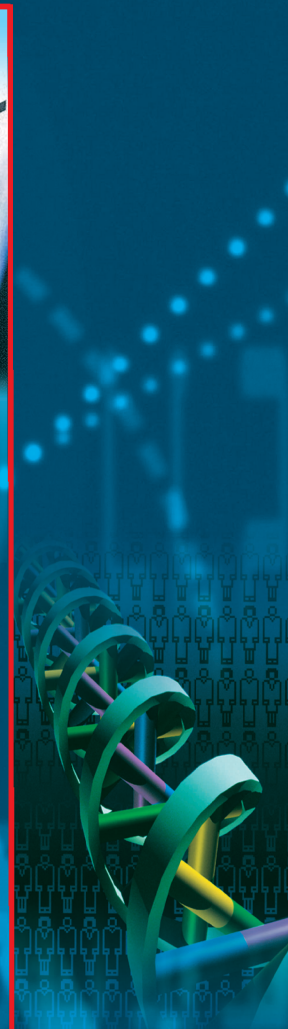


МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ



Том 19
2018
№ 1

Рисунок к статье Б. В. Сухинина, В. В. Суркова
 «К ВОПРОСУ О МЕТОДОЛОГИЧЕСКОМ КРИЗИСЕ
 СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»

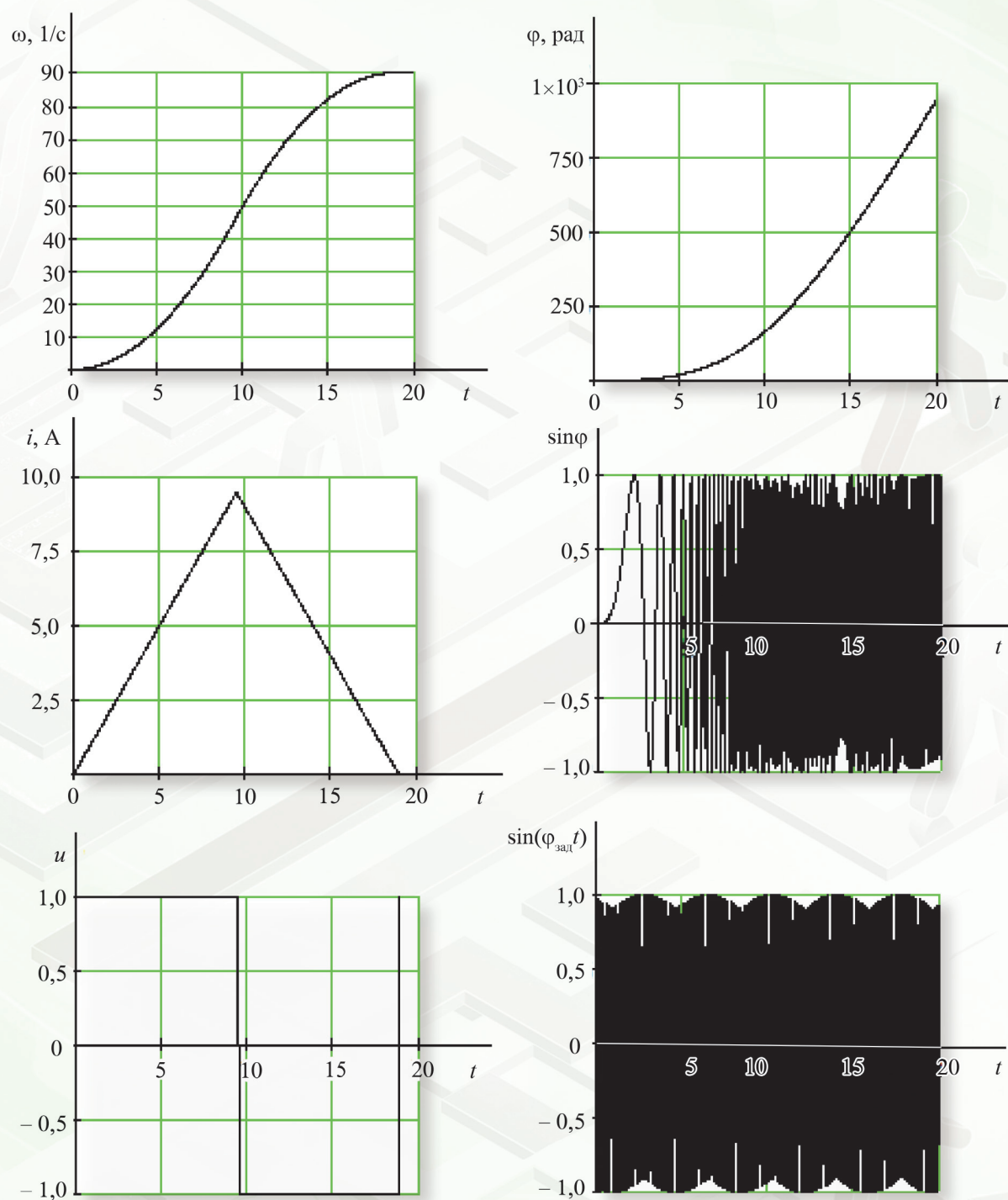


Рис. 1. Результаты моделирования переходных процессов привода сканера антенны

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 19

2018

№ 1

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

Заместители главного редактора:

БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.

ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.

ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Международный редсовет:

DANIELE Z., PhD, Италия

DORANTES D. J., PhD, Китай

GROUMPOS P. P., PhD, Греция

ISIDORI A., PhD, Италия

KATALINIC B., PhD, Австрия

LIN CH.-Y., PhD, Тайвань

MASON O. J., PhD, Ирландия

ORTEGA R. S., PhD, Франция

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США

STRZELECKI R. M., PhD, Польша

SUBUDHI B. D., PhD, Индия

АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан

ГАРАЩЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина

ТРОФИМЕНКО Е. Е., д.т.н., Беларусь

Российский редсовет:

АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН

БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН

ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН

ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН

КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН

КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН

КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН

ЛЕОНОВ Г. А., чл.-корр. РАН

МИКРИН Е. А., акад. РАН

ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН

РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН

СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН

СИГОВ А. С., акад. РАН

СОЙФЕР В. А., акад. РАН

СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН

ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН

ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН

ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН

ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН

ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

Редколлегия:

БОБЦОВ А. А., д.т.н.

БУКОВ В. Н., д.т.н.

ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.

ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.

КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.

ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.

ЛОХИН В. М., д.т.н.

ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д.ф.-м.н.

ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.

РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.

СЕРГЕЕВ С. Ф., д.пс.н.

ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.

ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.

ФУРСОВ В. А., д.т.н.

ЮРЕВИЧ Е. И., д.т.н.

Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

Директор издательства:

АНТОНОВ Б. И.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Коваль В. А., Степанов М. Ф., Торгашова О. Ю., Самарский А. А. Анализ и синтез пространственно многомерных распределенных систем с дескрипторной структурой математической модели 3
- Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V. Complete Pole Placement Method for Linear MIMO Systems 11
- Матвиенко В. Т. Оптимальное терминальное управление линейными дискретными системами с использованием псевдообращения матриц 19
- Сухинин Б. В., Сурков В. В. К вопросу о методологическом кризисе современной теории оптимального управления 26

РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Голицына М. В. Оптимальный выбор ускорения маятника в задачах управления вибрационным роботом 31

УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

- Гришин А. П., Гришин А. А., Гришин В. А., Годжаев З. А. Применение аппарата нечеткой логики в задачах автоматизации технологических процессов сельского хозяйства . . 40
- Искендеров А. А., Аббасова Г. Ю. Оптимальное управление забором и распределением воды на высокорасположенных территориях 47

ИНТЕРФЕЙСЫ ЭРГАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

- Суворов Д. А., Жуков Р. А., Тетерюков Д. О., Зенкевич С. Л. Аудиовизуальный детектор голосовой активности на базе глубокой сверточной сети и обобщенной взаимной корреляции 53

УПРАВЛЕНИЕ В АВИАКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

- Яскевич А. В. Уравнения динамики стыковочных механизмов. Часть 1. Алгоритмы для механических систем со структурой дерева 58
- Левский М. В. Оптимизация кинетического момента для повышения маневренности космического аппарата с инерционными исполнительными органами 65

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Editor-in-Chief

FILIMONOV N. B.

Deputy Editors-in-Chief:

BOLSHAKOV A. A.

PODURAEV Yu. V.

YUSCHENKO A. S.

Responsible Secretary:

BEZMEENOVA M. Yu.

International Editorial Board:

ALIEV T. A., Azerbaijan

DANIELE Z., PhD, Italy

DORANTES D. J., PhD, China

GARASCHENKO F. G., Ukraine

GROUMPOS P. P., PhD, Greece

ISIDORI A., PhD, Italy

KATALINIC B., PhD, Austria

LIN CH.-Y., PhD, Taiwan

MASON O. J., PhD, Ireland

ORTEGA R. S., PhD, France

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA

STRZELECKI R. M., PhD, Poland

SUBUDHI B. D., PhD, India

TROFIMENKO Ye. Ye., Belarus

Russian Editorial Board:

ANSHAKOV G. P.

BOLOTNIK N. N.

CHENTSOV A. G.

CHERNOUSKO F. L.

FEDOROV I. B.

KALYAEV I. A.

KURZHANSKI A. B.

KUZNETSOV N. A.

LEONOV G. A.

MIKRIN E. A.

PESHEKHONOV V. G.

REZCHIKOV A. F.

SCHERBATYUK A. F.

SEBRYAKOV G. G.

SIGOV A. S.

SOJFER V. A.

SOLOMENTSEV Yu. M.

VASSILYEV S. N.

YUSUPOV R. M.

ZHELTOV S. Yu.

Editorial Council:

BOBTSOV A. A.

BUKOV V. N.

ERMOLOV I. L.

FILARETOV V. F.

FRADKOV V. L.

FURSOV V. A.

ILYASOV B. G.

KOROSTELEV V. F.

LEBEDEV G. N.

LOKHIN V.M.

PAVLOVSKY V. E.

PSHIKHOPOV V. KH.

RAPOPORT E. Ya.

SERGEEV S. F.

YUREVICH E. I.

Editorial Staff:

GRIGORIN-RYABOVA E. V.

Director of the Publishing House:

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and perspectives development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

METHODS OF THE THEORY OF AUTOMATIC CONTROL

- Koval' V. A., Stepanov M. F., Torgashova O. Yu., Samarskij A. A.** Analysis and Synthesis of Spatially Multidimensional Distributed Systems with a Descriptor Structure of the Mathematical Model 3
- Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V.** Complete Pole Placement Method for Linear MIMO Systems 11
- Matvienko V. T.** Optimal Terminal Control by Linear Discrete Systems with Use of Matrices Pseudoinversion. 19
- Suhinin B. V., Surkov V. V.** To the Question on Methodological Crisis of the Modern Theory of Optimum Control 26

ROBOTIC SYSTEMS

- Golitsyna M. V.** Optimal Control of a Vibratory Robot Defined by a Choice of Angular Acceleration 31

MANAGEMENT OF TECHNICAL OBJECTS AND TECHNOLOGICAL PROCESSES

- Grishin A. P., Grishin A. A., Grishin V. A., Godjaev Z. A.** Application Features of Fuzzy Logic for Automation Tasks in Agricultural Technological Processes 40
- Iskenderov A. A., Abbasova G.Yu.** Optimal Control of Fences and Distribution of Water on High Location Territories 47

INTERFACES OF ERGATE CONTROL SYSTEMS

- Suvorov D. A., Zhukov R. A., Tsetserukov D. O., Zenkevich S. L.** Audiovisual Voice Activity Detector Based on Deep Convolutional Neural Network and Generalized Cross-Correlation . . 53

CONTROL IN AEROSPACE SYSTEMS

- Yaskevich A. A.** Dynamic Equations of Docking Mechanisms. Part 1. Algorithms for Mechanical Systems with Tree Structure 58
- Levskii M. V.** Optimization of Angular Momentum for Increase of Maneuverability of a Spacecraft with Inertial Actuators 65

Information about the journal is available online at:
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: mech@novtex.ru

В. А. Коваль, д-р техн. наук, проф., koval.va@yandex.ru,

М. Ф. Степанов, д-р техн. наук, доц., mfstepanov@mail.ru,

О. Ю. Торгашова, д-р техн. наук, доц., olgatorg@gmail.com, А. А. Самарский, sanches_93.93@mail.ru,

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.

Анализ и синтез пространственно многомерных распределенных систем с дескрипторной структурой математической модели

На основе спектрального метода анализа распределенных систем разработаны теоретические положения для перехода от исходной математической модели пространственно многомерного распределенного объекта управления в форме дифференциальных уравнений с частными производными к дескрипторной модели, что дает возможность осуществить анализ объекта управления и синтез регулятора с применением известных методов, разработанных для сосредоточенных систем. Исследованы вопросы существования, единственности и сходимости полученных решений.

Ключевые слова: распределенная дескрипторная система, спектральный метод, анализ, синтез, сходимость

Введение

В настоящее время можно выделить достаточно широкий круг пространственно распределенных объектов управления, в которых исследуемые процессы описываются совокупностью систем дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, систем алгебраических уравнений и уравнений, содержащих только дифференциальный пространственный оператор и связанных с остальными уравнениями системы через граничные условия или переменные, описывающие состояние системы.

Таковыми объектами являются устройства, обеспечивающие течение газа в процессе каталитического горения в химических реакторах; сверхпроводящие устройства, используемые для аккумуляции энергии магнитного поля; теплообменные аппараты; установки имитационного моделирования, где объединены реальные устройства и модель; длинные линии передачи сигналов, работающие на высокой частоте и т. д.

Согласно работе [1], такая система может быть рассмотрена как система дифференциально-алгебраических уравнений с матричными коэффициентами, содержащими операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Используемый метод преобразования основывается на понятии индекса системы обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений, которое в случае нормально разрешимых операторов, входящих в состав матричных операторных коэффициентов, расширяется на класс абстрактных дифференциально-алгебраических систем.

Понятию индекса дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными посвящена работа [2], где показано, что дифференциально-алгебраические уравнения часто появляются при дискретизации дифференциальных уравнений

с частными производными. По индексу исходной системы дифференциальных уравнений с частными производными можно сделать вывод о свойствах получаемой дифференциально-алгебраической системы уравнений.

Изучению связанных систем дифференциально-алгебраических уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными посвящена работа [3], где для численного решения используется метод Галеркина.

В статье [4] уравнения длинной линии с частными производными сводятся к обобщенному дифференциально-алгебраическому уравнению, матричные коэффициенты которого содержат операторы, действующие в гильбертовом пространстве бесконечной размерности.

Анализ известных работ показал, что решение систем дифференциально-алгебраических уравнений с частными производными на заключительном этапе осуществляется с применением численных методов, что существенно осложняет процедуру синтеза регуляторов для рассматриваемых объектов.

В данной работе используется спектральный метод анализа и синтеза распределенных систем, учитывающий пространственно распределенную природу объекта и обеспечивающий высокий уровень формализации решения. Спектральная форма представления математической модели распределенного объекта управления [5] предполагает переход от дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных или дифференциально-алгебраических уравнений, т. е. к спектральному представлению. Спектральное представление дает возможность осуществить анализ объекта и синтезировать регулятор с применением методов пространства состояний, разработанных для сосредоточенных систем.

В работе ставятся следующие задачи: получение дескрипторного спектрального представления математической модели пространственно многомерного распределенного объекта управления — плазменного шнура в магнитном поле установки токамак [6], описываемого дифференциальными уравнениями с частными производными по пространству и времени и дифференциальным уравнением, содержащими только пространственный оператор; вычисление аналитически полученных операционных матриц преобразования математической модели; исследование существования, единственности и сходимости решений полученных систем; синтез системы стабилизации.

Исходная математическая модель объекта управления

Для токамака существует область параметров плазмы, в которой возможно ее длительное устойчивое существование. Большинство макроскопических явлений, приводящих к потере удержания плазмы в токамаке, описываются моделью гидродинамики невесомой потенциальной идеально проводящей жидкости [6], которая в невозмущенном состоянии имеет слабо тороидальную конфигурацию (рис. 1) радиуса R_1 с поверхностью S . Эта жидкость удерживается внутри объема τ_S давлением, оказываемым внешним магнитным полем, которое может быть создано с помощью управляющей оболочки. Управление движением жидкости будем осуществлять, создавая распределенное давление на поверхности S .

Будем полагать, что $R \gg R_1$. Это означает, что соотношение R/R_1 настолько велико, что эффектом искривления оси шнура можно пренебречь.

Граничные условия, выполняемые на возмущенной поверхности S' , перенесем на невозмущенную поверхность S . Поскольку возмущенное движение по предположению мало отличается от невозмущенного, пренебрежем нелинейными членами в уравнениях движения.

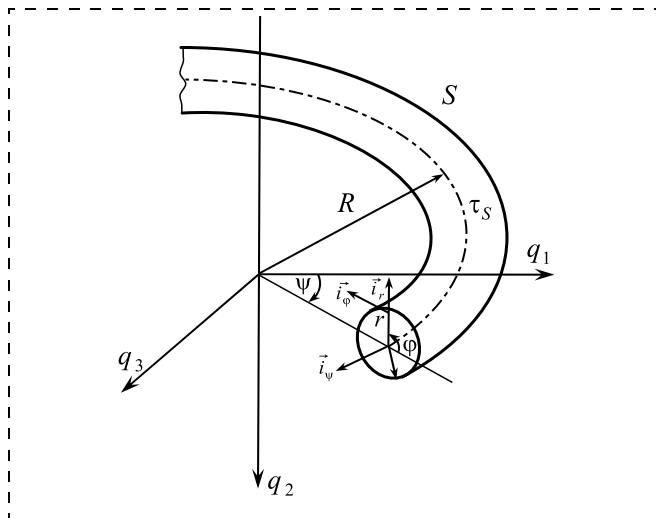


Рис. 1. Схема взаимного расположения систем координат объекта тороидальной конфигурации

Линеаризованная математическая модель объекта управления в отклонениях может быть представлена в цилиндрической системе координат в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_1(z, t)}{\partial t} &= \chi_2(z, t); \\ \frac{\partial \chi_2(z, t)}{\partial t} &= \left. \frac{\partial \Phi(r, z, t)}{\partial r} \right|_{r=R_1}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, z, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi(r, z, t)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi(r, z, t)}{\partial z^2} = 0;$$

$$t \in (0, \infty), r \in (0, R_1), z \in (0, L),$$

где t — время, с; z, r — пространственные переменные, м; L — длина оси тора, м; R_1 — радиус тора, м; $\chi_1(z, t)$ — отклонение возмущенной поверхности, м; $\chi_2(z, t)$ — скорость отклонения возмущенной поверхности, м/с; $\Phi(r, z, t)$ — потенциал ускорений, м/с².

Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_1(z, 0) &= \chi_2(z, 0) = \Phi(r, z, 0) = 0; \\ r &\in [0, R_1], z \in [0, L]. \end{aligned} \quad (2)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \Phi(r, 0, t) &= \Phi(r, L, t), \\ \Phi(R_1, z, t) &= \Phi_{R_1}(z, t), t \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (3)$$

где потенциал ускорений на границе $\Phi_{R_1}(z, t)$, зависящий от давления на поверхности S , будем считать для простоты управляющим воздействием.

Требуется решить задачу стабилизации системы (1)–(3).

Математическая модель (1)–(3) может быть представлена в безразмерном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_1(\xi, \tau)}{\partial \tau} &= k_1 \zeta_2(\xi, \tau), \quad \frac{\partial \zeta_2(\xi, \tau)}{\partial \tau} = k_2 \left. \frac{\partial \phi(\rho, \xi, \tau)}{\partial \rho} \right|_{\rho=1}, \\ 0 &= k_3 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi(\rho, \xi, \tau)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \phi(\rho, \xi, \tau)}{\partial \rho^2} \right] + k_4 \frac{\partial^2 \phi(\rho, \xi, \tau)}{\partial \xi^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tau \in (0, \infty), \rho \in (0, 1), \xi \in (0, 1),$$

где $\zeta_1 = \chi_1/X_1^*$, $\zeta_2 = \chi_2/X_2^*$, $\phi = \Phi/\Phi^*$, $\tau = t/t^*$, $\rho = r/R_1$, $\xi = z/L$ — безразмерные переменные, X_1^* , X_2^* , Φ^* , t^* — номинальные значения соответствующих переменных, $k_1 = X_2^* t^*/X_1^*$, $k_2 = \Phi^* t^*/X_2^* R_1$, $k_3 = \Phi^*/R_1^2$, $k_4 = \Phi^*/L^2$ — безразмерные коэффициенты.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} \zeta_1(\xi, 0) &= \zeta_2(\xi, 0) = \phi(\rho, \xi, 0) = 0, \\ \rho &\in [0, 1], \xi \in [0, 1], \end{aligned} \quad (5)$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \phi(\rho, 0, \tau) &= \phi(\rho, 1, \tau), \quad \phi(1, \xi, \tau) = \phi_1(\xi, \tau), \\ \tau &\in [0, \infty), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\phi_1 = \Phi_{R_1}/\Phi^*$ — безразмерное управляющее воздействие.

Описание объекта управления в спектральной форме

Получим спектральное представление объекта управления (4)–(6). Для этого представим функции $\zeta_1(\xi, \tau)$, $\zeta_2(\xi, \tau)$, $\phi(\rho, \xi, \tau)$, в виде рядов Фурье по пространственным координатам ξ, ρ .

По переменной ρ будем использовать разложение в ряд Фурье—Бесселя по системе функций Бесселя нулевого порядка $B_0(\alpha_{h_1} \rho)$, $h_1 = \overline{1, \infty}$, ортонормированных с весом ρ :

$$\int_0^1 \rho B_0(\alpha_{h_1} \rho) B_0(\alpha_{\bar{h}_1} \rho) d\rho = \begin{cases} 0, & h_1 \neq \bar{h}_1; \\ 1, & h_1 = \bar{h}_1; \end{cases}$$

$$h_1, \bar{h}_1 = \overline{1, \infty},$$

где $B_0(\alpha_{h_1} \rho) = M_{0h_1} J_0(\alpha_{h_1} \rho)$, $h_1 = \overline{1, \infty}$; α_{h_1} — корни функции $\partial B_0(\alpha \rho) / \partial \rho|_{\rho=1}$, M_{0h_1} — нормирующий множитель, который определяется выражением

$$M_{0h_1} = \left(\int_0^1 \rho J_0^2(\alpha_{h_1} \rho) d\rho \right)^{1/2}, \quad h_1 = \overline{1, \infty}.$$

По переменной ξ будем использовать разложение в ряд Фурье по системе ортонормированных функций $P(h_2, \xi) = \sqrt{2} \{ \sinh_2 \pi \xi \}$, $h_2 = \overline{1, \infty}$.

Функции $\zeta_1(\xi, \tau)$, $\zeta_2(\xi, \tau)$, $\phi(\rho, \xi, \tau)$ можно представить в виде рядов

$$\zeta_1(\xi, \tau) = \sum_{h_2=1}^{n_2} \Phi_{\zeta_1}(h_2, \tau) P(h_2, \xi);$$

$$\zeta_2(\xi, \tau) = \sum_{h_2=1}^{n_2} \Phi_{\zeta_2}(h_2, \tau) P(h_2, \xi);$$

$$\phi(\rho, \xi, \tau) = \sum_{h_1=1}^{n_1} \sum_{h_2=1}^{n_2} \Phi_{\phi}(h_1, h_2, \tau) B_0(\alpha_{h_1} \rho) P(h_2, \xi),$$

$$n_1, n_2 = \overline{1, \infty}, \quad (7)$$

где коэффициенты ряда зависят от времени и определяются выражениями

$$\Phi_{\zeta_1}(h_2, \tau) = \int_0^1 \zeta_1(\xi, \tau) P(h_2, \xi) d\xi;$$

$$\Phi_{\zeta_2}(h_2, \tau) = \int_0^1 \zeta_2(\xi, \tau) P(h_2, \xi) d\xi;$$

$$\Phi_{\phi}(h_1, h_2, \tau) = \int_0^1 \int_0^1 \rho \phi(\rho, \xi, \tau) B_0(\alpha_{h_1} \rho) P(h_2, \xi) d\xi d\rho,$$

$$h_1 = \overline{1, n_1}, \quad h_2 = \overline{1, n_2}, \quad n_1, n_2 = \overline{1, \infty}.$$

Векторы $\Phi_{\zeta_1}(\tau)$, $\Phi_{\zeta_2}(\tau) \in R^{n_2}$, $\Phi_{\phi}(\tau) \in R^{n_1 n_2}$, $n_1, n_2 = \overline{1, \infty}$, составленные из амплитуд пространственных мод, согласно работам [5, 7], будем на-

зывать спектральными характеристиками соответствующих функций:

$$\begin{aligned} \Phi_{\zeta_1}(\tau) &= \text{colon}\{\Phi_{\zeta_1}(1, \tau), \Phi_{\zeta_1}(2, \tau), \dots\}; \\ \Phi_{\zeta_2}(\tau) &= \text{colon}\{\Phi_{\zeta_2}(1, \tau), \Phi_{\zeta_2}(2, \tau), \dots\}; \\ \Phi_{\phi}(\tau) &= \text{colon}\{\Phi_{\phi}(1, 1, \tau), \Phi_{\phi}(1, 2, \tau), \dots, \\ &\quad \Phi_{\phi}(2, 1, \tau), \Phi_{\phi}(2, 2, \tau), \dots\}. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом изложенных в работах [5, 7] положений спектрального метода получим спектральное представление объекта управления (4)–(6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{\zeta_1}(\tau)}{\partial \tau} &= k_1 \Phi_{\zeta_2}(\tau); \\ \frac{\partial \Phi_{\zeta_2}(\tau)}{\partial \tau} &= k_2 P_{\phi}^1 [P_1^0 \otimes I_{n_2}] \Phi_{\phi} - \\ &\quad - k_2 P_{\phi}^1 [H_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}] \Phi_1^0(\tau); \\ 0 &= \{k_3([P_2^0 \otimes I_{n_2}] + [P_{1/\rho}^1 \otimes I_{n_2}][P_1^0 \otimes I_{n_2}]) + \\ &\quad + k_4[I_{n_1} \otimes P_2^{\xi}] \Phi_{\phi}(\tau) + k_3([H_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}] + \\ &\quad + [P_{1/\rho} \otimes I_{n_2}][B_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}]) \Phi_1^0(\tau), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\otimes$ — символ тензорного произведения матриц; I — единичная матрица соответствующей размерности.

В выражение (9) входят векторы спектральных характеристик (8), а также вектор спектральной характеристики функции граничных условий $\phi_1(\xi, \tau)$, представленной в виде ряда Фурье по системе ортонормированных функций $P(h_2, \xi) = \sqrt{2} \{ \sinh_2 \pi \xi \}$, $h_2 = \overline{1, \infty}$: $\Phi_1^0(\tau) = \text{colon}\{\Phi_1^0(1, \tau), \Phi_1^0(2, \tau), \dots\}$, $\Phi_1^0(\tau) \in R^{n_2}$, $n_2 = \overline{1, \infty}$.

Также в выражении (9) присутствует операционная матрица сомножителя $1/\rho$, элементы которой определяются по выражению

$$P_{1/\rho}(\bar{h}_1, h_1) = \int_0^1 B_0(\alpha_{\bar{h}_1} \rho) B_0(\alpha_{h_1} \rho) d\rho,$$

$$\bar{h}_1, h_1 = \overline{1, n_1}, \quad n_1 = \overline{1, \infty}, \quad (10)$$

операционные матрицы дифференцирования i -го порядка по переменным ρ и ξ , элементы которых определяются согласно работе [10] в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} P_i^{\rho}(\bar{h}_1, h_1) &= \int_0^1 \rho B_0(\alpha_{\bar{h}_1} \rho) \frac{\partial^i B_0(\alpha_{h_1} \rho)}{\partial \rho^i} d\rho; \\ P_i^{\xi}(\bar{h}_2, h_2) &= \int_0^1 P(\bar{h}_2, \xi) \frac{\partial^i P(h_2, \xi)}{\partial \xi^i} d\xi, \\ \bar{h}_1, h_1 &= \overline{1, n_1}, \quad \bar{h}_2, h_2 = \overline{1, n_2}, \quad n_1, n_2 = \overline{1, \infty}, \end{aligned} \quad (11)$$

и векторы $H_0(\rho)|_{\rho=1}$, $B_0(\rho)|_{\rho=1} \in R^{n_1}$, $n_1 = \overline{1, \infty}$:

$$H_0(\rho)|_{\rho=1} = \text{colon} \left\{ -\frac{\partial B_0(\alpha_1 \rho)}{\partial \rho} - \frac{B_0(\alpha_1 \rho)}{\rho} \Big|_{\rho=1}, \right. \\ \left. -\frac{\partial B_0(\alpha_2 \rho)}{\partial \rho} - \frac{B_0(\alpha_2 \rho)}{\rho} \Big|_{\rho=1}, \dots \right\},$$

$$B_0(\rho)|_{\rho=1} = \text{colon}\{B_0(\alpha_1 \rho)|_{\rho=1}, B_0(\alpha_2 \rho)|_{\rho=1}, \dots\}, \quad (12)$$

позволяющие аддитивно ввести в уравнения объекта спектральные характеристики граничных условий.

Введем обозначения вектора состояний $x(\tau)$, объединяющего векторы $\Phi_\phi \in R^{n_1 n_2}$, $\Phi_{\zeta_1} \in R^{n_2}$, $\Phi_{\zeta_2} \in R^{n_2}$, $(n_1, n_2 = \overline{1, \infty})$, и вектора управлений $u(\tau)$:

$$x(\tau) = \text{colon}\{\Phi_{\zeta_1}(\tau), \Phi_{\zeta_2}(\tau), \Phi_\phi(\tau)\}; \\ u(\tau) = \Phi_1^0(\tau). \quad (13)$$

Учтем в соотношениях (9) внешнее возмущение, полагая, что имеют место точечные возмущения потенциала ускорений, энергия которых ограничена:

$$\phi_w(\rho, \xi, \tau) = \phi_w^* \frac{\delta(\rho - \rho_w)}{\rho} \delta(\xi - \xi_w) e^{-\alpha \tau}, \\ \rho_w \in (0, 1), \xi_w \in (0, 1), \quad (14)$$

где ϕ_w^* — безразмерная амплитуда возмущения, которую будем считать достаточно малой; (ρ_w, ξ_w) — пространственные координаты точки, в которой возникает возмущение; α — безразмерный коэффициент.

Найдем спектральную характеристику функции возмущения $\phi_w(\rho, \xi, \tau)$:

$$S_{\rho\xi}[\phi_w(\rho, \xi, \tau)] = \\ = \int_0^1 \int_0^1 \rho \phi_w^* \frac{\delta(\rho - \rho_w)}{\rho} \delta(\xi - \xi_w) e^{-\alpha \tau} B_0(\alpha_{h_1} \rho) P(h_2, \xi) d\xi d\rho = \\ = \phi_w^* e^{-\alpha \tau} B_0(\alpha_{h_1} \rho_w) P(h_2, \xi_w), \quad h_1, h_2 = \overline{1, \infty}. \quad (15)$$

На основании выражения (15) возмущение $\phi_w(\rho, \xi, \tau)$ можно представить как произведение матрицы $G = \text{colon}\{0, 0, I_{n_1 n_2}\}$ и вектора $w(\tau)$, i -я компонента которого определяется выражением (15). Номер компоненты i определяется индексами $h_1, h_2 = \overline{1, \infty}$ и вычисляется по выражению $i = (h_1 - 1)n_2 + h_2$, $n_2 = \overline{1, \infty}$.

Учитывая обозначения (13) и внешнее возмущение, представим математическую модель системы в виде

$$E \frac{dx(\tau)}{d\tau} = Ax(\tau) + Bu(\tau) + Gw(\tau) \quad (16)$$

с блочными матрицами

$$E = \begin{bmatrix} I_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 0 & A_{\zeta_1} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\zeta_2} \\ 0 & 0 & A_\phi \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\zeta_2} \\ B_\phi \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{n_1 n_2} \end{bmatrix};$$

$$A_{\zeta_1} = k_1 I_{n_2}; A_{\zeta_2} = k_2 P_\phi^1 [P_1^\rho \otimes I_{n_2}];$$

$$A_\phi = k_3 ([P_2^\rho \otimes I_{n_2}] + [P_{1/\rho}^1 \otimes I_{n_2}] [P_1^\rho \otimes I_{n_2}]) + \\ + k_4 [I_{n_1} \otimes P_2^\xi];$$

$$B_{\zeta_2} = -k_2 P_\phi^1 [H_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}];$$

$$B_\phi = k_3 \{ [H_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}] + \\ + [P_{1/\rho} \otimes I_{n_2}] [B_0(\rho)|_{\rho=1} \otimes I_{n_2}] \}, \quad (17)$$

$$n_1, n_2 = \overline{1, \infty}.$$

Вычислим операционные матрицы, входящие в состав матричных блоков, представленных в соотношениях (17). Операционная матрица $P_{1/\rho}$ в соответствии с выражением (10) имеет вид

$$P_{1/\rho} = \begin{bmatrix} 4,0540 & 4,6548 & 0,0025 & 3,7579 & \dots \\ 4,6548 & 4,6257 & 5,1402 & 0,4551 & \dots \\ 0,0025 & 5,1402 & 4,9878 & 5,4612 & \dots \\ 3,7579 & 0,4551 & 5,4612 & 5,2534 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Операционные матрицы дифференцирования первого и второго порядка по пространственной переменной ρ , полученные по выражению (11), будут иметь следующий вид:

$$P_1^\rho = \begin{bmatrix} -1,0270 & -6,0126 & 0,1608 & -4,0144 & \dots \\ 1,3579 & -1,3128 & -8,2092 & -0,1498 & \dots \\ -0,1631 & 3,0688 & -1,4939 & -10,3424 & \dots \\ 0,2572 & -0,3058 & 4,8815 & -1,6267 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix};$$

$$P_2^\rho = \begin{bmatrix} -9,4641 & 19,0244 & 18,0754 & 24,1712 & \dots \\ -0,7468 & -38,8954 & 29,7310 & 28,5669 & \dots \\ 0,3572 & -1,7391 & -87,9653 & 40,3260 & \dots \\ -0,2242 & 0,9359 & -2,8617 & -156,7836 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Операционная матрица дифференцирования второго порядка по пространственной переменной ξ , вычисленная в соответствии с выражениями (11), будет следующей:

$$P_2^\xi = \\ = \text{diag}\{-9,8696; -39,4784; -88,8264; -157,9137; \dots\}.$$

Векторы $B_0(\rho)|_{\rho=1}$, $H_0(\rho)|_{\rho=1}$, необходимые для учета граничных условий, будут иметь вид

$$B_0(\rho)|_{\rho=1} = \\ = \text{colon}\{-1,4142; 1,4142; -1,4142; 1,4142; \dots\},$$

$$H_0(\rho)|_{\rho=1} = \\ = \text{colon}\{1,4142; -1,4142; 1,4142; -1,4142; \dots\}. \quad (19)$$

Дополним уравнение (16), описывающее динамику объекта управления, уравнениями для измеряемых и регулируемых переменных.

Будем считать измеряемыми переменные ζ_1 , соответствующие отклонению возмущенной свободной поверхности жидкости, в семи точках, равноотстоящих друг от друга: $\xi_1 = 0,0714$, $\xi_2 = 0,2143$, $\xi_3 = 0,3571$, $\xi_4 = 0,5000$, $\xi_5 = 0,6429$, $\xi_6 = 0,7857$, $\xi_7 = 0,9286$. Следовательно, вектор измеряемых переменных можно представить выражением

$$y(\tau) = Cx(\tau);$$

$$y(\tau) = \text{colon}\{\zeta_1(\xi_1, \tau), \zeta_1(\xi_2, \tau), \dots, \zeta_1(\xi_7, \tau)\} \quad (20)$$

с блочной матрицей $C = [C_{\zeta_1} \ 0 \ 0]$. Матричный блок C_{ζ_1} составляется из функций разложения в ряд $P(h_2, \xi)$, вычисленных в точках измерения [5]. Для получения матрицы C_{ζ_1} представим функцию $\zeta_1(\xi_i, \tau)$, $i = \overline{1, 7}$, в виде ряда из выражения (7) при $\xi = \xi_i$, $i = \overline{1, 7}$:

$$\begin{aligned} \zeta_1(\xi_1, \tau) &= P(1, \xi_1)\Phi_{\zeta_1}(1, \tau) + P(2, \xi_1)\Phi_{\zeta_1}(2, \tau) + \dots; \\ \zeta_1(\xi_2, \tau) &= P(1, \xi_2)\Phi_{\zeta_1}(1, \tau) + P(2, \xi_2)\Phi_{\zeta_1}(2, \tau) + \dots; \\ &\dots \\ \zeta_1(\xi_7, \tau) &= P(1, \xi_7)\Phi_{\zeta_1}(1, \tau) + P(2, \xi_7)\Phi_{\zeta_1}(2, \tau) + \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Если записать (21) в векторно-матричном виде, то получим выражение

$$\begin{bmatrix} \zeta_1(\xi_1, \tau) \\ \zeta_1(\xi_2, \tau) \\ \dots \\ \zeta_1(\xi_7, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(1, \xi_1) & P(2, \xi_1) & \dots \\ P(1, \xi_2) & P(2, \xi_2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ P(1, \xi_7) & P(2, \xi_7) & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_{\zeta_1}(1, \tau) \\ \Phi_{\zeta_1}(2, \tau) \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (22)$$

первым сомножителем правой части которого является матричный блок C_{ζ_1} .

Для выбранных точек $\zeta_1(\xi_i, \tau)$, $i = \overline{1, 7}$,

$$C_{\zeta_1} = \begin{bmatrix} 0,3147 & 0,6136 & 0,8817 & 1,1057 & \dots \\ 0,8817 & 1,3788 & 1,2742 & 0,6136 & \dots \\ 1,2742 & 1,1057 & -0,3147 & -1,3788 & \dots \\ 1,4142 & 0 & -1,4142 & 0 & \dots \\ 1,2742 & -1,1057 & -0,3147 & 1,3788 & \dots \\ 0,8817 & -1,3788 & 1,2742 & -0,6136 & \dots \\ 0,3147 & -0,6136 & 0,8817 & -1,1057 & \dots \end{bmatrix}.$$

Относительно вектора регулируемых переменных будем полагать, что он совпадает с вектором измеряемых переменных: $z(\tau) = y(\tau)$.

Необходимые условия существования и единственности решения бесконечной дескрипторной системы. Необходимые условия сходимости решения и возможности редукции

На основании работ [8, 9] сформулируем достаточные условия того, чтобы решение бесконечной дескрипторной системы (16) при достаточно боль-

шом порядке усечения n_1, n_2 было близко на заданном временном интервале к решению укороченной дескрипторной системы уравнений.

Система (16) может быть представлена в виде

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1(\tau)/d\tau \\ dx_2(\tau)/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(\tau) + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} w(\tau), \quad (23)$$

где матричные блоки будут следующими:

$$\begin{aligned} I &= I_{2n_2}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & A_{\zeta_1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ A_{\zeta_2} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [0 \ 0], \\ A_{22} &= A_\phi, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{\zeta_2} \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_\phi, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ G_2 &= I_{n_1 n_2}, \quad n_1, n_2 = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (24)$$

В выражении (23) можно выделить дифференциальную и алгебраическую подсистемы:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} &= A_{11}x_1(\tau) + A_{12}x_2(\tau) + B_1u(\tau) + G_1w(\tau); \\ 0 &= A_{21}x_1(\tau) + A_{22}x_2(\tau) + B_2u(\tau) + G_2w(\tau). \end{aligned} \quad (25)$$

Для дескрипторной системы (25) необходимое условие существования и единственности решения заключается в выполнении условий существования и единственности решения для каждой из подсистем — дифференциальной и алгебраической [10].

Для дифференциальной подсистемы в работах [5, 8, 9] подробно изложены условия существования, единственности, сходимости и возможности ее редукции — получения решения по ограниченному числу дифференциальных уравнений подсистемы, когда с увеличением числа уравнений решение конечной подсистемы стремится к решению бесконечной подсистемы. Как показывают исследования, в рассматриваемом случае эти условия выполняются.

Для алгебраической подсистемы необходимо выполнение условий ограниченности матричных норм Фробениуса [10]:

$$\|A_{21}\|^2 < \infty, \|A_{22}\|^2 < \infty, \|B_2\|^2 < \infty. \quad (26)$$

Необходимым условием однозначности, сходимости решения и возможности редукции алгебраической подсистемы является условие (26). Проверим справедливость (26) для объекта управления (16). Поскольку $A_{21} = 0$, условие ограниченности нормы для этой матрицы выполняется. Проверка условия $\|A_{22}\|^2 < \infty$ основывается на применении признаков сходимости функциональных и числовых рядов.

Для операционных матриц дифференцирования P_i^p ($i = 1, 2$) нетрудно показать, что в силу их определения по выражениям (11) сумма элементов каждого столбца операционной матрицы P_i^p ($i = 1, 2$) является рядом Фурье—Бесселя для функции

$f(\rho) = \partial^i B_0(\alpha_{h_1} \rho) / \partial \rho^i$, $i = 1, 2$, $h_1 = \overline{1, \infty}$. В соответствии с теоремой, приведенной в [11], для сходимости такого ряда достаточно потребовать, чтобы функция $F(\rho) = \sqrt{\rho} f(\rho)$ являлась функцией с интегрируемым квадратом. Поскольку функции $F(\rho) = \sqrt{\rho} \partial^i B_0(\alpha_{h_1} \rho) / \partial \rho^i$, $i = 1, 2$, $h_1 = \overline{1, \infty}$, являются функциями с интегрируемым квадратом, ряды по столбцам сходятся. Следовательно, сходятся и сами матричные нормы.

Суммы по столбцам операционных матриц P_i^ξ ($i = 1, 2$) также сходятся в силу того, что функции $\partial^i P(h_1, \xi) / \partial \xi^2$, $h_1 = \overline{1, \infty}$, являются непрерывными, ограниченными функциями с интегрируемым квадратом.

Проверка сходимости матричной нормы $\|P_{1/\rho}\|^2$ может быть осуществлена по числовой реализации этой матрицы (18) с применением признаков сходимости двойных рядов [12].

Из сходимости норм операционных матриц следует, что $\|A_{22}\|^2 < \infty$.

Проверим условие $\|B_2\|^2 < \infty$. Нетрудно показать, что матрица $B_2 = B_\phi$ может быть представлена в виде

$$B_2 = k_3 [H_0(\rho)|_{\rho=1} + P_{1/\rho} B_0(\rho)|_{\rho=1}] \otimes I_{n_2}. \quad (27)$$

Введем обозначение $B_2^p = [H_0(\rho)|_{\rho=1} + P_{1/\rho} B_0(\rho)|_{\rho=1}]$ и исследуем сходимость нормы $\|B_2^p\|^2$.

Векторы (19) могут быть представлены выражениями

$$H_0(\rho)|_{\rho=1} = -k_4 \text{colon}\{-1, 1, -1, 1, \dots\}, \\ B_0(\rho)|_{\rho=1} = k_4 \text{colon}\{-1, 1, -1, 1, \dots\}, k_4 = 1,4242. \quad (28)$$

Из выражения (18) следует, что матрица $P_{1/\rho}$ такова, что для каждой строки выполняется условие сходимости суммы элементов, так как, начиная с некоторого индекса столбца $m > m_0$, выполняется неравенство

$$p_{nm} + 1/p_{nm} < 1, n = \overline{1, \infty}. \quad (29)$$

Для матрицы B_2^p в этом случае можно записать

$$B_2^p = -k_4 \begin{bmatrix} p_{11}-1 & p_{12} & p_{13} & \dots \\ p_{21} & p_{22}-1 & p_{23} & \dots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}-1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \dots \end{bmatrix} = \\ = -k_4 \begin{bmatrix} -(p_{11}-1) + p_{12} - p_{13} \\ -p_{21} + (p_{22}-1) - p_{23} \\ -p_{31} + p_{32} - (p_{33}-1) \\ \dots \end{bmatrix}, \quad (30)$$

учитывая при этом, что справедливо $(p_{m_{0i}m_{0i}} - 1) > 0$, $m_{0i} = \overline{1, \infty}$.

Каждый из элементов матрицы B_2^p можно рассматривать как знакопередающийся ряд. В этом случае применение признака Абеля—Дирихле [12] позволяет сделать вывод о невозрастании начиная

с некоторого m_0 последовательности $\{p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm_0} - 1, p_{nm_0+1}, \dots\}$, $n = \overline{1, \infty}$. Последовательность частичных сумм ряда $\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m$ ограничена.

Таким образом, каждый из элементов B_2^p ограничен, откуда следует $\|B_2\|^2 < \infty$.

Таким образом, для математической модели объекта управления (16) с матрицами (17) выполняются необходимые условия существования, единственности, сходимости решения и возможности редукции системы, т. е. получения решения по ограниченному числу уравнений, записанных относительно первых нескольких амплитуд пространственных мод функций.

Синтез системы стабилизации потенциала ускорений плазмы в магнитном поле установки токамак

Выполним синтез регулятора для объекта управления (1)—(3), представленного в безразмерном виде (4)—(6) с параметрами $X_1^* = 1$ м, $X_2^* = 10$ м/с, $\Phi^* = 1$ м/с², $t^* = 2$ с, $R_1 = 1$ м, $L = 20$ м. Спектральное представление такого объекта имеет вид (16), (17). Выделим дифференциальную и алгебраическую подсистемы, основываясь на выражениях (23), (24). Принимая во внимание усечение бесконечных рядов при вычислениях, учтем $n_1 = n_2 = 7$ и получим следующие размерности векторов математической модели (23), (24): $x_1(\tau) \in R^{14}$, $x_2(\tau) \in R^{49}$, $u(\tau) \in R^7$.

Матрицы спектрального представления объекта (23), (24) будут иметь вид

$$A_{\zeta_1} = 0,5I_7;$$

$$A_{\zeta_2} = [0,8547 \ 0,0522 \ -0,0507 \ 1,0239 \\ -1,8408 \ 3,1299 \ -7,1697] \otimes I_7;$$

$$A_\phi = \begin{bmatrix} -5,9388 & 0 & 0,0012 & 0 & 0,0020 & 0 & 0,0028 & \dots \\ 0 & -6,0117 & 0 & 0,0032 & 0 & 0,0048 & 0 & \dots \\ 0,0012 & 0 & -6,1331 & 0 & 0,0059 & 0 & 0,0083 & \dots \\ 0 & 0,0032 & 0 & -6,3029 & 0 & 0,0097 & 0 & \dots \\ 0,0020 & 0 & 0,0059 & 0 & -6,5215 & 0 & 0,0139 & \dots \\ 0 & 0,0048 & 0 & 0,0097 & 0 & -6,7883 & 0 & \dots \\ 0,0028 & 0 & 0,0083 & 0 & 0,0139 & 0 & -7,1041 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Матричные блоки B_{ζ_2} , B_ϕ имеют размерности 7×7 и 49×7 и определяются следующим образом: $B_{\zeta_2} = 2,8000 \cdot I_7$;

$$B_\phi = \text{colon}\{14,0344; -19,4404; 14,2799; \\ -19,6646; 13,9130; -20,1850; 12,8049\} \otimes I_7.$$

Будем полагать, что имеют место точечные возмущения потенциала ускорения, энергия которых ограничена:

$$\phi_w(\rho, \xi, \tau) = \phi_w^* \frac{\partial(\rho - \rho_w)}{\rho} \delta(\xi - \xi_w) e^{-\alpha\tau}; \\ \rho \in [0, 1], \xi \in [0, 1], \quad (31)$$

$\phi_w^* = 0,05$, что соответствует 5 % от номинального значения переменной $\Phi(r, z, t)$; $\rho_w = 0,6$, $\xi_w = 0,8$, $\alpha = 1$. В этом случае вектор $w(\tau)$ будет иметь вид

$$w(\tau) = \text{colon}\{0,0082; -0,0132; 0,0132; -0,0082; \dots\}e^{-\tau}.$$

Синтезируем регулятор пониженной по сравнению с объектом размерности, не содержащий алгебраических уравнений. Это возможно за счет выделения быстрой и медленной подсистем системы, замкнутой динамическим регулятором с наблюдателем пониженной размерности. В основе решения задачи лежит вариационный подход. В качестве критерия оптимизации используется H_2 -критерий. Алгоритм синтеза подробно рассмотрен в работе [13]. Приведем результаты синтеза для рассматриваемого объекта управления.

Представление регулятора в пространстве состояний имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(\tau) &= A_p x_p(\tau) + B_p u(\tau); \\ u(\tau) &= C_p x_p(\tau) + D_p u(\tau),\end{aligned}\quad (32)$$

где A_p , B_p , C_p , D_p — числовые матрицы.

В системе MATLAB был выполнен анализ замкнутой системы при внешнем воздействии (31). Результаты анализа представлены на рис. 2—3 в относительных единицах и показывают, что перерегулирование и колебательность в системе отсутствуют.

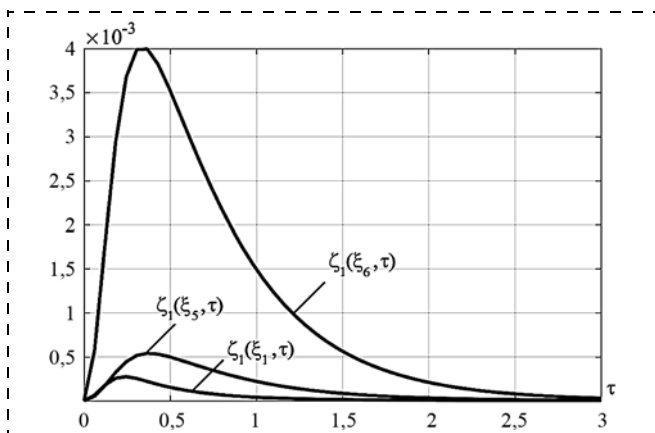


Рис. 2. Регулируемая переменная — относительное отклонение возмущенной поверхности в точках $\rho = 1$, $\xi = \xi_i$ ($i = 1, 5, 6$)

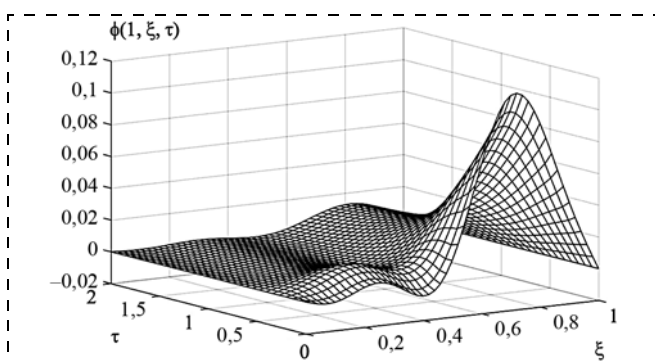


Рис. 3. Управляющее воздействие — изменение относительного потенциала ускорений, прикладываемое на внешнем радиусе объекта

Расчеты, проведенные по ограниченному числу уравнений, показали, что с увеличением числа дифференциальных и алгебраических уравнений и, соответственно, пространственных мод разложения функций управления и состояния процесса полученный результат стремится к определенному пределу.

Результаты свидетельствуют о возможности применения спектрального метода для решения задач анализа и синтеза системы стабилизации плазмы в установке токамак.

Заключение

В результате проведенных исследований с использованием спектрального метода получены алгоритмы перехода от пространственно-многомерной модели распределенного объекта управления к дескрипторной модели, состоящей из бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши и бесконечной системы алгебраических уравнений. Предложенная форма описания математической модели дала возможность решить задачу анализа и провести синтез регулятора для системы стабилизации плазмы в магнитном поле.

Приведены условия существования, единственности, сходимости полученных решений.

Список литературы

1. Lamour R., Marz R., Tischendorf C. PDAEs and further mixed systems as abstract differential algebraic systems. Technical Report 01—11, Berlin, Inst. of Math., Humboldt Univ. of Berlin, 2001, 22 p.
2. Campbell S. L., Stephen L., Marszalek W. The index of an infinite dimensional implicit system // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 1999. Vol. 5, N. 1. P. 18—42.
3. Tischendorf C. Coupled systems of differential algebraic and partial differential equations in circuit and device simulation. Berlin: Humboldt University of Berlin, 2003. 157 p.
4. Reis T. An infinite dimensional descriptor system model for electrical circuits with transmission lines // Proc. of the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Leuven, Belgium, 2004.
5. Коваль В. А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. Саратов: Изд-во СГТУ, 1997. 191 с.
6. Сиразетдинов Т. К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. 479 с.
7. Коваль В. А., Торгашова О. Ю. Решение задач анализа и синтеза для пространственно-двумерного распределенного объекта, представленного бесконечной системой дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 54—71.
8. Валеев Г. К., Жаутыков О. А. Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1974. 416 с.
9. Персидский К. П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений // Изв. АН Каз. ССР, серия матем. и механ. 1948. Вып. 2. С. 2—35.
10. Торгашова О. Ю. Анализ и синтез пространственно-многомерных распределенных систем с учетом дескрипторной структуры представления на основе спектрального метода: дис. ... докт. техн. наук. Саратов: Изд-во Саратов. гос. техн. ун-та, 2016. 386 с.
11. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 392 с.
12. Власова Е. А. Ряды. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 611 с.
13. Торгашова О. Ю., Шворнева О. Е. Синтез регулятора пониженной размерности алгебро-дифференциальной системы по критерию H_2 -оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2014. № 2. С. 156—176.

Analysis and Synthesis of Spatially Multidimensional Distributed Systems with a Descriptor Structure of the Mathematical Model

V. A. Koval', koval.va@yandex.ru, M. F. Stepanov, mfstepanov@mail.ru,
O. Yu. Torgashova, olgatorg@gmail.com, A. A. Samarskij, sanches_93.93@mail.ru,
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russian Federation

Corresponding author: Torgashova Olga Yu., Ph. D., Associate Professor,
Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russian Federation,
e-mail: olgatorg@gmail.com

Accepted on September 29, 2017

The problem of plasma stabilization in a magnetic field is considered. The plant is described by the hydrodynamics model of a weightless potential ideally conducting fluid in a cylindrical coordinate system. The deviation of the perturbed surface, the velocity of deflection of the perturbed surface, the acceleration potential are the functions of state. The acceleration potential on the outer generatrix of cylinder surface is used as the control. The state and control functions depending on the radial and axial coordinates are presented as series with respect to orthonormal systems of functions. Via the spectral method of the distributed systems analysis and synthesis the theoretical positions for the transition from the initial mathematical model described by PDE system to an infinite descriptor system are done. The components of state and control vectors of the descriptor system are the time-varying amplitudes of the spatial harmonics of the series. Expressions for the calculation of the operational differentiation matrices, the operational matrices of factors depending on spatial coordinates depended vectors, the matrices of boundary conditions are given. The matrices of the descriptor plant representation are obtained. The questions of existence, uniqueness, and convergence of the solution of the received descriptor system are investigated. For the plant represented by the descriptor system, a control law described by the differential system is constructed. The solution of the problem is based on the variational approach. The H_2 optimization criterion is used. The analysis and synthesis of the closed-loop system via Matlab is done. The results of the analysis indicate that there is no overshoot and oscillation in the system. Calculations based on a limited number of equations show that with the increase in the number of differential and algebraic equations and, respectively, the spatial modes of the expansion of the control functions and the state of the process, the obtained result tends to a certain limit.

Keywords: distributed descriptor system, spectral method, analysis, synthesis, convergence

For citation:

Koval' V. A., Stepanov M. F., Torgashova O. Yu., Samarskij A. A. Analysis and Synthesis of Spatially Multidimensional Distributed Systems with a Descriptor Structure of the Mathematical Model, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 3—10.

DOI:10.17587/mau.19.3-10

References

1. Lamour R., Marz R., Tischendorf C. PDAEs and further mixed systems as abstract differential algebraic systems. Technical Report 01—11, Berlin, Inst. of Math., Humboldt Univ. of Berlin, 2001, 22 p.
2. Campbell S. L., Stephen L., Marszalek W. The index of an infinite dimensional implicit system, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 1999, vol. 5, no. 1, pp. 18—42.
3. Tischendorf C. Coupled systems of differential algebraic and partial differential equations in circuit and device simulation. Habilitation thesis, Berlin: Humboldt University of Berlin, 2003, 157 p.
4. Reis T. An infinite dimensional descriptor system model for electrical circuits with transmission lines, *Proceedings of the 16th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, Leuven, Belgium, 2004.
5. Koval' V. A. *Spektral'nyy metod analiza i sinteza raspredelennykh upravlyaemykh sistem* (Spectral method of distributed control systems analysis and synthesis), Saratov, Publishing house of SGTU, 1997, 191 p. (in Russian).
6. Sirazetdinov T. K. *Optimizatsiya sistem s raspredelennymi parametrami* (Optimization of systems with distributed parameters), Moscow, Nauka, 1977, 479 p. (in Russian).
7. Koval' V. A., Torgashova O. Yu. Solving analysis and synthesis problems for a spatially two-dimensional distributed object represented with an infinite system of differential equations, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 2, pp. 219—233.
8. Valeev G. K., Zhautykov O. A. *Beskonechnye sistemy differentsial'nykh uravnenij* (Infinite differential equations systems), Alma-Ata, Nauka Kazahskoj SSR, 1974, 416 p. (in Russian).
9. Persidskij K. P. *Ob ustojchivosti reshenij schetnoj sistemy differentsial'nykh uravnenij* (On the stability of solutions of a countable differential equations system), *Izvestija AN Kazahskoj SSR, Seriya Matematika i Mehanika*, 1948, vol. 2, pp. 2—35 (in Russian).
10. Torgashova O. Yu. *Analiz i sintez prostranstvenno mnogomernykh raspredelennykh sistem s uchetom deskriptornoj struktury predstavlenija na osnove spektral'nogo metoda* (Analysis and synthesis of the spatially multidimensional distributed systems on the basis of the spectral method taking into account the descriptive structure of the system representation), Doctoral thesis, Saratov, Izdatel'stvo saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2016, 386 p. (in Russian).
11. Tolstov G. P. *Rjady Fur'e* (Fourier series), Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1960, 392 p. (in Russian).
12. Vlasova E. A. *Rjady* (Series), Moscow, Publishing house of MGTU imeni Bauman, 2006, 611 p. (in Russian).
13. Torgashova O. Yu., Shvorneva O. E. Designing reduced-dimension controller of differential-algebraic system by criterion of H_2 -optimization, *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 2, pp. 302—319.

Complete Pole Placement Method for Linear MIMO Systems

V. N. Ryabchenko, Professor, N. E. Zubov, Professor, Nikolay.Zubov@rsce.ru,
I. V. Sorokin, Professor, A. V. Proletarskii, Professor,
Moscow State Technical University after N. E. Bauman, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: Zubov Nikolai E., D. Sc., Professor,
Moscow State Technical University after N. E. Bauman, Moscow, 105005, Russian Federation
e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Accepted on 11.10.2017

A complete pole placement method for linear MIMO systems with the use of state feedback is presented. The method is based on specific decomposition of representation in the state space of the original MIMO system. The converted representation of the MIMO system contains explicit elements, changing of which with the help of the feedback, enables a specified complete placement of the closed-loop system's poles. The method does not require special solving of matrix equations (like Sylvester equations), which are expressed in the same form for both continuous and discrete cases of the MIMO system description, and does not place restrictions on the algebraic and geometric multiplicity of the specified poles.

Keywords: decomposition, modal synthesis, linear MIMO-system

For citation:

Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Sorokin I. V., Proletarskii A. V. Complete Pole Placement Method for Linear MIMO Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 11–18.

DOI: 10.17587/mau.19.11-18

1. Introduction

The problem of pole placement or eigenvalue assignment for linear dynamic systems with continuous and discrete time has been considered in various formulations in numerous papers (see, for instance, [1]–[13]), yet it has not lost its relevance, especially for Multiple-Input Multiple-Output dynamic systems (MIMO systems).

Let us consider a linear MIMO system of the following form:

$$\mathcal{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

where $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ is the state vector; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ is the input vector; $\mathbb{R}$ is a set of real numbers; $n > r$; and $\mathcal{D}$ is a symbol denoting either the differentiation operator, that is, $\mathcal{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$, or the shift operator in time $\mathcal{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$.

It is assumed that the matrices $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ and $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ are full rank matrices, and the matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ has a set of eigenvalues

$$\text{eig}(\mathbf{A}) = \{\lambda_i \in \mathbb{C}: \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0\},$$

where $\mathbf{I}_n$ is the identity matrix of size $n \times n$; $\mathbb{C}$ is the set of complex numbers (complex plane) and necessarily includes $\lambda_i \in \mathbb{C}$ such that $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ for $\mathcal{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ and $|\lambda_i| > 1$ for $\mathcal{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$. Here, $|\lambda_i|$ is the absolute value of λ_i .

Let us introduce the concept of $\mathbb{C}^{\text{stab}}$, which, depending on the type of MIMO system under study (continuous or discrete), denotes either the left half $\mathbb{C}^-$ of the plane, that is, $\mathbb{C}^{\text{stab}} \doteq \mathbb{C}^-$, or the interior of the unit circle centered at the origin of $\mathbb{C}$, that is, $\mathbb{C}^{\text{stab}} \doteq \mathbb{C}_{|\lambda| < 1}$.

It is assumed that for the MIMO system (1.1), there exists feedback control of the form

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

where $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ is the state controller matrix.

The control of system (1) using laws (2) is the classical problem in which it is necessary to find a matrix $\mathbf{F}$ such that certain prescribed requirements for the control process are fulfilled. These requirements can be divided into three groups [7]:

a) requirements for the pole placement of the closed-loop system (eigenvalues of the matrix $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}$) at the prescribed points of $\mathbb{C}^{\text{stab}}$ or in the prescribed domain $\mathbb{C}^{\text{stab}}$;

b) requirements for placement of poles and zeros (certain zeros of the transfer matrix of the MIMO system [13], [14]) of the closed-loop system at the prescribed points of $\mathbb{C}^{\text{stab}}$ or in the prescribed domains of $\mathbb{C}^{\text{stab}}$;

c) requirements for the transient processes in the closed-loop system in the sense of the minimum of a certain functional.

Requirement (a) applies to all known formulations of the stabilization problem. In this case, additional conditions of complete controllability and complete observability of the system are typically imposed.

Requirement (a) is especially pronounced in formulations of modal control [1], [2], [4]–[8], [12]–[17].

It is well known that the characteristic polynomial

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}), \quad (3)$$

where $\lambda = s$ for the case of $\mathcal{D}\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ and $\lambda = z$ for the case of $\mathcal{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$, determines the pole location of the closed-loop system on $\mathbb{C}$, which determines the stability of MIMO system (1). Imposing the requirements for the desirable (in the sense of condition (a)) location of poles, the stability and (indirectly) the quality of transient processes in the closed-loop system can be ensured.

The requirements for the pole location can be specified by factorizing polynomial (3); for example,

$$\det(\lambda I_n - A - BF) = (\lambda - \tilde{\lambda}_1)(\lambda - \tilde{\lambda}_2) \dots (\lambda - \tilde{\lambda}_n), \quad (4)$$

where $\tilde{\lambda}_i$ are the prescribed values of the polynomial roots (eigenvalues of the matrix $A + BF$) or of the decomposition of the matrix

$$A + BF = W\Lambda W^{-1}, \quad (5)$$

where Λ is a block-diagonal matrix and W is the transformation matrix.

In the matrix Λ , for each i -th real pole λ_i corresponding to the given value of the root of the characteristic polynomial (4), there exists a block with a size of 1×1 , and for each pair of complex conjugate roots, there exists a block with a size of 2×2 of the form

$$\begin{pmatrix} \text{Re}(\lambda_i) & \text{Im}(\lambda_i) \\ -\text{Im}(\lambda_i) & \text{Re}(\lambda_i) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

If multiple roots are given, this is reflected in the structure of the matrix Λ , similarly to the Jordan form of the matrix [7, 8].

Another method of fulfilling requirement (a) is to use linear matrix inequality (LMI) domains [1], [11]. Let D be a given convex domain $\mathbb{C}^{\text{stab}}$ in the sense of requirement (a); then, there exist LMIs describing the boundaries of this domain.

For MIMO systems with $n \gg 1$, the available methods of pole placement are often inapplicable in practice because of their disadvantages, such as ill-conditioned matrices (for example, controllability matrices), possible unsolvability of the problem in the case of complete controllability (for example, the constraint of the form of the difference of the algebraic and geometric multiplicities of the assigned poles), fast growth of dimensionality of the equations to be solved, and so on.

This paper presents a complete pole placement method in the MIMO system with state feedback; that is, in this method, requirement (a) for the MIMO system (1) is ensured using law (2) in the sense of placing the eigenvalues of the matrix $A + BF$ in the domain $\mathbb{C}^{\text{stab}}$. The method is based on a special similarity transformation of the original system. The elements of the matrix A and (or) their combinations are determined explicitly, and the change of these elements using feedback makes it possible to ensure the stability of the closed-loop system. As will be shown later, this method does not require the solution of any special matrix equations (like Sylvester's equation), has the same form for the continuous and discrete system models, has no limitations with respect to the algebraic and geometric multiplicities of the poles, and can be easily used for the synthesis of regulators in systems with a large dimension of the state space.

2. Decomposition of MIMO systems

Let $B^\perp$ be a rectangular matrix, called the divisor of zero, that satisfies the conditions [8], [18]

$$B^\perp B = \mathbf{0}_{r \times r}, \quad (6)$$

$$B^\perp B^{\perp+} = I_{n-r}, \quad (7)$$

where B^+ and $B^{\perp+}$ are pseudoinverse Moore-Penrose matrices; $\mathbf{0}_{r \times r}$ is the zero matrix of size $r \times r$. We take a non-singular matrix [18]

$$T = \begin{pmatrix} B^\perp \\ B^+ \end{pmatrix}, \quad (8)$$

which has the inverse matrix:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} B^\perp \\ B^+ \end{pmatrix}^{-1} = (B^{\perp+} \vdots B). \quad (9)$$

Performing multiplication of the initial and inverse matrices, we obtain the identity

$$(B^{\perp+} \vdots B) \begin{pmatrix} B^\perp \\ B^+ \end{pmatrix} = B^{\perp+} B^\perp + BB^+ = I_n, \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} B^\perp \\ B^+ \end{pmatrix} (B^{\perp+} \vdots B) = \begin{pmatrix} I_{n-r} & \mathbf{0}_{r \times r} \\ \mathbf{0}_{r \times (n-r)} & I_r \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Note that the operations " $\perp$ " and " $+$ " commute for the matrices of full rank; that is, in this case

$$B^{\perp+} = B^{+\perp}. \quad (12)$$

If the selected matrix $B^\perp$ is the orthogonal matrix, then the condition (2.2) will transform to the following:

$$B^\perp B^{\perp\top} = I_{n-r}. \quad (13)$$

Consider the multilevel decomposition of the MIMO system (1.1) with the matrices (A, B) , where $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Zero (initial) level

$$A_0 = A, B_0 = B. \quad (14)$$

First level

$$A_1 = B^\perp A B^{\perp+}, B_1 = B^\perp A B \quad (15)$$

k-th (intermediate) level

$$A_k = B_{k-1}^\perp A_{k-1} B_{k-1}^{\perp+}, B_k = B_{k-1}^\perp A_{k-1} B_{k-1} \quad (16)$$

L-th (final) level, $L = \text{ceil}(n/r) - 1$,

$$A_L = B_{L-1}^\perp A_{L-1} B_{L-1}^{\perp+}, B_L = B_{L-1}^\perp A_{L-1} B_{L-1}. \quad (17)$$

Here $\text{ceil}(\cdot)$ is the operation of rounding the number $(\cdot)$ upwards; for example, $\text{ceil}(0.1) = 1$, $\text{ceil}(1.6) = 2$, $\text{ceil}(2.01) = 3$, and so on.

Theorem 1. If the MIMO system (1.1) with a pair of matrices (A, B) is completely controllable, the all pairs of matrices (A_i, B_i) (2.10)–(2.12) are also completely controllable.

Proof of Theorem 1. It is known that, for complete control of MIMO systems, it is necessary and sufficient that [1, 2, 7, 8, 11, 14]

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}: \text{rank}(A - \lambda I_n \parallel B) = n. \quad (18)$$

The condition $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ can be replaced by the condition $\forall \lambda \in \text{eig}(A)$.

Using matrix (2.3), we transform the pencil of matrices as:

$$T(A - \lambda I_n \parallel B) = \begin{pmatrix} B^\perp \\ \dots \\ B^+ \end{pmatrix} (A - \lambda I_n \parallel B). \quad (19)$$

Expanding the right-hand side of (2.14), we obtain

$$\begin{pmatrix} B^\perp \\ \dots \\ B^+ \end{pmatrix} (A - \lambda I_n \parallel B) = \begin{pmatrix} B^\perp(A - \lambda I_n) \parallel \mathbf{0}_{(n-r) \times r} \\ \dots \\ B^+(A - \lambda I_n) \parallel I_r \end{pmatrix},$$

and furthermore, due to the nonsingularity of the matrix T (2.3), we have

$$\text{rank}(A - \lambda I_n \parallel B) = \text{rank} \begin{pmatrix} B^\perp(A - \lambda I_n) \parallel \mathbf{0}_{(n-r) \times r} \\ \dots \\ B^+(A - \lambda I_n) \parallel I_r \end{pmatrix}. \quad (20)$$

It follows from the structure of (2.15) that the submatrix

$$(B^+(A - \lambda I_n) \parallel I_r)$$

has the rank r for all λ . Therefore, for the condition (2.13) to be satisfied, it is necessary and sufficient that the rank of the submatrix $B^\perp(A - \lambda I_n)$ satisfy the condition

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}: \text{rank} B^\perp(A - \lambda I_n) = n - r.$$

We carry out the nonsingular transformation of the submatrix $B^\perp(A - \lambda I_n)$ as

$$B^\perp(A - \lambda I_n)T^{-1} = B^\perp(A - \lambda I_n)(B^{\perp\top} \parallel B). \quad (21)$$

Expanding the right side of (2.16),

$$\begin{aligned} & B^\perp(A - \lambda I_n)(B^{\perp\top} \parallel B) = \\ & = (B^\perp AB^{\perp\top} - \lambda I_{n-r} \parallel B^\perp AB) = (A_1 - \lambda I_{n-r} \parallel B_1). \end{aligned}$$

Then, similarly to the previous case (2.15), we have

$$\text{rank} B^\perp(A - \lambda I_n) = \text{rank}(A_1 - \lambda I_{n-r} \parallel B_1). \quad (22)$$

Comparing the right-hand sides of (2.13) and (2.17), we arrive at the following intermediate result: the MIMO system (1.1) is completely controllable if and only if the pair of matrices (A_1, B_1) is completely controllable.

Then, transforming the pair of matrices (A_1, B_1) similarly to how this was done above, we obtain by induction the assertion of Theorem 1. The proof of Theorem 1 is complete.

3. Synthesis of the MIMO system regulator and parameterization

Without loss of generality, we assume that all the matrices B_i in (2.9)–(2.12) are the matrices of full rank [8], [16]. Then the following statement is true:

Theorem 2. Let the MIMO system (1.1) be completely controllable, and let matrix $F \in \mathbb{R}^{r \times m}$ satisfy the conditions:

$$F = F_0 = \Phi_0 B_0^- - B_0^- A, B_0^- = B_0^+ - F_1 B_0^\perp, \quad (23)$$

$$F_1 = \Phi_1 B_1^- - B_1^- A_1, B_1^- = B_1^+ - F_2 B_1^\perp, \dots \quad (24)$$

$$F_k = \Phi_k B_k^- - B_k^- A_k, B_k^- = B_k^+ - F_{k+1} B_k^\perp, \dots \quad (25)$$

$$F_L = \Phi_L B_L^+ - B_L^+ A_L. \quad (26)$$

Then

$$\text{eig}(A + BF) = \bigcup_{i=1}^{L+1} \text{eig}(\Phi_i - 1). \quad (27)$$

Proof of Theorem 2. Consider the following formulas for the controller matrix:

$$F = \Phi B^- - B^- A, B^- = B^+(I_n - BF_1 B^\perp).$$

Then, we have the chain of nonsingular (similarity) transformations

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} B^\perp \\ \dots \\ B^+ \end{pmatrix} (A + B(\Phi B^- - B^- A))(B^{\perp+} \parallel B) = \\ & = \begin{pmatrix} B^\perp A \\ \dots \\ \Phi B^+ - \Phi F_1 B^\perp + F_1 B^\perp A \end{pmatrix} (B^{\perp+} \parallel B) = \\ & = \begin{pmatrix} B^\perp AB^{\perp+} & B^\perp AB \\ \dots & \dots \\ F_1 B^\perp AB^{\perp+} - \Phi F_1 & \Phi + F_1 B^\perp AB \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

To the resulting matrix

$$\begin{pmatrix} B^\perp AB^{\perp+} & B^\perp AB \\ \dots & \dots \\ F_1 B^\perp AB^{\perp+} - \Phi F_1 & \Phi + F_1 B^\perp AB \end{pmatrix} \quad (28)$$

we apply the nonsingular similarity transformation:

$$\begin{pmatrix} I_{n-m} & 0 \\ -F_1 & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-m} & 0 \\ F_1 & I_m \end{pmatrix}^{-1}. \quad (29)$$

If (3.7) is multiplied on the left by (3.6), we obtain

$$\begin{pmatrix} I_{n-m} & 0 \\ -F_1 & I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\perp AB^{\perp+} & B^\perp AB \\ F_1 B^\perp AB^{\perp+} - \Phi F_1 & \Phi + F_1 B^\perp AB \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} B^\perp AB^{\perp+} & B^\perp AB \\ -\Phi F_1 & \Phi \end{pmatrix}.$$

The multiplication of the result of the preceding transformation on the right by the inverse of (3.7) yields

$$\begin{pmatrix} B^\perp AB^{\perp+} & B^\perp AB \\ -\Phi F_1 & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-m} & 0 \\ -F_1 & I_m \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} B^\perp AB^{\perp+} + B^\perp ABF_1 & B^\perp AB \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}.$$

Thus, the nonsingular similarity transformation (3.7) is used to obtain the matrix

$$\begin{pmatrix} B^\perp AB^{\perp+} + B^\perp ABF_1 & B^\perp AB \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 F_1 & B_1 \\ 0 & \Phi \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Its eigenvalues clearly have the form:

$$\text{eig} \begin{pmatrix} B^\perp AB^{\perp+} + B^\perp ABF_1 & B^\perp AB \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} = \\ = \text{eig} \begin{pmatrix} A_1 + B_1 F_1 & B_1 \\ 0 & \Phi \end{pmatrix} = \text{eig}(\Phi) \cup \text{eig}(B^\perp AB^{\perp+} + \\ + B^\perp ABF_1) = \text{eig}(\Phi) \cup \text{eig}(A_1 + B_1 F_1).$$

Transforming matrix (3.8) similarly to the above transformations, we obtain

$$\text{eig} \begin{pmatrix} B_1^\perp A_1 B_1^{\perp+} + B_1^\perp A_1 B_1 F_2 & B_1^\perp A_1 B_1 \\ 0 & \Phi_1 \end{pmatrix} = \\ = \text{eig}(\Phi_1) \cup \text{eig}(B_1^\perp A_1 B_1^{\perp+} + B_1^\perp A_1 B_1 F_2) = \\ = \text{eig}(\Phi_1) \cup \text{eig}(A_2 + B_2 F_2).$$

If these transformations are continued until the pair of matrices (A_L, B_L) , where $L = \text{ceil}(n/r) - 1$, we obtain the equality (3.5), which proves the theorem.

The following controller synthesis algorithm ensuring the prescribed pole placement follows from Theorem 2:

- (1) Set the matrices $A_0 = A$ and $B_0 = B$.
- (2) Calculate $L = \text{ceil}(n/r) - 1$.

(3) Set the matrices $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_L$ such that $\bigcup_{i=1}^{L+1} \text{eig}(\Phi_{i-1})$ is the desirable spectrum of the closed-loop system.

(4) Calculate the zero divisor $B_0^\perp = B^\perp$ and then the pseudoinverse matrices $A_1 = B^\perp AB^{\perp+}$, $B_1 = B^\perp AB$, ...

(5) Calculate the zero divisor $B_k^\perp$, the pseudoinverse matrix $B_k^{\perp+}$, and then the matrices $A_{k+1} = B_k^\perp A_k B_k^{\perp+}$, $B_{k+1} = B_k^\perp A_k B_k$, ...

(6) Calculate the zero divisor $B_{L-2}^\perp$, the pseudoinverse matrices $B_{L-2}^\perp$ and $B_k^{\perp+}$, and then the matrices $A_{L-1} = B_{L-2}^\perp A_{L-2} B_{L-2}^{\perp+}$ and $B_{L-1} = B_{L-2}^\perp A_{L-2} B_{L-2}$.

(7) Calculate the zero divisor $B_{L-1}^\perp$, the pseudoinverse matrices $B_{L-1}^\perp$ and $B_k^{\perp+}$, and then the matrices $A_L = B_{L-1}^\perp A_{L-1} B_{L-1}^{\perp+}$ and $B_L = B_{L-1}^\perp A_{L-1} B_{L-1}$.

(8) Sequentially calculate the matrices:

$$F_L = \Phi_L B_L^+ - B_L^+ A_L,$$

$$B_{L-1}^- = B_{L-1}^+ - F_L B_{L-1}^\perp,$$

$$F_{L-1} = \Phi_{L-1} B_{L-1}^- A_{L-1}, \dots$$

$$B_1^- = B_1^+ - F_2 B_1^\perp, F_1 = \Phi_1 B_1^- - B_1^- A_1,$$

$$B_0^- = B_0^+ - F_1 B_0^\perp, F = F_0 = \Phi_0 B_0^- - B_0^- A_0.$$

The controller with matrix (3.1) guarantees that condition (3.5) is fulfilled. A block diagram of the pole placement algorithm for the orthogonal zero divisor is shown in Fig. 1.

Corresponding changes should also be made in the formulas (3.1)–(3.3) of the controller.

The algorithm of the complete pole placement in certain cases provides an opportunity to obtain the final formula of the controller (Ackermann's formula) for the Single Input Multiple Output (SIMO) systems [8]–[10], [14]. For the simplest case of $n = 2r$ ($L = 1$) and the orthogonal divisor of zero, from Theorem 2 we obtain the following final formula of the controller:

$$F = \Phi_0 (B^+ - [\Phi_1 (B^\perp AB)^+ - (B^\perp AB)^+ B^\perp AB^{\perp+}] B^\perp) - \\ - (B^+ - [\Phi_1 (B^\perp AB)^+ - (B^\perp AB)^+ B^\perp AB^{\perp+}] B^\perp) A,$$

ensuring equality for the set of eigenvalues

$$\text{eig}(A + BF) = \text{eig}(\Phi_0) \cup \text{eig}(\Phi_1).$$

Theorem 2 and formulas (3.1)–(3.5) show that no restrictions are imposed on the matrices Φ_i . Any matrices that satisfy the condition of matching the eigenvalues set with the specified set can be used as the ob-

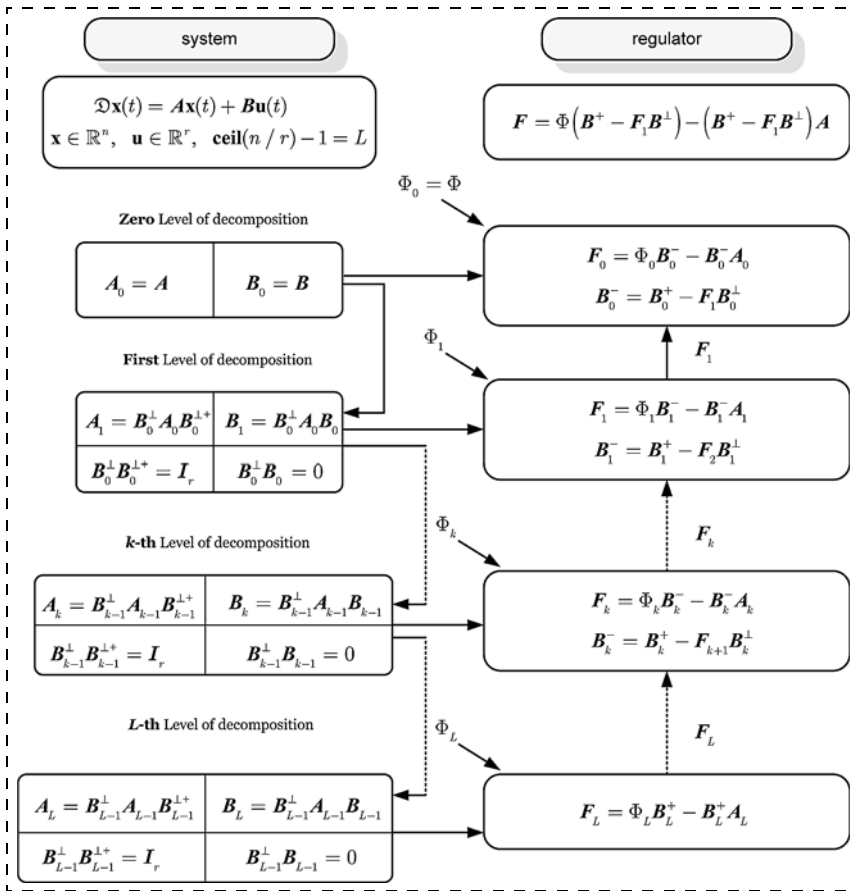


Fig. 1. Block diagram of the pole placement algorithm

jects. In this case, all the matrices Φ_i satisfying the condition

$$\bigcup_{i=1}^{L+1} \text{eig}(\Phi_i - 1) = \Lambda_{\text{specified}}, \quad (31)$$

where $\Lambda_{\text{specified}}$ is the given set of eigenvalues (specified poles), form a set of the equivalent controllers.

It is not difficult to modify the above algorithm by using the orthogonal matrices instead of the non-orthogonal zero divisors [17].

4. Examples of solutions to the complete pole placement problem

Consider controller synthesis examples that provide complete pole placement.

Example 1. Consider a fully controlled MIMO system for the case of $D\mathbf{x}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t)$ with the matrices [19]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}. \quad (32)$$

A feature of the MIMO system with a pair of matrices (4.1) is the difficulty of solving the pole placement problem due to defects in the matrix A . This refers to the modifications of the Ackermann and Bass-Gura methods [2], [5], [8].

Also, it is impossible to solve this problem, for example by using the Kautsky-Nichols-Van Dooren method [15] in this situation, if the data for all specified eigenvalues (specified poles) coincide.

Let us show that these difficulties do not affect the workability of the method presented. We make use of the algorithm described in Section 3, executing it incrementally.

1) Define a template for the zero level of decomposition

$$A_0 = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_0 = B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

2) Calculate the parameter $L = \text{ceil}(3/2) - 1 = 2 - 1 = 1$. It follows from this that for the MIMO system (4.1) there are only two levels of decomposition: the zeroth one and the first one (which is the finite level at the same time).

3) Define matrices with the desirable eigenvalues:

$$\Phi = \Phi_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = \lambda_3, \quad (34)$$

taking into consideration that $\text{eig}(\Phi_0) \cup \text{eig}(\Phi_1) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ are specified poles.

4) Calculate the zero divisor $B_0^\perp = B^\perp$, the pseudoinverse matrix, and after that the matrices $A_1 = B_0^\perp A B_0^{\perp+}$ and $B_1 = B_0^\perp A B_0^\perp$. We will obtain

$$B_0^\perp = (-1 \mid 1 \mid 3), \quad (35)$$

$$B_0^{\perp+} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (36)$$

$$A_1 = B_0^\perp A B_0^{\perp+} =$$

$$= \frac{1}{11} \cdot (-1 \mid 1 \mid 3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{21}{11}, \quad (37)$$

$$B_1 = B_0^\perp A B_0^\perp =$$

$$= (-1 \mid 1 \mid 3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \mid 0). \quad (38)$$

Therefore, at the first decomposition level we have the single-output (that is, the state) and two-input MIMO system.

$$A_1 = B_0^\perp A_0 B_0^{\perp+} = \frac{21}{11},$$

$$B_1 = B_0^\perp A_0 B_0 = (-1 \vdots 0). \quad (39)$$

5) Now it is necessary to calculate the matrices $F_1 = \Phi_1 B_1^- - B_1^- A_1$, $B_0^- = B_0^+ - F_1 B_0^\perp$, and $F_0 = \Phi_0 B_0^- - B_0^- A_0$ in consecutive order. For this purpose, we define the pseudoinverse matrices

$$B_0^+ = \frac{1}{11} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 10 & -3 \\ \hline 3 & -3 & 2 \end{array} \right), \quad B_1^+ = \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right). \quad (40)$$

Now we can obtain expressions for the corresponding controllers:

$$F_1 = \Phi_1 B_1^+ - B_1^+ A_1 + B_1^\perp \varpi =$$

$$= \lambda_3 \cdot \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right) \cdot \frac{21}{11} + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \cdot \varpi = \left(\begin{array}{c} -\lambda_3 + \frac{21}{11} \\ \varpi \end{array} \right), \quad (41)$$

$$B^- = B_0^+ - F_1 B_0^\perp =$$

$$= \frac{1}{11} \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 10 & -3 \\ \hline 3 & -3 & 2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} -\lambda_3 + \frac{21}{11} \\ \varpi \end{array} \right) (-1 \vdots 1 \vdots 3) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c|c} 2-\lambda_3 & \lambda_3-1 & 3\lambda_3-6 \\ \hline \frac{3}{11} + \varpi & -\frac{3}{11} - \varpi & \frac{2}{11} - 3\varpi \end{array} \right), \quad (42)$$

$$F_0 = \Phi_0 B_0^- - B_0^- A_0 =$$

$$= - \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} 2-\lambda_3 & \lambda_3-1 & 3\lambda_3-6 \\ \hline \frac{3}{11} + \varpi & -\frac{3}{11} - \varpi & \frac{2}{11} - 3\varpi \end{array} \right) -$$

$$- \left(\begin{array}{c|c|c} 2-\lambda_3 & \lambda_3-1 & 3\lambda_3-6 \\ \hline \frac{3}{11} + \varpi & -\frac{3}{11} - \varpi & \frac{2}{11} - 3\varpi \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 2:1:0 \\ \hline 0:2:0 \\ \hline 0:0:2 \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1(2-\lambda_3)+2\lambda_3-4 & \lambda_1\lambda_3-\lambda_1-\lambda_3 & 3\lambda_1\lambda_3-6\lambda_1+6\lambda_3+12 \\ \hline (\frac{3}{11}+\varpi)(\lambda_2-2) & -(\frac{3}{11}+\varpi)(\lambda_2+1) & (\frac{2}{11}-3\varpi)(\lambda_2-2) \end{array} \right). \quad (43)$$

In formulas (4.10)–(4.12), freedom in specification of the controller for the first level is considered by means of the component $B_1^\perp \varpi$, where ϖ is an arbitrary

scalar parameter. Indeed, completing the transformation, we obtain

$$A_1 + B_1 F_1 = A_1 + B_1 (\Phi_1 B_1^+ - B_1^+ A_1 + B_1^\perp \varpi) =$$

$$= A_1 + B_1 (\Phi_1 B_1^+ - B_1^+ A_1) + B_1 B_1^\perp \varpi.$$

After that, without loss of generality, we assume that in (4.12) there is an arbitrary parameter equal to $\varpi = \omega/11$, where ω is also an arbitrary parameter; then (43) can be rewritten in the equivalent form:

$$F_0 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/11 \end{array} \right) \times$$

$$\times \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1(2-\lambda_3)+2\lambda_3-4 & \lambda_1\lambda_3-\lambda_1-\lambda_3 & 3\lambda_1\lambda_3-6\lambda_1+6\lambda_3+12 \\ \hline (3+\omega)(\lambda_2-2) & -(3+\omega)(\lambda_2+1) & (2-3\omega)(\lambda_2-2) \end{array} \right). \quad (44)$$

It is obvious that the given solution does not contain restrictions on specifying the same pole with a multiplicity of three. Assuming that $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, we obtain

$$F_0 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/11 \end{array} \right) \times$$

$$\times \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1(2-\lambda)+2\lambda-4 & \lambda^2-2\lambda & 3\lambda^2+12 \\ \hline (3+\omega)(\lambda-2) & -(3+\omega)(\lambda+1) & (2-3\omega)(\lambda-2) \end{array} \right). \quad (45)$$

Here, if the value $\omega = -3$, this would minimize the information used in feedback channels, namely

$$F_0 = \left(\begin{array}{c|c|c} -\lambda^2+4\lambda-4 & \lambda^2-2\lambda & 3\lambda^2+12 \\ \hline 0 & 0 & \lambda-2 \end{array} \right). \quad (46)$$

Example 2. Consider a MIMO system (1.1) with discrete time ($\mathcal{D}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$) and the problem of controller synthesis that ensures a finite duration of the closed system transition process. In this case, the $A + BF$ matrix will only have nulls as its eigenvalues [8]. This requirement means that any nilpotent matrices with an index of nilpotency of no more than r [8], [18] can be taken as the matrices Φ_i .

Choose, for simplicity, zero matrices $\mathbf{0}_{r \times r}$ as the matrices Φ_i . Then the final part of the algorithm that has been discussed in Section 3 of this paper will have the form

$$F_L = -B_L^- A_L,$$

$$B_{L-1}^- = B_{L-1}^+ - F_L B_{L-1}^\perp, \quad F_{L-1} = -B_{L-1}^- A_{L-1}, \dots,$$

$$B_1^- = B_1^+ - F_2 B_1^\perp, \quad F_1 = -B_1^- A_1,$$

$$B_0^- = B_0^+ - F_1 B_0^\perp, \quad F = F_0 = -B_0^- A_0.$$

Here, in the situation where $n = 2r$ ($L = 1$), the formula of the controller that ensures a finite duration of the transition process in the discrete MIMO system has the following simple form:

$$F = -(B^+ + (B^\perp AB)^+ B^\perp AB^{\perp\tau} B^\perp)A. \quad (47)$$

For $n = 3r$ ($L = 2$), the formula becomes more complicated:

$$F = -(B^+ + ((B^\perp AB)^+ + ((B^\perp AB)^\perp B^\perp AB^{\perp\tau} B^\perp AB)^+ \times \\ \times ((B^\perp AB)^\perp B^\perp AB^{\perp\tau} B^\perp AB)^\perp (B^\perp AB)^\perp B^\perp AB^{\perp\tau} \times \\ \times (B^\perp AB)^{\perp\tau} ((B^\perp AB)^\perp B^\perp AB^{\perp\tau} B^\perp AB)^{\perp\tau}) \times \\ \times B^\perp AB^{\perp\tau} B^\perp)A. \quad (48)$$

The distribution of the eigenvalues of the MIMO discrete system matrix (as per the circular Girko law [20]) with the dimension of the state space $n = 3600$ and $r = 900$ ($L = 3$) on the complex plane is provided in Fig. 2. The distribution of the eigenvalues for the closed-loop system is shown in Fig. 3. As can be seen, the accuracy of stabilization of the large randomized matrix's eigenvalues is $\sim 10^{-2}$.

5. Assessment of the computational burden

The computational burden of this method can be estimated on the basis of solving the precise poles placement problem at the points $(-1, 0)$ and $(-2, 0)$ on $\mathbb{C}$ for the system (1) with a pair of matrices [16]

$$A = \begin{pmatrix} \text{round}(\text{randn}(r, r)) \vdots 0_{r \times r} \\ \text{randn}(r, 2r) \end{pmatrix}, \quad B = \text{randn}(2r, r).$$

Here "round" is a rounding operation; $\text{randn}(2r \times r)$ is the size of the submatrix $2r \times r$, and $\text{randn}(r \times r)$ is the size of the submatrix $r \times r$, whose elements are distributed in accordance with the pseudonormal law.

The results of the study for the MIMO system are presented by a diagram in Fig. 4. The abscissa axis represents the system's (1) n -dimensional state space, and the ordinate axis represents the time T_0 of the problem to be solved in the Matlab environment using a computer equipped with an Intel® Core™2 Quad CPU of 2.66 HGz with 3.25 Gbyte of RAM. For $n \leq 100$, on the basis of statistical tests of 1000 samples, the following approximating polynomial was obtained:

$$T_0(n) \approx 7,5 \cdot 10^{-7} n^2 - 5,6 \cdot 10^{-6} n + 2,6 \cdot 10^{-4}.$$

In all tests, the pole placement error is within the range of $10^{-14} \dots 10^{-9}$; that is, it is a negligible quantity.

It should be noted that, with the help of Matlab procedure *place*, in which the Kautsky-Nichols-Van Dooren method [21] is implemented, a similar problem can only be solved up to $n = 500$. At the same time, the computational burden, when $n > 100$, will be higher than previously attained values when $n > 500$.

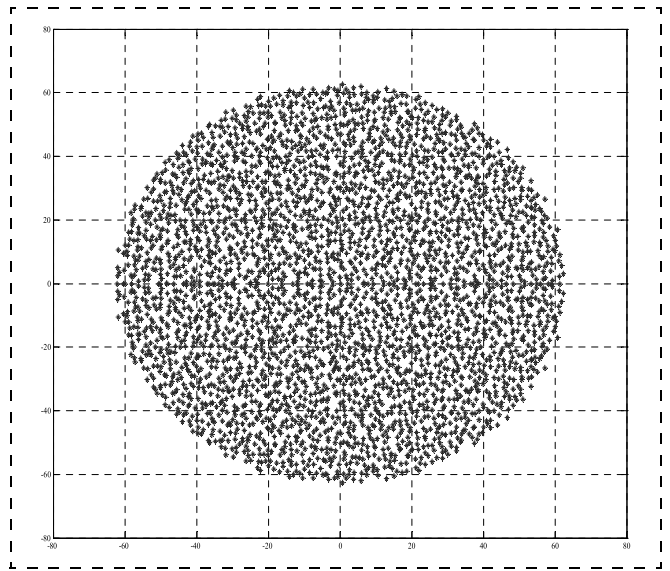


Fig. 2. The initial distribution of the MIMO system eigenvalues

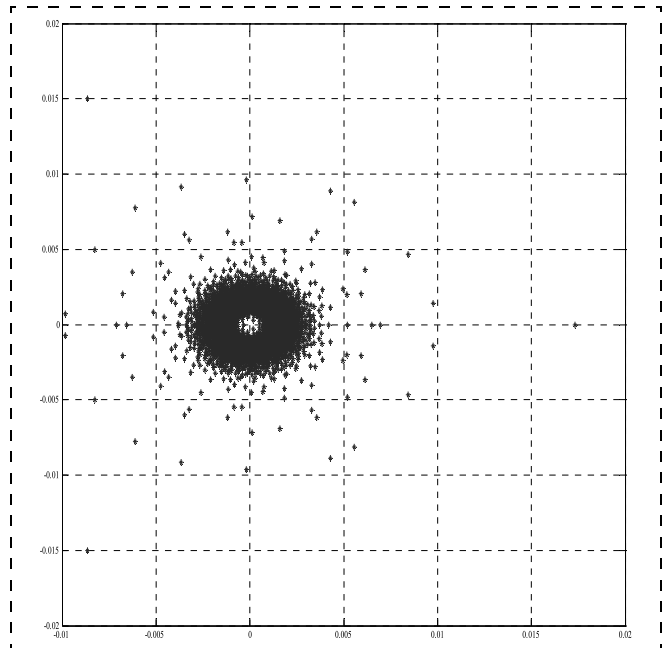


Fig. 3. Distribution of eigenvalues of the closed-loop MIMO system

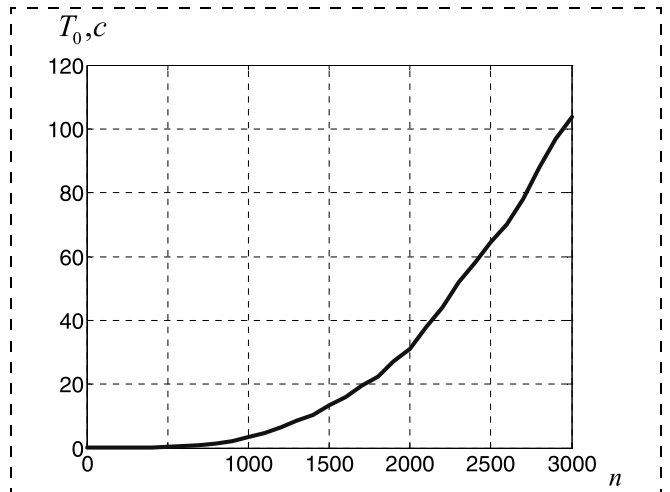


Fig. 4. Computational burden of the method

6. Conclusion

In this paper, an efficient method of full placement of the poles in linear MIMO systems has been proposed. The method is based on decomposition of the original model of the initial system determined in the state space. The method does not require the solution of a special matrix equation, it has the same form for continuous and discrete cases of the system model representation, it has no limitations with respect to the algebraic and geometric multiplicity of the specified poles, and it can be easily implemented in a Matlab software environment. Examples of solutions of precise pole placement problems for various MIMO systems, including systems with a state space of up to a few thousand, are presented. A comparative assessment of the computational burden has been carried out, demonstrating the advantage of the method in relation to the widely known Kautsky-Nichols-Van Dooren method.

Taking into account the duality of control and observation problems for linear MIMO systems, by using the proposed method it is easy to obtain formulas for the modal synthesis of the state observer.

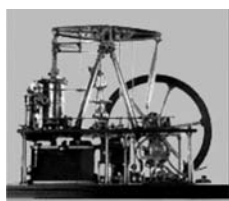
Acknowledgments

This work was supported financially by the Russian Science Foundation (Project № 18-19-00004).

References

1. Ackermann J. *Sampled-data control systems: Analysis and synthesis, robust system design*, Springer-Verlag, NY, 1985.
2. Åström K., Wittenmark B. *Computer Controlled Systems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1984.
3. Bennett S. *A History of Control Engineering 1930–1955*, IEE Control Engineering Series 47, Peter Peregrinus Ltd., London, UK, 1993.

4. Dorf R. C., Bishop R. H. *Modern Control Systems*, 7th Ed., MA, Addison-Wesley, 1995.
5. Kuo B. C. *Automatic Control Systems*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 7th Ed, 1995.
6. Leonov G. A., Shumafov M. M. *Methods of stabilization of linear controlled-proxy systems*, St. Petersburg, St. Petersburg University, 2005 (in Russian).
7. Misrikhanov M. Sh. *Invariant multivariable control systems. Algebraic approach*, Moscow, Nauka, 2007 (in Russian).
8. Mikrin E. A., Ryabchenko V. N., Zubov N. E. *Matrix methods in the theory and practice of aircraft automatic control systems*, Moscow, Bauman University, 2016 (in Russian).
9. Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N. The band formula for A. N. Krylov's problem, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 12, pp. 2142–2157.
10. Perko L. *Differential equations and dynamical systems*, Springer, Berlin, 1991.
11. Polyak B. T., Shcherbakov P. S. *Robust stability and control*, Moscow, Nauka, 2002 (in Russian).
12. Trentelman H. L., Stoorvogel A. A., Hautus M. *Control theory for linear systems*, Springer, Berlin, 2001.
13. Wonham W. M. *Linear multivariable control systems: a geometric approach*, Springer, Berlin, 1979.
14. Kailath T. *Linear Systems*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1980.
15. Kautsky J., Nichols N. K., Van Dooren P. Robust pole assignment in linear state feedback, *Int. J. Control*, 1985, vol. 41, no. 5, pp. 1129–1155.
16. Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N. Pole Placement in Large Dynamical Systems with Many Inputs and Outputs, *Doklady Mathematics*, 2011, vol. 84, no. 1, pp. 591–593.
17. Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N. Modification of the exact pole placement method and its application for the control of spacecraft motion, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, no. 2, pp. 279–292.
18. Bernstein D. S. *Matrix mathematics*, Princeton University Press, 2005.
19. Li P. Y. *Advanced control systems design*, University of Minnesota, 2012.
20. Girko V. L. Circular law, *Theory Probab. Appl.*, 1984, no. 29, pp. 694–706.
21. *Matlab. User's guide*, The MathWorks, Inc., 1994–2016.



**Ежегодная специализированная выставка
оборудования и технологий
для АСУ ТП и встраиваемых систем**

**17–19 октября 2018 г.
Москва, ЦВК "Экспоцентр", Павильон ФОРУМ**

XVIII МЕЖДУНАРОДНАЯ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННАЯ ВЫСТАВКА "ПЕРЕДОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ АВТОМАТИЗАЦИИ. ПТА-2018"

ОСНОВНАЯ ТЕМАТИКА ВЫСТАВКИ

- Автоматизация промышленного предприятия
- Автоматизация технологических процессов
- Измерительные технологии и метрологическое обеспечение
- Робототехника и мехатроника

*Подробную информацию о выставке ПТА-2018 см. на сайте
<http://www.pta-expo.ru/moscow/tematika.htm>*

В. Т. Матвиенко, канд. физ.-мат. наук, доц., matvienko.vt@gmail.com,
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, г. Киев, Украина

Оптимальное терминальное управление линейными дискретными системами с использованием псевдообращения матриц

Рассматривается проблема построения общих решений задач терминального управления для множества начальных возмущений. Приводятся условия существования общего решения этих задач для класса линейных динамических систем с дискретным аргументом. Получено оптимальное решение задачи терминального управления с дискретным аргументом, обеспечивающее прохождение траектории системы как можно ближе к наперед заданным точкам. Получено также полное множество решений задачи управления пучком траекторий для систем с дискретным аргументом.

Ключевые слова: линейные дискретные системы, псевдообращение, множество решений

В теории и практике управления все большее распространение получают так называемые системы терминального управления, в которых целью управления является достижение заданной точки пространства состояний объекта в заданный (терминальный) момент времени [1]. Наиболее широкое применение системы терминального управления имеют в авиационно-ракетно-космической технике [2]. Классическими примерами работы систем терминального управления движущимися объектами являются процессы выведения ракет-носителей; стартовый маневр и самонаведение крылатых ракет; сближение, причаливание, спуск и мягкая посадка космических аппаратов; взлет, смена эшелона, уход на второй круг и мягкая посадка самолета и т. д.

Задача терминального управления является одной из основных задач современной теории управления [2] и заключается в нахождении таких управлений, которые за некоторый конечный интервал времени переводят рассматриваемую систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние. При этом решение и без того трудных задач терминального управления весьма осложняется наложением на переменные состояния и управления ограничений [3, 4]. В частности, большинство разработанных к настоящему времени методов решения терминальных задач (см., например, [5–9]) не дают возможности учета ограничений, наложенных на состояние системы.

Настоящая статья базируется на результатах автора, представленных в работах [4, 10], а также в работах [11–13]. В статье рассматриваются задачи построения оптимального терминального управления дискретной системой с фазовыми ограничениями с использованием аппарата псевдообращения матриц. Приводятся условия существования общего решения задачи и описано полное множество ее решений.

Задача оптимального перевода системы из начального состояния в конечное

Рассмотрим класс линейных вполне управляемых дискретных систем, описываемых векторным разностным уравнением состояния вида

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{A}(i)\mathbf{x}(i) + \mathbf{B}(i)\mathbf{u}(i), \quad (1)$$

где $i = 0, 1, 2, \dots, N$ — дискретное время; $\mathbf{u}(i)$ — m -мерный вектор управления, $\mathbf{x}(i)$ — n -мерный вектор состояния системы; $\mathbf{A}(i)$ и $\mathbf{B}(i)$ — матрицы системы размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Поставим следующую задачу терминального управления: требуется систему (1) перевести за конечное время из начального состояния $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ в целевое конечное состояние $\mathbf{x}(N+1) = \mathbf{x}_{(1)}$.

Введем требование оптимальности процесса управления по следующему критерию качества:

$$I(\mathbf{u}) = \sum_{k=0}^N \mathbf{u}^T(k)\mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k), \quad (2)$$

где $\mathbf{u}^T = (\mathbf{u}^T(0), \mathbf{u}^T(1), \dots, \mathbf{u}^T(N))$ — вектор управления размерности $m(N+1)$, $\mathbf{D}(i)$ — симметричная положительно-определенная матрица размерности $m \times m$.

Известно [12], что множество функций управления, переводящих систему (1) из начального состояния $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ в конечное состояние $\mathbf{x}(N+1) = \mathbf{x}_{(1)}$, можно выразить через матрицу псевдообращения следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}^T(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^+ \mathbf{x}_{(1)} + (\mathbf{E} - \mathbf{W}^+ \mathbf{W})\mathbf{v}. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{W} = (\mathbf{W}(N+1, 0), \mathbf{W}(N+1, 1), \dots, \mathbf{W}(N+1, N))$ — матрица размерности $n \times m(N+1)$, $\mathbf{W}(m, k) = \mathbf{A}(m-1)\mathbf{A}(m-2)\dots\mathbf{A}(k+1)\mathbf{B}(k)$ — матрица размерности $n \times m$; $\mathbf{E}$ — единичная матрица размерности $m(N+1) \times m(N+1)$; $\mathbf{v}$ — вектор произвольных параметров размерности $m(N+1)$.

Согласно формуле (3) критерий качества (2) можно записать в виде

$$I(\mathbf{v}) = \sum_{k=0}^N \mathbf{u}^T(k) \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) = [\mathbf{v}^T (\mathbf{E} - \mathbf{W}^+ \mathbf{W})^T + \mathbf{x}_{(1)}^T (\mathbf{W}^T (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^+)^T] \begin{pmatrix} \mathbf{D}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(N) \end{pmatrix} \times \\ \times (\mathbf{W}^T (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^+ \mathbf{x}_{(1)} + (\mathbf{E} - \mathbf{W}^+ \mathbf{W}) \mathbf{v}). \quad (4)$$

Поскольку данный критерий качества зависит от произвольного вектора $\mathbf{v}$, то необходимое условие его оптимальности имеет вид

$$\frac{\partial I(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\sum_{k=0}^N \mathbf{u}^T(k) \mathbf{D}(k) \mathbf{u}(k) \right) = \\ = 2(\mathbf{E} - \mathbf{W}^T \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^+) \begin{pmatrix} \mathbf{D}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(N) \end{pmatrix} \times \\ \times (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^+ \mathbf{W}^T \mathbf{x}_{(1)} + 2(\mathbf{E} - \mathbf{W}^T \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^+) \times \\ \times \begin{pmatrix} \mathbf{D}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(N) \end{pmatrix} (\mathbf{E} - (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^+ (\mathbf{W}^T \mathbf{W}) \mathbf{W}) \mathbf{v} = 0.$$

Введем следующее обозначение:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{E} - \mathbf{W}^T \mathbf{W} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^+) \begin{pmatrix} \mathbf{D}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{D}(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{D}(N) \end{pmatrix}.$$

Тогда оптимальный вектор параметров $\mathbf{v}$ представляется в виде

$$\mathbf{v} = [\mathbf{R} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^+ (\mathbf{W}^T \mathbf{W}) - \mathbf{E}]^+ \mathbf{R} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^+ \mathbf{W}^T \mathbf{x}_{(1)}. \quad (5)$$

Таким образом, оптимальная функция управления (3) с вектором параметров (5) имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}^T (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^+ \mathbf{x}_{(1)} + (\mathbf{E} - \mathbf{W}^+ \mathbf{W}) \times \\ \times [\mathbf{R} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^+ (\mathbf{W}^T \mathbf{W}) - \mathbf{E}]^+ \mathbf{R} (\mathbf{W}^T \mathbf{W})^+ \mathbf{W}^T \mathbf{x}_{(1)}. \quad (6)$$

Управление (6) минимизирует функционал (4), и при этом вектор состояния системы (1) переводится с начального состояния $\mathbf{x}(0) = 0$ в заданное конечное состояние $\mathbf{x}(N+1) = \mathbf{x}_{(1)}$.

Задача оптимального перевода системы из начального состояния в конечное с ограничением на фазовые координаты

Рассмотрим задачу терминального управления, заключающуюся в переводе системы (1) из начального состояния $\mathbf{x}(0) = 0$ в конечное состояние

$\mathbf{x}(N+1) = \mathbf{x}_{(1)}$ с оптимизацией следующего критерия качества:

$$I(\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^l (\mathbf{x}(k_i) - \bar{\mathbf{x}}(k_i))^T \mathbf{F}(k_i) (\mathbf{x}(k_i) - \bar{\mathbf{x}}(k_i)), \quad (7)$$

где $\mathbf{F}(k_i)$ — симметричные весовые матрицы размерности $n \times n$; $\bar{\mathbf{x}}(k_i)$ — векторы размерности n заданы, $k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_l$; $\mathbf{v}$ — вектор произвольных параметров размерности $m(N+1)$. Данная задача, фактически, связана с нахождением терминального управления, обеспечивающего достижение терминальной цели управления и прохождение при этом траектории движения системы (1) как можно ближе к наперед заданным точкам $\bar{\mathbf{x}}(k_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Записывая необходимые условия минимума критерия (7), получим следующую систему алгебраических уравнений для определения вектора параметров $\mathbf{v}^T = (\mathbf{v}^T(0), \mathbf{v}^T(1), \dots, \mathbf{v}^T(N))$:

$$\mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{d}. \quad (8)$$

Здесь элементы вектора $\mathbf{d}^T = (\mathbf{d}^T(0), \mathbf{d}^T(1), \dots, \mathbf{d}^T(N))$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{d}(k) = \sum_{i=1}^l \left\{ \left[\mathbf{W}^T(k_i, k) - \mathbf{W}^T(N+1, k) (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^+ \times \right. \right. \\ \times \sum_{j=0}^{k_i-1} \mathbf{W}(N+1, j) \mathbf{W}^T(k_i, j) \left. \right] \mathbf{F}(k_i) \times \\ \times \left[\bar{\mathbf{x}}(k_i) - \sum_{j=0}^{k_i-1} \mathbf{W}(k_i, j) \mathbf{W}^T(N+1, j) (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^+ \mathbf{x}_{(1)} \right] \left. \right\}, \\ k = 0, 1, 2, \dots, N, \mathbf{W}(i, j) = 0 \text{ при } j \geq i,$$

а элементы матрицы $\mathbf{Q}$ — следующий вид:

$$\mathbf{q}_{pk} = \sum_{i=1}^l \left\{ \left[\mathbf{W}^T(k_i, k) - \mathbf{W}^T(N+1, k) (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^+ \times \right. \right. \\ \times \sum_{j=0}^{k_i-1} \mathbf{W}(N+1, j) \mathbf{W}^T(k_i, j) \left. \right] \mathbf{F}(k_i) \left[\mathbf{W}(k_i, p) - \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{k_i-1} \mathbf{W}(k_i, j) \mathbf{W}^T(N+1, j) (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)^+ \mathbf{W}(N+1, p) \right] \left. \right\},$$

$p = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, 2, \dots, N; \mathbf{W}(i, j) = 0$ при $j \geq i$.

В работах [13, 14] показано, что решение системы (8) существует и единственно, если

$$\mathbf{d}^T \mathbf{Z} (\mathbf{Q}^T) \mathbf{d} = 0, \\ \det(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) > 0,$$

где

$$\mathbf{Z} (\mathbf{Q}^T) = \mathbf{I}_{m(N+1)} - \mathbf{Q} \mathbf{Q}^+.$$

Задача терминального управления пучком траекторий

Рассмотрим следующую задачу нахождения управляющего воздействия, обеспечивающего перевод системы

$$\mathbf{x}(i+1) = \mathbf{A}(i)\mathbf{x}(i) + \mathbf{b}(i)u(i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (9)$$

из заданного множества начальных состояний

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0), \dots, \mathbf{x}_s(0)\} \quad (10)$$

в заданное множество конечных состояний

$$\Omega_1 = \{\mathbf{x}_1(N+1), \mathbf{x}_2(N+1), \dots, \mathbf{x}_s(N+1)\}. \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{x}(i)$ — n -мерный вектор состояния, а $u(i)$ — скалярный управляющий вход объекта; $\mathbf{A}(i)$ и $\mathbf{b}(i)$ — матрица и вектор размерности $n \times n$ и n , соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\bar{\mathbf{x}}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(0) \end{pmatrix} \text{ — вектор начальных значений}$$

состояния размерности ns ;

$$\bar{\mathbf{x}}(N+1) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(N+1) \\ \mathbf{x}_2(N+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(N+1) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{x}}_{(1)} \text{ — вектор ко-}$$

нечных состояний размерности ns .

Тогда задача перевода системы (9) из области начальных состояний (10) в множество конечных состояний (11) эквивалентна задаче перевода системы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(i+1) \\ \mathbf{x}_2(i+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(i) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(i) \\ \mathbf{x}_2(i) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(i) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}(i) \\ \mathbf{b}(i) \\ \vdots \\ \mathbf{b}(i) \end{pmatrix} u(i), \quad i = \overline{0, N} \quad (12)$$

из области Ω_0 в область Ω_1 на конечном интервале времени.

Введем обозначения

$$\bar{\mathbf{A}}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(k) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(k) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}(k) \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{x}}(i+1) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(i+1) \\ \mathbf{x}_2(i+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(i+1) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{x}}_{(1)}; \quad \bar{\mathbf{b}}(i) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}(i) \\ \mathbf{b}(i) \\ \vdots \\ \mathbf{b}(i) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (12) примет вид

$$\bar{\mathbf{x}}(i+1) = \bar{\mathbf{A}}(i)\bar{\mathbf{x}}(i) + \bar{\mathbf{b}}(i)u(i), \quad i = \overline{0, N}, \quad (13)$$

где векторы $\bar{\mathbf{x}}(i)$ и $\bar{\mathbf{b}}(i)$ — размерности ns , а блочная матрица $\bar{\mathbf{A}}(i)$ — размерности $ns \times ns$.

Можно показать [11, 12, 15], что в конечный момент времени состояние системы (13) описывается уравнением

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(N+1) &= \sum_{k=0}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, k)u(k) + \\ &+ \bar{\mathbf{A}}(N)\bar{\mathbf{A}}(N-1) \dots \bar{\mathbf{A}}(1)\bar{\mathbf{A}}(0)\bar{\mathbf{x}}(0), \end{aligned} \quad (14)$$

где матрица $\bar{\mathbf{W}}(N, k)$ имеет вид

$$\bar{\mathbf{W}}(N, k) = \bar{\mathbf{A}}(N-1)\bar{\mathbf{A}}(N-2) \dots \bar{\mathbf{A}}(k+1)\bar{\mathbf{b}}(k).$$

Систему (14) запишем в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(N+1) - \bar{\mathbf{A}}(N)\bar{\mathbf{A}}(N-1) \dots \bar{\mathbf{A}}(1)\bar{\mathbf{A}}(0)\bar{\mathbf{x}}(0) &= \\ &= \sum_{k=0}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, k)u(k). \end{aligned} \quad (15)$$

Вводя обозначение

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(N+1) &= \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} = \\ &= \bar{\mathbf{x}}(N+1) - \bar{\mathbf{A}}(N)\bar{\mathbf{A}}(N-1) \dots \bar{\mathbf{A}}(1)\bar{\mathbf{A}}(0)\bar{\mathbf{x}}(0), \end{aligned}$$

систему алгебраических уравнений (15) относительно функции управления можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} &(\bar{\mathbf{W}}(N+1, 0), \bar{\mathbf{W}}(N+1, 1), \dots, \bar{\mathbf{W}}(N+1, N-1), \\ &\bar{\mathbf{W}}(N+1, N)) \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{x}}(N+1). \end{aligned} \quad (16)$$

Решение системы (16) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{W}^+ \tilde{\mathbf{x}}_{(1)}, \quad (17)$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = (u(0), u(1), \dots, u(N))^T$ — вектор размерности $N+1$, $\mathbf{W}$ — матрица размерности $ns \times (N+1)$, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= (\bar{\mathbf{W}}(N+1, 0), \bar{\mathbf{W}}(N+1, 1), \dots \\ &\dots, \bar{\mathbf{W}}(N+1, N-1), \bar{\mathbf{W}}(N+1, N)). \end{aligned}$$

Матрицу $\bar{\mathbf{W}}(N+1, k)$ запишем в виде

$$\bar{\mathbf{W}}(N+1, k) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(k+1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(k+1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(k+1) \end{pmatrix} \bar{\mathbf{b}}(k);$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}(N+1, k) &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(k+1)\mathbf{b}(k) \\ \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(k+1)\mathbf{b}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(k+1)\mathbf{b}(k) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(k+1) \\ \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(k+1) \end{pmatrix} \mathbf{b}(k). \end{aligned}$$

Уравнение (17) представим в виде:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{W}^+ \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} = \mathbf{W}^T(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^+ \tilde{\mathbf{x}}_{(1)},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^+ &= \mathbf{W}^T(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^+ = \\ &= \mathbf{W}^T \left(\sum_{j=0}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, j) \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, j) \right)^+, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 0) \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, N) \end{pmatrix} \times \\ &\times \left(\sum_{j=0}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, j) \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, j) \right)^+ \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} + \\ &+ \left[\mathbf{E} - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 0) \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, N) \end{pmatrix} \times \right. \\ &\times \left. \left(\sum_{j=0}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, j) \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, j) \right)^+ \times \right. \\ &\times \left. (\bar{\mathbf{W}}(N+1, 0), \bar{\mathbf{W}}(N+1, 1), \dots, \bar{\mathbf{W}}(N+1, N)) \right] \tilde{\mathbf{v}}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\tilde{\mathbf{v}}$ — произвольный вектор размерности $N+1$.

Соотношение (18) представляет собой общее решение сформулированной задачи.

Упростив уравнение (18), получим:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}} &= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 0) \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, N) \end{pmatrix} \times \\ &\times \left(\sum_{j=0}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, j) \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, j) \right)^+ \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} + \\ &+ \tilde{\mathbf{v}} - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 0) \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, N) \end{pmatrix} \left(\sum_{j=0}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, j) \times \right. \\ &\times \left. \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, j) \right)^+ \sum_{j=0}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, j) \nu(j), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\nu(0), \nu(1), \dots, \nu(N))^T \quad \forall \nu(k) \in R^1, k = \overline{0, N}.$$

Представим псевдообратную матрицу следующим образом:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{j=0}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, j) \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, j) \right)^+ = \\ &= \left[\sum_{j=0}^N \begin{pmatrix} \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(j+1)\mathbf{b}(j) \\ \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(j+1)\mathbf{b}(j) \\ \vdots \\ \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots\mathbf{A}(j+1)\mathbf{b}(j) \end{pmatrix} \times \right. \\ &\times \left. (\mathbf{b}^T(j)\mathbf{A}^T(j+1)\dots\mathbf{A}^T(N)\dots\mathbf{b}^T(j)\mathbf{A}^T(j+1)\dots\mathbf{A}^T(N)) \right]^+ = \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^N \mathbf{D}(j) & \sum_{j=0}^N \mathbf{D}(j) & \dots & \sum_{j=0}^N \mathbf{D}(j) \\ \sum_{j=0}^N \mathbf{D}(j) & \sum_{j=0}^N \mathbf{D}(j) & \dots & \sum_{j=0}^N \mathbf{D}(j) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=0}^N \mathbf{D}(j) & \sum_{j=0}^N \mathbf{D}(j) & \dots & \sum_{j=0}^N \mathbf{D}(j) \end{bmatrix}^+, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{D}(j) = \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots \\ \dots \mathbf{A}(j+1)\mathbf{b}(j)\mathbf{b}^T(j)\mathbf{A}^T(j+1)\dots \mathbf{A}^T(N).$$

Обозначим $\sum_{j=0}^N \mathbf{D}(j) = \mathbf{C}$, тогда уравнение (19) можно представить следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 0) \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \end{pmatrix}^+ \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} + \tilde{\mathbf{v}} - \\ - \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 0) \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, 1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \end{pmatrix}^+ \sum_{j=0}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, j)\mathbf{v}(j). \quad (20)$$

Известно [13], что если $\tilde{\mathbf{A}}$ — матрица, составленная из всех линейно-независимых строк матрицы $\mathbf{A}$, матрица $\bar{\mathbf{A}}$ — из всех линейно-независимых столбцов матрицы $\mathbf{A}$, а матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ получена из $\mathbf{A}$ последовательным применением предыдущих двух операций, тогда

$$\mathbf{A}^+ = \tilde{\mathbf{A}}^T (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{A}}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{A}} (\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T.$$

Используя этот результат, псевдообратную матрицу в формуле (20) можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \end{pmatrix}^+ = (\mathbf{C}\mathbf{C}\dots\mathbf{C})^T \times \\ \times \left((\mathbf{C}\mathbf{C}\dots\mathbf{C}) \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \end{pmatrix} \right)^{-1} \mathbf{C} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C}^T \\ \vdots \\ \mathbf{C}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}^T = \\ = (\mathbf{C}\mathbf{C}\dots\mathbf{C})^T \left(\sum_{i=0}^s \mathbf{C}\mathbf{C}^T \right)^{-1} \mathbf{C} \left(\sum_{i=0}^s \mathbf{C}^T \mathbf{C} \right)^{-1} (\mathbf{C}^T \mathbf{C}^T \dots \mathbf{C}^T) = \\ = s^{-2} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{C}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{C} (\mathbf{C}^{-1}, \mathbf{C}^{-1}, \dots, \mathbf{C}^{-1}) = \\ = s^{-2} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{C}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} (\mathbf{E}, \mathbf{E}, \dots, \mathbf{E}),$$

при условии, что матрица $\mathbf{C}$ полного ранга и

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C} & \mathbf{C} & \dots & \mathbf{C} \end{pmatrix} = \text{rank} \mathbf{C} = n.$$

Тогда функция управления пучком траекторий имеет следующий вид:

$$u(k) = s^{-2} \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, k) \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} + \\ + v(k) - s^{-2} \bar{\mathbf{W}}^T(N+1, k) \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} & \dots & \mathbf{C}^{-1} \end{pmatrix} \times \\ \times \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{W}}(N+1, j)v(j), \quad k = \overline{0, N}, \quad \forall v(k) \in R^1.$$

Данная функция управления $u(k)$, $k = \overline{0, N}$, переводит множество точек (10) системы (12) в точку

$$\tilde{\mathbf{x}}(N+1) = \tilde{\mathbf{x}}_{(1)} = \\ = \bar{\mathbf{x}}(N+1) - \bar{\mathbf{A}}(N)\bar{\mathbf{A}}(N-1)\dots\bar{\mathbf{A}}(1)\bar{\mathbf{A}}(0)\bar{\mathbf{x}}(0).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы задача терминального управления, связанная с переводом системы (12) из области (10) в точку $\tilde{\mathbf{x}}_{(1)}$, имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{rank} \sum_{j=0}^N \mathbf{A}(N)\mathbf{A}(N-1)\dots$$

$$\dots \mathbf{A}(j+1)\mathbf{b}(j)\mathbf{b}^T(j)\mathbf{A}^T(j+1)\dots \mathbf{A}^T(N) = n, \quad N \geq n.$$

В результате получено оптимальное решение задачи терминального управления системой с дискретным аргументом, обеспечивающее прохождение ее траектории движения как можно ближе к наперед заданным точкам. Описано полное множество решений задачи управления пучком траекторий для систем с дискретным аргументом.

Полученные в статье результаты могут быть использованы при решении ряда прикладных задач, в частности, при разработке систем автоматического управления подвижными объектами.

Список литературы

1. Батенко А. П. Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.
2. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Методы "гибких" траекторий в задачах терминального управления вертикальными маневрами летательных аппаратов. Гл. 2 // Проблемы управления сложными динамическими объектами авиационной и космической техники. М.: Машиностроение, 2015. С. 51–110.

3. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. СПб.: Наука, 1999. 467 с.
4. Кириченко Н. Ф., Матвиенко В. Т. Общее решение задач терминального управления и наблюдения // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 2. С. 80—89.
5. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Полиэдральная формализация дискретных задач терминального управления с ресурсными ограничениями // Известия ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск "Перспективные системы и задачи управления". 2014. № 3 (152). С. 35—41.
6. Тюлюкин В. А., Шориков А. Ф. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 1993. Вып. 4. С. 115—127.
7. Шушляпин Е. А., Подольская О. Г. Управление терминальными нелинейными дискретными системами методом конечного состояния // Радиоэлектроника. Информатика. Управление. 2003. № 2. С. 138—142.
8. Зубер И. Е. Терминальное управление по выходу для нелинейных нестационарных дискретных систем // Электронный журнал. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2004. № 2. С. 35—42.

9. Матвеев А. С. Исследование терминального управления дискретной нелинейной системой // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2008. Вып. 1. С. 49—55.
10. Зыбин Е. Ю., Рябченко В. Н., Зубов Н. Е., Микрин Е. А. О неединственности решения задачи терминального управления // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 10 (22). С. 25—30.
11. Кириченко Н. Ф., Матвиенко В. Т. Общее решение задач терминального управления и наблюдения в линейных конечномерных системах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 7. С. 2—6.
12. Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П. Применение псевдообратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 4. С. 107—124.
13. Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П. Возмущение псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и нелинейных зависимостей // Проблемы управления и информатики. 2001. № 1. С. 6—22.
14. Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П. Псевдообращение в задачах управления и наблюдения // Автоматика. 1993. № 5. С. 69—81.
15. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Optimal Terminal Control by Linear Discrete Systems with Use of Matrices Pseudoinversion

V. T. Matvienko, matvienko.vt@gmail.com,
National Taras Shevchenko University, Kyiv, 01033, Ukraine

Corresponding author: Matvienko Vladimir T., Ph. D., Associate Professor
Faculty of Computer Science and Cybernetics, of National Taras Shevchenko University,
Kyiv, Ukraine, e-mail: matvienko.vt@gmail.com

Accepted on August 07, 2017

In this paper obtain the general solution of terminal control problem with a set of initial perturbations. Propose conditions of the general solution existence to discrete linear control systems. Also give the optimal solution of the terminal control problem minimizing the distance between the trajectory and fixed points. Constraints on the trajectory of the system are selected for certain points. Describe the set of all solutions to the control problem of trajectories ensemble with discrete time. The problem of optimal displacement of a discrete system from the initial state to the final one is solved. The problem of optimal displacement of a discrete system from the initial state to the final state with restriction to phase coordinates is solved. The trajectory of the system with optimal terminal control will pass next to the predefined points. The problem of control a set of trajectories for linear discrete systems is formulated and solved. The obtained control of the set trajectories is optimal. Necessary and sufficient conditions for solving this problem are obtained. Consideration is given to the mathematical problem on constructing general solutions of the problem concerning the terminal control for the set of initial perturbations. The existence conditions of the general solution of this problem for linear dynamic systems with the discrete argument is given. The obtained function of control is based on filtration of linearly independent rows and columns of the matrix. The optimal controls for linear dynamic discrete systems will solve of practical important problems.

Keywords: optimal, linear discrete systems, pseudoinversion, set of all solutions.

For citation:

Matvienko V. T. Optimal Terminal Control by Linear Discrete Systems with Use of Matrices Pseudoinversion, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no 1, pp. 19—25.

DOI: 10.17587/mau.19.19-25

References

1. Batenko A. P. *Sistemy terminal'nogo upravleniya* (Systems of terminal control), Moscow, Radio i svyaz', 1984, 160 p. (in Russian).
2. Filimonov A. B., Filimonov N. B. *Metody "gibkikh" traektorij v zadachah terminal'nogo upravleniya vertikal'nymi manevrami letatel'nykh apparatov* (Methods of "flexible" trajectories in problems of terminal control of vertical maneuvers of aircrafts), *Problemy upravleniya slozhnymi dinamicheskimi ob'ektami aviacionnoj i kosmicheskoy tekhniki*, Moscow, Mashinostroenie, 2015, pp. 51—110 (in Russian).

3. Andrievskij B. R., Fradkov A. L. *Izbrannye glavy teorii avtomaticheskogo upravleniya s primerami na yazyke MATLAB* (Selected chapters of the theory of automatic control with examples in the language MATLAB), SPb., Nauka, 1999, 467 p. (in Russian).
4. Kirichenko N. F., Matvienko V. T. *Obshchee reshenie zadach terminal'nogo upravleniya i nablyudeniya* (General solution of the tasks of terminal control and monitoring), *Kibernetika i Sistemnyy Analiz*, 2002, no. 2, pp. 80—89 (in Ukraine).
5. Filimonov A. B., Filimonov N. B. *Poliehdral'naya formalizatsiya diskretnykh zadach terminal'nogo upravleniya s resursnymi ogranicheniyami* (The polyhedral formalization of discrete terminal control problems with resource constraints), *Izvestiya YUFU. Tekhnicheskie nauki. Tematicheskij vypusk "Perspektivnye sistemy i zadachi upravleniya"*, 2014, no. 3 (152), pp. 35—41 (in Russian).
6. Tyulyukin V. A., Shorikov A. F. *Algoritm resheniya zadachi terminal'nogo upravleniya dlya lineynoy diskretnoy sistemy* (Algorithm of solving the terminal control problem for a linear discrete system), *Avtomatika i Telemekhanika*. 1993, iss. 4, pp. 115—127 (in Russian).

7. **Shushlyapin E. A., Podol'skaya O. G.** *Upravlenie terminal'nymi nelinejnymi diskretnymi sistemami metodom konechnogo sostoyaniya* (Control of terminal nonlinear discrete systems by the finite state method), *Radioelektronika. Informatika. Upravleniya*, 2003, no. 2, pp. 138–142 (in Russian).

8. **Zuber I. E.** *Terminal'noe upravlenie po vyvodu dlya nelinejnyh nestacionarnykh diskretnykh sistem* (Terminal control for the output for non-linear non-stationary discrete systems), *Ehlektronnyj Zhurnal. Differencial'nye Uravneniya i Processy Upravleniya*, 2004, no. 2, pp. 35–42 (in Russian).

9. **Matveev A. S.** *Issledovanie terminal'nogo upravleniya diskretnoj nelinejnoy sistemoy* (Investigation of terminal control of a discrete non-linear system), *Vestnik SPbGU. Ser. 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*, 2008, iss. 1, pp. 49–55 (in Russian).

10. **Zybin E. Yu., Ryabchenko V. N., Zubov N. E., Mikrin E. A.** *O neodinstvennosti resheniya zadachi terminal'nogo upravleniya* (On the nonuniqueness of the solution of the problem of terminal control), *Inzhenernyj Zhurnal: Nauka i Innovacii*, 2013, iss. 10 (22), pp. 25–30 (in Russian).

11. **Kirichenko N. F., Matvienko V. T.** *Obshchee reshenie zadach terminal'nogo upravleniya i nablyudeniya v linejnykh konechnomernykh*

sistemah (General solution of the problems of terminal control and observation in linear finite-dimensional systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2006, no. 7, pp. 2–6 (in Russian).

12. **Kirichenko N. F., Lepekha N. P.** *Primenenie psevdootbratnykh i proekcionnykh matric k issledovaniyu zadach upravleniya, nablyudeniya i identifikacii* (Perturbation of pseudoinverse and projection matrices and their application to the identification of linear and nonlinear dependencies), *Kibernetika i Sistemnyj Analiz*, 2002, no. 4, pp. 107–124 (in Russian).

13. **Kirichenko N. F., Lepekha N. P.** *Vozmushchenie psevdootbratnykh i proekcionnykh matric i ih primenenie k identifikacii linejnykh i ne linejnykh zavisimostej* (Perturbation of pseudoinverse and projection matrices and their application to the identification of linear and non-linear dependencies), *Problemy Upravleniya i Informatiki*, 2001, no. 1, pp. 6–22 (in Ukraine).

14. **Kirichenko N. F., Lepekha N. P.** *Psevdootbrashchenie v zadachah upravleniya i nablyudeniya* (Pseudoinverse in control and observation problems), *Avtomatika*, 1993, no. 5, pp. 69–81 (in Ukraine).

15. **Krasovskij N. N.** *Teoriya upravleniya dvizheniem* (Theory of control motions), Moscow, Nauka, 1968, 476 p. (in Russian).



XIV МОСКОВСКИЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ИННОВАЦИОННЫЙ ФОРУМ

ТОЧНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ — ОСНОВА КАЧЕСТВА И БЕЗОПАСНОСТИ

проводится в соответствии с распоряжением Правительства Российской Федерации от 5 апреля 2014 г. № 541-р

**15-17 мая 2018 г.,
Москва, ВДНХ,
павильон 75, «Россия»**

СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ
ВЫСТАВКИ



ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

Консолидация усилий власти, науки и бизнеса в развитии отечественного приборостроения для обеспечения нужд промышленности и оборонного комплекса страны, а также повышение эффективности российской системы измерений, совершенствование нормативной базы метрологии с учетом международных тенденций в целях поддержки инноваций и их продвижения.

ПРОГРАММА ФОРУМА



METROLEXPO

Метрология и Измерения

14-я выставка средств измерений, испытательного оборудования и метрологического обеспечения.



CONTROL&DIAGNOSTIC

Контроль и Диагностика

7-я выставка промышленного оборудования и приборов для технической диагностики и экспертизы.



RESMETERING

Учёт энергоресурсов

7-я выставка технологического и коммерческого учета энергоресурсов.



LABTEST

Лабораторное оборудование

6-я выставка аналитических приборов и лабораторного оборудования промышленного и научного назначения.



PROMAUTOMATIC

Приборостроение и автоматизация

6-я выставка оборудования и программного обеспечения для технологических и производственных процессов.



WEIGHT SALON

Весовой салон

2-я выставка весового оборудования.

ДИРЕКЦИЯ ФОРУМА

129344, Москва, ул. Искры д. 31, корп. 1, Технопарк ВДНХ
Тел./Факс: +7 (495) 937-40-23 (многоканальный)

www.metrol.expoprom.ru
E-mail: metrol@expoprom.ru

Б. В. Сухинин, д-р техн. наук, проф., зав. каф., eeo@uic.tula.ru,

В. В. Сурков, д-р техн. наук, проф., vvs150747@mail.ru,

Тульский государственный университет

К вопросу о методологическом кризисе современной теории оптимального управления

Известно, что если проблемы не решаются на том уровне, где они появились — необходимо подняться на уровень выше, на более высокую ступень понимания законов природы. Проблемы оптимального управления невозможно решить чисто математически: математика без физики — глупа, физика без математики — слепа. Предлагается взглянуть на проблемы метода динамического программирования Р. Беллмана, имеющего методологическое значение, хотя бы еще со стороны физических явлений. Это позволяет решить проблемы оптимального управления многомерным объектом высокого порядка, в том числе и нелинейным.

Ключевые слова: аналитическое конструирование, оптимальное управление, декомпозиция, подчиненное управление, оптимальная точность, оптимальное быстроедействие, устойчивость, функциональное уравнение, условие управляемости

В известном уникальном справочнике по теории автоматического управления (ТАУ), подготовленном группой отечественных ученых под руководством А. А. Красовского, синтез оптимальных управлений нелинейными объектами отнесен к основной проблеме современной ТАУ (СТАУ). Однако, как отмечает А. А. Колесников в своей широко известной монографии "Синергетическая теория управления": "Ситуация в этой области приняла в настоящее время угрожающий и, по всем признакам, кризисный характер". Авторы справочника по ТАУ отмечают, что "в развитии СТАУ с точки зрения практики далеко не все обстоит благополучно. Классическую ТАУ в основном создавали инженеры для инженеров. СТАУ создают в основном математики для инженеров и во все большей мере математики для математиков. Последнее с точки зрения практики вызывает определенное беспокойство. Главное негативное влияние на практическое внедрение методов СТАУ оказывает масса оторванных от практических потребностей и возможностей работ и даже направлений, интересных в математическом отношении, но бесплодных в отношении современных приложений". А. А. Колесников отмечает: "Другими словами, в СТАУ "математическое содержание" во многом подавляет физическое начало, которое фактически отсутствует в самой формулировке основной задачи управления и, что особенно важно, в подходах к ее решению". Впервые методологический кризис теории управления (ТУ) предсказал один из ее основоположников А. А. Красовский еще в 1990 г. и сформулировал проблему создания "физической теории управления" [1].

Подробно рассмотрев причины сложившегося кризиса, Н. Б. Филимонов показал, что "ключом к его преодолению является достижение в задачах управления органического единства математической строгости и физического смысла [2]: "... для вывода современной ТУ из методологического кризиса необходимо восстановить взаимобратную связь между теорией и практикой, сочетая инженерную направленность с обновляющимся математическим

аппаратом, обеспечивая в задачах управления наряду с математической и физическую строгость — правильный учет всех существенных в данной задаче факторов". Автор отмечает, что "несмотря на актуальность проблемы разработки физической ТУ, она, фактически, так и осталась без внимания и не вызвала никакой реакции со стороны ни отечественных, ни зарубежных специалистов. За прошедшие четверть века не опубликована ни одна работа, посвященная данной проблеме".

В настоящей работе предпринята такая попытка.

Предлагаемый путь решения задач современной теории оптимального управления

Наиболее общий метод решения задач оптимального управления в форме обратной связи, получивший название динамического программирования, предложен Р. Беллманом еще в 30-х годах прошлого столетия. В его основе лежит принцип оптимальности: любой конечный участок оптимальной траектории является также оптимальным, а любой промежуточный участок может быть не оптимальным.

Современные идеи оптимального управления распространяются не только на технические объекты и технологические процессы в промышленности, но и на такие области, как организация и управление производством, экономика, менеджмент, биология, военное дело и даже политика или здоровье отдельного человека, его успехи. Отметим методологическое значение принципа Р. Беллмана — управлять можно чем угодно или кем угодно, если выполнены три условия: известен объект управления, известна конечная цель управления и известен критерий оценки качества управления. Если нет хотя бы одного из них — нет смысла приступать к решению задачи управления. Подразумевается, что в задачах управления присутствуют, как минимум, два взаимодействующих блока: объект управления (ОУ) и субъект управления — человек (при ручном управлении) или система управления

(СУ) (при автоматическом управлении). Часто СУ называют регулятором (Р).

В данной статье мы сузим круг задач и ограничимся рассмотрением вопросов теории оптимального управления применительно к технике и, в частности, к электроприводам. Разработка СУ электроприводами, обеспечивающей малые ошибки (не более $20''$) на минимальных скоростях слежения (до $0,01^\circ$) при флуктуациях момента трения и нагрузки в процессе эксплуатации, при наличии люфта редуктора, на порядок превышающего допустимую ошибку, при нежесткой и неуравновешенной конструкции исполнительного механизма, позволит создать высокотехнологичное промышленное оборудование (например, прецизионные станки) и перспективные виды вооружения и военной техники (например, высокоточные радиолокационные станции слежения и наведения).

Описание метода решения

Для простоты изложения, не влияющего на сущность задачи, будем рассматривать объект (электропривод) с одним управляющим воздействием $|u| \leq 1$, уравнение возмущенного движения которого в соответствии с теорией А. М. Ляпунова имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}) + \mathbf{B}(\mathbf{X})u(t),$$

где $\dot{\mathbf{X}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)^T$, $\dot{x}_i = x'_i = dx_i/dt$, $i = 1, 2, \dots, n$; $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ — матрица-столбец с элементами $a_i(\mathbf{X}) \equiv a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, представляющими собой нелинейные однозначные функции; $\mathbf{B}(\mathbf{X}) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, $b_1=0, b_2=0, \dots, b_{m-1}=0, b_m \neq 0$, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — вектор-столбец переменных параметров (фазовый вектор или вектор состояния) динамического объекта; n — число параметров или порядок объекта или число дифференциальных уравнений объекта в форме Коши, m — число управляющих параметров (управлений).

Итак, **объект управления**

$$\dot{x}_1 = a_1(\mathbf{X}), \dot{x}_2 = a_2(\mathbf{X}), \dots, \dot{x}_n = a_n(\mathbf{X}) + b_n(\mathbf{X})u. \quad (1)$$

Цель управления: перевести объект управления (1) с помощью СУ (субъект) из начального положения $\mathbf{X}(0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})^T$ в конечное положение $\mathbf{X} = 0$, т. е. в начало координат.

Критерий оценки качества управления: очевидно, наибольшее значение из всех известных критериев имеют критерии максимальной точности воспроизведения (что толку от того, что деталь изготовлена быстро, с минимумом ресурсов, но не точно). Общим признаком интегральных критериев точности является их независимость в явной форме от управления:

$$J = \int_0^T F(\mathbf{X})dt, F_0(\mathbf{X}) > 0, \text{ время } T \text{ — не определено,} \quad (2)$$

причем критерий быстродействия является частным случаем критерия точности при $F_0(\mathbf{X}) = 1$ или критерий быстродействия является одновременно и критерием точности [3]. Можно показать [4], что в рамках общего критерия точности (2) находится также и энергосберегающий критерий расхода "сигнала управления", присутствующий в критерии обобщенной работы А. А. Красовского.

Известно, что минимизация критерия точности (например, методом динамического программирования Р. Беллмана) обеспечивается идеальными релейными управлениями:

$$u(t) = -\text{sign}(\psi(\mathbf{X})), \quad (3)$$

где $|u(t)| \leq 1$, $\psi(\mathbf{X})$ — искомая функция переключения, причем $\psi(\mathbf{X}) = 0$ — поверхность переключения, проходящая через начало координат $\psi(0) = 0$.

Стандартное решение задачи подразумевает подстановку управления (3) в уравнение Беллмана, что приводит к известным проблемам, связанным с решением нелинейного уравнения Беллмана в частных производных даже в случае линейного объекта. При этом функция Беллмана должна иметь непрерывные частные производные по всем переменным, т. е. должна быть непрерывно дифференцируемой, что часто невыполнимо, например, в оптимальных по быстродействию системах.

Как известно, если проблемы не решаются на том уровне, где они появились, то необходимо подняться на уровень выше, на более высокую ступень понимания законов природы. Уместно привести здесь слова А. Эйнштейна: "Нельзя решить любую проблему на уровне технических знаний, на которых она возникла". Возникшие проблемы трудно решить чисто математически: математика без физики — глупа, физика без математики — слепа. Мир и процессы в нем многогранны и взгляд на проблемы хотя бы еще со стороны физики приводит к основному функциональному уравнению относительно искомой функции переключения (по А. А. Красовскому — скорости проникновения поверхности переключения):

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(\mathbf{X}) &= \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dx_1} \dot{x}_1 + \frac{d\psi}{dx_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{d\psi}{dx_n} \dot{x}_n = \\ &= \mathbf{GA} + \mathbf{GB}u \end{aligned} \quad (4)$$

или

$$\dot{\psi}(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + \varphi(\mathbf{X})u. \quad (5)$$

Здесь $f(\mathbf{X}) = \mathbf{GA} = g_1(\mathbf{X})a_1(\mathbf{X}) + g_2(\mathbf{X})a_2(\mathbf{X}) + \dots + g_n(\mathbf{X})a_n(\mathbf{X})$; $\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{GB} = g_n(\mathbf{X})b_n(\mathbf{X})$, $\mathbf{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, $g_i = \partial\psi/\partial x_i \neq 0$ — неизвестные искомые функции.

Функциональное уравнение (5) справедливо во всем фазовом пространстве [4], поскольку оно является обобщенным эквивалентным уравнением объекта (1). Отметим, что соотношение (5) использовали в своих трудах многие авторы, например,

А. А. Красовский в аналитическом конструировании регуляторов (АКР) по критерию обобщенной работы для определения условия возникновения скользящего режима; Я. З. Цыпкин, Е. А. Барбашин и В. И. Уткин в исследованиях скользящих режимов; А. А. Колесников в синергетической теории управления, который назвал соотношение (5) агрегированной моделью или обобщенным функциональным уравнением и обосновал данное название. Обоснование того, что уравнение (5) эквивалентно уравнениям (1), можно найти также в трудах Ю. Н. Павловского и Ю. П. Петрова.

Из физических принципов работы эквивалентного объекта (5) следует, что управление (3) неизбежно переведет объект (5) на поверхность переключения $\psi(\mathbf{X}) = 0$, и это означает, что первый интервал управления (3) закончился.

Воспользовавшись трудами Е. А. Барбашина и используя соотношение (5), можно показать [4], что для дальнейшего управления объектом для изменения знака скорости проникновения $\dot{\psi}(\mathbf{X})$ на втором интервале, т. е. для удержания объекта на (вдоль) поверхности переключения $\psi(\mathbf{X}) = 0$, необходимо выполнить условие управляемости (реализуемости) релейной системы в виде нестрогого равенства

$$|f(\mathbf{X})| \leq \varphi(\mathbf{X}), \quad \varphi(\mathbf{X}) > 0, \quad (6)$$

которое легко осуществить в виде подчиненного управления аналогично случаю ограничения координат. Можно показать [4], что условие (6) является одновременно и условием устойчивости движения системы на втором интервале, и условием возникновения скользящего режима. Чем ближе условие (6) к строгому равенству, тем более быстрым будет процесс управления второго интервала, а при равенстве получим оптимальное быстроедействие на втором интервале. Однако появляется проблема: управление на втором интервале чисто математически по формуле (3) определить невозможно, поскольку на этом интервале $\psi(\mathbf{X}) = 0$.

Воспользовавшись трудами В. И. Уткина, можно показать, что в силу оптимального управления (3) на втором интервале появляется эквивалентное (особое) управление, следующее из уравнения (5): $u_2 = -f(\mathbf{X})/\varphi(\mathbf{X})$ и не определяемое современными математическими методами. В реальных системах характеристики реле не идеальны, в результате управление изменяет знак несколько позже, чем изменяется знак $\psi(\mathbf{X})$, поэтому эквивалентное управление второго интервала математически точно можно представить в виде

$$u_2 = -(f(\mathbf{X})/\varphi(\mathbf{X}))\text{sign}(f(\mathbf{X})), \quad (7)$$

причем $|u_2| \leq 1$, а подсигнатурная функция $f(\mathbf{X})$ играет роль функции переключения $\psi_2(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X})$ при движении системы на втором интервале вдоль многообразия $\psi_1(\mathbf{X}) = \psi(\mathbf{X}) = 0$.

Решим последнее уравнение относительно самой младшей координаты x_1 : $x_1 = -\psi^*(x_2, x_3, \dots, x_n)$ и

подставим последнее соотношение в уравнение (7). Воспользовавшись трудами А. А. Колесникова, приходим к выводу о сжатии фазового пространства, в котором уже не будут координаты x_1 . Поэтому условие (6) можно назвать условием сжатия фазового пространства. При применении последовательно $(n - 1)$ раз условия (6) фазовое пространство постепенно сжимается до единицы [4], причем

$$|u_n| < |u_{n-1}| < \dots < |u_2| < |u| = 1, \\ u_i = -\frac{f_{i-1}(x_i, \dots, x_n)}{\varphi_{i-1}(x_i, \dots, x_n)} \cdot \text{sign}[\psi_i(x_i, \dots, x_n)],$$

$i = 2, 3, \dots, n$, а последняя функция переключения $\psi_n(\mathbf{X}) = x_n$.

Функции $g_i(\mathbf{X}) \neq 0$ в уравнении (4) и условии (6) могут быть какие угодно, в частном случае (для облегчения интегрирования функции $\dot{\psi}(\mathbf{X})$) выбираем (например, произвольно) $g_i = \text{const} \neq 0$ (что означает решение задачи управления с оптимальной точностью с помощью линейных обратных связей).

В частном случае, при $g_i = \text{const} \neq 0$ из уравнения (4) получаем искомое решение задачи в отклонениях:

$$\psi(\mathbf{X}) = g_1 x_1 + g_2 x_2 + \dots + g_n x_n \\ \text{и } u = -\text{sign}(\psi(\mathbf{X})), \quad (8)$$

где вместо отклонений x_i необходимо подставить реальные координаты $x_i \Rightarrow x_i - x_{i\text{зад}}$ или $x_i \Rightarrow x_i - x_{i\text{возм}}$. Здесь $x_{i\text{зад}}$ — задание (управление) по соответствующей координате, $x_{i\text{возм}}$ — возмущающие воздействия (задания) или помехи (это тоже управления, но неизвестные нам, они могут быть как вредными, так и полезными, ради которых и создается система, например, момент нагрузки, который мешает искомому управлению).

Прикладная интерпретация применительно к электроприводам

Применительно к электроприводам (это объект, как правило, третьего порядка с одним входом управления) различают три основные задачи (по числу независимых координат): управление моментом (током) x_3 , управление скоростью x_2 и управление положением вала привода x_1 .

Найденное управление (8) получено из уравнений возмущенного движения и сводит к нулю (оптимально по точности) все отклонения (возмущения), по какой бы причине они ни возникли. Следовательно, управление в отклонениях (8) можно использовать для определения оптимального управления по любой реальной координате.

Например, управление по реальной координате x_1 (угол поворота вала двигателя):

$$u = \text{sign}(x_{1\text{зад}} - x_1 - a x_2 + b(x_n - x_3)),$$

где $a = g_2/g_1$; $b = g_3/g_1$; x_n — возмущение по координате x_3 (по току), пропорциональное моменту

нагрузки. Так как момент нагрузки неизвестен, то отклонение тока $x_3 - x_H$ выражают часто через производные от координат из уравнений объекта (1), причем производные получают с помощью наблюдающих за реальными координатами объекта устройств, используя для синтеза наблюдающих устройств тот же рассматриваемый метод.

Управление по другой реальной координате x_2 (скорость вращения вала двигателя):

$$u = \text{sign}(x_{2\text{зад}} - x_2 + c(x_H - x_3)),$$

где $c = g_3/g_2$.

Управление по x_3 (ток двигателя или момент):

$$u = \text{sign}(x_{3\text{зад}} - x_3).$$

Здесь $g_1 = g_2 = 0$. Можно показать [4], что управление по току двигателя (моменту) будет оптимально одновременно и по быстродействию.

Применяя метод подчиненного управления, также легко определить управление при ограничении любых координат [4] или их комбинаций, например, условие (6).

Часто возникает задача управления двумя координатами. Например, в приводе сканера антенны необходимо стабилизировать скорость и одновременно положение вала привода на каждом периоде вращения. Управление по реальной координате x_2 (скорость):

$$u = \text{sign}(x_{2\text{зад}} - x_2 + a(x_H - x_3) + b(x_{1\text{зад}} - x_1)).$$

Из последнего выражения следует, что в приводе сканера антенны необходимо искусственно организовать дополнительный вход возмущения (управления) по координате $x_{1\text{зад}}$, выполняющий роль полезного возмущения. Поскольку $x_{1\text{зад}}$ должна быть линейно возрастающей функцией: $x_{1\text{зад}} = x_2 t + \varphi_{\text{зад}}$, что трудно реализовать, можно взять в качестве датчика, например, вращающийся трансформатор, вал которого соединен с валом привода. При этом $x_{1\text{зад}} = \sin(x_2 t + \varphi_{\text{зад}})$. Для увеличения точности позиционирования можно использовать и вторую (косинусную) обмотку вращающегося трансформатора.

Иллюстрация полученных результатов исследования

Пусть электропривод постоянного тока задан системой уравнений в отклонениях:

$$\dot{\varphi}' = \omega; \quad \dot{\omega}' = i; \quad i' = u; \quad |u| \leq 1, \quad (9)$$

где φ — угол поворота вала привода; ω — скорость вращения вала двигателя; i — сила тока двигателя.

Это система третьего порядка. Здесь три интервала, и необходимо принудительно выполнить два ограничения (6) или доказать, что они автоматически выполняются.

Составим функциональное уравнение (3) для объекта (9), предполагая $g_i = \text{const} \neq 0$, $g_1 = 1$:

$$\psi'(X) = \varphi' + a\omega' + bi' = \omega + ai + bu. \quad (10)$$

Запишем условие (6) для первого интервала: $|\omega + ai| \leq b$ или

$$|\psi_2| \leq 1, \quad \psi_2 = \frac{\omega + ai}{b}, \quad (11)$$

где ψ_2 — функция переключения второго интервала.

Функциональное уравнение второго интервала:

$$\psi_2' = \frac{\omega' + ai'}{b} = \frac{i + au}{b}.$$

Условие (6) для второго интервала: $|i| \leq a$ или

$$|\psi_3| \leq 1, \quad \psi_3 = \frac{i}{a}, \quad (12)$$

где ψ_3 — функция переключения третьего интервала.

Интегрируя уравнение (10) и используя принцип подчиненного управления для учета ограничений (11) и (12), запишем оптимальное по точности управление для реальных координат:

$$u = \text{sign} \left(\text{sign} \left(\text{sign} \left(\sin(\omega_{\text{зад}} t - \sin \varphi + a(\omega_{\text{зад}} - \omega) + b(i_H - i)) - \frac{\omega + ai}{b} \right) - \frac{i}{a} \right) \right), \quad (13)$$

где $\varphi_{\text{зад}} = 0$ и $i_H = 0$.

На рис. 1 (см. вторую сторону обложки) приведены результаты моделирования объекта (9) с управлением (13) в режиме разгона привода.

Исследование работы объекта (9) с управлением (13) в режиме разгона и вывода на заданную скорость, например $\omega_{\text{зад}} = 90 \text{ с}^{-1}$, и наибольшим быстродействием приводит к величинам $a = 1$ и $b = 4,75$, при этом ограничения (11) и (12) выполняются автоматически, и их нет необходимости учитывать:

$$u = \text{sign}(\text{sign}(\sin(\omega_{\text{зад}} t - \sin \varphi - \omega - 4,75i))). \quad (14)$$

Из рис. 1 следует, что отработка заданной скорости происходит оптимально по быстродействию. На графике управления (рис. 1) не показан скользящий режим, возникающий по окончании переходного процесса. На рис. 2 (см. третью сторону обложки) приведены результаты моделирования объекта (9) с управлением (13) или (14) в режиме стабилизации скорости и отработки угла поворота вала привода.

Из рис. 2 следует, что при стабилизации скорости отработка угла в системе происходит практически с нулевой ошибкой (в данном случае ошибка вызвана дискретностью вычислений при моделировании на ЦВМ).

Таким образом, к настоящему моменту времени сотрудниками кафедры электротехники и электрооборудования ТулГУ предложены пути решения проблем, связанных с оптимальными по точности системами управления нелинейными объектами высокого порядка.

Дальнейшее рассмотрение проблем оптимального управления с точки зрения физики с привлечением математики и учетом законов природы позволит решить главную проблему теории оптимальных систем — проблему оптимального быстродействия.

1. Красовский А. А. Проблемы физической теории управления // Автоматика и телемеханика. 1990. № 11. С. 3—28.
2. Филимонов Н. Б. Методологический кризис "всепобеждающей математизации" современной теории управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Том 17, № 5. С. 291—299.
3. Сурков В. В., Сухинин Б. В., Ловчаков В. И., Феофилов Е. И. Оптимальные управления в релейных системах // Известия вузов. Электромеханика. 2002. № 6. С. 29—35.
4. Сурков В. В., Сухинин Б. В., Ловчаков В. И., Соловьев А. Э. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов по критериям точности, быстродействию, энергосбережению. Монография. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. 300 с.

To the Question on Methodological Crisis of the Modern Theory of Optimum Control

B. V. Suhinin, eeo@uic.tula.ru, V. V. Surkov, vvs150747@mail.ru,
The Tula State University, Tula, 300012, Tula Branch, Russian Federation

Corresponding author: Surkov Victor V., Dr. Sci. Tech., Prof.,
The Tula State University, Tula, 300012, Tula Branch, Russian Federation,
e-mail: vvs150747@mail.ru

Accepted on September 07, 2017

It is known that if problems do not dare at that level where they have appeared — it is necessary to rise on level above, on a higher step of understanding of laws of the nature. Optimum control problems cannot be solved purely matematically: the mathematics without physics — is silly, the physics without mathematics — is blind. It is offered to look at problems of a method of dynamic programming of R. Bellman having methodological value, at least still from outside the physical phenomena. It allows to solve optimum control problems multidimensional installation of a high order, in that count also nonlinear. The principle of R. Bellman has a methodological importance — it is possible to control everything and everybody if three conditions are met: the object of control is known, the ultimate goal of control is known and the criterion of an estimation of quality of control is known. If there is no at least one of them — there is no sense to get down to the solution of a control problem. It is meant that there are at least two co-operating blocks in control tasks: the control object and the subject of control, i.e. a person (manual control) or a control system — an automatic steering block which often called a regulator. Questions of the optimum control theory with reference to technics and, in particular, to electric drives are considered in this paper. Ways to solve the problems of control systems optimum on accuracy for nonlinear objects of high order are offered. By example of a direct-current drive it is shown that usage of the physical and mathematical theory will allow to achieve small errors (no more than 20 arc sec.) on minimal speeds of tracking (up to 0,01 deg./sec.) with friction torque and load fluctuations during operation, with presence of a reducer backlash that is 10 times greater than admissible error, with a nonrigid and unbalanced design of an actuator. The theory also allows to create a hi-tech industrial equipment (for ex., precision rigs) and prospective types of weapons and military equipment (for ex., high-precision radar tracking stations).

Keywords: analytical constraction, optimum control, the decomposition, the subordinated control, optimum accuracy, optimum speed, stability, the functional equation, a controllability condition

For citation:

Suhinin B. V., Surkov V. V. To the Question on Methodological Crisis of the Modern Theory of Optimum Control, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 26—30.

DOI: 10.17587/mau.19.26-30

References

1. Krasovskij A. A. *Problemy fizicheskoy teorii upravleniya* (Problem of physical control theory), *Automatics and Teleautomatics*, 1990, no. 11. pp. 3—28 (in Russian).

2. Filimonov N. B. *Metodologicheskij krizis "vsepobezhdajushhej matematizacii" sovremennoj teorii upravleniya* (Methodological crisis of "all-conquering mathematization" modern control theory), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, vol. 17, 2016, no. 5, pp. 291—299 (in Russian).
3. Surkov V. V., Suhinin B. V., Lovchakov V. I., Feofilov E. I. *Optimal'nye upravleniya v relejnyh sistemah* (Optimum of control in relay systems), *Izvestija Vuzov. Jelektromehaniika*, 2002, no. 6, pp. 29—35 (in Russian).
4. Surkov V. V., Suhinin B. V., Lovchakov V. I., Solov'ev A. Je. *Analiticheskoe konstruirovanie optimal'nyh reguljatorov po kriterijam tochnosti, bystrodejstviju, jenergosberezeniju*, (Analytical's constraction of optimum regulators by criteria of accuracy, speed, power savings), Tula, Publishing house of TulGU, 2005, 300 p. (in Russian).

М. В. Голицына, аспирант, Kulikovskaya-Mary@yandex.ru,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Оптимальный выбор ускорения маятника в задачах управления вибрационным роботом

Рассматривается движение вибрационного робота, представленного жестким корпусом и физическим маятником, закрепленным в его центре, управление осуществляется за счет выбора углового ускорения маятника. Исследуется некоторый класс движений и управление, которое обеспечивает движение робота в желаемом направлении в рамках заданных ограничений. Приводится обоснование оптимальности с точки зрения максимизации скорости робота рассматриваемого закона управления в некотором классе движений.

Ключевые слова: вибрационный робот, управление, оптимальность, математическое моделирование, сухое трение

Введение

Современный мир уже невозможно представить без роботов, позволяющих решать поставленные человеком задачи. Отдельный класс роботов умеет перемещаться в пространстве, и существует множество механизмов, обеспечивающих его движение. Нередко для перемещения робота требуются внешние детали — колеса, ноги, гусеницы и пр. Однако есть и такие, которым не требуется никаких внешних устройств, их перемещение обеспечивается за счет колебаний составляющих робота, такие механизмы носят название вибрационные роботы.

Движение вибрационного робота по плоскости исследовалось в работах [1–5]. В работах [1, 2] среди внутренних тел присутствует вращающийся ротор. Движение робота в вязкой среде рассмотрено в работах [3, 4]. В этих статьях система представлена корпусом с двумя подвижными внутренними массами, перемещающимися вдоль горизонтальной оси симметрии корпуса.

Прямолинейное движение по горизонтальной плоскости вибрационных роботов, представленных телом и несколькими внутренними массами, двигающимися поступательно, рассмотрено в работах [6, 7].

Отдельно можно выделить вибрационные роботы с одной внутренней массой, которая перемещается по горизонтали. В работах [7–11] рассматриваются такие системы и исследуются периодические режимы управления. В том числе в этих работах происходит поиск оптимального управления с целью максимизировать скорость робота.

В данной работе также рассматривается движение робота с одним подвижным внутренним элементом.

Особенности исследуемой задачи

В статье анализируется управление вибрационным роботом, представленным жестким корпусом массы M в форме параллелепипеда и физическим

маятником массы m , закрепленным в его центре (рис. 1). Движение происходит с сухим трением по горизонтальной плоскости в поле силы тяжести. Длина от точки закрепления до центра масс маятника равна l .

Особенность рассматриваемой ниже модели заключается в том, что за счет вращательных движений внутренней массы управляющий момент может влиять не только на знак, но и на модуль силы трения. Такой робот также рассматривался в работах [12, 13]. В статье [12] предполагается, что угловая скорость маятника постоянна, проведен параметрический анализ системы, в работе [13] предполагается, что система представляет собой микроробот, и управление происходит за счет выбора угловой скорости.

В данной работе управление осуществляется посредством выбора углового ускорения маятника. В статье исследуется закон управления с симметричным ограничением на угловое ускорение маятника, рассмотренным в работе [14], и доказываются оптимальность такого управления в некотором классе движений.

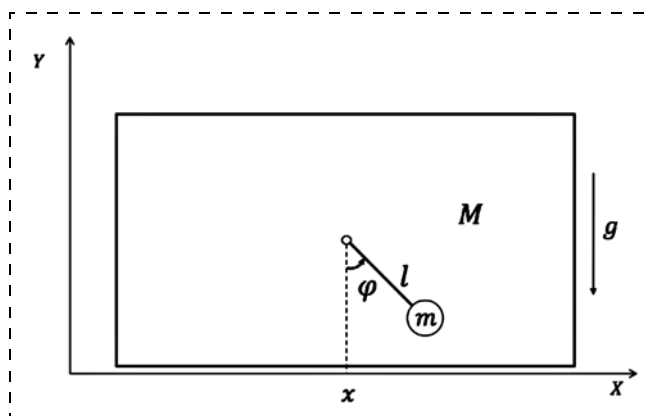


Рис. 1. Рассматриваемая конструкция вибрационного робота

Движение робота определяется углом φ отклонения маятника от направления ускорения свободного падения, отсчитываемым против часовой стрелки, и координатой центра масс корпуса x (рис. 1). Рассматривается система, для которой выполняются следующие условия:

1) размер корпуса робота достаточно велик, чтобы обеспечить неопрокидывание системы;

2) управление роботом осуществляется за счет выбора углового ускорения маятника $\ddot{\varphi}$.

Класс исследуемых управлений должен обеспечить движение робота, такое что:

1) сила реакции опоры неотрицательна, что обеспечивает безотрывное движение корпуса:

$$N \geq 0; \quad (1)$$

2) в течение одного оборота маятника движение робота проходит две фазы:

$\dot{x} > 0$ — фаза скольжения, $\dot{x} = 0$ — фаза покоя; (2)

3) угловая скорость маятника

$$\dot{\varphi} > 0; \quad (3)$$

4) движение робота периодическое с некоторым не заданным наперед периодом T , т. е. должны выполняться следующие условия:

$$\varphi(T) = \varphi(0) + 2\pi, \quad \dot{\varphi}(T) = \dot{\varphi}(0), \quad \dot{x}(T) = \dot{x}(0); \quad (4)$$

5) на модуль углового ускорения наложено ограничение:

$$|\ddot{\varphi}| \leq \ddot{\varphi}_{\max} \quad (5)$$

(характеризующее технические ограничения мотора, передающего момент вращения маятнику);

6) управление обеспечивает максимизацию средней скорости движения корпуса вибрационного робота.

Определим уравнения, характеризующие движение системы. Поскольку в рамках рассматриваемого класса движений корпус робота не совершает подскока, то движение системы определяется следующими уравнениями:

$$(m + M)\ddot{X}_{cr} = R; \quad (6)$$

$$R = \begin{cases} -\mu N \text{sign}(\dot{x}), & \dot{x} \neq 0; \\ ml(\sin\varphi)''', & \dot{x} = 0 \text{ и } ml|(\sin\varphi)''| \leq \mu|N|; \\ \mu N \text{sign}(\sin\varphi)'', & \dot{x} = 0 \text{ и } ml|(\sin\varphi)''| > \mu|N|; \end{cases} \quad (7)$$

$$N = (m + M)g - ml(\cos\varphi)''. \quad (8)$$

Здесь $X_{cr} = \frac{Mx + m(x + l\sin\varphi)}{m + M}$ — координата центра масс всей системы, N — сила реакции опоры, μ — коэффициент силы сухого трения.

Выпишем уравнение движения центра масс системы вдоль оси x для случая $\dot{x} > 0$:

$$(m + M)\ddot{X}_{cr} = -\mu N. \quad (9)$$

Введем безразмерные и характерные величины:

$$\tilde{x} = \frac{x}{\eta}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{\phi}. \quad (10)$$

Здесь через (η, τ, ϕ) обозначены характерные, а через $(\tilde{}, \tilde{}, \tilde{})$ — безразмерные величины. Все дальнейшие выводы будут сделаны для безразмерных величин и " $\sim$ " в их обозначении будут опущены.

Характерные величины определим следующим

$$\text{образом: } \eta = \frac{ml}{m + M}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\eta}{g}}, \quad \phi = 1 \text{ рад.}$$

После подстановки в уравнение (8) замен (10) получаем следующее выражение для силы нормальной реакции опоры:

$$N = 1 - (\cos\varphi)''. \quad (11)$$

Подставив выражения (11) в уравнение (9) и учитывая замены (10), получаем

$$(x + (\sin\varphi - \mu\cos\varphi))'' = -\mu. \quad (12)$$

Уравнение (12) — это уравнение движения на фазе скольжения. Как видно, в безразмерных величинах в уравнение движения входит один параметр — μ .

Аналогично можно рассмотреть уравнение движения центра масс в проекции на ось x для случая $\dot{x}' = 0$. Ниже представлены уравнения движения маятника, определенного конусом трения при покое корпуса робота, которые соответствуют движению, при котором трение имеет максимальное по модулю значение и направлено в сторону роста x (первое уравнение) и в сторону уменьшения x (второе уравнение):

$$(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)'' = \mu; \quad (13a)$$

$$(\sin\varphi - \mu\cos\varphi)'' = -\mu. \quad (13b)$$

Закон управления

В статье [14] рассматривается управление, удовлетворяющее описанным ограничениям, его можно представить в виде системы

$$\varphi'' = \begin{cases} -\varphi''_{\max}, & \varphi_0 < \varphi < \varphi_1; \\ \frac{-1 - (\varphi')^2 \cos\varphi}{\sin\varphi}, & \varphi_1 < \varphi < \varphi_2; \\ \varphi''_{\max}, & \varphi_2 < \varphi < \varphi_3; \\ \frac{\mu + (\varphi')^2 (\sin\varphi + \mu\cos\varphi)}{\cos\varphi - \mu\sin\varphi}, & \varphi_3 < \varphi < \varphi_4; \\ \varphi''_{\max}, & \varphi_4 < \varphi \leq 2\pi \cup 0 \leq \varphi \leq \varphi_0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь через углы $\varphi_0, \dots, \varphi_4$ обозначены углы переключения между режимами, которые могут быть однозначно получены в зависимости от значения $\varphi''_{\max}$ при известном μ . Основная идея этого управления состоит в том, чтобы обеспечивать на наибольшем, при существующих ограничениях, участке движения нулевое значение силы трения ($N = 0$).

Нулевое трение при таком управлении обеспечивается и при вертикальном положении маятника $\varphi = \pi$, это позволяет однозначно из выражения (11) определить соответствующую угловую скорость $\dot{\varphi}' = 1$. Зная угол и угловую скорость, можно определить значения этих фазовых переменных на границах участка движения без трения, которые определяются выходом значения углового ускорения маятника за ограничение $|\varphi''| \leq \varphi''_{\max}$.

До участка без трения есть участок движения с $N > 0$ с управлением $\varphi'' = -\varphi''_{\max}$ (первое уравнение системы (14)), как только это становится возможным, движение робота определяется равенством нулю трения (второе уравнение системы (14)), в тот момент, когда ускорение, требуемое для обеспечения $N = 0$, становится равным $\varphi''_{\max}$, происходит переключение на управление $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ (третье уравнение системы (14)). Далее в какой-то момент происходит остановка корпуса (при $\varphi = \varphi_3$), и система переходит в фазу покоя.

Управление на фазе покоя построено из соображения максимизации угловой скорости маятника на этом участке при условии, что начальные и конечные условия этой фазы заданы. Таким образом, сначала маятник совершает максимальный, в рамках ограничений, разгон, а потом торможение. Разгон сначала определяется условием покоя — уравнением (13а), определяющим конус трения с положительным направлением силы трения (четвертое уравнение системы (14)), а потом, когда это становится возможным, ограничением на угловое ускорение $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ (пятое уравнение системы (14)), после этого происходит торможение системы $\varphi'' = -\varphi''_{\max}$, пока робот естественным образом не начнет движение (первое уравнение системы (14)).

Таким образом, первое уравнение системы (14) соответствует частично фазе покоя, частично фазе движения, следующие два — фазе движения, и последние два — фазе покоя. Отметим, что при движении без трения на робот не действуют никаких внешних горизонтальных сил ($X''_{cr} = 0$), при этом ограничения на максимум и минимум углового ускорения симметричны, поэтому $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1$, $\varphi'_1 = \varphi'_2$ и $x'_1 = x'_2$.

Более подробно вывод этого управления рассмотрен в статье [14]. В данной работе рассматривается вопрос об оптимальности данного управления, т. е. задачу можно сформулировать следующим образом.

Для робота, движение которого определяется уравнениями (6)–(8), рассматриваются периодические режимы движения робота при ограничениях (1)–(5). Необходимо обосновать оптимальность управления (14) роботом в некотором классе движения с точки зрения максимизации средней скорости робота:

$$\dot{x}_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) dt. \quad (15)$$

Замечание 1. В силу периодичности рассматриваемых решений максимизация средней скорости корпуса робота $\dot{x}_{av}$ и средней скорости центра масс $\dot{X}'_{crav}$ — эквивалентные задачи.

Обоснование оптимальности

При движении робота с управлением (14) для углов $\pi \leq \varphi \leq \varphi_3$ угловое ускорение маятника опре-

деляется ограничением: сначала $\varphi' = -\frac{1 + \varphi'^2 \cos \varphi}{\sin \varphi}$

(при $N = 0$), и если угловое ускорение окажется больше определенного этим уравнением, то робот будет вынужден совершить подскок. В тот момент, когда угловое ускорение, определенное уравнением $N = 0$, станет больше $\varphi''_{\max}$, максимально допустимое угловое ускорение маятника $\varphi'' = \varphi''_{\max}$, которое и является управлением на оставшемся участке. Иными словами, для каждого набора (φ, φ') для исследуемых углов построенное управление обеспечивает максимум φ'' в заданных ограничениях задачи.

Докажем следующую теорему:

Теорема 1. Для рассматриваемого робота при заданных начальных условиях при движении корпуса ($x' > 0$) для всех положений маятника $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ максимально возможное ускорение обеспечивает максимум скорости центра масс $\dot{X}'_{cr}$.

Доказательство теоремы 1.

Предположим, что есть два разных управления: движение с максимальным угловым ускорением в имеющихся ограничениях задачи ($\varphi'' = \varphi''_{\max}$) и движение с ускорением φ''^* , где-то меньшим $\varphi''_{\max}$.

Отметим, что в общем случае $\varphi''_{\max}$ не равно $\varphi''_{\max}$, поскольку, например, условие $N \geq 0$ может накладывать более строгие границы на значение углового ускорения, чем $|\varphi''| \leq \varphi''_{\max}$.

Обозначим $\hat{\varphi}_0, \hat{\varphi}'_0, \hat{x}'_0$ угол, угловую скорость маятника и скорость корпуса в момент, когда в первый раз управление $\varphi''^* \neq \varphi''_{\max}$.

Доказательство этой теоремы будет состоять из следующих шагов:

1. Сначала покажем, что управление вида $\varphi'' = a$ обеспечивает большую скорость центра масс, чем $\varphi'' = b$, где $a > b$, a, b — константы.

2. Покажем также, что управление вида $\varphi'' = a$ даст большую скорость центра масс, чем управление вида $\varphi'' = a$ до некоторого угла φ^* и $\varphi'' = b$ — после этого угла ($a > b$, a, b — константы).

3. Покажем, что управление вида $\varphi'' = a$ даст большую скорость центра масс, чем управление вида $\varphi'' = b$ до некоторого угла φ^* , и $\varphi'' = a$ — после этого угла ($a > b$, a, b — константы).

4. На основании ранее доказанных пунктов сделаем обобщение для доказательства утверждения теоремы 1.

Первый пункт доказательства рассмотрим в качестве отдельной леммы.

Лемма 1. При движении корпуса робота в положительном направлении, при заданных начальных условиях управление вида $\varphi'' = a$ обеспечивает большую скорость центра масс корпуса X'_{cr} для каждого угла $\hat{\varphi}_0 \leq \varphi \leq 2\pi$, чем управления вида $\varphi'' = b$, где $a > b$, a, b — константы.

Если уравнение (6) представить в безразмерных величинах (с помощью подстановок (10)), из него выразить ускорение центра масс и проинтегрировать, то получится, что скорость центра масс будет равна

$$X'_{cr} = -\mu(t + \varphi' \sin \varphi) + c. \quad (16)$$

Доказательство леммы 1 заключается в сравнении $X'_{cr_a} \vee X'_{cr_b}$ (здесь индексы отображают константы управления). Для доказательства $X'_{cr_a} > X'_{cr_b}$ нужно показать, что

$$t_a + \varphi'_a \sin \varphi < t_b + \varphi'_b \sin \varphi. \quad (17)$$

В уравнении (17) индексами отмечены величины, полученные при соответствующих константах управления. Детали сравнения из-за объемности рассуждений выходят за рамки данной статьи, отметим лишь, что доказательство не зависит от выбора $\hat{\varphi}_0$.

Если теперь положить, что после $\varphi = \hat{\varphi}_0$ управление $\varphi'' = a$, а потом для некоторого положения маятника $\varphi = \varphi^*$ происходит переключение на значение $\varphi'' = b$ (здесь $a > b$), то для каждого угла скорость центра масс будет не больше, чем для случая, где везде на этом участке движения управление равно a . Это следует из предыдущей леммы, поскольку доказательство не зависело от выбора угла $\hat{\varphi}_0$. Таким образом, был пояснен второй пункт доказательства теоремы 1.

Теперь рассмотрим случай, когда после $\varphi = \hat{\varphi}$ сначала движение робота совершается с ускорением $\varphi'' = b$ до угла φ^* , а потом происходит переключение на значение ускорения $\varphi'' = a$. Покажем, что этот случай также хуже с точки зрения средней скорости центра масс, чем управление вида $\varphi'' = a$ на всем участке торможения с трением.

Лемма 2. При движении корпуса робота в положительном направлении при заданных начальных условиях управление вида $\varphi'' = a$ обеспечивает большую скорость центра масс корпуса X'_{cr} для каждого угла $\hat{\varphi}_0 \leq \varphi \leq 2\pi$, чем управление вида $\varphi'' = b$ до некоторого угла $\varphi^* > \hat{\varphi}_0$ и управление вида $\varphi'' = a$ после, где $a > b$, a, b — константы.

Доказательство леммы 2.

Аналогично доказательству предыдущей леммы будем сравнивать скорости X'_{cr} , представленные через синус и время. Отбросим так же, как и там, константы интегрирования и домножение на $-\mu$ (так как они одинаковы) и будем сравнивать следующие величины:

$$t_{21} + \varphi'_{21} \sin \varphi < t_{22} + \varphi'_{22} \sin \varphi. \quad (18)$$

Слева в выражении (18) стоит величина, характеризующая скорость центра масс системы при управлении на всем рассматриваемом участке вида $\varphi'' = a$, а справа — величина, соответствующая скорости при втором варианте управления леммы. Здесь происходит сравнение для равных углов, поэтому времена и угловые скорости различны и помечены индексами. Случай, когда рассматриваемый угол меньше φ^* , рассмотрен в лемме 1, положим, что $\varphi > \varphi^*$.

Перенесем в левую часть выражения при синусах, а вправо — время:

$$(\varphi'_{21} - \varphi'_{22}) \sin \varphi \vee t_{22} - t_{21}.$$

Далее при доказательстве показывается, что с одной стороны $(\varphi'_{21} - \varphi'_{22}) > 0$, с другой стороны, $t_{22} > t_{11}$ (детали доказательства опущены в силу объемности). При этом $\sin \varphi \leq 0$ на рассматриваемом участке, поэтому неравенство (18) справедливо.

Это эквивалентно тому, что суммарное торможение системы для каждого из рассматриваемых углов оказывается меньше при $\varphi'' = a$. За торможение системы при движении отвечает сила трения, которая определяется значением силы нормальной реакции опоры N .

Благодаря лемме 2 можно также показать, что управление a - b - a хуже (с точки зрения скорости центра масс), чем управление a (a - b - a — это последовательность переключения углового ускорения) на рассматриваемом участке движения. Это следует из леммы 2, так как ключевым фактором при сравнении являлось равенство начальных условий для разных управлений.

Поскольку время движения по управлению b не играло никакой роли в доказательстве леммы 2, то его можно полагать сколь угодно малым, неравенство при этом сохранится.

Так как любое управление можно приблизить кусочно-постоянным, то, пользуясь леммами 1 и 2, можно показать, что управление вида $\varphi'' = \varphi''_{\text{maximum}}$ дает наилучший результат с точки зрения скорости центра масс робота.

Таким образом, теорема 1 доказана.

Следствие 1. Для рассматриваемого робота при заданных начальных условиях при движении корпуса ($x' > 0$) для всех положений маятника $0 \leq \varphi \leq \pi$ минимально возможное ускорение обеспечивает максимум скорости центра масс X'_{cr} .

Доказательство следствия для участка движения робота от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$ аналогично доказательству самой теоремы 1. Для доказательства используется переход в обратное время, остальные рассуждения такие же.

Рассмотрим случай, когда заданы граничные значения фазовых переменных, и определим управление между ними такое, что скорость центра масс системы максимальна. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Если для рассматриваемого робота:

1) при положении $\varphi = \varphi_2$ его угловая скорость $\varphi' = \varphi'_2$ и скорость корпуса $x' = x'_2$ такие, что $N(\varphi_2, \varphi'_2, \varphi''_{\max}) = 0$, $(\cos\varphi_2 + \mu\sin\varphi_2) > 0$ и $\varphi'_2 = \sqrt{2(1 + \cos\varphi_2)} |\operatorname{cosec}\varphi_2|$;

2) при положении $\varphi = \varphi_1 + 2\pi$ угловая скорость маятника и скорость корпуса, равные φ'_1 и x'_1 , соответственно такие, что $N(\varphi_1, \varphi'_1, \varphi''_{\max}) = 0$ и $\varphi'_1 = \sqrt{2(1 + \cos\varphi_1)} |\operatorname{cosec}\varphi_1|$;

3) x'_1 и x'_2 определяются управлением (14);

4) при управлении $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ для участка движения после угла φ_2 остановка корпуса происходит до вертикального положения маятника $\varphi = 2\pi$;

5) $\varphi''_{\max} > \mu$, то для каждого положения угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$ максимальную скорость центра масс корпуса X'_{cr} будет обеспечивать следующее управление:

1) $\varphi'' = \varphi''_{\max}$, $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$;

2) $\varphi'' = \frac{\mu + \varphi'^2(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)}{\cos\varphi - \mu\sin\varphi}$, $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4$;

3) $\varphi'' = \varphi''_{\max}$, $\varphi_4 \leq \varphi \leq \varphi_5$;

4) $\varphi'' = -\varphi''_{\max}$, $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$.

Здесь углы переключения между участками управления те же, что и ранее, определенные управлением (14) ($\varphi_5 = \varphi_0 + 2\pi$).

Доказательство этой теоремы будет состоять из четырех шагов.

1. Покажем, что в фазе покоя при заданных граничных значениях управление строится из следующего соображения: сначала максимальный разгон маятника, потом — максимальное торможение.

2. Покажем, что выбор управления $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ будет давать наибольшее значение X'_{cr} для всех углов $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$. Рассуждения для последнего участка управления ($\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$) будут аналогичны.

3. Далее покажем, что при известных начальных условиях фазы покоя и при известном конечном угле и угловой скорости рассматриваемого участка (не обязательно конца фазы покоя) для всех промежуточных углов предложенное управление обеспечивает максимум скорости центра масс.

4. После этого с помощью доказанных пунктов обоснуем утверждение теоремы.

Первый пункт доказательства следует из следующей леммы.

Лемма 3. Во время фазы покоя управление (14) обеспечивает максимальную скорость вращения маятника на фазе покоя для каждого положения маятника и, соответственно, максимальную скорость центра масс системы X'_{cr} .

Доказательство данной леммы в данной статье приводиться не будет, оно подробно представлено в статье [14].

Рассмотрим второй пункт доказательства.

При рассматриваемых начальных условиях на момент t_2 (когда $\varphi = \varphi_2$) сила нормальной реакции опоры $N = 0$ при заданных $\varphi' = \varphi'_2$ и $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ (следует из первого пункта условий теоремы 2). Для углов $\varphi > \varphi_2$ при движении корпуса разрешенный максимум углового ускорения будет определяться ограничением $\varphi''_{\max} = \varphi''_{\max}$, N при этом станет положительной (для обеспечения нуля нормальной реакции опоры необходимо, чтобы $\varphi'' > \varphi''_{\max}$), и корпус робота начнет торможение.

Таким образом, можно воспользоваться теоремой 1, из которой следует, что вплоть до остановки корпуса ($\varphi_3 < 2\pi$ по условию) управление $\varphi''_{\max}$ будет обеспечивать максимум X'_{cr} для любого угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$.

Вместе с тем, φ'_1 и x'_1 для угла $\varphi_1 + 2\pi$ определены таким образом, что до этого положения при движении корпуса нижнее ограничение на угловое ускорение равно минимально допустимому значению в рамках ограничений задачи $\varphi''_{\min} = -\varphi''_{\max}$. Управление, обеспечивающее максимум скорости X'_{cr} для каждого угла, на этом участке, согласно следствию 1, определяется минимальным значением углового ускорения $\varphi'' = \varphi''_{\min} = -\varphi''_{\max}$.

Таким образом, показано, что на каждом из участков движения по отдельности ($\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$, $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_5$ и $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$) предложенный закон управления обеспечивает максимум скорости центра масс системы X'_{cr} для всех промежуточных углов.

Рассмотрим теперь весь участок с остановки корпуса до $\varphi_1 + 2\pi$.

Лемма 4. Пусть выполняются следующие условия:

1) $\varphi''_{\max} \geq \mu$;

2) φ_3, φ'_3 — заданный угол и угловая скорость на начало фазы покоя, причем $\frac{3\pi}{2} \leq \varphi_3 \leq 2\pi$;

3) φ_7, φ'_7 — заданный угол и угловая скорость конца рассматриваемого участка, причем $2\pi \leq \varphi_7 \leq \frac{5\pi}{2}$ и $N(\varphi_7, \varphi'_7, -\varphi''_{\max})$;

4) Участки управления 2—4 теоремы 2 могут перевести систему из начального состояния в конечное, при этом соответствующий угол переключения с 3 на 4 управления $\varphi_5 > 2\pi$.

Тогда управление 2—4 теоремы 2 для всех углов $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_7$ обеспечивает максимальную скорость центра масс системы.

Доказательство леммы 4.

Из доказательства леммы 3 (см. [14]) следует, что предложенное управление на всех углах $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_7$ обеспечивает максимум угловой скорости φ' .

Допустим, что $x'_7 > 0$ при угле φ_7 . Обозначим угол начала движения и соответствующую ему угловую скорость через φ_6 и φ'_6 , скорость корпуса в этот момент будет равна нулю по построению: $x'_6 = 0$.

Покажем, что любое другое управление обеспечит меньшую скорость центра масс системы для каждого угла.

Доказательство леммы состоит из следующих шагов:

1. Сначала рассматривается управление, при котором старт движения происходит до φ_6 . Для этого случая доказывается, что область пересечения положений маятника, при которых в заданных ограничениях задачи робот сможет сдвинуться с положения покоя, не пересекается с областью, в которой скорость центра масс робота больше, чем X'_{cr} при искомом управлении. Дальше на основании этого доказывается, что и на всем участке скорость центра масс окажется меньше при любом другом управлении, чем при искомом.

2. Затем рассматриваем случай, когда старт движения корпуса происходит при $\varphi_6^* > \varphi_6$. Обозначим скорость центра масс корпуса при искомом управлении для $\varphi = \varphi_6^*$ через X'_{cr62} , а при альтернативном — X'_{cr6^*} , соответственно. Покажем, что $X'_{cr62} > X'_{cr6^*}$. Это следует из того, что угловая скорость при искомом управлении по построению больше, чем при альтернативном, при этом скорость корпуса при искомом управлении больше нуля, т. е. каждое слагаемое, определяющее X'_{cr} ($X'_{cr} = x' + \varphi' \cos \varphi$) при искомом управлении больше. Далее рассуждения аналогичны предыдущему случаю.

3. Осталось рассмотреть случай, когда при искомом управлении $x'_7 = 0$, тогда продолжим движение с имеющихся конечных условий при управлении $\varphi'' = -\varphi''_{\max}$ вплоть до старта движения корпуса. Рассмотрим угол, следующий за углом для старта движения, и соответствующую ему угловую скорость как новые конечные условия. Доказательство выше показывает, что любое другое управление при любом угле будет давать меньшую скорость центра масс, в том числе и для угла φ_7 , который при данном подходе окажется промежуточным.

Детали доказательства леммы 4 выходят за рамки данной работы из-за большого объема.

Вернемся к доказательству теоремы 2.

Угол φ_3 — это максимальный угол, при котором робот может продолжать движение с предложенным управлением. Если продолжить перемещение с управлением $\varphi'' = \varphi''_{\max}$, то для углов $\varphi > \varphi_3$ робот будет вынужден скользить в обратную сторону, что невозможно в рамках рассматриваемого класса движений ($x' \geq 0$).

При этом при построенном управлении робот будет совершать остановку при меньшем угле, чем при любом другом управлении. Поясним это утверждение.

Если из уравнения (12) выразить x'' , то получается следующее выражение:

$$x'' = -\mu - \varphi''(\cos \varphi + \mu \sin \varphi) - \varphi'^2(\mu \cos \varphi - \sin \varphi). \quad (19)$$

Здесь коэффициент при $\varphi'' > 0$, в силу первого условия теоремы 2, положителен, кроме того, из

положительности $(\cos \varphi + \mu \sin \varphi)$ следует, что φ_2 находится в четвертой четверти, и коэффициент при φ'^2 также больше нуля. Таким образом, при больших значениях φ'' ускорение корпуса x'' уменьшается. Соответственно, угол остановки корпуса при $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ будет меньше, чем при любом другом управлении, где-то меньшем, чем ограничение.

Пусть X'_{cr3} — скорость центра масс корпуса для угла $\varphi = \varphi_3$ при управлении $\varphi'' = \varphi''_{\max}$. Допустим, существует некоторое другое управление φ''^* , где-то меньшее чем $\varphi''_{\max}$. Пусть X'_{cr3^*} — скорость центра масс для $\varphi = \varphi_3$ для этого управления. Тогда согласно теореме 1 $X'_{cr3^*} < X'_{cr3}$. При этом при рассматриваемом в теореме 2 управлении после остановки (после угла φ_3) скорость центра масс будет расти, а при управлении φ''^* будет продолжать падать вплоть до остановки корпуса, которая произойдет позже ($\varphi_3^* > \varphi_3$). Таким образом, и для любого угла $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_3^*$ скорость центра масс $X'_{cr3} < X'_{cr}$ (здесь X'_{cr3} соответствует скорости центра масс при управлении, отличном от рассматриваемого в теореме 2).

При положении маятника $\varphi = \varphi_3^*$ при управлении из теоремы 2 обозначим угловую скорость φ'_{31} , скорость центра масс — X'_{cr31} , а при альтернативном управлении — φ'_{31^*} и X'_{cr31^*} , соответственно. Выше показано, что $X'_{cr31^*} < X'_{cr31}$. Поскольку скорость корпуса при обоих управлениях для этого угла равна нулю, то это означает, что $\varphi_{31}^* < \varphi_{31}$.

Согласно лемме 4 управление, переводящее систему в состояние $\varphi_7 = \varphi_1 + 2\pi$, $\varphi'_7 = \varphi'_1$ из условий $(\varphi_3^*, \varphi'_{31^*})$, будет строиться аналогично искомому: сначала максимальный разгон маятника, потом максимальное торможение. При этом точка переключения с третьего участка управления на четвертый из условий теоремы 2 будет левее φ_5 , поскольку на всем участке разгона маятника траектория при управлении с $(\varphi_3^*, \varphi'_{31^*})$ будет идти ниже траектории, соответствующей начальным условиям $(\varphi_3^*, \varphi'_{31})$ (следует из единственности решения задачи Коши).

На рис. 2 представлена зависимость (φ, φ') для участка $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$. Заштрихованной области соответствует покой при искомом управлении. По построению предложенное управление для каждого угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$ обеспечивает максимальное значение угловой скорости.

На рис. 2 цифрам соответствуют участки управления из условий теоремы 2. Точка φ_5^* — точка переключения с третьего на четвертое управление при начальных условиях на участке покоя $(\varphi_3^*, \varphi'_{31^*})$. Угол φ_5^* будет больше, чем φ_5 — угол соответствующего переключения при начальных условиях фазы покоя $(\varphi_3, \varphi'_{31})$. Отметим, что точка $(\varphi_5^*, \varphi_5'^*)$ будет принадлежать траектории и при искомом управлении (рис. 2). Это связано с тем, что точка $(\varphi_5^*, \varphi_5'^*)$ лежит на траектории, задаваемой четвертым участком управления теоремы 2, и имеет одни и те же

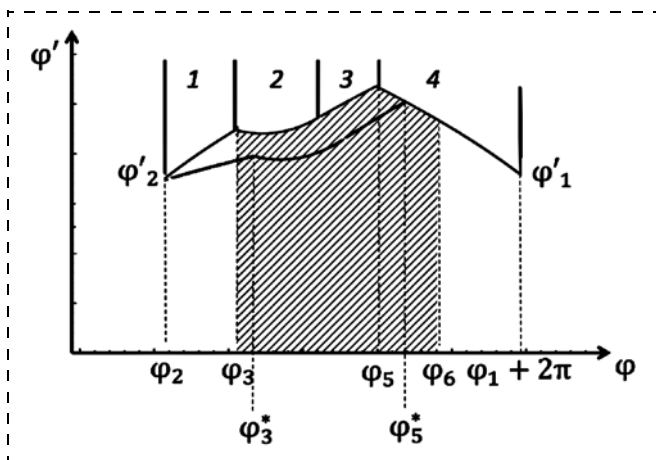


Рис. 2. Зависимость угловой скорости от угла при альтернативном и искомом управлении

конечные условия для обоих законов управлений — (φ_7, φ'_7) .

При этом если $\varphi_5^* \leq \varphi_6$ (здесь φ_6 обозначен угол, при котором при искомом управлении робот начнет движение вперед), то это означает, что при угле φ_5^* при обоих управлениях робот покоится, и скорость центра масс одинакова. Остальное движение робота при обоих управлениях одно и то же. Таким образом, было показано, что при альтернативном управлении на всем участке $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_7 = \varphi_1 + 2\pi$ робот будет иметь скорость центра масс, не превышающую скорость при искомом управлении.

То же верно и при $\varphi_5^* \leq \varphi_6$. В этом случае робот при искомом управлении в точке φ_5^* будет иметь скорость центра масс большую, чем при альтернативном законе управления, поскольку угловые скорости равны, но при искомом управлении скорость корпуса робота будет положительна. Следовательно, и на всем участке $\varphi_5^* \leq \varphi \leq \varphi_7$ знак неравенства между скоростями центра масс сохранится.

Таким образом, было показано, что при заданных $(\varphi_2, \varphi'_2, x'_2)$ искомое управление переводит систему в состояние φ_7, φ'_7 с максимальной скоростью центра масс при каждом промежуточном значении угла. Отметим, что получаемая при искомом управлении скорость корпуса x'_7 совпадает со скоростью x'_1 по условиям теоремы.

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. При заданных значениях угла, угловой скорости и скорости корпуса $(\varphi_2, \varphi'_2, x'_2)$ скорость x'_1 максимальна для угла $\varphi_1 + 2\pi$ при угловой скорости φ'_1 .

Замечание 3. При заданных значениях угла, угловой скорости и скорости корпуса $(\varphi_2, \varphi'_2, x'_2)$ угловая скорость маятника φ'_1 максимальна для угла $\varphi_1 + 2\pi$ в заданных ограничениях задачи.

При больших угловых скоростях для данного положения маятника робот будет вынужден в какой-то момент осуществить подскок для совершения оборота маятника.

Теорема 3. Если для рассматриваемого робота:

1) при положении $\varphi = \varphi_2$ его угловая скорость $\varphi' = \varphi'_2$ и скорость корпуса $x' = x'_2$, такие что $N(\varphi_2, \varphi'_2, \varphi''_{\max}) = 0$, $(\cos\varphi_2 + \mu\sin\varphi_2) > 0$ и $\varphi'_2 = \sqrt{2(1 + \cos\varphi_2)} |\operatorname{cosec}\varphi_2|$;

2) x'_2 определяется управлением (14);

3) при управлении $\varphi'' = \varphi''_{\max}$ для участка движения после угла φ_2 остановка корпуса происходит до вертикального положения маятника $\varphi = 2\pi$;

4) $\varphi''_{\max} > \mu$,

то для каждого положения угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$ максимальную скорость центра масс корпуса X'_{cr} будет обеспечивать следующее управление:

1) $\varphi'' = \varphi''_{\max}$, $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$;

2) $\varphi'' = \frac{\mu + \varphi'^2(\sin\varphi + \mu\cos\varphi)}{\cos\varphi - \mu\sin\varphi}$, $\varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4$;

3) $\varphi'' = \varphi''_{\max}$, $\varphi_4 \leq \varphi \leq \varphi_5$;

4) $\varphi'' = -\varphi''_{\max}$, $\varphi_5 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$;

5) $\varphi'' = \frac{-1 - \varphi'^2\cos\varphi}{\sin\varphi}$, $\varphi_1 + 2\pi \leq \varphi \leq \varphi_2 + 2\pi$.

Доказательство теоремы 3.

При доказательстве теоремы 2 было показано, что участки управления 1—4 рассматриваемой теоремы обеспечивают максимальную скорость центра масс системы для углов $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$ при известных начальных условиях $(\varphi_2, \varphi'_2, x'_2)$ и конечных условиях по углу и угловой скорости $(\varphi_1 + 2\pi, \varphi'_1)$ (знание x'_1 не обязательно согласно лемме 4). При этом было показано, что угловая скорость φ'_1 максимальна для положения маятника $\varphi = \varphi_1 + 2\pi$ (замечание 3).

Допустим, при $\varphi_1 + 2\pi$ угловая скорость $\varphi' = \varphi'_7^* < \varphi'_1$. Согласно теореме 2 участки управления 1—4 также обеспечивают оптимальное с точки зрения скорости центра масс корпуса перемещение робота для каждого угла φ .

Для определения точки переключения с третьего на четвертый участок управления теоремы 3 независимо интегрируется первое, затем второе и третье уравнение движения в прямом времени с заданных начальных условий (они фиксированы, поэтому это движение однозначно задано), и интегрируется уравнение движения на четвертом участке управления в обратном времени от конечных условий. Если на фазе движения значение X'_{cr} при $\varphi_1 + 2\pi$ меньше получаемого при предложенном управлении, то оно будет меньше на всем участке вплоть до точки пересечения с траекторией третьего управления (рис. 3). Обозначим угол, соответствующий точке пересечения траекторий, φ_5^* . Соответственно, для всех $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_5^*$, скорость центра масс будет одинакова для обоих случаев конечной угловой скорости, а для всех углов $\varphi_5^* < \varphi < \varphi_1 + 2\pi$ при $\varphi'_7^* < \varphi'_1$ будет меньше. Иными словами, максимальная скорость φ'_1 позволяет достичь наи-

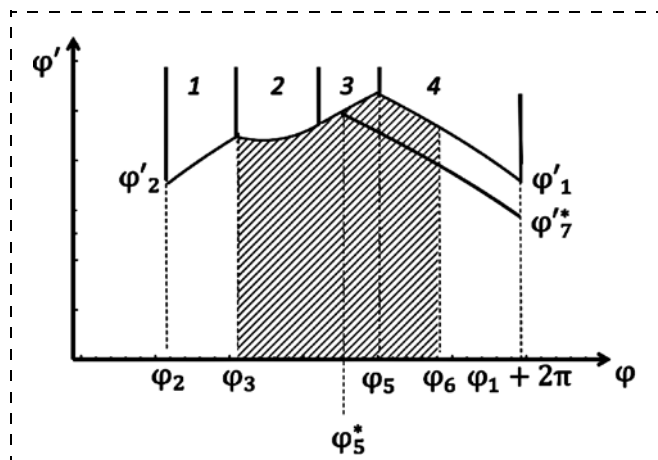


Рис. 3. Зависимость угловой скорости от угла при альтернативном и искомом управлении при фиксированных начальных условиях

большей скорости центра масс для каждого угла $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$.

Управление, обеспечивающее $N = 0$ при известных начальных условиях, обеспечивает максимум X'_{cr} , поскольку в рассматриваемых ограничениях такое управление обеспечивает максимальное горизонтальное ускорение центра масс системы $X''_{cr} = 0$. Поскольку φ_1 и φ'_1 соответствуют значениям из управления (14), а φ_2 и φ'_2 , получаются такими же, как в управлении (14), то действительно, пятое управление теоремы 3 может быть реализовано на этом участке, при этом обеспечивая максимум скорости центра масс X'_{cr} .

Теорема 3 доказана.

Для расширения класса движений, в котором полученное управление является оптимальным с точки зрения средней скорости робота будем варьировать начальные условия, а именно начальную угловую скорость маятника, и покажем, что ее выбор при заданных φ_2 и x'_2 оптимален.

Лемма 5. Если при положении маятника $\varphi = \varphi_2$ скорость корпуса равна x'_2 , а угловая скорость $\varphi'^* \neq \varphi'_2$, то либо скорость центра масс X'_{cr} будет оказываться меньше для каждого положения маятника, чем при рассматриваемом режиме, либо движение в рассматриваемом классе не осуществимо.

Доказательство леммы 5.

Случай $\varphi'^* > \varphi'_2$ аналогичен рассмотренному в замечании 3, т. е. при $\varphi'^* > \varphi'_2$ робот для того, чтобы попасть в этот угол с этой угловой скоростью, будет вынужден совершить подскок, что выходит за рамки рассматриваемого класса движений.

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным для обоснования выбора φ'_1 для угла $\varphi_1 + 2\pi$ в теореме 3, можно показать, что для любой угловой скорости $\varphi'^* < \varphi'_2$ скорость центра масс будет меньше для углов $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 + 2\pi$. При этом, чтобы перевести систему в состояние $(\varphi_2 + 2\pi, \varphi'_2)$ в случае, если угловая скорость при $\varphi_1 + 2\pi$ меньше φ'_1 , необходимо на каком-то промежутке между углами

$\varphi_1 + 2\pi$ и $\varphi_2 + 2\pi$ иметь $N > 0$. Иными словами, на всем промежутке $\varphi_1 + 2\pi \leq \varphi \leq \varphi_2 + 2\pi$ скорость центра масс будет меньше или равна скорости, обеспечиваемой при искомом управлении. Таким образом показано, что на всем периоде при $\varphi'^* < \varphi'_2$ скорость центра масс будет меньше.

Лемма 5 доказана.

Заключение

В работе рассмотрено управление вибрационным роботом с симметричным ограничением на угловое ускорение (14). Показано, что в рассматриваемом классе движений при движении корпуса для всех положений маятника $0 \leq \varphi \leq \pi$ необходимо максимально тормозить вращение маятника, а на второй половине периода — разгонять.

Также показано, что при фиксированных значениях φ_2 , φ'_2 , x'_2 , соответствующих значениям в управлении (14), и при выполнении условий теоремы 3 управление (14) обеспечивает наибольшую скорость центра масс при каждом положении маятника, следовательно, и наибольшую среднюю скорость центра масс системы на периоде.

В статье также показано, что вариация значения φ'_2 при фиксированном значении x'_2 не дает улучшения скорости центра масс корпуса. Таким образом, построенный режим обеспечивает максимум средней скорости центра масс системы, если при $\varphi = \varphi_2$ скорость корпуса равна x'_2 . Знание угловой скорости для этого положения излишне, ее оптимальное значение оказывается равным предлагаемому в построенном законе управления.

Список литературы

1. Иванов А. П., Сахаров А. В. Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8, № 4. С. 763—772.
2. Лупехина И. В., Безмен П. А., Яцун С. Ф. Плоскопараллельное движение вибрационного робота по горизонтальной шероховатой поверхности // Естественные и технические науки. 2012. № 4 (60). С. 41—44.
3. Яцун С. Ф., Волкова Л. Ю. Моделирование динамических режимов вибрационного робота, перемещающегося по поверхности с вязким сопротивлением // Спецтехника и связь. 2012. № 3. С. 25—29.
4. Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф. Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 845—857.
5. Сахаров А. В. Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости // ПММ. 2015. Т. 79, № 2. С. 196—209.
6. Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю. Оптимальное управление прямолинейным движением твердого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс // ПММ. 2008. Т. 72, № 2. С. 216—229.
7. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н. Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 213—222.
8. Fang H. B., Xu J. Dynamic analysis and optimization of a three-phase control mode of a mobile system with an internal mass // Journal of Vibration and Control. 2011. Vol. 17, N. 1. pp. 19—26.
9. Черноусько Ф. Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // ПММ. 2006. Т. 70. С. 915—941.

10. **Chernous'ko F. L.** The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2008. Vol. 72, N. 2. P. 126–135.

11. **Bolotnik N. N., Figurina T. Yu., Chernousko F. L.** Optimal control of the rectilinear motion of a two-body system in a resistive medium // *J. Appl. Math. Mech.* 2012. Vol. 76, N. 1. P. 1–14.

12. **Бардин Б. С., Панев А. С.** О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // *Труды МАИ*, 2015, № 84, 25.

13. **Vartholomeos P., Papadopoulos E.** Dynamics, Design and Simulation of a Novel Microrobotic Platform Employing Vibration Microactuators // *J. Dyn. Sys., Meas. Control* 128 (1). P. 122–133.

14. **Golitsyna M. V., Samsonov V. A.** Maximization of Average Velocity of Vibratory Robot (with One Restriction on Acceleration) // *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2016. Vol. 181, P. 221–332.

Optimal Control of a Vibratory Robot Defined by a Choice of Angular Acceleration

M. V. Golitsyna, Kulikovskaya-Mary@yandex.ru,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: **Golitsyna Mariya V.**, PHD student,
Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation
e-mail: Kulikovskaya-Mary@yandex.ru

Accepted on October 04, 2017

There is considered a vibratory robot, presented by a rigid box and a physical pendulum inside it. The robot moves along a horizontal plane in the gravity field. There is a Coulomb friction between the box and the surface. Control of the robot is defined by the choice of angular acceleration of the pendulum. In the paper there is considered a certain class of motion and a control law that insures sliding of the robot in the desired direction within all given restrictions. The control insures periodic motion of the robot with two phases: sliding phase, where the main body of the robot is moving in the desired direction, and resting phase, where the box of the robot is standing still. On the sliding phase on the maximum interval within the given restrictions there is no friction between the body and the plane. In the paper there is proved that such control law is optimal in terms of maximum velocity for a certain motion class. First, there is shown that for the case when the box is sliding, when the pendulum is in one half of the period it is best to insure its maximum acceleration, and in the second part the angular acceleration should be at its minimum value. Then there is shown that for the motion within all given restrictions when there are set certain starting conditions and ending conditions on phase variables then the considered control law insures maximum average velocity of the robot. After that there is shown that there should be set conditions on phase variables for only one position of pendulum on the period. Lastly there is proved that for a certain angle there is needed to define only the speed of the box, optimum value of angular velocity of the pendulum appears to be as desired.

Keywords: Vibratory robot, control law, optimality, mathematical modeling, dry friction, restrictions, regimes, periodicity

For citation:

Golitsyna M. V. Optimal Control of a Vibratory Robot Defined by a Choice of Angular Acceleration, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 31–39.

DOI: 10.17587/mau.19.31-39

References

1. **Ivanov A. P., Saharov A. V.** *Dinamica tverdogo tela s povizhnymi vnutrennimi massami i rotorom na sherohovatoj ploskosti* (Dynamics of a rigid body with movable inner masses and a rotor on a rough surface), *Nonlinear Dynamics*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 763–772 (in Russian).

2. **Lupchina I. V., Bezmen P. A., Yatsun S. F.** *Ploskoparallelnoe dvizhenie vibratsionnogo robota po gorizontalfnoi sherohovatoi ploskosti* (Plane-parallel motion of a vibratory robot on a rough horizontal plane), *Natural and technical sciences*, 2012, no. 60, pp. 41–44 (in Russian).

3. **Yatsun S. F., Volkova L. Yu.** *Modelirovanie dynamicheskikh rezhimov vibratsionnogo robota, peremshayushegosya po poverhnosti s vyazkim soprotivleniem* (Modeling of motion of a vibratory robot on a surface with viscous friction), *Special Vehicles and Commutations*, 2012, no. 3, pp. 25–29 (in Russian).

4. **Volkova L. Yu., Yatsun S. F.** *Upravlenie dvizheniem trehmassovogo robota, peremshayushegosya v zshidkoi srede* (Control of the three-mass robot moving in the liquid environment), *Nonlinear Dynamics*, 2011, vol. 7, no. 5, pp. 845–857 (in Russian).

5. **Saharov A. V.** Rotation of a body with two movable internal masses on a rough plane, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, vol. 79, no. 2, pp. 132–141.

6. **Bolotnik N. N., Figurina T. Yu.** Optimal control of the rectilinear motion of a rigid body on a rough plane by means of the motion of two internal masses, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 126–135 (in Russian).

7. **Chernous'ko F. L., Bolotnik N. N.** *Mobilnye roboti, upravlyayemye dvizheniem vnutrennih tel* (Mobile robots control by the motion of the inner masses), *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 213–222 (in Russian).

8. **Fang H. B., Xu J.** Dynamic analysis and optimization of a three-phase control mode of a mobile system with an internal mass, *Journal of Vibration and Control*, 2011, vol. 17, no. 1, pp. 19–26.

9. **Chernous'ko F. L.** *Analiz i optimizatsiya dvizheniya tela, upravlyayemogo posredstvom povizhnoy vnutrenney massy* (Analysis and optimization of a body, controlled by the movable inner mass), *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, vol. 70, pp. 915–941 (in Russian).

10. **Chernous'ko F. L.** The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, vol. 72, no. 2, pp. 126–135.

11. **Bolotnik N. N., Figurina T. Yu., Chernousko F. L.** Optimal control of the rectilinear motion of a two-body system in a resistive medium, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 1–14.

12. **Bardin B. S., Panev A. S.** *O periodicheskikh dvizheniyah tela s povizhnoy vnutrenney massoy po gorizontalfnoy ploskosti* (Periodic motion of a body with movable inner mass on a horizontal plane), *MAI Proceedings*, 2015, no. 84, pp. 25 (in Russian).

13. **Vartholomeos P., Papadopoulos E.** Dynamics, Design and Simulation of a Novel Microrobotic Platform Employing Vibration Microactuators, *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, 2005, 128 (1), pp. 122–133.

14. **Golitsyna M. V., Samsonov V. A.** Maximization of Average Velocity of Vibratory Robot (with One Restriction on Acceleration), *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics*, 2016, vol. 181, pp. 221–332.

А. П. Гришин, д-р техн. наук, зав. лаб., 5145411@mail.ru,
А. А. Гришин, канд. экон. наук, зав. отд., 5145412@mail.ru,
В. А. Гришин, мл. научн. сотр., 5145409@mail.ru, **З. А. Годжаев**, д-р техн. наук, зам. директора,
Федеральный научный агроинженерный центр ВИМ, Москва

Применение аппарата нечеткой логики в задачах автоматизации технологических процессов сельского хозяйства

Показано, что в условиях реального мира знания качественного характера часто обладают гораздо большей полезностью, чем знания количественные. Дан краткий обзор практического применения аппарата нечеткой логики в системах автоматизации управления технологическими процессами сельского хозяйства. В частности, рассмотрен нечеткий регулятор температуры ростовой камеры с приведением расчетных зависимостей и алгоритма управления температурой методом нечеткого моделирования.

Ключевые слова: нечеткая логика, климатическая камера, фитотрон, интеллектуализация системы управления

Введение

В начале 1980-х гг. получила развитие теория нечетких множеств и нечеткая логика, позволяющая описывать качественные, неточные понятия и наши знания об окружающем мире, а также оперировать этими знаниями в целях получения нужной информации [1].

Причинами быстрого развития аппарата нечетких множеств и нечеткой логики для систем управления являются:

- возможность построения систем управления в условиях наличия информации лишь качественного характера;
- малая чувствительность систем управления к параметрическим возмущениям объекта управления;
- малая трудоемкость построения систем управления сложными объектами.

Наиболее встречаемым видом неопределенности при решении задач автоматизации технологических процессов с участием живых организмов, характерных для сельскохозяйственного производства, является неопределенность, связанная с невозможностью контроля параметров этих процессов во всех требуемых точках объекта, и, как следствие, неточность задания начальных и граничных условий, а также переменных в расчетных моделях [2]. Однако в этой области применение аппарата нечеткого моделирования находится в начальной стадии, и попытки применить его на практике не находят должного подтверждения. Отсутствует информация о результатах такого применения [3, 4]. Кроме того, детальная теория такого применения в работах отсутствует или носит общий характер.

В данной статье авторами предпринята попытка устранить отмеченные недостатки. Приводится обзор применения нечетких регуляторов в сельхозпроизводстве с кратким освещением вопросов теории нечеткой логики и примерами возможного ее применения для сельхозпроизводства. Подробно описана работа нечеткого регулятора температуры ростовой камеры, приведены расчетные зависимости и алгоритм управления температурой с использованием нечеткого моделирования.

Преимущества и недостатки нечетких регуляторов в задачах автоматизации технологических процессов сельского хозяйства

Общей предпосылкой для применения нечетких регуляторов, как уже отмечено выше, служат два фактора — наличие неопределенности и наличие информации качественного характера, необходимой при построении системы управления с элементами интеллектуализации. Последний фактор имеет принципиальное значение, поскольку такой характер информации требует участия интеллекта.

Преимущество систем управления с элементами интеллектуализации перед традиционными автоматизированными системами управления (АСУ) при управлении сложными технологическими процессами с участием живых организмов обусловлено тем, что они работают не только с количественной, но и с качественной информацией. Такая информация характерна для базы знаний, где описаны причинно-следственные взаимосвязи в каждой конкретной ситуации, имеются данные о возможном дальнейшем развитии событий в управляющей системе и переходе к другой ситуации в за-

висимости от предпринятых действий, а также имеется другая информация методического характера.

Для примера рассмотрим систему стабилизации давления в сети водоснабжения животноводческого комплекса [5, 6], оперирующую количественными данными, где блок сравнения вычисляет сигнал рассогласования и выдает его на вход регулятора, регулирующее воздействие поступает на исполнительный элемент, влияющий на давление в сети (частотно-регулируемый насос, электроприводной вентиль), что обеспечивает заданное давление в сети. Работа такой системы будет безупречна, если ее взаимодействие с окружающим миром было формально количественно описано на этапе синтеза регулятора и реально никогда не выходит за рамки этого описания. Но реальный мир одними количественными данными задать нельзя, поскольку он описывается не только количественными характеристиками с применением математических терминов, но и качественными с использованием средств естественного языка. Представим себе несколько нештатных ситуаций, приводящих к изменению сигнала датчика давления:

- в сети при максимальном водоразборе произошла авария с разрывом трубопровода;
- в месте установки датчика происходит утечка воды;
- датчик вышел из строя.

Данный список нештатных ситуаций можно продолжить. Во всех случаях автоматика реагирует, изменяя давление в сети и приближая его к заданному значению, что приведет к усугублению нештатной ситуации.

Теперь представим, что стабильное давление в сети пытается поддержать человек, а не АСУ с помощью манометра ручного регулятора преобразователя частоты и производительности насоса. Тогда, если произошел прорыв трубопровода, и давление резко снизилось, то вместо того, чтобы включать насос на полную мощность, человек сначала устранил аварию.

Почему человек как "устройство управления" нередко оказывается более приемлемым? Потому, что он обладает не только данными, но и, самое главное, знаниями о системе. Например, знает, что пока возникшую интенсивную утечку воды перекрыть нельзя, то качать воду в сеть бесполезно. А если чего-то человек и не знает, то сможет сделать выводы по наблюдаемым данным и, таким образом, пополнить свои знания. В отличие от АСУ человек оперирует не только точной количественной информацией (показаниями манометра), но и качественной информацией (например, "в сети слишком большое давление", а не "давление в сети 10 атмосфер"). Это объясняется тем, что знания об окружающем нас мире далеко не всегда могут быть четко описаны количественными характеристиками. Поэтому для успешного взаимодействия с реальным миром необходимо оперировать не только количественными, но и качественными знаниями,

в том числе неопределенными (нечеткими), например: давление воды в сети 2 атмосферы (это количественное четкое знание); давление воды в сети значительно выше 0,5 атмосферы (это количественное нечеткое знание).

Основные положения аппарата нечеткой логики на примерах сельскохозяйственной направленности

Математический аппарат нечетких знаний или нечетких множеств, нечеткой логики впервые предложен американским ученым Лотфи Заде (Lotfi Zadeh) в 1965 г. [7]. Для описания нечетких множеств вводятся понятия *нечеткой и лингвистической переменных*.

Характеристикой нечеткого множества выступает функция принадлежности. Нечетким множеством C называется множество упорядоченных пар вида $C = \{\mu_f(x)/x\}$. Значение $\mu_f(x) = 0$ означает, что x не принадлежит множеству C , а значение 1 — означает, что x принадлежит множеству C , где $x \in X$ — универсальное множество.

Формализуем неточное определение *"температура почвы"*. В качестве x (область рассуждений) будет выступать шкала в градусах Цельсия. Допустим, что температура изменяется от 0 до 40 °С. Нечеткое множество "Оптимальная" для понятия "оптимальная температура для растения" может выглядеть следующим образом:

$$C = \{0/0; 0/5; 0/10; 0,5/15; 0,80/20; 1,0/25; 0,70/30; 0,30/35; 0/40\}.$$

Так, температура почвы 20 °С принадлежит к множеству "Оптимальная" со степенью принадлежности 0,80. Для определенных растений в определенный этап роста температура почвы 25 °С будет приближенной к оптимальной, для других растений — слишком высокой. Именно в этом и проявляется нечеткость задания соответствующего множества.

Кроме нечетких множеств аппарат использует понятия *нечеткой переменной и лингвистической переменной*. Значениями лингвистической переменной могут быть нечеткие переменные.

Нечеткая переменная описывается набором (N, X, C) , где N — это название переменной, X — универсальное множество (область рассуждений), C — нечеткое множество на X .

Рассмотрим такое нечеткое понятие, как *"влажность зерна"*. Это название лингвистической переменной. Сформируем для нее базовое терм-множество, которое будет состоять из трех нечетких переменных: "Низкая", "Умеренная", "Высокая" и зададим область рассуждений в виде $X = [0; 100]$ (%). Последнее, что осталось сделать — построить функции принадлежности для каждого лингвистического термина из базового терм-множества T .

Существует свыше десятка типовых форм кривых для задания функций принадлежности. Наибольшее

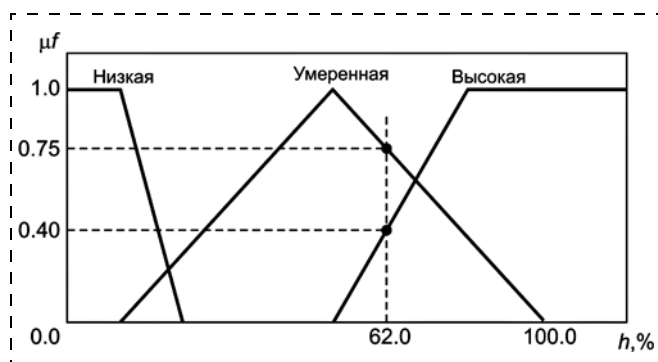


Рис. 1. Описание лингвистической переменной "Влажность зерна"

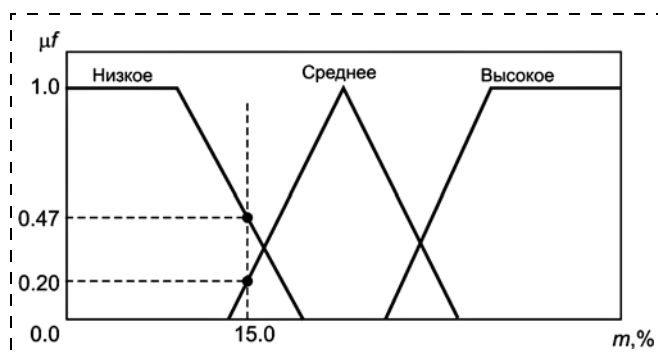


Рис. 2. Описание лингвистической переменной "Загрязнение зерна примесями"

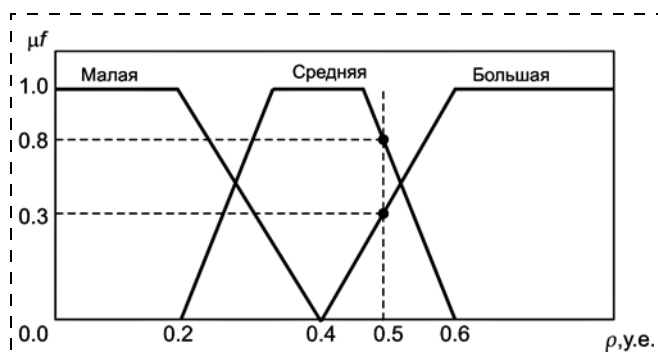


Рис. 3. Входные и выходные функции принадлежности лингвистической переменной "плотность почвы"

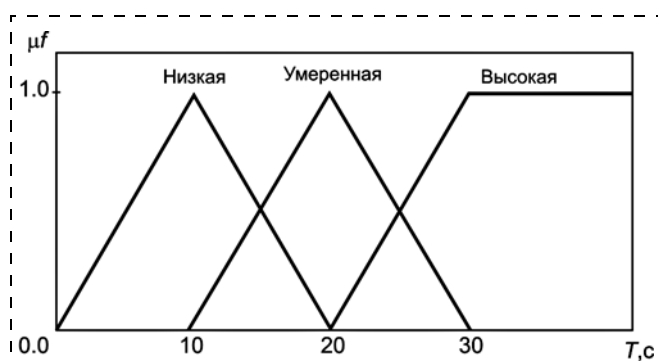


Рис. 4. Входные и выходные функции принадлежности лингвистической переменной "длительность поступательного движения актуатора"

распространение получили: треугольная, трапецидальная и гауссова функции принадлежности.

На рис. 1 приведен пример описанной выше лингвистической переменной "влажность зерна" для значения $X = 62,0$ %: степень принадлежности к множеству "Низкое" равна 0, "Умеренное" — 0,75, "Высокое" — 0,4, на рис. 2 — формализация нечеткого понятия "загрязнение зерна примесями". Так, для зерна с 15 % примесей степень принадлежности к множеству "Низкое" равна 0,47, "Среднее" — 0,2, "Высокое" — 0,0.

Основой для проведения операций нечеткой логики является база правил и функции принадлежности для соответствующих лингвистических термов. Они позволяют при построении нечетких регуляторов осуществлять нечеткие выводы.

В общем случае механизм логического вывода включает четыре этапа: введение нечеткости (фазификация), нечеткий вывод, композиция и приведение к четкости, или дефазификация.

Алгоритмы нечеткого вывода различаются главным образом видом метода дефазификации. Наиболее распространенный способ логического вывода в нечетких регуляторах — вывод Мамдани или центроидный метод.

Таким образом, для того чтобы интеллектуальная САУ обладала близкой к человеческой возможностью работы со знаниями, необходима их формализация и представление в технической системе посредством некоего языка описания знаний, категориями которого система могла бы оперировать так же, как человек словами. Также очевидно, что для достижения большего эффекта интеллектуализации технической системы этот язык должен описывать все возможные виды знаний: количественные и качественные, четкие и нечеткие [8].

Например, рассмотрим задачу управления глубиной погружения в почву рабочего органа почвообрабатывающей машины при вспашке. Входным точным значением здесь является плотность почвы ρ , а выходным — длительность T действия актуатора — приводного механизма поступательного движения рабочего органа, определяющего глубину его погружения в почву.

Введем две лингвистические переменные: "плотность почвы" с термами "малая", "средняя", "большая" и "длительность поступательного движения актуатора" с термами "низкая", "умеренная", "высокая". Соответствующие входные и выходные функции принадлежности приведены на рис. 3, 4. Нечеткая инструкция для управления этой системой может сводиться к трем простым правилам: 1) при малой плотности почвы длительность поступательного движения актуатора должна быть низкой; 2) средней плотности должна соответствовать умеренная длительность поступательного движения актуатора; 3) в случае большой плотности требуется высокая длительность поступательного движения актуатора.

Как следует из рис. 3, области определения входных функций принадлежности различных термов пересекаются, поэтому выходная нечеткая инструкция будет представляться некоторой комбинацией приведенных правил. При этом естественно предположить, что в эту комбинацию отдельные правила будут входить с коэффициентами, определяемыми степенями принадлежности точных исходных данных соответствующих термов.

Пусть зафиксированное в некоторый момент значение плотности ρ равно 0,5. Процедура фаззификации показывает, что эта плотность со степенью 0,3 принадлежит терму "большая плотность" и со степенью 0,8 — терму "средняя плотность", а к терму "низкая плотность" не принадлежит. Согласно принятому правилу комбинирования нечетких выходных инструкций, степень принадлежности длительности поступательного движения актуатора должна быть большой с коэффициентом 0,3 и средней с коэффициентом 0,8. Применим центроидный метод дефаззификации Мамдани:

$$T = \frac{0,3 T_6 + 0,8 T_c}{0,3 + 0,8} = 22,7 \text{ с},$$

где T_6 и T_c — длительности поступательного движения актуатора, при которых выходные функции принадлежности соответствующих термов ("большая" и "средняя") принимают максимальные значения. В нашем случае $T = 22,7$ с.

Применение нечеткого регулятора для управления продуктивностью растения в вегетационных климатических камерах

В процессе хозяйственной деятельности человеком создаются антропогенные (искусственные) экосистемы. Наиболее распространенной экосистемой, где влияние окружающей среды почти полностью исключается, является теплица.

Независимо от типа экосистемы поток энергии претерпевает следующее изменение [9]: энергия оптического излучения в процессе химической реакции фотосинтеза переходит в химическую энергию углеводов. Скорость преобразования энергии определяется скоростью фотосинтеза ϕ , что непосредственно влияет на продуктивность растения.

Зависимость скорости фотосинтеза ϕ от параметров внешних факторов определяют энергопреобразующие характеристики (ЭПХ) растения, они же определяют оптимальные значения параметров, соответствующие максимуму скорости фотосинтеза. К ним относятся:

- плотность оптического излучения светового потока;
- температура и влажность окружающего воздуха;
- влагообеспеченность;
- солевой состав питательного раствора;
- концентрация CO_2 .

На рис. 5 представлены зависимости скорости фотосинтеза (они же ЭПХ) культуры огурца сорта

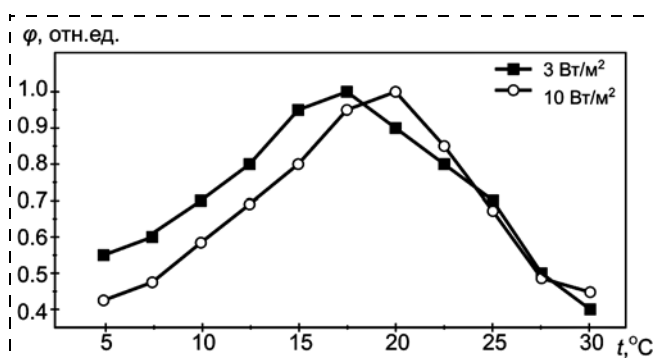


Рис. 5. Зависимость скорости фотосинтеза от температуры листа

"Эстафета" при различных температурах и плотностях облучения (по В. А. Мудрику).

Внешние факторы (особенно климатические) оказывают ограничивающее воздействие на скорость фотосинтеза, а значит и на продуктивность растениеводства.

Так, при максимально возможной спектральной эффективности солнечного излучения при фотосинтезе, равной 21 %, из-за действия ограничивающих факторов на фотосинтез идет лишь 1 % солнечного излучения.

В искусственных экосистемах закрытого типа — вегетационных климатических камерах (ВКК) — эту проблему возможно решить, обеспечивая оптимальные параметры внешних факторов автоматически по реакции растения, характеризующей скорость фотосинтеза (контролируя концентрацию CO_2 и/или температуру листа).

При таком варианте поддержание температуры и других параметров на оптимальном уровне будет осуществляться автоматически по сигналу датчиков, например, CO_2 и/или температуры, установленных на растении.

Растение само будет обеспечивать себя нужными условиями для максимальной скорости фотосинтеза.

В ФГБНУ ФНАЦ ВИМ разработана ВКК с полностью контролируемыми внешними факторами, где применена интеллектуализированная система управления температурой на поверхности листа растения с помощью нечеткого регулятора и пирометрического датчика температуры [10].

Регулятор построен исходя из следующих двух предположений:

- на скорость фотосинтеза наибольшее влияние оказывает температура растения (температура листа);
- температура должна поддерживаться на уровне, соответствующем максимуму фотосинтеза.

На рис. 6 представлена лингвистическая переменная "температура листа" с оптимумом $19 ^\circ\text{C}$. Понятие "низкая температура" по отношению к нему будет иметь функцию принадлежности (т. е. качественную оценку) $\mu(t) = 1$, начиная с $18 ^\circ\text{C}$, и

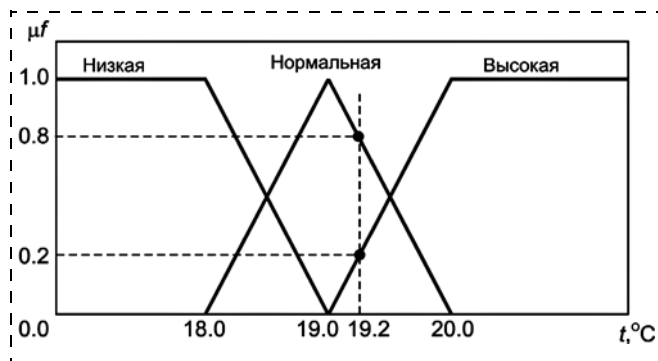


Рис. 6. Описание лингвистической переменной "температура листа"

ноль при оптимуме, снижаясь по мере увеличения температуры от 18 до 19 °С.

Аналогично для понятия высокая температура. По мере увеличения с 19 до 20 °С функция принадлежности (качественная оценка) $\mu(t)$ будет увеличиваться от 0 до 1, обеспечивая качественным смыслом оптимум 19 °С в области высоких температур.

Таким образом, для регулятора роль уставки играет не только фиксированное количественное значение 19 °С, но и качественные его значения — низкая температура или высокая.

Поскольку в ВКК в качестве источников оптического излучения используются люминесцентные лампы с преобладанием в спектре красного и синего излучений, имеющие значительное тепловое излучение, то в качестве рабочего органа — охладителя, регулирующего температуру, — применен кондиционер. Его действие также описывается лингвистической переменной "охлаждающая способность охладителя" (рис. 7). Охлаждающая способность определяется временем действия охладителя, которое также имеет не только количественную, но и качественную оценку.

Для лингвистической переменной, определяющей время работы системы охлаждения, будут действительны три термина: малое время работы со степенью принадлежности 1 при $T = 1$ мин работы,

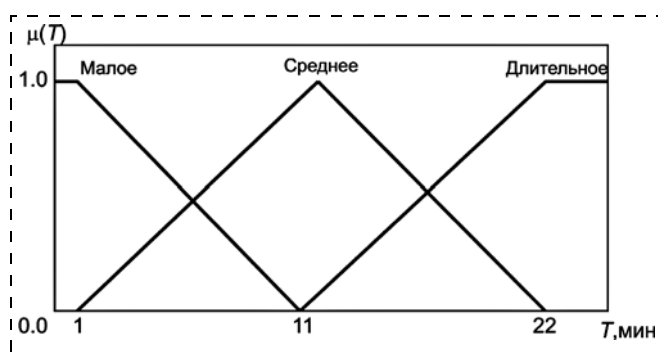


Рис. 7. Описание лингвистической переменной "охлаждающая способность охладителя"

среднее время работы со степенью принадлежности 1 при $T = 11$ мин работы и длительное время работы со степенью принадлежности 1 при $T = 22$ мин работы.

Из опыта установили, что для понижения температуры поверхности до 18 °С требуется время $T = 22$ мин (при исходной температуре свыше 20 °С).

Определение длительности работы охладителя рассчитываем по методу логического вывода Мамдани:

$$T_{\text{охл}} = \begin{cases} \frac{\mu_{\text{низ}} \cdot 1 + \mu_{\text{норм}} \cdot 11}{\mu_{\text{низ}} + \mu_{\text{норм}}} & \text{при } 18 < t \leq 19; \\ \frac{\mu_{\text{низ}} \cdot 11 + \mu_{\text{высок}} \cdot 22}{\mu_{\text{низ}} + \mu_{\text{высок}}} & \text{при } 19 < t < 20; \\ 22 & \text{при } t \geq 20; \\ 0 & \text{при } t \leq 18. \end{cases}$$

Пусть зафиксированное в некоторый момент значение температуры листа равно 19,2. Процедура фазификации показывает, что эта плотность со степенью 0,2 принадлежит терму "высокая температура" и со степенью 0,8 — терму "нормальная температура", а к терму "низкая температура" не принадлежит. Согласно принятому правилу комбинирования нечетких выходных инструкций, степень принадлежности длительности охлаждения должна быть длительной с коэффициентом 0,2 и средней с коэффициентом 0,8. Применим центроидный метод дефазификации Мамдани:

$$T_{\text{охл}} = \frac{0,2 T_{\text{дл}} + 0,8 T_{\text{с}}}{0,2 + 0,8} = 13,2 \text{ мин},$$

где $T_{\text{дл}}$ и $T_{\text{с}}$ — длительности охлаждающего действия, при которых выходные функции принадлежности соответствующих термов ("длительное" и "среднее") принимают максимальные значения. В нашем случае $T = 13,2$ мин.

Для обеспечения необходимой температуры вегетационной климатической камеры нами был реализован алгоритм для промышленного логического контроллера [11], обеспечивающий выполнение данной нечеткой логики, представленный на рис. 8.

Проведены рабочие испытания макетного образца адаптивной интеллектуализированной системы выращивания мини клубней картофеля в вегетационной климатической камере с системой управления, следящей за отдельными физиологическими процессами, регистрирующей их и согласовывающей воздействие внешних условий с физиологическим состоянием растения по программе, задаваемой самим растением.

Испытания показали удовлетворительные результаты: система отслеживает и контролирует влияние температуры окружающей среды и реакцию на изменение данных параметров со стороны растений, оказывает превентивное воздействие на систему управления температурой в камере для

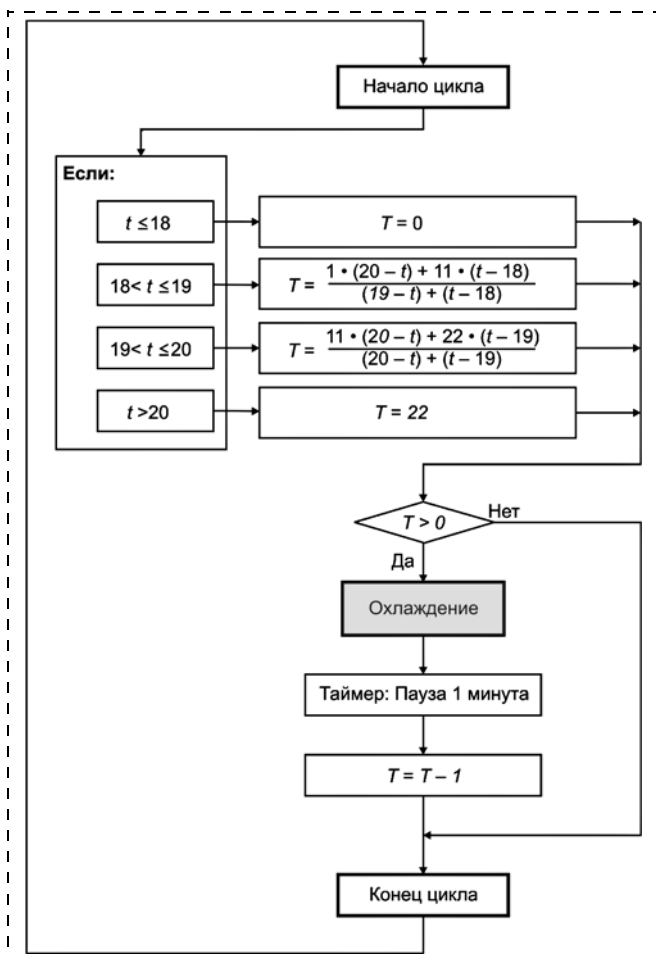


Рис. 8. Алгоритм управления температурой в ростовой камере для ПЛК

обеспечения стабильной температуры на поверхности листа. При такой системе регулирования температуры камеры число микроклубней на одном растении достигало 15...17 штук против 10 штук при предшествующей дискретной системе управления.

Заключение

В 1994 г. Л. Заде ввел специальный термин "мягкие вычисления" (soft computing), который в настоящее время объединяет такие области систем управления с элементами искусственного интеллекта, как нечеткая логика, искусственные нейронные сети, вероятностные рассуждения и эволюционные алгоритмы. Они дополняют друг друга и используются в различных комбинациях для создания гибридных интеллектуальных систем.

Влияние нечеткой логики оказалось, пожалуй, самым обширным. В условиях реального мира знания качественного характера обладают не меньшей, а нередко гораздо большей полезностью, чем знания количественные. Более того, большинство проблем человеку приходится решать, изначально опираясь только на нечеткие знания, в частности,

это характерно для сельскохозяйственного производства, где широкий спектр неопределенностей продиктован участием в технологических процессах живых организмов.

Список литературы

1. Lotfi Zadeh. From computing with numbers to computing with words — from anipulation of measurements to manipulation of perceptions // International Journal of Applied Math and Computer Science. 2002. Vol. 12, N. 3. P. 307—324.
2. Измайлов А. Ю., Гришин А. А., Гришин А. П., Лобачевский Я. П. Интеллектуальная автоматизация технических средств сельскохозяйственного назначения // Инновационное развитие АПК России на базе интеллектуальных машинных технологий: Сб. науч. докл. Междунар. науч.-техн. конф. М.: ФГБНУ ВИМ, 2014. С. 359—362.
3. Фаталиев К. Х., Гаджиев И. М., Гусейнов С. Т., Ибадов Н. В., Ибрагимов Н. Т. Компьютерная модель нечеткого контроллера для управления температурными режимами комбинированной системы теплоснабжения пленочных теплиц // Тр. 8-й Междунар. науч.-техн. конф. "Энергообеспечение и энергосбережение в сельском хозяйстве". Часть 5. М.: ВИЭСХ, 2012. С. 183—188.
4. Фельдшеров А. Ю. Управление движением электротрактора с использованием метода нечеткой логики // 6-я Междунар. науч.-техн. конф. "Энергообеспечение и энергосбережение в сельском хозяйстве". Секция 1. Проблемы энергообеспечения и энергосбережения. М.: ВИЭСХ. С. 185—189.
5. Гришин А. А., Гришин А. П., Гришин В. А. Современное оборудование для водопользования — необходимая часть системы машин и технологий для комплексной механизации и автоматизации сельскохозяйственного производства // Система технологий и машин для инновационного развития АПК России: Сб. науч. докл. Междунар. науч.-техн. конф. Часть II. М.: ВИМ, 2013.
6. Свидетельство № 2017614845 от 27.04.2017. Программа управления центробежным скважинным электронасосом для программируемых логических контроллеров. Гришин А. А., Гришин А. П., Гришин В. А.
7. Fay L. Zadeh. My life and travels with the father of fuzzy logic. TSI Press: Albuquerque, 1998. 310 p.
8. Измайлов А. Ю., Гришин А. А., Гришин А. П., Лобачевский Я. П. Нечеткие регуляторы интеллектуальной автоматизации технических средств сельскохозяйственного назначения // Инновационное развитие АПК России на базе интеллектуальных машинных технологий: Сб. науч. докл. Междунар. науч.-техн. конф. М.: ФГБНУ ВИМ, 2014. С. 408—412.
9. Свентицкий И. И., Гришин А. П., Гришин А. А., Мудрик В. А. Естественная методология определения уровня эффективности агротехнологий // Инновационное развитие АПК России на базе интеллектуальных машинных технологий: Сб. науч. докл. Междунар. науч.-техн. конф. М.: ФГБНУ ВИМ, 2014. С. 429—434.
10. Гришин А. П., Гришин А. А. Интеллектуальное управление температурой в ростовой камере для производства микроклубней // Инновационное развитие АПК России на базе интеллектуальных машинных технологий: Сб. науч. докл. Междунар. науч.-техн. конф. М.: ФГБНУ ВИМ, 2014. С. 382—386.
11. Свидетельство № 2017614816 от 27.04.2017. Программа управления климатом вегетационной камеры с использованием нечеткой логики. Гришин А. А., Гришин А. П., Гришин В. А., Измайлов А. Ю.

Application Features of Fuzzy Logic for Automation Tasks in Agricultural Technological Processes

A. P. Grishin, 5145411@mail.ru, A. A. Grishin, 5145412@mail.ru,
V. A. Grishin, 5145409@mail.ru, Z. A. Godzhaev, fic51@mail.ru,
FGBNU FNAC VIM, Moscow, 109428, Russian Federation

Corresponding author: Grishin Aleksandr P., D. Sc., Senior Scientific,
FGBNU FNAC VIM, Moscow, 109428, Russian Federation,
e-mail: 5145411@mail.ru

Accepted on October 10, 2017

The article considers aspects of using the based on fuzzy logic ISA in agriculture. It is shown that in the real world knowledge of a qualitative nature, are often much more useful than quantitative knowledge. It shows on statements of fuzzy controllers, that the most of problems man must solve initially based on fuzzy knowledge. Especially for agricultural production, where a wide range of uncertainty dictated by the participation in technological processes of living organisms. Shows a brief sketch of the mathematical apparatus of fuzzy knowledge, with explanatory examples from the field of agriculture. It is shown that the characteristics of a fuzzy set acts as a accessory function. In addition to the fuzzy sets Apparatus uses the concepts of fuzzy variable and linguistic variable, which is at a higher level than fuzzy variable. There are over a dozen typical forms of curves to define the membership functions. The most used are: triangular, trapezoidal and Gaussian accessory functions. Globally the logical inference mechanism consists of four steps: introduction of fuzziness (phasification), fuzzy inference, composition and bringing to clarity, or dephasification. The most common method of inference in fuzzy controllers — Mamdani inference. It uses the min-max composition of fuzzy set to intelligent ACS had close to human ability to work with knowledge requires their formalization and representation in the technical system by means of a description language knowledge categories which the system could operate in the same way as people with words. It is also clear that to achieve greater effect of intellectualization of the technical system, this language must describe all possible types of knowledge: quantitative and qualitative, crisp and fuzzy. In conclusion given a brief review of the practical application of IMS on the fuzzy logic basis in agricultural production by bringing the calculated dependencies of the algorithm for temperature control using fuzzy modeling.

Keywords: fuzzy logic, climatic chamber, phytotron, intelligent systems management

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 10.09.05.01.

For citation:

Grishin A. P., Grishin A. A., Grishin V. A. Godzhaev Z. A. Application Features of Fuzzy Logic for Automation Tasks in Agricultural Technological Processes, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 40—46.

DOI: 10.17587/mau.19.40-46

References

1. Zadeh L. From computing with numbers to computing with words — from anipulation of measurements to manipulation of perceptions, *International Journal of Applied Math and Computer Science*, 2002, vol. 12, no. 3, pp. 307—324.
2. Izmajlov A. Yu., Grishin A. A., Grishin A. P., Lobachevsky Ya. P. *Intellektualnaya avtomatizatsiya tekhnicheskikh sredstv sel'skohozyajstvennogo naznacheniya* (Intelligent automation of agricultural technics), *Innovacionnoe razvitiye APK Rossii na baze intellektual'nykh mashinnykh tekhnologij*, Proc. of the Intern. scientific-techn. Conf., Moscow, FGBNU FNAC VIM, 2014, pp. 359—362 (in Russian)
3. Fataliev K. H., Gadzhiev I. M., Gusejnov S. T., Ibadov N. V., Ibragimov N. T. *Komp'yuternaya model' nechetkogo kontrollera dlya upravleniya temperaturnymi rezhimami kombinirovannoj sistemy teplosnabzheniya plenochnykh teplic* (A computer model of fuzzy controller for temperature control modes in the combined system of greenhouses heat supply), Proc. of 8th Intern. scientific-techn. Conf. "Energoobespechenie i energosberezhenie v sel'skom hozyastve", vol. 5, Moscow, VIESH, 2012, pp. 183—188 (in Russian)
4. Feldsherov A. Yu. *Upravlenie dvizheniem ehlektrotraktora s ispol'zovaniem metoda nechetkoj logiki* (Electric tractor motion control with fuzzy logic method), Proc. of 6th Intern. scientific-techn. Conf. "Energoobespechenie i energosberezhenie v sel'skom hozyastve", Moscow, VIESH, 2010, pp. 185—189 (in Russian)
5. Grishin A. A., Grishin A. P., Grishin V. A. *Sovremennoe oborudovanie dlya vodopol'zovaniya — neobhodimaya chast' sistemy mashin i tekhnologij dlya kompleksnoj mekhanizatsii i avtomatizatsii sel'sko-*

hozyajstvennogo proizvodstva (Modern equipment for water management — a necessary part of system machines and technologies for complex mechanization and automation of agricultural production), *Sistema tekhnologij i mashin dlya innovacionnogo razvitiya APK Rossii*, Proc. of the Intern. scientific-techn. Conf., vol. 2, Moscow, VIM, 2013 (in Russian)

6. Cert. № 2017614845 27.04.2017. *Programma upravleniya centrobezhnym skvazhinnym ehlektronasosom dlya programmirovemykh logicheskikh kontrollerov* (The control program of centrifugal well electric pump for programmable logic controllers), Grishin A. A., Grishin A. P., Grishin V. A. (in Russian)

7. Fay Zadeh. My life and travels with the father of fuzzy logic, TSI Press, Albuquerkue, 1998, 310 p.

8. Izmajlov A. Yu., Grishin A. A., Grishin A. P., Lobachevskij Ya. P. *Nechetkie regulatory intellektual'noj avtomatizatsii tekhnicheskikh sredstv sel'skohozyajstvennogo naznacheniya* (Fuzzy controllers of intelligent automation for agricultural technical equipment), *Innovacionnoe razvitiye APK Rossii na baze intellektual'nykh mashinnykh tekhnologij*, Proc. of the Intern. scientific-techn. Conf., Moscow, FGBNU VIM, 2014, pp. 408—412 (in Russian)

9. Sventickij I. I., Grishin A. P., Grishin A. A., Mudrik V. A. *Estestvennonauchnaya metodologiya opredeleniya urovnya ehffektivnosti agrotekhnologij* (Scientific methodology for determining the level of agricultural technologies efficiency), *Innovacionnoe razvitiye APK Rossii na baze intellektual'nykh mashinnykh tekhnologij*, Proc. of the Intern. scientific-techn. Conf., Moscow, FGBNU VIM, 2014, pp. 429—434 (in Russian)

10. Grishin A. P., Grishin A. A. *Intellektual'noe upravlenie temperaturuj v rostovoj kamere dlya proizvodstva miniklubnej* (Intelligent control of temperature in the growth chamber for the production of minitubers), *Innovacionnoe razvitiye APK Rossii na baze intellektual'nykh mashinnykh tekhnologij*, Proc. of the Intern. scientific-techn. Conf., Moscow, FGBNU VIM, 2014, pp. 382—386 (in Russian)

11. Cert. № 2017614816 27.04.2017. *Programma upravleniya klimatom vegetacionnoj kamery s ispol'zovaniem nechetkoj logiki* (Climate control program for growing chamber with fuzzy logic), Grishin A. A., Grishin A. P., Grishin V. A., Izmajlov A. Yu. (in Russian).

А. А. Искендеров, д-р техн. наук, проф., elesger_54@mail.ru, Г. Ю. Аббасова, докторант,
Сумгаитский государственный университет, г. Сумгаит, Азербайджан

Оптимальное управление забором и распределением воды на высокорасположенных территориях

Рассмотрена высокорасположенная автоматизированная система водоснабжения, питающаяся из нижележащего источника воды, состоящая из последовательных насосных станций — отрезков трубопровода-водоемов на склоне — и перегораживающих сооружений — участков канала на вышерасположенной равнине, где в конце канала имеется аварийный сброс, удаляющий излишки воды. Для эффективной работы системы предложена новая постановка задачи оптимального управления водоснабжением. Приведен пример решения частного варианта поставленной задачи с использованием метода линейного программирования в среде MATLAB.

Ключевые слова: управление, водоем, оптимизация водораспределения, насосная станция, трубопроводная линия, перегораживающее сооружение

Введение

Значительная часть населения, а также промышленные и сельскохозяйственные объекты находятся на высокорасположенных участках Земли, а источники воды — несколько ниже уровня рассматриваемых участков. Поэтому в системе водоснабжения этих объектов используются насосные станции, трубопроводы и другое оборудование, доставляющее воду к потребителям. Для эффективного функционирования этой системы необходимо разработать автоматизированную систему управления, использовать математически обоснованные оптимальные режимы забора и распределения воды.

Имеется множество публикаций, посвященных решению вопроса автоматизации водоснабжения высокорасположенных участков. Например, в монографии [1] рассматриваются вопросы автоматического управления водораспределением в горных условиях. В ней приводится алгоритм оптимального водораспределения с помощью способа динамического программирования. В работе [2] рассматривается проблема научного обоснования рациональной технологии орошения для региона горного земледелия в Республике Азербайджан. Здесь авторами разработаны принципиальные схемы для орошения склонов с различными уклонами местности. Отмечается, что преимуществом полива по микророздам является снижение размыва почвы, равномерное увлажнение по ширине междурядий и по длине поля, уменьшение поверхностного сброса и увеличение производительности труда. В работе [3] рассматривается вопрос синтеза оптимального алгоритма оперативного управления водораспределением в период дефицита оросительной воды на основе учета характеристик случайной величины расхода источника орошения, особенностей применяемых в мелиорации датчиков расхода воды, а также с использованием экономического критерия управления и т. д.

Но в приведенных и других подобных работах не рассматриваются высокорасположенные объекты с наклонной и горизонтальной частями территории и не приводится математическая постановка и решение задачи оптимального управления водоснабжением подобных систем.

С целью устранить эти недостатки в настоящей работе предлагается рассмотреть задачу оптималь-

ного управления водоснабжением объектов высокорасположенной территории, которая имеет наклонную часть на склоне и горизонтальную часть на вершине территории. Для такой системы разработана задача составления оптимального графика работы сооружений, которая позволит организовать рациональное функционирование системы водоснабжения. Подобная задача рассмотрена в работах авторов для систем водоснабжения, функционирующих на высокорасположенных участках Земли [4].

В данной статье предлагается новая постановка задачи, в которой уточнена целевая функция и ограничения согласно особенностям рассматриваемого объекта, а для ее решения используется пакет математического программирования MATLAB [5].

Постановка и особенности задачи оптимального управления забором и распределением воды

Предположим, что требуется решить задачу оптимального управления системой водоснабжения высокорасположенной территории, часть объектов которой расположена на склоне, а другая часть — в горизонтальном участке вершины этой территории. Система водоснабжения такой территории состоит из трубопроводной линии — для обеспечения потребителей на склоне — и из канала — для обеспечения потребителей на горизонтальном участке. Трубопроводная линия имеет k последовательно расположенных участков с насосными агрегатами, отрезками трубопроводной линии и водоемами, предназначенными для накопления и передачи воды к потребителям на склоне, к следующим вышестоящим участкам склона и участкам горизонтального канала. Канал является продолжением трубопроводной линии и состоит из n участков с перегораживающими сооружениями, предназначенными для распределения воды между потребителями горизонтальной территории и передачи ее к следующим участкам этого канала (рис. 1).

На рис. 1 приведена схема высокорасположенной системы водоснабжения. Здесь $h_1, \dots, h_k$ — уровни расположения водоемов на склоне над горизонтальной линией, проходящей через первый насос; h — уровень горизонтальных участков канала; $N_1, \dots, N_{k+1}$ — насосные агрегаты; $T_1, \dots, T_{k+1}$ — отрезки трубопроводной линии; $B_1, \dots, B_k$ — водоемы, предназначен-

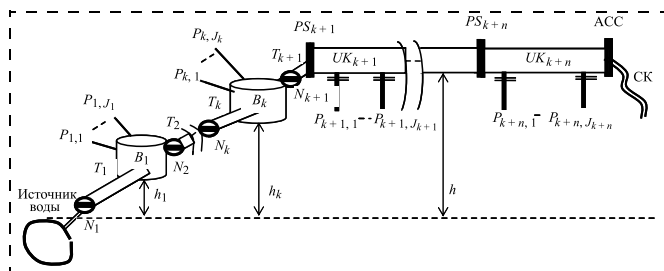


Рис. 1. Система водоснабжения высокогорного массива со склоном

ные для накопления, перекачки воды и для уменьшения напоров насосных станций, расположенных на склоне; $PS_{k+1}, \dots, PS_{k+n}$ — перегораживающие сооружения; $UK_{k+1}, \dots, UK_{k+n}$ — участки канала; $P_{1,1}, \dots, P_{k+n, J_{k+n}}$ — потребители воды; АСС — аварийно-сбросное сооружение; СК — сбросный канал.

В рассматриваемой системе первый насос N_1 поднимает воду из источника и перекачивает ее в водоем B_1 , каждый следующий i -й насос N_i перекачивает воду из водоема B_i к следующему водоему B_{i+1} . Из последнего водоема B_k , расположенного на склоне, вода с помощью насоса N_{k+1} перекачивается в начальное перегораживающее сооружение PS_{k+1} и поступает к первому участку канала UK_{k+1} , из которого самотеком поступает к потребителям этого участка и далее ко всем следующим участкам магистрального канала и остальным потребителям горизонтальной территории. Таким образом, через водоемы $B_1, \dots, B_k$ вода передается к потребителям $P_{1,1}, \dots, P_{k, J_k}$, расположенным на склоне, и через участки $UK_{k+1}, \dots, UK_{k+n}$ — к потребителям $P_{k+1,1}, \dots, P_{k+n, J_{k+n}}$ магистрального канала. В конце системы имеется АСС для удаления излишних объемов воды через СК.

Поставим следующую задачу оптимального управления системой водоснабжения высокогорной территории, представленной на рис. 1.

Требуется найти такие расходы воды в насосных станциях, перегораживающих сооружениях, пунктах потребления, АСС и такие объемы воды в водоемах и участках канала, при которых за период управления $(t_0, T]$ минимизируются суммарные затраты, связанные с отклонениями расходов подаваемой воды в пункты потребления от требуемых ими расходов, а также со сбросом воды через АСС.

Для упрощения данной задачи будем считать, что расходы воды в насосных станциях и перегораживающих сооружениях — $Q_i(t), i = \overline{1, k+n}$, пунктах потребления — $q_{i,j}(t), i = \overline{1, k+n}, j = \overline{1, J_i}$, аварийно-сбросном сооружении — $Q_{k+n+1}(t)$, а также объемы воды в водоемах и участках канала — $V_i(t), i = \overline{1, k+n}$, являются кусочно-постоянными функциями времени в полуинтервалах $(t_p - 1, t_p], p = \overline{1, P}$. Обозначим длины этих полуинтервалов времени $\Delta t_p = t_p - t_{p-1}$,

так что $\sum_{p=1}^P \Delta t_p = T - t_0$.

Введем следующие обозначения для искомых кусочно-постоянных функций в полуинтервалах времени $(t_p - 1, t_p]$:

- расходы воды в насосных станциях и перегораживающих сооружениях, в пунктах потребления и в АСС:

$$Q_i^p, q_{i,j}^p, i = \overline{1, k+n}, j = \overline{1, J_i}, Q_{k+n+1}^p, p = \overline{1, P};$$

- объемы воды в водоемах трубопроводной линии и участках канала:

$$V_i^p, i = \overline{1, k+n}, p = \overline{1, P}.$$

Введем в рассмотрение также следующие значения данных функций, фигурирующих в постановке задачи:

- минимальные, максимальные и начальные расходы воды в насосных станциях, перегораживающих сооружениях и АСС:

$$Q_i^{\min}, Q_i^{\max}, Q_i^0, i = \overline{1, k+n};$$

$$Q_{k+n+1}^{\min}, Q_{k+n+1}^{\max}, Q_{k+n+1}^0;$$

- минимальные, максимальные, начальные и требуемые за периоды $(t_p - 1, t_p]$ расходы воды в пунктах потребления:

$$q_{i,j}^{\min}, q_{i,j}^{\max}, q_{i,j}^0, \bar{q}_{i,j}^p, \\ i = \overline{1, k+n}, j = \overline{1, J_i}, p = \overline{1, P};$$

- минимальные, максимальные и начальные объемы воды в водоемах трубопроводной линии и участках канала:

$$V_i^{\min}, V_i^{\max}, V_i^0, i = \overline{1, k+n};$$

- стоимость единичного объема воды, подаваемой потребителям $P_{i,j}$ с расходами, отличающимися от требуемых ими расходов:

$$c_{i,j}, i = \overline{1, k+n}, j = \overline{1, J_i};$$

- стоимость единичного объема воды, сбрасываемой через АСС:

$$c_{k+n+1}.$$

Допустим, что расходы воды в N_{k+1} и PS_{k+1} одинаковы и равны $Q_{k+1}^p, p = \overline{1, P}$.

В качестве целевой функции поставленной задачи оптимального управления примем общую сумму затрат, связанную с отклонениями расходов воды, подаваемых в пункты потребления, от их требуемых расходов и потерь, связанных со сбросом воды через АСС, в течение периода управления $(t_0, T]$:

$$C = \sum_{p=1}^P \left(\sum_{i=1}^{k+n} \sum_{j=1}^{J_i} c_{i,j} |q_{i,j}^p - \bar{q}_{i,j}^p| + c_{k+n+1} Q_{k+n+1}^p \right) \Delta t_p. \quad (1)$$

Таким образом, поставленная задача оптимального управления заключается в нахождении значений параметров

$$Q_i^p, V_i^p, q_{i,j}^p, i = \overline{1, k+n}, j = \overline{1, J_i};$$

$$Q_{k+n+1}^p, p = \overline{1, P},$$

минимизирующих значение целевой функции (1):

$$C \rightarrow \min \quad (2)$$

и удовлетворяющих следующей системе ограничений:

- ♦ ограничение, связанное с неотрицательностью целевой функции:

$$C \geq 0; \quad (3)$$

- ♦ ограничения взаимосвязи между расходами воды в сооружениях и объемами воды в водоемах и участках канала:

$$Q_i^p - Q_i^{p-1} = \sum_{j=1}^{J_i} (q_{i,j}^p - q_{i,j}^{p-1}) + \frac{V_i^p - V_i^{p-1}}{\Delta t_p} + Q_{i+1}^p - Q_{i+1}^{p-1}, i = \overline{1, k+n}, p = \overline{1, P}; \quad (4)$$

- ♦ ограничения расходов воды в насосных станциях, перегораживающих сооружениях и АСС:

$$Q_i^{\min} \leq Q_i^p \leq Q_i^{\max}, i = \overline{1, k+n+1}, p = \overline{1, P}; \quad (5)$$

- ♦ ограничения расходов воды в пунктах потребления:

$$q_{i,j}^{\min} \leq q_{i,j}^p \leq q_{i,j}^{\max}, i = \overline{1, k+n}, j = \overline{1, J_i}, p = \overline{1, P}; \quad (6)$$

- ♦ ограничения объемов воды в водоемах и участках канала:

$$V_i^{\min} \leq V_i^p \leq V_i^{\max}, i = \overline{1, k+n}, p = \overline{1, P}. \quad (7)$$

Начальными значениями для решения поставленной задачи являются начальные расходы воды в насосных станциях, перегораживающих сооружениях, пунктах потребления, начальные объемы воды в водоемах трубопроводной линии и участках канала, а также начальный расход воды в АСС:

$$\begin{aligned} Q_i(t_0) &= Q_i^0, q_{i,j}(t_0) = q_{i,j}^0, \\ V_i(t_0) &= V_i^0, i = \overline{1, k+n}, j = \overline{1, J_i}, \\ Q_{k+n+1}(t_0) &= Q_{k+n+1}^0. \end{aligned} \quad (8)$$

Пример решения поставленной задачи оптимального управления

Рассмотрим решение задачи (1)–(8) на примере конкретного объекта водоснабжения. Пусть требуется составить задачу определения графика работы сооружений высокорасположенной системы водоснабжения (рис. 2) с двумя участками трубопровода и двумя участками канала (в каждом участке которого имеется по одному пункту водопотребления) за по-

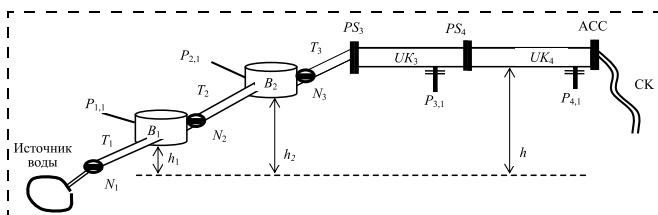


Рис. 2. Система водоснабжения высокорасположенного массива с четырьмя участками и склоном

следовательные периоды управления $(t_0, t_1]$ и $(t_1, t_2]$. Здесь расходы в N_3 и PS_3 одинаковы. Поскольку в каждом участке имеется по одному пункту потребления, то в постановке задачи принимается $j = 1$.

Введем следующие обозначения:

- длина полуинтервалов времени
 $\Delta t_1 = t_1 - t_0 = 43200$ с; $\Delta t_2 = t_2 - t_1 = 43\ 200$ с;
- минимальные, максимальные, начальные и искомые в полуинтервалах $(t_0, t_1]$ и $(t_1, t_2]$ расходы воды в сооружениях N_1, N_2, PS_3, PS_4 и в АСС:
 $Q_i^{\min}, Q_i^{\max}, Q_i^0, Q_i^1, Q_i^2, i = \overline{1, 4};$
 $Q_5^{\min}, Q_5^{\max}, Q_5^0, Q_5^1, Q_5^2;$
- минимальные, максимальные, начальные, требуемые и искомые в полуинтервалах времени $(t_0, t_1]$ и $(t_1, t_2]$ расходы воды в пунктах потребления:
 $q_{i,1}^{\min}, q_{i,1}^{\max}, q_{i,1}^0, \bar{q}_{i,1}^1, \bar{q}_{i,1}^2, q_{i,1}^1, q_{i,1}^2, i = \overline{1, 4};$
- минимальные, максимальные, начальные и искомые в полуинтервалах $(t_0, t_1]$ и $(t_1, t_2]$ объемы воды в водоемах и участках канала:

$$V_i^{\min}, V_i^{\max}, V_i^0, V_i^1, V_i^2, i = \overline{1, 4};$$

- стоимость подачи единичного объема воды в пункты потребления с расходами, отличающимися от требуемых расходов: $c_{i,1}, i = \overline{1, 4};$
- стоимость единичного объема воды, сбрасываемой через АСС: c_5 .

В качестве целевой функции принимаются суммарные потери, связанные с отклонениями расходов воды, подаваемых в пункты потребления от их требуемых расходов, а также со сбросом воды через АСС:

$$C = \sum_{i=1}^4 c_{i,1} (|q_{i,1}^1 - \bar{q}_{i,1}^1| \Delta t_1 + |q_{i,1}^2 - \bar{q}_{i,1}^2| \Delta t_2) + c_5 (Q_5^1 \Delta t_1 + Q_5^2 \Delta t_2). \quad (9)$$

При решении задачи рассматриваются два варианта задачи управления:

- правление с полным обеспечением воды
 $(q_{i,1}^1 \geq \bar{q}_{i,1}^1, q_{i,1}^2 \geq \bar{q}_{i,1}^2, i = \overline{1, 4});$
- правление с дефицитом воды
 $(q_{i,1}^1 \leq \bar{q}_{i,1}^1, q_{i,1}^2 \leq \bar{q}_{i,1}^2, i = \overline{1, 4}).$

В первом варианте целевая функция принимает вид:

$$C' = \sum_{i=1}^4 c_{i,1} ((q_{i,1}^1 - \bar{q}_{i,1}^1) \Delta t_1 + (q_{i,1}^2 - \bar{q}_{i,1}^2) \Delta t_2) + c_5 (Q_5^1 \Delta t_1 + Q_5^2 \Delta t_2), \quad (10)$$

и задача управления заключается в нахождении таких значений параметров $Q_i^1, Q_i^2, q_{i,1}^1, q_{i,1}^2, V_i^1, V_i^2, i = \overline{1, 4}$ и Q_5^1, Q_5^2 , при которых минимизируется целевая функция (10):

$$C' \rightarrow \min \quad (11)$$

и удовлетворяются следующие ограничивающие условия:

- ограничение целевой функции

$$C' \geq 0; \quad (12)$$

- ограничения взаимосвязи между расходами воды в сооружениях и объемами воды в водоемах и участках канала

$$Q_i^p - Q_i^{p-1} = q_{i,1}^p - q_{i,1}^{p-1} + \frac{V_i^p - V_i^{p-1}}{\Delta t_p} + Q_{i+1}^p - Q_{i+1}^{p-1}, \quad i = \overline{1,4}, p = \overline{1,2}; \quad (13)$$

- ограничения расходов и объемов воды

$$Q_i^{\min} \leq Q_i^p \leq Q_i^{\max}, \quad i = \overline{1,4}, p = \overline{1,2}; \quad (14)$$

$$q_{i,1}^{\min} \leq q_{i,1}^p \leq q_{i,1}^{\max}, \quad i = \overline{1,4}, p = \overline{1,2}; \quad (15)$$

$$Q_5^{\min} \leq Q_5^p \leq Q_5^{\max}, \quad p = \overline{1,2}; \quad (16)$$

$$V_i^{\min} \leq V_i^p(t) \leq V_i^{\max}, \quad i = \overline{1,4}, p = \overline{1,2}. \quad (17)$$

Начальными условиями для решения задачи являются начальные значения расходов и объемов воды:

$$Q_i(0) = Q_i^0; \quad q_{i,1}(0) = q_{i,1}^0; \quad V_i(0) = V_i^0, \quad i = \overline{1,4}; \quad Q_5(0) = Q_5^0. \quad (18)$$

Исходные данные для решения задачи приведены в табл. 1, 2.

Учитывая значения параметров (соответствующих переменных), указанных в табл. 1 и 2, и $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 43\,200$ с, приведем постановку задачи оптимального управления (10)–(18) для случая управления с полным обеспечением воды.

В этом случае целевая функция будет в виде:

$$C^1 = 0,23(x_3 - 0,25) + 0,23(x_4 - 0,20) + 0,24(x_9 - 0,20) + 0,24(x_{10} - 0,20) + 0,25(x_{15} - 0,20) + 0,25(x_{16} - 0,25) + 0,26(x_{21} - 0,18) + 0,26(x_{22} - 0,19) + 0,24x_{25} + 0,24x_{26}. \quad (19)$$

Задача управления заключается в нахождении значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_{26}$, минимизирующих целевую функцию

$$C^1 \rightarrow \min \quad (20)$$

и удовлетворяющую следующим ограничениям:

$$C^1 \geq 0; \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2,05 &= x_3 - 0,25 + (x_5 - 300)/43\,200 + x_7 - 1,6; \\ x_7 - 1,6 &= x_9 - 0,25 + (x_{11} - 300)/43\,200 + x_{13} - 1,1; \\ x_{13} - 1,1 &= x_{15} - 0,17 + (x_{17} - 3000)/43\,200 + x_{19} - 0,75; \\ x_{19} - 0,75 &= x_{21} - 0,20 + (x_{23} - 1100)/43\,200 + x_{25} - 0,3; \\ x_8 - x_1 &= x_4 - x_3 + (x_6 - x_5)/43\,200 + x_8 - x_7; \\ x_8 - x_7 &= x_{10} - x_9 + (x_{12} - x_{11})/43\,200 + x_{14} - x_{13}; \\ x_{14} - x_{13} &= x_{16} - x_{15} + (x_{18} - x_{17})/43\,200 + x_{20} - x_{19}; \\ x_{20} - x_{19} &= x_{22} - x_{21} + (x_{24} - x_{23})/43\,200 + x_{26} - x_{25}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq 0,3; \quad 0 \leq x_2 \leq 0,3; \quad 0 \leq x_3 \leq 0,3; \\ 0 &\leq x_4 \leq 0,3; \quad 100 \leq x_5 \leq 700; \quad 100 \leq x_6 \leq 700; \\ 0 &\leq x_7 \leq 2,0; \quad 0 \leq x_8 \leq 2,0; \quad 0 \leq x_9 \leq 0,3; \\ 0 &\leq x_{10} \leq 0,3; \quad 100 \leq x_{11} \leq 700; \quad 100 \leq x_{12} \leq 700; \\ 0 &\leq x_{13} \leq 2,0; \quad 0 \leq x_{14} \leq 2,0; \quad 0 \leq x_{15} \leq 0,3; \\ 0 &\leq x_{16} \leq 0,3; \quad 1500 \leq x_{17} \leq 10\,000; \\ 1500 &\leq x_{18} \leq 10\,000; \quad 0 \leq x_{19} \leq 2,0; \quad 0 \leq x_{20} \leq 2,0; \\ 0 &\leq x_{21} \leq 0,3; \quad 0 \leq x_{22} \leq 0,3; \quad 1000 \leq x_{23} \leq 10\,000; \\ 1000 &\leq x_{24} \leq 10\,000; \quad 0 \leq x_{25} \leq 1,0; \quad 0 \leq x_{26} \leq 1,0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Таблица 1

Основные характеристики сооружений системы водоснабжения для 1-го и 2-го участков

Участки склона	1-й участок						2-й участок					
Сооружения	$N_1, \text{ м}^3/\text{с}$		$P_{1,1}, \text{ м}^3/\text{с}$		$B_1, \text{ м}^3$		$N_2, \text{ м}^3/\text{с}$		$P_{2,1}, \text{ м}^3/\text{с}$		$B_2, \text{ м}^3$	
Параметры	Q_1^1	Q_1^2	$q_{1,1}^1$	$q_{1,1}^2$	V_1^1	V_1^2	Q_2^1	Q_2^2	$q_{2,1}^1$	$q_{2,1}^2$	V_2^1	V_2^2
Переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
Минимальные значения	0,0	0,0	0,0	0,0	100	100	0,0	0,0	0,0	0,0	100	100
Максимальные значения	3,0	3,0	0,3	0,3	700	700	2,0	2,0	0,3	0,3	700	700
Начальные значения	2,05	—	0,25	—	300	—	1,60	—	0,25	—	300	—
Стоимость единичного объема воды, долл./м ³	—	—	0,23	0,23	—	—	—	—	0,24	0,24	—	—
Требуемые расходы воды, м ³ /с	—	—	0,25	0,20	—	—	—	—	0,20	0,25	—	—

Таблица 2

Основные характеристики сооружений системы водоснабжения для 3-го и 4-го участков

Участки канала	3-й участок						4-й участок							
Сооружения	$PS_3, \text{ м}^3/\text{с}$		$P_{3,1}, \text{ м}^3/\text{с}$		$UK_3, \text{ м}^3$		$PS_4, \text{ м}^3/\text{с}$		$P_{4,1}, \text{ м}^3/\text{с}$		$UK_4, \text{ м}^3$		$ACC, \text{ м}^3/\text{с}$	
Параметры	Q_3^1	Q_3^2	$q_{3,1}^1$	$q_{3,1}^2$	V_3^1	V_3^2	Q_4^1	Q_4^2	$q_{4,1}^1$	$q_{4,1}^2$	V_4^1	V_4^2	Q_5^1	Q_5^2
Переменные	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}
Минимальные значения	0,0	0,0	0,0	0,0	1500	1500	0,0	0,0	0,0	0,0	1000	1000	0,0	0,0
Максимальные значения	2,0	2,0	0,3	0,3	10 000	10 000	2,0	2,0	0,3	0,3	10 000	10 000	1,0	1,0
Начальные значения	1,10	—	0,17	—	3000	—	0,75	—	0,20	—	2000	—	0,3	—
Стоимость единичного объема воды, долл./м ³	—	—	0,25	0,25	—	—	—	—	0,26	0,26	—	—	0,24	0,24
Требуемые расходы воды, м ³ /с	—	—	0,20	0,25	—	—	—	—	0,18	0,19	—	—	—	—

Оптимальные значения параметров для первого полуинтервала времени

$\Delta t_1 = 12 \text{ ч} = 43 \text{ 200 с} (8^{00} - 12^{00})$							
Участки склона	1-й участок			2-й участок			
Сооружения	N_1	$P_{1,1}$	B_1	N_2	$P_{2,1}$	B_2	
Параметры	$Q_1, \text{ м}^3/\text{с}$	$q_{1,1}, \text{ м}^3/\text{с}$	$V_1, \text{ м}^3$	$Q_2, \text{ м}^3/\text{с}$	$q_{2,1}, \text{ м}^3/\text{с}$	$V_2, \text{ м}^3$	
Оптимальные значения в $(t_0, t_1]$ при обеспеченности водой	1,20	0,25	100	1,14	0,20	100	
Оптимальные значения в $(t_0, t_1]$ при дефиците воды	1,38	0,18	100	1,39	0,20	100	
Требуемые потребности в $(t_0, t_1]$	—	0,25	—	—	0,20	—	
Участки канала	3-й участок			4-й участок			
Сооружения	PS_3	$P_{3,1}$	UK_3	PS_4	$P_{4,1}$	UK_4	ACC
Параметры	$Q_3, \text{ м}^3/\text{с}$	$q_{3,1}, \text{ м}^3/\text{с}$	$V_3, \text{ м}^3$	$Q_4, \text{ м}^3/\text{с}$	$q_{4,1}, \text{ м}^3/\text{с}$	$V_4, \text{ м}^3$	$Q_5, \text{ м}^3/\text{с}$
Оптимальные значения в $(t_0, t_1]$ при обеспеченности системы	1,18	0,20	1500	0,43	0,18	1000	0,00
Оптимальные значения в $(t_0, t_1]$ при дефиците воды	1,18	0,20	1500	0,43	0,18	1000	0,00
Требуемые потребности в $(t_0, t_1]$	—	0,20	—	—	0,18	—	—

Таблица 4

Оптимальные значения параметров для второго полуинтервала времени

$\Delta t_2 = 12 \text{ ч} = 43 \text{ 200 с} (12^{00} - 24^{00})$							
Участки склона	1-й участок			2-й участок			
Сооружения	N_1	$P_{1,1}$	B_1	N_2	$P_{2,1}$	B_2	
Параметры	$Q_1, \text{ м}^3/\text{с}$	$q_{1,1}, \text{ м}^3/\text{с}$	$V_1, \text{ м}^3$	$Q_2, \text{ м}^3/\text{с}$	$q_{2,1}, \text{ м}^3/\text{с}$	$V_2, \text{ м}^3$	
Оптимальные значения в $(t_1, t_2]$ при обеспеченности системы	1,51	0,20	100	1,50	0,25	100	
Оптимальные значения в $(t_1, t_2]$ при дефиците воды	1,26	0,20	100	1,25	0,25	100	
Требуемые потребности в $(t_1, t_2]$	—	0,20	—	—	0,25	—	
Участки канала	3-й участок			4-й участок			
Сооружения	PS_3	$P_{3,1}$	UK_3	PS_4	$P_{4,1}$	UK_4	ACC
Параметры	$Q_3, \text{ м}^3/\text{с}$	$q_{3,1}, \text{ м}^3/\text{с}$	$V_3, \text{ м}^3$	$Q_4, \text{ м}^3/\text{с}$	$q_{4,1}, \text{ м}^3/\text{с}$	$V_4, \text{ м}^3$	$Q_5, \text{ м}^3/\text{с}$
Оптимальные значения в $(t_1, t_2]$ при обеспеченности системы	1,24	0,25	1500	0,44	0,19	1000	0,00
Оптимальные значения в $(t_1, t_2]$ при дефиците воды	1,24	0,25	1500	0,44	0,19	1000	0,00
Требуемые потребности в $(t_1, t_2]$	—	0,25	—	—	0,19	—	—

В случае рассмотрения задачи управления (19)—(23) при дефиците воды целевая функция имеет следующий вид:

$$C^2 = 0,23(0,25 - x_3) + 0,23(0,2 - x_4) + 0,24(0,20 - x_9) + 0,24(0,2 - x_{10}) + 0,25(0,2 - x_{15}) + 0,25(0,25 - x_{16}) + 0,26(0,18 - x_{21}) + 0,26(0,19 - x_{22}) + 0,24x_{25} + 0,24x_{26}. \quad (24)$$

После упрощения, задача приводится к виду:

$$C^2 \rightarrow \min, \quad (25)$$

при этом ограничение целевой функции будет:

$$C^2 \geq 0, \quad (26)$$

а ограничения (22) и (23) остаются в прежнем виде.

После упрощения, решая задачу (19)—(23) для случая с полной обеспеченностью водой и задачу (24), (25), (26), (22), (23) для случая дефицита воды, получаем следующие оптимальные значения переменных:

▲ для случая с полной обеспеченностью водой:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1,38; x_2 = 1,51; x_3 = 0,18; x_4 = 0,20; \\ x_5 &= 100,0; x_6 = 100,0; x_7 = 1,39; x_8 = 1,50; \\ x_9 &= 0,20; x_{10} = 0,25; x_{11} = 100,0; x_{12} = 100,0; \\ x_{13} &= 1,18; x_{14} = 1,24; x_{15} = 0,20; x_{16} = 0,25; \\ x_{17} &= 1500; x_{18} = 1500; x_{19} = 0,43; x_{20} = 0,44; \\ x_{21} &= 0,18; x_{22} = 0,19; x_{23} = 1000; x_{24} = 1000; \\ x_{25} &= 0,00; x_{26} = 0,00; \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

▲ для случая с дефицитом воды:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1,20; x_2 = 1,26; x_3 = 0,25; x_4 = 0,20; \\ x_5 &= 100,0; x_6 = 100,0; x_7 = 1,14; x_8 = 1,25; \\ x_9 &= 0,2; x_{10} = 0,25; x_{11} = 100,0; x_{12} = 100,0; \\ x_{13} &= 1,18; x_{14} = 1,24; x_{15} = 0,2; x_{16} = 0,25; \\ x_{17} &= 1500; x_{18} = 1500; x_{19} = 0,43; x_{20} = 0,44; \\ x_{21} &= 0,18; x_{22} = 0,19; x_{23} = 1000; x_{24} = 1000; \\ x_{25} &= 0,00; x_{26} = 0,00. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Таким образом, получим решение задачи для обоих интервалов $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 12 \text{ ч} = 43 \text{ 200 с}$. На основе значений, указанных в табл. 1 и 2, заменяя переменные $x_1, \dots, x_{26}$ в выражениях (27) и (28) с соответствующими параметрами системы, для сооружений системы получаем значения управляемых параметров, указанные в табл. 3, 4.

Заключение

Анализируя требуемые и рассчитанные оптимальные значения расходов потребителей и объемов воды в водоемах и участках канала из табл. 1—4, приходим к выводу, что в течение полуинтервалов времени $(t_0, t_1]$ и $(t_1, t_2]$ рассчитанные расходы совпадают с требуемыми расходами или очень близки к ним, а объемы воды в водоемах и участках канала остаются в допустимых границах, причем расходы

в АСС в обоих полуинтервалах времени полностью обнуляются. Поскольку стоимость единичного объема воды в пунктах потребления больше, чем в водоемах и участках канала, резервные объемы воды в системе уменьшаются до минимально возможного уровня, а расходы в насосных станциях и перегораживающих сооружениях получают значения, достаточные для нормального функционирования системы. При сравнении результатов решения задачи для случаев полной обеспеченности и дефицита воды можно констатировать, что в обоих случаях оптимальные значения расходов приближаются к одинаковым результатам.

Следует отметить, что при увеличении числа объектов системы увеличивается число параметров задачи оптимального управления и соответственно усложняется ее решение. Компьютерные эксперименты показывают, что рассмотренная задача оп-

тимального управления забором и распределением воды успешно решается для системы водоснабжения, в которой имеются до 30 различных объектов.

Список литературы

1. **Алиев Б. Х.** Научные основы автоматического управления горным орошением в Азербайджане. Баку: Зия-Нурлан, 2008. 208 с.
2. **Алиев З. Г., Мамедова Гюлнара Исафил кызы, Хокуме Айхан.** Научное обоснование рациональной технологии орошения для регионов горного земледелия в Азербайджанской Республике // Экология и строительство. 2016. № 1. С. 20–25.
3. **Ногорбеков Б. К.** Совершенствование методов водораспределения и технической эксплуатации для автоматизированных оросительных систем горно-предгорной зоны: Дис. на соиск. уч. степени к. т. н., Киев, 1983. 193 с.
4. **Искендеров А. А., Аббасова Г. Ю.** Задача оптимального управления распределением воды в системах водоснабжения, функционирующих на высокогорных участках // Ученые записки Азербайджанского технического университета. 2013. Т. 1, № 1. С. 30–36.
5. **Ануфриев И.** Самоучитель Матлаб 5.3/6.x. СПб.: БХВ — Петербург, 2004. 736 с.

Optimal Control of Fences and Distribution of Water on High Location Territories

A. A. Iskenderov, elesger_54@mail.ru, G. Yu. Abbasova,
Sumgait State University, Sumgait, 5005, Azerbaijan

Corresponding author: **Iskenderov Alasgar Alakbar oglu**, D. Sc., Professor,
Sumgait State University, Sumgait, 5005, Azerbaijan
e-mail: elesger_54@mail.ru

Accepted on September 08, 2017

In the paper, the automation water distribution system for high location territories which are got from the underlying water source and consisting a sequence of water pipe-warehouse pump-segments of the stations on the slope and partitioned equipment's — parts of channel on high location plain with an alarm reset in the end of the channel, removing excess water is considered. For effective work of such a system a new formulation and solution of the optimal management of water supply problems is offered. For solving the problem, the method of linear programming mathematical package "Matlab" is used. The problem solution is given for the system with 3 pump stations — pipeline segments — warehouses and 2 channel baffle structures, portions of each channel and water storage area which is powered by a single point of consumption. To solve this problem the method of optimization mathematical package of Matlab is used and the results are analyzed. As a result, the problem of operative control for 13 water supply facilities during 2 consecutive intervals of constancy of parameters where the duration of each of which-12 hours is made. Total instead for the optimal values for managing the system with 26 variables are searched. In addition, the costs in the emergency facility in both intervals are completely converted to 0. This proves the acceptability of the considered problem for the control of such objects. The machine time spent for solving this problem is much less, and the problem can be applied to complex objects.

Keywords: automation, control, optimization, high distribution territories, water intake, water distribution, pumping station, pipe line, storage of water, channel, block the construction of the channel section, water supply, water use point

For citation:

Iskenderov A. A., Abbasova G. Yu. Optimal Control of Fences and Distribution of Water on High Location Territories, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 47–52.

DOI: 10.17587/mau.19.47-52

References

1. **Aliyev B. H.** *Nauchnye osnovi avtomaticheskogo upravleniya gornim orosheniem v Azerbaydzhanе* (Scientific automatic government bases by mountain irrigation in Azerbaijan), Baku, Ziya-Nurlan, 2008, 208 p. (in Russian).
2. **Aliyev Z. G., Mamedova Gulnara Israfil kizi, Khokume Aykhan.** *Nauchnoe obosnovaniye racional'noy tehnologii orosheniya dlya regionov gornogo zemledeliya v Azerbaydzhanskoy Respublike* (Scientific ground of rational technology of irrigation for the regions

of mountain agriculture in Azerbaijanian Republic), *Ekologiya i Stroitelstvo*, 2016, no. 1, p. 20–25 (in Russian).

3. **Nogorbekov B. K.** *Sovershenstvovanie metodov vodoraspredeleniya i tehnicheskoy eksploatacii dlya avtomatizirovannich orositel'nykh sistem gorno-predgornoy zony* (Perfection of methods of water allocation and technical exploitation for irrigatory CASS of mountain-before mountain zone), Dis. na soisk.uch.stepeni k. t. n., Kiev, 1983, 193 p. (in Russian).
4. **Iskenderov A. A., Abbasova G. Yu.** *Zadacha optimal'nogo upravleniya raspredeleniem vodi v sistemakh vodosnabzheniya, funktsioniruyushchikh na visokoraspologzhennikh uchastkakh* (Task of optimal management by distribution of water in the water systems functioning on the high-located areas), *The Scientific messages of the Azerbaijanian technical university*, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 30–36 (in Russian).
5. **Anufriev I.** *Samouchitel Matlab 5.3/6.x* (Tutorial Matlab 5.3/6.x), SPb., BXV — Peterburg, 2004, 736 p. (in Russian).

Д. А. Суворов, аспирант, dmitry.suvorov@skolkovotech.ru,

Р. А. Жуков, аспирант, roman.zhukov@skolkovotech.ru,

Д. О. Тетерюков, Ph. D, ст. преподаватель, d.tsetserukou@skoltech.ru,

Сколковский институт науки и технологий, г. Москва,

С. Л. Зенкевич, д-р физ. мат. наук, проф., zenkev@bmstu.ru,

Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, г. Москва

Аудиовизуальный детектор голосовой активности на базе глубокой сверточной сети и обобщенной взаимной корреляции¹

Разработан алгоритм детектора голосовой активности, использующий данные с видеокamеры и массива микрофонов и благодаря этому обладающий высокой устойчивостью к внешним шумам. Обработка видеокadров заключается в поиске губ человека с помощью глубокой сверточной нейронной сети, обработка звука — в локализации источников звука с помощью обобщенной функции взаимной корреляции с весовой функцией преобразования фазы (GCC-PHAT). Решение об активации детектора голосовой активности принимается только в случае нахождения соответствия между направлением на губы и на активные источники звука. Разработанный детектор показал высокую устойчивость к шумам — шумы, производимые источниками звука вне видимости видеокamеры или целевого сектора для массива микрофонов, игнорировались в 100 % случаев во время эксперимента.

Ключевые слова: детектор голосовой активности, массив микрофонов, сверточные сети, локализация источников звука, обработка звука

Введение

В последнее время голосовые интерфейсы становятся неотъемлемой частью взаимодействия с робототехническими комплексами. В таких известных примерах сервисных роботов, как Amazon Echo, Google Home, Pepper, распознавание речи является ключевым компонентом системы. Детектор голосовой активности — это критически важный компонент системы распознавания речи, который значительно влияет на ее точность и производительность [1]. При правильном выделении участков звука, в которых присутствует целевой голосовой сигнал, детектор наличия голоса значительно уменьшает объем данных для обработки системой распознавания речи, что в итоге ускоряет ее работу и уменьшает вероятность ложных распознаваний. Особенно это свойство важно при работе систем распознавания речи на персональных устройствах пользователей — смартфонах, ноутбуках, смарт-телевизорах, у которых в отличие от специализированных серверов ограничена процессорная мощность.

Известно множество методов детектирования голосовой активности, основанных на: пороговых значениях энергии [2], спектральных признаках [3], нейронных сетях [4], аудиовизуальных признаках [5], моделях гауссовых смесей [6], данных от массива микрофонов [7]. Качество работы большинства известных методов быстро деградирует с ухудшением соотношения сигнал—шум [7]. Многие методы не

способны работать в шумных местах при нахождении источника звука даже на небольшом расстоянии от микрофона. В данной статье предложен аудиовизуальный метод детектирования наличия голоса, использующий глубокие сверточные сети для анализа видеоданных, и алгоритм "взвешенный GCC-PHAT" [8] для анализа аудиоданных с массива микрофонов. Метод пригоден для работы в реальном времени, в том числе и на мобильных устройствах.

Целью данной работы является разработка детектора голосовой активности, способного игнорировать источники звука с направлений, где целевой источник речи не может присутствовать физически, и отсеивать источники звука, не являющиеся человеческой речью.

Постановка задачи детектирования голосовой активности

Имеется ограниченный дискретный сигнал, представленный во временной области, $x[l/T]$, где $0 \leq l \leq L-1$, $x_{\min} \leq x[l/T] \leq x_{\max}$, T — период дискретизации, L — число измерений в сигнале. Для звукового сигнала обычно

$$x_{\min} = -1;$$

$$x_{\max} = 1.$$

Сигнал $x[l/T]$ является смесью двух ограниченных, дискретных и некоррелированных сигналов [9]:

$$x[l/T] = s[l/T] + n[l/T], \quad (1)$$

где $n[l/T]$ — это шум микрофона и окружающей среды, $s[l/T]$ — это речевой сигнал.

¹ Исследование частично выполнено за счет гранта Фонда содействия инновациям (проект № 102ГРНТИС5/26071).

Анализ сигнала осуществляется покадрово с выделением кадра с помощью оконной функции. В частотной области можно записать:

$$X^n[k] = S^n[k] + N^n[k], \quad (2)$$

где k — индекс частоты ($0 \leq k \leq K-1$); K — число частот в дискретном преобразовании Фурье, n — номер анализируемого кадра.

Для каждого кадра n рассматриваются два вида гипотез:

- H_0 : в сигнале X^n отсутствует речь, $X^n = N^n$;
- H_1 : в сигнале X^n присутствует речь, $X^n = S^n + N^n$.

Задача детектирования голосовой активности заключается в отнесении кадра n к классу H_0 или H_1 .

Алгоритм детектирования голосовой активности

Алгоритм детектирования наличия голоса, предложенный в данной статье, показан на рис. 1. Он состоит из следующих шагов:

1. С помощью микрофонной решетки осуществляется захват аппаратно-синхронизированного многоканального звука кадрами фиксированной длины, включающими в себе непрерывную последовательность измерений с каждого микрофона массива.

2. Вычислительный модуль, используя алгоритм "взвешенный GCC-RNAT", оценивает азимуты на активные источники звука в системе координат массива микрофонов.

3. Направление на активные источники звука уточняется с помощью калмановской фильтрации [10].

4. Параллельно с захватом звука захватывается видеоизображение с цифровой видеокамеры.

5. Графический вычислительный модуль с помощью сверточных глубоких нейронных сетей [11] находит лицо человека на изображении.

6. Вычислительный модуль находит положение губ внутри области, соответствующей лицу, с помощью классификатора, описанного в работе [12].

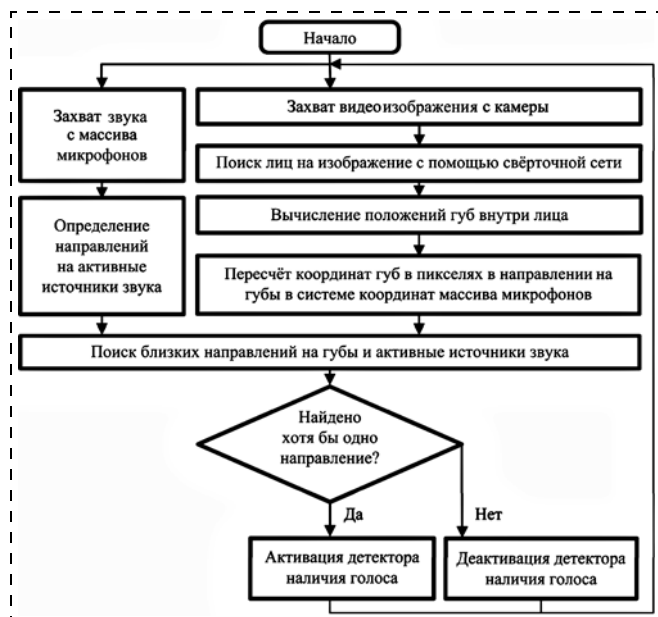


Рис. 1. Аудиовизуальный детектор наличия голоса

7. Вычислительный модуль, используя заранее известные оптические параметры камеры (фокусное расстояние, координату пересечения главной оптической оси с матрицей камеры, соотношение сторон одного пикселя матрицы камеры) и коэффициенты радиального и тангенциального искажений, высчитывает направление на обнаруженные губы в системе координат камеры. Параметры камеры предварительно определяются с помощью процедуры калибровки [13].

8. Решение об активации детектора голосовой активности принимается только в случае нахождения соответствующих направлений на губы и активный источник речи.

Длина звукового кадра для анализа подбирается так, чтобы статистические параметры сигнала можно было считать постоянными. На данный момент она составляет 256 измерений при частоте дискретизации 16 кГц. Обычно длина кадра составляет от одного до нескольких десятков миллисекунд.

Архитектура сверточной сети, использующейся для поиска губ, представлена на рис. 2. Нейронная сеть принимает на вход изображение и с помощью пирамиды Гаусса представляет его в разных масштабах, создавая новое расширенное изображение. Все дальнейшие операции осуществляются над новым изображением. Такое преобразование увеличивает вычислительную сложность, но обеспечивает инвариантность к масштабу.

Нейронная сеть была обучена на "DLib face detection dataset", в состав которого входит 7213 изображений человеческих лиц.

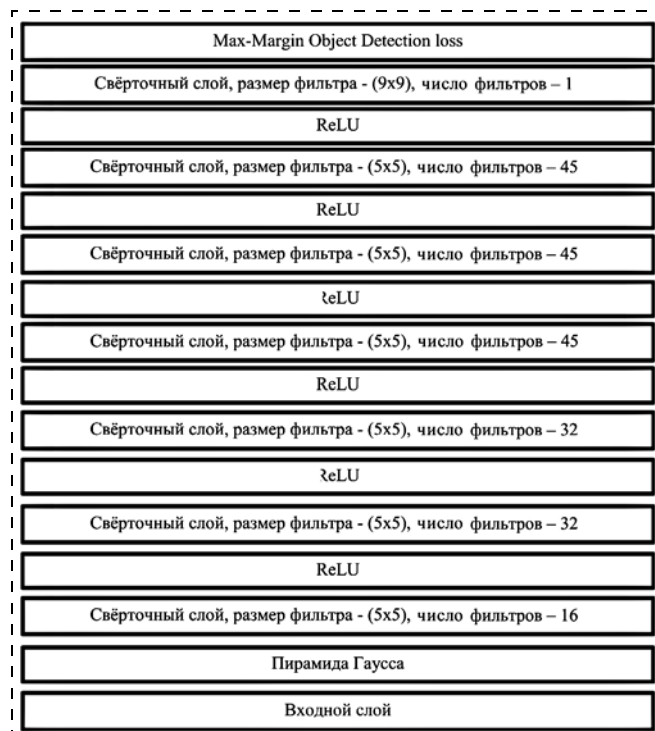


Рис. 2. Архитектура нейронной сети, используемой для поиска губ на изображениях

Определение направлений на активные источники звука с помощью алгоритма "взвешенный GCC-PHAT" продемонстрировано ниже.

Вначале проводится умножение каждого канала захваченного кадра на окно Ханна [14] и его дискретное преобразование Фурье:

$$X_m^l[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \omega[n] x_m[l\Delta N + n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad (3)$$

где ω — вектор, содержащий коэффициенты окна Ханна; x_m — вектор измерений звукового сигнала; k — индекс частоты.

Взвешенный GCC-PHAT вычисляется следующим способом:

$$R_{pq}^l[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\zeta_{pq}^l[k] X_p^l[k] X_q^l[k]^*}{|X_p^l[k]| |X_q^l[k]| + \varepsilon} e^{j2\pi kn/N}, \quad (4)$$

где $R_{pq}^l[n]$ — результат кросс-корреляции; $\zeta_{pq}^l[k]$ — частотная маска, необходимая для подавления влияния шумов; ε — коэффициент для избегания деления на ноль.

Далее осуществляется отображение значения $R_{pq}^l[n]$ из интервала $[0, N-1]$ в интервал $[-N/2 + 1, N/2]$:

$$\hat{R}_{pq}^l[n] = R_{pq}^l[n \bmod N], \quad (5)$$

затем вычисляется индекс, соответствующий максимальному значению кросс-корреляции, который однозначно пересчитывается в направление на источник звука табличным способом:

$$\tau_{pq}^l = \operatorname{argmax}(\hat{R}_{pq}^l[n]), -n_{pq}^{\max} \leq n \leq n_{pq}^{\max}; \quad (6)$$

$$n_{pq}^{\max} = \frac{f_s}{c} \|x_p - x_q\|, \quad (7)$$

где f_s — частота дискретизации; c — скорость звука; x_p и x_q — положения микрофонов p и q .

В случае наличия нескольких активных источников звука направление на каждый из них будет соответствовать локальному максимуму кросс-корреляции.

Частотная маска $\zeta_{pq}^l[k]$ вычисляется на основе соотношения сигнал-шум в каждом канале:

$$|X_{pq}^l[k]|^2 = |X_p^l[k]|^2 |X_q^l[k]|^2; \quad (8)$$

$$Y_{pq}^l[k] = \frac{1}{2W+1} \sum_{\Delta k=-W}^W \log(|X_{pq}^l[k+\Delta k]|^2 + \varepsilon), \quad (9)$$

где $(2W+1)$ — это размер прямоугольного окна, используемого для оценки шума, ε — коэффициент для избегания деления на ноль.

Затем вычисляется разность между текущим уровнем мощности и минимальным уровнем мощности ΔA в предыдущих кадрах в буфере:

$$A_{pq}^l[k] = Y_{pq}^l[k] - \min\{Y_{pq}^{l-\Delta A}[k], \dots, Y_{pq}^l[k]\}. \quad (10)$$

После этого вычисляется разность между текущим уровнем мощности и минимальным уровнем мощности ΔB в будущих кадрах:

$$B_{pq}^l[k] = Y_{pq}^l[k] - \min\{Y_{pq}^l[k], \dots, Y_{pq}^{l+\Delta B-1}[k]\}. \quad (11)$$

Эта операция добавляет небольшую задержку локализации, так как необходимо знать будущие значения звуковых измерений:

$$D_{pq}^l[k] = \begin{cases} 1 & (A_{pq}^l[k] > \Theta_A) \wedge (B_{pq}^l[k] > \Theta_B); \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (12)$$

где Θ_A и Θ_B — заранее определенные пороговые значения.

Затем вычисляется частотная маска:

$$\zeta_{pq}^l[k] = \begin{cases} 1 & \sum_{l'=l}^{l+\Delta D} D_{pq}^{l'}[k] > \Theta_D; \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (13)$$

Оптическая модель камеры [12], используемая для пересчета пиксельных координат губ в углы в системе координат камеры, приведена ниже:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}; \quad (14)$$

$$\begin{cases} x' = x(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + 2p_1 xy + p_2(r^2 + 2x^2); \\ y' = y(1 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6) + p_1(r^2 + 2y^2) + 2p_2 xy, \end{cases} \quad (15)$$

где $(x, y)^T$ — координаты губ в пикселях на матрице камеры для идеальной модели линзы;

$(x', y')^T$ — координаты губ в пикселях на матрице камеры для реальной модели линзы, учитывающей радиальные и тангенциальные искажения;

$(X, Y, Z)^T$ — координаты губ в системе координат камеры;

f_x, f_y — фокусные расстояния;

c_x, c_y — координаты оптического центра линзы в пикселях в системе координат матрицы;

$(k_1, k_2, k_3)^T$ — коэффициенты радиального искажения;

$(p_1, p_2)^T$ — коэффициенты тангенциального искажения.

Когда алгоритм определяет губы с пиксельными координатами $(x', y')^T$, им соответствует бесконечное число положений губ в системе координат камеры $(X, Y, Z, 1)^T$, которые являются решением системы (15). Все указанные решения лежат на одной прямой L . Направляющий вектор прямой L указывает направление на губы. Прямая L проходит через оптический центр камеры с координатами $P_0 = (0, 0, 0, 1)^T$ в системе координат камеры. Другая точка $P_1 = (X, Y, Z, 1)$ может быть найдена из уравнения (14) и предположения, что $Z = 1$.

Аппаратная реализация

На базе ранее разработанного авторами линейного восьмиканального массива MEMS микрофо-

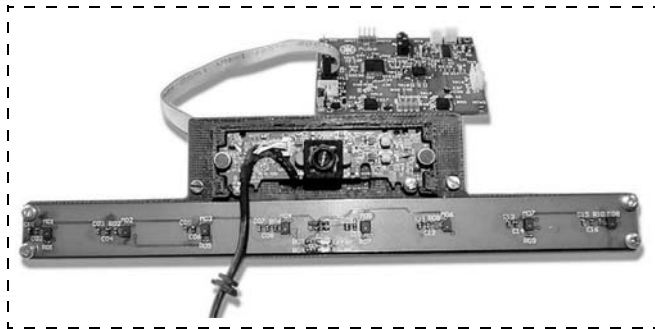


Рис. 3. Версия массива микрофонов со встроенной видеокамерой

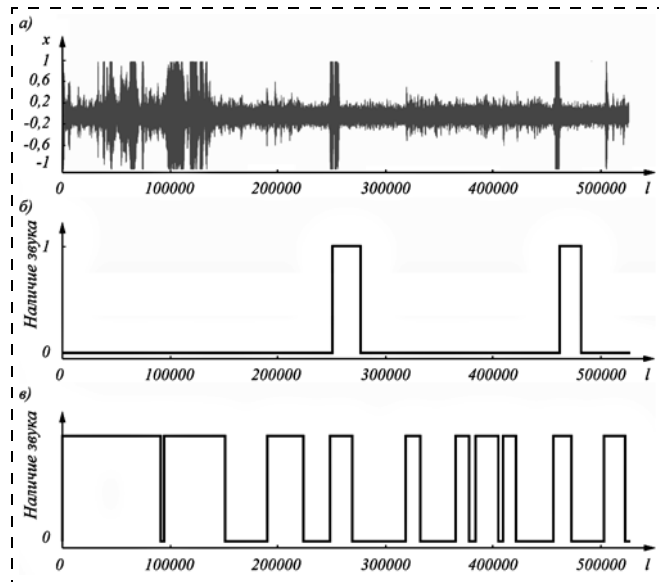


Рис. 4. Результаты сравнения разработанной системы с детектором голоса, использующим только звуковые данные (горизонтальная ось — номер измерения): а — звуковой сигнал с первого микрофона; б — результат детектирования голосовой активности с помощью разработанного метода; в — результат детектирования голосовой активности с помощью детектора голоса, использующего только голосовые данные

нов с PDM-интерфейсом [15] был спроектирован в SolidWorks и изготовлен прототип устройства для аудиовизуального детектирования голосовой активности, представленный на рис. 3. Прототип состоит из трех печатных плат:

- восьмиканального линейного массива микрофонов с расстоянием между микрофонами 3 см (нижняя плата на рис. 3);
- платы захвата звука с восьмиканального массива микрофонов (вверху на рис. 3);
- платы видеокамеры с объективом (в середине рис. 3).

Прототип по USB-шине подключается к компьютеру с видеокартой с поддержкой технологии CUDA, на котором проводятся все вычисления.

Результаты тестирования

Было проведено сравнение качества работы разработанной системы в сильно зашумленных условиях и детектора голосовой активности из проекта с открытым исходным кодом WebRTC, который

также использовал восьмиканальный линейный массив микрофонов, но не использовал данные от видеокамеры. Алгоритм детектирования голосовой активности из WebRTC работал следующим образом:

- формирование диаграммы направленности;
- постфильтрация;
- шумоподавление;
- детектирование наличия голоса.

Сравнение проводили при наличии постоянного фонового источника шума, а также при наличии голосового источника, который находился вне поля зрения видеокамеры и рассматривался как нецелевой. На верхнем графике рис. 4 этот источник звучит первую четверть времени проведения испытаний. Целевой источник появляется дважды и верно детектируется обоими детекторами наличия голоса. Однако детектор наличия голоса, использующий только голосовые данные, имеет очень большое число ложных срабатываний из-за высокой зашумленности обстановки — 88 % времени его активации является ложным в проведенном эксперименте.

Заключение

Разработанный метод детектирования голосовой активности показал высокое качество разметки голосового сигнала, которое при соблюдении условия нахождения говорящего человека в поле видения видеокамеры превышает результаты, показываемые детекторами голоса, использующими только звуковую информацию. Разработанный детектор пригоден для реальных промышленных применений в голосовых пользовательских интерфейсах и робототехнике. В дальнейшем для повышения точности детектирования голоса необходимо проработать калмановскую фильтрацию, использующую данные с массива микрофонов и видеокамеры. Для снижения вычислительной сложности алгоритма и соответственно его системных требований необходимо упростить архитектуру нейронной сети, используемой для обработки видео.

Список литературы

1. Ramirez J., Górriz J. M., Segura J. C. Voice activity detection. Fundamentals and speech recognition system robustness // Robust Speech Recognition and Understanding. Vienna: I-TECH Education and Publishing, 2007. P. 1—22.
2. Woo K., Yang T., Park K., Lee C. Robust voice activity detection algorithm for estimating noise spectrum // Electronics Letters. 2000. Vol. 36, N. 2. P. 180—181.
3. Mousazadeh S., Cohen I. Voice activity detection in presence of transient noise using spectral clustering // IEEE Trans. Audio, Speech, Language Process. 2013. Vol. 21, N. 6. P. 1261—1271.
4. Obuchi Y. Framewise speech-nonspeech classification by neural networks for voice activity detection with statistical noise suppression // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Shanghai, 2016, March. P. 5715—5719.
5. Montazzolli S., Jung C. R., Gelb D. Audiovisual voice activity detection using off-the-shelf cameras // IEEE International Conference on Image Processing. Quebec, 2015, September. P. 3886—3890.
6. Ying D., Yan Y., Dang J., Soong F. K. Voice activity detection based on an unsupervised learning framework // IEEE Trans. Audio, Speech, Language Process. 2011. Vol. 19, N. 8. P. 2624—2633.
7. Popović B., Pakoci E., Pekar D. Advanced Voice Activity Detection on Mobile Phones by Using Microphone Array and Phone-Specific Gaussian Mixture Models // SISY. Subotica, 2016, August. P. 45—50.

8. **Grondin F., Michaud F.** Noise Mask for TDOA Sound Source Localization of Speech on Mobile Robots in Noisy Environments // IEEE International Conference Robotics and Automation. Stockholm, 2016, May.

9. **Tashev I., Mirsamadi S.** DNN-based Causal Voice Activity Detector // Information Theory and Applications Workshop. San Diego, 2016, February.

10. **Julier S., Uhlmann J.** A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems // 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls. Vol. Multi-Sensor Fusion, Tracking and Resource Management II. Orlando, 1997.

11. **King D. E.** Max-Margin Object Detection // Cornell University Library. 31.12.15. URL: <https://arxiv.org/pdf/1502.00046.pdf> (дата обращения: 18.08.2017).

12. **Kazemi V., Sullivan J.** One Millisecond Face Alignment with an Ensemble of Regression Trees // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Columbus, 2014, June.

13. **Bradski G., Kaehler A.** Learning OpenCV. Computer Vision with the OpenCV Library. Sebastopol: O'Reilly Media, 2008. P. 580.

14. **Tashev I.** Sound Capture and Processing. Practical Approaches. The City of New York: John Wiley & Sons, 2009. P. 365.

15. **Суворов Д. А., Жуков Р. А.** Устройство синхронного сбора данных с массива MEMS микрофонов с PDM интерфейсом. Патент России № 172596. 2017. Бюл. № 20.

Audiovisual Voice Activity Detector Based on Deep Convolutional Neural Network and Generalized Cross-Correlation

D. A. Suvorov, dmitry.suvorov@skolkovotech.ru, **R. A. Zhukov**, roman.zhukov@skolkovotech.ru,

D. O. Tsetserukov, d.tsetserukou@skoltech.ru,

Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, 143026, Russian Federation,

S. L. Zenkevich, zenkev@bmstu.ru,

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: **Suvorov Dmitry A.**, Ph. D., student,
e-mail: dmitry.suvorov@skolkovotech.ru

Accepted on August 20, 2017

This paper presents a voice activity detector (VAD) which uses the data from the compact linear microphone array and a video camera, so developed VAD is robust to external noise conditions. It is able to ignore non-speech sound sources and speaking persons located out of the area of the interest. A deep convolutional neural network processes images from the video camera for searching face and lips of the speaking person. It was trained using the Max-Margin Object Detection loss. Pixel coordinates of found lips are converting to directions to lips in camera coordinate system using optical camera model. The sound from the microphone array is processing using the weighted GCC-PHAT algorithm and Kalman filtering. VAD searches for speaking lips on the video. It becomes activated only if the video camera finds lips and the microphone array confirms that there is a sound source in this direction. A prototype of the system based the linear microphone array with 30 mm spacing between microphones and the video camera was developed, manufactured using a 3D printer and tested in the laboratory conditions. The accuracy of the system was compared with the open source VAD from the WebRTC project (developed by Google) which uses only audio features extracted from the same microphone array. Developed VAD showed a high sustainability to external noise. It ignored the noise from not-target directions during 100 % of the testing time. And the VAD from the WebRTC had 88 % of false positive activations.

Keywords: voice activity detector, microphone array, convolutional networks

Acknowledgments

The research was partially implemented due to the grant from the Fund for the Promotion of Innovation (project No. 102GRNTIS5/26071).

For citation:

Suvorov D. A., Zhukov R. A., Tsetserukov D. O., Zenkevich S. L. Audiovisual Voice Activity Detector Based on Deep Convolutional Neural Network and Generalized Cross-Correlation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 53–57

DOI: 10.17587/mau.19.53-57

References

1. **Ramirez J., Górriz J. M., Segura J. C.** Voice activity detection. Fundamentals and speech recognition system robustness, *Robust Speech Recognition and Understanding*, Vienna, I-TECH Education and Publishing, 2007, pp. 1–22.

2. **Woo K., Yang T., Park K., Lee C.** Robust voice activity detection algorithm for estimating noise spectrum, *Electronics Letters*, 2000, vol. 36, no. 2, pp. 180–181.

3. **Mousazadeh S., Cohen I.** Voice activity detection in presence of transient noise using spectral clustering, *IEEE Trans. Audio, Speech, Language Process.*, 2013, vol. 21, no. 6, pp. 1261–1271.

4. **Obuchi Y.** Framewise speech-nonspeech classification by neural networks for voice activity detection with statistical noise suppression, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Shanghai, March 2016, pp. 5715–5719.

5. **Montazzoli S., Jung C. R., Gelb D.** Audiovisual voice activity detection using off-the-shelf cameras, *IEEE International Conference on Image Processing*, Quebec, September 2015, pp. 3886–3890.

6. **Ying D., Yan Y., Dang J., Soong F. K.** Voice activity detection based on an unsupervised learning framework, *IEEE Trans. Audio, Speech, Language Process.*, 2011, vol. 19, no. 8, pp. 2624–2633.

7. **Popović B., Pakoci E., Pekar D.** Advanced Voice Activity Detection on Mobile Phones by Using Microphone Array and Phoneme-Specific Gaussian Mixture Models, *SISY*, Subotica, August 2016, pp. 45–50.

8. **Grondin F., Michaud F.** Noise Mask for TDOA Sound Source Localization of Speech on Mobile Robots in Noisy Environments, *IEEE International Conference Robotics and Automation*, Stockholm, May 2016.

9. **Tashev I., Mirsamadi S.** DNN-based Causal Voice Activity Detector, *Information Theory and Applications Workshop*, San Diego, February 2016.

10. **Julier S., Uhlmann J.** A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems, *11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls. Vol. Multi-Sensor Fusion, Tracking and Resource Management II*, Orlando, 1997.

11. **King D. E.** Max-Margin Object Detection, *Cornell University Library*. 31.12.15, available at: <https://arxiv.org/pdf/1502.00046.pdf> (date of access: 18.08.2017).

12. **Kazemi V., Sullivan J.** One Millisecond Face Alignment with an Ensemble of Regression Trees, *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Columbus, June 2014.

13. **Bradski G., Kaehler A.** Learning OpenCV. Computer Vision with the OpenCV Library, Sebastopol, O'Reilly Media, 2008, 580 p.

14. **Tashev I.** Sound Capture and Processing. Practical Approaches, The City of New York, John Wiley & Sons, 2009, 365 p.

15. **Suvorov D. A., Zhukov R. A.** *Ustrojstvo sinhronnogo sbora dannyh s massiva MEMS mikrofonov s PDM interfejsom* (Device for synchronous data capturing from the array of MEMS microphones with PDM interface), Russian patent № 172596, 2017, Bul. № 20 (in Russian).

А. В. Яскевич, канд. техн. наук, нач. отдела, Andrey.Yaskevich@rsce.ru,
ПАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С. П. Королева

Уравнения динамики стыковочных механизмов. Часть 1. Алгоритмы для механических систем со структурой дерева

Рассматриваются кинематические особенности механизмов для стыковки космических аппаратов. Для механической системы со структурой дерева, образованной размыканием кинематических контуров этих механизмов, используются рекуррентные алгоритмы расчета уравнений динамики, сил и моментов, действующих на космический аппарат.

Ключевые слова: космический аппарат, стыковочный механизм, уравнения динамики, алгоритм составного тела, алгоритм сочлененного тела

Введение

Стыковка представляет собой управляемый механический процесс соединения космических аппаратов (КА) на орбите, который начинается в момент их первого контакта после завершающего этапа сближения. Она выполняется с помощью системы стыковки, включающей в себя активные и пассивные стыковочные агрегаты (СтА) и блоки управления. Конструкция таких систем, разработанных в 70-е годы прошлого века, наиболее полно описана в работе [1]. В настоящее время ведется активная разработка новых систем для различных применений — от малых спутников до пилотируемых программ освоения ближнего и дальнего космоса. СтА непосредственно реализуют механический процесс соединения с помощью трех типов управляемых механизмов — стыковочного, сцепки и герметизации стыка. Механизмы сцепки (предварительного соединения) и герметизации стыка (окончательно-жесткого соединения), хотя и распределены по окружностям с центрами на продольной оси СтА, являются плоскими, малоинерционными и их собственная динамика не оказывает существенного влияния на процесс стыковки. Наиболее сложными являются пространственные стыковочные механизмы (СтМ). Они устанавливаются на активных СтА и обеспечивают устранение рассогласований между стыкуемыми агрегатами для их сцепки, поглощение энергии относительного движения КА, выравнивание СтА и КА, совмещение стыковочных плоскостей. СтМ могут быть центрального [1—4 и др.] или периферийного [1, 5—7 и др.] типов. В механизмах первого типа буферные звенья, непосредственно контактирующие с пассивным СтА, и их вспомогательные кинематические цепи (КЦ) скомпонованы вдоль продольной оси и радиально.

В периферийных СтМ такие КЦ распределены по периферии, по периметру переходного тоннеля СтА.

Масса КА не менее, чем на два порядка превышает массу звеньев СтМ, поэтому движение механизма можно описывать отдельными уравнениями динамики (УД) с учетом переносного движения его основания. КА можно рассматривать как свободное тело, на которое действуют силы и моменты, в том числе со стороны основания механизма. Колебания элементов его конструкции практически не влияют на его движение как твердого тела и описываются отдельными дифференциальными уравнениями [8].

На проектной стадии качество каждого нового процесса стыковки обычно оценивается математическим моделированием на множестве от нескольких сотен до нескольких тысяч вариантов случайных начальных условий в момент первого контакта, реализуемых системой сближения активного КА. В отдельных задачах необходимо выполнять моделирование в реальном времени. Поэтому должна быть обеспечена высокая вычислительная эффективность программ расчета движения.

Алгоритмы вычислительной механики для моделирования динамики систем твердых и деформируемых тел отражены в обзорах [9, 10 и др.]. В данной работе описывается применение и модификация наиболее эффективных из них для УД в замкнутой [11, 12 и др.] и рекуррентной [13—15 и др.] формах. Первый часто называют алгоритмом составного тела (Composite Rigid Body Algorithm), второй — алгоритмом сочлененного тела (Articulated Body Algorithm). Их сравнительная вычислительная эффективность при относительно небольшом числе тел определяется структурой конкретной механической системы (МС). УД в замкнутой форме позволяют эффективно учитывать кинематические контуры, рекуррентные — непосредственно вычислять силу и момент, действующие на основание СтМ.

Расположение буферных звеньев и число степеней их подвижности определяются типом СтМ, а для механизмов центрального типа, возможно, еще и реализуемой процедурой стыковки.

В СтМ периферийного типа сцепка обеспечивается при совмещении стыковочных колец двух агрегатов и зацеплении трех защелок с тремя ответными упорами. Поэтому стыковочное кольцо (единственное буферное звено) СтМ с периферийными направляющими элементами должно иметь шесть степеней свободы, которые обеспечиваются расположенными на периферии направляющими КЦ. Это ограничивает число возможных кинематических схем (основой большинства является платформа Гью—Стюарта [16, 17], реже платформа Ханта [18]). Необходимость совмещения трех пар точек усложняет сцепку, но платформенный механизм позволяет реализовать управляемое движение для ее улучшения [5—7].

В СтМ центрального типа сцепка обеспечивается при попадании головки штыря СтМ в гнездо приемного конуса пассивного агрегата. Совмещение только одной пары точек двух СтА упрощает сцепку, но приводит к необходимости демпфирования кинетической энергии сближения и выравнивания при свободных угловых перемещениях агрегатов относительно центра зацепления. Это обуславливает использование нескольких типов буферных звеньев, разнообразие их расположения и соответственно кинематических схем СтМ этого типа.

Движение каждого буферного звена СтМ обеспечивается одной или несколькими вспомогательными КЦ, которые соединяются с ним вращательными шарнирами и не изменяют числа его степеней свободы, определяемого функциональным назначением. Так как вращательный шарнир, соединяющий буферное звено и k -ю вспомогательную КЦ, налагает m_k связей на их относительное перемещение, то число степеней свободы этой цепи равно $n_k = m_k$. Для пространственных КЦ $n_k = m_k \in \{3, 4\}$, для плоских $n_k = m_k = 2$. Число структур, удовлетворяющих этому условию, ограничено. Пространственные КЦ могут быть вида $R_2P_1R_3$, $R_2C_2R_2$, $R_1R_2R_3$ и $R_2R_2R_2$, $R_3P_1R_2$, $R_1R_3R_2$, плоских — только $R_1P_1R_1$ и $R_1R_1R_1$. Здесь R обозначает вращательный шарнир, P — поступательный, C — цилиндрический, нижний индекс — число степеней его подвижности, последовательность шарниров указана от корня к терминальному телу.

Стыковочные механизмы, в которых буферные звенья и их вспомогательные КЦ образуют кинематические контуры, являются параллельными механизмами [19]. При их проектировании размеры звеньев выбираются таким образом, чтобы исключить сингулярные конфигурации. Поэтому класс МС, покрывающий существующие и потенциально

возможные кинематические схемы СтМ, имеет следующие особенности:

- при наличии кинематических контуров разделение шарнирных переменных на независимые и зависимые является фиксированным, при этом отсутствуют сингулярные конфигурации, в которых уравнения контурных связей не имеют решения;
- каждый кинематический контур может быть разделен на две ветви, начинающиеся от общего для них корневого тела, — независимую, управляемую, движение которой описывается только независимыми шарнирными переменными, и полностью зависимую, в которой все шарнирные переменные являются зависимыми;
- корневое тело контура может быть основанием механизма (в этом случае оно имеет номер 0) или подвижным звеном независимой КЦ (его номер больше нуля);
- независимые ветви могут иметь структуру дерева, они могут замыкать контуры своими нетерминальными (далее — замыкающими) телами, т. е. они могут иметь "открытые" КЦ вне кинематических контуров;
- все зависимые ветви имеют структуру простой КЦ, в которой терминальное тело замыкает соответствующий контур;
- контуры могут быть независимыми, когда корневое тело одного расположено на независимой КЦ дальше от основания, чем замыкающее тело другого, параллельными (имеющими одинаковые корневые и замыкающие тела) и внутренними (когда корневое и терминальное тела одной зависимой ветви находятся между корневым и терминальным телами другой зависимой ветви, которая по отношению к первой является независимой).

При моделировании движения исходная МС заменяется преобразованной, в которой кинематические контуры размыкаются путем замещения уравнениями связей шарниров, соединяющих вспомогательные КЦ с управляемыми телами. Замещение именно этих шарниров уменьшает длины КЦ и объем вычислений для матрицы обобщенной инерции.

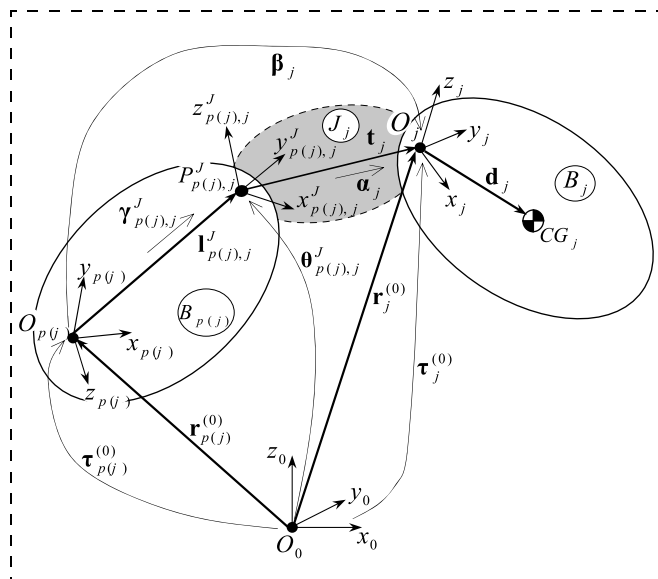
Преобразованная МС после размыкания кинематических контуров имеет структуру дерева с независимой (управляемой) и зависимыми ветвями. Независимая ветвь имеет нулевой индекс. Нумерация зависимых КЦ и замещаемых шарниров соответствует последовательности размыкания контуров и начинается с 1. Сначала размыкаются все внешние. Для параллельных и независимых контуров последовательность может быть произвольной. После этого размыкаются внутренние контуры, образованные только зависимыми КЦ. Если их вложенность превышает 1, то сначала размыкаются более внешние.

Свойства СтМ как МС описываются табличными структурами данных. Каждая строка в таблице описания древовидной структуры МС соответствует

номеру тела и его входного шарнира и содержит номер ветви и номер предшествующего тела. Нумерация тел и их входных шарниров начинается с независимой ветви и может быть произвольной в рамках древовидной структуры. Зависимые ветви являются простыми кинематическими цепями, нумерация тел в них последовательная. В таблицу описания тел заносятся их геометрические и инерционные параметры, а в таблицу описания шарниров — коэффициенты жесткости и демпфирования, признаки наличия внутренних активных сил и моментов. В таблице описания кинематических контуров каждая строка содержит номер корневого тела контура, номера первого и терминального тел в зависимой ветви, номер тела в независимой ветви, замыкающего контур, и тип замещаемого шарнира.

Кинематика двух взаимодействующих твердых тел

Движение МС определяется относительно ее основания (тело 0) и связанной с ним системы координат (СК) $x_0y_0z_0$. В КЦ j -е тело B_j через шарнир J_j взаимодействует с непосредственно предшествующим ему телом $B_{p(j)}$ (см. рисунок). Для простой КЦ $p(j) = j - 1$. С шарниром J_j , телами $B_{p(j)}$ и B_j связаны полюса $P_{p(j),j}^J$ и O_j , которые являются началами локальных СК $x_{p(j),j}^J, y_{p(j),j}^J, z_{p(j),j}^J$ и $x_jy_jz_j$. Относительные поступательное и угловое перемещения в шарнире J_j описываются вектором $\mathbf{t}_j$ и матрицей направляющих косинусов α_j , элементы которых зависят от шарнирной координаты p_j . Относительно СК $x_{p(j)}y_{p(j)}z_{p(j)}$ положение СК $x_{p(j),j}^J, y_{p(j),j}^J, z_{p(j),j}^J$ оп-



Геометрия и системы координат двух взаимодействующих твердых тел кинематической цепи МС

ределяется постоянными вектором $\mathbf{l}_{p(j),j}^J$ и матрицей направляющих косинусов $\gamma_{p(j),j}^J$, а положение СК $x_jy_jz_j$ — вектором $\mathbf{r}_{p(j),j}$ и матрицей направляющих косинусов β_j . Центр масс (ЦМ) j -го тела относительно $x_jy_jz_j$ задается постоянным вектором $\mathbf{d}_j$. Тензор инерции $\mathbf{I}_j$ j -го тела определяется в осях СК $x_jy_jz_j$.

Кинематические соотношения, как и рассматриваемые далее алгоритмы, записываются с использованием блочных матриц

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{B}_j \mathbf{a}_{p(j)} + \mathbf{P}_j^{rel} \ddot{\mathbf{q}}_j + \boldsymbol{\eta}_j, \quad (1)$$

где $\mathbf{a}_j = [\dot{\mathbf{v}}_j^T, \dot{\boldsymbol{\omega}}_j^T]^T$ — (6×1) -блочный вектор абсолютного ускорения j -го тела; $\mathbf{a}_j^{rel} = [(\dot{\mathbf{v}}_j^{rel})^T, (\dot{\boldsymbol{\omega}}_j^{rel})^T]^T$ — (6×1) -блочный вектор относительного ускорения в шарнире; $\mathbf{P}_j^{rel} = [(\mathbf{T}_j^{rel})^T, (\mathbf{R}_j^{rel})^T]^T$ — (6×1) -блочная матрица парциальных скоростей;

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} \beta_j & \beta_j \tilde{\mathbf{r}}_{p(j),j}^T \\ \mathbf{0} & \beta_j \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\eta}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_j \\ \boldsymbol{\varepsilon}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p(j)} \mathbf{r}_{p(j),j}) + 2 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p(j)}^{(j)} \mathbf{v}_j^{rel} \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{p(j)}^{(j)} \boldsymbol{\omega}_j^{rel} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$\beta_j = \alpha_j \gamma_{p(j),j}^J$; $\mathbf{r}_{p(j),j} = \mathbf{l}_{p(j),j}^J + (\gamma_{p(j),j}^J)^T \mathbf{t}_j$; $\boldsymbol{\omega}_{p(j)}^{(j)} = \beta_j \boldsymbol{\omega}_{p(j)}$ — угловая скорость предшествующего тела, выраженная в системе координат тела j ; $\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_{p(j)}^{(j)} + \boldsymbol{\omega}_j^{rel}$ — абсолютная угловая скорость j -го тела в его локальной СК; $\mathbf{v}_j^{rel} = \mathbf{T}_j^{rel} \dot{p}_j$ и $\boldsymbol{\omega}_j^{rel} = \mathbf{R}_j^{rel} \dot{p}_j$ — относительные скорости поступательного и углового движений в j -м шарнире; $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b}$, $\tilde{\mathbf{a}}$ — кососимметрическая матрица, образованная из компонент вектора $\mathbf{a}$.

Модификация алгоритма составного тела для механических систем твердых тел со структурой дерева

Для описания движения преобразованной древовидной МС и последующего учета кинематических контуров используются УД в замкнутой форме $\mathbf{A} \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{A}$ — $(n \times n)$ -мерная матрица обобщенной инерции, $\mathbf{b}$ — $(n \times 1)$ -мерный вектор обобщенных сил, $\ddot{\mathbf{p}}$ — $(n \times 1)$ -мерный вектор относительных ускорений в шарнирах.

Наиболее эффективный алгоритм составного тела для расчета коэффициентов таких уравнений записывается обычно для МС со структурой простой КЦ на неподвижном основании. Ниже рассматривается его модификация для МС со структурой де-

рева на подвижном основании — космическом аппарате. В блочно-матричной форме записи алгоритма используются $\mathbf{M}_j$ — (6×6) -мерная матрица инерции тела в поступательном и угловом движении относительно полюса O_j и $\mathbf{s}_j$ — (6×1) -мерный вектор инерционных и активных внешних сил и их моментов относительно того же полюса:

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} m_j \mathbf{1}_3 & m_j \tilde{\mathbf{d}}_j^T \\ m_j \tilde{\mathbf{d}}_j & \mathbf{I}_j \end{bmatrix}; \mathbf{s}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j^E \\ \mathbf{m}_j^E \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} m_j \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_j \mathbf{d}_j) \\ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j (\mathbf{I}_j \boldsymbol{\omega}_j) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где m_j — масса тела; $\mathbf{d}_j$ — радиус-вектор положения центра масс относительно СК $x_j y_j z_j$; $\mathbf{I}_j$ — тензор инерции тела относительно этой же СК; $\mathbf{f}_j^E$, $\mathbf{m}_j^E$ — суммарные внешняя сила и внешний момент относительно точки O_j .

В древовидной МС в отличие от простой КЦ тело с меньшим номером может не предшествовать телу с большим номером на пути из основания. В этом случае между телами отсутствует непосредственная кинематическая связь. Далее принимается, что тело j является корневым для тела i , если оно лежит на пути из основания в тело i и находится ближе к основанию. Этот факт отмечается значением $\mathbf{R}_B(i, j) = 1$ элемента матрицы $\mathbf{R}_B$, которая вычисляется однократно, до начала работы алгоритма по таблице описания структуры древовидной МС.

Алгоритм расчета элементов матрицы $\mathbf{A}$ обобщенной инерции древовидной МС n тел с n степенями подвижности записывается в виде следующего псевдокода:

```

for  $j = 1$  to  $n$  do
   $\mathbf{a}_j^l = \mathbf{P}_j^{rel} \ddot{\mathbf{p}}_j = \mathbf{P}_j^{rel}$ 
   $\mathbf{f}_j^l = \mathbf{M}_j \mathbf{a}_j^l$ 
  for  $i = j + 1$  to  $n$  do
    if  $\mathbf{R}_B(i, j) = 1$  then do
       $\mathbf{a}_i^l = \mathbf{B}_i \mathbf{a}_{p(i)}^l$ 
       $\mathbf{f}_i^l = \mathbf{M}_i \mathbf{a}_i^l$ 
    end
  end
  for  $i = n$  to  $j$  do
    if  $\mathbf{R}_B(i, j) = 1$  then do
       $\mathbf{A}_{i,j} = (\mathbf{P}_i^{rel})^T \mathbf{f}_i^l$ 
      if  $p(i) \geq j$  then  $\mathbf{f}_{p(i)}^l = \mathbf{f}_{p(i)}^l + \mathbf{B}_i^T \mathbf{f}_i^l$ 
    end
  end
end
end

```

Абсолютное ускорение звеньев СтМ определяется суммой их ускорений относительно основания и

переносным ускорением этого основания. Поэтому силы и моменты инерции, обусловленные переносным движением, должны быть перенесены в правую часть УД, т. е. учтены при вычислении вектора $\mathbf{b}$ обобщенных сил. Ускорения КА, на котором установлен активный СтА с СтМ, малы по сравнению с ускорениями звеньев механизма, но его угловая скорость может постепенно нарастать до относительно больших значений. Поэтому в УД СтМ учитываются переносные угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_{D,A}$ активного агрегата и обусловленные этой скоростью угловое и поступательное ускорения $\boldsymbol{\varepsilon}_{D,A}$, $\mathbf{w}_{D,A}$. Вектор $\boldsymbol{\omega}_{D,A}$, выраженный в СК активного СтА, т. е. в СК $x_0 y_0 z_0$ основания СтМ, определяется соотношением

$$\boldsymbol{\omega}_{D,A} = \boldsymbol{\alpha}_{CD,A}(\boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_{D,A}^f),$$

в котором $\boldsymbol{\omega}_A$ — угловая скорость КА, на котором установлен активный СтА, и $\boldsymbol{\omega}_{D,A}^f$ — скорость его изгибных колебаний в месте установки СтА, выраженные в СК, связанной с его ЦМ; $\boldsymbol{\alpha}_{CD,A}$ — матрица преобразования из СК в ЦМ КА в СК СтА с учетом этих колебаний. Скорость $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_{D,A}$ основания СтМ является начальной при рекуррентном определении $\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\beta}_j \boldsymbol{\omega}_{p(j)} + \boldsymbol{\omega}_j^{rel}$ угловых скоростей его звеньев, которое предшествует вычислению блочных векторов $\boldsymbol{\eta}_j$, $\mathbf{s}_j$ и вектора $\mathbf{b}$ обобщенных сил.

Переносное ускорение активного СтА нелинейно зависит от угловых скоростей КА, записывается в виде блочного вектора

$$\mathbf{a}_{D,A}^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{CD,A}(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_A \tilde{\boldsymbol{\omega}}_A^T \mathbf{r}_{CD,A} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_A \mathbf{v}_{D,A}^f) \\ \boldsymbol{\alpha}_{CD,A} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_A \boldsymbol{\omega}_{D,A}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{D,A} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{D,A} \end{bmatrix},$$

в котором $\mathbf{r}_{CD,A}$ — вектор положения центра СтА относительно СК ЦМ с учетом упругих колебаний конструкции КА; $\mathbf{v}_{D,A}^f$ — скорость колебаний этого центра. Подробнее модель упругих колебаний КА при стыковке описана в работе [8].

При рекуррентном вычислении вектора $\mathbf{b}$ обобщенных сил по алгоритму составного тела учет инерционных сил переносного движения СтМ эквивалентен заданию начальных условий в виде $\mathbf{a}_0^n = \mathbf{a}_{D,A}$.

В отличие от традиционной записи алгоритма при вычислении очередной компоненты вектора $\mathbf{b}$ к блочному вектору $\mathbf{f}_j^n$ внешних и инерционных сил добавляется блочный вектор $\mathbf{f}_j^J = [(\mathbf{T}_j^{rel})^T \mathbf{f}_j^J, (\mathbf{R}_j^{rel})^T \mathbf{m}_j^J]^T$ внутренних активных сил и моментов в шарнирах.

Вычисление вектора $\mathbf{b}$ обобщенных сил реализуются последовательно для всех тел в соответствии с табличным описанием структуры МС:

$$\mathbf{a}_0^n = \mathbf{a}_{D, A}$$

for $j = 1$ to n do

$$\mathbf{a}_j^n = \mathbf{B}_j \mathbf{a}_{p(j)}^n + \boldsymbol{\eta}_j$$

$$\mathbf{f}_j^n = \mathbf{M}_j \mathbf{a}_j^n - \mathbf{s}_j, \mathbf{f}_j^{n,0} = \mathbf{f}_j^n$$

end

for $j = n$ to 1 do

$$\mathbf{b}_j = (\mathbf{P}_j^{rel})^T (\mathbf{f}_j^J - \mathbf{f}_j^n)$$

$$\text{if } p(j) \neq 0 \text{ then } \mathbf{f}_{p(j)}^n = \mathbf{f}_{p(j)}^n + \mathbf{B}_j^T \mathbf{f}_j^n$$

end

Вектор $\mathbf{f}_j^{n,0} = \mathbf{f}_j^n$ используется далее при расчете реакций в шарнирах, силы и момента, действующих на основание СтМ.

Определение силы и момента, действующих на основание механизма

Уравнения динамики СтМ в замкнутой форме не позволяют определить силы и моменты, действующие на основание механизма и входящие в УД активного КА. Но после их разрешения относительно вектора $\ddot{\mathbf{p}}$ шарнирных ускорений можно рассчитать абсолютные декартовы ускорения и скорости звеньев, силы и моменты инерции и с учетом внешних и внутренних активных сил определить искомые величины. Для этого предлагается рекуррентный алгоритм, основанный, как и алгоритм составного тела, на использовании только простейших шарниров с одной степенью подвижности.

Вычисление сил и моментов, действующих на основание МС, реализуется последовательно для всех тел МС в ходе прямого и обратного рекуррентных процессов. В первом, прямом по известным шарнирным ускорениям и векторам $\mathbf{f}_j^{n,0}$ вычисляются суммарные векторы инерционных и внешних сил и моментов, действующих на каждое тело:

for $j = 1$ to n

$$\mathbf{a}_j^{rel} = \mathbf{P}_j^{rel} \ddot{\mathbf{p}}_j$$

$$\mathbf{a}_j^I = \mathbf{B}_j \mathbf{a}_{p(j)}^I + \mathbf{a}_j^{rel}$$

$$\mathbf{f}_j^{IE} = -\mathbf{M}_j \mathbf{a}_j^I + \mathbf{f}_j^{n,0}$$

end

Во втором, обратном рекуррентном процессе вычисляются силы и моменты, действующие на все предшествующие тела всех КЦ и в итоге (при $p(j) = 0$) на основание механизма:

for $j = n$ to 1

$$\text{if } n_j^t = 1 \text{ then } \Delta \mathbf{f}_{p(j)}^{J(j)} = -\mathbf{P}_j^{rel} \mathbf{f}_j^J + \mathbf{P}_{c,j}^t (\mathbf{f}_j^{IE} + \mathbf{f}_j^S)$$

$$\text{else } \Delta \mathbf{f}_{p(j)}^{J(j)} = -\mathbf{P}_j^{rel} m_j^J + \mathbf{P}_{c,j}^r (\mathbf{f}_j^{IE} + \mathbf{f}_j^S)$$

$$\mathbf{f}_{p(j)}^S = \mathbf{f}_{p(j)}^S + \mathbf{B}_j^T \Delta \mathbf{f}_{p(j)}^{J(j)}$$

end

Перед началом этих вычислений для всех тел МС блочный вектор сил и моментов, действующих со стороны всех последующих тел, $\mathbf{f}_j^S, j = \overline{1, n}$, равен нулю.

Значение параметра $n_j^t = 1$ определяет поступательный тип шарнира. Блочные (6×6) -мерные матрицы единичных векторов реакций для поступательного и вращательного шарниров равны

$$\mathbf{P}_{c,j}^t = \text{diag}[\mathbf{E}_{k,j}, \mathbf{1}_3], \mathbf{P}_{c,j}^r = \text{diag}[\mathbf{1}_3, \mathbf{E}_{k,j}],$$

где $\mathbf{E}_{k,j} = \mathbf{e}_{j,k \oplus 1} \mathbf{e}_{j,k \oplus 1}^T + \mathbf{e}_{j,k \oplus 2} \mathbf{e}_{j,k \oplus 2}^T - (3 \times 3)$ -мерная матрица, составленная из единичных векторов реакций, обусловленных k -й осью подвижности ($k \in \{1, 2, 3\}$ в j -м шарнире; $\mathbf{1}_3$ — единичная (3×3) -мерная матрица; $k \oplus 1$ и $k \oplus 2$ означают значения индексов, следующих за k -м и $(k \oplus 1)$ -м из $\{1, 2, 3\}$ соответственно.

Моделирование кинематических цепей стыковочных механизмов без кинематических контуров

СтМ центрального типа могут иметь частично или полностью "открытую" КЦ со структурой простой цепи или дерева, которая не образует кинематических контуров. Если параметры этой цепи не приводят к жестким дифференциальным уравнениям, то ее динамика может быть рассчитана по алгоритму сочлененного тела, в котором последовательно выполняются три рекуррентных процесса. В ходе первого, прямого (от корневого тела $n_R \geq 0$ к терминальным) в соответствии с выражениями (2) и (3) вычисляются вектор $\boldsymbol{\eta}_j$ ускорений j -го тела и вектор $\mathbf{s}_j$ действующих на него внешних и инерционных сил, определяемых обобщенными координатами и скоростями МС. Вторым выполняется обратный (от терминальных к корневому телу n_R) рекуррентный процесс, в котором инерция, силы и моменты последующих тел приводятся к очередному j -му телу и ему предшествующему $p(j)$ -му:

for $j = n$ to n_R

$$\mathbf{M}_j^* = \mathbf{M}_j + \Delta \mathbf{M}_j$$

$$\mathbf{s}_j^* = \mathbf{s}_j + \Delta \mathbf{s}_j$$

$$a_{I,j} = (\mathbf{P}_j^{rel})^T \mathbf{M}_j^* \mathbf{P}_j^{rel}$$

$$\mathbf{N}_j = \mathbf{M}_j^* - \mathbf{M}_j^* \mathbf{P}_j^{rel} a_{I,j}^{-1} (\mathbf{P}_j^{rel})^T \mathbf{M}_j^*$$

$$\mathbf{n}_j = \mathbf{N}_j \boldsymbol{\eta}_j + \mathbf{M}_j^* \mathbf{P}_j^{rel} a_{I,j}^{-1} (\mathbf{g} + (\mathbf{P}_j^{rel})^T \mathbf{s}_j^*) - \mathbf{s}_j^*$$

$$\Delta \mathbf{M}_{p(j)} = \Delta \mathbf{M}_{p(j)} + \mathbf{B}_j^T \mathbf{N}_j \mathbf{B}_j$$

$$\Delta \mathbf{s}_{p(j)} = \Delta \mathbf{s}_{p(j)} - \mathbf{B}_j^T \mathbf{n}_j$$

end

Здесь $a_{I,j}$ — масса или момент инерции, приведенные к оси j -го шарнира; $\mathbf{N}_j$ — блочный тензор инерции, которой не противодействуют внутренние активные сила или момент, приведенный к

осям СК j -го тела; $\mathbf{n}_j$ — блочный вектор инерционных и активных сил и моментов, действующих со стороны j -го тела на предшествующее; $\Delta \mathbf{M}_j$, $\Delta \mathbf{s}_j$ — блочные матрица инерции, вектор инерционных и активных сил и моментов всех последующих тел, приведенные к очередному j -му.

Последним выполняется прямой рекуррентный процесс расчета ускорений $\ddot{\mathbf{p}}_j$ под действием обобщенных активных сил $\mathbf{g}_j^J$ в j -м шарнире:

for $j = n_R$ to n

$$\mathbf{a}_j^* = \mathbf{B}_j \mathbf{a}_{p(j)} + \boldsymbol{\eta}_j$$

$$\ddot{\mathbf{p}}_j = \mathbf{a}_{L,j}^{-1} \{ (\mathbf{P}_j^{rel})^T [-\mathbf{M}_j^* (\mathbf{B}_j \mathbf{a}_{p(j)} + \boldsymbol{\eta}_j) + \mathbf{s}_j^*] + \mathbf{g}_j^J \}$$

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_j^* + \mathbf{P}_j^{rel} \ddot{\mathbf{p}}_j$$

end

Корневое тело n_R такой КЦ является либо управляемым телом параллельного механизма ($n_R > 0$), либо основанием СтМ ($n_R = 0$).

Заключение

Определены кинематические особенности существующих и потенциально возможных СтМ КА. Алгоритм составного тела модифицирован для расчета УД в замкнутой форме МС со структурой дерева, полученной при замыкании кинематических контуров механизма, с учетом переносного движения КА. Он дополнен алгоритмом расчета сил и моментов, действующих на этот КА со стороны СтМ. Далее УД в замкнутой форме для такой МС будут преобразованы с учетом имеющихся кинематических контуров механизма. Рассмотрено применение алгоритма сочлененного тела для моделирования "открытых" кинематических цепей СтМ.

Список литературы

1. Сыромятников В. С. Стыковочные устройства космических аппаратов. М.: Машиностроение. 1984. 216 с.

2. Paine T. O., Fentress C. E. Expanding center probe and drogue. US Patent Office 3526372, 1 Sept., 1970.
3. Langley R. D. Apollo Experience report — the docking system // NASA Technical Note, NASA TN D-6854, June 1972, 53 P.
4. Tchoryk P., Pavlich Jr., Hays J. A., Wassick G., Ritter G. Michigan Aerospace Corporation. Docking system. Patent US 20110058892 A1, November 1, 2010.
5. Lewis J. L., Monty B. C., Le T. D. et al. NASA. Low-Impact Mating System. Patent US 7543799 B1, June 9, 2009.
6. IBDM — International Berthing & Docking Mechanism // VRI Newsletter. 2005, April. P. 3.
7. Ghofranian S., Chuang L.-P., Motaghedi P. The Boeing Company, Spacecraft Docking System. Patent US20150266595 A1, September 24, 2015.
8. Яскевич А. В. Комбинированные уравнения движения для описания динамики стыковки космических аппаратов с помощью системы "штырь-конус" // Изв. РАН. Космические исследования. 2007. Т. 45, № 4. С. 325—336.
9. Featherstone R., Orin D. Robot Dynamics: Equations and Algorithms // Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, San Francisco, CA, April 2000, P. 826—834.
10. Погорелов Д. Ю. Современные алгоритмы компьютерного синтеза уравнений движения систем тел // Изв. РАН, Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 5—15.
11. Степаненко Ю. А. Алгоритм анализа динамики пространственных механизмов с разомкнутой кинематической цепью // Механика машин. 1974, Вып. 44, стр. 77—88.
12. Walker M. W., Orin D. E. Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms // Trans. ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. 1982. Vol. 104. P. 205—211.
13. Верещагин А. Ф. Метод моделирования на ЦВМ динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. 1974. № 6. С. 89—94.
14. Armstrong W. W. Recursive solution to the equation of motion of an n-link manipulator // Proc. of 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, (Montreal, July, 1979). 1979. P. 1343—1346.
15. Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias // Int. Journal of Robotic Research. 1983. Vol. 2, N. 1. P. 13—30.
16. Gough V. E., Whitehall S. G. Universal tyre test machine // Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress, May, 1962. 1962. P. 117—137.
17. Stewart D. A platform with six degrees of freedom // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. 1965. Vol. 180, Part 1, No. 15. P. 371—386.
18. Hunt K. H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms // Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in design. 1983. Vol. 105. P. 705—712.
19. ParalleMIC — the Parallel Mechanisms Information Center. URL: <http://www.parallemic.org> (дата обращения: 04.09.2017).

Dynamic Equations of Docking Mechanisms. Part 1. Algorithms for Mechanical Systems with Tree Structure

A. A. Yaskovich, Andrey.Yaskevich@rsce.ru,
Rocket Space Corporation "Energia", Korolev, 141070, Russian Federation

Corresponding author: Yaskovich Andrey V., Ph. D., Head of Department of Docking Systems,
Rocket Space Corporation "Energia", 141070, Korolev, Russian Federation,
e-mail: Andrey.Yaskevich@rsce.ru

Accepted on September 19, 2017

High computational efficiency of spacecraft docking dynamic simulation is needed for analysis based on a great number of random initial conditions, and sometimes for real time simulation. From the point of view of this dynamical process, a docking mechanism with many kinematical loops, in spite of its low mass, is more complex than a spacecraft. Some efficient simulation algorithms for such a class of mechanical systems are considered in this paper. For efficiency purposes, they are realized using a specialized symbolic manipulation system. Before simulation, a multi-loop mechanical system is transformed to a tree structure using constrain equations instead of individual joints. This paper states that a possibility of partitioning kinematical loops

to controlled and dependent kinematical chains, and a limited number of structure types of the latter are typical for docking mechanisms. This paper proposes a modification to the Composite Rigid Body Algorithm (CRBA) for a transformed tree structure mechanical system with a moving base, and an additional recursive algorithm for the calculation of the force and moment acting on this base. Both of these supplements to CRBA allow linking of separate dynamic equations of a spacecraft and a mechanism. The Articulated Body Algorithm (ABA) is applied to partially open kinematical chains without kinematical loops, which occur in some central type docking mechanisms (the probe-cone type). The ABA calculates by itself the force and moment acting on the mechanism base and the spacecraft.

Keywords: spacecraft, docking mechanism, dynamic equations, Composite Rigid Body Algorithm, Articulated Rigid Body Algorithm

For citation:

Yaskevich A. A. Dynamic Equations of Docking Mechanisms. Part 1. Algorithms for Mechanical Systems with Tree Structure, *Mekhanika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 58–64.

DOI:10.17587/mau.19.58-64

References

1. **Syromiatnikov V. S.** *Stykovochnye ustrojstva kosmicheskikh apparatov* (Docking units of spacecrafts), Moscow, Mashinostroenie, 1984, 216 p. (in Russian).
2. **Paine T. O., Fentress C. E.** Expanding center probe and drogue, US Patent Office 3526372, 1 Sept., 1970.
3. **Langley R. D.** Apollo Experience report — the docking system. NASA Technical Note, NASA TN D-6854, June 1972, 53 p.
4. **Tchoryk P., Pavlich Jr., Hays J. A., Wassick G., Ritter G.** Michigan Aerospace Corporation. Docking system, Patent US 20110058892 A1, November 1, 2010.
5. **Lewis J. L., Monty B. C., Le T. D. et al.** NASA. Low-Impact Mating System, Patent US 7543799 B1, June 9, 2009.
6. **IBDM** — *International Berthing & Docking Mechanism, VRI Newsletter*, 2005, April, p. 3.
7. **Ghofranian S., Chuang L.-P., Motaghedi P.** The Boeing Company, Spacecraft Docking System, Patent US20150266595 A1, September 24, 2015.
8. **Yaskevich A. V.** *Kombinirovannye uravneniya dvizheniya dlya opisaniya dinamiki stykovochnykh kosmicheskikh apparatov s pomoshch'yu sistemy "shtyr'-konus"* (Combined equations of motion for description of spacecraft docking using the pin-cone system), *Izv. RAN. Kosmicheskie Issledovaniya*, 2007, vol. 45, no. 4, pp. 325–336. (in Russian).
9. **Featherstone R., Orin D.** Robot Dynamics: Equations and Algorithms, *Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, San Francisco, CA, April 2000, pp. 826–834.
10. **Pogorelov D. Y.** *Sovremennyye algoritmy komp'yuternogo sinteza uravnenij dvizheniya sistem tel* (Modern computer algorithms for synthesis of motion equations of body systems), *Izv. RAN, Teorija i Sistemy Upravleniya*, 2008, no. 4, pp. 5–15 (in Russian).
11. **Stepanenko Y. A.** *Algoritmy analiza dinamiki prostranstvennykh mehanizmov s razomknutoj kinematicheskoy cep'ju* (An algorithm for dynamic analysis of spatial mechanisms with open kinematical chain), *Mehanika mashin*, Moscow, Nauka, 1974, iss. 44, pp. 77–88 (in Russian).
12. **Walker M. W., Orin D. E.** Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms, *Trans. of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1982, vol. 104, pp. 205–211.
13. **Vereshhagin A. F.** *Metod modelirovaniya na CVM dinamiki slozhnykh mehanizmov robotov-manipulyatorov* (Computer simulation of complicated mechanisms of robot manipulators), *Izv. AN SSSR, Tehnicheskaja Kibernetika*, 1974, no. 6, pp. 89–94 (in Russian).
14. **Armstrong W. W.** Recursive solution to the equation of motion of an n-link manipulator, *Proc. of 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms* (Montreal, July, 1979), 1979, pp. 1343–1346.
15. **Featherstone R.** The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias, *Int. Journal of Robotic Research*, 1983, vol. 2, no. 1, pp. 13–30.
16. **Gough V. E., Whitehall S. G.** Universal tyre test machine, *Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress*, May, 1962, 1962, pp. 117–137.
17. **Stewart D.** A platform with six degrees of freedom, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1965, vol. 180, part 1, no. 15, pp. 371–386.
18. **Hunt K. H.** Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms, *Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in design*, 1983, vol. 105, pp. 705–712.
19. **ParalleMIC** — the Parallel Mechanisms Information Center, available at: <http://www.parallemic.org> (date of access: 04.09.2017)



28—30 мая 2018 г. в Санкт-Петербурге
на базе АО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор" состоится

Юбилейная XXV Санкт-Петербургская

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ (МКИНС 2018)



Председатель программного комитета —
Академик РАН, проф. **В. Г. Пешехонов**

Тематика конференции

- ◆ Инерциальные датчики, системы навигации и ориентации
- ◆ Интегрированные системы навигации и управления движением
- ◆ Глобальные навигационные спутниковые системы
- ◆ Средства гравиметрической поддержки навигации

На конференции не рассматриваются вопросы, затрагивающие военно-техническое сотрудничество, разработки военных технологий и образцов вооружений и военной техники. Программный комитет считает полезным представление обзорных докладов и докладов молодых ученых (до 33 лет).

Подробную информацию о конференции см. сайте:
<http://www.elektropribor.spb.ru/icins2018/rindex>

М. В. Левский, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., dp940@mail.ru,
Научно-исследовательский институт космических систем имени А. А. Максимова —
филиал ГКНПЦ им. М. В. Хруничева

Оптимизация кинетического момента для повышения маневренности космического аппарата с инерционными исполнительными органами

Решается задача улучшения маневренности космического аппарата (КА) с инерционными исполнительными органами (системой силовых гироскопов, гиродинами) за счет оптимизации алгоритмов управления кинетическим моментом. В аналитическом виде записаны условия оптимальности режима переориентации без "разгрузки" гиросистемы и изучены свойства оптимального движения. Даны ключевые соотношения и уравнения для построения оптимальной программы управления, если КА разворачивается в условиях возмущений. Приведен пример численного моделирования разворота КА в соответствии с разработанным методом управления.

Ключевые слова: космический аппарат, ориентация, силовые гироскопы, управляющая функция, оптимальное управление, кинетический момент

Введение

Эффективность средств и методов управления движением космического аппарата (КА) непосредственно влияет на эффективность выполнения целевых программ — на объем решаемых задач, проведенных наблюдений и экспериментов, на точность полученных результатов, на время активного существования на орбите и целевого применения КА и т. д. К проблеме оптимального управления движением КА многие исследователи обращались неоднократно [1–9]. Разработка высокоэффективных алгоритмов управления ориентацией КА остается актуальной и сегодня. КА дистанционного зондирования Земли, мониторинга, а также астрофизические и другие научные КА требуют периодической смены ориентации для наведения научных приборов и целевой аппаратуры на интересующие участки земной поверхности или область небесной сферы. Минимизация длительности разворота увеличит время наблюдения и улучшит условия их выполнения. Оптимизация способа переориентации (в смысле маневренности КА) повышает эффективность использования КА. Под маневренностью понимается способность КА совершать маневры вокруг центра масс за меньшее время. Чем быстрее мы можем перенацелить КА на новый объект наблюдения (в данном случае развернуть КА) или провести очередную коррекцию орбиты, тем больше полезного времени будет для выполнения целевой задачи (для использования КА по целевому назначению — для получения снимков из космоса, для изучения интересующих объектов, получения метеоинформации и т.д.). Нередко управление ориентацией осуществляется инерционными исполнительными органами (системой силовых гироскопов или гиродинами) [2]. В этом случае разворот выполняется за счет перераспределения кинетического момента между системой гиродинов и корпусом КА. Для исключения "насыщения" гиросистемы ее суммарный кинетический момент не должен превышать допустимого значения. Нахождению оптимального по времени режима переориентации КА, при ко-

тором запас кинетического момента системы гиродинов был бы достаточным, посвящена данная статья. Управляющей функцией считается кинетический момент КА.

Уравнения движения и постановка задачи оптимального управления

Под поворотным маневром понимают перевод связанных осей КА из одного известного углового положения в другое известное (обычно заданное) угловое положение за конечное время T . Полагаем, что управление угловым положением КА осуществляется посредством исполнительных механизмов, создающих вращающие моменты относительно всех трех главных центральных осей инерции КА. Угловое движение КА как твердого тела будем описывать кинематическими уравнениями, записанными в кватернионных переменных:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1 L_1/J_1 - \lambda_2 L_2/J_2 - \lambda_3 L_3/J_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0 L_1/J_1 + \lambda_2 L_3/J_3 - \lambda_3 L_2/J_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0 L_2/J_2 + \lambda_3 L_1/J_1 - \lambda_1 L_3/J_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0 L_3/J_3 + \lambda_1 L_2/J_2 - \lambda_2 L_1/J_1, \end{aligned} \quad (1)$$

где λ_j ($j = \overline{0, 3}$) — компоненты кватерниона Λ [1], который задает движение связанного базиса $\mathbf{E}$, образованного главными центральными осями инерции КА, относительно инерциального базиса $\mathbf{I}$; L_i ($i = \overline{1, 3}$) — проекции вектора $\mathbf{L}$ кинетического момента КА на оси связанного базиса $\mathbf{E}$; J_i — главные центральные моменты инерции КА. Уравнения (1) имеют граничные условия $\Lambda(0) = \Lambda_n$ и $\Lambda(T) = \Lambda_k$, где T — время окончания маневра переориентации. Кватернионы Λ_n и Λ_k имеют произвольные наперед заданные значения, для которых $\Lambda_k \neq \pm \Lambda_n$ и $\|\Lambda_n\| = \|\Lambda_k\| = 1$ (кватернион Λ принят нормированным [1] для удобства).

В целях повышения маневренности КА оптимальным будем считать движение, при котором длительность маневра T минимальна. Поскольку ма-

невр разворота выполняется с помощью силовых гироскопов [2], существенной характеристикой становится кинетический момент корпуса КА. При управлении ориентацией КА силовыми гироскопами кинетический момент $\mathbf{G}$ гиросистемы должен находиться внутри заданной ограниченной области S , выход за которую приводит к потере управляемости КА. Чтобы разворот произошел без "разгрузки" гиросистемы, в любой момент времени модуль кинетического момента системы гиродинов должен быть заведомо меньше радиуса R_0 сферы, вписанной в область возможных значений кинетического момента гиросистемы S ($R_0 > 0$) [9–11]. Если возмущающие моменты малы, то общий кинетический момент КА как твердого тела с вращающимися массами равен или близок нулю ($\mathbf{L} + \mathbf{G} \approx 0$). Поэтому оптимальное движение КА должно удовлетворять условию

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 \leq L_{\max}^2, \quad (2)$$

где $L_{\max}$ — максимально допустимое значение кинетического момента, такое, что $0 < L_{\max} < R_0$ (запас кинетического момента $R_0 - |\mathbf{L}| > 0$ необходим для использования его на компенсацию предполагаемых возмущающих моментов $\mathbf{M}_B$).

Задачу оптимального управления формализуем следующим образом: необходимо развернуть КА из положения $\Lambda(0) = \Lambda_H$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_K$ в соответствии с уравнениями (1) при ограничении (2) за минимальное время T . Принципиальным отличием от известных задач оптимизации является то, что хотя в задаче (1)–(2) $L_{\max}$ — постоянная величина, само значение $L_{\max}$ подлежит оптимизации (если иметь в виду действие на КА возмущающих моментов).

Особенность повышения маневренности КА, управляемого силовыми гироскопами (гиродинами), заключается в необходимости определения величины $L_{\max}$ и решении задачи максимального быстродействия как классической задачи оптимального управления ($L_{\max}$ должна быть как можно ближе к R_0 , но при этом достаточной для компенсации возможных возмущений или отклонений). Когда возмущающие моменты пренебрежимо малы, значение $L_{\max}$ можем считать известным (например, $L_{\max} = 0,95R_0$). В противном случае (когда действие возмущающих моментов необходимо учитывать) задача оптимального управления кинетическим моментом во время разворота разделяется на две задачи — нахождение оптимального значения $L_{\max}$ и построение оптимальной программы изменения кинетического момента при известном значении $L_{\max}$.

Решение задачи оптимального управления без учета возмущений

В этом случае значение $L_{\max}$ известно, и в ограничении (2) $L_{\max}$ — параметр. Будем решать поставленную задачу (1)–(2), используя принцип макси-

мума Л. С. Понтрягина [12]. Управляющими переменными принимаем компоненты кинетического момента L_i . Наличие фазового ограничения $\|\Lambda\| = 1$ несущественно, так как оно всегда выполняется (при любых движениях КА вокруг центра масс). Переменные λ_j обладают следующим свойством: в силу уравнений (1) норма $\|\Lambda\|$ кватерниона Λ есть величина постоянная, $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \text{const}$. В начальный момент времени $\|\Lambda(0)\| = \|\Lambda_H\| = 1$, поэтому $\|\Lambda(t)\| = 1$ в любой момент времени $t \in [0, T]$. Так как критерий оптимальности не включает позиционных координат λ_j , мы можем использовать универсальные переменные r_i ($i = \overline{1, 3}$) [3], заменяющие сопряженные переменные. Для задачи максимального быстродействия (или максимальной маневренности КА) функция Гамильтона H равна

$$H = -1 + L_1 r_1 / J_1 + L_2 r_2 / J_2 + L_3 r_3 / J_3. \quad (3)$$

Оптимальные функции r_i как компоненты вектора $\mathbf{r}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= L_3 r_2 / J_3 - L_2 r_3 / J_2; \quad \dot{r}_2 = L_1 r_3 / J_1 - L_3 r_1 / J_3; \\ \dot{r}_3 &= L_2 r_1 / J_2 - L_1 r_2 / J_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Функция Гамильтона H составлена без учета ограничения $\|\Lambda\| = 1$ для фазовых переменных в силу равенства $\|\Lambda(0)\| = 1$, о чем договорились выше. Вектор $\mathbf{r}$ неподвижен относительно инерциального базиса $\mathbf{I}$, из-за чего $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$. Решение $\mathbf{r}(t)$ системы (4) определяется начальным Λ_H и конечным Λ_K положениями КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется через кватернион $\Lambda(t)$ [1, 3]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda, \text{ где } \mathbf{c}_E = \Lambda_H \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H = \text{const}$$

(составляющие вектора $\mathbf{c}_E$ — проекции вектора $\mathbf{r}$ на оси инерциального базиса $\mathbf{I}$). Система (4) совместно с требованием максимальности гамильтониана H и условиями трансверсальности $\mathbf{r}(0) \neq 0$, $\mathbf{r}(T) \neq 0$ и $H(T) = 0$ являются необходимыми условиями оптимальности (заметим, что соответствующим выбором оптимального значения $|\mathbf{r}|$ всегда можно добиться, чтобы $H(T) = 0$). Условия максимума функции H определяют искомое решение $\mathbf{L}(t)$; граничные условия по положению (для $\Lambda(0)$ и $\Lambda(T)$) определяют решения $\Lambda(t)$ и $\mathbf{r}(t)$.

Краевая задача принципа максимума заключается в определении значения $\mathbf{r}(0)$, при котором решение системы дифференциальных уравнений (1), (4) с одновременной максимизацией в каждый момент времени функции Гамильтона H удовлетворяет условиям разворота $\Lambda(0) = \Lambda_H$ и $\Lambda(T) = \Lambda_K$.

В случае $|\mathbf{L}| \leq L_{\max}$ максимум гамильтониана H будет достигаться при $|\mathbf{L}| = L_{\max}$, и поэтому оптимальные функции L_i определяются зависимостями

$$L_i = \frac{L_{\max} r_i}{J_i \sqrt{r_1^2 / J_1^2 + r_2^2 / J_2^2 + r_3^2 / J_3^2}}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Поскольку оптимальные управляющие функции L_i не зависят от $|\mathbf{r}|$, перейдем к нормированному вектору $\mathbf{p} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ и обозначим $r_0 = |\mathbf{r}| = \text{const} = |\mathbf{r}(0)| \neq 0$. Для проекций p_i орта $\mathbf{p}$ на оси связанного базиса $\mathbf{E}$ справедливы уравнения

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= L_3 p_2 / J_3 - L_2 p_3 / J_2; \quad \dot{p}_2 = L_1 p_3 / J_1 - L_3 p_1 / J_3; \\ \dot{p}_3 &= L_2 p_1 / J_2 - L_1 p_2 / J_1;\end{aligned}\quad (5)$$

$$L_i = \frac{L_{\max} p_i}{J_i \sqrt{p_1^2 / J_1^2 + p_2^2 / J_2^2 + p_3^2 / J_3^2}}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (6)$$

В дальнейшем будем использовать компоненты p_i вектора $\mathbf{p}$; тогда $r_i = r_0 p_i$, где r_0 — константа, которую необходимо определить в процессе оптимизации. Необходимое условие оптимальности можно записать в виде

$$L_i = b p_i / J_i, \quad (7)$$

где $b > 0$ — скалярная величина.

Гамильтониан H не зависит явно от времени, и длительность T не фиксирована. Поэтому $H = 0$ в любой момент времени t , а не только $H(T) = 0$ в конечный момент времени $t = T$ [13]. Подставив оптимальные значения функций L_i , вычисленные по соотношениям (6), в выражение (3) для функции H с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$, получим уравнение

$L_{\max}^2 r_0^2 (p_1^2 / J_1^2 + p_2^2 / J_2^2 + p_3^2 / J_3^2) = 1$, из которого следует $p_1^2 / J_1^2 + p_2^2 / J_2^2 + p_3^2 / J_3^2 = \text{const}$ и $r_0 = 1 / L_{\max} C$ — оптимальное значение, где $C = \sqrt{p_{10}^2 / J_1^2 + p_{20}^2 / J_2^2 + p_{30}^2 / J_3^2}$; p_{10}, p_{20}, p_{30} — компоненты вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$.

Задача построения оптимального управления свелась к решению системы уравнений углового движения КА (1) и уравнений (5) при условии, что управление $\mathbf{L}$ выбрано из требования (6). Сформулированная задача управления (1)–(2) решается до конца. Условия максимума функции H определяют оптимальное решение $\mathbf{L}(t)$. На всем интервале движения $0 < t < T$ КА должен вращаться с постоянным по модулю кинетическим моментом $|\mathbf{L}| = \text{const}$ (поэтому во время идеального по маневренности разворота $b = \text{const}$). Уравнения (1) и (5) совместно с соотношениями (7) образуют замкнутую систему уравнений. Значение параметра C зависит от вектора $\mathbf{p}(0)$, который, в свою очередь, определяется граничными значениями $\Lambda(0)$, $\Lambda(T)$ и моментами инерции J_1, J_2, J_3 .

Таким образом, задача построения оптимального управления $\mathbf{L}(t)$ состоит, главным образом, в нахождении такого значения вектора $\mathbf{p}(0)$, при котором в результате движения КА в соответствии с уравнениями (1), (5), (7) и $\Lambda(0) = \Lambda_H$ выполняется равенство $\Lambda(T) = \Lambda_K$. Общее решение приведенной системы уравнений найти практически невозможно.

Трудность заключается в определении граничных значений $\mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{p}(T)$, которые связаны выражением

$$\Lambda_K \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde{\Lambda}_K = \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H$$

$$\text{или } \mathbf{p}(T) = \tilde{\Lambda}_P \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_P,$$

где $\Lambda_P = \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda_K$ — кватернион разворота.

Задача оптимального управления с учетом ограничения (2) будет решена, если мы найдем решение системы уравнений (1), (5), (6), удовлетворяющее граничным условиям $\Lambda(0) = \Lambda_H$ и $\Lambda(T) = \Lambda_K$. Оптимальный кинетический момент $\mathbf{L}$ связан с кватернионом ориентации Λ равенством

$$\mathbf{L} = J^{-1} L_{\max} \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_P \circ \Lambda / C, \quad (8)$$

где $\mathbf{c}_P = \text{const} = \Lambda_H \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_H$; $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ — тензор инерции КА (напомним, что $p_i 0 = p_i(0)$). Ключевой искомой характеристикой является значение вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$.

Решение $\mathbf{L}(t)$ во время кинематически оптимального разворота (без ограничений на моменты M_i) обладает следующими свойствами (интегралами движения):

$$\begin{aligned}L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 &= \text{const}, \\ J_1^2 L_1^2 + J_2^2 L_2^2 + J_3^2 L_3^2 &= \text{const}.\end{aligned}\quad (9)$$

Поскольку управлением считается вектор $\mathbf{L}$ кинетического момента КА, то поставленную кинематическую задачу оптимального разворота можно считать решенной — уравнения (1), (5) и (6) с учетом граничных условий $\Lambda(0) = \Lambda_H$, $\Lambda(T) = \Lambda_K$ полностью определяют искомое решение $\mathbf{L}(t)$. Уравнения для управляющих функций L_i формализуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= L_2 L_3 (J_2^2 - J_3^2) / J_1 J_2 J_3; \\ \dot{L}_2 &= L_1 L_3 (J_3^2 - J_1^2) / J_1 J_2 J_3; \\ \dot{L}_3 &= L_1 L_2 (J_1^2 - J_2^2) / J_1 J_2 J_3.\end{aligned}\quad (10)$$

Оптимальное управление пространственным разворотом заключается в сообщении КА начальных условий движения (расчетного кинетического момента в начале разворота), поддержании вращения КА с требуемым (программным) изменением кинетического момента $\mathbf{L}(t)$, при котором его модуль имеет постоянное значение $|\mathbf{L}| = \text{const}$, и сбросе имеющегося кинетического момента до нуля в момент времени $t = T$, когда $\Lambda(t) = \Lambda_K$ (при достижении КА конечного положения Λ_K). Основная задача — нахождение закона изменения вектора $\mathbf{p}(t)$, чтобы в результате решения системы уравнений (1), (5), (6) с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_H$ граничное условие $\Lambda(T) = \Lambda_K$ на правом конце было выполнено (определение вектора $\mathbf{p}(0)$ — самостоятельная и достаточно непростая задача).

Практическое значение имеют задачи, в которых $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ (такие условия разворота КА наиболее характерны). Разумеется, в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ кинетический момент для номинальной программы вращения КА, определяемый уравнениями (6), не равен нулю. Следовательно, неизбежны переходные участки: разгон — переход из состояния покоя (когда $\mathbf{L} = 0$) на режим вращения с кинетическим моментом максимальной величины $L_{\max}$ — и торможение — гашение кинетического момента КА до нуля. Между разгоном и торможением выполняются уравнения (5) и (7), в которых $b = L_{\max}/C = \text{const}$.

Если условия разворота Λ_H , Λ_K и время T таковы, что времена разгона и торможения пренебрежимо малы (по сравнению с длительностью всего разворота), то сообщение КА необходимого кинетического момента $L_{\max}$ и гашение имеющегося кинетического момента до нуля можно считать импульсным, и почти на всем развороте (между разгоном и торможением) $|\mathbf{L}(t)| = \text{const} = L_{\max}$ с выполнением уравнений (8), (10). Определяющим при нахождении оптимальных решений $\mathbf{p}(t)$, $\mathbf{L}(t)$ является значение вектора $\mathbf{p}$ на момент времени $t = 0$.

Если момент управления $\mathbf{M}$ ограничен, то сообщение требуемого кинетического момента до уровня $|\mathbf{L}| = L_{\max}$ в начале разворота и гашение имеющегося кинетического момента до нуля в конце разворота занимают некоторое конечное (отличное от нуля) время. Интерес представляет общий случай, когда условия разворота Λ_H и Λ_K таковы, что переходными участками (разгоном и торможением) нельзя пренебречь. Если управляющий момент $\mathbf{M}$ ограничен условием

$$|\mathbf{M}| \leq m_0, \quad (11)$$

то законы максимально быстрого набора и гашения кинетического момента известны [4].

На участке торможения оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{M} = -m_0 \mathbf{L}/|\mathbf{L}|.$$

При оптимальном движении кинетический момент КА не меняет своего направления в инерциальной системе координат, а управляющий момент $\mathbf{M}$ составляет с кинетическим моментом 180° . Модуль кинетического момента КА изменяется по закону $|\mathbf{L}| = L_{\max} - m_0(t - t_0)$, где t_0 — момент начала остановки вращения.

Оптимальное управление на участке разгона имеет вид

$$\mathbf{M} = m_0 \mathbf{L}/|\mathbf{L}|. \quad (12)$$

Модуль кинетического момента на этом участке изменяется по закону $|\mathbf{L}| = m_0 t$. И при разгоне, и при торможении оптимальным по быстродействию является управление, при котором управляющий момент все время параллелен кинетическому моменту.

В момент времени $t = 0$ кинетический момент КА $\mathbf{L} = 0$, и для быстрейшего достижения заданного

уровня $|\mathbf{L}| = L_{\max}$ необходимо управление (12). Пока $|\mathbf{L}(t)| < L_{\max}$ управляющий момент $\mathbf{M} = m_0 \mathbf{L}/|\mathbf{L}|$ будет оптимальным. С момента времени t_p , когда $|\mathbf{L}(t_p)| = L_{\max}$, оптимальным будет движение (5), (6), при котором $|\mathbf{L}(t)| = L_{\max}$. Из-за наличия граничного условия $\mathbf{L}(T) = 0$ существует такой момент времени $t_T < T$, начиная с которого выполняют гашение кинетического момента с максимальным моментом управления $\mathbf{M} = -m_0 \mathbf{L}/|\mathbf{L}|$ (момент времени t_T выбирается с таким расчетом, чтобы к моменту полной остановки $\mathbf{L} = 0$ КА занял требуемое угловое положение Λ_K). На интервалах разгона и торможения предельно максимальным является управляющий момент $\mathbf{M}$ (условие (11) переходит в строгое равенство), а на отрезке между разгоном и торможением выполняются уравнения (10) и равенство $|\mathbf{L}| = \text{const} = L_{\max}$. В результате траектория вращения КА $\Lambda(t)$ разделяется на три составляющие: $\Lambda(0) - \Lambda(t_p)$, $\Lambda(t_p) - \Lambda(t_T)$ и $\Lambda(t_T) - \Lambda(T)$. Кватернион разворота представим в виде

$$\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda_K = \Delta\Lambda_p \circ \Delta\Lambda_{\text{ном}} \circ \Delta\Lambda_T,$$

где $\Delta\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda(t_p)$ — кватернион поворота КА за время разгона; $\Delta\Lambda_T = \tilde{\Lambda}(t_T) \circ \Lambda_K$ — кватернион поворота КА за время торможения; $\Delta\Lambda_{\text{ном}} = \Lambda(t_p) \circ \Lambda(t_T)$ — кватернион поворота за время вращения КА с максимальным кинетическим моментом $L_{\max}$. Начальная и конечная угловые скорости равны нулю, и длительность этапов разгона и торможения будет одинакова в силу того, что величина управляющего момента постоянна $|\mathbf{M}| = \text{const} = m_0$. Оптимальное решение $\mathbf{L}(t)$ на участке номинального движения (между разгоном и торможением) обладает свойствами (9), векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ ортогональны, величина кинетического момента максимальна и постоянна $|\mathbf{L}| = \text{const} = L_{\max}$.

Для нулевых граничных условий $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ оптимальный по времени разворот КА включает две фазы, в течение которых величина момента $\mathbf{M}$ максимально возможная — фаза разгона (увеличение модуля кинетического момента) и торможения (гашение кинетического момента до нуля) и фаза номинального движения, при котором справедливы уравнения (9), (10). На участке разгона векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ имеют одинаковое направление, а на участке торможения векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ имеют противоположные направления; вектор кинетического момента $\mathbf{L}$ имеет постоянное направление в инерциальном пространстве, но меняется по величине (на участке разгона он увеличивается с нуля до максимального значения $L_{\max}$, а на участке торможения — уменьшается до нуля). Движение КА во время разворота происходит по следующей программе изменения кинетического момента: увеличение модуля вектора $\mathbf{L}$ с нуля до $L_{\max}$ с максимальной скоростью ($|\dot{\mathbf{M}}| = m_0$) при неизменном направлении относительно опорного базиса $\mathbf{I}$; далее вращение вектора $\mathbf{L}$ с постоянной величиной $L_{\max}$ по оптимальному закону, определяемому уравнениями (5), (6) и, наконец, уменьшение модуля вектора $\mathbf{L}$ до нуля с мак-

симальной скоростью ($|\mathbf{M}| = m_0$) при неизменном направлении относительно опорного базиса $\mathbf{I}$. Эта программа полностью определяет движение КА в процессе перехода из состояния $\Lambda = \Lambda_H$, $\mathbf{L} = 0$ в состояние $\Lambda = \Lambda_K$, $\mathbf{L} = 0$, так как имеют место уравнения (1).

Так как при торможении КА управляющий момент $\mathbf{M}$ направлен строго против кинетического момента $\mathbf{L}$, то момент начала торможения может быть спрогнозирован достаточно точно. Длительность остановки вращения равна $\tau = |\mathbf{L}|/m_0$. Момент начала участка торможения определяется условием

$$4\arcsin \frac{K\sqrt{q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{(J_2\omega_2)^2 + (J_3\omega_3)^2}} = \frac{K^2\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}}{m_0\sqrt{(J_2\omega_2)^2 + (J_3\omega_3)^2}},$$

где q_j — компоненты кватерниона рассогласования $\tilde{\Lambda}(t) \circ \Lambda_K$ ($j = 0, 1, 2, 3$); ω_i — проекции вектора угловой скорости КА $\boldsymbol{\omega}$ на оси связанной с КА системы координат; $K = |J\boldsymbol{\omega}|$ — величина кинетического момента КА. Гашение кинетического момента на участке торможения осуществляется по линейному закону: $|\mathbf{L}(t)| = L_{\max} - m_0(t - t_T)$, где t_T — момент начала торможения.

Определение момента времени t_T по фактическим (измеренным значениям) параметрам движения (угловому рассогласованию и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$) повышает точность приведения КА в требуемое состояние $\Lambda = \Lambda_K$, $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Особенностью управления кинетическим моментом КА во время разворота КА за минимальное время является то, что при наличии возмущающих моментов $\mathbf{M}_B \neq 0$ значение ключевого параметра $L_{\max}$ алгоритма оптимального управления заранее не известно. Поэтому при практическом проектировании требуется предварительно решить задачу определения оптимального значения модуля кинетического момента КА на участке между разгоном и торможением.

Задача выбора оптимального модуля кинетического момента

Для КА с инерционными исполнительными органами (силовыми гироскопами) крайне важно определить такое значение параметра $L_{\max}$, чтобы во время движения КА вокруг центра масс эволюция вектора $\mathbf{G}$ суммарного кинетического момента системы гиродинов не привела к выходу его за пределы области S возможных значений ("насыщения" системы гиродинов не наступит), и "разгрузки", т. е. снятия накопленного кинетического момента системы гиродинов за счет приложения момента сил иной природы (магнитного, включением реактивных двигателей ориентации и др.) не потребовалось бы. Такие движения КА считаются допустимыми (в смысле управления ориентацией КА без "разгрузки" системы гиродинов). При этом запас кинетического момента системы гиродинов должен быть максимальным, что позволит умень-

шить вероятность задеирования других (кроме гиродинов) средств управления ориентацией (например, реактивных двигателей) даже при действии на КА возмущающего момента.

В случае нулевых граничных условий $\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}(T) = 0$ реализуется только один единственный тип движения: первый участок — разгон КА с максимальным управляющим моментом $|\mathbf{M}| = m_0$ до наступления равенства $|\mathbf{L}| = L_{\max}$, далее участок движения КА с постоянным по модулю кинетическим моментом $|\mathbf{L}| = L_{\max}$ (с выполнением равенств (9), (10)) и затем симметричный участок торможения КА с максимальным управляющим моментом $|\mathbf{M}| = m_0$ до полной остановки КА ($\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$). Изменение модуля кинетического момента $\mathbf{G}$ системы силовых гироскопов во время разворота таково, что на участках разгона и торможения $d|\mathbf{G}|/dt \approx \text{const}$ (так как момент $\mathbf{M}$ управляющих сил намного больше возмущающего момента $\mathbf{M}_B$), причем в большинстве случаев можно считать $|d|\mathbf{G}|/dt|_{t < t_p} = |d|\mathbf{G}|/dt|_{t < t_T}$, где t_p — момент окончания разгона; t_T — момент начала торможения. В гипотетическом случае, когда $\mathbf{M}_B = 0$, разгон КА можно осуществлять до наступления ситуации $|\mathbf{L}| = R_0$, так как в этом идеальном случае $|\mathbf{L}| = |\mathbf{G}|$ и в интервале между разгоном и торможением $|d|\mathbf{G}|/dt| = 0$ (напомним, R_0 — радиус сферы, вписанной в область S возможных значений кинетического момента $\mathbf{G}$ системы силовых гироскопов).

В реальных условиях полета $\mathbf{M}_B \neq 0$ и поэтому $\mathbf{L} + \mathbf{G} \neq 0$, а значит на участке номинального вращения (когда $|\mathbf{L}(t)| = \text{const}$) в общем случае $|d|\mathbf{G}|/dt| \neq 0$. При наличии возмущающих моментов $\mathbf{M}_B \neq 0$ возникает проблема — каким должно быть значение $L_{\max}$, чтобы до окончания маневра возможное увеличение величины $|\mathbf{G}|$ было меньше $R_0 - L_{\max}$. Хотя возмущения $\mathbf{M}_B$ могут "помогать" развороту КА (при этом $d|\mathbf{G}|/dt < 0$), но гарантировать, что такое положение вещей будет продолжаться на всем отрезке времени $[0, t_T]$, никак нельзя. Поэтому при выборе оптимального значения $L_{\max}$ необходимо учитывать наихудший сценарий — считать возмущения $\mathbf{M}_B$ максимально возможными по величине и направленными против кинетического момента $\mathbf{L}$ корпуса КА. Тогда $d|\mathbf{G}|/dt = |\mathbf{M}_B|$ и $\max_{t_p < t < t_T} d|\mathbf{G}|/dt = M_{B \text{ рас}}$, где $M_{B \text{ рас}}$ — максимально возможная величина возмущающего момента $\mathbf{M}_B$ (т. е. $|\mathbf{M}_B| \leq M_{B \text{ рас}}$). Поведение модуля кинетического момента $\mathbf{G}$ гиросистемы, когда $d|\mathbf{G}|/dt \geq 0$, следующее:

$$G(t) = |\mathbf{L}(t)| + \int_0^{t_T} |\mathbf{M}_B| dt,$$

а разница относительно $|\mathbf{L}(t)|$ составит $\Delta G \leq M_{B \text{ рас}} t_T = (T - t_T) M_{B \text{ рас}}$, где t_T — длительность торможения; $G = |\mathbf{G}|$. Мы рассматриваем только отрезок времени

$[0, t_p]$ потому, что при торможении КА $dG/dt < 0$ (так как $|\mathbf{M}_B| \ll m_0$). "Насыщение" системы силовых гироскопов может наступить в предельном случае, если выполняется равенство $|\mathbf{L}(t_p)| + (T - \tau_T)M_{B \text{ рас}} = R_0$. Таким образом, должно выполняться соотношение: $L_{\max} < R_0 - (T - \tau_T)M_{B \text{ рас}}$. Мы заинтересованы в том, чтобы $L_{\max}$ было как можно больше (для минимизации времени T). Однако с увеличением $L_{\max}$ запас $\Delta R = R_0 - L_{\max}$ уменьшается, что в свою очередь повышает вероятность наступления "насыщения" гиросистемы (выполнения равенства $|\mathbf{G}| = R_0$). Здесь становится актуальной задача максимального использования запаса кинетического момента $R_0 - |\mathbf{L}|$ для компенсации предполагаемых возмущающих моментов $\mathbf{M}_B$. Запишем уравнение, устанавливающее связь между оценкой максимального значения возмущающих моментов $M_{B \text{ рас}}$ и расчетным значением $L_{\max}$. Нетрудно показать, что для вращений твердого тела, удовлетворяющих уравнениям (5), (7), справедливо равенство

$$\int_0^T |\mathbf{L}| dt = \text{const} = S_L,$$

где величина S_L определяется исключительно кватернионом разворота $\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda_K$ и инерционными характеристиками КА J_1, J_2, J_3 [6]. Если принять, что на участках разгона и торможения модуль кинетического момента изменяется по линейному закону $|d|\mathbf{L}|/dt| = m$, где m — максимальная скорость изменения модуля кинетического момента, то будут справедливы следующие соотношения:

$$\int_0^T |\mathbf{L}| dt = L_{\max}(T - \tau_T) \text{ или } L_{\max}(T - L_{\max}/m) = S_L$$

(так как $t_p \approx \tau_T = L_{\max}/m$).

Получили систему двух уравнений. Выпишем эти уравнения:

$$L_{\max}(T - L_{\max}/m) = S_L \text{ и } G_{\max} \approx L_{\max} + M_{B \text{ рас}}(T - L_{\max}/m) = L_{\max} + M_{B \text{ рас}}S_L/L_{\max}.$$

Так как вращение КА без "разгрузки" системы гироскопов возможно, если $G_{\max} < R_0$, то оптимальное значение параметра $L_{\max}$ находим из уравнения

$$L_{\max} + M_{B \text{ рас}}S_L/L_{\max} = R_0.$$

Решением последнего уравнения относительно переменной $L_{\max}$ является

$$L_{\max} = (R_0 + \sqrt{R_0^2 - 4S_L M_{B \text{ рас}}})/2,$$

где R_0 — априорно известная величина (значения S_L и $M_{B \text{ рас}}$ также известны).

Чтобы время разворота T было минимальным, оптимальным $L_{\max}$ будет наибольшее значение, удовлетворяющее условию $L_{\max} + M_{B \text{ рас}}S_L/L_{\max} < R_0$ (очевидно $L_{\max} < R_0$). Длительность маневра $T \approx$

$\approx S_L/L_{\max} + L_{\max}/m_0$. При $m_0 \rightarrow \infty$ величины $t_p \rightarrow 0$, $\tau_T \rightarrow 0$ и $S_L = L_{\max}T$; поэтому $R_0 - L_{\max} = M_{B \text{ рас}}T = M_{B \text{ рас}}S_L/L_{\max}$.

Если мы не можем утверждать, что $|\mathbf{M}_B| \ll m_0$, то время разгона (торможения) τ оценивается величиной $\tau = L_{\max}/(m_0 - M_{B \text{ рас}})$. Критическим является значение $M_{B \text{ рас}}$ (обозначим его $M_{\text{кр}}$), при котором разворот из положения Λ_H в положение Λ_K еще возможен без нарушения требования $|\mathbf{G}| \leq R_0$. Оно равно $M_{\text{кр}} = R_0^2/4S_L$. С учетом действия возмущающего момента $\mathbf{M}_B$, априорно неизвестного по величине, оптимальным значением будет $L_{\max} = R_0/2$.

Компьютерная апробация алгоритма оптимального управления

Рассмотрим разворот КА на 150° из начального положения Λ_H , когда оси КА совпадают с осями опорного базиса $\mathbf{I}$, в заданное конечное положение Λ_K ; элементы кватерниона Λ_K равны: $\lambda_0 = 0,2598202$; $\lambda_1 = 0,6834345$; $\lambda_2 = 0,5913393$; $\lambda_3 = 0,3401890$. Считалось, что $R_0 = 60 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$; $J_1 = 1760 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $J_2 = 6320 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $J_3 = 6010 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Мощность исполнительных органов характеризуется величиной $m_0 = 2,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (управляющий момент $\mathbf{M}$ ограничен сферой (11)). После решения кинематической задачи разворота (задачи оптимального разворота в импульсной постановке) были получены следующие результаты: $\mathbf{p}_0 = \{0,107354; -0,031616; 0,993718\}$ и $\mathbf{c}_p = \mathbf{p}_0$ (так как $\Lambda_H = 1$). Интеграл $S_L = 10195 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Предположим, что по экспертным оценкам суммарный возмущающий момент $\mathbf{M}_B$ не превышает по величине $M_{B \text{ рас}} = 0,05 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Поэтому оптимальное значение оценим как $L_{\max} < (R_0 +$

$\sqrt{R_0^2 - 4S_L M_{B \text{ рас}}})/2 = 49,75 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Принимаем $L_{\max} = 49,7 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$. Расчетное время разгона (торможения) $\tau = 19,9 \text{ с}$. Результаты численного моделирования процесса разворота при оптимальном управлении представлены на рис. 1, 2. На рис. 1 изображены графики изменения оптимальных функций $L_1(t)$, $L_2(t)$, $L_3(t)$ по времени, на рис. 2 — графики изменения компонент кватерниона $\Lambda(t)$ текущей ориентации. По результатам моделирования

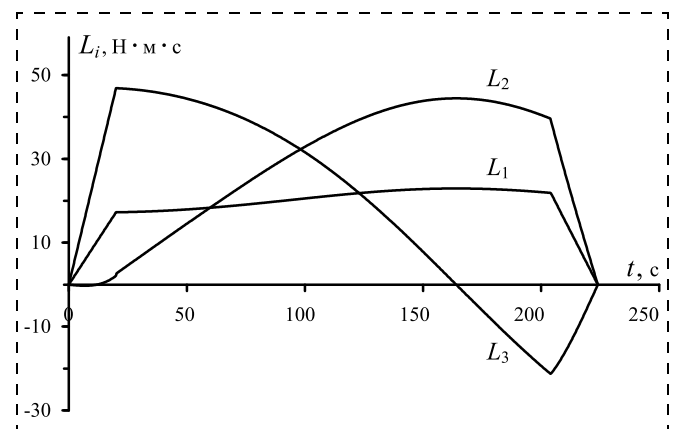


Рис. 1

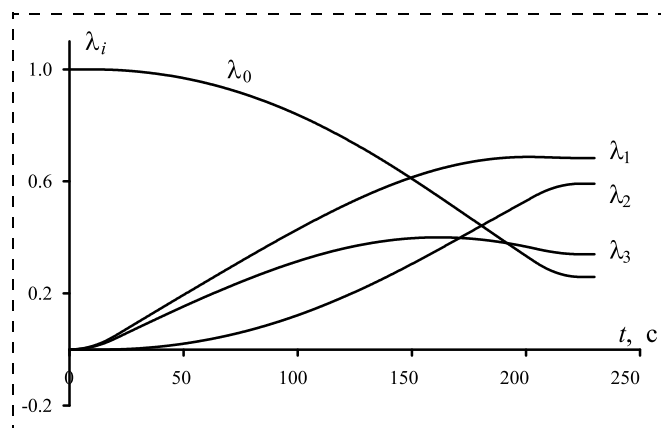


Рис. 2

момент окончания разгона $t_p = 19,9$ с, момент начала торможения $t_T = 205,2$ с. Общая длительность маневра составила $T = 225,1$ с. Необходимо отметить, что $L_1(t)$, соответствующая продольной оси КА, — знакопостоянная функция времени (это свойство наблюдается при любых сочетаниях граничных значений Λ_H и Λ_K).

Заключение

В статье исследуется проблема повышения маневренности КА путем оптимизации управления кинетическим моментом при разворотах в требуемое положение. Выписаны условия оптимальности режима переориентации без "разгрузки" гиросистемы и изучены свойства оптимального пространственного (трехмерного) разворота. Решение задачи оптимального управления основано на кватернионном дифференциальном уравнении, связывающем кинетический момент КА с кватернионом ориентации связанной системы координат. Необходимые условия максимального быстродействия записаны в аналитическом виде. В общем случае оптимальный маневр делится на три характерных фазы: раскрутка КА до максимально допустимого кинетического момента $L_{\max}$, вращение с постоянным по модулю кинетическим моментом и гашение угловой скорости до нуля. Задача управления ориентацией сводится к решению трех задач — наискорейшему сообщению КА требуемого кинетического момента, вращению КА с расчетной скоростью движения и максимально быстрому торможению (успокоению) КА. На участках разгона и торможения управляющий момент максимально возможный и параллелен вектору кинетического момента.

Главным отличием от известных публикаций является то, что хотя в задаче (1)—(2) $L_{\max}$ — постоянная величина, само значение $L_{\max}$ подлежит оптимизации. Даны ключевые соотношения и уравнения для оптимального движения, которые определяют программу изменения кинетического момента КА. Приводится условие для определения момента начала торможения, использующее текущие параметры движения (информацию об угловом

положении и измерения угловой скорости КА), что существенно повышает точность приведения КА в требуемое положение. Подробно исследуется проблема нахождения оптимального модуля кинетического момента между разгоном и торможением, если КА разворачивается в условиях возмущений. Получены формализованные уравнения и найдены расчетные выражения для вычисления значения $L_{\max}$ при известных условиях разворота — начального и конечного положений КА и его инерционных характеристик. Параметр $L_{\max}$ закона управления рассчитывается так, чтобы запас кинетического момента системы гиросинов позволил исключить привлечение других органов управления (кроме гиросинов) для совершения маневра и его завершения с учетом действующих возмущений. Представлены результаты численного моделирования движения КА в соответствии с разработанным способом управления. Предлагаемый алгоритм управления переориентацией КА с инерционными исполнительными органами позволяет уменьшить время разворота на 25...35 %.

Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Раушенбах Б. В., Токарь Е. Н. Управление ориентацией космических аппаратов. М.: Наука, 1974.
3. Левский М. В. Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 53—59.
4. Левский М. В. К вопросу оптимального успокоения космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1.
5. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2.
6. Levskii M. V. Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method // Mechanics of solids, 2009, Vol. 44, No. 2.
7. Levskii M. V. About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // Problems of nonlinear analysis in engineering systems. 2015. Vol. 21, N. 2.
8. Левский М. В. Способ управления разворотом космического аппарата. Патент на изобретение РФ № 2093433 // Бюллетень "Изобретения. Заявки и патенты". 1997. № 29.
9. Платонов В. Н., Ковтун В. С. Способ управления космическим аппаратом с помощью реактивных исполнительных органов при выполнении программного разворота. Патент на изобретение РФ № 2098325 // Бюллетень "Изобретения. Заявки и патенты". 1997. № 34 от 10.12.1997.
10. Сарычев В. А., Беляев М. Ю., Зыков С. Г., Сазонов В. В., Тесленко В. П. Математические модели процессов поддержания ориентации орбитальной станции "Мир" с помощью гиросинов. М.: Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. 1989. № 10.
11. Ковтун В. С., Митрикс В. В., Платонов В. Н., Ревнивых С. Г., Суханов Н. А. Математическое обеспечение проведения экспериментов при управлении ориентацией космического астрофизического модуля "Гамма" // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. № 3.
12. Понягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
13. Young L. G. Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. Philadelphia, London, Toronto: W. B. Saunders Company, 1969.

Optimization of Angular Momentum for Increase of Maneuverability of a Spacecraft with Inertial Actuators

M. V. Levskii, dp940@mail.ru, Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, 141091, The Moscow region

Corresponding author: Levskii Mikhail V., Ph. D., Leading Researcher, Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, 141091, The Moscow region, e-mail: dp940@mail.ru

Accepted on August 24, 2017

The problem of improvement of maneuverability of a spacecraft which is controlled by inertial actuators (system of powered gyroscopes, by gyrodynes) is considered. We suggest to increase speed of implementation of rotary maneuvers by optimization of control algorithms of spacecraft motion. The task of construction of optimal laws of variation in the angular momentum vector of a spacecraft as control function so as to ensure the transition of the spacecraft from an arbitrary initial attitude to the required final angular position at minimal time has been solved completely. Main difference is the necessity of determining during optimization the maximum admissible magnitude of the angular momentum since it is unknown a priori. The problem is solved by using Pontryagin's maximum principle, and solution is based on the quaternion differential equation relating the vector of spacecraft angular momentum to the quaternion of orientation of the body-fixed coordinate system.

The optimality conditions of reorientation regime without "unloading" of the gyro-system are written in analytical form, and the properties of optimal motion are studied. Key relations and the equations for construction of the optimal control program are given. The condition for determination of the moment of the beginning of the braking which uses current parameters of motion (information on angular position of a spacecraft and measurements of angular velocity) was given, it considerably improves accuracy of spacecraft transfer into a required position. The aspects of determination of optimal modulus of angular momentum between acceleration and braking if spacecraft rotates under disturbances are discussed in detail. The formalized equations are derived, and computational expressions for calculating the optimal value of the key parameter of control law are obtained. Results of the mathematical simulation of the spacecraft motion under the designed control method are presented.

Keywords: spacecraft, attitude, powered gyroscopes, control function, optimal control, angular momentum

For citation:

Levskii M. V. Optimization of Angular Momentum for Increase of Maneuverability of a Spacecraft with Inertial Actuators, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 65–72.

DOI: 10.17587/mau.19.65-72

References

1. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* (The use of quaternions in problems of orientation of a rigid body), Moscow, Nauka, 1973. 320 c. (in Russian).
2. Raushenbakh B. V., Tokar' E. N. *Upravlenie orientatsiei kosmicheskikh apparatov* (Spacecraft attitude control), Moscow, Nauka, 1974 (in Russian).
3. Levskii M. V. *Ispol'zovanie universal'nykh peremennykh v zadachakh optimal'nogo upravleniya orientatsiei kosmicheskikh apparatov* (The use of universal variables in problems of optimal control concerning spacecrafts orientation), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 1, pp. 53–59 (in Russian).
4. Levskii M. V. *K voprosu optimal'nogo uspokoeniya kosmicheskogo apparata* (On optimal spacecraft damping), *Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2011, no. 1 (in Russian).
5. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. *Reshenie zadachi optimal'nogo razvorota osesimmetrichnogo kosmicheskogo apparata s ogranichenym i impul'snym upravleniem pri proizvol'nykh granichnykh usloviyakh* (A solution of the optimal turn problem of an axially symmetric spacecraft with bounded and pulse control under arbitrary boundary conditions), *Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2007, no. 2 (in Russian).
6. Levskii M. V. Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method, *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 2.
7. Levskii M. V. About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation, *International Journal "Problems of nonlinear analysis in engineering systems"*, 2015, vol. 21, no. 2.
8. Levskii M. V. *Sposob upravleniya razvorotom kosmicheskogo apparata*. Patent na izobretenie RF № 2093433 (A method of controlling a spacecraft turn. The patent for the invention of the Russian Federation no. 2093433), *Byulleten' "Izobreteniya. Zayavki i Patenty"*, 1997, no. 29 (in Russian).
9. Platonov V. N., Kovtun V. S. *Sposob upravleniya kosmicheskim apparatom s pomoshchyu reaktivnykh ispolnitel'nykh organov pri vypolnenii programmno razvorota*. Patent na izobretenie RF № 2098325 (A method of spacecraft control using jet executive devices during programmed turn performance. The patent for the invention of the Russian Federation no. 2098325), *Byulleten' "Izobreteniya. Zayavki i Patenty"*, 1997, no. 34 (in Russian).
10. Sarychev V. A., Belyaev M. Yu., Zykov S. G., Sazonov V. V., Teslenko V. P. *Matematicheskie modeli processov podderzhaniya orientatsii orbital'noi stantsii "Mir" s pomoshchyu girodinov* (Mathematical models of processes for supporting orientation of the Mir orbital station with the use of gyrodynes), *Preprint IPM im. M. V. Keldysha AN SSSR*, 1989, no. 10 (in Russian).
11. Kovtun V. S., Mitrikas V. V., Platonov V. N., Revniykh S. G., Sukhanov N. A. *Matematicheskoe obespechenie provedeniya experimentov pri upravlenii orientatsiei kosmicheskogo astrofizicheskogo modulya "Gamma"* (Mathematical support for conducting experiments with attitude control of space astrophysical module Gamma), *Izv. AN SSSR. Tekhnicheskaya Kibernetika*, 1990, no. 3 (in Russian).
12. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh processov* (The mathematical theory of optimal processes), Moscow, Nauka, 1983 (in Russian), New York, Gordon and Breach, 1986.
13. Young L. G. *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Philadelphia, London, Toronto, W. B. Saunders Company, 1969.

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Технический редактор Е. В. Конова. Корректор Е. В. Комиссарова.

Сдано в набор 27.10.2017. Подписано в печать 11.12.2017. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН118. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансдес солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансдес солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.

Рисунок к статье Б. В. Сухинина, В. В. Суркова
 «К ВОПРОСУ О МЕТОДОЛОГИЧЕСКОМ КРИЗИСЕ
 СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ»

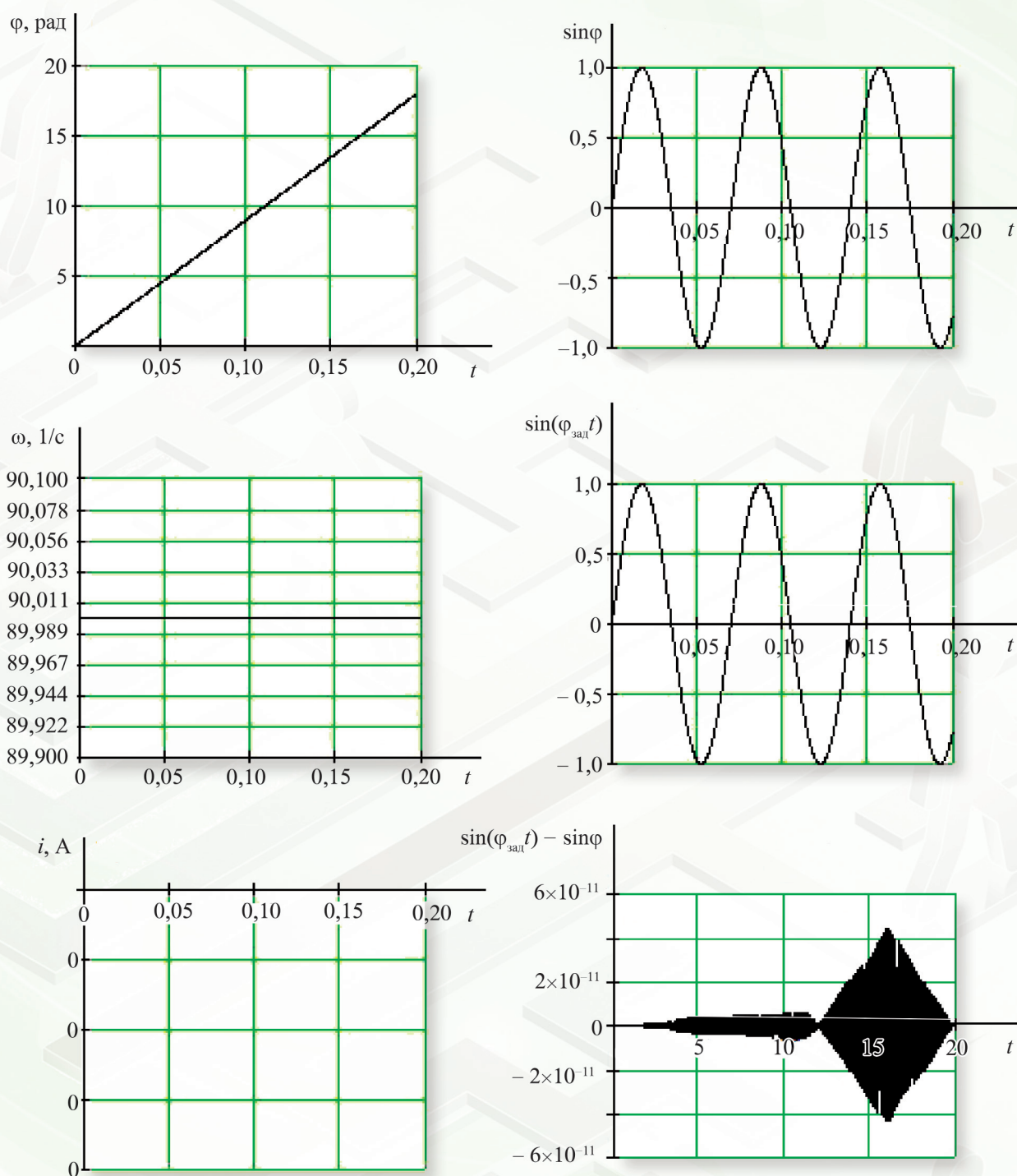
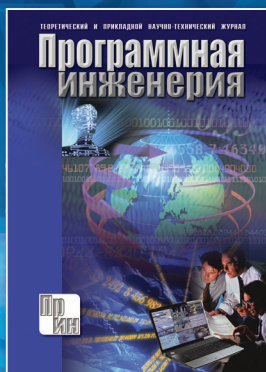


Рис. 2. Графики изменения координат привода сканера антенны в режиме стабилизации скорости

Издательство **“НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ”** выпускает научно-технические журналы



Теоретический и прикладной научно-технический журнал

ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ

В журнале освещаются состояние и тенденции развития основных направлений индустрии программного обеспечения, связанных с проектированием, конструированием, архитектурой, обеспечением качества и сопровождением жизненного цикла программного обеспечения, а также рассматриваются достижения в области создания и эксплуатации прикладных программно-информационных систем во всех областях человеческой деятельности.

Подписные индексы по каталогам: **«Роспечать» – 22765; «Пресса России» – 39795**



Ежемесячный теоретический и прикладной
научно-технический журнал

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития основных направлений в области разработки, производства и применения информационных технологий.

Подписные индексы по каталогам: **«Роспечать» – 72656; «Пресса России» – 94033**



Научно-практический и учебно-методический журнал

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В журнале освещаются достижения и перспективы в области исследований, обеспечения и совершенствования защиты человека от всех видов опасностей производственной и природной среды, их контроля, мониторинга, предотвращения, ликвидации последствий аварий и катастроф, образования в сфере безопасности жизнедеятельности.

Подписные индексы по каталогам: **«Роспечать» – 79963; «Пресса России» – 94032**



Ежемесячный междисциплинарный
теоретический и прикладной научно-технический журнал

НАНО- и МИКРОСИСТЕМНАЯ ТЕХНИКА

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития нано- и микросистемной техники, рассматриваются вопросы разработки и внедрения нано- и микросистем в различные области науки, технологии и производства.

Подписные индексы по каталогам: **«Роспечать» – 79493; «Пресса России» – 27849**

Все журналы
распространяются
только по подписке.

Оформить подписку можно
через подписные агентства
либо непосредственно
в редакции журналов.

Адрес редакции журналов для авторов и подписчиков:
107076, Москва, Стромьинский пер., 4. Издательство **“НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ”**
Тел.: (499) 269-55-10, 269-53-97. Факс: (499) 269-55-10.

E-mail: antonov@novtex.ru