сотрудничество, разработки военных технологий и образцов вооружений и военной техники. Программный комитет считает полезным представление обзорных докладов и докладов молодых ученых (до 33 лет).

Подробную информацию о конференции см. сайте:  
<http://www.elektropribor.spb.ru/icins2019/rindex>

А. Р. Гайдук, д-р техн. наук, проф., gaiduk\_2003@mail.ru,  
Южный федеральный университет, Кисловодский гуманитарно-технический институт

## Синтез астатических цифровых систем с применением стандартных нормированных передаточных функций<sup>1</sup>

*Системы управления с повышенным порядком астатизма обеспечивают более высокую точность, и поэтому их применение является целесообразным при решении многих задач управления. В особенности это относится к цифровым системам, которые обладают более высокой технологичностью и надежностью. Однако задача синтеза цифровых систем несколько сложнее по сравнению с аналогичной задачей в непрерывном случае. Статья посвящена решению задачи синтеза дискретных автоматических систем, реализация которых осуществляется на основе принципа управления по выходу и воздействиям. Стандартные нормированные передаточные функции (СНПФ) являются удобным средством для решения задачи синтеза систем управления с заданными прямыми показателями качества. Метод формирования желаемых передаточных функций цифровых систем управления на основе СНПФ непрерывных систем предлагается в данной статье. Этот метод является следствием доказанной в статье теоремы и заключается в проведении z-преобразования подходящей табличной СНПФ непрерывной системы и некоторой модификации полученной функции. Метод формирования желаемых передаточных функций с астатизмом второго порядка, с постоянным перерегулированием и конечной длительностью переходных процессов также представлен в статье. Системы управления с такими свойствами переходных процессов имеют повышенный порядок, поэтому для их реализации требуются микроконтроллеры с высоким быстродействием. Эффективность предложенных методов иллюстрируется численными примерами.*

**Ключевые слова:** система, цифровое устройство управления, принцип управление по выходу и воздействиям, астатизм, прямые показатели качества

### Введение

Интенсивное развитие микропроцессоров и микроконтроллеров, созданных на основе интегральных технологий, повышение их надежности и технологичности приводят к широкому распространению цифровых систем автоматического управления (ЦСУ). Эти системы обеспечивают более высокое качество процессов управления, обладают высокой адаптируемостью к изменениям технологических процессов, что существенно повышает экономическую эффективность их применения [1–3].

Однако включение цифровых элементов в контур управления приводит к возникновению ряда особенностей математического описания и функционирования систем управления. Методы анализа и синтеза цифровых систем несколько сложнее методов исследования непрерывных систем. Вместе с тем применение компьютерных средств и технологий позволяет создавать высокоэффективные по точности, быстродействию и широте решаемых задач системы управления различными технологическими объектами [2–5], в том числе и подвижными объектами, совершающими целевые движения [6].

Задача синтеза ЦСУ фактически заключается в определении алгоритма работы цифрового

устройства управления (ЦУУ), реализующего найденный закон управления. Для решения этой задачи применяются различные методы [4–8], но наиболее рациональными представляются методы аналитического синтеза, которые позволяют и структуру, и параметры закона управления определить путем решения некоторых уравнений.

Наиболее ранним из аналитических методов является разработанный Норбертом Винером частотный метод синтеза линейных систем при случайных воздействиях [9]. В середине XX века был разработан также аналитический метод синтеза систем, оптимальных в смысле квадратичных критериев качества [10, 11]. Полиномиальные варианты этих методов применительно к дискретным системам несколько позже были предложены в работах Л. Н. Волгина [12, 13]. В основе этих вариантов лежат полиномиальные уравнения, решение которых позволяет найти алгоритм работы ЦУУ.

Оптимальные системы обычно ориентированы на достижение экстремума некоторого функционала, поэтому обеспечение заданных значений первичных показателей качества этими методами весьма затруднительно. В то же время с инженерной точки зрения оценка качества систем управления именно по первичным показателям является более предпочтительной [14].

Интересно, что также в середине XX века был предложен аналитический метод синтеза

<sup>1</sup>Статья подготовлена по результатам выполнения в ЮФУ проекта № 18-19-00621 по гранту РФФИ.

систем управления по первичным показателям качества, в основе которого лежат стандартные нормированные передаточные функции (СНПФ) [15, 16]. Эти функции позволяют с учетом требований к проектируемой системе построить желаемые передаточные функции (ПФ), по которым с учетом модели заданного объекта находится требуемое управление. В начальный период метод СНПФ развивался достаточно интенсивно, но вскоре выяснилось, что получаемые управления часто оказываются физически не реализуемыми [16, 17]. Поэтому в дальнейшем ему уделялось мало внимания, несмотря на то, что в работах [18, 19] и др. было показано, что причиной указанной нереализуемости являлось применение принципа управления по отклонению. При использовании принципа "управления по выходу и воздействиям" [8, 18, 19] эта трудность исчезает, так как этот принцип в совокупности с методом СНПФ и полиномиальными уравнениями позволяет учесть условия физической реализуемости на этапе синтеза. В работах [20, 21] было показано, что применение метода аналитического синтеза систем с управлением по выходу и воздействиям (АССУВВ) позволяет синтезировать непрерывные системы управления практически с любым порядком астатизма и с заданными прямыми показателями качества, если, конечно, объекты являются стабилизируемыми.

В данной работе метод АССУВВ с применением СНПФ распространяется на случай дискретных (цифровых) систем управления. В целях понижения порядка замкнутой ЦСУ здесь допускается компенсация устойчивых нулей и полюсов объекта равными им полюсами и нулями ЦУУ. Применение этого приема встречается и во многих других работах. В частности, методы, разработанные в ранних [9, 12, 13] и более поздних [22, 23] работах, включают факторизацию полиномов относительно границы устойчивости. Это приводит к существенному недостатку данных методов, так как длительность переходных процессов систем, синтезированных этими методами, по переменным состояниям может в несколько раз превышать расчетную длительность переходного процесса по выходной переменной.

Это связано с тем, что скомпенсированные нули и полюсы на самом деле оказываются корнями характеристического полинома замкнутой системы и образуют так называемую неполную часть, т. е. "неуправляемую со входа системы и(или) ненаблюдаемую с ее выхода" подсистему. В силу этого всем скомпенсированным нулям и полюсам соответствуют

моды, которые не наблюдаются с выхода системы, но, как правило, содержатся в переменных состояниях системы. Поэтому если компенсируются устойчивые нули или полюсы, но близкие к границе устойчивости, то им будут соответствовать медленно затухающие моды, что приводит к значительно большей длительности переходных процессов по переменным состояниям, чем по выходу системы. Более того, разная длительность этих процессов является грубым свойством таких систем [21].

При использовании метода АССУВВ факторизация полиномов осуществляется относительно границы области комплексной плоскости, допустимой для расположения корней характеристического полинома системы с точки зрения ее качества. Поэтому метод АССУВВ свободен от этого недостатка, так как указанная граница всегда располагается достаточно далеко от границы устойчивости [8, 15, 16]. При этом, в отличие от модального или оптимального управлений, здесь не требуется измерение переменных состояния объекта управления, а нулевые значения коэффициентов ошибки, определяющие точность системы, не зависят от ее параметров [21]. Перейдем к изложению предлагаемого метода синтеза ЦСУ с применением СНПФ.

### Постановка задачи

В настоящее время в ЦСУ в качестве цифровых управляющих устройств (ЦУУ) чаще всего используются микроконтроллеры, в которых осуществляется преобразование сигналов (с помощью АЦП и ЦАП), вычисление значений управляющего воздействия с помощью арифметико-логического устройства (АЛУ) и хранение данных [24]. Однако при решении задачи синтеза АЦП и ЦАП условно относят к объекту управления, в результате чего образуется дискретный объект управления (ДОУ) (рис. 1) [2–4, 22]. Поэтому в дальнейшем под ЦУУ понимается арифметико-логическое устройство (АЛУ) и другие элементы, реализующие закон управления.

Отметим, что на рис. 1 помимо дискретных задающего воздействия  $g_k$ , управления  $u_k$

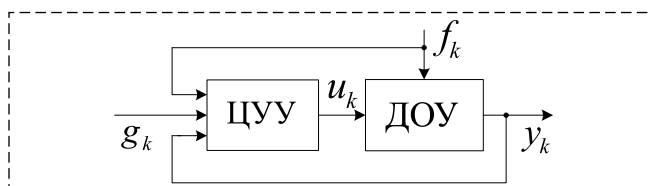


Рис. 1. Расчетная схема цифровой системы управления  
Fig. 1. The circuit of a digital control system for design

и управляемой переменной  $y_k$  показано и дискретное возмущение  $f_k$ .

Примем, что полный ДОУ описывается уравнением "вход-выход", которое в  $z$ -изображениях имеет вид:

$$A(z)y(z) = B(z)u(z) + B_1(z)f(z). \quad (1)$$

Если  $n_{\text{ДОУ}} = \deg A(z)$ , а  $m = \deg B(z)$ , то  $n_{\text{ДОУ}}$  — порядок, а  $n_{\text{ДОУ}} - m = \mu_{\text{ДОУ}}$  — относительный порядок ДОУ. Полиномы уравнения (1) определяются хорошо известными методами, которые здесь не рассматриваются [22]. Отметим лишь, что преобразование сигналов в АЦП, ЦАП и вычисление значений управления  $u_k$  в АЛУ всегда приводит к задержкам по времени, которые могут быть как меньше, так и больше периода дискретизации (квантования по времени)  $T$ . Пусть  $\tau_{\text{пр}} — суммарное время запаздывания в ЦСУ, причем  $\tau_{\text{пр}} = m_{\tau}T + \tau_1$ , где  $m_{\tau} \geq 0$  — целое число, а  $0 < \tau_1 < T$ . Тогда порядок ДОУ (1)$

$$n_{\text{ДОУ}} = \begin{cases} n_{\text{ноб}} + 1, & \text{если } 0 < \tau_{\text{пр}} < T, \\ n_{\text{ноб}} + m_{\tau} + 1, & \text{если } \tau_{\text{пр}} > T, \end{cases} \quad (2)$$

где  $n_{\text{ноб}}$  — порядок непрерывного объекта. Согласно (2) запаздывание в ЦСУ учитывается моделью ДОУ (1), (2), причем  $\mu_{\text{ДОУ}} = \mu_{\text{ноб}} + m_{\tau} + 1$ , где  $\mu_{\text{ноб}}$  — относительный порядок непрерывного объекта [25].

В соответствии с принципом управления по выходу и воздействиям на вход ЦУУ поступают, как показано на рис. 1, все измеряемые величины  $g_k$ ,  $y_k$  и  $f_k$ , поэтому его уравнение в общем случае, но без обратной связи по  $u$ , записывается следующим образом:

$$R(z)u(z) = Q(z)g(z) - L(z)y(z) + Q_1(z)f(z), \quad (3)$$

где  $R(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $L(z)$  и  $Q_1(z)$  — некоторые неизвестные полиномы. Если возмущение  $f_k$  не измеряется, то полином  $Q_1(z) \equiv 0$ , естественно.

Именно полиномы из уравнения (3) необходимо найти в результате решения задачи синтеза. Практически запаздывание  $\tau_{\text{пр}}$  в ЦУУ не может быть равным нулю. Поэтому условия физической реализуемости уравнения (3) можно записать в следующем виде:

$$r \geq q \geq 0, \quad r \geq l \geq 0, \quad r \geq q_1 \geq 0, \quad (4)$$

где  $r = \deg R(z)$ ,  $q = \deg Q(z)$ ,  $l = \deg L(z)$  и  $q_1 = \deg Q_1(z)$ . Величина  $\mu_{\text{ЦУУ}} = \min\{r - q; r - l; r - q_1; 0\}$  — относительный порядок ЦУУ. Учитывая, что запаздывание в ЦУУ учитывается моделью ДОУ (1), далее будем полагать  $\mu_{\text{ЦУУ}} = 0$ .

Из выражений (1) и (3) следует уравнение замкнутой системы

$$D(z)y(z) = D_0(z)g(z) + D_1(z)f(z), \quad (5)$$

где

$$D(z) = A(z)R(z) + B(z)L(z); \quad (6)$$

$$D_0(z) = Q(z)B(z); \quad (7)$$

$$D_1(z) = B_1(z)R(z) + B(z)Q_1(z),$$

$n_{\text{сис}} = \deg D(z)$  — порядок, а  $\mu_{\text{сис}} = \deg D(z) - \deg D_0(z)$  — относительный порядок системы (1), (3) или (5).

Задача синтеза ЦСУ (1), (3) заключается в определении степеней и коэффициентов полиномов  $R(z)$ ,  $Q(z)$ ,  $L(z)$  и  $Q_1(z)$  в уравнении (3). Ниже они определяются с учетом  $n_{\text{ДОУ}}$ ,  $\mu_{\text{ДОУ}}$ ,  $\mu_{\text{сис}}$  и совокупности следующих требований к системе (5):

- устойчивость;
- астатизм заданного порядка  $v_g^* \geq 1$  к задающему воздействию  $g_k$ ;
- астатизм заданного порядка  $v_f^* \geq 0$  к возмущению  $f_k$  при  $v_f^* \leq v_g^*$ ;
- длительность переходного процесса не более заданного значения  $t_p^*$ ;
- значение перерегулирования не более заданного значения  $\sigma^* \%$ ;
- физическая реализуемость ЦУУ (3) с учетом условий (4), а также неравенств:  $\mu_{\text{сис}} \geq \mu_{\text{ДОУ}} + \mu_{\text{ЦУУ}}$ ;  $n_{\text{сис}} \geq 2n_{\text{ДОУ}} + \mu_{\text{ЦУУ}} - 1$ , которые учитывают наличие в системе (5) заданной части, обусловленной ДОУ [19, 26];
- разрешимость уравнения (6) относительно полиномов  $R(z)$ ,  $L(z)$  и уравнений (7) относительно полиномов  $Q(z)$  и  $Q_1(z)$  с учетом условий (4).

Условия разрешимости сформулированной задачи синтеза существенно зависят от способа назначения корней полинома  $D(z)$  в выражениях (5) и (6) [18, 20, 21]. Системы, у которых часть корней этого полинома совпадают с нулями или полюсами объекта управления, называются системами с согласованными полюсами. Как правило, они имеют более низкий порядок, т. е. меньшую сложность и повышенную робастность [21, 27], поэтому именно такие системы рассматриваются далее.

Синтез ЦСУ, в том числе и астатических, удобно осуществлять на основе желаемых ПФ, которые создаются на основе требований, предъявляемых к синтезируемым системам. Как отмечалось выше, эти функции удобно строить на основе СНПФ. Однако СНПФ дискретных (цифровых) систем не известны, но

желаемые ПФ ЦСУ можно получать, как будет показано ниже, на основе СНПФ непрерывных систем. Перейдем к рассмотрению соответствующего метода.

### Передаточные функции дискретных астатических систем

Прежде всего, рассмотрим связь между ПФ астатических дискретных (цифровых) систем и ПФ непрерывных систем [16, 22, 25].

Пусть  $W_{yg}(p) = B(p)/A(p)$  — ПФ непрерывной устойчивой системы управления, обладающей астатизмом порядка  $v_g \geq 1$  к задающему воздействию  $g(t)$ . Имея в виду СНПФ и желаемые ПФ непрерывных систем, построенные на их основе, примем, что полиномы

$$A(p) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i p^i, \quad B(p) = \sum_{i=0}^{v_g-1} \alpha_i p^i, \quad (8)$$

где  $\alpha_i > 0$  и удовлетворяют одному из критериев устойчивости с конечным запасом.

ПФ  $W_{yg}(z)$  дискретной системы с фиксатором нулевого порядка, соответствующая при некотором периоде  $T$  ПФ  $W_{yg}(p)$ , определяется преобразованием

$$W_{yg}(z) = \frac{z-1}{z} Z_T \left\{ \frac{W_{yg}(p)}{p} \right\}. \quad (9)$$

Здесь  $Z_T\{\zeta(p)\}$  — условное обозначение преобразования изображения  $\zeta(p)$  в  $z$ -изображение  $\zeta(z)$ , выполняемого с помощью таблиц изображений по Лапласу [21–23, 25].

**Теорема 1.** Если ПФ  $W_{yg}(p) = B(p)/A(p)$  удовлетворяет условиям устойчивости и астатизма первого порядка к задающему воздействию  $g(t)$  непрерывных систем, то ПФ  $W_{yg}(z)$  (9) также удовлетворяет аналогичным условиям, но дискретных систем. При более высоком порядке астатизма непрерывных систем дискретные ПФ типа (9) удовлетворяют только лишь условиям астатизма первого порядка дискретных систем. ■

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда все корни  $p_i$  полинома  $A(p)$  являются вещественными и не равными друг другу, причем по условиям устойчивости  $p_i < 0$ . Обозначим  $\bar{p}_i = |p_i|$ ,  $i = \overline{1, n}$ , где  $n = \deg A(p)$ .

Так как по условиям теоремы передаточная функция  $W_{yg}(p)$  удовлетворяет условиям астатизма первого порядка к задающему воздействию  $g(t)$ , то согласно соотношениям (8) и работе [22, с. 138]  $W_{yg}(p) = \alpha_0/A(p)$ . В этом слу-

чае дробь  $W_{yg}(p)/p$  можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{W_{yg}(p)}{p} = \frac{1}{p} + \sum_{i=1}^n C_i \frac{1}{p + \bar{p}_i}, \quad (10)$$

где

$$C_i = \frac{-\alpha_0}{\bar{p}_i A_{ni}(-\bar{p}_i)}, \quad A_{ni}(p) = \frac{A(p)}{p + \bar{p}_i} = \prod_{\substack{\zeta=1, \zeta \neq i \\ \zeta=1, \zeta \neq i}}^n (p + \bar{p}_\zeta),$$

$$\alpha_0 = A(0) = \prod_{i=1}^n \bar{p}_i. \quad (11)$$

Подставляя правую часть (10) в выражение (9) и выполняя  $Z_T$ -преобразование с помощью таблицы изображений по Лапласу [21, 25], получим

$$W_{yg}(z) = \frac{D_n(z) + (z-1)E_n(z)}{D_n(z)}. \quad (12)$$

Здесь

$$D_n(z) = \prod_{i=1}^n (z - d_i), \quad E_n(z) = \sum_{i=1}^n A_{ni} \hat{D}_{ni}(z),$$

$$\hat{D}_{ni}(z) = \frac{D_n(z)}{z - d_i}, \quad d_i = e^{-\bar{p}_i T}. \quad (13)$$

Как известно, условием астатизма порядка  $v_g$  дискретных систем с передаточной функцией  $W_{yg}(z)$  к задающему воздействию  $g_k$  является равенство

$$1 - W_{yg}(z) = \tilde{W}_{\delta g}(z)(z-1)^{v_g}, \quad (14)$$

где  $\tilde{W}_{\delta g}(z)$  — некоторая рациональная дробь, все корни знаменателя которой по модулю строго меньше единицы. Подставив ПФ (12) в выражение (14), найдем, что это условие выполняется при  $v_g = 1$  и  $\tilde{W}_{\delta g}(z) = -E_n(z)/D_n(z)$ . При этом корни полинома  $D_n(z)$  по модулю строго меньше единицы в силу устойчивости полинома  $A(p)$  и соотношений (13). Отсюда следует справедливость первого утверждения теоремы 1 при условии  $p_i \neq p_j$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . ■

Доказательство теоремы 1 для случая кратных и/или комплексных корней полинома  $A(p)$ , а также в случае порядка астатизма непрерывной системы, большего единицы, проводится аналогично. Отличие заключается лишь в способах вычислений постоянных  $C_i$  из выражений, аналогичных (10). Поэтому доказательство теоремы в этих случаях здесь не рассматривается. Покажем лишь особенности, которые возникают в случае кратных и/или

комплексных корней, а также при  $v_g = 2$  и более на частных примерах.

**Пример 1.** Найти преобразование (9) функции

$$W_{yg}(p) = \frac{\alpha_0}{A(p)} = \frac{\bar{p}^2(\bar{\sigma}^2 + \omega^2)}{(p + \bar{p})^2[(p + \bar{\sigma})^2 + \omega^2]}. \quad (15)$$

Здесь знаменатель  $A(p)$  имеет кратный корень  $p_1 = -\bar{p}$ ,  $\bar{p} > 0$  и пару комплексных корней  $p_{2,3} = -\bar{\sigma} \pm j\omega$ ,  $\bar{\sigma} > 0$ . ПФ (15), очевидно, удовлетворяет указанным выше условиям устойчивости и астатизма *первого* порядка непрерывных систем к задающему воздействию  $g(t)$ , так как ее числитель  $\alpha_0 = \bar{p}^2(\bar{\sigma}^2 + \omega^2)$  и значение полинома  $A(0) = \bar{p}^2(\bar{\sigma}^2 + \omega^2)$  то же.

**Решение.** Подвергая ПФ (15) преобразованиям, аналогичным (9)–(12), получим

$$W_{yg}(z) = \frac{D_{12}(z) + (z-1)E_{12}(z)}{D_{12}(z)}, \quad (16)$$

где

$$D_{12}(z) = (z - d_1)^2(z^2 - 2zd_2 \cos \omega T + d_2^2);$$

$$E_{12}(z) = C_1 d_1 T D_1(z) + C_2 D_2(z) + [C_{31} d_2 \sin \omega T + C_{32}(z - d_2 \cos \omega T)] D_3(z);$$

$$D_1(z) = z^2 - 2zd_2 \cos \omega T + d_2^2;$$

$$D_2(z) = D_{12}(z)/(z - d_1); \quad D_3(z) = (z - d_1)^2;$$

$C_i$  — коэффициенты разложения ПФ (15) на простейшие дроби;  $d_1 = e^{-\bar{p}T}$ ,  $d_2 = e^{-\bar{\sigma}T}$  [22, 25]. Передаточная функция (16), очевидно, также соответствует утверждению теоремы 1, так как удовлетворяет условию (14) при  $v_g = 1$  и  $\tilde{W}_{\delta g}(z) = -E_{12}(z)/D_{12}(z)$ . ■

**Пример 2.** При  $\alpha > 0$  найти преобразование (9) функции

$$W_{yg}(p) = \frac{2\alpha p + \alpha^2}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2}. \quad (17)$$

**Решение.** Знаменатель данной ПФ (17) имеет кратный корень  $p_1 = -\alpha$ ; при этом выполняются условия устойчивости, а согласно работе [22, с. 138], и условия астатизма *второго* порядка к задающему воздействию  $g(t)$  непрерывных систем при любом значении  $\alpha > 0$ . Как и в предыдущем примере, проведя преобразования, аналогичные (9)–(12), получим разность  $1 - W_{yg}(z)$  следующего вида:

$$1 - W_{yg}(z) = \frac{(z-1)[z - (\alpha T + 1)d_3]}{(z - d_3)^2}. \quad (18)$$

При произвольных значениях  $\alpha$  и  $T$  полином  $z - (\alpha T + 1)d_3 \neq z - 1$ , так как  $(\alpha T + 1)d_3 = (\alpha T + 1)e^{-\alpha T} \neq 1$ . Следовательно, при произвольных значениях  $\alpha$  и  $T$  ПФ  $W_{yg}(z)$ , являющаяся преобразованием (9) передаточной функции (17), не удовлетворяет условию (14) при  $v_g = 2$ . В то же время условиям астатизма *первого* порядка дискретных систем она удовлетворяет. Эти факты полностью соответствуют утверждениям теоремы 1.

Вместе с тем из выражения (18) следует, что если коэффициент  $(\alpha T + 1)d_3$  в этом выражении заменить единицей, то получится ПФ

$$\bar{W}_{yg}(z) = \frac{(z - d_3)^2 - (z - 1)^2}{(z - d_3)^2},$$

которая удовлетворяет условию (14) при  $v_g = 2$ . Подчеркнем, что предложенная замена коэффициента  $(\alpha T + 1)d_3$  на единицу является небольшой модификацией ПФ (18), причем без изменения ее свойств устойчивости. ■

Отметим, что аналогичная ситуация наблюдается и в тех случаях, когда ПФ  $W_{yg}(p)$  удовлетворяет условиям астатизма более высокого порядка к задающему воздействию. Таким образом, на основе изложенного можно сделать важный практический вывод.

**Следствие.** Желаемую ПФ дискретной системы с любым порядком астатизма  $v_g$  к задающему воздействию можно получить путем некоторой модификации результата преобразования (9) ПФ непрерывной системы с тем же порядком астатизма. ■

Таким образом, желаемые ПФ дискретных астатических систем можно получать на основе стандартных ПФ непрерывных систем.

## Синтез астатических ЦСУ

Рассмотрим метод АССУВВ применительно к синтезу астатических цифровых систем. Применительно к непрерывным системам данный метод подробно изложен в работах [18, 20, 21], поэтому ниже основное внимание уделяется лишь его особенностям, обусловленным дискретностью моделей.

Будем предполагать, что дискретный объект управления ДООУ, для которого создается астатическая ЦСУ, задан уравнением (1) с известными полиномами и значением  $T$ . Так как возмущение  $f_k$  (рис. 1) чаще всего не измеряется, то в уравнении ЦУУ (3) и в выражении (7) полагаем полином  $Q_1(z) \equiv 0$ .

При решении задачи синтеза ЦСУ методом АССУВВ, прежде всего, формируется вспомо-

гательная ПФ  $W_{\text{ж}}(p)$  непрерывной системы, имеющей несколько лучшие показатели качества, чем синтезируемая дискретная система. Степень  $n_{\text{ж}}$  полинома знаменателя  $W_{\text{ж}}(p)$  полагается равной или меньшей порядка ДОУ (1), т. е.  $n_{\text{ж}} \leq n_{\text{ДОУ}}$ .

Порядок формирования  $W_{\text{ж}}(p)$  состоит в следующем. Пусть синтезируемая ЦСУ должна иметь порядок астатизма  $v_g^*$ , перерегулирование  $\sigma^*\%$  и длительность переходного процесса  $t_p^*$ . Тогда из таблицы стандартных ПФ по порядку астатизма  $v_g = v_g^*$ , перерегулированию  $\sigma \leq \sigma^*\%$  и степени  $n_{\text{таб}} = n_{\text{ж}}$  выбираются коэффициенты  $\Delta_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n_{\text{ж}}$ , СНПФ [15, 16, 21, 25]. Из этой же таблицы выбирается соответствующее значение нормированного времени регулирования  $t_{p,\text{таб}}$  и вычисляется временной масштабный коэффициент

$$\omega_0 = t_{p,\text{таб}} / (t_p^* - T). \quad (19)$$

Затем находятся коэффициенты  $\eta_i = \Delta_i \omega_0^{n_{\text{ж}} - i}$ ,  $i = n_{\text{ж}}, 0$ , и записывается вспомогательная ПФ:

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{\eta_{v_g-1} p^{v_g-1} + \dots + \eta_1 p + \eta_0}{\eta_{n_{\text{ж}}} p^{n_{\text{ж}}} + \eta_{n_{\text{ж}}-1} p^{n_{\text{ж}}-1} + \dots + \eta_1 p + \eta_0}.$$

Эта ПФ подвергается преобразованию (9) при заданном  $T$ , что дает отношение  $H_0(z)/H(z)$ , и записывается желаемая ПФ:

$$W_{y_g}^*(z) = \frac{H_0(z)}{H(z)z^\zeta} = \frac{H_0^*(z)}{H^*(z)}. \quad (20)$$

Здесь  $H_0(z)$  и  $H(z)$  — некоторые полиномы степеней  $m_{\text{ж}}$  и  $n_{\text{ж}}$ , а  $\zeta$  — целое число, определяемое указанными выше условиями физической реализуемости ПФ (20) системой (5) с частично заданной структурой:  $\mu_{W^*} = n_{\text{ж}} - m_{\text{ж}} \geq \mu_{\text{ДОУ}} + \mu_{yy}$  [19, 26].

Из теоремы 1 следует, что если  $v_g^* = 1$ , то ПФ (20) удовлетворяет условиям астатизма первого порядка к задающему воздействию ЦСУ, т. е. в этом случае  $H^*(z) = H(z)z^\zeta$ , а  $H_0^*(z) = H_0(z)$ . Если же  $v_g^* > 1$ , то ПФ  $H_0(z)/z^\zeta H(z)$  не удовлетворяет условиям астатизма  $v_g^*$ -го порядка. Модификацию функции  $H_0(z)/z^\zeta H(z)$  к порядку астатизма  $v_g^* > 1$  можно выполнить следующим образом. Прежде всего, находится разность  $\bar{D}(z) = z^\zeta H(z) - H_0(z)$ ; затем  $v_g^*$  ее корней округляются до 1, а остальные корни или соответствующие коэффициенты изменяются так, чтобы показатели качества системы с ПФ  $[z^\zeta H(z) - \bar{D}^*(z)] / z^\zeta H(z)$  удовлетворяли требованиям к синтезируемой ЦСУ. Отметим, что при увеличенном  $\mu_{\text{ДОУ}}$  и малом значении  $\zeta + n_{\text{ж}}$

обеспечить малое перерегулирование довольно сложно.

После определения желаемой ПФ  $W_{y_g}^*(z)$  находится ЦУУ (3) так, чтобы замкнутая система (1), (3) или (5) имела эту ПФ. С целью уменьшить сложность ЦСУ и повысить ее робастность целесообразно учесть свойства ДОУ, т. е. синтезировать систему с согласованными полюсами [8, 21]. Для этого определяется область  $\Omega_{\text{п}}$  — область комплексной плоскости, в которой могут располагаться корни характеристического полинома  $D(z)$  (6) проектируемой ЦСУ в соответствии с требованиями к ее качеству. Область  $\Omega_{\text{п}}$  можно определить, например, условием

$$|z_{i,\Omega_{\text{п}}}| \leq r_{\Omega} = \max_i \{ |z_{H^*i}|, |\bar{z}_{A,i}|, |\bar{z}_{B,i}| \}, \quad (21)$$

где  $z_{i,\Omega_{\text{п}}}$  — корни некоторых полиномов;  $z_{H^*i}$  — корни полинома  $H^*(z)$ ;  $\bar{z}_{A,i}$ ,  $\bar{z}_{B,i}$  — достаточно устойчивые корни полиномов  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . При этом нормированные по старшей степени  $z$  полиномы, все корни которых располагаются в области  $\Omega_{\text{п}}$ , снабжаются индексом  $\Omega$ . Это позволяет представить факторизацию полиномов уравнения ДОУ (5) относительно границы области  $\Omega_{\text{п}}$  следующим образом:

$$A(z) = A_{\Omega}(z)A_{\bar{\Omega}}(z), \quad B(z) = \beta_m B_{\Omega}(z)B_{\bar{\Omega}}(z). \quad (22)$$

Здесь  $A_{\Omega}(z)$ ,  $B_{\Omega}(z)$  — полиномы, все корни которых равны тем корням полиномов  $A(z)$  и  $B(z)$ , которые располагаются в области  $\Omega_{\text{п}}$ , а  $A_{\bar{\Omega}}(z)$ ,  $B_{\bar{\Omega}}(z)$  — полиномы, все корни которых равны тем корням полиномов  $A(z)$  и  $B(z)$ , которые располагаются вне области  $\Omega_{\text{п}}$ ;  $\beta_m$  — коэффициент полинома  $B(z)$  при  $z$  в старшей степени. Обозначим также  $\deg A_{\Omega} = n_{\Omega}$ ,  $\deg A_{\bar{\Omega}} = n_{\bar{\Omega}}$ ,  $\deg B_{\Omega} = m_{\Omega}$ ,  $\deg B_{\bar{\Omega}} = m_{\bar{\Omega}}$ .

Для учета свойств ДОУ полиномы в уравнении ЦУУ (3) принимаются следующего вида:

$$\begin{aligned} R(z) &= (z-1)^{\bar{v}} B_{\bar{\Omega}}(z) \tilde{R}(z), \\ L(z) &= A_{\Omega}(z) \tilde{L}(z), \quad Q(z) = A_{\Omega}(z) \tilde{Q}(z), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\tilde{R}(z)$ ,  $\tilde{L}(z)$ ,  $\tilde{Q}(z)$  — вспомогательные полиномы, степени и коэффициенты которых подлежат определению в процессе синтеза замкнутой ЦСУ с учетом указанных выше требований к системе (5). Отметим, что в силу равенств (21) и (23) синтезируемая система будет обладать запасом устойчивости  $\eta = 1 - r_{\Omega}$ .

Обозначим  $\deg \tilde{R}(z) = \tilde{r}$ ,  $\deg \tilde{L}(z) = \tilde{l}$ ,  $\deg \tilde{Q}(z) = \tilde{q}$  и определим число  $\bar{v}$  условием

$$\bar{v} = \max\{v_g^* - v_A; v_f^* - v_{B1}; 0\}. \quad (24)$$

Здесь  $v_A, v_{B1}$  — числа единичных корней, не зависящих от параметров объекта, полиномов  $A(z) = (z-1)^{v_A} A^\circ(z)$  и  $B_1(z) = (z-1)^{v_{B1}} B_1^\circ(z)$ ; при этом  $v_A \geq 0$  и  $v_{B1} \geq 0$ , а полиномы  $A(1) \neq 0$  и  $B_1(1) \neq 0$ . Как известно, указанные единичные нули могут быть обусловлены чистыми интеграторами или сумматорами, если ДООУ имеет дискретную (цифровую) часть. Отметим также, что в соотношениях (23) и (24)  $\bar{v}$  — это число сумматоров, которые необходимо будет образовать при  $\bar{v} \neq 0$  в алгоритме ЦУУ при его построении.

В общем случае корни полинома  $B(z)$  из уравнения (1) зависят от значения периода  $T$ , поэтому примем не сильно ограничивающее предположение, что все корни полинома  $B(z)$  располагаются в области  $\Omega_{\text{п}}$ , т. е. в уравнении (1) полином  $B(z) / \beta_m = B_\Omega(z)$ .

Далее процедура синтеза состоит в определении полиномов  $\tilde{R}(z), \tilde{L}(z), \tilde{Q}(z)$  по условиям равенства ПФ (20) и ПФ  $W_{\text{yg}}(z)$ , следующей из выражений (5)–(7) с учетом равенств (23) и указанных выше условий физической реализуемости ЦУУ (3) и ПФ (20). Эта процедура практически полностью совпадает с изложенной в работе [20] или в книге [21], поэтому здесь не рассматривается. После определения полиномов  $\tilde{R}(z), \tilde{L}(z), \tilde{Q}(z)$  записывается уравнение ЦУУ (3), и для учета запаздывания его правая часть умножается на  $z^{-m_\tau}$ , где  $m_\tau$  — величина из выражения (2). В полученном уравнении при  $\bar{v} \neq 0$  выделяется звено с передаточной функцией  $1/(z-1)^{\bar{v}}$  и осуществляется переход к оригиналам, что и приводит к алгоритму работы искомого ЦУУ.

Подчеркнем здесь, что в результате применения изложенной методики синтеза, как правило, получается многомерное ЦУУ, на входы которого подаются коды всех измеряемых величин. Рассмотрим предложенный метод синтеза астатических ЦСУ на конкретном примере, начиная с получения уравнений ДООУ.

**Пример 3.** Найти ЦУУ для управления объектом

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,3823 \end{bmatrix} f, \\ y &= [20 \quad 5]x, \end{aligned} \quad (25)$$

если период дискретизации  $T = 0,5$  с, а запаздывание в ЦУУ  $\tau_{\text{пзу}} = 1,1$  с. Замкнутая ЦСУ должна иметь астатизм второго порядка к задающему воздействию  $g_k$  и первого — к неизмеряемому возмущению  $f_k$ ; длительность переходного процесса (без учета запаздывания) не более 4,5 с; перерегулирование не более 35 %; измеряются  $y_k$  и  $\varepsilon_k$ .

**Решение.** Переходя с помощью известных соотношений от уравнений (25) к уравнению "вход-выход" (1) [22, 25], найдем его полиномы

$$A(z) = (z-1)(z-0,0821)z^3; \quad (26)$$

$$\begin{aligned} B(z) &= 5,923(z-0,7148)(z+0,07); \\ B_1(z) &= 2,265z-1,703. \end{aligned} \quad (27)$$

В данном случае, очевидно,  $n_{\text{доу}} = 5; m = 2; \mu_{\text{доу}} = 3; n_A = 1; n_{B1} = 0$ .

Перейдем к построению желаемой ПФ, полагая  $n_{\text{ж}} = n_{\text{доу}} = 5$ . По значениям  $v_g^* = 2, \sigma = 10 < 35\%$  и  $n_{\text{таб}} = n_{\text{ж}} = 5$  из таблицы СНПФ [21, с. 346] выписываются коэффициенты  $\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 18, \Delta_2 = 38, \Delta_3 = 29, \Delta_4 = 9, \Delta_5 = 1$  и величина  $t_{\text{р,таб}} = 18$  с. Далее по формуле (19) находится  $\omega_0 = 18/(4,5-0,5) = 4,5$ ; вычисляются коэффициенты  $\eta_5 = 1, \eta_4 = 9 \cdot 4,5 = 40,5; \eta_3 = 29 \cdot 4,5^2 \approx 587,3, \eta_2 = 38 \cdot 4,5^3 \approx 3463, \eta_1 = 18 \cdot 4,5^4 \approx 7381, \eta_0 = 1 \cdot 4,5^5 \approx 1845,3$  и записывается вспомогательная ПФ

$$W_{\text{ж}}(p) = \frac{7381p + 1845,3}{p^5 + 40,5p^4 + 587,3p^3 + 3463p^2 + 7381p + 1845,3}. \quad (28)$$

В результате преобразования ПФ (28) по формуле (9) при  $T = 0,5$  с помощью функции **c2d** пакета MATLAB [25, с. 91] находится ПФ  $W(z)$ , которая не удовлетворяет условиям астатизма второго порядка к задающему воздействию. При этом ее  $\mu_W = 1$ , а ДООУ с полиномами (26), (27) имеет  $\mu_{\text{доу}} = 3$ . Поэтому для обеспечения реализуемости этой ПФ  $W(z)$  в формуле (20) полагается  $\zeta = 1$ , а для ее модификации к условиям астатизма 2-го порядка находится разность  $1 - z^{-1} W(z)$ . Затем два корня ее числителя округляются до 1, а коэффициенты числителя полинома третьей степени модифицируемой ПФ выбираются по условию минимального перерегулирования. В результате получается ПФ

$$W_{\text{yg}}^*(z) = \frac{1,299z^3 - 1,31121z^2 + 0,1652z - 0,03935}{z^6 - 1,019z^5 + 0,1369z^4 - 0,00426z^3}. \quad (29)$$

На рис. 2 приведена переходная функция, а на рис. 3 — реакция системы с ПФ (29) на функцию  $g_k = k$ . Значение  $\sigma = 31\%$  обусловлено здесь высоким значением  $\mu_{\text{доу}} = 3$ .

Судя по графикам на рис. 2 и рис. 3, система с ПФ (29) удовлетворяет требованиям, поэтому она принимается в качестве желаемой ПФ. Переходя к ее реализации, по условию (21) по-

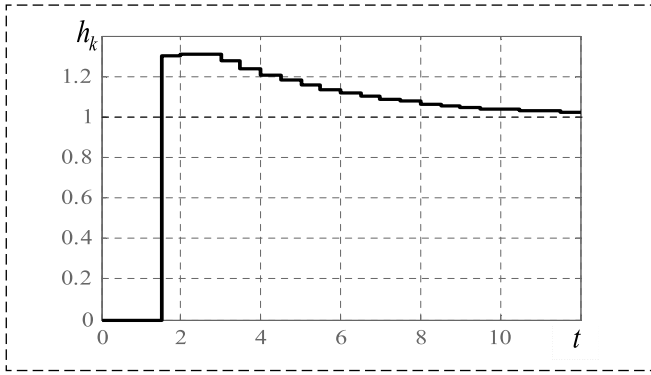


Рис. 2. Переходная функция цифровой системы  
Fig. 2. Response of the digital system to unit step

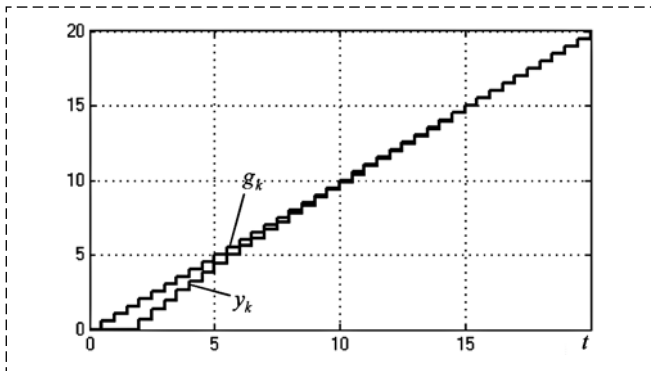


Рис. 3. Реакция астатической системы на воздействие  $g_k = k$   
Fig. 3. Response of the astatic system to unit ramp  $g_k = k$

ложим  $\eta^* = r_\Omega = 0,13$ . Далее, следуя работам [20, 21], найдем полиномы

$$R(z) = (z-1)(z^6 + 0,3362z^5 + 0,4164z^4 + 0,4549z^3 + 0,4894z^2 - 0,9157z - 0,06634);$$

$$L(z) = 0,2431z^5 - 0,2439z^4 + 0,01838z^3;$$

$$Q(z) = 0,2193z^7 - 0,4407z^6 + 0,2493z^5 - 0,09433z^4 - 0,06644z^3$$

и запишем уравнение (3). Так как в этом примере  $\bar{v} = 1$ , то в полиноме  $R(z)$  выделен множитель  $(z-1)$  в целях формирования сумматора в алгоритме искомого ЦУУ.

По условиям синтеза в данном случае измеряются  $\varepsilon_k$  и  $y_k$ , поэтому в уравнении (3) исключается  $g(z)$  заменой  $g(z) = \varepsilon(z) + y(z)$ . Кроме того, его правая часть умножается на  $z^{-2}$ , так как в данном случае  $m_\tau = 2$ . В результате указанное уравнение примет вид

$$R(z)u(z) = z^{-2}Q(z)\varepsilon(z) - z^{-2}L_y(z)y(z), \quad (30)$$

где  $L_y(z) = L(z) - Q(z) = -0,2193z^7 + 0,4407z^6 - 0,006167z^5 - 0,1495z^4 - 0,04805z^3$ .

Отметим, что для краткости здесь и далее приводятся округленные значения коэффициентов полиномов. В корректных уравнениях ЦУУ должно учитываться не менее 6...8 значащих цифр после запятой. Для обеспечения второго порядка астатизма необходимо реализовать сумматор в ЦУУ явным образом. С этой целью уравнение (30) представляем в следующем виде:

$$(z-1)u(z) = w(z),$$

$$\bar{R}(z)w(z) = z^{-2}Q(z)\varepsilon(z) - z^{-2}L_y(z)y(z),$$

где  $w(z)$  —  $z$ -изображение вспомогательной переменной. В результате перехода к оригиналам получаются следующие выражения:

$$u_k = u_{k-1} + w_{k-1};$$

$$w_k = -0,3362w_{k-1} - 0,4164w_{k-2} - 0,4549w_{k-3} - 0,4894w_{k-4} + 0,9158w_{k-5} + 0,06634w_{k-6} + 0,2193\varepsilon_{k-1} - 0,4407\varepsilon_{k-2} + 0,2493\varepsilon_{k-3} - 0,09433\varepsilon_{k-4} - 0,06644\varepsilon_{k-5} + 0,2103y_{k-1} - 0,4407y_{k-2} + 0,006167y_{k-3} + 0,1495y_{k-4} + 0,04805y_{k-5}. \quad (31)$$

Равенства (31) описывают искомым алгоритм работы ЦУУ, при котором обеспечивается второй порядок астатизма к задающему и первый — к возмущению цифровой системы управления объектом (25). Графики реакций синтезированной системы на ступенчатые и линейные дискретные воздействия аналогичны приведенным на рис. 2 и рис. 3, т. е. синтезированная система обрабатывает постоянное и линейное воздействия с нулевой ошибкой, несмотря на запаздывание в ЦУУ.

### 3. Синтез ЦСУ с конечной длительностью переходных процессов

Как известно, системами с конечной длительностью переходных процессов называются дискретные системы, ПФ которых имеет вид  $W_{yg}(z) = H_0(z)/z^{n_{\text{сис}}}$ . Характер переходного процесса таких систем определяется только значениями коэффициентов числителя их ПФ, а длительность равна  $n_{\text{сис}}T$ . При этом, если необходимо обеспечить первый порядок астатизма к задающему воздействию, то выбор коэффициентов числителя осуществляется достаточно просто [15, 16]. Проблема сильно усложняется, если необходимо обеспечить второй или более высокий порядок астатизма к задающему воздействию.

Условие астатизма 2-го порядка простейшей дискретной системы второго порядка, вытекающее из равенства (14), имеет вид

$$1 - W_{yg}^*(z) = (z - 1)^2 / z^2. \quad (32)$$

Отсюда следует вид соответствующей ПФ:  $W_{yg}^*(z) = (2z - 1) / z^2$  и разностное уравнение  $y_k = 2g_{k-1} - g_{k-2}$ . Значения реакции  $y_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , этой системы на ступенчатое воздействие  $g_{1k} = 1(k)$  равны:  $y_{10} = 0, y_{11} = 2, y_{12} = 1, y_{13} = 1, y_{14} = 1, \dots$ , а на линейное воздействие  $g_{2k} = k$  равны  $y_{20} = 0, y_{21} = 0, y_{22} = 2, y_{23} = 3, y_{24} = 4, y_{25} = 5, \dots$ . Как видно, переходные процессы, действительно, заканчиваются за два такта, ошибки системы, вызванные этими воздействиями, равны нулю, но перерегулирование составляет 100 %, что, конечно, не приемлемо для практики.

Нетрудно убедиться, что в случае астатизма третьего порядка аналогичные ошибки системы, ПФ которой  $W_{yg}^*(z) = (3z^2 - 3z + 1) / z^3$ , равны нулю, но перерегулирование достигает 200 %.

В работах [28, 29] установлено, что для уменьшения перерегулирования в дискретных системах необходимо увеличивать порядок системы. При необходимом порядке астатизма  $v_g$  условие (32) переходит в равенство

$$1 - W_{yg}^*(z) = N(z)(z - 1)^{v_g} / z^{n_{\text{сис}}}, \quad (33)$$

где  $N(z)$  — нормированный полином, степень которого  $n_N = \deg N(z) = n_{\text{сис}} - v_g$ .

Отметим, что для случая  $v_g = 2$  В. А. Никольским в работе [28] были найдены полиномы  $N_H(z, \sigma\%)$ , при которых дискретные системы, удовлетворяющие равенству (33), имеют постоянное перерегулирование, равное 10, 15, 20, 25, 33 или 50 %, но при соответствующих более высоких порядках замкнутых систем.

Относительный порядок  $\mu_{\text{сис}}$  дискретных систем, рассмотренных В. А. Никольским, равен единице [28]. В то же время при наличии запаздывания в цифровых системах, как видно из примера 3, их относительный порядок  $\mu_{\text{сис}}$  больше единицы. Следовательно, для обеспечения реализуемости ЦСУ в этих случаях необходимо их желаемые ПФ  $W_{yg}^*(z)$  формировать с повышенными значениями  $\mu_{\text{сис}}$  [19, 26]. Однако сделать это на основе полиномов из работы [28] невозможно. В связи с этим далее рассматривается задача разработки метода определения желаемых ПФ  $W_{yg}^*(z)$  систем с  $\mu_{\text{сис}} > 1$ , при которых порядок астатизма  $v_g > 1$ , переходный процесс имеет конечную длительность и постоянное перерегулирование.

При наличии запаздывания из выражения (33) вытекает соотношение

$$\deg[z^{n_{\text{сис}}} - (z - 1)^{v_g} N(z)] = n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}. \quad (34)$$

Обозначим  $1 - W_{yg}^*(z) = \bar{D}(z) / z^{n_{\text{сис}}}$ ; тогда полином  $\bar{D}(z) = z^{n_{\text{сис}}} - z^{n_{\text{сис}}} W_{yg}^*(z)$ ; если же  $W_{yg}^*(z) = H_0^*(z) / z^{n_{\text{сис}}}$ , то

$$\bar{D}(z) = z^{n_{\text{сис}}} - z^{n_{\text{сис}}} W_{yg}^*(z) = z^{n_{\text{сис}}} - H_0^*(z). \quad (35)$$

Пусть дискретная система с ПФ  $W_{yg}^*(z) = H_0^*(z) / z^{n_{\text{сис}}}$  имеет порядок астатизма  $v_g$  к задающему воздействию. Тогда, согласно выражению (33), полином  $\bar{D}(z)$  (35) имеет  $v_g$  корней, тождественно равных 1, т. е. удовлетворяет условию  $\bar{D}(z) = (z - 1)^{v_g} N(z)$ , причем его степень равна  $n_{\text{сис}}$ . Вместе с тем, если дискретная система, относительный порядок которой равен  $\mu_{\text{сис}}$ , имеет переходный процесс конечной длительности и постоянное перерегулирование  $\sigma\%$ , то полином  $H_0^*(z) = (1 + \gamma)z^{n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}} - \gamma$ , где  $\gamma = \sigma\% / 100\%$ . Изложенное можно рассматривать как доказательство следующей теоремы.

**Теорема 2.** Дискретная (цифровая) система с ПФ  $W_{yg}^*(z) = H_0^*(z) / z^{n_{\text{сис}}}$  и относительным порядком  $\mu_{\text{сис}}$  имеет конечную длительность переходных процессов, постоянное перерегулирование  $\sigma = \gamma \cdot 100\%$  и астатизм порядка  $v_g$  к задающему воздействию, если ее порядок  $n_{\text{сис}}$  такой, что полином

$$\bar{D}(z) = z^{n_{\text{сис}}} - (1 + \gamma)z^{n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}} + \gamma \quad (36)$$

имеет  $v_g$  корней, тождественно равных единице. ■

Из теоремы 2 вытекает конструктивный алгоритм построения желаемых ПФ дискретных (цифровых) систем с заданным порядком астатизма, постоянным перерегулированием и конечной длительностью переходного процесса с учетом условия их физической реализуемости динамической системой с заданной частью. Фактически он заключается в определении степени  $n_{\text{сис}}$ , при которой полином  $\bar{D}(z)$  (36) с заданными  $\mu_{\text{сис}}$  и  $\gamma = \sigma\% / 100\%$  имеет  $v_g$  корней, равных единице. Аналитическое решение этой задачи найти не удалось. Численным путем, с помощью системы MATLAB были найдены приведенные в таблице порядки  $n_{\text{сис}}$  цифровых систем при  $v_g = 2$  и некоторых значениях  $\sigma\%$  и  $\mu_{\text{сис}}$ .

Порядок астатизма  $v_g = 2$

$\sigma, \%$	$\mu_{\text{сис}}$			
	1	2	3	4
10	11	22	33	44
15	8	16	24	32
20	6	12	18	24
25	5	10	15	20
33	4	8	12	16

Как видно из таблицы, порядок астатических систем управления данного типа при  $v_g = 2$  можно определять по формуле

$$n_{\text{сис}} = (\gamma^{-1} + 1)\mu_{\text{сис}}, \quad (37)$$

где  $\gamma = \sigma\%/100 \%$ , причем  $1/\gamma$  — целое число; при  $\sigma = 15 \%$  величина  $\gamma = 1/7$ . При этом желаемая ПФ  $W_{yg}^*(z)$  определяется вытекающей из выражения (35) формулой:

$$W_{yg}^*(z) = [(1 + \gamma)z^{n_{\text{сис}} - \mu_{\text{сис}}} - \gamma]/z^{n_{\text{сис}}}. \quad (38)$$

На основе таблицы и формулы (37) можно заключить, что при уменьшении перерегулирования  $\sigma \%$  порядок системы резко возрастает, что при неизменном периоде дискретизации  $T$  приведет, естественно, к увеличению длительности переходного процесса. Однако, если одновременно с уменьшением  $\sigma\%$  уменьшать  $T$ , т. е. период работы ЦУУ, что требует применения более быстродействующих процессоров, то длительность переходного процесса расти не будет.

Отметим, что значения порядков систем  $n_{\text{сис}}$  при  $\mu_{\text{сис}} = 1$ , приведенные в таблице, совпадают со значениями, приведенными в работе [28]. Также численным путем установлено, что при первом порядке астатизма, т. е. при  $v_g = 1$ , можно получить конечную длительность переходного процесса при любых значениях  $n_{\text{сис}} \geq 1$ ,  $\sigma \%$  и  $\mu_{\text{сис}}$ , в том числе и при  $\sigma = 0 \%$ . Однако рост порядка системы при увеличении  $\mu_{\text{сис}}$  сохраняется. Минимальное значение порядка системы определяется выражением  $n_{\text{сис}} = v_g + \mu_{\text{сис}}$ .

Значений  $n_{\text{сис}}$ , при которых полином (36) имеет  $v_g$  корней, равных единице при  $v_g \geq 3$ ,  $\mu_{\text{сис}} \geq 1$  и каких-либо значениях  $\gamma < 0,5$ , найти не удалось.

Для примера построим желаемую ПФ при  $v_g = 2$  и постоянном  $\sigma = 20 \%$  для реализации цифровой системой с относительным порядком  $\mu_{\text{сис}} = 3$ . Так как в данном случае  $\gamma = 0,2$ ,

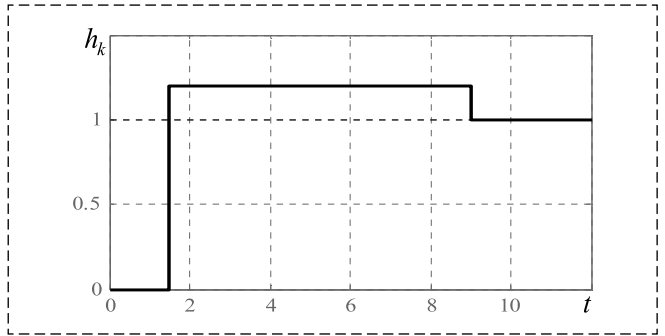


Рис. 4. Переходная функция с постоянным перерегулированием  
Fig. 4. Transient function with constant overshoot

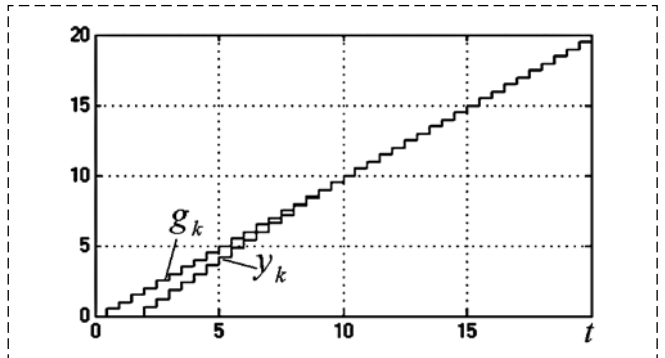


Рис. 5. Реакция цифровой системы на воздействие  $g_k = k$   
Fig. 5. Response of the digital system to unit ramp  $g_k = k$

то по таблице находим  $n_{\text{сис}} = 18$ , а по формуле (38) имеем

$$W_{yg}^*(z) = (1, 2z^{15} - 0, 2)/z^{18}. \quad (39)$$

Переходная функция системы с ПФ (39), построенная с помощью MATLAB при  $T = 0,5$  с, показана на рис. 4, а на рис. 5 показана полученная в Simulink реакция этой же системы на линейное воздействие.

На основе рис. 4 и рис. 5 нетрудно заключить, что запаздывание равно  $3T$ , перерегулирование  $20 \%$ , переходный процесс длится ровно  $9$  с, т. е.  $18T$ , а скоростная ошибка, несмотря на наличие запаздывания, равна нулю, что свидетельствует о втором порядке астатизма соответствующей системы.

Фигурирующий в равенстве (33) полином  $N(z)$  в данном случае имеет вид:  $N(z) = z^{16} + 2z^{15} + 3z^{14} + 2,8z^{13} + 2,6z^{12} + 2,4z^{11} + 2,2z^{10} + 2z^9 + 1,8z^8 + 1,6z^7 + 1,4z^6 + 1,2z^5 + 1,0z^4 + 0,8z^3 + 0,6z^2 + 0,4z + 0,2$ . Отметим, что последние пять коэффициентов этого полинома совпадают с коэффициентами полинома В. А. Никольского для случая  $\sigma = 20 \%$  [28].

**Пример 4.** Найти ЦУУ с  $T = 0,5$  с для реализации ПФ (39) цифровой системой, заданной

частью которой является ДООУ (1) с полиномами (26), (27), при условии, что измеряются только  $g_k$  и  $y_k$ , а запаздывание в ЦУУ равно 1,1 с, т. е.  $m_\tau = 2$ , а  $\tau_1 = 0,1$  с.

**Решение.** Полиномы уравнения "вход-выход" заданного ДООУ имеют вид (26), (27), поэтому, имея в виду их корни и корни знаменателя ПФ (39), по (21) полагаем  $\eta^* = 0,28$ . При этом все полиномы  $B_\Omega(z)$ ,  $B_{\bar{\Omega}}(z)$ ,  $A_\Omega(z)$ ,  $A_{\bar{\Omega}}(z)$  из соотношений (22), (23) описываются теми же выражениями, что и в примере 3.

Переходя к определению полиномов  $R(z)$ ,  $L(z)$  и  $Q(z)$  из уравнения ЦУУ (3) с учетом ПФ (39) и полиномов (26), (27), как и в примере 1, следуя работам [20, 21], найдем, что в данном случае в выражениях (23) полином  $\tilde{R}(z) = \sum_{i=0}^{16} \rho_i z^i$ , а  $\tilde{L}(z) = \lambda_0 + \lambda_1 z$ . Степень знаменателя ПФ (39) довольно высокая, поэтому систему уравнений, решение которой определяет коэффициенты  $\rho_i$  и  $\lambda_i$ , запишем в скалярной форме:  $5,923\lambda_0 + \rho_0 = 0$ ;  $5,923\lambda_1 - 2\rho_0 + \rho_1 = 0$ ;  $\rho_i - 2\rho_{i+1} + \rho_{i+2} = 0$ ,  $i = \overline{0, 14}$ ,  $\rho_{15} - 2\rho_{16} = 0$ ,  $\rho_{16} = 1$ . Решение этой системы позволяет найти полиномы  $R(z) = (z - 1)B_\Omega(z)\tilde{R}(z)$ ,  $L(z) = A_\Omega(z)\tilde{L}(z)$ , а по формуле  $Q(z) = A_\Omega(z)H_0^*(z)/\beta_m$  — полином  $Q(z)$ . Путем подстановки этих полиномов в уравнение (3) (с учетом умножения его правой части на  $z^{-2}$  и ввода вспомогательной переменной  $\bar{w}$ ) это уравнение представим в виде:  $(z - 1)u(z) = \bar{w}(z)$ ,  $B_\Omega(z)\tilde{R}(z)\bar{w}(z) = z^{-2}Q(z)g(z) - z^{-2}L(z)y(z)$ . Наконец, после перехода к оригиналам, получаем алгоритм искомого ЦУУ:

$$\begin{aligned}
 u_k &= u_{k-1} + \bar{w}_{k-1}; \\
 \bar{w}_k &= -1,3552\bar{w}_{k-1} + 1,6604\bar{w}_{k-2} + 1,9655\bar{w}_{k-3} + \\
 &+ 2,2707\bar{w}_{k-4} + 2,5759\bar{w}_{k-5} + 2,881\bar{w}_{k-6} + \\
 &+ 3,1862\bar{w}_{k-7} + 3,4914\bar{w}_{k-8} + 3,7965\bar{w}_{k-9} + \\
 &+ 4,1017\bar{w}_{k-10} + 4,4068\bar{w}_{k-11} + 4,712\bar{w}_{k-12} + \\
 &+ 5,0172\bar{w}_{k-13} + 5,3223\bar{w}_{k-14} + 5,6275\bar{w}_{k-15} + \\
 &+ 5,9327\bar{w}_{k-16} - 11,7622\bar{w}_{k-17} - 0,8506\bar{w}_{k-18} + \\
 &+ 0,2026g_{k-1} - 0,01663g_{k-2} - 0,03377g_{k-16} + \\
 &+ 0,002772g_{k-17} - 3,039y_{k-15} + 3,1197y_{k-16} - \\
 &- 0,2356y_{k-17}.
 \end{aligned} \tag{40}$$

Несложно проверить, что система (1), (25), (26), (40) при ступенчатых и линейных воздействиях имеет переходные процессы, аналогичные изображенным на рис. 4 и 5.

Предложенный в работе метод аналитического синтеза обычных цифровых систем, с астатизмом выше первого порядка, несколько сложнее синтеза аналогичных непрерывных систем. Отметим, что эта сложность обусловлена исключительно построением желаемых ПФ. Проблем с реализацией этих ПФ не возникает при использовании принципа управления по выходу и воздействиям. Значительно проще строятся желаемые ПФ цифровых систем с конечной длительностью переходных процессов, в особенности с астатизмом первого порядка.

Предложенный метод также позволяет синтезировать ЦСУ с конечной длительностью переходных процессов и с постоянным перерегулированием. Эти системы могут иметь как первый, так и второй порядок астатизма. Условия существования аналогичных ЦСУ, имеющих третий и более высокие порядки астатизма, найти не удалось.

Цифровые астатические системы, методы синтеза которых предложены выше, можно применять для управления объектами как без запаздывания, так и с запаздыванием. Запаздывание может быть меньше одного или же больше нескольких периодов дискретизации. Однако в последнем случае порядок ЦСУ резко возрастает, в особенности при малом постоянном перерегулировании.

#### Список литературы

1. Денисенко В. В. Компьютерное управление технологическими процессом, экспериментом, оборудованием. М.: Горячая линия-Телеком, 2009.
2. Григорьев В. В., Быстров С. В., Бойков В. И., Болтунов Г. И., Мансурова О. К. Цифровые системы управления. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011.
3. Луценко И. В. Синтез дискретного регулятора температуры газов газотурбинного двигателя с учетом требований грубости // Математические методы в технике и технологиях — ММТТ-18. Сб. трудов XVIII Международ. науч. конф. в 10 т. Т. 2. Секция 2 / Под общ. ред. В. С. Балакирева. Казань: Изд-во Казанского гос. технол. ун-та, 2005. С. 139—142.
4. Stojanovic S. B., Debelkovic D. Lj., Antic D. S. Finite-time Stability and Analysis of Discrete Time-delay Systems using Discrete Convolution of Delayed States // FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic control and robotics. 2014. Vol. 14, N. 32. P. 147—158.
5. Bakhilina I. M., Stepanov S. A. On the design of discrete  $H_\infty$ -controllers // Automation and Remote Control. 2000. N 61(2). P. 254—264.
6. Пшихонов В. Х., Медведев М. Ю. Управление подвижными объектами в определенных и неопределенных средах. М.: Наука, 2011.
7. Kiselev O. N. Minimization of Basic Quality Indices in Linear Discrete Systems // Automation and Remote Control. 2005. N 66(3). P. 398—405.

8. **Гайдук А. Р., Плаксиенко Е. А.** Анализ и синтез систем управления с применением системных инвариантов в MATLAB. Саарбрюккен: Palmarium Academic Publishing, 2016.
9. **Wiener N.** The extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series. N. Y., 1949.
10. **Kalman R. E.** Contributions to the Theory of Optimal Control // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 1960. Vol. 5. N 1. P. 102—119.
11. **Летов А. М.** Аналитическое конструирование регуляторов I—III // Автоматика и телемеханика. 1960. № 4—6.
12. **Волгин Л. Н.** Элементы теории управляющих машин (метод полиномиальных уравнений в задачах синтеза систем автоматического управления с цифровыми вычислительными машинами). М.: Советское радио, 1962.
13. **Волгин Л. Н.** Оптимальное дискретное управление динамическими системами / Под ред. П. Д. Крутько. М.: Наука, 1986.
14. **Филимонов Н. Б.** Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 2—10.
15. **Красовский А. А., Поспелов Г. С.** Основы автоматики и технической кибернетики. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1962.
16. **Бесекерский В. А., Попов Е. П.** Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.
17. **Макаров И. М., Менский Б. М.** Линейные автоматические системы. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1982.
18. **Гайдук А. Р.** Синтез систем автоматического управления по передаточным функциям // Автоматика и телемеханика. 1980. № 1. С. 11—16.
19. **Гайдук А. Р.** Об ограничениях, обусловленных заданной частью системы и управляющим устройством // Известия вузов. Приборостроение. 1987. Том XXX. № 5. С. 11—16.
20. **Гайдук А. Р., Плаксиенко Е. А.** Синтез динамических систем по требуемым показателям качества // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 4. С. 7—12.
21. **Гайдук А. Р.** Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012.
22. **Ким Д. П.** Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы. М.: Физматлит, 2003.
23. **Ким Д. П.** Алгебраический метод синтеза дискретных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 4. С. 8—13.
24. **Иванов Ю. И., Югай В. Я.** Применение микроконтроллеров AVR в системах управления. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005.
25. **Гайдук А. Р., Беляев В. Е., Пьявченко Т. А.** Теория автоматического управления в примерах и задачах с решениями в MATLAB. СПб.: ЛАНЬ, 2011.
26. **Гайдук А. Р., Гуренко Б. В., Плаксиенко Е. А.** К синтезу систем управления с частично заданной структурой по желаемым показателям качества // Научный вестник НГТУ. 2014. № 2(55). С. 19—29.
27. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** О проблеме неробастности спектра в задачах модального управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 10. С. 8—13.
28. **Никольский В. А.** Об одном способе обеспечения астатизма второго порядка в дискретной системе комбинированного управления с компенсацией возмущения // Известия вузов. Электромеханика. 1978. № 11. С. 1168—1173.
29. **Семенов А. В., Гайдук А. Р., Геложе Ю. А., Семенова А. В.** Процедура автоматизированного синтеза цифровых управляющих систем // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск "Компьютерные и информационные технологии в науке, инженерии и управлении". 2014. № 4(153) С. 150—157.

## Design of Astatic Digital Systems with Application of Standard Normalized Transfer Functions

A. R. Gaiduk, gaiduk\_2003@mail.ru,

Southern Federal University, Taganrog, 347928, Russian Federation;  
Kislovodsk Humanitarian-Technical Institute, Kislovodsk, 337700, Russian Federation,

Corresponding author: **Gaiduk Anatoly R.**, D. Sc., Professor,  
Southern Federal University, Taganrog, 347928, Russian Federation; Head of Department,  
Kislovodsk Humanitarian-Technical Institute, Kislovodsk, 337700, Russian Federation,  
e-mail: gaiduk\_2003@mail.ru

Accepted on August 20, 2018

### Abstract

Control systems with the increased astatic order provide higher accuracy and consequently their application is expedient at the solution of many control problems. In particular, it concerns to digital systems which have higher adaptability to manufacture and reliability. However the task of the digital systems design is a little bit more difficult in comparison with a similar task in a continuous case. Article is devoted to the solution of a design problem of the discrete automatic systems, which realization is carried out on the basis of a control principle on output and impacts. Standard normalized transfer functions (SNTF) are convenient means for the problem solution of the control systems design with the required direct quality indices. The method of the desirable transfer functions formation for the digital control systems on basis of the continuous systems SNTF is suggested in article. This method follows from the theorem proved in this article and consists in carrying out of the  $z$ -transformation suitable tabulated SNTF of the continuous system and some updating of the received function. The formation method of the desirable transfer functions of the digital systems with the second order astatic, constant overshoot and final duration of transients is suggested in article also. The control systems with such properties of transients have the increased order; therefore microcontrollers with high speed are required for their realization. Efficiency of the suggested methods is illustrated by numerical examples.

**Keywords:** system, the digital control device, control principle on output and impacts, astatic, direct quality indices

**Acknowledgements:** The article is prepared by results of carry out in SFEDU the project no. 18-19-00621 under the grant of the Russian Scientific Found.

For citation:

**Gaiduk A. R.** Design of Astatic Digital Systems with Application of Standard Normalized Transfer Functions, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 16–33.

DOI: 10.17587/mau.20.16-33

## References

1. **Denisenko V. V.** *Komp'yuternoe upravlenie technologicheskim protsessom, experimentom, oborudovaniem* (Computer control of technological process, experiment, equipment), Moscow, Goryachaya liniya-Telecom, 2009 (in Russian).
2. **Grigor'iev V. V., Bystrov S. V., Boykov V. I., Boltunov G. I., Mansurova O. K.** *Tsifrovye sistemy upravleniya* (Digital control systems), Sankt-Petersburg, SPbGTU ITMO, 2011 (in Russian).
3. **Lutsenko I. V.** *Sintez diskretnogo regulatora temperatury gazov gazoturbinogo dvigatelya s uchetom trebovaniy grubosti* (Synthesis of a discrete regulator of gases temperature of the gas-turbine engine in view of roughness requirements), *Matematicheskie metody v tekhnike i tekhnologiyakh — MMTT-18. Sbornik trudov XVIII Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii*, vol. 2, Sektsiya 2, Kazan, Publishing house of Kazanskii gosudarstvennyi tekhnologicheskii universitet, 2005, pp. 139–142 (in Russian).
4. **Stojanovic S. B., Debelkovic D. Lj., Antic D. S.** Finite-time Stability and Analysis of Discrete Time-delay Systems using Discrete Convolution of Delayed States, *FACTA UNIVERSITATIS. Series: Automatic Control and Robotics*, 2014, vol. 14, no. 32, pp. 147–158.
5. **Bakhilina I. M., Stepanov S. A.** On the design of discrete  $H_\infty$ -controllers, *Automation and Remote Control*, 2000, no. 61 (2), pp. 254–264.
6. **Pshikhovop V. Kh., Medvedev M. Yu.** *Upravlenie podvizhnymi ob'ektami v opredelennykh i neopredelennykh sredakh* (Control of mobile objects in the certain and uncertain environments), Moscow, Nauka, 2011 (in Russian).
7. **Kiselev O. N.** Minimization of basic quality indices in linear discrete systems, *Automation and Remote Control*, 2005, no. 66(3), pp. 398–405.
8. **Gaiduk A. R., Plaksienko E. A.** *Analiz i sintez sistem upravleniya s primeneniem sistemnykh invariantov v MATLAB* (Analysis and synthesis of control systems with application system invariants in MATLAB), Saarbrücken, Palmarium Academic Publishing, 2016 (in Russian).
9. **Wiener N.** The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. N. Y., 1949.
10. **Kalman R. E.** Contributions to the Theory of Optimal Control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
11. **Letov A. M.** *Analiticheskoe konstruirovaniye regulyatorov I–III* (Analytical designing of regulators I–III), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1960, no. 4–6 (in Russian).
12. **Volgin L. N.** *Elementy teorii upravlyayushchikh mashin (metod polinomialnykh uravneniy v zadachakh sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya s tsifrovymi vychislitel'nymi mashinami)* (Elements of the control machines theory (method of polynomial equations in tasks of synthesis of automatic control systems with digital computers)), Moscow, Sovetskoe radio, 1962 (in Russian).
13. **Volgin L. N.** *Optimal'noe diskretnoe upravlenie dinamicheskimi sistemami* (Optimal discrete control of dynamic systems), P. D. Krut'ko ed., Moscow, Nauka, 1986 (in Russian).
14. **Filimonov N. B.** *Problema kachestva protsessov upravleniya: smena optimizatsionnoy paradigmy* (Quality problem of control processes: change optimal paradigm), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2010, no. 12, pp. 2–10 (in Russian).
15. **Krasovskiy A. A., Pospelov G. S.** *Osnovy avtomatiki i tekhnicheskoy kibernetiki* (Bases of automatics and technical cybernetics), Moscow — Leningrad, Gosenergoizdat, 1962 (in Russian).
16. **Besekerskiy V. A., Popov E. P.** *Teoriya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya* (The theory of control automatic systems), Moscow, Nauka, 1975 (in Russian).
17. **Makarov I. M., Menskiy B. M.** *Lineinye avtomaticheskije sistemy* (Linear automatic systems), Moscow, Mashinostroenie, 1982 (in Russian).
18. **Gaiduk A. R.** *Sintez sistem avtomaticheskogo upravleniya po peredatochnym funktsiyam* (Synthesis of systems of automatic control on transfer functions), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1980, no. 1, pp. 11–16 (in Russian).
19. **Gaiduk A. R.** *Ob ogranicheniyakh, obuchlovennykh zadannoy chast'yu sistemy i upravlyayushchim ustroystvom* (About the restrictions caused by the given part of system and controlling device), *Izvestiya vuzov. Priborostroenie*, 1987, vol. XXX, no. 5, pp. 11–16 (in Russian).
20. **Gaiduk A. R., Plaksienko E. A.** *Sintez dinamicheskikh sistem po trebuemym pokazatelyam kachestva* (Synthesis of dynamic systems on required quality indices), *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2008, no. 4, pp. 7–12 (in Russian).
21. **Gaiduk A. R.** *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyy podkhod)* (Theory and methods of analytical design of automatic control systems (the polynomial approach)), Moscow, Phizmatlit, 2012 (in Russian).
22. **Kim D. P.** *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. T. 1. Lineinye sistemy* (Theory of automatic control. T. 1. Linear systems), Moscow, Phizmatlit, 2003 (in Russian).
23. **Kim D. P.** *Algebraicheskiy metod sinteza diskretnykh sistem upravleniya* (Algebraic method of synthesis of discrete control systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2013, no. 4, P. 8–13 (in Russian).
24. **Ivanov Yu. I., Yugay V. Ya.** *Primenenie mikrokontrollerov AVR v sistemakh upravleniya* (Application of microcontrollers AVR in control systems), Taganrog, Izdatel'stvo TRTU, 2005 (in Russian).
25. **Gaiduk A. R., Belyaev V. E., P'yavchenko T. A.** *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya v primerakh i zadachakh s resheniyami v MATLAB* (The theory of automatic control in examples and tasks with solutions in MATLAB). Sankt-Petersburg, LAN', 2011 (in Russian).
26. **Gaiduk A. R., Gurenko B. V., Plaksienko E. A.** *K sintezu sistem upravleniya s chastichno zadannoy strukturoy po zheleamym pokazatelyam kachestva* (To synthesis of control systems with given part of structure on desirable quality indices), *Nauchnyi Vestnik NGTU*, 2014, no. 2(55), pp. 19–29 (in Russian).
27. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *O probleme nerobastnosti spektra v zadachakh modal'nogo upravleniya* (Concerning the problem of nonrobust of spectrum in tasks of modal control), *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2011, no. 10, pp. 8–13 (in Russian).
28. **Nikol'skiy V. A.** *Ob odnom sposobe obespecheniya astatizma vtorogo poryadka v diskretnoy sisteme kombinirovannogo upravleniya s kompensatsiyey vozmushcheniya* (About one way of maintenance the second order astatic in discrete system of the combined control with indemnification of disturbance), *Izvestiya Vuzov. Electromekhanika*, 1978, no. 11, pp. 1168–1173 (in Russian).
29. **Semenov A. V., Gaiduk A. R., Gelozhe Yu. A., Semeno-va A. V.** *Protseduira avtomatizirovannogo sinteza tsifrovyykh upravlyayushchikh sistem* (Procedure of the automated synthesis of digital controlling systems), *Izvestiya UFU. Tekhnicheskie nauki. Tematicheskii vypusk "Komp'yuternye i informatsionnye tekhnologii v nauke, inzhenerii i upravlenii"*, 2014, no. 4 (153), pp. 150–157 (in Russian).

## Controlling the Welding Process in Robotic Technological Complexes by the Criterion of Product Quality

**A. F. Rezchikov**, D. Sc., Corresponding Member of the RAS, **V. A. Kushnikov**, D. Sc., Professor,  
**V. A. Ivaschenko**, D. Sc., Senior Scientific Employee, **D. S. Fominykh**, PhD,  
**A. S. Bogomolov**, PhD, Associate Professor, **L. Yu. Filimonyuk**, Associate Professor, iptmuran@san.ru,  
Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov

*Corresponding author:* **Fominykh Dmitry S.**, Ph.D.,  
Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, 410028, Russian Federation,  
e-mail: dm\_fominyh@mail.ru

*The solution of the problem of controlling the arc welding process by robotic technological complexes by the quality criterion of the produced products is proposed in this paper. The statement of the problem is given, the criterion of the quality in the form of the goal function is described. The mathematical models based on the principles of J. Forrester's system dynamics is developed. The main indicators that affect the quality of the welding process in RTC and their relationships are identified as system levels. The external factors that depend on the indicators and affect them are also defined. The functional dependencies of the indicators were obtained as a result of approximation of statistical data based on long-term observations of the process. A system of the differential equations that describe the cause-effect relationships between the indicators and the factors is developed. Based on the mathematical model, an algorithm for the search for control actions, the implementation of which minimizes the goal function was developed. The developed models and the control algorithms might significantly improve the quality of the arc welding process. The proposed software is testing as a part of the RTC Kawasaki technical control system at OJSC "Transmash" (Engels, Russia).*

**Keywords:** robotic technological complex, technological process, system dynamics, level of quality, mathematical model

For citation:

**Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivaschenko V. A., Fominykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu.** Controlling the Welding Process in Robotic Technological Complexes by the Criterion of Product Quality, *Mekhatronika, Avtomatizatsia, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 29–33.

УДК 007:159.955

**А. Ф. Резчиков**, д-р техн. наук, чл.-корр. РАН, **В. А. Кушников**, д-р техн. наук, проф.,  
**В. А. Иващенко**, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., **Д. С. Фоминых**, канд. техн. наук,  
**А. С. Богомолов**, канд. физ.-мат. наук, доц., **Л. Ю. Филимонюк**, д-р техн. наук, iptmuran@san.ru,  
Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов

## Управление процессом сварки в роботизированных технологических комплексах по критерию качества производимой продукции

*Предлагается решение задачи управления процессом дуговой сварки роботизированными технологическими комплексами, основанное на принципах системной динамики Дж. Форрестера. Разработаны математические модели и алгоритмы, позволяющие значительно повысить качество дуговой сварки. Предложенное математическое обеспечение проходит апробацию в составе комплекса системы управления роботизированными комплексами Kawasaki на ОАО "Трансмаш" (г. Энгельс).*

**Ключевые слова:** роботизированный технологический комплекс, технологический процесс, системная динамика, показатель качества, математическая модель

## Introduction

The welding process in robotic technological complexes (RTC) requires constant evaluation of the quality of the products produced at all stages of the technological process. The lack of quality control at any stage, for example, due to the deviation from welding parameters or the lack of quality control inspectors (QCI), increases the risk of defective products.

Currently, various quality control systems for welding in RTC use in practice [1–6]. The main attention is paid to ensuring the observance of welding parameters and the accuracy of positioning of the welding torch. However, in these systems, insufficient attention is paid to optimizing the operational control of the welding process in the RTC by the criterion of the quality of the products. These arguments determine the relevance and practical value of the development and implementation of new mathematical models and algorithms that allow the control of the welding process by robotic technological complexes according to the criterion of the quality of the products.

## Mathematical model and algorithm

It is necessary to develop mathematical models and algorithms that allow us to find the control action vector  $p(t) \in \{p\}$ , on the time interval  $[t_S, t_F]$ , minimizing the objective function

$$Q(t) = \int_{t_S}^{t_F} \sum_{i=1}^n (X_i^*(t) - X_i(t))^2 \omega_i dt \rightarrow \min, \quad (1)$$

where  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  are actual parameters of the welding process;  $X_i^*(t)$  is the specified value of the indicator  $X_i$ ,  $\omega_i$  is the weight coefficient of the  $i$ -th indicator.

Minimization of functions  $Q(t)$  is associated with significant difficulties due to the high dimensionality and complexity of the control object and the need to take into account a large number of parameters. Therefore, to describe the interrelation between the elements of the welding technological process in the RTC, the model of J. Forrester's system dynamics was chosen, which allows constructing differential equations of the form

$$\frac{dI_j}{dt} = \alpha_{j,0} + \sum_{k=1}^n \alpha_{j,k} \prod_{l=1}^n \omega_{j,k,l}(I_l) I_k, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2)$$

where  $I_1, \dots, I_n$  are system levels characterizing the simulated phenomenon;  $\alpha_{j,k}$ , is  $k = 1, \dots, n$ ; the rate

of the  $j$ -th stream, i.e. rate of changing  $I_k$ ;  $\omega_{j,k,l}$  — are factors for each level [7–9].

Based on the operational experience of the RTC with the Kawasaki manipulators on the C40 controllers and the welding equipment Fronius for solving the problem (1), 18 parameters were identified as system levels (Table 1).

Table 1

The quality indicators for welding in robotic technological complexes

Sign	Name of parameter
$X_1$	Number of defective beams per 100 items
$X_2$	Number of RTC operators
$X_3$	Average number of RTC stops per cycle
$X_4$	Average length of defective welds per unit of production
$X_5$	Completed work on scheduled maintenance of RTC
$X_6$	Number of programmers
$X_7$	Number of adjusters of welding equipment
$X_8$	Number of QCI
$X_9$	Number of workshop technologists
$X_{10}$	Days of delay in the supply of materials and spare parts for repair of RTC
$X_{11}$	Average deviation of welding arc voltage
$X_{12}$	Average current deviation on the feed unit motor VR1500
$X_{13}$	Average deviation of the manipulator from the program trajectory
$X_{14}$	Availability of necessary technological documentation at workplaces
$X_{15}$	Deviation of the shield gas pressure
$X_{16}$	Deviation of compressed air pressure
$X_{17}$	Production plan for a period, in units
$X_{18}$	Number of beams approved by QCI from the first time

In addition, the model includes external factors that depend on the above characteristics and affect them (Table 2).

Table 2

The factors that influence the quality indicators

Sign	Name of factor
$Sm$	Number of shifts in production
$Rw$	Number of RTC involved in the production process
$N_{st}$	The number of RTC stops for the period
$S^*$	Permissible number of RTC stops per welding cycle
$O_0$	Number of RTC operators at the beginning of the period
$O_{in}$	Number of RTC operators hired for the period
$O_{out}$	Number of dismissed RTC operators for the period
$Ld$	Total length of defective weld seams for the period
$L^*$	Estimated length of defective weld seams for the period
$M_f$	Number of completed activities of the scheduled preventive maintenance of RTC
$M_p$	Number of planned activities of the scheduled preventive maintenance of RTC
$P_0$	Number of programmers at the beginning of the period
$P_{in}$	Number of hired programmers for the period
$P_{out}$	Number of dismissed programmers for the period

Sign	Name of factor
$R_0$	Number of adjusters of welding equipment at the beginning of the period
$R_{in}$	Number of hired adjusters of welding equipment for the period
$R_{out}$	Number of dismissed adjusters of welding equipment for the period
$C$	Number of QCI at the beginning of the period
$C_{in}$	Number of QCI hired for the period
$C_{out}$	Number of dismissed QCI for the period
$T_0$	Number of workshop technologists at the beginning of the period
$T_{in}$	Number of workshop technologists hired for the period
$T_{out}$	Number of workshop technologists for the period
$Nr$	Duration of repair of RTC
$D_f$	Actual delivery time of spare parts and materials for repair of the RTC
$D_p$	Planned delivery time of spare parts and materials for repair of RTC
$\Delta_U$	Average deviation of the welding arc voltage from the nominal value
$\Delta_U^*$	Permissible deviation of the welding arc voltage from the nominal value
$\Delta_I$	Average deviation of the current on the motor of the wire feed unit from the nominal value
$\Delta_I^*$	Permissible current deviation on the motor of the wire feed unit from the nominal value
$\Delta_T$	Average deviation of the manipulator from the programmed trajectory
$\Delta_T^*$	Permissible deviation of the manipulator from the programmed trajectory
$Td_f$	Required number of documents of the technological process
$Td_p$	Actual number of documents of the technological process
$\Delta_{PG}$	Average deviation of the pressure of shielding gas
$\Delta_{PG}^*$	Permissible deviation of the pressure of shielding gas
$\Delta_{PV}$	Average deviation of the pressure of compressed air
$\Delta_{PV}^*$	Permissible deviation of compressed air pressure
$N_{TP}$	Number of beams assembled in accordance with the technological process
$N_d$	Number of beams adopted to QCI from the first presentation for the period
$Ab$	Number of acts on nonconforming products for the period

Figure 1 shows the graph of cause-effect relationships between the indicators  $X_1, X_2, \dots, X_{18}$  affecting the quality of products.

For the variable  $X_1$ , the differential equation (2) has the form

$$\begin{aligned} dX_1(t)/dt = & \\ = (N_W f_1(X_3) f_2(X_{11}) f_3(X_{12}) f_4(X_{13})) - & \quad (3) \\ - (N_S f_5(X_2) f_6(X_8) f_7(X_{17})). & \end{aligned}$$

Equations for other variables are compiled in a similar way. As a result the system of equations based on the mathematical model of J. Forrester's system dynamics will look as follows:

$$\begin{aligned} dX_1(t)/dt &= N_W f_1(X_3) f_2(X_{11}) f_3(X_{12}) f_4(X_{13}) - \\ &- N_S f_5(X_2) f_6(X_8) f_7(X_{17}); \\ dX_2(t)/dt &= (O_0 + O_{in}) f_{12}(X_{17}) - (Sm + Rw + O_{out}); \\ dX_3(t)/dt &= N_{st}/N_W f_8(X_{10}) f_9(X_{15}) f_{10}(X_{16}) - \\ &- S^* f_{11}(X_2); \\ dX_4(t)/dt &= L d f_{13}(X_{15}) f_{14}(X_{16}) - L^* f_{15}(X_2); \\ dX_5(t)/dt &= M_f f_{16}(X_6) f_{17}(X_7) - M_p f_{18}(X_{10}); \\ dX_6(t)/dt &= (P_0 + P_{in}) f_{19}(X_{17}) - (Sm + Rw + P_{out}); \\ dX_7(t)/dt &= (R_0 + R_{in}) f_{20}(X_{17}) - (Sm + Rw + R_{out}); \\ dX_8(t)/dt &= (C_0 + C_{in}) f_{21}(X_{17}) - (Sm + Rw + C_{out}); \\ dX_9(t)/dt &= (T_0 + T_{in}) f_{22}(X_{17}) - T_{out}; \\ dX_{10}(t)/dt &= (Nr + D_f) f_{23}(X_{17}) - D_p; \\ dX_{11}(t)/dt &= \Delta_U - \Delta_U^* f_{24}(X_5); \\ dX_{12}(t)/dt &= \Delta_I - \Delta_I^* f_{25}(X_5); \\ dX_{13}(t)/dt &= \Delta_T - \Delta_T^* f_{26}(X_5); \\ dX_{14}(t)/dt &= T d_f f_{27}(X_9) - T d_p; \\ dX_{15}(t)/dt &= \Delta_{PG} - \Delta_{PG}^* f_{28}(X_{17}); \\ dX_{16}(t)/dt &= \Delta_{PV} - \Delta_{PV}^* f_{29}(X_{17}); \\ dX_{17}(t)/dt &= N_{TP} f_{30}(X_9) - N_W; \\ dX_{18}(t)/dt &= N_d f_{31}(X_6) f_{32}(X_7) f_{33}(X_8) f_{34}(X_{14}) - \\ &- (Ab + Ld) f_{35}(X_1) f_{36}(X_4), \end{aligned}$$

where  $f(X_i)$  is the functional dependence on indicator  $X_i$  obtained as a result of polynomial approximation of statistical data.

The analytical solution of the system of equations (3) is difficult due to the high dimensionality and nonlinearity, therefore the values of the parameters  $X_1, X_2, \dots, X_{18}$  are determined by numerical solution.

The solution of the system of equations (3) with the help of logarithmic approximation is presented below:

$$X_1(t) = 0,0086 \ln(t) + 0,0774;$$

$$X_2(t) = 0,0271 \ln(t) + 0,6554;$$

$$X_3(t) = 0,0525 \ln(t) + 0,1091;$$

$$X_4(t) = 0,0045 \ln(t) + 0,5534;$$

$$X_5(t) = -0,104 \ln(t) + 0,889;$$

$$X_6(t) = -0,051 \ln(t) + 0,6675;$$

$$X_7(t) = -0,116 \ln(t) + 0,8375;$$

$$X_8(t) = 0,0019 \ln(t) + 0,7596;$$

$$X_9(t) = 0,0019 \ln(t) + 0,7596;$$

$$\begin{aligned}
X_{10}(t) &= 0,0258\ln(t) + 0,3417; \\
X_{11}(t) &= -0,03\ln(t) + 0,3228; \\
X_{12}(t) &= -0,015\ln(t) + 0,182; \\
X_{13}(t) &= -0,058\ln(t) + 0,7089; \\
X_{14}(t) &= 0,016\ln(t) + 0,8241; \\
X_{15}(t) &= -0,047\ln(t) + 0,5613; \\
X_{16}(t) &= 0,0359\ln(t) + 0,6723; \\
X_{17}(t) &= -0,03\ln(t) + 0,9759; \\
X_{18}(t) &= -0,021\ln(t) + 0,9261.
\end{aligned}$$

The specified values of the quality indicators of the welding process  $X_j^*(t)$  and the weight coefficients  $\omega_j$ , that necessary for calculating the objective function  $Q(t)$ , were selected by conducting an expert evaluation based on observations of the technological process.

Further, to solve the problem (1), we need to find the control action vector for minimizing the function  $Q(t)$ . Control actions are activities plans  $\mathbf{p}_j \in \{\mathbf{P}\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ :

$$\begin{aligned}
p_j : \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_{18}(t)\} \rightarrow \\
\rightarrow \{X_1(t) + \delta_1^{(j)}, X_2(t) + \delta_2^{(j)}, \dots, X_{18}(t) + \delta_{18}^{(j)}\},
\end{aligned}$$

where  $-X_i(t) < \delta_i^{(j)} < 1 - X_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, 18$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ . The values  $\delta_1^{(j)}$ ,  $\delta_2^{(j)}$ , ...,  $\delta_{18}^{(j)}$  was defined by experts taking into account the specifics of the welding process.

Activities plans are based on the frame model:

$$\begin{aligned}
\langle name; (Act_i; R\_ex_i; Pl_i; T_i); \dots \\
\dots (Act_M; R\_ex_M; Pl_M; T_M) \rangle,
\end{aligned}$$

where *name* is the name of activities plan;  $Act_i$  is the description of  $i$ -th activity;  $R\_ex_i$  is the responsible executor of  $i$ -th activity;  $Pl_i$  is the place for  $i$ -th activity;  $T_i$  is the time of execution for  $i$ -th activity.

Calculating the values of the objective function  $Q(t)$  for each  $\mathbf{p}_j \in \{\mathbf{P}\}$  for a given time interval, it is possible to define an action plan that will allow optimal control of welding quality in the RTC. After that via the searching, the plan is determined, the implementation of which minimizes  $Q(t)$ .

The results of calculating the function  $Q(t)$  for different activities plans are shown in Figure 2.

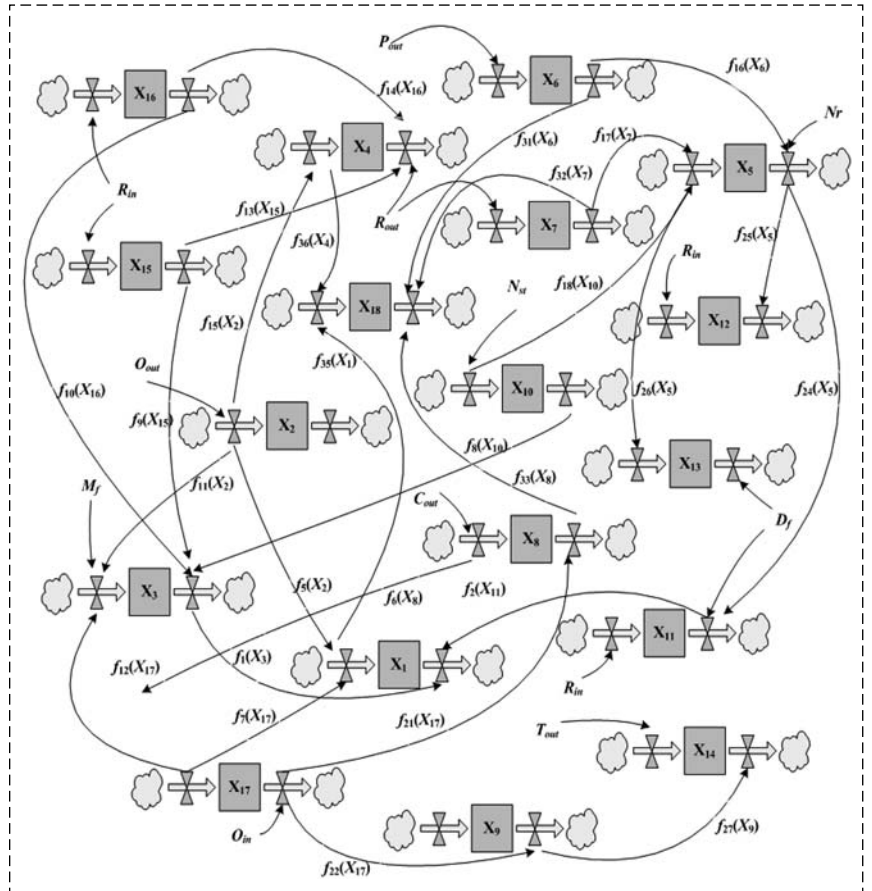


Fig. 1. The graph of cause-effect relationships between the parameters of the arc welding process in RTC

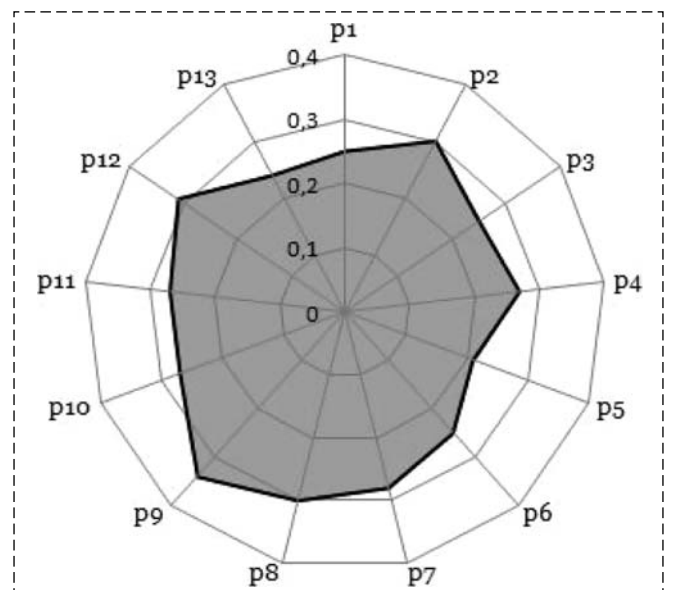


Fig. 2. Calculation of the function  $Q(t)$  for the implementation of various activities plans

As follows from the graph in Fig. 2, the minimum of the function  $Q(t)$  is achieved when implementing the action plan  $p_5$ . This plan in the form of a frame is presented below:

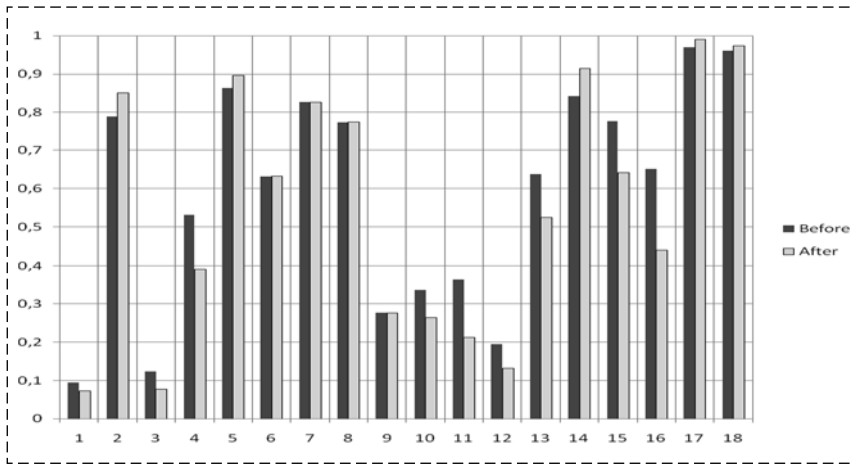


Fig. 3. Values of quality indicators before and after the implementation of the plan  $p_5$

$\langle p_5$ ; (Perform intermediate quality control of the weld; Operator of RTC; Workshop; Every shift); (Periodically check the relevance of the documentation; Workshop technologist; Workshop; Every day); (Monitor the values of the welding current according to the power supply indicators; Operator of RTC; Workshop; Every hour); (Carry out planned preventive maintenance of RTC; Adjuster of welding equipment; Workshop; Every month); (Hire an additional programmer; HR inspector; HR department; Within a month) $\rangle$ .

Figure 3 shows a comparison of the values of the quality indicators before and after the implementation of the activities plan  $p_5$ .

As we can see from Fig. 3 the implementation of the activities plan  $p_5$  allows to reduce the value of  $X_1$  from 0,095 to 0,08, which means a reduction in the number of defected beams from 11 to 8 per 100 units of production, the value of the indicator  $X_4$  is reduced from 0,532 to 0,398, which is equivalent to a decrease in the average length of defective welded seams with 0,75 m to 0,35 m per 1 unit of production.

### Conclusion

The problem of welding process control in robotized technological complexes by the quality criterion of the produced products has been set and

solved. Models and algorithms for solving the problem are developed, based on the principles of Forrester's system dynamics.

These models and algorithms allow to significantly improve the quality of welding, and consequently, the quality of products manufactured by enterprises using robotic technological complexes. Currently, the developed software is tested on the basis of a complex of control and measuring equipment RTC Kawasaki at OJSC "Transmash" (Engels, Russia).

### References

1. Filaretov V. F., Yukhimets D. A., Zuev A. V., Gubankov A. S. Development of new control methods for mechatronic systems under uncertainty, *Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2016, no. 4 (188), pp. 108–115 (in Russian).
2. Fominykh D. S., Kushnikov V. A. Models and algorithms for searching of critical combinations of events during welding in robotic complexes, *Proceedings of XXX International Scientific Conference "Mathematical Methods in Technique and Technology — MMTT*, 2017, vol. 6, pp. 18–23 (in Russian).
3. Rezhikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Fominykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. Minimizing the damage from technological process violation in robotic technological welding complexes, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, no. 5, pp. 328–332 (in Russian).
4. Rezhikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Fominykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. Prevention of critical events combination in robotic welding, *Journal of machinery manufacture and reliability*, 2017, vol. 46, no. 4, pp. 370–379.
5. Rezhikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Fominykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. Prevention of emergency situations in the welding process in robotic technological complexes, *Proceedings of Voronezh State University. Series: systems analysis and information technologies*, 2017, no. 4, pp. 46–55 (in Russian).
6. Rezhikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Fominykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. Welding process control in robotic technological complexes by the product quality criterion under the risk conditions of unstable states occurrence, *Control Systems and Informational Technologies*, 2017, vol. 69, no. 3, pp. 65–72 (in Russian).
7. Forrester J. W. *Industrial Dynamics*, MIT Press, Cambridge, Mass, 1961
8. Rezhikov A. F., Kushnikov V. A., Ivashchenko V. A., Fominykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. Control of arc welding process in robotic technological complexes based on system dynamics model, *Large-scale systems control*, 2018, iss. 71, pp. 98–122 (in Russian).
9. Yandybaeva N. V., Kushnikov V. A. Mathematical model for the prediction of performance of higher school accreditation, *Large-scale systems control*, 2013, iss. 41, pp. 314–343 (in Russian).

**В. Л. Афонин**, д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр., [afoninwl@rambler.ru](mailto:afoninwl@rambler.ru),

**Л. В. Гаврилина**, науч. сотр., [griboedova04@mail.ru](mailto:griboedova04@mail.ru),

**А. Н. Смоленцев**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., [alexseiml@yandex.ru](mailto:alexseiml@yandex.ru),

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН (ИМАШ РАН), г. Москва

## Позиционно-силовое управление шестикоординатным промышленным роботом при обработке сложных поверхностей

*При выполнении некоторых технологических операций многокоординатными промышленными роботами требуется одновременно управлять перемещением исполнительного органа и развиваемым усилием. При выполнении сборочных операций (например, вала с втулкой) необходимо выполнять свободное перемещение вала вдоль отверстия втулки и обеспечивать минимальное давление на стенки отверстия. При выполнении операций обработки сложных поверхностей деталей одновременно требуется обеспечивать перемещение инструмента по поверхности с заданной скоростью и осуществлять дозированное давление на поверхность.*

*Невозможно одновременно по одной и той же координате управлять силой и перемещением, поэтому либо необходимо осуществлять переключение с одного способа управления на другой, либо способы управления осуществлять различными приводами и по различным управляемым координатам исполнительного механизма. В многокоординатных роботах эта задача осложняется тем, что для управления по одной из декартовых координат перемещением исполнительного органа, а по другой — силой требуется одновременно управлять взаимосвязанными обобщенными координатами механизма робота.*

*В представленной работе излагается решение задачи управления шестикоординатным промышленным роботом, в котором осуществлено разделение степеней подвижности на управление по силе и на позиционное управление перемещением по траектории.*

*Для выполнения поставленной задачи применительно к задачам обработки сложных поверхностей вводятся дополнительные переменные параметры, определяющие положение режущей кромки на режущей поверхности, что позволяет расширить зону обслуживания робота при отборе, например, одной из координат для управления усилием давления.*

*Данная задача рассматривается на примере шестикоординатного промышленного робота при выполнении операции обработки сложной поверхности, когда требуется осуществлять программное перемещение инструмента с заданной скоростью по траектории на поверхности и одновременно осуществлять управляемое давление инструмента на поверхность.*

**Ключевые слова:** позиционно-силовое управление, газотурбинные двигатели (ГТД), промышленный робот, лопатка ГТД

Выполнение сборочных операций промышленными роботами требует одновременного управления перемещением и заданным усилием. Многие другие технологические операции следует выполнять, регулируя также силовое воздействие. Так, при обработке сложных поверхностей требуется выполнять перемещение по траектории с заданной скоростью по поверхности и одновременно создавать управляемую силу давления инструмента на поверхность. Сложность одновременного управления перемещением и усилием объясняется тем, что невозможно одновременно и независимо управлять перемещением и силой по одной координате. Данное утверждение вытекает из второго закона Ньютона

$$F(t) = m\ddot{q}(t) + F_n, \quad (1)$$

где  $F(t)$  — сила, развиваемая исполнительным приводом;  $\ddot{q}(t)$  — ускорение, развиваемое приводом;  $F_n$  — внешнее воздействие;  $m$  — масса перемещаемого объекта.

Из данного уравнения следует, что нельзя одновременно и независимо управлять силой  $F(t)$ ,

развиваемой приводом, и ускорением  $\ddot{q}(t)$ , соответственно скоростью  $\dot{q}(t)$  и положением  $q(t)$ . При  $q(t) = \text{const}$  можно управлять силой  $F(t)$ , создавая давление на упор, при этом будет выполняться условие  $F_n = F(t)$ . Для следящей системы, когда требуется обеспечивать программное движение  $q(t)$ , сила  $F(t)$  является переменной и формируется таким образом, чтобы обеспечивать программное движение для  $q(t)$  и противодействовать внешнему воздействию  $F_n$ .

Поэтому для роботов, имеющих взаимосвязанные степени подвижности, для выполнения силовых операций требуется распределять степени подвижности на силовые и позиционные, когда одна группа степеней подвижности обеспечивает позиционное управление, а другая — силовое.

Первые примеры позиционно-силового управления применительно к системам управления роботами изложены в работах В. С. Кулешова и М. Вукобратовича [1]. Наиболее полная информация о работах, посвященных позиционно-силовому управлению, изложена в работе [2]. В механизмах параллельной

структуры позиционно-силовое управление может быть реализовано путем установки в одних сочленениях приводов, обеспечивающих управление положением выходной платформы, а в отдельных свободных сочленениях — приводов, обеспечивающих управление моментом [3—5]. В данном случае управление моментом выполняет функцию разгрузки механизма от статических неуравновешенных моментов. Это позволяет повысить быстродействие при выполнении перемещения выходной платформы.

### Управление перемещением и усилием при движении по сложной поверхности

Автоматизация операции шлифования и полирования сложной поверхности, в частности обработка пера лопаток газотурбинного двигателя (ГТД), возможна с использованием промышленных роботов, оснащенных силомоментными датчиками и встроенной в состав комплекса системой контроля геометрических параметров и качества обрабатываемой поверхности. В зависимости от соотношения массы обрабатываемой детали и инструмента совместно с его приводом выбирается один из способов обработки:

1) перемещение детали, закрепляемой в захватном устройстве робота, относительно неподвижного инструмента. Выполняется, когда масса детали много меньше массы инструмента совместно с его приводом;

2) перемещение инструмента совместно с его приводом относительно неподвижно закрепленной детали [6] выполняется, когда масса инструмента совместно с его приводом много меньше массы детали.

Второй способ обработки применяется, как правило, при обработке гребных винтов, лопастей турбин, а также моноколес крупных ГТД. В представленной работе рассматривается первый способ обработки, когда инструмент совместно с приводом закрепляется неподвижно относительно робота, а обработка пера лопаток ГТД выполняется перемещением лопатки относительно неподвижного инструмента.

Рассмотрим решение данной задачи на примере промышленного робота (рис. 1, а), оснащенного силомоментными датчиками. В качестве инструмента рассматривается шлифовальный круг с торовой режущей поверхностью.

Использование режущего инструмента, в частности, шлифовального круга, имеющего сложную режущую поверхность, позволяет выполнять операцию обработки в различных

точках режущей поверхности. В данном случае одна либо несколько степеней подвижности используются для управления усилием, а для обеспечения перемещения и ориентации исполнительного органа можно использовать дополнительные переменные параметры, определяющие положение режущей кромки на режущей поверхности инструмента, обеспечивая при этом ограниченным числом управляемых степеней подвижности робота доступность режущей кромки инструмента ко всем точкам обрабатываемой поверхности.

Положение режущей кромки на режущей поверхности задается положением сопровождающего трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$  (рис 1, б), ось  $\tau$  направляется по скорости относительного перемещения обрабатываемой поверхности и инструмента, ось  $\nu$  — по нормали к обрабатываемой и режущей поверхностям, ось  $\beta$  направляется по режущей кромке.

В этом случае перемещение режущей кромки по обрабатываемой поверхности, кроме управляемых координат робота  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$ , определяется параметрами  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ , которые задают ее положение на режущей поверхности.

Положение подвижного трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$ , связанного с режущей кромкой, на торовой режущей поверхности относительно системы координат инструмента  $(XYZ)_{И1}$  определяется следующими параметрами (рис. 1, б):  $R$  — радиус центра образующей торового круга,  $r$  — радиус образующей круга. Углы  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$  являются переменными и определяют угловую ориентацию подвижного трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$  относительно системы координат инструмента  $(XYZ)_{И1}$ .

Рассмотрим матрицы, определяющие положение подвижного трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$  относительно системы координат инструмента  $(XYZ)_{И1}$  при повороте последовательно на углы  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$ . Матрицы преобразования координат имеют вид

$${}^{И1}\mathbf{C}_{\theta_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -C(\theta_1) & +S(\theta_1) & 0 \\ -S(\theta_1) & -C(\theta_1) & 0 \end{bmatrix};$$

$${}^{\theta_1}\mathbf{C}_{\theta_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C(\theta_2) & S(\theta_2) \\ 0 & -S(\theta_2) & C(\theta_2) \end{bmatrix};$$

$${}^{\theta_2}\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} C(\theta_3) & 0 & S(\theta_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ -S(\theta_3) & 0 & C(\theta_3) \end{bmatrix},$$

где  $S(\theta_i) = \sin\theta_i$ , и  $C(\theta_i) = \cos\theta_i$ .

Выполнив последовательное перемножение матриц  ${}^{01}C_{\theta_1}$ ,  ${}^{01}C_{\theta_2}$ ,  ${}^{02}C_i$ , получим матрицу преобразования координат, определяющую угловые преобразования  $(\tau\nu\beta)_i$  относительно системы координат инструмента  $(XYZ)_{II1}$

$${}^{01}C_i = \begin{bmatrix} -C(\theta_2)S(\theta_3) & -S(\theta_2) & C(\theta_2)C(\theta_3) \\ -C(\theta_1)C(\theta_3) - S(\theta_1)S(\theta_2)S(\theta_3) & S(\theta_1)C(\theta_2) & -C(\theta_1)S(\theta_3) + S(\theta_1)S(\theta_2)C(\theta_3) \\ -S(\theta_1)C(\theta_3) + C(\theta_1)S(\theta_2)S(\theta_3) & -C(\theta_1)C(\theta_2) & -S(\theta_1)S(\theta_3) - C(\theta_1)S(\theta_2)C(\theta_3) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

С учетом положения начала координат  $(\tau\nu\beta)_i$  в системе координат  $(XYZ)_{II1}$  матрица, определяющая положение  $(\tau\nu\beta)_i$  в системе координат  $(XYZ)_{II1}$ , принимает вид

$${}^{01}A_i = \begin{bmatrix} -C(\theta_2)S(\theta_3) & -S(\theta_2) & C(\theta_2)C(\theta_3) & rS(\theta_2) \\ -C(\theta_1)C(\theta_3) - S(\theta_1)S(\theta_2)S(\theta_3) & S(\theta_1)C(\theta_2) & -C(\theta_1)S(\theta_3) + S(\theta_1)S(\theta_2)C(\theta_3) & -(R + C(\theta_2)r)S(\theta_1) \\ -S(\theta_1)C(\theta_3) + C(\theta_1)S(\theta_2)S(\theta_3) & -C(\theta_1)C(\theta_2) & -S(\theta_1)S(\theta_3) - C(\theta_1)S(\theta_2)C(\theta_3) & (R + C(\theta_2)r)C(\theta_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Для доступа в проблемные участки лопатки инструмент совместно с приводом комплектуется с роботом в соответствии с рис. 2.

Угол наклона  $\varphi$  (рис. 2) позволяет обрабатывать спинку и корыто пера лопатки конической поверхностью режущей поверхности инструмента, что позволяет увеличить объем снимаемого слоя материала в единицу времени.

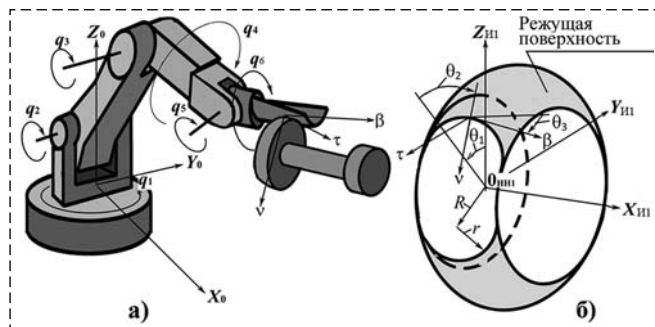


Рис. 1. Промышленный робот и представление режущей поверхности инструмента:

*a* – робот совместно с инструментом; *б* – шлифовальный круг, имеющий торцовую режущую поверхность

Fig. 1. Industrial robot and idea of the cutting tool surface:

*a* – a robot together with a tool; *b* – a grinding wheel having a torus cutting surface

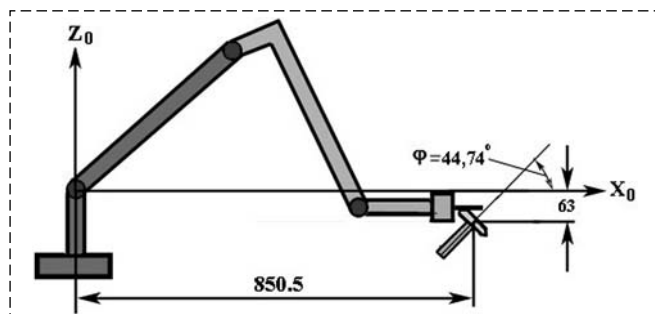


Рис. 2. Компонка робота с лопаткой и инструмента с его приводом

Fig. 2. Arrangement of a robot with a shovel and a tool with its drive

Для упрощения матриц преобразования координат и определения положения  $(\tau\nu\beta)_i$  относительно системы координат робота  $(XYZ)_0$  инструмент располагается относительно робота таким образом, чтобы плоскость  $(XZ)$  системы координат инструмента  $(XYZ)_{II}$  и плоскость  $(XZ)$  системы координат робота  $(XYZ)_0$  совпадали. В этом случае матрица преобразования координат  ${}^0A_{II}$  принимает следующий вид

$${}^0A_{II} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi & 850,5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & -63 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Так как для инструмента радиусы  $R$  и  $r$  являются постоянными параметрами, положение сопровождающего трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$  на режущей поверхности однозначно определяется переменными параметрами  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]$ .

Таким образом, если одну из обобщенных координат робота использовать, например, для управления силовым воздействием, то переменные параметры  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$  позволяют выполнять обработку сложной поверхности детали, осуществляя перемещение детали оставшимися обобщенными координатами робота в различные точки режущей поверхности инструмента, определяемые, в том числе, переменными параметрами  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$ .

Рассмотрим алгоритм определения обобщенных координат и управления роботом (см. рис. 1), у которого привод обобщенной координаты  $q_5$  осуществляет управление моментом  $M_5$ , создавая управляемое давление на обрабатываемую поверхность, которое необходимо

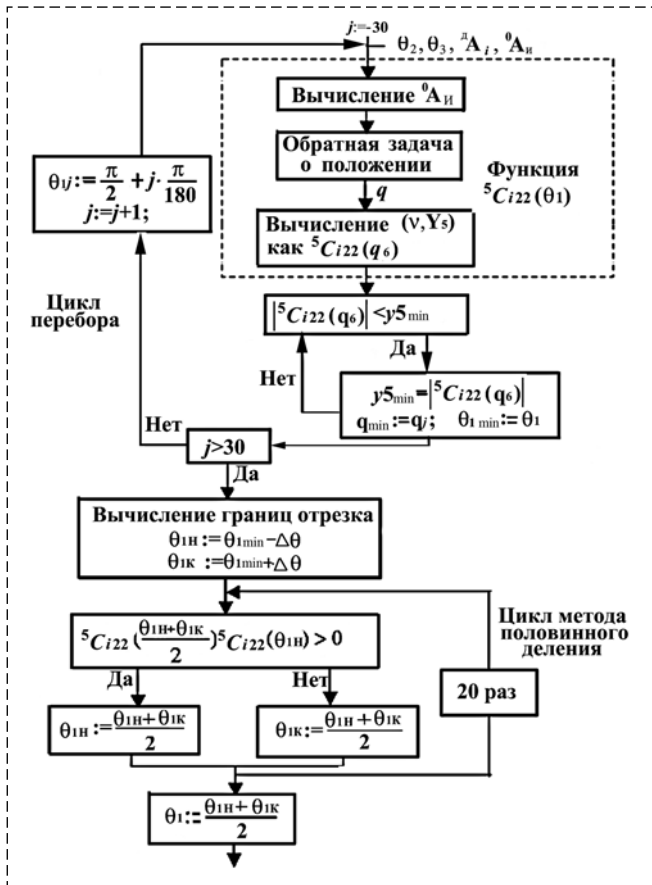


Рис. 3. Алгоритм определения управляемых координат робота и дополнительных параметров

Fig. 3. Algorithm for determining controlled robot coordinates and additional parameters

при выполнении, например, операции полирования и размерного шлифования.

Работа данного алгоритма (рис. 3) включает следующую последовательность шагов. Входной информацией является положение трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$  в системе координат детали и перемещение его по поверхности с заданной скоростью.

Положение каждой точки поверхности определяется положением сопровождающего трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$  относительно системы координат детали  $(XYZ)_Д$  и задается матрицей  ${}^ДA_i$  вида

$${}^ДA_i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & X_i \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & Y_i \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & Z_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где матрица направляющих косинусов имеет

$$\text{вид } {}^ДC_i = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}.$$

Первый столбец матрицы направляющих косинусов определяет направляющие косинусы вектора  $\tau$ , который совпадает с вектором скорости относительного движения детали и инструмента, второй столбец — это направляющие косинусы вектора  $\nu$ , который направлен по нормали к поверхности, и третий столбец — направляющие косинусы вектора  $\beta$  — обычно представляет направление режущей кромки инструмента. Четвертый столбец матрицы  ${}^ДA_i$  определяет положение начала координат сопровождающего трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$  в системе координат  $(XYZ)_Д$ .

Для удобства преобразований и нахождения управляемых обобщенных координат робота  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]^T$  систему координат детали  $(XYZ)_Д$  целесообразно совместить с системой координат шестого звена робота (рис. 4).

Математически перемещение детали относительно инструмента характеризуется последовательным совпадением трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$ , определяющего положение точек траектории на обрабатываемой поверхности с положением трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$ , определяющего положение режущей кромки на режущей поверхности.

Далее определяется обратная матрица  ${}^iA_Д$ . Взаимосвязь между матрицей, определяющей положения подвижного трехгранника  $(\tau\nu\beta)_i$ , и параметрами  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]$ , определяющими положение режущей кромки на режущей поверхности, определяется матричным уравнением

$${}^0A_{ii} {}^iA_i(\theta) {}^iA_Д = {}^0A_Д(\mathbf{q}). \quad (6)$$

Система уравнений (6) содержит девять неизвестных, определяющих положение режущей кромки на обрабатываемой поверхности  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, \theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$ .

Если одна из степеней подвижности робота (в рассматриваемом роботе это 5-я степень подвижности) используется для обеспечения

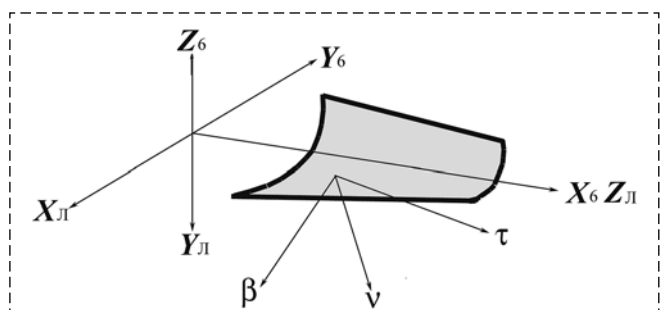


Рис. 4. Системы координат детали, трехгранника режущей кромки и шестого звена робота

Fig. 4. Coordinate system of the workpiece, trihedron of the cutting edge and the sixth link of the robot

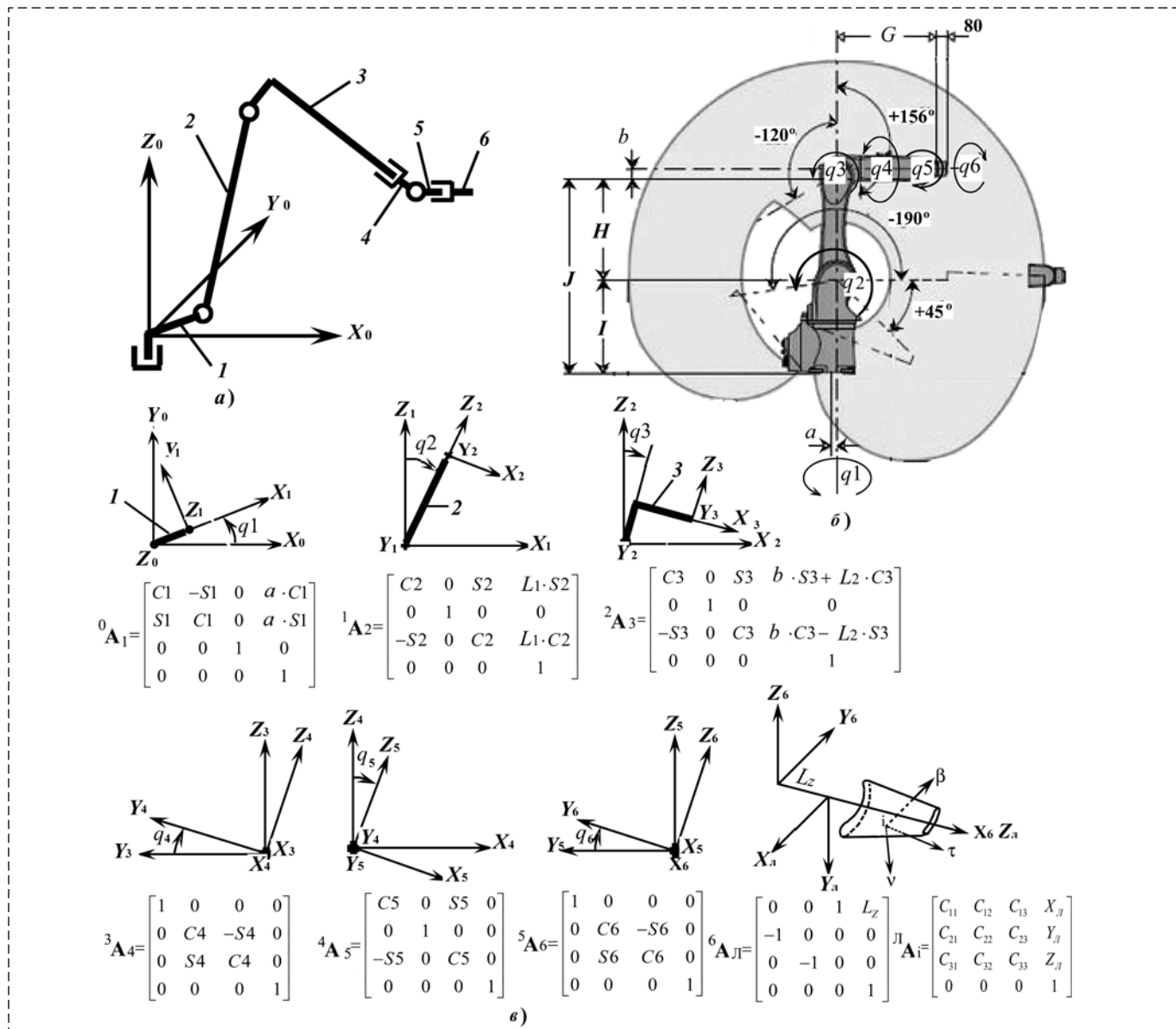
давления по нормали на обрабатываемую поверхность, то положение режущей кромки на обрабатываемой поверхности будет зависеть от восьми параметров  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_6, \theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$ . При этом  $q_5$  будет зависеть от  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_6$ .

**Условие управления силой давления по нормали к обрабатываемой поверхности моментом 5-го привода робота PUMA**

Для обеспечения давления на обрабатываемую поверхность с использованием привода

5-й степени подвижности необходимо, чтобы ось 5-й степени подвижности была перпендикулярна нормали в  $i$ -й точке на обрабатываемой и режущей поверхностях  $v_i$ .

Условие перпендикулярности обеспечивается в том случае, если скалярное произведение вектора  ${}^0Y_5$  (вектора, связанного с 5-й осью робота, представленного в неподвижной системе координат  $(XYZ)_0$ ) и вектора  ${}^0v_i$  (вектора, связанного с общей нормалью обрабатываемой и режущей поверхности), также представленного в неподвижной системе координат  $(XYZ)_0$ , будет равно нулю.



**Рис. 5. Кинематическая схема робота KR10 R1100:**

$a$  — кинематическая схема;  $b$  — зона обслуживания робота KR10 R1100;  $c$  — матрицы преобразования координат, где  $Cn = \cos(q_n), S\alpha = \sin(q_n), a = 25$  мм,  $L1 = 455$  мм,  $b = 35$  мм,  $L2 = 420$  мм

**Fig. 5. Cinematic diagram of the robot KR10 R1100:**

$a$  — Kinematic scheme;  $b$  — Service area of the robot KR10 R1100;  $c$  — Coordinates transformation matrix, where  $Cn = \cos(q_n), S\alpha = \sin(q_n), a = 25$  mm,  $L1 = 455$  mm,  $b = 35$  mm,  $L2 = 420$  mm

Это выражение не меняется при переходе к 5-й системе координат

$$({}^5Y_5, {}^5v_i) = 0, \quad (7)$$

где формулу для левой части  $({}^5Y_5, {}^5v_i)$  можно извлечь из матрицы поворота  ${}^5C_i$ , в которой второй столбец  ${}^5v_i$  представляет собой направляющие косинусы вектора нормали по осям  $X_5$ ,  $Y_5$  и  $Z_5$ . Вторым элементом второго столбца этой матрицы — направляющий косинус вектора нормали по оси  $Y_5$ , иначе говоря, скалярное произведение единичного вектора  $e_{y_5} = {}^5Y_5 = (0, 1, 0)^T$  на нормаль  ${}^5v_i$ .

Рассмотрим далее, от каких приводных координат зависит  ${}^5C_i$ . Поскольку  ${}^5C_i = {}^5C_6 {}^6C_i$ , где  ${}^6C_i = {}^6C_D {}^D C_i$ , матрица  ${}^6C_D$  постоянна (рис. 5),  ${}^D C_i$  — задана,  ${}^5C_6$  зависит только от  $q_6$ , то  ${}^5C_i$  также зависит только от  $q_6$ . Поэтому соотношение (7) может быть записано как

$${}^5C_{i22}(q_6) = 0, \quad (8)$$

Это условие позволяет обеспечивать давление на поверхность с заданной силой  $F_n$ , управляя только моментом  $M_5$  привода 5-й оси.

### Выбор инструмента и методика определения параметров, определяющих положение режущей кромки на режущей поверхности

Выбор инструмента для воспроизведения требуемой поверхности детали после обработки определяется конфигурацией режущей поверхности и возможностью достижения режущей кромки проблемных участков обрабатываемой поверхности. Применительно к обработке пера лопаток ГТД (рис. 6) режущая

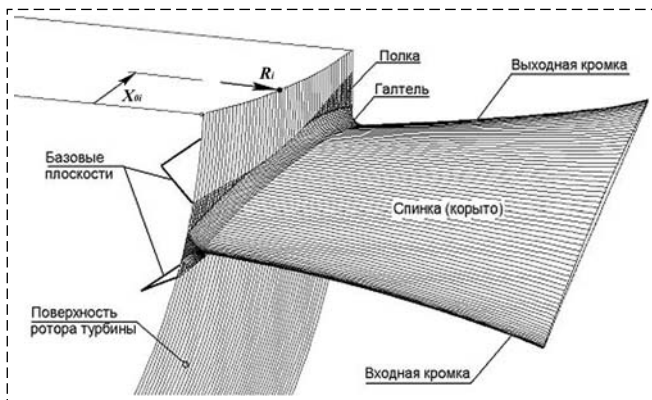


Рис. 6. Обрабатываемая поверхность пера лопаток ГТД  
Fig. 6. Treated blade surface of GTE blades

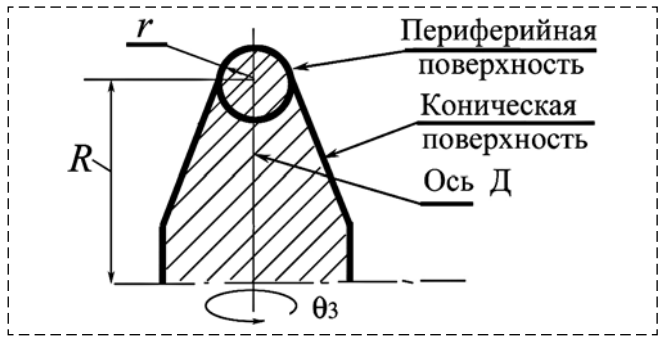


Рис. 7. Радиальное сечение шлифовального круга, имеющего торовую поверхность  
Fig. 7. Radial section of a grinding wheel having a torus surface

поверхность должна обеспечивать обработку спинки (корыта), кромок, прикомлевого участка и специальных полок.

В качестве примера инструмента для обработки пера лопаток ГТД рассмотрим шлифовальный круг, имеющий режущую поверхность, представляющую торовую поверхность (см. рис. 1, б). На рис. 7 приведено радиальное сечение режущей поверхности, которая кроме торовой поверхности включает коническую поверхность.

На примере шлифовального круга рассмотрим методику определения углов  $\theta$ , определяющих положение режущей кромки при обработке пера лопаток (см. рис. 6). Особенностью торовой поверхности является то, что в каждой точке данной поверхности в нормальном сечении можно получить различную кривизну, изменяемую в пределах

$$\frac{\cos(\theta_2)}{R + r \cos(\theta_2)} \leq k_i \leq \frac{1}{r}. \quad (9)$$

В этом случае, изменяя угол  $\theta_3$ , определяющий поворот режущей кромки вокруг нормали  $v_i$ , можно воспроизводить вогнутую поверхность корыта с требуемой кривизной для каждой  $i$ -й точки поверхности. При обработке корыта для каждой точки обрабатываемой поверхности значение угла  $\theta_3$  следует в первом приближении выбирать таким, чтобы в каждой точке траектории относительного движения детали кривизна поверхности в нормальном сечении, перпендикулярном траектории движения, имела минимальное значение из всех значений кривизны в сечениях, проходящих через нормаль:

$$\theta_3 = \pm \arctg \sqrt{\frac{(K_{1И} - K_{1Д})(K_{2И} - K_{2Д})}{(K_{1Д} - K_{2И})(K_{1И} - K_{2Д})}} + \pi N, \quad (10)$$

где  $K_{1И}, K_{2И}$  — главные значения кривизны поверхности инструмента;  $K_{1Д}, K_{2Д}$  — главные значения кривизны поверхности детали. Индексы 1 и 2 определяют: 1 — минимум и 2 — максимум кривизны в нормальном сечении при повороте плоскости сечения вокруг нормали. Формула (10) получена из формулы Эйлера [9] для соприкасающихся поверхностей инструмента и детали, а начало отсчета угла  $\theta_3$  связано с линиями кривизны и применяется для выбора начального приближения значения этого угла. Уточнение значений  $\theta_2$  и  $\theta_3$  проводится численными методами [10], учитывающими геометрию не только локальных участков, а всех контактирующих поверхностей.

Необходимое условие локального непересечения поверхностей:

$$\begin{aligned} K_{И,\min} &\geq K_{Д,\min}; \\ K_{И,\max} &\geq K_{Д,\max}, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $K_{И,\min}, K_{Д,\min}$  — минимальные главные значения кривизны инструмента и детали, соответственно, а  $K_{И,\max}, K_{Д,\max}$  — максимальные главные значения кривизны инструмента и детали. Если же требуется обеспечить наиболее плотный локальный контакт инструмента и детали, то необходимо дополнительное условие

$$K_{Д,\max} \geq K_{И,\min}, \quad (12)$$

которое вместе с условием локального непересечения (11) обеспечит существование действительного решения (10). В зависимости от знака главных значений кривизны точки поверхности делятся на выпуклые, вогнутые и гиперболические (разные знаки  $K_1$  и  $K_2$ ). Поверхность пера лопатки (см. рис. 6) в основном состоит из гиперболических точек и может обрабатываться конической режущей поверхностью. Выпуклая или коническая поверхность полки невелика, и поэтому для нее требуется выполнение только условия (11), а для плоской поверхности полки возможен линейчатый контакт с конической режущей поверхностью. Для торовой режущей поверхности при обработке сопряжения возможно выполнение обоих условий (11), (12).

Как видно из соотношения (10),  $\theta_3$  влияет на разность кривизны в нормальном сечении, а для тора (9) и конуса  $\theta_2$  (перемещение по образующей) влияет на  $K_{2И}$ . Координата поворота вокруг оси инструмента  $\theta_1$  на кривизну режущей поверхности инструмента в точке контакта не влияет, также она не влияет на разность

кривизны в нормальном сечении. Поэтому  $\theta_2$  и  $\theta_3$  определяются из соотношения (10) и других условий контакта поверхностей, в то время как  $\theta_1$  определяется из дополнительного условия совместно с обобщенными координатами манипулятора. Данное условие обеспечивает максимальную ширину снимаемого слоя поверхности.

Угол  $\theta_2$ , определяющий поворот режущей кромки вокруг оси  $\beta$ , должен обеспечивать совпадение касательной, проведенной к траектории движения детали в  $i$ -й точке поверхности, и касательной к окружности радиуса  $r$  (рис. 7). Для исключения подреза необходимо, чтобы нормальная кривизна поверхности детали в каждой точке траектории была меньше  $1/r$ . При выполнении данного условия выбор угла  $\theta_2$  определяется отсутствием касания необрабатываемых частей детали с режущей поверхностью.

Обработку спинки пера лопатки целесообразно выполнять линейчатой режущей поверхностью инструмента (это коническая поверхность (рис. 7)). В данном случае для обеспечения максимальной ширины снимаемого слоя следует выбирать расстояние между траекториями движения детали относительно инструмента таким образом, чтобы расстояние между образующей конической поверхности и точками обрабатываемой поверхности, расположенными на линии, образованной пересечением нормальной плоскости, проходящей через образующую конической поверхности, не превышало допустимого отклонения требуемой поверхности и получаемой после обработки.

Обработка галтели (см. рис. 6) затруднена тем, что галтель должна обеспечивать плавный переход с поверхности спинки (корыта) в полку (см. рис. 6). В этом случае галтель имеет переменный радиус. Воспроизведение данного радиуса может быть обеспечено, если обработку осуществлять периферийной частью режущей поверхности (рис. 7). При этом переменный радиус галтели формируется поворотом инструмента вокруг оси Д.

#### **Определение угла $\theta_1$ совместно с приводными координатами робота при условии обеспечения перпендикулярности оси 5-го привода и нормали**

Таким образом, выбор углов  $\theta_2$  и  $\theta_3$  определяется видом обрабатываемой поверхности и инструмента для каждой обрабатываемой поверхности индивидуально, а угол  $\theta_1$  вычисля-

ется в соответствии с алгоритмом (см. рис. 3), решающим уравнение (8) при условии (6) численным методом. В соответствии с алгоритмом (см. рис. 3) начальные значения  $\theta_1$  уточняются для каждой  $i$ -й точки обрабатываемой поверхности. В левой части  ${}^0\mathbf{A}_И {}^И\mathbf{A}_i(\theta) {}^И\mathbf{A}_Д$  уравнения (6):  ${}^0\mathbf{A}_И$  — константа (4); поскольку  $\theta_2$  и  $\theta_3$  изначально заданы, то  ${}^И\mathbf{A}_i(\theta) = {}^И\mathbf{A}_i(\theta_1)$ ;  ${}^И\mathbf{A}_Д = {}^Д\mathbf{A}_i^{-1}$  — получается из заданной матрицы  ${}^Д\mathbf{A}_i$ . Поэтому левая часть (6) выражается как  ${}^0\mathbf{A}_Д(\theta_1)$  и выражение (6) принимает вид

$${}^0\mathbf{A}_Д(\theta_1) = {}^0\mathbf{A}_Д(\mathbf{q}). \quad (13)$$

Определение вектора обобщенных координат  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]$  для робота PUMA при заданной левой части достаточно подробно изложено в работе [8]. Если задать произвольное  $\theta_1$ , то  $\mathbf{q}$  определяется процедурой из элементарных функций, в частности, выражением  $q_6({}^0\mathbf{A}_Д(\theta_1))$ , которое может быть подставлено в соотношение (8). Таким образом, совместное решение (8) и (13) сводится к решению одного уравнения с одним неизвестным:

$${}^5C_{i22}(q_6({}^0\mathbf{A}_Д(\theta_1))) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) решается относительно  $\theta_1$ , первое приближение находится перебором, а окончательный результат — численным методом деления отрезка пополам в соответствии с алгоритмом на рис. 3. Зависимость  $q_6({}^0\mathbf{A}_Д(\theta_1))$  — это вычислительная процедура из элементарных функций, взятая с незначительными изменениями из работы [8].  ${}^5C_{i22}(q_6)$  получается из произведения матриц  ${}^5\mathbf{A}_6(q_6) {}^6\mathbf{A}_Д {}^Д\mathbf{A}_i$  (см. рис. 5).

Перебор выполняется для 61 дискретного значения угла  $\theta_1$  в диапазоне от  $-30^\circ$  до  $30^\circ$  с дискретностью  $1^\circ$  последовательным увеличением цикловой переменной  $j$ ,  $\theta_{1j} = j \cdot \pi/180$  рад. Из всех значений  $\theta_{1j}$  в качестве начального приближения  $\theta_{1\min}$  выбирается то, для которого минимален модуль  $|{}^5C_{i22}(\theta_{1j})|$ .

Затем начальное приближение уточняется методом половинного деления: определяются значения начала  $\theta_{1н} := \theta_{1\min} - \Delta\theta$  и конца  $\theta_{1к} := \theta_{1\min} + \Delta\theta$  отрезка,  $\Delta\theta$  выбирается так, чтобы у функции  ${}^5C_{i22}(\theta_1)$  были разные знаки в начале и конце отрезка. Далее уменьшается длина отрезка, на котором есть решение, в два раза на каждой итерации: если знак  ${}^5C_{i22}(\theta_1)$  в середине отрезка совпадает со знаком  ${}^5C_{i22}(\theta_1)$  в начале отрезка, то конец отрезка переносится в середину, а если знак  ${}^5C_{i22}(\theta_1)$  в середине от-

резка совпадает со знаком  ${}^5C_{i22}(\theta_1)$  в конце отрезка, то начало отрезка переносится в середину. Двадцать таких итераций позволяют найти решение с требуемой точностью.

Далее в соответствии с компоновкой (см. рис. 2) требуется определить значение момента  $M_5$ , соответствующее силе давления  $F_n$ . Для этого необходимо знать радиус-вектор  $\mathbf{R}_F$ , который равен расстоянию от  $i$ -й точки до плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{X}_5$  и  $\mathbf{Z}_5$  системы координат  $(XYZ)_5$ . Данное расстояние равно значению координаты  $x$  для  $i$ -й точки в системе координат  $(XYZ)_5$ :

$$R_F = {}^5x_i. \quad (15)$$

### Система управления моментом для одной координаты робота

Система управления моментом [11] реализуется степенью подвижности применительно к промышленному роботу (см. рис. 1, рис. 5) пятым приводом. Так как при выполнении любой операции необходимо выводить захватное устройство в заданную область, где будет выполняться операция, необходимо выполнять управление всеми обобщенными координатами, поэтому в приводе, который будет выполнять управление моментом, первоначально следует управлять положением. В этом случае переключение с управления положением к управлению моментом следует осуществлять в соответствии со структурной схемой (рис. 8).

К системе управления положением добавляется устройство преобразования сигнала с силомоментного датчика (СМД) и системы вычисления реального момента  $M_5^*(t)$ , развиваемого приводом. Система обработки информации

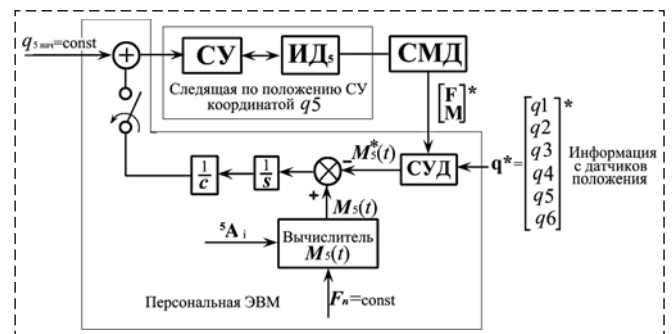


Рис. 8. Система управления моментом привода 5-й координаты робота (см. рис. 1, рис. 5). Коэффициент  $C$  — эквивалентный жесткости,  $s$  — переменная Лапласа

Fig. 8. Drive torque control system by the 5th coordinate of the robot

датчика решает обратную задачу вычисления моментов, развиваемых приводами робота, по информации силомоментного датчика (СМД), устанавливаемого на захватном устройстве робота  $\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}^*$ .

Вычислитель управляемого момента  $M_5(t)$  определяет программное значение момента для каждой  $i$ -й точки поверхности, обеспечивая заданное усилие давления на поверхность  $F_n$ :

$$M_5(t) = F_n R. \quad (9)$$

Настройка переходного процесса по моменту осуществляется регулировкой коэффициента  $C$ .

### Формирование управляющего воздействия на примере численного моделирования

Исследуемая траектория [7] состоит из 11 335 положений режущей кромки, обеспечивающих обход лопатки в следующей последовательности:

1. Продольные движения по входной кромке.
2. Поперечные движения по спинке.
3. Продольные движения по выходной кромке.
4. Поперечные движения по корыту.
5. Круговой обход прикомлевого участка.

Для траектории проводилось решение обратной задачи о положении при условии (8) — равенства нулю скалярного произведения  ${}^0\mathbf{Y}_5^0 \mathbf{v}_i$ , при этом определялся угол  $\theta_1$  при заданных массивах  $\theta_2$  и  $\theta_3$

Диапазон найденных значений  $\theta_1$  около  $35^\circ$ :

$$-19,4785^\circ < \theta_1 < 14,2551^\circ,$$

а максимальное его приращение для всей траектории составило  $0,7249^\circ$ , что обеспечивает необходимое условие плавности движения при обработке. По мере уменьшения  $\Delta z_i$  (приближения режущей кромки к прикомлевному участку), колебания  $\theta_1$  увеличиваются в связи с большими угловыми смещениями оси инструмента в системе координат детали при обработке этого участка ее поверхности. При этом обеспечена необходимая непрерывность траектории и, соответственно, управляющего воздействия по положению.

Таким образом, при выполнении робототехнической системой технологических операций, в которых требуется перемещать ис-

полнительный орган по заданной траектории с одновременным управлением усилием (давлением) в направлении, не совпадающим с направлением движения, можно обеспечить данное управляемое усилие введением дополнительных устройств.

Однако, для многокоординатного исполнительного органа робота можно выделить степени подвижности, создающие управляемое усилие. Оставшиеся степени подвижности должны обеспечивать перемещение и ориентацию исполнительного органа при движении по траектории. Если число обобщенных координат не достаточно для выполнения данного перемещения, то можно использовать дополнительные параметры, определяющие положение исполнительного органа.

Так как многие технологические операции можно выполнять в различных областях зоны обслуживания исполнительного органа робота, то в качестве дополнительных параметров следует использовать неуправляемые параметры, определяющие положение и ориентацию исполнительного органа в зоне обслуживания. Так, при выполнении операций обработки сложных поверхностей такими неуправляемыми параметрами могут быть параметры, определяющие положение режущей кромки на режущей поверхности и вычисляемые совместно с обобщенными координатами робота, так, как это показано в представленной работе.

### Список литературы

1. Vukobratovic M., Stokic D. Control of Manipulation Robots: Theory and Application. Berlin: Springer-Verlag, 1982. 366 p.
2. Егоров И. Н. Позиционно-силовое управление робототехническими и мехатронными устройствами. Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. 192 с.
3. Афонин В. Л., Смоленцев А. Н. Позиционно-силовое управление в механизмах параллельной структуры // Справочник. Инженерный журнал. 2003. № 5. С. 14—19.
4. Журавлев В. В. Системы позиционно-силового управления роботом для механотерапии: канд. дис. 20.09.2011. 125 с.
5. Афонин В. Л., Макушкин В. А. Интеллектуальные робототехнические системы: Курс лекций. Учеб. пособие. Интернет Университет информационных технологий. М., 2005. 208 с.
6. Krantz M., Andersson R. Robotized Polishing and Deburring with Force Feedback Control. Trollhattan: University West, Department of Engineering Science, 2010. 48 p.
7. Afonin V. L., Kondrat'ev I. M., Nazarov R. A. Automatic Tool to Part Motion Path Generation for Turbine-Blade Machining // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015. Vol. 44, N. 7. P. 593—602.
8. Фу К., Гонсалес Р. Робототехника. М.: Мир, 1989. 624 с.
9. Феников С. П. Теория поверхностей. М.: ОНТИ Государственное технико-теоретическое издательство, 1934. 208 с.

10. Смоленцев А. Н. Формообразование поверхностей точной части турбинной лопатки абразивным инструментом // Справочник. Инженерный журнал. 2002. № 4. С. 24–28.

11. Афонин В. Л., Смоленцев А. Н., Гаврилина Л. В. Отчет о НИР. "Разработка технологии автоматизированного

выполнения финишных операций обработки сложно профильных поверхностей деталей ГТД с использованием промышленных роботов (Интеллектуальные технологические комплексы для финишной обработки пера лопаток ГТД)". № ГР АААА-А18-118011890132-7. 2018. 91 с.

## Position-Force Control for a Six Coordinate Industrial Robot when Performing Complicated Surface Treatment

V. L. Afonin, afoninwl@rambler.ru, L. V. Gavrulina, griboedova04@mail.ru, A. N. Smolentsev, alexeisml@yandex.ru

Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences Moscow, 101990, Russian Federation

Corresponding author: Afonin Vyatcheslav L., D. Sc., Professor, Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 101990, Russian Federation, e-mail: afoninwl@rambler.ru

Accepted on August 15, 2018

### Abstract

When performing certain technological operations, multi-coordinate industrial robots require simultaneous control of the movement of the executive body and the developed effort. When performing assembly operations (for example, a shaft with a bush), it is necessary to perform a free movement of the shaft along the bore of the bushing and to ensure minimum pressure on the bore walls. When performing operations to handle complex surfaces of parts, it is simultaneously required to move the tool over the surface at a specified speed and to perform a metered pressure on the surface. Since it is impossible to control the force and motion simultaneously at the same coordinate, it is necessary either to switch from one control method to another, or to control various actuators and different controllable coordinates of the actuator. In multi-coordinate robots, this task is complicated by the fact that to control the movement of one of the Cartesian coordinates of the executive body, and by another force, it is simultaneously necessary to control the interrelated generalized coordinates of the robot's mechanism. In the work presented, the solution of the problem of control of a six-coordinate industrial robot is described, in which the separation of the degrees of mobility into power control and positional control of trajectory motion is carried out. In order to accomplish the task, additional variable parameters are introduced for the treatment of complex surfaces, which determine the position of the cutting edge on the cutting surface, which makes it possible to expand the service area of the robot during selection, for example, one of the coordinates for controlling the pressure force. This task is considered using the example of a six-coordinate industrial robot when performing a complex surface treatment operation, when it is required to program the tool at a specified speed along a path on the surface and at the same time carry out the controlled pressure of the tool on the surface.

**Keywords:** position-force control, gas turbine engine (GTE), industrial robot, GTE turbine blade

For citation:

Afonin V. L., Gavrulina L. V., Smolentsev A. N. Position-Force Control for a Six Coordinate Industrial Robot when Performing Complicated Surface Treatment, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 34–43.

DOI: 10.17587/mau.20.34-43

### References

1. Vukobratovic M., Stokic D. Control of Manipulation Robots: Theory and Application, Springer-Verlag, Berlin, 1982, 366 p.
2. Yegorov I. N. *Pozitsionno-silovoye upravleniye robototekhnicheskimi i mekhatronnymi ustroystvami* (Position-force control of robotic and mechatronic devices), Publishing house of Vladim. Gos. Un-t, 2010, 192 p. (in Russian).
3. Afonin V. L., Smolentsev A. N. *Pozitsionno-silovoye upravleniye v mekhanizmaxh parallel'noy struktury* (Position-force control in the mechanisms of parallel structure), *Spravochnik. Inzhenernyy Zhurnal*, 2003, no. 5, p. 14–19 (in Russian).
4. Zhuravlev V. V. *Sistemy pozitsionno – silovogo upravleniya robotom dlya mekhanoterapii* (Systems of position-force robot control for mechanotherapy), Candidate's dissertation is 20.09.2011, 125 p. (in Russian).
5. Afonin V. L., Makushkin V. A. *Intellektual'nyye robototekhnicheskiye sistemy: Kurs lektsiy. Uchebnoye posobiye. Internet Universitet informatsionnykh tekhnologiy* (Intellectual Robotic Systems:

A Course of Lectures. Tutorial. Internet University of Information Technologies), Moscow, 2005, 208 p. (in Russian).

6. Krantz M., Andersson R. Robotized Polishing and Deburring with Force Feedback Control, University West, Department of Engineering Science, Trollhattan, SWEDEN, 2010, 48 p.

7. Afonin V. L., Kondrat'ev I. M., Nazarov R. A. Automatic Tool to Part Motion Path Generation for Turbine-Blade Machining, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2015, vol. 44, no. 7, pp. 593–602.

8. Fu K., Gonsales R. *Robototekhnika* (Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence), Moscow, Mir, 1989, 624 p. (in Russian).

9. Finikov S. P. *Teoriya poverkhnostey* (Theory of surfaces), Moscow, ONTI State Technical and Theoretical Publishing House, 1934, 208 p. (in Russian).

10. Smolentsev A. N. *Formoobrazovaniye poverkhnostey prochnoy chasti turbinnoy lopatki abrazivnym instrumentom* (Forming the surfaces of the flowing part of the turbine blade with an abrasive tool), *Inzhenernyy Zhurnal*, 2002, no.4, pp. 24–28 (in Russian).

11. Afonin V. L., Smolentsev A. N., Gavrulina L. V. *Otchet o NIR. "Razrabotka tekhnologii avtomatizirovannogo vypolneniya finishnykh operatsiy obrabotki slozhno profil'nykh poverkhnostey detaley GTD s ispol'zovaniyem promyshlennykh robotov (Intellektual'nyye tekhnologicheskiye komplekсы dlya finishnoy obrabotki pera lopatok GTD)"* (Report on research. "Development of the technology for automated completion of finishing operations of complex profile surfaces of GTE parts using industrial robots (Intelligent technological complexes for finishing the blade of GTE blades)") № GR АААА-А18-118011890132-7, 2018, 91 p. (in Russian).

**В. Х. Пшихопов**, д-р техн. наук, проф., pshichop@rambler.ru,

**М. Ю. Медведев**, д-р техн. наук, доц., medvmihal@sfnu.ru,

**Б. В. Гуренко**, канд. техн. наук, boris.gurenko@gmail.com

Южный федеральный университет, г. Таганрог

## Алгоритмы терминального управления подвижными объектами мультикоптерного типа<sup>1</sup>

*Статья посвящена разработке алгоритмов терминального управления подвижными объектами. Рассматривается подвижный объект мультикоптерного типа, описываемый нелинейной моделью движения твердого тела в трехмерном пространстве. Предлагается трехэтапная процедура решения задачи терминального управления подвижным объектом при его движении в заданную точку. Основное отличие предложенной процедуры заключается в такой коррекции программной траектории, чтобы она проходила в каждый момент времени через текущее положение подвижного объекта. Такой способ построения программной траектории позволяет автоматически корректировать скорость при движении в заданную точку. Необходимость коррекции программной траектории может быть вызвана наличием некартографированных препятствий, различиями между моделью и реальным объектом или воздействием внешних возмущений. На первом этапе строится программная траектория, учитывающая заданное конечное время движения. Программа движения представляет собой желаемую скорость и углы ориентации подвижного объекта мультикоптерного типа. На втором этапе методом позиционно-траекторного управления осуществляется синтез обратной связи, обеспечивающей стабилизацию подвижного объекта относительно вычисленной программной траектории. Результатом выполнения второго этапа являются тяга и моменты, создаваемые винтами, которые далее пересчитываются в скорости вращения винтов. На третьем этапе проводится коррекция программной траектории в зависимости от текущего положения подвижного объекта. В результате коррекции в целевой точке возникает особенность. В целях устранения возникающей в целевой точке неопределенности задача решается в постановке слабого терминального управления. До попадания в заданную окрестность целевой точки скорость подвижного объекта рассчитывается исходя из оставшегося расстояния и времени движения. При достижении заданной окрестности целевой точки скорость движения делается постоянной. Проводится анализ замкнутой системы, в результате которого показана асимптотическая устойчивость программной траектории и попадание подвижного объекта в конечную заданную окрестность целевой точки в конечный момент времени. Приводятся результаты численного моделирования, подтверждающие работоспособность предложенных алгоритмов на примере гексакоптера.*

**Ключевые слова:** терминальное управление, подвижный объект, мультикоптерный летательный аппарат, позиционно-траекторное управление

### Введение

Беспилотные летательные аппараты (БЛА) активно применяются при решении задач [1] разведки, мониторинга и поиска объектов на наземной и надводной территории, картографирования, доставки грузов, ретрансляции радиосигналов, обработки сельскохозяйственных угодий, охраны объектов, радиоэлектронной борьбы, поражения наземных и воздушных целей. Согласно документу [2],

который является программой развития роботизированных комплексов военного назначения в США, большое внимание планируется уделить задачам, требующим группового применения БЛА. К таким задачам относятся: подавление систем ПВО; роевое боевое применение групп беспилотных самолетов по обмену разведывательной информацией и ударным действиям; ведение воздушной разведки; выдача целеуказания ударным средствам; уничтожение наземных целей и авиационная поддержка сухопутных войск; ведение радиоэлектронной борьбы и постановка помех; ретрансляция связи и команд боевого управления войсками. В рамках программы [2] в США в настоящее время ведутся несколько проектов. Проект DARPA "Gremlin" предусматривает комплексное использование транспортного

<sup>1</sup> Статья подготовлена при финансовой поддержке Южного федерального университета (грант ЮФУ "Разработка теоретических основ и интеллектуальных методов управления терминальным состоянием подвижных объектов в условиях неопределенности"). В разделе "Результаты численных исследований" использованы результаты, полученные в рамках гранта РФФИ 16-08-00012.

самолета — носителя ракет и группы БЛА под управлением малозаметного истребителя. По заказу военно-морских сил США ведется проект LOWCUST (саранча). БЛА выстреливаются из специальных пусковых установок и формируют рой, который предназначен для выполнения разведывательных и боевых функций, в числе которых групповая атака морских судов. В настоящее время скорость БЛА достигает 140 км/ч, а максимальное удаление от оператора 20 км.

В том же русле лежит проект DARPA Collaborative Operations in Denied Environment, цель которого — обеспечить возможность одновременного управления оператором роем БЛА в конфликтных зонах, в том числе при плохой связи и навигации.

Исследователи Технологического института Джорджии и Высшей школы ВМС США в 2016 г. провели учебный бой между двумя роями БЛА по 10 штук в каждом. Боевое взаимодействие БЛА симулировал наземный компьютер, однако каждый рой использовал собственную тактику, БЛА обменивались информацией и принимали решения. Целью испытаний стало исследование методов противодействия группе БЛА посредством другой группы БЛА.

В последнее время интенсивно появляется информация о групповом применении роботов в гражданской сфере. Так, в 2016 г. компания Intel в ходе светового шоу, подняла в воздух 500 БЛА, синхронизированных в единую группу. В 2017 г. китайский производитель БЛА Ehang запустил рой из 1000 аппаратов в рамках шоу "Meteor Sky". Европейской комиссией поддержан проект Widely scalable mobile underwater sonar technology (WiMUST) [3] по разработке группы автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА) в целях обеспечения сейсмических исследований. Особенность системы WiMUST заключается в использовании команды совместных автономных морских роботов, выступающих в качестве интеллектуальных зондов и коммуникационных узлов реконфигурируемой движущейся акустической сети.

Перечисленные задачи характеризуются необходимостью автоматической реализации согласованных во времени действий элементов группы подвижных объектов. В условиях ограниченной связи между элементами группы эффективным подходом для решения перечисленных задач является их формулировка в терминальной постановке.

Впервые задача терминального управления была сформулирована в 1948 г. А. А. Фельдбаумом в работе [4], в которой даны верхняя и

нижняя оценки времени переходных процессов в линейных системах. Можно выделить два вида терминального управления [5]: сильное и слабое. Сильное терминальное управление переводит объект из заданного начального состояния в заданное конечное состояние за заданное время. Слабое терминальное управление переводит объект из заданного начального состояния в заданную окрестность конечного состояния за заданное время.

В настоящей статье решается задача слабого терминального управления для подвижного объекта мультикоптерного типа. Решение задачи базируется на подходе, включающем три этапа: расчет программной траектории; решение задачи стабилизации подвижного объекта относительно заданной программной траектории; коррекция программной траектории в зависимости от текущего состояния. Первые два из перечисленных этапов достаточно часто используются для решения задач терминального управления [6—11].

В частности, в работе [10] задача терминального управления сведена к расчету оптимальной траектории путем оптимизации обобщенного функционала, содержащего терминальную и интегральную составляющие, а затем к расчету управления, обеспечивающего приближение реального движения к оптимальному.

В работе [11] критерий качества содержит только терминальную составляющую в виде квадратичной функции. При этом рассмотрено движение материальной точки в продольной плоскости и обеспечена инвариантность замкнутой системы по вектору возмущений относительно заданного критерия.

В статье [9] строится программная траектория в виде полиномиальной функции, проходящей через заданную начальную точку (в начальный момент времени) и заданную конечную точку (в конечный момент времени). Затем находится управление, обеспечивающее стабилизацию движения объекта относительно найденной программной траектории.

В данной статье также предлагается обеспечивать стабилизацию замкнутой системы относительно программной траектории, однако одновременно выполняется коррекция программной траектории в зависимости от текущего состояния. Кроме того, при решении задачи терминального управления обеспечивается адаптация к возмущениям, коррекция параметров движения при возникновении препятствий и учитываются особенности управления подвижными объектами мультикоптерного типа.

## Постановка задачи

Модель подвижного объекта мультикоптерного типа задана в виде

$$\dot{y} = R(y)x; \quad (1)$$

$$\dot{x} = M^{-1}(K_u K_h w_h + F_d), \quad (2)$$

где  $y = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4 \ y_5 \ y_6]^T$  — вектор, определяющий положение и ориентацию подвижного объекта в неподвижных декартовых координатах;  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T$  — вектор линейных и угловых скоростей в связанных с подвижным объектом координатах;

$$R(y) = \begin{bmatrix} R_V & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R_\omega \end{bmatrix},$$

$$R_\omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos y_6}{\cos y_5} & -\frac{\sin y_6}{\cos y_5} \\ 0 & \sin y_6 & \cos y_6 \\ 1 & -\operatorname{tg} y_5 \cos y_6 & \operatorname{tg} y_5 \sin y_6 \end{bmatrix},$$

$$R_V = \begin{bmatrix} \cos y_4 \cos y_5 & -\cos y_4 \sin y_5 \cos y_6 + \sin y_4 \sin y_6 & \sin y_4 \cos y_6 + \cos y_4 \sin y_5 \sin y_6 \\ \sin y_5 & \cos y_5 \cos y_6 & -\cos y_5 \sin y_6 \\ -\sin y_4 \cos y_5 & \cos y_4 \sin y_6 + \sin y_4 \sin y_5 \cos y_6 & \cos y_4 \cos y_6 - \sin y_4 \sin y_5 \sin y_6 \end{bmatrix};$$

$$F_d = \begin{bmatrix} m(-g \sin y_5 - x_5 x_3 + x_6 x_2) \\ m(-g \cos y_5 \cos y_6 - x_6 x_1 + x_4 x_3) \\ m(g \cos y_5 \sin y_6 - x_4 x_2 + x_5 x_1) \\ -(J_{y3} - J_{y2})x_5 x_6 \\ -(J_{y1} - J_{y3})x_4 x_6 \\ -(J_{y2} - J_{y1})x_5 x_4 \end{bmatrix};$$

$$K_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M = \operatorname{diag}([m, m, m, J_{y1}, J_{y2}, J_{y3}]);$$

$w_h$  — вектор скоростей вращения винтов подвижного объекта;  $K_h$  — матрица преобразования скоростей вращения винтов в тяги и моменты;  $m$  — полная масса подвижного объекта;  $J_{y1}, J_{y2}, J_{y3}$  — моменты инерции.

Структура матрицы  $K_u$  соответствует подвижному объекту мультикоптерного типа (квадрокоптер, гексакоптер), для которого характерны присутствие управляющей тяги в вертикальной оси и возможность создания вращающихся моментов относительно трех осей.

Ставится задача найти вектор управляющих воздействий  $w_h$ , обеспечивающий перевод подвижного объекта (1), (2) из произвольного начального состояния  $(y(0), x(0))$  в  $\delta_y$ -окрестность точки  $(y(T_k), x(T_k))$  за заданное время  $T_k$ .

## Алгоритм расчета терминального управления

Расчет терминального управления сводится к трехэтапной процедуре. На первом этапе рассчитывается программная траектория движения. Исходными данными для первого этапа являются вектор текущего положения  $p(t) = [y_1(t) \ y_2(t) \ y_3(t)]^T$  подвижного объекта, вектор конечного положения  $p_k = [y_1(T_k) \ y_2(T_k) \ y_3(T_k)]^T$  подвижного объекта и время выполнения задачи  $T_k$ . На основе конечного и текущего положения подвижного объекта (1), (2) формируется направляющий вектор

$$p_n = p_k - p(t) = [y_1(T_k) - y_1(t) \ y_2(T_k) - y_2(t) \ y_3(T_k) - y_3(t)]^T, \quad (3)$$

$$t \geq 0, T_k > t.$$

Модуль скорости подвижного объекта (1), (2) вычисляется с учетом времени  $T_k$  выполнения задачи

$$V_k = \|p_n\| / (T_k - t), \quad (4)$$

где  $\|p_n\|$  — евклидова норма.

Тогда желаемые значения проекций линейной скорости подвижного объекта вычисляются в соответствии с выражениями

$$x_1^* = V_k \frac{y_1(T_k) - y_1(t)}{\|p_n\|};$$

$$x_2^* = V_k \frac{y_2(T_k) - y_2(t)}{\|p_n\|}; \quad (5)$$

$$x_3^* = V_k \frac{y_3(T_k) - y_3(t)}{\|p_n\|}.$$

Желаемые скорости  $x_1^*, x_2^*, x_3^*$  используются для формирования задающих воздействий по углам Эйлера подвижного объекта. В соответствии с особенностями мультикоптерных аппаратов углы тангажа  $\vartheta$  и крена  $\gamma$  используются для обеспечения требуемых проекций скоростей  $x_1^*, x_3^*$ , а угол рысканья  $\psi$  — для обеспечения требуемой ориентации полезной нагрузки. Проекция вертикальной скорости  $x_2^*$

обеспечивается за счет тяги, создаваемой винтами вдоль оси  $0x_2$ . В соответствии с изложенным выше требуемая программная траектория подвижного объекта описывается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} x_2^* &= V_k \frac{y_2(T_k) - y_2(t)}{\|p_n\|}; \\ \psi^* &= f(y_4, y_5, y_6); \\ \vartheta^* &= -k_\vartheta(x_1^* - x_1); \\ \gamma^* &= -k_\gamma(x_3^* - x_3), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $k_\vartheta, k_\gamma$  — постоянные коэффициенты;  $f(y_4, y_5, y_6)$  — функция углов Эйлера, определяющая требуемую ориентацию подвижного объекта.

Задающие воздействия по углам тангажа и крена дополнительно ограничиваются постоянными значениями  $\pm\vartheta^{\max}, \pm\gamma^{\max}$ .

Второй этап — синтез управления, стабилизирующего подвижный объект (1), (2) относительно программной траектории (6), с использованием метода, изложенного в работе [12], обеспечивающего адаптацию к внешним и параметрическим возмущениям. В соответствии с данным методом [12], с учетом программы (6) сформируем векторы ошибок управления

$$e_1 = [y_4 - \psi^* \quad y_5 + k_\vartheta(x_1^* - x_1) \quad y_6 + k_\gamma(x_3^* - x_3)]^T; \quad (7)$$

$$e_2 = x_2 - x_2^*. \quad (8)$$

Потребуем, чтобы ошибки (7), (8) удовлетворяли уравнениям вида

$$\dot{e}_1 + T_2 \dot{e}_1 + T_1 e_1 = 0; \quad (9)$$

$$\dot{e}_2 + T_3 e_2 = 0, \quad (10)$$

где  $T_1, T_2, T_3$  — матрицы постоянных параметров регулятора, определяющих свойства замкнутой системы.

Продифференцируем по времени выражение (8) с учетом модели подвижного объекта (1), (2):

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_2^*, \quad (11)$$

где  $\dot{x}_2^*$  — желаемое ускорение подвижного объекта, которое вычисляется в соответствии с выражением

$$\begin{aligned} \dot{x}_2^* &= -V_k \frac{[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] R(y) x}{\|p_n\|} + \\ &+ V_k \frac{(y_2(T_k) - y_2(t)) [y_1(T_k) - y_1(t) \quad y_2(T_k) - y_2(t) \quad y_3(T_k) - y_3(t)] R_V(y) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}{\|p_n\|^3}. \end{aligned}$$

Подставляя (11) в соотношение (10), находим

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_2^* - T_3 e_2. \quad (12)$$

Производная по времени от выражения (7) равна

$$\dot{e}_1 = R_\omega \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\psi}^* \\ k_\vartheta(-g \sin y_5 - x_5 x_3 + x_6 x_2) \\ k_\gamma(g \cos y_5 \sin y_6 - x_4 x_2 + x_5 x_1) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Производная по времени от выражения (13) имеет вид

$$\dot{e}_1 = (R_\omega + B_\omega) \dot{\omega} + \dot{R}_\omega \omega + f_\omega; \quad (14)$$

$$B_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_\vartheta x_3 & k_\vartheta x_2 \\ -k_\gamma x_2 & k_\gamma x_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \omega = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix};$$

$$\dot{R}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\dot{y}_6 \sin y_6}{\cos y_5} + \frac{\dot{y}_5 \cos y_6 \sin y_5}{\cos^2 y_5} & -\frac{\dot{y}_6 \cos y_6}{\cos y_5} - \frac{\dot{y}_5 \sin y_6 \sin y_5}{\cos^2 y_5} \\ 0 & \dot{y}_6 \cos y_6 & -\dot{y}_6 \sin y_6 \\ 0 & \dot{y}_6 \sin y_6 \operatorname{tg} y_5 - \dot{y}_5 \cos y_6 (1 + \operatorname{tg}^2 y_5) & \dot{y}_6 \cos y_6 \operatorname{tg} y_5 + \dot{y}_5 \sin y_6 (1 + \operatorname{tg}^2 y_5) \end{bmatrix};$$

$$f_\omega = \begin{bmatrix} \dot{\psi}^* \\ k_\vartheta(-g \dot{y}_5 \cos y_5 - x_5 \dot{x}_3 - x_3 T_3 (x_2 - x_2^*)) \\ k_\gamma(g(-\dot{y}_5 \sin y_5 \sin y_6 + \dot{y}_6 \cos y_5 \cos y_6) + x_4 T_1 (x_2 - x_2^*) + \omega_y \dot{x}_1) \end{bmatrix},$$

где производные  $\dot{y}_5, \dot{y}_6, \dot{x}_1, \dot{x}_3$  вычисляются в соответствии с уравнениями подвижного объекта (1), (2).

Подставляя выражение (14) в уравнение (9), получаем

$$\dot{\omega} = -(R_\omega + B_\omega)^{-1} (\dot{R}_\omega \omega + f_\omega + T_2 \dot{e}_1 + T_1 e_1).$$

Объединяя последнее уравнение с выражением (12) и учитывая уравнения модели подвижного объекта (1), (2), получаем выражения для вычисления проекций управляющих сил и моментов:

$$\begin{aligned}
P_{y2} &= m(\dot{x}_2^* - T_3 e_2) - mg \cos y_5 \cos y_6 - \\
&- m(x_6 x_1 - x_4 x_3) + \widehat{F}_{vy2}; \\
\begin{bmatrix} N_{y1} \\ N_{y2} \\ N_{y3} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} -(J_{y3} - J_{y2})x_5 x_6 \\ -(J_{y1} - J_{y3})x_4 x_6 \\ -(J_{y2} - J_{y1})x_5 x_4 \end{bmatrix} - \\
&- (R_\omega + B_\omega)^{-1} \begin{bmatrix} J_{y1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \times \\
&\times (\dot{R}_\omega \omega + f_\omega + T_2 \dot{e}_1 + T_1 e_1) + \begin{bmatrix} \widehat{N}_{vy1} \\ \widehat{N}_{vy2} \\ \widehat{N}_{vy3} \end{bmatrix},
\end{aligned} \quad (15)$$

где  $P_{y2}, N_{y1}, N_{y2}, N_{y3}$  — управляющие сила и моменты;  $\widehat{F}_{vy2}, \widehat{N}_{vy1}, \widehat{N}_{vy2}, \widehat{N}_{vy3}$  — оценки возмущений, используемые для адаптации системы управления подвижного объекта. Для получения указанных оценок применяются алгоритмы, изложенные в работе [13].

Связь управляющих силы и моментов со скоростями вращения винтов определяется выражением

$$w_h = K_h^+ \begin{bmatrix} P_{y2} \\ N_{y1} \\ N_{y2} \\ N_{y3} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где  $K_h^+$  — псевдоинверсная матрица в смысле определения [14, с. 34].

Вид матрицы  $K_h$  зависит от числа и расположения винтов. Например, для гексакоптера матрица  $K_h$  имеет вид

$$N_u = \begin{bmatrix} k_v & k_v & k_v & k_v & k_v & k_v \\ 0 & k_v l_k \sin \varphi_k & k_v l_k \sin \varphi_k & 0 & -k_v l_k \sin \varphi_k & -k_v l_k \sin \varphi_k \\ -b_v & b_v & -b_v & b_v & -b_v & b_v \\ k_v l_k & k_v l_k \cos \varphi_k & -k_v l_k \cos \varphi_k & -k_v l_k & -k_v l_k \cos \varphi_k & k_v l_k \cos \varphi_k \end{bmatrix}, \quad \text{В соответствии с уравнением (10) получаем}$$

где  $l_k$  — расстояние от центра масс гексакоптера до винта;  $\varphi_k$  — угол установки исполнительных механизмов;  $k_v, b_v$  — коэффициенты аэродинамической тяги винтов.

Полученные из выражения (16) скорости вращения винтов подвижного объекта ограничиваются их максимальными значениями  $w_{hi}^{\max}$ .

На третьем этапе осуществляется коррекция программной траектории (4), (5). Если фиксировать момент времени  $t = t_0$ , то выражения (4), (5) являются программой изменения скоростей  $x_1^*, x_2^*, x_3^*$  в общепринятой постановке задачи терминального управления.

Поскольку желаемая траектория должна строиться из текущего положения объекта, то она должна корректироваться с течением времени. Нахождение скоростей  $x_1^*, x_2^*, x_3^*$  из выражений (4), (5) в каждый момент времени  $t$  может приводить к вычислительным особенностям. С практической точки зрения эти особенности могут быть учтены при решении задачи слабого терминального управления, когда задана погрешность  $\delta$ , попадания в целевую точку  $p_k$ . В этом случае расчет программной траектории осуществляется следующим образом. Во-первых, значения задающего воздействия, получаемые из выражения (4), ограничиваются максимально возможной скоростью подвижного объекта  $V_k^{\max}$ . Во-вторых, для устранения неопределенности в конечной точке при  $t \rightarrow T_k$  ставится задача слабого терминального управления, т. е.

$$\begin{cases} V_k = \|p_n\| / (T_k - t), & \|p_n\| > \delta; \\ V_k = V(T_k), & \|p_n\| \leq \delta, \end{cases} \quad (17)$$

где  $V(T_k)$  — желаемое значение скорости подвижного объекта в конечной точке  $p_k$ .

Анализ устойчивости траектории движения (7), (8) осуществляется с использованием следующей квадратичной функции:

$$\begin{aligned} V &= e_1^T T_1 e_1 + 0,5 \dot{e}_1^T \dot{e}_1 + \\ &+ 0,5 (\dot{e}_1 + T_2 e_1)^T (\dot{e}_1 + T_2 e_1) + 0,5 e_2^T e_2. \end{aligned}$$

Производная по времени от последнего выражения, вычисленная в силу уравнений замкнутой системы, равна

$$\dot{V} = -e_1^T T_1 T_2 e_1 - \dot{e}_1^T T_2 \dot{e}_1 - e_2^T T_3 e_2.$$

где  $C_3$  — постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями.

Сравнивая последнее выражение с соотношением (8) и учитывая (6), находим

$$y_2(T_k) - y_2(t) = (T_k - t)(x_2(t) - C_3 e^{-T_3 t}).$$

Из последнего выражения получаем, что

$$|y_2(T_k) - y_2(t)| \leq (T_k - t)(|x_2(t)| + |C_3 e^{-T_3 t}|).$$

В силу того, что второе слагаемое  $(T_k - t)C_3 e^{-T_3 t}$  в правой части последнего выра-

жения стремится к нулю, а переменная  $x_2(t)$  на конечном интервале времени ограничена из-за своей непрерывности, ошибка  $|y_2(T_k) - y_2(t)|$  с течением времени окажется внутри заданной области  $\delta_y$ .

Аналогичным образом, полагая, что  $\psi^* = \cos t$ , а матрицы  $T_1, T_2$  таковы, что характеристический полином уравнения (9) имеет действительные собственные числа, получаем

$$\begin{aligned} |y_1(T_k) - y_1(t)| &\leq (T_k - t) \times \\ &\times \left( |x_1(t)| + \left| \frac{y_5(t)}{k_\vartheta} \right| + \left| C_1^1 e^{-\lambda_1^1 t} + C_2^1 e^{-\lambda_2^1 t} \right| \right); \\ |y_3(T_k) - y_3(t)| &\leq (T_k - t) \times \\ &\times \left( |x_3(t)| + \left| \frac{y_6(t)}{k_\gamma} \right| + \left| C_1^2 e^{-\lambda_1^2 t} + C_2^2 e^{-\lambda_2^2 t} \right| \right), \end{aligned}$$

где  $C_1^1, C_2^1, C_1^2, C_2^2$  — постоянные интегрирования, обусловленные начальными условиями;  $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_1^2, \lambda_2^2$  — собственные числа характеристического полинома уравнения (9).

Из последних выражений следует, что ошибки  $|y_1(T_k) - y_1(t)|$  и  $|y_3(T_k) - y_3(t)|$  с течением времени окажутся внутри заданной области  $\delta_y$ .

## Результаты численных исследований

Моделирование проведено для подвижного объекта на базе гексакоптера ERLY при следующих параметрах:

- масса центральной части гексакоптера  $m_k = 1$  кг;
- масса одного исполнительного механизма с винтами  $m_{ac} = 0,112$  кг;
- радиус центральной части гексакоптера  $r_k = 0,15$  м;
- расстояние от центра масс до винта  $l_k = 0,275$  м;
- высота центральной части гексакоптера  $h_k = 0,095$  м;
- угол установки исполнительных механизмов  $\varphi_k = 60^\circ$ ;
- коэффициенты аэродинамической тяги винтов  $k_v = 11,5 \cdot 10^{-6}$  кг·с<sup>2</sup>/м, и  $b_v = 10,0 \cdot 10^{-5}$  кг·с<sup>2</sup>;
- ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>;

- значения координат целевой точки  $T_k = 10$  с,  $p_k = [10 \ 10 \ 20]^T$ ;
- матрицы эталонных уравнений (9), (10):

$$T_3 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}, T_3 = 10;$$

- ограничения на скорости вращения винтов  $\omega_i^{\max} = 775$  рад/с;
- погрешность достижения заданной точки  $\delta_y = 2$  м;
- максимальная скорость полета 3 м/с;
- скорость подвижного объекта в конечной точке 0 м/с;
- коэффициенты  $k_\vartheta = -0,3$ ;  $k_\gamma = 0,3$ ;
- максимальные углы тангажа и крена  $\vartheta^{\max} = \pi/6$ ,  $\gamma^{\max} = \pi/6$ .

На рис. 1 представлены траектория движения гексакоптера (рис. 1, а) и его контурная скорость (рис. 1, б).

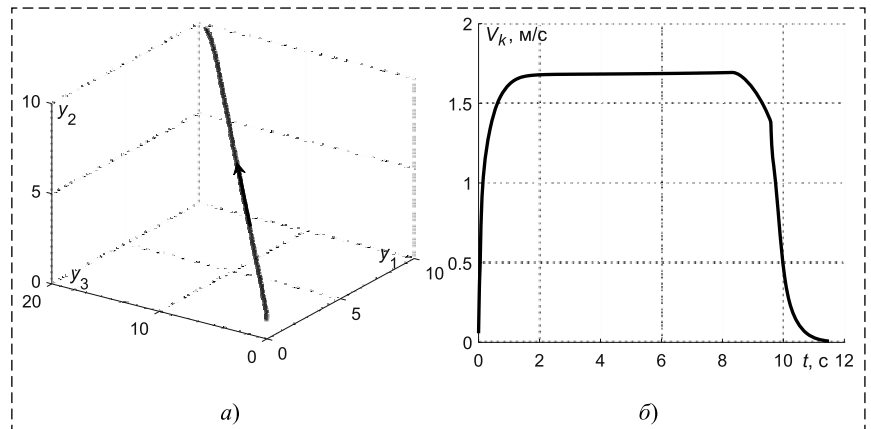


Рис. 1. Траектория полета гексакоптера (а) и скорость его движения (б)  
Fig. 1. The flight path of the hexacopter (а) and its speed of movement (б)

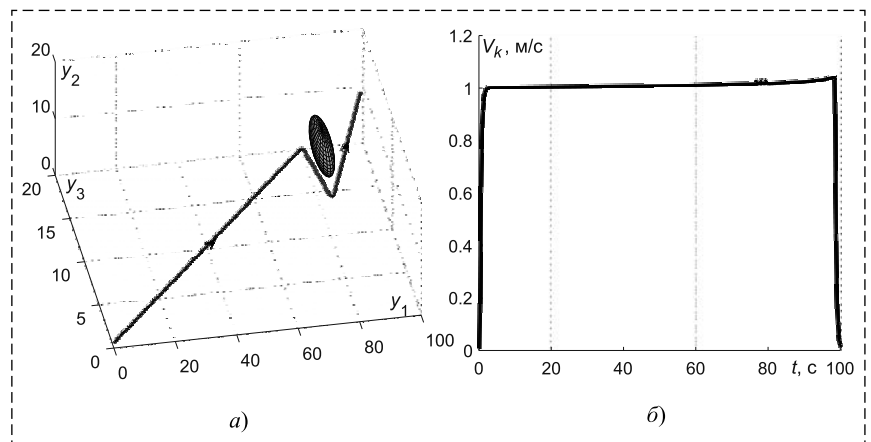


Рис. 2. Траектория полета гексакоптера (а) и скорость его движения (б) в среде с препятствием  
Fig. 2. The flight path of the hexacopter (а) and its speed of movement (б) in an environment with an obstacle

Численные исследования показали, что средняя погрешность достижения заданной точки в момент времени  $t = T_k$  составляет 1,2 м, что не превышает заданной погрешности  $\delta_y = 2$  м.

На рис. 2 представлены результаты моделирования при наличии препятствия с центром в точке [80; 8; 15]. Координаты целевой точки [100; 10; 20]. Радиус препятствия 3 м. Для обхода препятствия применен метод неустойчивых режимов [15], отличающийся низкими требованиями к системе технического зрения и к вычислительным ресурсам.

Средняя погрешность достижения заданной точки в момент времени  $t = T_k$ , при наличии сферического препятствия радиусом 3 м, расположенном примерно на пути следования гексакоптера, составила около 1,37 м, что также не превышает заданной погрешности  $\delta_y = 2$  м. На рис. 2, б хорошо заметно увеличение скорости  $V_k$  движения на участке траектории, начиная от момента начала обхода препятствия. Указанное изменение  $V_k$  обусловлено увеличением длины пути и происходит автоматически в соответствии с выражением (17).

### Заключение

В статье предложены алгоритмы терминального управления подвижным объектом мультикоптерного типа, описываемым нелинейными уравнениями движения твердого тела. В модели учтены особенности управления мультикоптерными аппаратами. Основное отличие предложенных алгоритмов заключено в такой коррекции программной траектории, чтобы она проходила в каждый момент времени через текущее положение подвижного объекта. Такой способ построения программной траектории позволяет автоматически корректировать скорость при движении в заданную точку. Необходимость коррекции программной траектории может быть вызвана наличием некартографированных препятствий, различиями между моделью и реальным объектом или воздействием внешних возмущений. В силу того, что в конечной точке, при  $t = T_k$ , возникает особенность, решается задача слабого терминального управления. Анализ замкнутой системы показал, что с течением времени подвижный объект попадает в конечную область  $\delta_y$  целевой точки, однако размер этой области зависит от динамических свойств системы управления.

1. **Моисеев В. С.** Групповое применение беспилотных летательных аппаратов. Казань: Редакционно-издательский центр "Школа", 2017. 572 с.
2. **Unmanned Systems Integrated Roadmap 2013-2038.** Department of defense. US, 2013.
3. **Al-Khatib H., Antonelli G., Caffaz A., Caiti A., Casalino G., De Jong I. B., Duarte H., Indiveri G., Jesus S., Kebkal K., Pascoal A., and Polani D.** Navigation, guidance and control of underwater vehicles within the widely scalable mobile underwater sonar technology project: an overview // Proceedings of IFAC Workshop NGCUV. 2015. Girona. Spain. April 28–30.
4. **Фельдбаум А. А.** О распределении корней характеристического уравнения системы регулирования // Автоматика и телемеханика. 1948. № 4. С. 253–279.
5. **Зубер И. Е.** Терминальное управление по выходу для нелинейных нестационарных дискретных систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2004. № 2. С. 35–42.
6. **Li B., Xu Y., Liu Ch., Fan Sh., Xu W.** Terminal navigation and control for docking an underactuated autonomous underwater vehicle // IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation Control and Intelligent Systems. 2015. P. 25–30.
7. **Shikai W., Hongzhang J., Lingwei M.** Trajectory tracking for underactuated UUV using terminal sliding mode control // Chinese Control and Decision Conference (CCDC). 2016. P. 6833–6837.
8. **Londhe P. S., Dhadekar D. D., Patre B. M., Waghmare L. M.** Non-singular terminal sliding mode control for robust trajectory tracking control of an autonomous underwater vehicle // 2017 Indian Control Conference (ICC). 2017. P. 443–449.
9. **Пшихопов В. Х.** Аналитическое конструирование нелинейных систем терминального управления // Сб. РАН "Новые концепции общей теории управления". М.; Таганрог, 1995. С. 125–141.
10. **Половинчук Н. Я., Таран В. Н.** Способ терминального оптимального управления летательным аппаратом на участке спуска в атмосфере // Научный вестник МГТУ ГА. 2011. № 171 (9). С. 145–150.
11. **Кабанов С. А., Шалыгин А. С.** Решение терминальной задачи управления движением летательного аппарата с применением методов аналитической механики // Автоматика и телемеханика. 1992. № 8. С. 39–45.
12. **Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю.** Управление подвижными объектами в определенных и неопределенных средах. М.: Наука, 2011. 350 с.
13. **Медведев М. Ю.** Алгоритмы адаптивного управления исполнительными приводами. // Мехатроника, автоматизация и управление. 2006. № 6. С. 17–22.
14. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
15. **Pshikhovop V. Kh., Beloglazov D., Finaev V., Guzik V., Kosenko E., Krukhmalev V., Medvedev M., Pereverzev V., Pyavchenko A., Saprykin R., Shapovalov I., Soloviev V.** Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2017. 312 p.

# Algorithms of Terminal Control of Multi-Copters

V. Kh. Pshikhopov, pshichop@rambler.ru, M. Yu. Medvedev, medvmihal@sfnu.ru,  
B. V. Gurenko, boris.gurenko@gmail.com,  
Southern Federal University, 347900, Taganrog, Russian Federation

Corresponding author: **Medvedev Mikhail Yu.**, Ph.D., Associate Professor,  
Southern Federal University, 347900, Taganrog, Russian Federation, e-mail: medvmihal@sfnu.ru

Accepted on August 15, 2018

## Abstract

The article is devoted to the development of algorithms for terminal control of mobile objects. A moving object of multi-copter type described by a nonlinear model of motion of a solid body in three-dimensional space is considered. A three-stage procedure for solving the problem of terminal control of a moving object when it moves to a given point is proposed. The main difference of the proposed procedure is the correction of the desired trajectory so that it passes through the current position of the moving object at each moment of time. This method of constructing the desired trajectory allows you to automatically adjust the speed when moving to a given point. The need for correction of the desired trajectory can be caused by the presence of obstacles, differences between the model and the real object, and the influence of external disturbances. At the first stage, the desired trajectory taking into account a given finite time of motion is constructed. The motion trajectory represents the desired velocity and orientation angles of a moving object of multi-copter type. At the second stage, the method of position-trajectory control is used to synthesize feedback, which provides stabilization of the moving object relative to the calculated desired trajectory. The result of the second stage is the thrust and torque generated by the motors, which are then recalculated in the speed of rotation of the rotors. At the third stage, the desired trajectory is corrected depending on the current position of the moving object. As a result of the correction, a singularity occurs at the target point. In order to eliminate the singularity at the target point, the problem is solved in the formulation of weak terminal control. Before the target point hits the given neighborhood, the velocity of the moving object is calculated based on the remaining distance and time of movement. When a given neighborhood of the target point is reached, the speed of movement becomes constant. The analysis of the closed-loop system is carried out, as a result of which the asymptotic stability of the desired trajectory and the hit of a moving object in a finite given neighborhood of the target point at a finite time are shown. The results of numerical modeling, confirming the performance of the proposed algorithms in the example of hexacopter, are presented.

**Keywords:** terminal control, mobile object, multi-copter, position control, path control

**Acknowledgements:** This article was prepared with the financial support of Southern Federal University (project "Development of theory and methods of intellectual terminal of the mobile objects state with uncertainty"). Part "Numerical Simulation" was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research (16-08-00012).

For citation:

Pshikhopov V. Kh., Medvedev M. Yu., Gurenko B. V. Algorithms of Terminal Control of Multi-Copters, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol.20, no.1, pp. 44–51.

DOI: 10.17587/mau.20.44-51

## References

1. Moiseev V. S. *Gruppovoe primeneniye bespilotnykh letatel'nykh apparatov: monografiya*. (Group application of unmanned aircrafts), Kazan, Editorial and publishing center "School", 2017, 572 p. (in Russian).
2. *Unmanned Systems Integrated Roadmap 2013–2038*, Department of defense, US, 2013.
3. Al-Khatib H., Antonelli G., Caffaz A., Caiti A., Casalino G., De Jong I. B., Duarte H., Indiveri G., Jesus S., Kebkal K., Pascoal A., Polani D. Navigation, guidance and control of underwater vehicles within the widely scalable mobile underwater sonar technology project: an overview, *Proceedings of IFAC Workshop NGCUV*, 2015, Girona, Spain, April 28–30.
4. Fel'dbaum A. A. *O raspredelenii kornei harakteristicheskogo uravneniya sistemy regulirovaniya* (On the distribution of roots of the characteristic equation of the control system), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1948, no. 9 (4), pp. 253–279 (in Russian).
5. Zuber I. E. *Terminal'noye upravleniye po vyvodu dlya nelineynykh nestacionarnykh diskretnykh sistem* (Output terminal control for nonlinear time-dependent discrete systems), *Differentsial'nye uravneniya i processy upravleniya*, 2004, no. 2, pp. 35–42 (in Russian).
6. Li B., Xu Y., Liu Ch., Fan Sh., Xu W. Terminal navigation and control for docking an underactuated autonomous underwater

vehicle, *IEEE International Conference on Cyber Technology in Automation Control and Intelligent Systems*, 2015, pp. 25–30.

7. Shikai W., Hongzhang J., Lingwei M. Trajectory tracking for underactuated UUV using terminal sliding mode control, *Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 2016, pp. 6833–6837.

8. Londhe P. S., Dhadekar D. D., Patre B. M., Waghmare L. M. Non-singular terminal sliding mode control for robust trajectory tracking control of an autonomous underwater vehicle, *2017 Indian Control Conference (ICC)*, 2017, pp. 443–449.

9. Pshikhopov V. Kh. *Analiticheskoe konstruirovaniye nelineynykh sistem terminal'nogo upravleniya* (Analytical design of nonlinear terminal control systems), *Novye koncepcii obshchei teorii upravleniya*, Moscow; Taganrog, 1995, pp. 125–141 (in Russian).

10. Polovinchuk N. Ya., Taran V. N. *Sposob terminal'nogo optimal'nogo upravleniya letatel'nykh apparatami na uchastke spuska v atmosfere* (The method of terminal optimal control of the aircraft on the descent section in the atmosphere), *Nauchnyy vestnik MGTU GA*, 2011, no. 171 (9), pp. 145–150 (in Russian).

11. Kabanov S. A., Shalygin A. S. *Resheniye terminal'noy zadachi upravleniya dvizheniem letatel'nogo apparata s primeneniem metodov analiticheskoy mekhaniki* (Solution of a terminal problem for the control of the motion of an aircraft using the methods of analytical mechanics), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1992, no. 8, pp. 39–45 (in Russian).

12. Pshikhopov V. Kh., Medvedev M. Yu. *Upravleniye podvizhnymi ob'ektami v opredelennykh i neopredelennykh sredakh* (Control of mobile objects in certain and uncertain environment), Moscow, Nauka, 2011, 350 p. (in Russian).

13. Medvedev M. Yu. *Algoritmy adaptivnogo upravleniya ispolnitel'nyimi privodami* (Algorithms of adaptive control of actuators), *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2006, no 6, pp. 17–22 (in Russian).

14. Gantmaher F. R. *Teoriya matric* (Theory of matrices), Moscow, Fizmatlit, 2004, 560 p. (in Russian).

15. Pshikhopov V. Kh., Beloglazov D., Finaev V., Guzik V., Kosenko E., Krukhmalev V., Medvedev M., Pereverzev V., Pyavchenko A., Saprykin R., Shapovalov I., Soloviev V. *Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments*, Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2017, 312 p.

М. В. Палкин, канд. техн. наук, mpalkin@vpk.npomash.ru,  
 АО "ВПК "НПО машиностроения", г. Реутов

## Управление конфигурацией космических аппаратов группового полета на основе обработки видеoinформации

Представлена прикладная задача управления группой автоматических космических аппаратов (КА). В качестве примера приведена концепция построения "многоточечного" спутникового построения (проект "Космическая реклама"). "Космическая реклама" реализуется посредством специализированных тросовых и свободнолетающих КА, а также их комбинаций. Представлен технический облик космических аппаратов, состав бортовой аппаратуры.

Предложены методы поддержания пространственной конфигурации космических аппаратов специального назначения (методы "постоянного" строя, "переменного" строя, "смешанный"), выданы рекомендации по их применению.

Рассмотрено управление конфигурацией на основе обработки видеoinформации, полученной от космического аппарата, оснащенного широкоугольным матричным приемником оптического излучения.

Приведены параметры оптических систем. Оценены параметры работы системы навигации КА по наблюдаемому изображению. Описан способ определения относительного положения КА в конфигурации на основе отслеживания перемещения впереди летящего КА, согласно которому при переднем по направлению полета визировании пространства широкоугольным матричным приемником строки матрицы размещают перпендикулярно, а столбцы — параллельно вертикальной оси орбитальной системы координат, угловое (по курсу) отклонение ведомого космического аппарата пропорционально перемещению геометрического "центра тяжести" изображения космического аппарата — ориентира по номерам столбцов матричного приемника. Отклонение по тангажу пропорционально перемещению по номерам строк матричного приемника.

Разработан и исследован алгоритм обработки видеoinформации. Алгоритм включает процедуры нахождения, сопровождения ориентира, определения угла отклонения. С учетом особенностей фоноцелевой обстановки алгоритм построен с использованием структурных методов, выделяющих в качестве ориентиров характерные яркие пятна (синтаксические признаки изображения). Исследованы статистика сбоев алгоритма в зависимости от размера ориентира, от контраста яркостей ориентира, фона и уровня флуктуационного шума матричного приемника.

Основными внешними условиями, ограничивающими работу алгоритма, являются: низкий контраст ориентира на фоне звезд, отсутствие освещения Солнцем, в ряде случаев — засветка Солнцем, незначительные наблюдаемые размеры ориентира вследствие его малости или удаленности.

**Ключевые слова:** космический аппарат, "космическая реклама", групповой полет, оптическая система навигации, обработка изображения

### Введение

В связи с активным развитием техники и информационных технологий все больше стран получают возможность создавать и запускать космические аппараты, и внимание разработчиков начинают привлекать новые космические направления. Одним из таких направлений является концепция согласованного управления многоспутниковыми группировками автоматических космических аппаратов (КА), взаимодействующих между собой.

Примером реализации концепции группового полета КА является проект "космическая реклама" [1]. Это конверсионный проект АО "ВПК "НПО машиностроения", в основе которой лежит патент РФ № 2093967 от 1991 г. на способ передачи визуально воспринимаемой информации посредством строя орбитальных КА.

"Космическая реклама" — это видимое с поверхности Земли невооруженным глазом устойчивое "многоточечное" спутниковое построение в виде узнаваемого символа, текста,

знака и т. п. (рис. 1). Реализуется посредством специализированных тросовых (формируется несколько "точек" орбитального изображения) и свободнолетающих КА, а также их комбинаций. При этом "космическая реклама" на основе свободнолетающих аппаратов не имеет

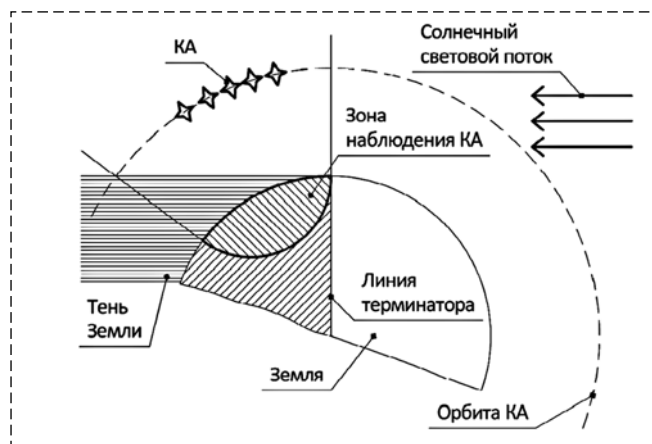


Рис. 1. Формирование орбитального изображения посредством КА "космической рекламы"

Fig. 1. "Space commercial" orbital formation

ограничений на угловой размер наблюдаемого орбитального изображения, реализует относительно длительные сроки активного существования группировки, допускает "жесткое" удержание орбитального изображения на протяжении нескольких витков, перестроение КА по программе или командам с Земли, а также возможность замены (дополнения) изображения на орбите с использованием новых элементов (дополнительных КА).

В ходе работ по теме были проведены проработки вариантов реализации концепции "космической рекламы", сформирован технический облик неманеврирующего КА тросового типа ("Опыт") и свободнолетающего маневрирующего КА ("Отблеск"), системы управления группой для формирования заданной конфигурации орбитального изображения [1, 11].

В данной статье рассмотрена задача управления конфигурацией на основе обработки видеoinформации, поступающей от свободнолетающих ведомых КА (следующих за КА-лидером или КА последующих уровней иерархии), оснащенных специализированным оптико-электронным комплексом (ОЭК) (рис. 2).

Запускаемые на высоты до 250 км КА ("Отблеск") являются статически устойчивыми и ориентируются по набегающему потоку остаточной атмосферы. В качестве основных устройств навигации используются:

- построитель местной вертикали (видимого или инфракрасного диапазона);
- аппаратура потребителя спутниковой навигации (вариант);
- оптико-электронный комплекс (ОЭК) с широкоугольным приемником оптического излучения матричного типа.

### Формирование заданной конфигурации орбитальной группы КА

Под групповым полетом КА понимается длительное орбитальное движение не менее двух КА (формирующих определенную пространственную конфигурацию), при котором наибольшее расстояние между КА в группе существенно (на порядки) меньше длины витка орбиты полета группы [3].

Существует несколько способов формирования на орбите заданной конфигурации группы КА [3, 4]:

1) метод "постоянного" строя. Подразумевает выдерживание строя за счет запасов харак-

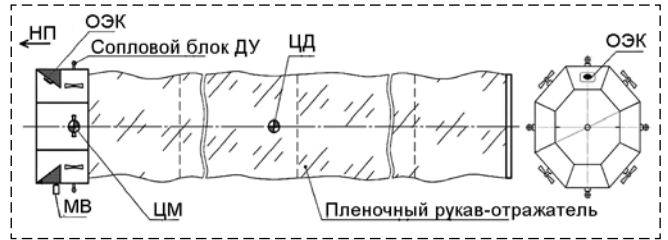


Рис. 2. Схема свободнолетающего КА-ведомого:

НП — направление полета, ЦМ — центр масс, ЦД — центр давления, МВ — построитель местной вертикали, ДУ — двигательная установка

Fig. 2. Free-flying slave satellite scheme:

НП — flying direction, ЦМ — centre of mass, МВ — local vertical axis detector, ДУ — propulsion system

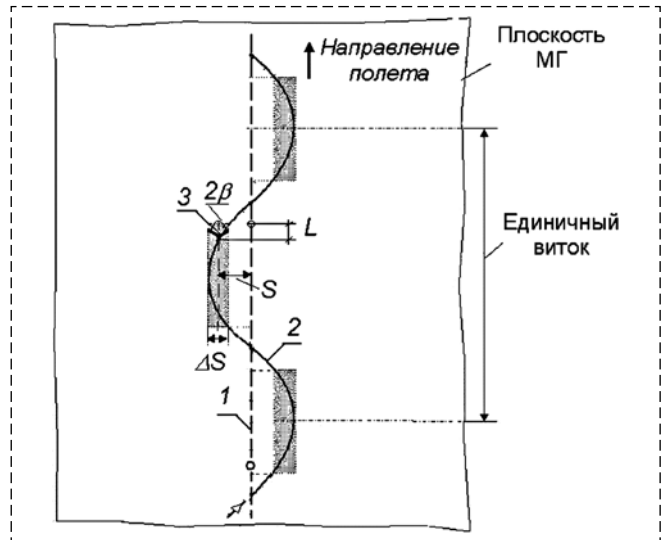


Рис. 3. Проекция траекторий двух КА на "распрявленную" (в плоскости чертежа) местную горизонталь (МГ)

Fig. 3. Leader- and slave-satellite trajectories

теристической скорости КА. Метод, очевидным недостатком которого являются значительные затраты топлива, может применяться либо для кратковременного формирования конфигурации, либо в совокупности с другими методами [8, 9];

2) метод "переменного" строя (формирование "роя" КА) [7]. Позволяет периодически (два раза за виток) формировать конфигурацию при движении КА на некомпланарных (с малым относительным наклоном) орбитах в соответствии с выражением (рис. 3):

$$\begin{cases} 0 < \Delta B_{ij} \leq A; \\ \omega_1^{cp} \approx \omega_2^{cp} \approx \dots \approx \omega_n^{cp}, \end{cases}$$

где  $\omega_1^{cp}, \omega_2^{cp} \dots \omega_n^{cp}$  — средние угловые скорости на витке разведенных по фронту КА в количестве  $n$  штук;  $\Delta B_{ij}$  — разница в эксцентриситетах орбит двух любых пар  $i$  и  $j$  космических аппаратов;  $A$  — допуск.

При приближении к узловым точкам (в данной статье определяемых как точки максимального сближения орбит КА) строй будет смешиваться и далее перестраиваться в зеркальном порядке.

Особенностью метода являются относительно небольшие затраты характеристической скорости при поддержании конфигурации (в основном на начальное разведение КА по орбитам);

3) "совмещенный" метод. Предполагает совместное или последовательное использование представленных выше методов.

При необходимости кратковременного формирования сложной конфигурации на основе более простой КА, расположенные по методу "переменного" строя, могут совершить маневр поддержания относительного положения (на расстоянии  $S$  с допуском  $\Delta S$ , рис. 3).

На рис. 3 приняты следующие обозначения: 1 — траектория КА-ориентира; 2 — траектория ведомого КА; 3 — угол обзора ОЭК ведомого КА;  $S$  — заданное расстояние между аппаратами при формировании конфигурации по фронту (по нормали к направлению полета (НП) в плоскости местной горизонтали (МГ));  $\Delta S$  — допуск отклонения ведомого КА в плоскости МГ (таким образом, в "серой" зоне расположения ведомого КА орбитальная конфигурация считается построенной, между "серыми" зонами — рассыпается);  $L$  — текущее опережение КА-ориентира по фронту.

### Навигация одиночного КА группы

Согласно предлагаемому способу навигации КА-ведомого при переднем по направлению полета визировании пространства широко-

угольным матричным приемником строки матрицы размещают перпендикулярно, а столбцы — параллельно вертикальной оси орбитальной системы координат. Угловое (по курсу) отклонение ведомого КА определяют пропорционально перемещению геометрического "центра тяжести" изображения КА-ориентира по номерам столбцов матричного приемника, отклонение по тангажу — пропорционально перемещению по номерам строк.

В дальнейшем, предполагая движение КА на близких по высоте орбитах, отклонение по тангажу учитывать не будем. Схема способа представлена на рис. 4.

В общем случае для КА-ведомого число движущихся впереди КА-ориентиров может быть различным (один и более). Ниже будем рассматривать поиск одного ориентира.

Заданное конфигурацией угловое положение может либо временно поддерживаться заданием двигательной установки КА-ведомого (в пределах  $\Delta S$ , см. рис. 3), либо меняться по определенному закону.

Для разработки алгоритма обработки видеoinформации проведем оценочный расчет характеристик ОЭК, размещенного на передней стороне (по направлению полета) ведомого КА.

Рассмотрим задачу движения на высоте  $H \sim 220$  км двух КА со следующими параметрами: площадь КА-ориентира по направлению наблюдения  $S_{пр} = 1 \text{ м}^2$ ; расстояние до КА-ориентира  $D = 1...100$  км; взаимное положение "КА-ориентир — КА-ведомый — Солнце — Земля" — любое.

Оптическая характеристика (звездная величина) КА-ориентира определяется выражением

$$m = -14,2 - 2,5 \lg \frac{\rho E_{\text{солн. пост}} S_{\text{пр}}}{2\pi D^2},$$

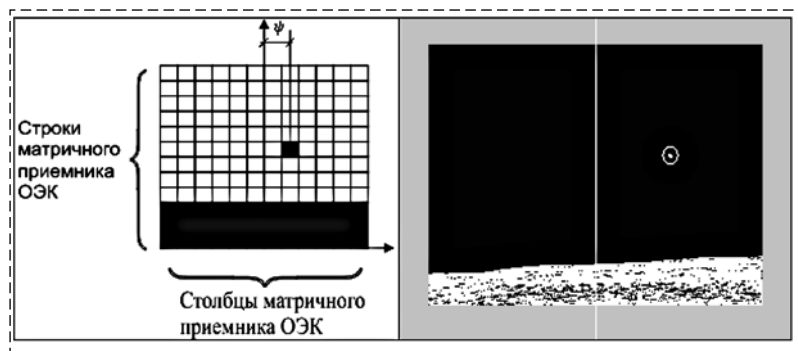


Рис. 4. Схема определения положения КА-ведомого по курсу относительно КА-ориентира (слева), результат моделирования и нахождения на фотоснимке КА-ориентира (справа)

Fig. 4. Scheme of a relative position measurement method (left), picture of a detected leader-satellite (right)

где  $\rho$  — коэффициент диффузного отражения ( $\sim 0,8$ );  $E_{\text{солн. пост}}$  — освещенность, создаваемая Солнцем на околоземной орбите (135 000 лк);  $D$  — дальность наблюдения ориентира.

Полученные в соответствии с формулой значения звездной величины для дальности, например, 3 и 100 км, соответственно, составляют  $-6,5^m$  и  $1^m$ .

Для справки в таблице приведено число звезд ( $K$ ) на небесной сфере различной звездной величины.

Таким образом, из любой точки расчетного диапазона дистанции

Число звезд различной звездной величины

Число звезд	Звездная величина, m								
	+1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>K</i>	13	40	100	500	1600	4800	15 000	42 000	125 000

КА-ориентир может быть уверенно обнаружен видеокамерой со средними характеристиками (чувствительностью до  $6^m$ ).

Пусть алгоритм обработки видеoinформации определяет КА-ориентир с минимальными размерами пятна  $2 \times 2$  пиксела ( $0,5 \times 0,5$  м в пикселе).

В этом случае максимально допустимое расстояние от КА-ведомого до сопровождаемого КА-ориентира определяется выражением

$$D_{\max} = \frac{\Delta f'}{\Delta_{\text{эл}}},$$

где  $\Delta_{\text{эл}}$  — размер элемента пиксела, мм;  $f'$  — фокусное расстояние объектива;  $\Delta$  — наблюдаемый одним пикселем линейный размер КА. Например, при  $\Delta_{\text{эл}} = 0,055$  мм (ПЗС матрица Kodak KAI-16070,  $4864 \times 3232$  эл., размер пиксела  $5,5 \times 5,5$  мкм),  $f' = 70$  мм,  $\Delta = 0,5$  м,  $D_{\max} = 6,3$  км. В этом случае, например, для существующих оптических систем с полем зрения по горизонтали  $2\beta = 120^\circ$  максимальное для наблюдения поле составляет по фронту  $S = 4,5$  км, по дистанции —  $L = 3,15$  км (см. рис. 3).

Увеличение дальности наблюдения за КА-ориентиром возможно установкой на борт КА-ведомого нескольких модулей узкоугольных ОЭК, (например, "Уран-27":  $f' = 100$  мм,  $\varnothing_{\text{ВХ}} = 40$  мм,  $1:2,5$ ,  $2\beta = 60^\circ$ ).

При расчете скорости движения метки КА-ориентира по вертикали (тангажу) должна учитываться погрешность работы определителя местной вертикали, составляющая до  $1'$ .

### Алгоритм обработки видеoinформации

На основе вышеуказанных исходных данных разработан алгоритм обработки видеoinформации для определения относительного углового положения (курса) ведомого КА.

Алгоритм реализует итерационный процесс определения изменения положения ведомого КА относительно ориентира путем сравнения положения ориентиров на текущем изображении (ТИ) с положением ориентиров на изо-

бражении, полученном в момент начала своей работы (эталонном изображении, ЭИ), с последующим определением взаимного смещения ориентиров.

Информация о времени  $t_0$  появления в поле зрения ОЭК цели и начале работы алгоритма передается ведомому КА с наземного пункта управления или закладывается в память бортового вычислительного комплекса (БВК) до запуска КА.

Алгоритм включает процедуры: нахождения ориентира, сопровождения ориентира, определения курса.

С учетом особенностей фоноцелевой обстановки алгоритм построен с использованием структурных методов, выделяющих в качестве ориентиров характерные яркие пятна (синтаксические признаки изображения) [5, 6].

Эталонным для алгоритма является изображение на первом кадре. При обработке изображения процедура нахождения ориентира выделяет на исходном полутоновом изображении  $F(i, j)$  пикселей с яркостью, превышающей некоторый пороговый уровень яркости  $T_{\text{п}}$ , и формируют бинарное изображение  $F_6(i, j)$ , в котором найденные пиксели будут единичной яркости, остальные — нулевой:

$$F_6(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{при } F(i, j) \geq T_{\text{п}}; \\ 0 & \text{при } F(i, j) < T_{\text{п}}. \end{cases}$$

Далее на бинарном изображении формируются наборы групповых точечных объектов (ГрТО) — группы пикселей, обладающие признаками связности, минимального числа пикселей в группе  $k_{\min}$ . Ограничение на минимальное число пикселей в ГрТО вводят из соображений защиты алгоритма от сбоев, поскольку часто яркие объекты с малым числом пикселей являются помеховыми и нестабильными.

Операция определения порогового уровня  $T_{\text{п}}$  является адаптивной и разработана исходя из предположения наличия на бинарном изображении не менее  $r_0$  ГрТО — исходного материала для выбора ориентира с числом пикселей в каждом не менее  $k_{\min}$ :

$$T_{\text{п}} : r \geq r_0, \quad l_j \Big|_{j=1 \dots r} \geq k_{\min}.$$

Основными критериями нахождения ориентира — яркостного пятна (ГрТО) на преобразованном в бинарное изображении (рис. 4) — являются:

- несоприкосновение с границами изображения и пятном области Земли;

- расчетное число пикселей;
- движение от кадра к кадру в заданном направлении.

При получении второго и последующих кадров происходит:

- локализация на изображении ориентира в соответствии с сохраненными в БВК параметрами, проверка гипотезы о локализации ориентира с заданной вероятностью  $P$ ;
- определение отклонения КА-ориентира по столбцам матричного приемника, формирование и выдача в систему навигации информации о параметрах курса ведомого КА;
- сохранение в памяти БВК текущих (измененных) параметров ориентира.

В общем случае при локализации ориентира на двух кадрах, полученных в моменты времени  $t_i$  и  $t_j$  ( $t_j > t_i$ ), изменение курса КА за промежуток времени ( $t_i, t_j$ ) относительно ориентира определяется выражениями

$$\Delta\varphi_{i,j} = k(y_{ij} - y_{ii});$$

$$k = \frac{2\beta}{n_{м.п}},$$

где  $k$  — технологический коэффициент, определяющий соотношение между углом курса и перемещением по номерам столбцов "центра тяжести" изображения визируемого ориентира на матричном приемнике ОЭК;  $2\beta$  — угол обзора ОЭК в горизонтальной плоскости;  $n_{м.п}$  — число столбцов матричного приемника;  $y_{ij}$  — номер столбца визируемого ориентира в момент времени  $t_j$ ;  $y_{ii}$  — номер столбца визируемого ориентира в момент времени  $t_i$ .

При необнаружении на текущем изображении ориентира на основе предположения о незначительности изменения угла курса КА за интервал времени между соседними кадрами делаются повторные попытки локализации ориентира на последующих кадрах. Максимальное число попыток ( $c_{доп}$ ) задается динамикой изменения конфигурации группы, динамикой разворотов (колебаний) КА относительно центра масс и частотой обработки кадров ОЭК посредством БВК.

Реализованное число попыток ( $c$ ) фиксируется счетчиком БВК. В случае нахождения ориентира при  $c \leq c_{доп}$  работа алгоритма продолжается, счетчик обнуляется. При  $c > c_{доп}$  работа алгоритма считается неудавшейся, поиск повторяется с привлечением внешней информации о расположении и оптических параметрах КА-ориентира.

## Исследование алгоритма обработки видеоинформации

Исследование алгоритма стабилизации проведено путем моделирования в среде MATLAB. В качестве исходного материала синтезированы видеоизображения, соответствующие реальным траекториям полета КА по низким орбитам, различающиеся спектральным диапазоном изображения (видимый, ИК диапазон), типом фона.

Образцы наблюдаемого оптического изображения зашумлены в соответствии с аддитивной моделью (имитация последствий действия темновых токов и помех в аналого-цифровом преобразователе). Модель дополнена импульсным шумом, имитирующим нефункционирующие — постоянно "включенные" или постоянно неработающие — пиксели [2, 10].

На рис. 5 представлена статистика сбоев алгоритма в зависимости от размера ориентира (без учета правил перемещения ориентира по кадру). Под сбоем подразумевалось неправильное определение на кадре ориентира.

Как видно из рис. 5, наиболее устойчивым к сбоям является ориентир, занимающие 3...15 % столбцов матричного приемника, при этом определенное значение контраста ориентиров относительно фона должно быть не менее 1,2. Пятна с меньшим поперечным размером обладают меньшей стабильностью (к сохране-

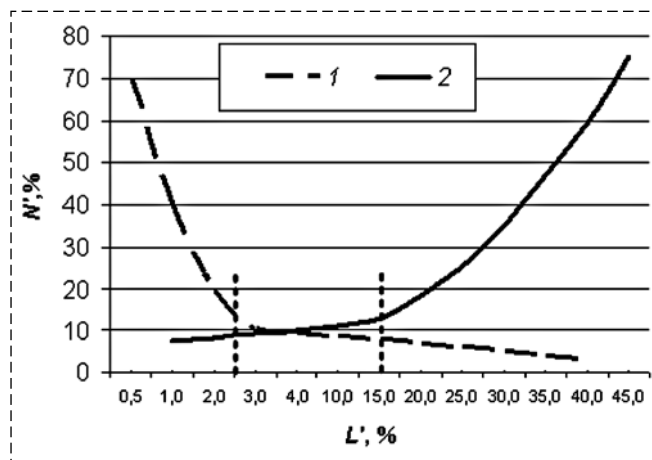


Рис. 5. Вероятность сбоев ( $N, \%$  случаев) алгоритма от величины ориентира  $L' (\%$  от ширины матрицы):

1 — сбой в результате исчезновения ориентира; 2 — сбой в результате флуктуации яркостно-геометрических характеристик ориентира

Fig. 5. Expectancy ( $N, \%$ ) of the algorithm failure ( $L' \%$  — leader satellite mark size):

1 — failure as a result of a mark disappearance, 2 — failure as a result of a mark light-striking

нию своего размера) при воздействии шума. Использование крупных ориентиров увеличивает ошибку определения курса ведомого КА и ухудшает точность поддержания конфигурации.

На рис. 6 представлена зависимость (здесь и далее — аппроксимированная при обработке результатов эксперимента) сбоев алгоритма от контраста яркостей ориентира, фона и уровня флуктуационного шума матричного приемника. Под сбоем подразумевалось временное неправильное определение (или неопределение) на изображении ориентира, не приведшее к отказу работы алгоритма.

Основными внешними условиями, ограничивающими работу алгоритма, являются: низкий контраст ориентира на фоне звезд, отсутствие освещенности Солнцем (рис. 7), в ряде случаев — засветка Солнцем, незначительные наблюдаемые размеры ориентира вследствие его малости или удаленности.

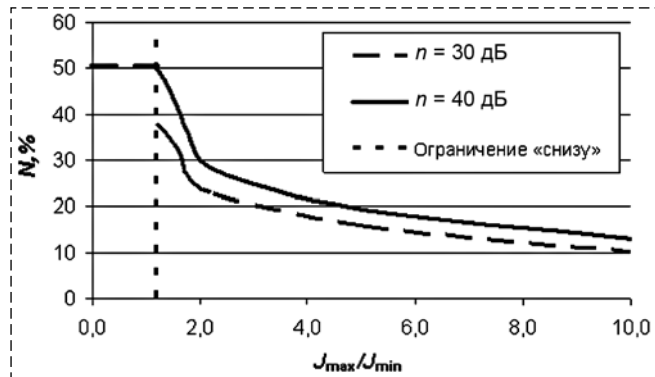


Рис. 6. Зависимость числа сбоев (%) алгоритма от контраста яркостей ориентира и фона ( $J_{\max}/J_{\min}$ ) и уровня флуктуационного шума матричного приемника ( $n$ ).  $N$  — доля числа кадров с найденными областями от общего числа кадров, %  
Fig. 6. Algorithm failure, % of frames ( $J_{\max}/J_{\min}$  — image contrast,  $n$  — background noise)

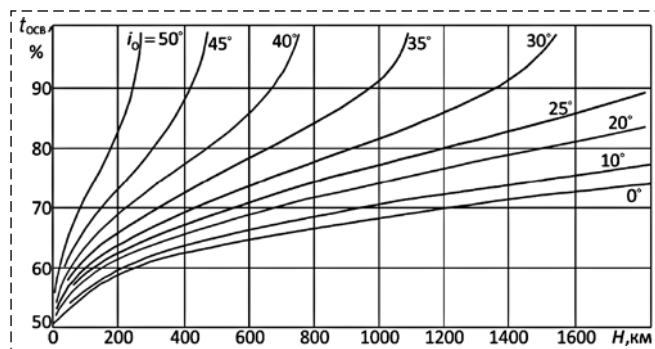


Рис. 7. Максимальное время освещения  $t_{\text{осв}}$  КА Солнцем в зависимости от высоты  $H$ , км и наклона  $i_0$  круговой орбиты  
Fig. 7. Satellite sunniness,  $t_{\text{осв}}$  ( $H$  — orbit altitude,  $i_0$  — orbit inclination)

Надежность работы алгоритма повышается при:

- увеличении видимого размера ориентира (сближении КА-ориентира и ведомого КА);
- использовании дополнительных признаков ориентира (уменьшение области поиска ориентира на изображении, учет параметров его движения);
- ограничении использования алгоритма при нерасчетной освещенности ориентиров.

## Заключение

1. Одной из прикладных задач группового полета КА может являться многоспутниковый проект "космической рекламы".

2. Рациональными методами формирования пространственной конфигурации группы являются: методы "постоянного" и "переменного" строя, "смешанный" метод, соединение КА тросовой связью.

3. Для пассивного (без радиообмена) следования за КА-ориентиром возможно применение системы управления заданной конфигурацией на основе оптико-электронного комплекса с широкоугольным приемником матричного типа. Предложен способ поддержания конфигурации с использованием оптико-электронного комплекса, разработан и исследован алгоритм обработки видеoinформации.

## Список литературы

1. Лавренов А. Н., Палкин М. В., Петухов Р. А. Технология космической рекламы. Реутов: АО "ВПК "НПО машиностроения", 2016, 124 с.
2. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М.: Мир, 1977. 361 с.
3. Палкин М. В. Некоторые аспекты формирования групп космических аппаратов и управления ими // Вестник Московского авиационного института. 2014. Т.21 № 3. С. 29—35.
4. Палкин М. В. Концептуальные вопросы создания и применения космических аппаратов группового полета // Наука и образование: электронное научно-техническое издание. 2015. № 08. С. 100—115.
5. Евстифеев В. В., Палкин М. В. Управление креном аэробаллистических летательных аппаратов // Вестник МГТУ. Приборостроение. 2007. № 2(48). С. 56—63.
6. Палкин М. В. Способ ориентирования по крену летательного аппарата с оптической головкой самонаведения: Патент 2280590 РФ / М. В. Палкин [и др.] Оpubл. 2006. Бюлл. № 8.
7. Леонов А. Г., Палкин М. В., Лавренов А. Н. Способ группового орбитального движения искусственных спутников. Патент РФ № 2569236 / А. Г. Леонов [и др.]
8. Воронов Е. М., Карпуни А. А., Палкин М. В. и др. Формирование конфигурации группы спутников и многокритериальное управление по конфигурационной точности

и расходу // Труды XXXVIII академических чтений по космонавтике. М.: Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства, 2014. С. 418.

9. **Maessen D., Gill E.** Relative State Estimation and Observability Analysis for Formation Flying Satellites // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2012. Vol. 35, N. 1. P. 321–326.

10. **Ranganath H. S.** Feature extraction technique for fast digital image registration // *Proc. IEEE SOUTHEASTCON*. 1980. P. 225–228.

11. **Палкин М. В., Лавренов А. Н.** Приложения системного подхода при управлении группировками космических аппаратов // *Полет*. 2018. № 4. С. 51–57.

## Satellite Formation Flying Control Using Image Processing

**M. V. Palkin**, mpalkin@vpk.npomash.ru,

MIC "NPO mashinostroyeniya", Reutov, 143966, Russian Federation

Corresponding author: **Palkin M. V.**, Ph.D.,  
MIC "NPO mashinostroyeniya", Reutov, 143966, Russian Federation

Accepted on August 20, 2018

### Abstract

*A problem of a formation flying control is observed. As an example a concept of a multisatellite configuration ("space commercial") is described. Space advertisement is realized by groups of specialized free flying and cable-connected satellites, and their combinations. Construction of a space commercial satellite and a set of a control system equipment is presented. Several methods for group configuration are presented: periodic impulse correction of each flying satellite position formation; method of a satellite positioning on nocoplanar orbits. Other methods include combinations of methods mentioned above. Configuration control using onboard video camera with a wide-angle image detector is presented. Characteristics of an optical system are shown. Navigation parameters of a using a received observed videoimage are estimated. A method of a relative position measurement is described. The method detects a video track of a moving ahead satellite on the matrix detector. According to the method lines of the matrix detector are positioned transversely and columns are positioned in parallel with vertical axis of the orbital coordinate system. Course of the slave satellite is proportional to the travel of the centre of the lider satellite mark on the matrix detector columns. Pitch of the slave satellite is proportional to the travel of the centre of the leader satellite mark on the matrix detector lines. A video-display processing algorithm is developed and researched. The algorithm contains procedures of a forming, localization of the leader satellite mark, deviation angle calculation. The algorithm uses structural method, detecting bright spots (image syntactic characteristics). Efficiency of the algorithm depends on the leader satellite mark brightness, size, light-striking, distance.*

**Keywords:** satellite, "space commercial", formation flying, optical navigation system, image processing

For citation:

**Palkin M. V.** Satellite Formation Flying Control Using Image Processing, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no.1, pp. 52–58.

DOI: 10.17587/mau.20.52-58

### References

1. **Lavrenov A. N., Palkin M. V., Petukhov R. A.** *Tekhnologiya kosmicheskoi reklamy* (The Technology of Space Advertising), Reutov, JSC "MIC "NPO Mashinostroyeniya", 2016, 124 p. (in Russian).

2. **Duda R., Hart P.** *Raspoznavanie obravov I analiz stsen* (Pattern Recognition and Scene Analysis), Moscow, MIR, 1977, 361 p. (in Russian).

3. **Palkin M. V.** *Nekotorye aspekty formirovaniya grupp kosmicheskikh apparatov i upravleniya imi* (Questions of satellite formation flying design and control), *Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta*, 2014, vol. 21, no. 3, pp. 29–35 (in Russian).

4. **Palkin M. V.** *Kontseptual'nye voprosy sozdaniya i primeneniya kosmicheskikh apparatov gruppovogo poleta* (Conceptual problems of development and application of space vehicles for

group flight), *Science and Education*, 2015, no. 08, pp. 100–115 (in Russian).

5. **Evstifeev V. V., Palkin M. V.** *Upravlenie krenom aerobal-listicheskikh letatelnykh apparatov* (Aeroballistic aircraft roll control), *Vestnik MSTU. Priborostroyeniye*, 2007, no. 2(48), pp. 56–63 (in Russian).

6. **Palkin M. V.** *Sposob prientirovaniya po krenu letatel'nogo apparata s opticheskoi golovkoy samonavedeniya*: Patent 2280590 RU/ M. V. Palkin and others (in Russian).

7. **Leonov A. G., Palkin M. V., Lavrenov A. N.** and others. *Sposob gruppovogo orbital'nogo dviganiya iskusstvennykh sputnikov*, Patent № 2569236 (RU) (in Russian).

8. **Voronov E. M., Karpunin A. A., Palkin M. V.** Formation flying configuration design and multicriteria control, *Proceedings of the XXXVIII academic conference on Cosmonautics*, 2014, pp. 418 (in Russian)

9. **Maessen D., Gill E.** Relative State Estimation and Observability Analysis for Formation Flying Satellites, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, vol. 35, no. 1, pp. 321–326.

10. **Ranganath H. S.** Feature extraction technique for fast digital image registration, *Proc. IEEE SOUTHEASTCON*, 1980, pp. 225–228 (in Russian).

11. **Palkin M. V., Lavrenov A. N.** Examples of a system approach for a satellite formation flying control, *Polyot*, 2018, no. 4, pp. 51–57 (in Russian).

**А. В. Воробьёв**, д-р техн. наук, генеральный директор — генеральный конструктор,  
**М. М. Сильвестров**, д-р техн. наук, проф., советник генерального директора,  
**Ю. И. Бегичев**, канд. техн. наук, доц., вед. науч. сотр., begichevy@yandex.ru,  
**Л. О. Котицын**, канд. техн. наук, вед. науч. сотр.  
 АО "НИИ авиационного оборудования", г. Жуковский,  
**Д. Н. Левин**, канд. техн. наук, зам. нач. отдела  
 ПАО "ОКБ Сухого", г. Москва

## Концепция построения эргатического интерфейса многофункционального авиационного комплекса с интегрированной модульной авионикой

*Рассматривается концепция построения и архитектура эргатического интерфейса перспективного авиационного комплекса с использованием интегрированной модульной авионики, которые базируются на методологии рационального согласования совокупных свойств взаимодействия человека-оператора, техники и модуля формирования образа цели управления и применения в интересах повышения эффективности деятельности экипажа и безопасности полета. Описываются системы отображения информации и контроля, формируемые на базе цифровых электронных устройств и комплексного управления информацией с разделением времени операций контроля и отображения данных и с обеспечением наиболее удобной формы представления информации. В таких системах воспроизводится только та информация, которая необходима летчику для данного режима полета, либо вызвана им по требованию. Широкие возможности в варьировании объема и вида представления отдельных параметров в зависимости от режимов полета требуют инженерно-психологического обоснования принципов рационального информационного обеспечения летчика в процессе решения профессиональных задач. Приводятся результаты сравнительных исследований принципов отображения пространственного положения ЛА для трех типов индикации: "вид с самолета на землю" (тип 1), "вид с земли на самолет" (тип 2) и "вид своего самолета и "лидера" (образа цели управления) с другого самолета, находящегося сзади на одной и той же высоте и путевой скорости" (тип 3), показавшие преимущества третьего вида индикации — информационной командно-лидерной индикации. Этот тип индикации обеспечивает формирование у летчика геоцентрического образа полета относительно земной нормальной системы координат, направлениями осей которой является вектор путевой скорости, гравитационная вертикаль и линия горизонта, а также образ цели управления и применения в виде отображения заданного пространственного положения и изменения положения его конфигурации в соответствии с принципом управления "делай как я". Рассматриваются возможности использования ИМА-технологии и мнемокадров с информационной командно-лидерной индикацией, позволяющие повысить эффективность деятельности экипажей многофункциональных авиационных комплексов.*

**Ключевые слова:** эргатический интерфейс, информационная модель, модуль "эталонного маневрирования", образ полета, образ цели управления, интегрированная модульная авионика, информационная командно-лидерная индикация

### Введение

В связи с развитием вычислительной техники, резким повышением производительности бортовых цифровых вычислительных машин, ростом объема памяти и скорости передачи информации по цифровым каналам информационного обеспечения, а также миниатюризации микропроцессорной электроники возникает необходимость перехода от федеративной архитектуры вычислительной системы к распределенной интегрированной архитектуре, получившей название "интегрированная модульная авионика" (ИМА). Глубокая интеграция бортовых комплексов связана с объективной необходимостью снижения стоимости производства оборудования и повышения его эффективности при эксплуатации. Эффективное использование летчиком потенциала, за-

кладаваемого в самолет и эргатический комплекс управления, во многом определяется степенью соответствия систем информационного обеспечения, средств интеллектуальной поддержки, систем автоматизации управления и органов управления бортовым оборудованием психофизиологическим возможностям летчика при решении профессиональных задач.

### Концепция построения интегрированной модульной авионики

Концепцией построения интегрированной модульной авионики предусматриваются:

- отделение функционального программного обеспечения (ПО) от аппаратного исполнения вычислительной среды;
- повторное использование ПО;

- реализация нескольких функциональных приложений на одной вычислительной платформе с применением технологии безопасных разделов;
- автономное создание и сертификация четко специфицированных модулей-функций;
- интеграция функций управления в единый модуль.

ИМА определяется как совместно используемый набор гибких, повторно используемых и взаимодействующих аппаратных и программных ресурсов, которые, будучи интегрированными, образуют разработанную и проверенную в отношении определенного набора требований к безопасности и техническим характеристикам самолета платформу, обеспечивающую надежное функционирование комплекса бортового оборудования, уменьшение его массогабаритных характеристик, облегчение технического обслуживания, уменьшение стоимости.

### **Информационная модель интегрированной модульной авионики**

При функционировании перспективного авиационного комплекса с ИМА летчик судит о процессе пилотирования и ходе выполнения полетных задач по информационной модели, дающей совокупность текущей информации о состоянии объекта управления, положении органов управления и их воздействии на управляемый процесс.

Такая информационная модель полета представляет собой общую информационную картину, построенную на базе представленной экипажу уведомительной и предупреждающей информации, поступающей от системы отображения информации, неинструментальной информации, получаемой при систематическом обзоре внекабинного пространства и при ощущении угловых и линейных ускорений, а также за счет оценки усилий на органах управления и акустических шумов. Кроме этого, в процессе управления используется информация о цели управления в виде заданных значений полетных параметров — высоты, скорости, направления полета (курса), указаний об изменении маршрута, профиля полета и т. д.

Сравнивая информационную модель полета с желаемым образом полета, летчик путем воздействия на командные органы управления самолетом и его силовой установкой добивается совпадения информационной модели и желаемого образа полета.

Известно, что эффективность функционирования системы летчик — самолет в значительной степени зависит от рациональности построения информационно-управляющего поля. На перспективных маневренных самолетах в качестве основных индикаторов инструментальной информации используются многофункциональные экранные индикаторы и многофункциональные пульта управления с многостраничной логикой управления индикацией, режимами полета самолета и бортовым оборудованием.

В соответствии с новым подходом системы отображения информации и контроля строятся на базе цифровых электронных устройств и комплексного управления информацией с разделением времени операций контроля и отображения данных и обеспечением наиболее удобной формы представления информации. В таких системах воспроизводится только та информация, которая необходима летчику для данного режима полета, либо вызвана им по требованию. Широкие возможности в варьировании объема и вида представления отдельных параметров в зависимости от режимов полета настоятельно требуют инженерно-психологического обоснования принципов рационального информационного обеспечения летчика в процессе решения профессиональных задач. При этом необходимо учитывать необходимость максимально возможного сохранения привычной пространственной компоновки основных элементов информационно-управляющего поля кабины, объема, формы и логики представления пилотажно-навигационной и общесамолетной информации, чтобы не разрушать имеющихся у летного состава сенсорных и моторных навыков.

Информационно-управляющее поле (ИУП) объединяет все системы и устройства, создающие и поддерживающие внутрикабинный интерфейс между членами экипажа, бортовыми системами самолета и наземными пунктами управления движением и поддержки полета. Системы индикации и сигнализации становятся частью комплекса, построенного на технологии ИМА, при этом сохраняются функции внутрикабинного интерфейса, выполнение которых будет возлагаться на средства ИУП. Формирование ИУП кабины и принципов поддержки экипажа обеспечивается на основе:

- совершенствования способов индикации и управления информационным полем;
- рационального распределения функций между экипажем и бортовыми системами;
- рациональной компоновки кабины экипажа.

Основными направлениями совершенствования эргатического интерфейса кабины являются:

- переход от приборного вида пилотажных данных к визуальному представлению информации на широкоформатных экранах;
- использование информационной командно-лидерной индикации для маневренных режимов полета летательных аппаратов, обеспечивающей формирование у пилотов рациональных образов полета и цели управления с прогнозной информацией;
- переход на курсорное управление при выставке заданных значений параметров, выборе необходимого формата индикации и масштаба отображения, при управлении электронными контрольными картами и другими режимами;
- реконфигурация многоэкранной системы индикации и перераспределение функций индикации в целях обеспечения непрерывного отображения высотно-скоростных и угловых параметров движения и параметров силовой установки;
- внедрение авиационных систем улучшенного, синтезированного и интегрированного видения.

### **Сравнительные исследования принципов отображения пространственного положения ЛА**

Сравнительные исследования принципов отображения пространственного положения ЛА проводились на диалоговом моделирующем комплексе с использованием трех типов индикации: "вид с самолета на Землю" (Тип 1), "вид с Земли на самолет" (Тип 2) и "вид своего самолета и "лидера" (образа цели управления) с другого самолета, находящегося сзади на одной и той же высоте и путевой скорости" (Тип 3). Мнемокадры трех типов индикации приведены на рис. 1, 2 и 3 (см. вторую, третью и четвертую стороны обложки).

На рис. 3 обозначены:

1 — силуэт самолета, вращающийся по крену, изменяющий длину киля в зависимости от текущей перегрузки, имеющий скобу ограничения перегрузки и меняющий конфигурацию в зависимости от тангажа; 2 — силуэт лидера, вращающийся в соответствии с заданным креном, меняющий конфигурацию в зависимости от заданного тангажа и перемещающийся по экрану в зависимости от позиционных отклонений в горизонтальной и вертикальной пло-

скостях; 3 — шкала крена; 4 — шкала угла атаки с указателем; 5 — счетчик текущей перегрузки; 6 — шкала текущей перегрузки с указателем; 7 — навигационно-пилотажный прибор; 8 — шкала вертикальной скорости с указателем и счетчиком; 9 — счетчик заданной баровысоты; 10 — счетчик текущей баровысоты; 11 — счетчик заданной приборной скорости; 12 — счетчик текущей приборной скорости; 13 — прибор измерения скорости; 14 — высотомер; 15 — индикатор направления ветра; 16 — счетчик направления и скорости ветра; 17 — группа счетчиков VOR; 18 — счетчик АРК; 19 — счетчики давления и температуры аэродрома; 20 — счетчики давления и температуры на аэродроме.

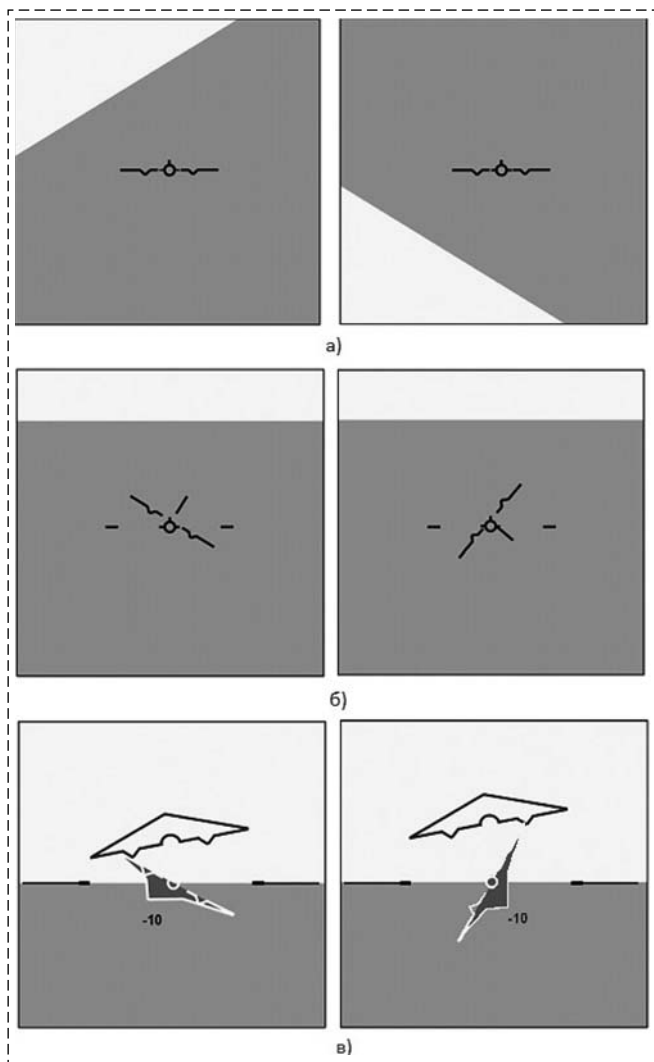
При использовании индикации Тип 3 (рис. 3) под пространственной ориентировкой следует подразумевать постоянную и активно сохраняемую осведомленность летчика о положении и характере перемещения самолета в пространстве относительно поверхности Земли, а также о состоянии и динамике отдельных параметров полета, связанных с перемещением в пространстве. Кроме того, необходимо иметь информацию о цели управления, заданных параметрах углового положения, местоположения и вектора скорости по принципу "делай, как я" и информацию о критических состояниях полета путем изменения конфигурации образа цели управления.

Такой формат обеспечивает летчику быстрое и наглядное представление о пространственном положении самолета и потребных управляющих воздействиях.

На рис. 4 для сравнения показаны схемы отображения пространственного положения ЛА для трех типов индикации (Тип 1, Тип 2, Тип 3) для следующих условий:

- угол тангажа равен  $-10^\circ$  (пикирование),
- углы крена равны  $+30^\circ$  и  $+120^\circ$ ;
- скорость полета 700 км/ч.

Можно заметить, что при угле крена  $30^\circ$  различия в восприятии информации о пространственном положении ЛА между указанными типами индикации невелики. В то же время, в случае, когда угол крена составляет  $120^\circ$ , при быстром взгляде на индикацию Тип 1 (рис. 4, а) невозможно сходу "прочитать" положение ЛА. Более понятным является отображение положения ЛА при индикации Тип 2 (рис. 4, б). На экране, отображающем ЛА Тип 3 (рис. 4, в), совершенно однозначно определяется положение его в пространстве относительно вертикали и линии горизонта. Приведенные рассуждения



**Рис. 4. Варианты индикации пространственного положения ЛА:**  
*a* — Тип 1; *б* — Тип 2; *в* — Тип 3

**Fig. 4. Variants for indicating the spatial position of the aircraft:**  
*a* — Type 1; *б* — Type 2; *в* — Type 3

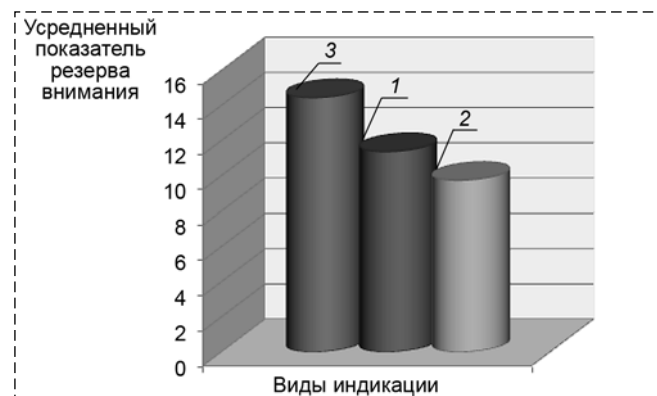
особенно заметно подтверждаются при выполнении экспериментов, связанных с пилотированием ЛА в сложных метеоусловиях, при отсутствии видимости линии горизонта и Земли.

Результаты экспериментальной оценки процессов пилотирования на режимах "Взлет", "Набор высоты и скорости", "Возврат", "Полет по коробочке", "Заход на посадку" "Посадка" с использованием различных систем отображения пилотажной информации на экранных индикаторах приведены на рис. 5, 6, 7.

На рис. 7 изображены траектории полета в сложных метеоусловиях при использовании различных видов индикации на режимах взлет — набор высоты и скорости — возврат — полет по коробочке — заход на посадку — посадка.

Белой сплошной линией обозначена траектория полета, полученная при использовании индикации Тип 3 (ИКЛИ), серыми точками — при использовании индикации Тип 1 (вид с самолета на Землю), белыми штрихами — при использовании индикации Тип 2 (вид с Земли на самолет).

Результаты проведенных инженерно-психологических исследований, приведенные на рис. 5—7, показали, что индикация в режиме командно-лидерного управления с использованием сигналов, формируемых модулем "эталонного маневрирования", обеспечивает повышение точности пилотирования, увеличение резерва внимания для выполнения дополнительной работы, снижение показателей психофизиологического напряжения летчика,

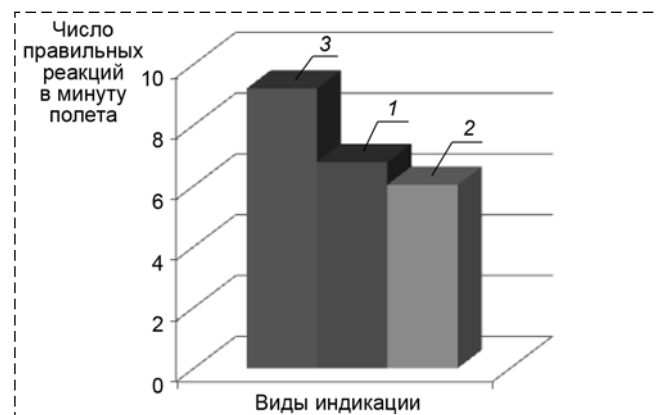


**Рис. 5. Показатель резервов внимания при различных вариантах системы индикации:**

*1* — Тип 1, *2* — Тип 2, *3* — Тип 3, в условиях плохой видимости аэродрома

**Fig.5. Indicator of reserves of attention with different versions of the display system:**

*1* — Type 1, *2* — Type 2, *3* — Type 3, in conditions of poor visibility of the airfield



**Рис. 6. Показатель правильных реакций по дополнительной работе при различных вариантах системы индикации:**

*1* — Тип 1, *2* — Тип 2, *3* — Тип 3

**Fig.6. Index of the correct reactions for additional work with different versions of the display system:**

*1* — Type 1, *2* — Type 2, *3* — Type 3



Рис. 7. Траектории полета в сложных метеоусловиях при использовании различных видов индикации

Fig. 7. Flight trajectories in adverse weather conditions using different types of indications

уменьшение сложности пилотирования, увеличение среднего значения амплитудно-частотной характеристики оператора, снижение потребной скорости переработки информации. По характеристикам отказобезопасности информационная командно-лидерная индикация имеет явные преимущества перед вариантами индикации Тип 1 и Тип 2. Этот тип индикации обеспечивает формирование у летчика геоцентрического образа полета относительно земной нормальной системы координат, направлениями осей которой является вектор путевой скорости, гравитационная вертикаль и линия горизонта, а также образа цели управления и применения в виде отображения заданного пространственного и изменения положения его конфигурации в соответствии с принципом управления "делай, как я".

Таким образом, использование ИМА-технологии и мнемокадров с информационной командно-лидерной индикацией позволяет повысить эффективность деятельности экипажей многофункциональных авиационных комплексов.

## Список литературы

1. **Fogel L. J.** Biotechnology: Concepts and Application. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
2. **Gagne R. M., Melton A. M.** (eds.) Psychological Principles in System Development. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.
3. **Woodson W. E., Conover D. W.** Human Engineering Guide for Equipment Designers. Second edition, Univ. of California Press Berkeley, Los Angeles, 1966.
4. **Бондаренко А. Г., Харитонов В. В., Сомов М. В.** Эргономические проблемы эксплуатации летательных аппаратов, оборудованных "стеклянными" кабинами // Проблемы безопасности полетов. 2014. № 5. С. 34–36.
5. **Минеева Е. А., Мухамедшина Л. Х.** К вопросу об эргономической организации рабочего места экипажа кабины самолета // Образование и наука в современном мире. Инновации. 2015. № 1. С. 110–113.
6. **Пономаренко В. А.** О роли военной эргономики и авиационной медицины в создании авиационных комплексов // Военная мысль. 2000. № 2. С. 52.
7. **Харитонов В. В., Серегин С. Ф.** Эргономические недостатки кабин самолетов как факторы риска безопасности полетов // Вопросы безопасности. 2017. № 5. С. 1–11.
8. **Харитонов В. В., Бондаренко А. Г., Кокташев М. А.** Проблемы эргономического сопровождения разработки и внедрения "стеклянных кабин" в состав компоновки оборудования летательных аппаратов // Матер. Всеросс. науч.-практ. конф. "АБИАТОР". Воронеж, 2015. С. 200–206.
9. **Левин Д. Н., Сильвестров М. М., Пономаренко А. В., Федоров А. В.** Эргатический информационно-управляющий комплекс многофункциональных маневренных самолетов // Полет. 2010. № 4.
10. **Левин Д. Н., Пономаренко А. В., Сильвестров М. М.** Методология построения эргатического интерфейса перспективного маневренного самолета с интегрированной модульной авионикой // Человеческий фактор: проблемы психологии и эргономики. 2016. Вып. 4.
11. **Сильвестров М. М., Бегичев Ю. И., Варочко А. Г., Козиоров Л. М., Луканичев В. Ю., Наумов А. И., Чернышов В. А.** Эргатические интегрированные комплексы летательных аппаратов. М.: Филиал Воениздата, 2007. 512 с.
12. **Сильвестров М. М., Бегичев Ю. И., Варочко А. Г., Воробьев А. В., Котицын Л. О., Левин Д. Н., Насенков И. Г., Ползик В. П., Пономаренко А. В.** Методология построения эргатического интерфейса многофункциональных авиационных комплексов с интегрированной модульной авионикой. М.: Изд. МБА, 2016. 316 с.

## Concept of Construction of Ergatical Interface of Multifunctional Aviation Complex with Integrated Modular Avionics

A. V. Vorobyov, M. M. Silvestrov, Y. I. Begichev, begichevy@yandex.ru, L. O. Kotitsyn,  
SRI of Aeronautical Equipment, Zhukovsky, 140185, Russian Federation,  
D. N. Levin, "OKB Sukhoy", Moscow, 125284, Russian Federation

Corresponding author: **Begichev Yury I.**, PhD, Associate Professor, Leading Researcher,  
"SRI of Aeronautical Equipment", Zhukovsky, 140185, Russian Federation,  
e-mail: begichevy@yandex.ru

Accepted on July 07, 2018

## Abstract

In the focus of this research are the concept of construction and the architecture of the ergatical interface of a prospective aviation complex using integrated modular avionics, which are based on the methodology of rational coordination of the aggregate properties of human operator interaction, technology and the image forming module of the management goal and application in the interests of increasing the efficiency of crew activity and flight safety. Information display and control systems, which are based on digital electronic devices and integrated information management, with the separation of the time of operations for monitoring and displaying data and providing the most convenient form of information representation, are examined in this article. In such systems, only the information that the pilot needs for a given flight mode is reproduced, or called upon them on demand. Wide opportunities in varying the volume and type of presentation of individual parameters depending on the flight modes require engineering and psychological justification for the principles of rational information support for the pilot in the process of solving professional problems. The results of comparative studies of the principles of mapping the spatial position of aircraft for three types of indication are presented: "view from aircraft to ground" (type 1), "view from ground to plane" (type 2) and "view of aircraft and "leader" from another aircraft located behind at the same altitude and ground speed" (type 3), which showed the advantages of the third type of indication — information command-leader display. This type of indication provides the pilot with the geocentric image of the flight relative to the earth's normal coordinate system, the directions of which are the vector of the ground speed, the gravitational vertical and the horizon line, and the image of the control objective and application in the form of reflection of change in attitude and change in the configuration position in accordance with the "do as I do" management principle. The possibilities of using IMA-technology and mnemonic frames with information command-leader indication, which allow to increase the efficiency of the crew of multifunctional aviation complexes, are presented.

**Keywords:** ergatical interface, information model, "standard maneuvering" module, flight image, management goal image, integrated modular avionics, information command-leader display

For citation:

Vorobyov A. V., Silvestrov M. M., Begichev Y. I., Kotitsyn L. O., Levin D. N. Concept of Construction of Ergatical Interface of Multifunctional Aviation Complex with Integrated Modular Avionics, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 59—64.

DOI: 10.17587/mau.20.59-64

## References

1. Fogel L. J. *Biotechnology: Concepts and Application*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.
2. Gagne R. M., Melton A. M. (eds.) *Psychological Principles in System Development*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.
3. Woodson W. E., Conover D. W. *Human Engineering Guide for Equipment Designers*. Second edition, Univ. of California Press Berkeley, Los Angeles, 1966.
4. Bondarenko A. G., Kharitonov V. V., Somov M. V. *Ergonomicheskie problemy ekspluatatsii letatel'nykh apparatov, oborudovannykh "steklyannymi" kabinami* (Ergonomic problems of operation of aircraft equipped with glass cabins), *Problemy bezopasnosti poletov*, 2014, no. 5, pp. 34—36 (in Russian).
5. Mineeva E. A., Mukhamedshina L. Kh. *K voprosu ob ergonomicheskoi organizatsii rabocheho mesta ekipazha kabiny samoleta* (To the question of the ergonomic organization of the workplace of the crew of the aircraft cabin), *Obrazovanie i nauka v sovremennom mire. Innovatsii*, 2015, no. 1, pp. 110—113 (in Russian).
6. Ponomarenko V. A. *O roli voennoi ergonomiki i aviatsionnoi meditsiny v sozdanii aviatsionnykh kompleksov* (On the role of military ergonomics and aviation medicine in the creation of aviation systems), *Voennaya mysl'*, 2000, no. 2, P. 52 (in Russian).
7. Kharitonov V. V., Seregin S. F. *Ergonomicheskie nedostatki kabin samoletov kak faktory ryska bezopasnosti poletov* (Ergonomic deficiencies in the cabin of the aircraft as a safety risk), *Voprosy bezopasnosti*, 2017, no. 5, pp. 1—11 (in Russian).
8. Kharitonov V. V., Bondarenko A. G., Koktashev M. A. *Problemy ergonomicheskogo soprovozhdeniya razrabotki i vnedreniya "steklyannykh kabin" v sostav komponovki oborudovaniya letatel'nykh apparatov* (Problems of ergonomic support of the development and implementation of "glass cabins" in the composition of the equipment of aircraft), *Materialy Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "AVIATOR"*, Voronezh, 2015, pp. 200—206 (in Russian).
9. Levin D. N., Silvestrov M. M., Ponomarenko A. V., Fedorov A. V. *Ergaticheskii informatsionno-upravlyayushchii kompleks mnogofunktsional'nykh manovrennykh samolotov* (Ergatic information and control complex multifunctional maneuverable aircraft), *Polet*, 2010, no. 4 (in Russian).
10. Levin D. N., Ponomarenko A. V., Silvestrov M. M. *Metodologiya postroyeniya ergaticheskogo interfeysa perspektivnogo manevrennogo samoleta s integrirrovannoy modul'noy avionikoy* (Methodology for constructing an ergatic interface for a promising maneuverable aircraft with integrated modular avionics.), *Chelovecheskiy faktor: problemy psikhologii i ergonomiki*, 2016, iss. 4 (in Russian).
11. Sil'vestrov M. M., Begichev Yu. I., Varochko A. G., Koziorov L. M., Lukanichev V. Yu., Naumov A. I., Chernyshov V. A. *Ergaticheskiye integrirrovannyye komplekсы letatel'nykh apparatov*. (Ergatic integrated aircraft systems.), *Moscow, Filial Voenizdata*, 2007, 512 p. (in Russian).
12. Sil'vestrov M. M., Begichev Yu. I., Varochko A. G., Vorob'yev A. V., Kotitsyn L. O., Levin D. N., Nasenkov I. G., Polzik V. P., Ponomarenko A. V. *Metodologiya postroyeniya ergaticheskogo interfeysa mnogofunktsional'nykh aviatsionnykh kompleksov s integrirrovannoy modul'noy avionikoy* (Methodology for constructing an ergatic interface for multifunctional aviation complexes with integrated modular avionics.), *Moscow, Publishing house MBA*, 2016, 316 p. (in Russian).

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5510, (499) 269-5397

Технический редактор Е. В. Конова. Корректор Н. В. Яшина.

Сдано в набор 29.10.2018. Подписано в печать 11.12.2018. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН119. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз". 119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.