

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ



Том 18
2017
№ 6

Рисунки к статье А. В. Фомичева, Е. К. Ли

«АНАЛИТИЧЕСКОЙ АЛГОРИТМ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ КА
ПРИ ПОСАДКЕ НА ПОВЕРХНОСТЬ ЛУНЫ»

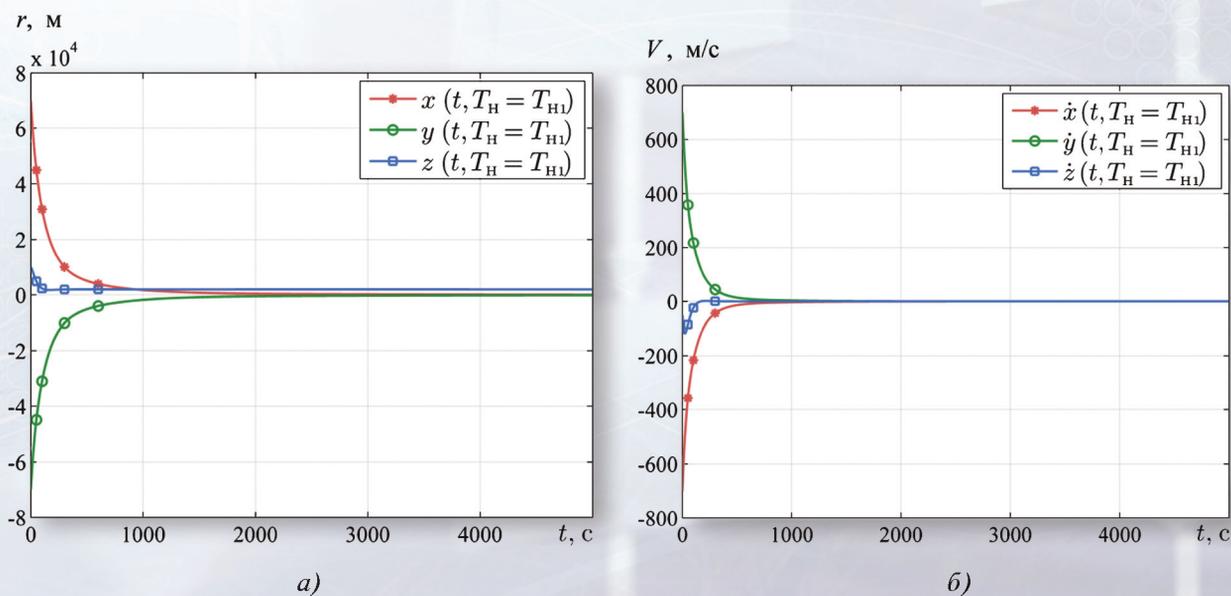


Рис. 2. Изменение параметров вектора состояния в ПтСК
в процессе наведения с использованием «ложного» решения $T_H = T_{H1}$ (9.1):
 a – по положению; b – по скорости

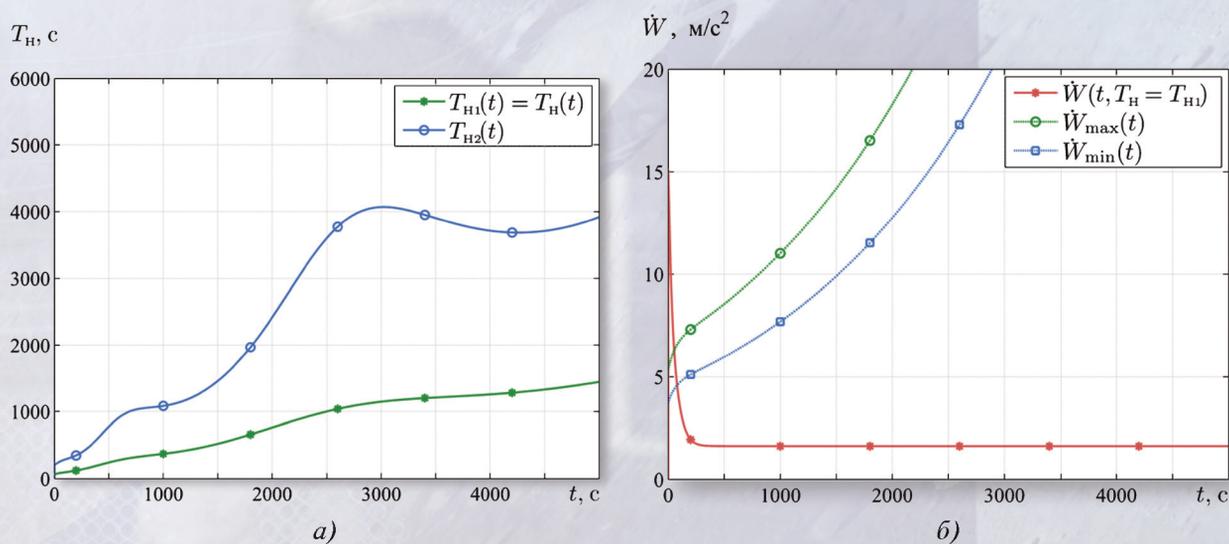


Рис. 3. Изменение параметров управления в процессе наведения
с использованием «ложного» решения $T_H = T_{H1}$ (9.1):
 a – времени, оставшегося до окончания процесса наведения;
 b – требуемого кажущегося ускорения

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 18

2017

№ 6

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Редакционный совет:

CHYI-YEU LIN, PhD, prof.
GROUMPOS P. P., prof.
JEN-HWA GUO, PhD, prof.
KATALINIC B., PhD, prof.
SUBUDHI B., PhD, prof.
АЛИЕВ Т. А., акад. НАНА, проф.
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН, проф.
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН, проф.
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН, проф.
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН, проф.,
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН, проф.
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г., чл.-корр. НАНБ, проф.
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН, проф.
ЛЕОНОВ Г. А., чл.-корр. РАН, проф.
МАТВЕЕНКО А. М., акад. РАН, проф.
МИКРИН Е. А., акад. РАН, проф.
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН, проф.
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН, проф.
СИГОВ А. С., акад. РАН, проф.
СОЙФЕР В. А., акад. РАН, проф.
СОЛОВЬЕВ В. А., чл.-корр. РАН, проф.
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН, проф.
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН, проф.
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН, проф.
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН, проф.
ШЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН, проф.

Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д. т. н., с. н. с.

Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В., д. т. н., проф.
ПУТОВ В. В., д. т. н., проф.
ЮЩЕНКО А. С., д. т. н., проф.

Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В., д. ф.-м. н., проф.
АНТОНОВ Б. И.
АРШАНСКИЙ М. М., д. т. н., проф.
БУКОВ В. Н., д. т. н., проф.
ВИТТИХ В. А., д. т. н., проф.
ГРАДЕЦКИЙ В. Г., д. т. н., проф.
ЕРМОЛОВ И. Л., д. т. н., доц.
ИВЧЕНКО В. Д., д. т. н., проф.
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д. т. н., проф.
КОЛОСОВ О. С., д. т. н., проф.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д. т. н., проф.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д. т. н., проф.
ЛОХИН В. М., д. т. н., проф.
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д. ф.-м. н., проф.
ПРОХОРОВ Н. Л., д. т. н., проф.
ПШИХОПОВ В. Х., д. т. н., проф.
РАПОПОРТ Э. Я., д. т. н., проф.
СЕРГЕЕВ С. Ф., д. пс. н., с. н. с.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д. т. н., проф.
ФРАДКОВ А. Л., д. т. н., проф.
ФУРСОВ В. А., д. т. н., проф.
ЮРЕВИЧ Е. И., д. т. н., проф.

Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Кабанов А. А.** Линеаризация обратной связью непрерывных и дискретных многомерных систем 363
- Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем. 371
- Ловчаков В. И.** Необходимые условия максимального быстродействия линейных динамических систем 376

РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Краснощеченко В. И.** Разработка и исследование математической модели гибкого однозвенного манипулятора с использованием принципа наименьшего действия Гамильтона 383

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ

- Мелентьев В. С., Батищев В. И., Сусова Е. А.** Повышение точности измерения параметров емкостных датчиков 391
- Моржов А. В., Моржова С. В.** Синтез релейного гидропривода при задании ограничений на параметрическую чувствительность его характеристик 395
- Чебурахин И. Ф., Гавриш О. Н.** Об эффективных методах синтеза булевых формул и схем из функциональных элементов 407

АВТОМАТИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

- Андреев С. М., Галдин М. С.** Структурный синтез системы упреждающего управления тепловым режимом валковой разливки стали 415

УПРАВЛЕНИЕ АВИАКОСМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

- Фомичев А. В., Ли Е. К.** Аналитический алгоритм терминального управления пространственным движением КА при посадке на поверхность Луны 423

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mec@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Published since 2000

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Editorial Council:

ALIEV T. A., prof., Azerbaijan, Baku
 ANSHAKOV G. P., Russia, Samara
 BOLOTNIK N. N., Russia, Moscow
 CHENTSOV A. G., Russia, Ekaterinburg
 CHERNOUSKO F. L., Russia, Moscow
 CHYI-YEU LIN, PhD, Prof., Taiwan, Taipei
 FEDOROV I. B., Russia, Moscow
 GROUMPOS P. P., prof., Greece, Patras
 JEN-HWA GUO, PhD, Prof., Taiwan, Taipei
 KALYAEV I. A., Russia, Taganrog
 KATALINIC B., PhD, Prof., Austria, Vienna
 KRASNEVSKIY L. G., Belarus, Minsk
 KUZNETSOV N. A., Russia, Moscow
 LEONOV G. A., Russia, S.-Peterburg
 MATVEENKO A. M., Russia, Moscow
 MIKRIN E. A., Russia, Moscow
 PESHEKHONOV V. G., Russia, S.-Peterburg
 REZCHIKOV A. F., Russia, Saratov
 SCHERBATYUK A. F., Russia, Vladivostok
 SEBRYAKOV G. G., Russia, Moscow
 SIGOV A. S., Russia, Moscow
 SOJFER V. A., Russia, Samara
 SOLOMENTSEV Yu. M., Russia, Moscow
 SOLOVJEV V. A., Russia, Moscow
 SUBUDHI B., PhD, Prof., India, Sundargarh
 VASILYEV S.N., Russia, Moscow
 YUSUPOV R. M., Russia, S.-Peterburg
 ZHELTOV S. Yu., Russia, Moscow

Editor-in-Chief:

FILIMONOV N. B., Russia, Moscow

Deputy Editor-in-Chief:

PODURAEV Yu. V., Russia, Moscow
 PUTOV V. V., Russia, S.-Peterburg
 YUSCHENKO A. S., Russia, Moscow

Responsible Secretary:

BEZMENOVA M. Yu., Russia, Moscow

Editorial Board:

ALEXANDROV V. V., Russia, Moscow
 ANTONOV B. I., Russia, Moscow
 ARSHANSKY M. M., Russia, Tver
 BUKOV V. N., Russia, Zhukovsky
 ERMOLOV I. L., Russia, Moscow
 FILARETOV V. F., Russia, Vladivostok
 FRADKOV A. L., Russia, S.-Peterburg
 FURSOV V. A., Russia, Samara
 GRADETSKY V. G., Russia, Moscow
 ILYASOV B. G., Russia, Ufa
 IVCHENKO V. D., Russia, Moscow
 KOLOSOV O. S., Russia, Moscow
 KOROSTELEV V. F., Russia, Vladimir
 LEBEDEV G. N., Russia, Moscow
 LOKHIN V. M., Russia, Moscow
 PAVLOVSKY V. E., Russia, Moscow
 PROKHOROV N. L., Russia, Moscow
 PSHIKHOPOV V. Kh., Russia, S.-Peterburg
 RAPOPORT E. Ya., Russia, Samara
 SERGEEV S. F., Russia, S.-Peterburg
 VITTIKH V. A., Russia, Samara
 YUREVICH E. I., Russia, S.-Peterburg

Editorial Staff:

GRIGORIN-RYABOVA E.V., Russia, Moscow

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

METHODS OF THE THEORY OF AUTOMATIC CONTROL

- Kabanov A. A.** Feedback Linearization of Continuous and Discrete Multidimensional Systems 363
Vorotnikov V. I., Martysenko Yu. G. To Problem of Partial Stability of Nonlinear Discrete-Time Systems 371
Lovchakov V. I. Necessary Conditions of Time-Optimality of Linear Dynamical Systems . . 376

ROBOTIC SYSTEMS

- Krasnoshchechenko V. I.** Development and Investigation of the Mathematical Model of a Flexible Single-Link Manipulator with the Use of the Hamilton's Principle 383

FUNCTIONAL ELEMENTS OF MECHATRON SYSTEMS

- Melentiev V. S., Batishchev V. I., Susova E. A.** Improving the Accuracy of Measurement of Parameters of Capacitive Sensors 391
Morzhov A. V., Morzhova S. V. The Synthesis of the Relay Hydraulic Power Drive by Setting Limits on Parametrical Sensitivity of its Characteristics 395
Cheburakhin I. F., Gavrish O. N. About One Efficient Method of Synthesis of Boolean Formulas and Circuits of Functional Elements 407

AUTOMATION OF PROCESS CONTROL

- Andreev S. M., Galdin M. S.** Structure Synthesis of Twin-Roll Strip Casting Thermal Mode Predictive Control System 415

CONTROL AEROSPACE SYSTEMS

- Fomichev A. V., Li E. K.** Analytical 3D Terminal Guidance Algorithm for Lunar Landing. . . 423

Information about the journal is available online at:
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: mech@novtex.ru

А. А. Кабанов, канд. техн. наук, доц., KabanovAleksey@gmail.com,
Севастопольский государственный университет

Линеаризация обратной связью непрерывных и дискретных многомерных систем¹

Рассматриваются нелинейные непрерывные и дискретные динамические системы с векторным управлением. Приводится явный вид канонического преобразования подобия, обеспечивающего матрице замкнутой преобразованной системы форму Фробениуса. Решение задачи линеаризации обратной связью выполняется на основе представленных преобразований подобия. Полученные результаты иллюстрируются примерами для непрерывных и дискретных нелинейных систем.

Ключевые слова: линеаризация обратной связью, многомерная система, каноническое преобразование

Введение

Одним из распространенных методов анализа и синтеза нелинейных систем является "обычная" линеаризация — линеаризация, основанная на разложении нелинейной функции в окрестности точки (функции), определяющей заданный режим, в ряд Тейлора и отбрасывании нелинейных членов. Обычная линеаризация заменяет исходную нелинейную модель приближенной линейной моделью и обладает рядом недостатков, что в совокупности может гарантировать асимптотическую устойчивость замкнутой системы, синтезированной на основе обычной линеаризованной модели, лишь на конечном интервале, тогда как синтезированная линейная система асимптотически устойчива в целом.

Наряду с линеаризацией в окрестности точки рассматривают и другой способ линеаризации, основанный на преобразовании обратной связью [1, 2]. Такой переход от нелинейной системы к линейной путем преобразования, включающего преобразование обратной связью, называют линеаризацией обратной связью.

Линеаризация обратной связью (ЛОС) является не приближенным, а эквивалентным преобразованием: в результате ЛОС получается система, эквивалентная исходной системе. При ЛОС исходное управление u заменяется новым управлением v . Функция преобразования, кроме нового управления, включает вектор состояния (в частном случае только выходную переменную). Поэтому при этом преобразовании объект охватывается обратной связью.

В общем случае возникает вопрос: существует ли преобразование обратной связью, обеспечивающее линеаризацию той или иной системы? Широко известным подходом к решению задачи ЛОС является метод преобразования системы к нормальной форме [1, 2]. Чтобы получить нормальную

форму системы в окрестности некоторой точки, нужно указать специальную функцию — выход системы, для которой в этой точке определена относительная степень в скалярном случае или векторная относительная степень в случае векторного управления. При этом основная сложность при синтезе сигнала управления v заключается в переходе от преобразованных переменных к фазовым переменным исходной системы. Метод приведения к нормальной форме применим при соблюдении условий управляемости и инволютивности для рассматриваемой нелинейной системы, что не всегда имеет место.

Другой подход, предложенный в работе [3], заключается в применении специальных преобразований подобия, позволяющих привести систему к каноническому виду, что затем существенно упрощает задачу линеаризации обратной связью. Предложенные в работе [4] канонические преобразования позволяют выполнить линеаризацию без расчета вспомогательной выходной переменной $y = h(x)$. Еще одно преимущество данного подхода заключается в более простой технике перехода от фазовых координат преобразованной системы к переменным состояния исходной системы. Указанный метод применим к непрерывным и к дискретным нелинейным нестационарным системам. Соответствующие результаты по синтезу канонического преобразования для систем со скалярным управлением даны в работах [4, 5].

В данной статье предлагается развитие существующих результатов на случай систем с векторным управлением. Некоторые результаты в этом направлении для непрерывных систем представлены в работе [6]. Статья построена следующим образом: первый раздел содержит постановку задачи; второй раздел посвящен решению задачи ЛОС для непрерывных и дискретных систем с векторным управлением; примеры построения ЛОС на основе разработанного метода приводятся в третьем разделе; в заключении представлены основные выводы.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-08-06859).

1. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная аффинная система

$$\dot{x}(t) = f(x) + \sum_{i=1}^r g_i(x)u_i \quad (1)$$

в непрерывном случае, и система вида

$$x(k+1) = f(x(k)) + \sum_{i=1}^r g_i(x(k))u_i(k), \quad (1a)$$

— в дискретном случае, где $x \in R^n$ — вектор состояния; $u \in R^r$ — вектор управления; $f(x)$ и $g_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые (по всем аргументам) функции с ограниченными производными.

Проблема ЛОС системы (1) (или (1a) в дискретном случае) состоит в поиске невырожденного преобразования $z = T_{FL}(x)$ и управления $u = u_{FL}$, с помощью которых система (1) (или (1a)) может быть приведена к канонической форме с Фробениусовой матрицей состояния с последней функциональной строкой.

Для случая скалярного управления ($r = 1$) при условии существования некоторой скалярной непрерывно дифференцируемой функции $h(x)$ преобразование $z = T_{FL}(x)$ определяется выражением [1, 2]

$$T_{FL}(x) = (h(x) \ L_f^1 h(x) \ \dots \ L_f^{n-1} h(x))^T \quad (2)$$

и ЛОС задается в виде

$$\begin{aligned} u_{FL} &= -\alpha(x)/\beta(x) + v/\beta(x), \\ \alpha(x) &= L_f^n h(x), \beta(x) = L_g L_f^{n-1} h(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где v — новый управляющий вход; $L_f^i h(x)$ — производная Ли i -го порядка от скалярной функции $h(x)$ вдоль векторного поля f .

Применение ЛОС (3) и преобразования (2) приводит систему (1) к виду

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z + \tilde{b}v, \quad (4)$$

где (\tilde{A}, \tilde{b}) — каноническая пара в форме Бруновского (\tilde{A} — Фробениусова матрица, \tilde{b} — столбец, все элементы которого равны 0, а последний равен 1).

Указанная процедура синтеза ЛОС называется методом нормальной формы, применимость которого обеспечивается соблюдением условий [1, 2]

$$\begin{aligned} L_g h(x) &= L_g L_f^1 h(x) = \dots = L_g L_f^{n-2} h(x) = 0, \\ \beta(x) &= L_g L_f^{n-1} h(x) \neq 0, \end{aligned}$$

что не всегда имеет место. В таких ситуациях, как правило, пользуются методами синтеза приближенной ЛОС [7–10].

В данной статье рассматривается альтернативный подход к синтезу ЛОС, основанный на ис-

пользовании канонического преобразования подобия вида

$$z = T(x)x, \quad x = T^{-1}(x)z. \quad (5)$$

Требуется найти управление u и матрицу $T(x)$ преобразования (5), которые бы преобразовывали систему (1) (или в дискретном случае систему (1a)) к линейному каноническому виду.

Для непрерывных и дискретных нелинейных систем со скалярным управлением такое преобразование было предложено, соответственно, в работах [4, 5]. В данной работе рассматривается задача применения указанного подхода в случае систем с векторным управлением.

2. Решение задач линейризации обратной связью

2.1. Непрерывные системы

Рассмотрим сначала систему со скалярным управлением, т. е. $r = 1$. Представим систему (1) в форме модели пространства состояний с коэффициентами, зависящими от состояния (state-dependent coefficient, SDC-форма) [11]:

$$\dot{x}(t) = A(x)x + b(x)u. \quad (6)$$

Предположим, что $(n \times n)$ -мерная матрица $A(x)$ и $(n \times 1)$ -мерный вектор $b(x)$ непрерывны и дифференцируемы, имеют ограниченные производные. Также предполагается, что пара $(A(x), b(x))$ является полностью управляемой, т. е. для матрицы управляемости системы (6) существует такое число ε , что

$$|\det(W(x))| > \varepsilon > 0, \quad x \in R^n, \quad t \geq t_0,$$

$$W(x) = (b(x) \ L_1(x)b(x) \ \dots \ L_{n-1}(x)b(x)).$$

Здесь $L_i(x)$ — матрица i -й производной от вектора x в силу однородной системы $\dot{x}(t) = A(x)x$, вычисляется из соотношений (здесь " \cdot " — аргумент) [4]

$$L_1(\cdot) = A(\cdot), \quad L_k(\cdot) = (d/dt + A(\cdot))L_{k-1}(\cdot).$$

Применяя преобразование (5) к выражению (6), получаем систему (4), для которой выполняются следующие соотношения (зависимость от x опустим)

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \tilde{A}(z)z + \tilde{b}u, \\ \tilde{A}(z) &= TAT^{-1} + \dot{T}T^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_n(z) & a_{n-1}(z) & a_{n-2}(z) & \dots & a_1(z) \end{pmatrix}, \\ \tilde{b} &= Tb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Линеаризующее управление для канонической системы (7) можно определить в виде обратной связи $u(z) = K(z)z + v(z)$, $K = -(a_n(z) a_{n-1}(z) \dots a_1(z))$. (8)

С точки зрения переменных состояния исходной системы управления ЛОС (8) можно записать в виде

$$u(x) = u_{FL}(x) + v(x) = K(x)T(x)x + G_C T(x)x. \quad (9)$$

Методика расчета канонического преобразования (5) подробно описана в работе [4]. Запишем только конечный результат:

$$T(x) = \{T_i(x)\}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$T_{i+1}(x) = \frac{d^i}{dt^i}(\bar{G}) + C_i^1 \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \bar{G} L_1(x) + \dots + \bar{G} L_i(x),$$

$$\bar{G} = e_n G^{-1}(x), \quad e_n = (0 \ 0 \ \dots \ 1),$$

$$G(x) = (g_1, g_2, \dots, g_n), \quad k = \overline{0, n-1},$$

$$g_{k+1}(x) = L_k(x)b(x) - C_k^1 \frac{d}{dt}(L_{k-1}(x)b(x)) + C_k^2 \frac{d}{dt}(L_{k-1}(x)b(x)) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} b(x), \quad (10)$$

где C_k^j — биномиальные коэффициенты (k, j) .

Преобразование (5), (10) существует тогда и только тогда, когда матрица управляемости $W(x)$ системы (6) — невырожденная для всех $x \in R^n$, $t \geq t_0$ [4].

В многомерном случае система (1) в SDC-форме задается уравнением

$$\dot{x}(t) = A(x)x + B(x)u. \quad (11)$$

Матрицы $A(x)$ и $B(x)$ — $(n \times n)$ -мерная и $(n \times r)$ -мерная соответственно, непрерывны и дифференцируемы, имеют ограниченные производные. Предположим, что система управляема, т. е. предполагается, что $n \times (nr)$ -мерная матрица управляемости

$$W(x) = (B(x) L_1(x) B(x) \dots L_{n-1}(x) B(x)) \quad (12)$$

имеет ранг n для всех $x \in R^n$, $t \geq t_0$.

Каноническое преобразование подобия строится из независимых столбцов матрицы управляемости (12). Первым шагом в построении данного преобразования подобия является выбор n линейно независимых векторов из nr столбцов матрицы управляемости.

С системой (11) будем ассоциировать n чисел r_0, r_1, \dots, r_{n-1} [12] (зависимость от x опустим):

$$r_0 = \text{rank} B, \quad 1 \leq j \leq n-1;$$

$$r_j = \text{rank}(B, AB, \dots, A^j B) - \text{rank}(B, AB, \dots, A^{j-1} B).$$

Кроме того, $0 \leq r_j \leq r$ для $0 \leq j \leq n-1$ и $\sum_{j=0}^{n-1} r_j = n$,

$$r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_{n-1}.$$

С каждым столбцом $B(x)$ можно связать числа p_i (p_i — это число $r_j \geq i$), такие что $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{r_0} > 0$,

$$\sum_{i=0}^r p_i = n.$$

Выбранные n линейно независимых векторов содержат столбцы матрицы $G(x)$ с r_0 группами столбцов, т. е. вектора g_{ip_i} , $i = \overline{1, r_0}$:

$$G(x) = (g_{11}, \dots, g_{1p_1}, \dots, g_{r_0 1}, \dots, g_{r_0 p_{r_0}}),$$

$$g_{i(k+1)}(x) = L_k(x)b_i(x) - C_k^1 \frac{d}{dt}(L_{k-1}(x)b_i(x)) + C_k^2 \frac{d}{dt}(L_{k-1}(x)b_i(x)) + \dots + (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} b_i(x),$$

$$i = \overline{1, r_0}, \quad k = \overline{0, p_i}.$$

Матрица преобразования определяется следующим образом:

$$T(x) = (t_{11}^T, \dots, t_{1p_1}^T, \dots, t_{r_0 1}^T, \dots, t_{r_0 p_i}^T)^T,$$

$$i = \overline{1, r_0}, \quad k = \overline{0, p_i}, \quad \bar{G} = e_{in} G^{-1}(x),$$

$$t_{i(k+1)} = \frac{d^k}{dt^k}(\bar{G}) + C_k^1 \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \bar{G} L_1(x) + \dots + \bar{G} L_k(x), \quad (13)$$

где e_{in} , $i = \overline{1, r_0}$ — n -мерный вектор, i -й элемент которого равен 1.

Применяя к системе (11) преобразование (13), мы получаем

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}(z)z + \tilde{B}(z)u;$$

$$\tilde{A} = T(x)A(x)T^{-1}(x) + \dot{T}(x)T^{-1}(x); \quad \tilde{B} = T(x)B(x);$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} J_{r_0} & E_{r_0 r_1} & \dots & & E_{r_0(r_n-1)} \\ E_{r_1 r_0} & J_{r_1} & E_{r_1 r_2} & \dots & E_{r_1(r_n-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ E_{(r_n-2)r_0} & \dots & & J_{(r_n-2)} & E_{(r_n-2)(r_n-1)} \\ E_{(r_n-1)r_0} & \dots & & E_{(r_n-1)(r_n-2)} & J_{(r_n-1)} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} e_{p_1 p_1} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ 0 & e_{p_2 p_2} & \dots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{p_{r_0} p_{r_0}} \end{pmatrix}; \quad (14)$$

где

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_{k_1}(x) & a_{k_2}(x) & \dots & a_{kk}(x) \end{pmatrix};$$

$$E_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{k_1}(x) & \dots & a_{kl}(x) \end{pmatrix}; B_{km} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_{km} \end{pmatrix}.$$

Приведенные матрицы имеют следующие размерности:

$$J_k - (k \times k), E_{kl} - (k \times l), B_{km} - (k \times 1),$$

$$k = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}; l = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}; m = 2, 3, \dots, r.$$

Матрица $\tilde{B}(x)$ может быть представлена в виде

$$\tilde{B}(x) = \hat{B}C, C - (r \times r)\text{-мерная матрица};$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} e_{p1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_{p2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{pr0} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку C является невырожденной матрицей, существует новая эквивалентная система ввода $\hat{u} = Cu$.

ЛОС для канонической системы (14) может быть определена в виде обратной связи

$$u(z) = u_{FL}(z) + v(z) = C^{-1}(K(z)z + v(z));$$

$$K = - \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1(n-1)} & k_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r1} & \dots & k_{r(n-1)} & k_{rn} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Вместо элементов k_{ij} необходимо взять соответствующие элементы матриц J_k, E_{kl} .

2.2. Дискретные системы

При $r = 1$, т. е. в случае скалярного управления, система (1а) в SDC-форме примет вид

$$x(k+1) = A(x(k))x(k) + b(x(k))u(k), \quad (16)$$

где $x(k)$ — вектор состояния в момент времени k , $(n \times n)$ -мерная матрица $A(x)$ и $(n \times 1)$ -мерный вектор $b(x)$ равномерно ограничены. Введя обозначения

$$x(k) = x_k, A(x(k)) = A_k, b(x(k)) = b_k,$$

определим оператор сдвига p_k на j шагов вперед с шага k в силу однородной системы $x_{k+1} = A_k x_k$: $p_k x_k = A_k x_k$, $p_k^j = L_k^j(x_k)$, $L_k^j(x_k) = \prod_{i=0}^{j-1} A_{k+i}$.

Предполагаем, что система (16) полностью управляема, и соответствующая ей матрица управляемости

$$W_k = (b_k A_k b_{k-1} \dots A_k \dots A_{k-n+1} b_{k-n+1}) \quad (17)$$

является невырожденной.

Введем в рассмотрение преобразование подобия [5]

$$z_k = T_{k+1-n}(x_{k+1-n}, \dots, x_k)x_{k+1-n}, \quad (18)$$

полагая $z_k = (z_k^1, \dots, z_k^n)^T$,

$$z_k^1 = m_{k+1-n}^T x_{k+1-n}, z_{k+1}^1 = m_{k+2-n}^T x_{k+2-n}$$

$$z_k^2 = m_{k+2-n}^T p_k x_{k+1-n}, z_{k+1}^2 = m_{k+3-n}^T p_{k+1} x_{k+2-n}$$

⋮

$$z_k^n = m_k^T p_k^{n-1} x_{k+1-n}, z_{k+1}^n = m_{k+1}^T p_{k+1}^{n-1} x_{k+2-n}. \quad (19)$$

Расчет производящего вектора m_k :

$$m_k^T = e_1^T G_k^{-1}, k \geq n-1, m_j^T b_0 = 0, j < 0,$$

$$G_k = (L_{k+1-n}^{n-1} b_{k-n} L_{k+2-n}^{n-2} b_{k+1-n} \dots b_{k-1}).$$

Преобразованная система

$$z_{k+1} = \tilde{A}_k z_k + \tilde{b}_k u_{k+1-n},$$

$$\tilde{A}_k = T_{k+2-n} A_{k+1-n} T_{k+1-n}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_k^n & a_k^{n-1} & a_k^{n-2} & \dots & a_k^1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}_k = T_{k+2-n} b_{k+1-n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Линеаризующее управление для канонической системы (20) можно определить в виде обратной связи

$$u_{k+1-n} = u_{FL_{k+1-n}} + v_{k+1-n} =$$

$$= K_{k+1-n} z_k + G_{k+1-n} z_k,$$

$$K_{k+1-n} = -(a_k^n \ a_k^{n-1} \ \dots \ a_k^1). \quad (21)$$

В терминах переменных состояния исходной системы управление (21) с ЛОС можно записать в виде

$$u_k = K_k T_k x_k + G_k T_k x_k, k \geq n-1. \quad (22)$$

Преобразование (18), (19) существует тогда и только тогда, когда матрица управляемости (17) W_k — невырожденная для всех $x_k \in R^n$, $k \geq 0$ [5].

Рассмотрим многомерный случай системы в SDC-форме:

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k, \quad (23)$$

где матрицы A_k и B_k — $(n \times n)$ -мерная и $(n \times r)$ -мерная, равномерно ограниченные.

Предположим, что система управляема, т. е. предполагается, что $n \times (nr)$ -мерная матрица управляемости

$$W_k = (B_k A_k B_{k-1} \dots A_{k-n+1} B_{k-n+1})$$

имеет ранг n для всех $x_k \in R^n$, $k \geq 0$.

По аналогии с непрерывным случаем будем ассоциировать с системой (23) n чисел r_0, r_1, \dots, r_{n-1} :

$$r_0 = \text{rank} B_k, \quad 1 \leq j \leq n-1;$$

$$r_j = \text{rank}(B_k, A_k B_k, \dots, A_k^j B_k) - \text{rank}(B_k, A_k B_k, \dots, A_k^{j-1} B_k);$$

$$0 \leq r_j \leq r, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad \sum_{j=0}^{n-1} r_j = n, \quad r_0 \geq r_1 \geq \dots \geq r_{n-1}.$$

С каждым столбцом b_k^i матрицы B_k свяжем число $p_i = r_j \geq i$ такое, что $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{r_0} > 0$,

$$\sum_{i=1}^r p_i = n.$$

Выбранные n линейно независимых векторов содержат столбцы матрицы G_k с r_0 группами столбцов, т. е. вектора g_{ip_i} , $i = \overline{1, r_0}$:

$$G_k = (g_k^{11}, \dots, g_k^{1p_1}, \dots, g_k^{r_0 1}, \dots, g_k^{r_0 p_{r_0}}),$$

$$g_k^{i(l+1)} = L_{k+1-p_i}^{p_i-l-1} b_{k-p_i+1}^i, \quad i = \overline{1, r_0}, \quad l = \overline{0, p_i-1},$$

при этом получаем набор образующих векторов m_{ik} , $i = \overline{1, r_0}$:

$$(m_k^i)^T = e_{n-p_i}^T G_k^{-1}, \quad k \geq n-1, \quad m_k^T b_0^i = 0, \quad k < 0, \quad i = \overline{1, r_0}, \quad (24)$$

которые используются для формирования матрицы преобразования

$$T_{k+1-n}(x_{k+1-n}) = ((t_{k+1-n}^{11})^T, \dots, (t_{k+1-n}^{1p_1})^T, \dots, \dots, (t_k^{r_0 1})^T, \dots, (t_{k+1-n}^{r_0 p_{r_0}})^T)^T, \\ t_{k+1-n}^{i(l+1)} = m_{k-p_i+1}^i L_{k-p_i+1}^l, \\ i = \overline{1, r_0}, \quad l = \overline{0, p_i-1}. \quad (25)$$

Применяя к системе (23) преобразование (25), получаем

$$z_{k+1} = \tilde{A}_k z_k + \hat{B}_k u_{k+1-n}, \\ \tilde{A}_k = T_{k+2-n} A_{k+1-n} T_{k+1-n}^{-1}, \\ \hat{B}_k = T_{k+2-n} B_{k+1-n}. \quad (26)$$

Структура матриц системы (26) показана ниже (нижние индексы при матрицах обозначают их размер):

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} J_{r_0} & E_{r_0 r_1} & \dots & & E_{r_0(r_n-1)} \\ E_{r_1 r_0} & J_{r_1} & E_{r_1 r_2} & \dots & E_{r_1(r_n-1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ E_{(r_{n-2})r_0} & \dots & & J_{(r_{n-2})} & E_{(r_{n-2})(r_n-1)} \\ E_{(r_{n-1})r_0} & \dots & & E_{(r_{n-1})(r_n-2)} & J_{(r_{n-1})} \end{pmatrix}, \\ \hat{B}_k = \begin{pmatrix} e_{p_1 p_1} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ 0 & e_{p_2 p_2} & \dots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{p_{r_0} p_{r_0}} \end{pmatrix}, \quad J_l = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_k^{l1} & a_k^{l2} & \dots & a_k^{ll} \end{pmatrix}, \\ E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_k^{l1} & \dots & a_k^{lj} \end{pmatrix}, \quad B_{lm} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_k^{lr} \end{pmatrix}.$$

Размеры матриц из последнего выражения приведены ниже:

$$J_l - (l \times l), \quad E_{ij} - (l \times j), \quad B_{lm} - (l \times 1),$$

$l = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}; j = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}; m = 2, 3, \dots, r.$

Матрица $\hat{B}_k(x)$ может быть представлена в виде

$$\tilde{B}_k(x) = \tilde{B} C_k, \quad C_k - (r \times r)\text{-мерная матрица;}$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} e_{p_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_{p_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{p_{r_0}} \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1r} \\ 0 & 1 & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку C_k — невырожденная матрица, существует эквивалентный вход $\tilde{u} = C_k u$.

ЛОС для канонической системы (26) может быть определена в виде

$$u_k(z) = C_k^{-1} (K_k(z_k) z_k + v_k(z_k)),$$

$$K_k(z_k) = - \begin{pmatrix} k_k^{11} & k_k^{12} & \dots & k_k^{1(n-1)} & k_k^{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k_k^{r1} & k_k^{r2} & \dots & k_k^{r(n-1)} & k_k^{rn} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Вместо элементов k_{ij} необходимо принимать соответствующие элементы матрицы J_k, E_{kl} .

4. Примеры применения разработанного метода

Следует сказать, что указанный подход применим в ряде задач, где использование метода нормальной формы недопустимо. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1 [13]. Рассмотрим следующую нелинейную систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_3^2; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= u; \\ h(x) &= x_2. \end{aligned} \quad (28)$$

Данная система не линеаризуема обратной связью (3), поскольку не выполнены соответствующие условия [13]. Применим предлагаемый метод для синтеза ЛОС. Найдем матрицу управляемости системы (12) и матрицу преобразования (5):

$$W(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линеаризующее управление (9) примет вид

$$u(x) = K(x)T(x)x + v, \quad K(x) = 0. \quad (29)$$

Применяя замену $z = T(x)x$ и управление (29) к системе (28), получаем

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = v, \quad h(z) = z_2 = x_2. \quad (30)$$

Пример 2. Рассмотрим нелинейную систему с векторным управлением:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2^2 + u_1; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_3 + 2u_2; \\ \dot{x}_3 &= (x_1 - 1)x_2 + u_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Задача заключается в стабилизации системы посредством обратной связи.

Для системы (31) имеем: $r_0 = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$. Матрицы преобразования:

$$G(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & x_2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2x_2+1} & \frac{2}{2x_2+1} \\ 1 & \frac{2(x_1+2x_2-2x_3+1)}{(2x_2+1)^2} & \frac{2(2x_2-2x_1+4x_3+1)}{(2x_2+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{4x_2+2} & \frac{1}{2x_2+1} \end{pmatrix}.$$

Матрицы при состоянии и управлении в преобразованной системе:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x) &= \begin{pmatrix} J_1 & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}; \quad \hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & b_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ J_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{13} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & b_{11} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ E_{21} &= (a_{21} \ a_{22}); \quad E_{22} = a_{23}; \quad b_{11} = -6/(2x_2 + 1); \\ a_{11} &= (4x_1^2 - 8x_1x_2^2 - 4x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2^3 - \\ &- 6x_2^2 + 8x_2x_3 + x_2 + 16x_3^2 + 4x_3 - 8)/(2x_2 + 1)^2; \\ a_{12} &= (2x_1 - 4x_3 + 3)/(2x_2 + 1); \\ a_{13} &= 2(4x_2^3 + 4x_2^2 + x_2 - 6x_1 + 12x_3 + 9)/(2x_2 + 1)^2; \\ a_{21} &= (2x_2^2 + x_1 - 2x_3 + 1)/(2x_2 + 1), \\ a_{22} &= 0, \quad a_{23} = 1 - 3/(2x_2 + 1). \end{aligned}$$

Линеаризующее управление (15) примет вид

$$u(z) = C^{-1}(K(z)z + v), \quad K(z) = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Рассмотрим непрерывную систему из примера 1, которую дискретизуем, приняв $\dot{x}_i = x_i(k+1) - x_i(k)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + x_3^2(k); \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + x_3(k); \\ x_3(k+1) &= x_3(k) + u(k). \end{aligned} \quad (32)$$

Найдем матрицу управляемости системы (17) и определим ее ранг:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & x_3(k) & x_3(k) + x_3(k-1) + 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } W = 3,$$

$$x_3(k) - x_3(k-1) - 1 \neq 0.$$

Матрица G_k и образующий вектор m_k^T имеют вид

$$G_k = \begin{pmatrix} x_3(k-2) - x_3(k-1) + 1 & x_3(k-1) & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$m_k^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_3(k-2) - x_3(k-1) + 1} & \frac{x_3(k-1)}{x_3(k-2) - x_3(k-1) + 1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования (18) примет вид

$$T_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_3(k-4)-x_3(k-3)+1} & \frac{x_3(k-3)}{x_3(k-4)-x_3(k-3)+1} & 0 \\ \frac{1}{x_3(k-3)-x_3(k-2)+1} & \frac{x_3(k-2)-1}{x_3(k-3)-x_3(k-2)+1} & 0 \\ \frac{1}{x_3(k-2)-x_3(k-1)+1} & \frac{x_3(k-1)-2}{x_3(k-2)-x_3(k-1)+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя преобразование $z_k = T_k(x)x_{k-2}$ к системе (32), получаем

$$z_{k+1} = \tilde{A}_k z_k + \tilde{b}_k u_{k-2};$$

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_3(x) & a_2(x) & a_1(x) \end{pmatrix}; \tilde{b}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$a_1(x) = \frac{x_3(k-4) - x_3(k-3) + 1}{x_3(k-3) - x_3(k-2) + 1};$$

$$a_2(x) = \frac{x_3(k-1) + x_3(k-2) - 2x_3(k-3) + 3}{x_3(k-2) - x_3(k-1) + 1};$$

$$a_3(x) = \frac{x_3(k-2) - x_3(k-1) + 1}{x_3(k-1) - x_3(k) + 1} + 2. \quad (33)$$

ЛОС для системы (37):

$$u_k = K_k T_k x_k + v_k;$$

$$K_k = -(a_3(x) \ a_2(x) \ a_1(x)).$$

Пример 4 [14]. Рассматривается дискретная система вида

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + x_2(k); \\ x_2(k+1) &= x_2(k) - g \sin x_3(k) + x_1 u^2(k); \\ x_3(k+1) &= x_3(k) + u(k). \end{aligned} \quad (34)$$

Введя замену $u(k) = u_1(k)$, $u^2(k) = u_2(k)$, запишем систему (34) в векторно-матричной форме:

$$x_{k+1} = A(x_k)x_k + B(x_k)u_k;$$

$$A(x_k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sin(x_3(k))}{x_3(k)} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B(x_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_1(k) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Определим для системы (35) числа $r_0 = 2$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$. Матрицы, задающие каноническое преобразование:

$$G_k = \begin{pmatrix} x_1(k-2) & 1 & 0 \\ x_1(k-2) & -1 & 2 \\ 0 & x_2 & 1 \end{pmatrix}, T(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1(k-3)} & 0 & 0 \\ \frac{1}{x_1(k-2)} & \frac{1}{x_1(k-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы при состоянии и управлении в преобразованной системе:

$$\tilde{A}_k = \begin{pmatrix} J_1 & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{pmatrix}; \hat{B}_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix};$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{13} \end{pmatrix}; C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; E_{21} = (0 \ 0), E_{22} = 1,$$

$$a_{11} = \frac{x_1(k-3)}{x_1(k-1)}; a_{12} = \frac{2x_1(k-2)}{x_1(k-1)}; a_{13} = \frac{\sin x_3(k-1)}{x_1(k-1)x_3(k-1)}.$$

ЛОС (27) примет вид:

$$u_k(z_k) = K_k(z_k)z_k + v, K_k(z_k) = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заключение

В работе предложен метод ЛОС на основе канонического преобразования подобия исходной нелинейной системы в SDC-форме. Данный метод применим к нелинейным непрерывным и к дискретным системам. Соответствующие результаты по синтезу канонических преобразований для нелинейных систем со скалярным управлением даны в работах [4, 5]. В данной работе получены соответствующие результаты для систем с векторным управлением.

Рассмотренные преобразования подобия позволяют выполнить линеаризацию систем без расчета вспомогательных выходных переменных $y = h(x)$. Другое преимущество данного подхода заключается в более простой технике перехода от фазовых координат преобразованной системы к переменным состояния исходной системы. Кроме того, как показано на примере, предлагаемый метод применим в ряде случаев, где использование метода приведения к нормальной форме не допустимо.

Список литературы

1. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
2. Isidori A. Nonlinear control systems. New York: Springer-Verlag, 1995.
3. Кабанов А. А., Крамарь В. А. Линеаризация обратной связи нелинейных систем на основе канонического преобразования подобия // Материалы Всероссийской конференции по проблемам управления в технических системах, Санкт-Петербург, 26–29 октября, 2015. С. 10–13.
4. Зубер И. Е. Синтез канонических преобразований подобия для нелинейных нестационарных динамических систем управления // Дифференциальные уравнения и процессы управления, 2003. № 4. С. 38–51.
5. Зубер И. Е. Канонические преобразования и стабилизация нелинейных дискретных систем управления // Вестник СПбГУ. Сер. 1, 2004. Вып. 1 (№ 1). С. 6–13.
6. Kabanov A. A. Full-state Linearization of Systems via Feedback Using Similarity Transformation // 2016 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON). Proceedings. National Research University Higher School of Economics. Russia, Moscow, May 12–14, 2016.
7. Guardabassi G. O. Approximate linearization via feedback: an overview / G. O. Guardabassi, S. M. Savaresi // Automatica. 2001. Vol. 37. P. 1–15.

8. Yamada K. Approximate feedback linearization for nonlinear systems and its application to the ACROBOT // Proceedings of the American Control Conference, Anchorage, AK, 2002. P. 1672–1677.

9. Кабанов А. А. Приближенная линеаризация обратной связью на основе сингулярно возмущенного подхода // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. № 8. С. 515–522.

10. Kabanov A. A. Composite Control for Nonlinear Singularly Perturbed Systems Based on Feedback Linearization Method // WSEAS Transactions on Systems. 2015. Vol. 14. P. 215–221.

11. Çimen T. State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey // Proceedings of the 17th World Congress the Inter-

national Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008. P. 3761–3775.

12. Brunovský P. A classification of linear controllable system // Kybernetika. 1970. Vol. 6. No. 2. P. 173–188.

13. Kang W. Approximate linearization of nonlinear control systems / W. Kang // Systems & Control Letters. 1994. Vol. 23. P. 43–52.

14. Tall I. A. Canonical Forms for Nonlinear Discrete Time Control Systems // Proc. of 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), Orlando, FL, USA, December 12–15, 2011. P. 1080–1085.

Feedback Linearization of Continuous and Discrete Multidimensional Systems

A. A. Kabanov, KabanovAleksey@gmail.com✉,
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Corresponding author: Kabanov Aleksei A., PhD,
Head of Department of Informatics and Control in Technical Systems,
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation,
e-mail: KabanovAleksey@gmail.com

Received on February 08, 2016

Accepted on February 21, 2016

The problem of feedback linearization (FL) of continuous and discrete nonlinear MIMO systems is considered. The idea of FL method consists in converting the original nonlinear system into a linear one by means of feedback. Then, the methods of control theory for linear systems are used for system design. A widespread approach to FL design is based on the method of normal form, that uses a nonsingular transformation of system state variables $z = T(x)$. In order to obtain a normal form of the nonlinear system in the neighbor of a some point, it is necessary to determine a special function — the system virtual output, for which a relative degree (in the case of single input) or a vector relative degree (in the case of multiple input) is determined. Applicability of the normal form method for FL is provided by the conditions of controllability and involutivity for the considered nonlinear system, which are not always true. Moreover, when developing a linearizing control law, the main difficulty lies in the transition from transformed variables z to state variables x of the original system. In this paper, we propose another approach, based on representing the original nonlinear system into a state-dependent coefficient form and applying the canonical similarity transformation $z = T(x)x$, that allow getting the system to canonical form, that considerably simplifies the FL problem. Such similarity transformation allow accomplishing linearization of system without determining of the virtual system output. Another advantage of the proposed method is that the technique of the transition from the transformed variables z to the state variables x of the original system is simpler. The results are illustrated by examples for continuous and discrete nonlinear systems.

Keywords: feedback linearization, multi-dimensional system, the canonical transformation

Acknowledgements: This work was supported by RFBR, project 15-08-06859.

For citation:

Kabanov A. A. Feedback Linearization of Continuous and Discrete Multidimensional Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 363–370.

DOI: 10.17587/mau.18.363-370

References

1. Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L. *Nelineinoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* (Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems), St. Petersburg, Nauka, 2000, 549 p. (in Russian).

2. Isidori A. *Nonlinear control systems*, London, Springer-Verlag, 1995, 293 p.

3. Kabanov A. A., Kramar V. A. *Linearizatsiya obratnoy svyaz'yu nelineynykh sistem na osnove kanonicheskogo preobrazovaniya podobiya* (Feedback linearization of nonlinear systems based on the canonical similarity transformation), *Materialy Vserossiyskoy konferentsii po problemam upravleniya v tekhnicheskikh sistemakh*, St. Petersburg, 2015, pp. 10–13 (in Russian).

4. Zuber I. E. *Sintez kanonicheskikh preobrazovaniy podobiya dlya nelineynykh nestatsionarnykh dinamicheskikh sistem upravleniya* (Canonical transformations synthesis for nonlinear time variable dynamic control systems), *Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya*, 2003, № 4, pp. 38–51 (in Russian).

5. Zuber I. E. *Kanonicheskie preobrazovaniya i stabilizatsiya nelineynykh diskretnykh sistem upravleniya* (The canonical transfor-

mations and stabilization of nonlinear discrete control systems), *Vestnik SPbGU*. Ser. 1, 2004, vol. 1, pp. 6–13 (in Russian).

6. Kabanov A. A. Full-state Linearization of Systems via Feedback Using Similarity Transformation, 2016 *International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON)*. Proceedings. National Research University Higher School of Economics, Moscow, 2016.

7. Guardabassi G. O., Savaresi S. M. Approximate linearization via feedback: an overview, *Automatica*, 2001, vol. 37, pp. 1–15.

8. Yamada K. Approximate feedback linearization for nonlinear systems and its application to the ACROBOT, *Proceedings of the American Control Conference*, Anchorage, AK, 2002, pp. 1672–1677.

9. Kabanov A. A. Approximate feedback linearization based on the singular perturbations approach, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 8, pp. 515–522 (in Russian).

10. Kabanov A. A. Composite Control for Nonlinear Singularly Perturbed Systems Based on Feedback Linearization Method, *WSEAS Transactions on Systems*, 2015. vol. 14, pp. 215–221.

11. Çimen T. State-Dependent Riccati Equation (SDRE) Control: A Survey, *Proceedings of the 17th World Congress the International Federation of Automatic Control Seoul*, Korea, July 6–11, 2008, pp. 3761–3775.

12. Brunovský P. A classification of linear controllable system, *Kybernetika*, 1970, vol. 6, no. 2, pp. 173–188.

13. Kang W. Approximate linearization of nonlinear control systems, *Systems & Control Letters*, 1994, vol. 23, pp. 43–52.

14. Tall I. A. Canonical Forms for Nonlinear Discrete Time Control Systems, *Proc. of 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, Orlando, FL, USA, December 12–15, 2011, pp. 1080–1085.

В. И. Воротников, д-р физ.-мат. наук, проф., vorot@ntiustu.ru,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург,

Ю. Г. Мартышенко, канд. физ.-мат. наук, доц., j-mart@mail.ru,
Российский государственный университет нефти и газа, г. Москва

К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем

Рассматривается общий класс нелинейных дискретных систем, допускающих "частичное" (по части переменных) нулевое положение равновесия. В контексте метода функций Ляпунова получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости данного положения равновесия не по всем определяющим его переменным, а по их заданной части. Обсуждается вопрос унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных дискретных систем.

Ключевые слова: дискретная (конечно-разностная) система, частичная устойчивость, метод функций Ляпунова

Введение

Дискретные (конечно-разностные) системы широко применяются при моделировании дискретных во времени процессов. В сравнении с непрерывными системами они в ряде случаев могут более точно отражать динамику моделируемых процессов. Вместе с тем, дискретные системы являются дискретными приближениями или разностными схемами для непрерывных систем дифференциальных уравнений, а также составной частью гибридных (с импульсным эффектом) систем, эволюция которых происходит в непрерывно-дискретном времени. Теории и методам качественного исследования дискретных по времени систем посвящена обширная литература, в том числе ряд монографий [1–7].

В данной статье рассматривается нелинейная дискретная система конечно-разностных уравнений общего вида, для которой существует "частичное" (по некоторой части переменных) нулевое положение равновесия. Устойчивость и асимптотическая устойчивость данного положения равновесия, в свою очередь, анализируются также не по всем определяющим его переменным, а по их заданной части. При этом делается допущение о том, что начальные возмущения переменных, не определяющих "частичное" положение равновесия, могут быть большими (принадлежащими произвольному компактному множеству) по одной части и произвольными по оставшейся части этих переменных. Для случая нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью такие задачи были рассмотрены ранее в работах [8, 9].

Для решения поставленных задач частичной устойчивости применяется дискретный вариант метода функций Ляпунова в соответствующей модификации. Получены условия частичной устойчивости указанного вида, обобщающие ряд известных результатов по частичной устойчивости дискретных систем. Отмечается, что поскольку допущение о больших (в сравнении с допущением о произвольных) начальных возмущениях переменных, не определяющих "частичное" положение равновесия, приводит к существенно более мягким требованиям

к функциям Ляпунова, то предложенная комбинированная постановка задачи может оказаться приемлемым компромиссом между содержательным смыслом понятия частичной устойчивости и соответствующими требованиями к функциям Ляпунова. В качестве следствий получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных "полного" (по всем переменным) положения равновесия дискретных систем, также обобщающие известные результаты.

На основе предложенной в статье постановки задачи частичной устойчивости обсуждается вопрос унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных дискретных систем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное действительное конечно-мерное пространство векторов \mathbf{x} с нормой $|\mathbf{x}| = \max |x_i|$ (x_i — i -я компонента вектора \mathbf{x}). Введем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T$ (символ T обозначает транспонирование).

Пусть дана нелинейная система дискретных (конечно-разностных) уравнений $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k))$ [1–7], которую с учетом сделанного разбиения $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T$ представим в виде двух групп уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{Y}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)), \\ \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{Z}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)). \end{aligned} \quad (1.1)$$

В системе (1.1) $k = 0, 1, 2, \dots$ — дискретное время.

Если имеет место условие $\mathbf{Y}(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}(k)) \equiv \mathbf{0}$, то множество $M = \{\mathbf{x}(k): \mathbf{y}(k) = \mathbf{0}\}$ является "частичным" положением равновесия системы (1.1).

Имея в виду анализ устойчивости положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ не по всем определяющим его переменным, а только по их некоторой части, предположим также, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T)^T$. Будем считать, что вектор-функция $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}^T, \mathbf{Z}^T)^T$, определяющая правые части системы (1.1), непрерывна по \mathbf{x} для каждого значения $k = 0, 1, 2, \dots$ в области $G = \{|\mathbf{y}_1| < h, |\mathbf{y}_2| + |\mathbf{z}| < \infty\}$. Кроме того, считаем, что для вектор-функции \mathbf{X} равномерно для каждого значения $k = 0, 1, 2, \dots$ на каждом компактном множестве K из множества G выполнены условия

Коши—Липшица по \mathbf{x} . Тогда для каждой точки k_0, \mathbf{x}_0 из области G существует единственное решение $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1), а "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ является инвариантным множеством этой системы. Дополнительно предположим [10], что решения системы (1.1) (\mathbf{y}_2, \mathbf{z})-продолжимы; это значит что решения системы (1.1) определены для всех $k \geq k_0$, при которых $|\mathbf{y}_1(k, k_0, \mathbf{x}_0)| < h$.

Представим компоненту \mathbf{z} вектора \mathbf{x} в виде $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T)$ и обозначим D_δ область значений \mathbf{x}_0 таких, что $|\mathbf{y}_0| < \delta, |\mathbf{z}_{10}| \leq L, |\mathbf{z}_{20}| < \infty$; область D_Δ получается заменой δ на Δ .

Определения. "Частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} :

1) \mathbf{y}_1 -устойчиво (устойчиво по отношению к \mathbf{y}_1), если для любых $\varepsilon > 0, k_0 \geq 0$ и для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, k_0, L) > 0$ такое, что неравенство $|\mathbf{y}_1(k, k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ имеет место для всех $k \geq k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$;

2) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво, если $\delta = \delta(\varepsilon, L)$;

3) равномерно асимптотически \mathbf{y}_1 -устойчиво, если оно равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво и существует $\Delta(L) > 0$ такое, что для произвольного решения $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1), для которого $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$, предельное соотношение $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| = 0, k \rightarrow \infty$ выполняется равномерно по k_0, \mathbf{x}_0 из области $k_0 \geq 0, \mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ (для любых чисел $\eta > 0, k_0 \geq 0$ и любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется целое число $T(L, \eta) > 0$ такое, что $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \eta$ при всех $k \geq k_0 + T(L, \eta), \mathbf{x}_0 \in D_\Delta$).

2. Условия частичной устойчивости

Будем рассматривать однозначные непрерывные по \mathbf{x} при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ скалярные функции $V = V(k, \mathbf{x}), V(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные в области G . Аналогом производных таких функций в силу системы (1.1) являются соответствующие приращения этих функций в силу системы (1.1), вычисляемые по формуле $\Delta V = V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k))) - V(k, \mathbf{x}(k))$.

Для нахождения условий частичной устойчивости также рассмотрим:

1) вспомогательные скалярные функции $V^*(k, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1), V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$ и вспомогательные вектор-функции $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x})$, непрерывные по \mathbf{x} при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ в области G ;

2) непрерывные монотонно возрастающие по $r > 0$ скалярные функции $a_i(r), a_i(0) = 0 (i = 1, 2, 3)$.

Теорема 1. Допустим, что для системы (1.1) наряду со скалярной V -функцией можно указать векторную функцию $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}), \boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ такую, что в области

$$k \geq 0, |\mathbf{y}_1| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})| < h_1 < h, |\mathbf{y}_2| + |\mathbf{z}| < \infty \quad (2.1)$$

выполняются условия

$$V(k, \mathbf{x}) \geq a_1(|\mathbf{y}_1| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})|), \quad (2.2)$$

$$\Delta V = V(k+1, \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k))) - V(k, \mathbf{x}(k)) \leq 0. \quad (2.3)$$

Тогда при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1):

1) \mathbf{y}_1 -устойчиво, если, кроме того,

$$V(k, \mathbf{x}) \leq V^*(k, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1), V^*(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0; \quad (2.4)$$

2) равномерно \mathbf{y}_1 -устойчиво, если

$$V(k, \mathbf{x}) \leq V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1), V^*(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0. \quad (2.5)$$

Доказательство. Для любых $\varepsilon > 0, k_0 \geq 0$ и для любого наперед заданного числа $L > 0$, в силу непрерывности по \mathbf{x} при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ функции V , условий $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ и (2.4), найдется $\delta(\varepsilon, k_0, L) > 0$ такое, что $V(k_0, \mathbf{x}_0) < a_1(\varepsilon)$ при $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$.

В результате, учитывая соотношения (2.2) и (2.3), для произвольного решения $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \in D_\delta$ системы (1.1) имеем неравенства

$$a_1(|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))|) \leq \leq V(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(k_0, \mathbf{x}_0) < a_1(\varepsilon).$$

Имея в виду свойства функции $a_1(r)$, получаем $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ для всех $k \geq k_0, \mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Первая часть теоремы доказана.

Если условие (2.5) имеет место, то для любых $\varepsilon > 0, k_0 \geq 0$ и для любого наперед заданного $L > 0$ найдется $\delta(\varepsilon, L) > 0$ такое, что $V(k_0, \mathbf{x}_0) < a_1(\varepsilon)$ при $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Дальнейшее доказательство аналогично. Теорема доказана.

Теорема 2. Допустим, что для системы (1.1) наряду со скалярной V -функцией можно указать векторные функции $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}), \boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$ и $\mathbf{w}(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ такие, что в области (2.1) наряду с условиями

$$a_1(|\mathbf{y}_1| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x})|) \leq V(k, \mathbf{x}) \leq a_2(|\mathbf{y}_1| + |\mathbf{w}(\mathbf{x})|), \quad (2.6)$$

$$\Delta V(k, \mathbf{x}) \leq -a_3(|\mathbf{y}_1(k)| + |\mathbf{w}(\mathbf{x}(k))|) \quad (2.7)$$

также выполнено условие (2.5).

Тогда "частичное" положение равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) равномерно асимптотически \mathbf{y}_1 -устойчиво при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} .

Доказательство. Равномерная \mathbf{y}_1 -устойчивость при больших значениях \mathbf{z}_{10} в целом по \mathbf{z}_{20} "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) следует из теоремы 1. Для заданного положительного числа h_1 выберем $\Delta(h_1, L) > 0$ такое, что из $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ следует неравенство $V(k_0, \mathbf{x}_0) < a_1(h_1)$ (это можно сделать на основании непрерывности V -функции по \mathbf{x} при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$, условия $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ и условия (2.5)). Как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что для произвольного решения $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ системы (1.1) имеют место соотношения $a_1(|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))|) \leq V(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(k_0, \mathbf{x}_0) < < a_1(h_1)$. Следовательно, $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < h_1$ для всех $k \geq k_0$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$.

Пусть $0 < \eta < \Delta$ и пусть $T(L, \eta) > 0$ есть первое целое число такое, что

$$T(L, \eta) \geq \frac{[2a_2(h_1) - a_1(\varepsilon)]}{a_3(a_2^{-1}(a_1(\eta)))}$$

Покажем, что $V(k_*, \mathbf{x}(k_*; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta)$ для некоторого $k_* \in (k_0, k_0 + T)$. Если, от противного, неравенство $a_1(\eta) \leq V(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq a_2(|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))|)$ имеет место при $k_* \in (k_0, k_0 + T)$, тогда $|\mathbf{y}_1(k_*; k_0, \mathbf{x}_0)| + |\boldsymbol{\mu}(k_*, \mathbf{x}(k_*; k_0, \mathbf{x}_0))| \geq a_2^{-1}(a_1(\eta))$.

В результате получаем противоречивые соотношения

$$a_1(\eta) \leq V(k_0 + T, \mathbf{x}(k_0 + T; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(k_0, \mathbf{x}_0),$$

$$-a_3(a_2^{-1}(a_1(\eta)))T < a(h_1) - a_3(a_2^{-1}(a_1(\eta)))T < a_1(\eta)$$

и, следовательно, неравенство $V(k_*, \mathbf{x}(k_*; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta)$ имеет место для некоторого $k_* \in (k_0, k_0 + T)$.

Имея в виду, что V -функция является невозрастающей вдоль произвольного решения $\mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$ системы (1.1), при всех $k \geq k_*$ имеем

$$a_1(|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)|) \leq V(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(k_*, \mathbf{x}(k_*; k_0, \mathbf{x}_0)) < a_1(\eta).$$

В результате неравенство $|\mathbf{y}_1(k; k_0, \mathbf{x}_0)| < \eta$ имеет место при всех $k \geq k_0 + T > k_*$, если $\mathbf{x}_0 \in D_\Delta$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Устойчивость и асимптотическая устойчивость по всем переменным "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) рассмотрены в работе [6] соответственно в случае $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ и в случае $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$ при условии $|\mathbf{y}_0| < \delta$, где δ может зависеть не только от ε , k_0 , но и от \mathbf{z}_0 (это условие эквивалентно условиям $|\mathbf{y}_0| < \delta$, $|\mathbf{z}_0| \leq L$, где δ зависит не только от ε , k_0 , но и от L). Поскольку при этом условия (2.4) и (2.5) слабее соответствующего условия $V(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0$ в работе [6], то предложенная комбинированная постановка задачи может оказаться приемлемым компромиссом между содержательным смыслом понятия частичной устойчивости и соответствующими требованиями к функциям Ляпунова. Устойчивость по части переменных "частичного" положения равновесия дискретной системы (1.1) в литературе, по-видимому, не рассматривалась.

2. Вспомогательная V -функция и ее приращение в силу системы (1.1) в сформулированных теоремах являются, вообще говоря, знакопеременными функциями в области (см. по этому поводу также работу [10])

$$k \geq 0, |\mathbf{y}_1| < h_1 < h, |\mathbf{y}_2| + |\mathbf{z}| < \infty. \quad (2.8)$$

3. В рамках предложенного подхода существенно нелинейные V -функции могут быть построены как квадратичные формы $V(k, \mathbf{x}) \equiv V^*(k, \mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}))$ переменных $\mathbf{y}_1, \boldsymbol{\mu}$, знакоопределенные по всем переменным.

4. Задача устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия также рассмотрена и для нелинейных функционально-дифференциальных систем с последействием [11].

Пример. Пусть система (1.1) состоит из уравнений

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= 1/2 y_1(k) + y_2(k) z_1(k), \\ y_2(k+1) &= [1/2 - y_1(k) y_2(k) z_1(k)] z_1(k), \\ z_1(k+1) &= [1 + 2 y_1(k) y_2(k) z_1(k)] y_2(k), \\ z_2(k+1) &= e^k y_1(k) z_2(k). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Наряду с V -функцией $V(\mathbf{x}) = y_1^2 + 2 y_2^2 z_1^2$ также рассмотрим две вспомогательные функции $\mu_1 = w_1 = y_2 z_1$ такие, что для V -функции выполняются условия (2.5) и (2.6). Заметим, что будучи нелинейной по y_1, y_2, z_1 , в то же время V -функция является квадратичной формой переменных y_1, μ_1 .

В области (2.1) приращение ΔV данной V -функции в силу системы (2.9) оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta V &= [1/2 y_1(k) + y_2(k) z_1(k)]^2 + \\ &+ 2 y_2^2(k) z_1^2(k) [1/2 - y_1(k) y_2(k) z_1(k)]^2 [1 + \\ &+ 2 y_1(k) y_2(k) z_1(k)]^2 - y_1^2(k) - 2 y_2^2(k) z_1^2(k) = \\ &= 1/4 y_1^2(k) + y_1(k) y_2(k) z_1(k) + y_2^2(k) z_1^2(k) + \\ &+ 1/2 y_2^2(k) z_1^2(k) - 4 y_1^2(k) y_2^4(k) z_1^4(k) + \\ &+ 8 y_1^4(k) y_2^6(k) z_1^6(k) - y_1^2(k) - 2 y_2^2(k) z_1^2(k) = \\ &= -3/4 y_1^2(k) + y_1(k) y_2(k) z_1(k) - 1/2 y_2^2(k) z_1^2(k) - \\ &- 4 y_1^2(k) y_2^4(k) z_1^4(k) + 8 y_1^4(k) y_2^6(k) z_1^6(k) = \\ &= -3/4 y_1^2(k) + y_1(k) \mu_1(k) - 1/2 \mu_1^2(k) - \\ &- 4 y_1^2(k) \mu_1^4(k) + 8 y_1^4(k) \mu_1^6(k) \leq -\gamma (y_1^2(k) + \mu_1^2(k)), \\ &\quad \gamma = \text{const} > 0, \end{aligned}$$

и в области (2.1) (но не в области (2.8)) выполняется условие (2.7).

На основании теоремы 2 "частичное" положение равновесия $y_1(k) = y_2(k) = 0$ системы (2.9) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво для больших значений z_{10} в целом по z_{20} .

Отметим, что в области (2.8) приращение выбранной V -функции в силу системы (2.9) является знакопеременной функцией.

3. Частичная устойчивость "полного" положения равновесия

Предположим, что система (1.1) имеет "полное" положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ (в этом случае система (1.1) может не иметь "частичного" положения равновесия $\mathbf{y}(k) = \mathbf{0}$).

Определения. Положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1.1) [5, 12]:

- 1) y_1 -устойчиво, если для любых $\varepsilon > 0$, $k_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, k_0) > 0$ такое, что неравенство $|\mathbf{y}_1(k, k_0, \mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ имеет место для всех $k \geq k_0$ и $|\mathbf{x}_0| < \delta$;
- 2) равномерно y_1 -устойчиво, если $\delta = \delta(\varepsilon)$;

3) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво, если оно равномерно y_1 -устойчиво и существует $\Delta > 0$ такое, что для произвольного решения $x(k; k_0, x_0)$ системы (1.1), для которого $|x_0| < \Delta$, предельное соотношение $|y_1(k; k_0, x_0)| = 0, k \rightarrow \infty$ выполняется равномерно по k_0, x_0 из области $k_0 \geq 0, |x_0| < \Delta$.

Из доказанных в разделе 2 теорем, в частности, следуют следующие результаты.

Следствие 1. *Предположим, что для системы (1.1) наряду со скалярной V -функцией можно найти векторную функцию $\mu(k, x), \mu(k, 0) \equiv 0$ такую, что в области (2.1) имеют место условия (2.2) и (2.3). Тогда положение равновесия $x(k) = 0$ системы (1.1) y_1 -устойчиво. Если, кроме того, $V(k, x) \leq V^*(x)$, то положение равновесия $x(k) = 0$ равномерно y_1 -устойчиво.*

Следствие 2. *Предположим, что для системы (1.1) наряду со скалярной V -функцией можно найти векторные функции $\mu(k, x), \mu(k, 0) \equiv 0$ и $w(x), w(0) = 0$ такие, что в области (2.1) имеют место условия (2.6) и (2.7). Тогда положение равновесия $x(k) = 0$ системы (1.1) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво.*

Замечания. 1. Сформулированные результаты являются обобщением соответствующих результатов, полученных в работах [1, 2, 5, 12, 13]. Для сравнения, устойчивость по отношению ко всем переменным положения равновесия $x(k) = 0$ рассмотрена в монографии [1]. Условия устойчивости по части переменных положения равновесия $x(k) = 0$ получены при предположениях $|x_0| < \delta$ [2, 5, 12] или $|y_0| < \delta, |z_0| \leq L$ [13], а также $\mu(k, x) \equiv 0, w(x) \equiv 0$ [2, 5, 12] или $\mu(k, x) \equiv 0$ [13]. Поэтому сформулированные результаты об устойчивости по части переменных положения равновесия $x(k) = 0$ являются более общими.

2. Вспомогательная V -функция и ее приращение в силу системы (1.1) в сформулированных следствиях являются, вообще говоря, знакопеременными функциями в области (2.8).

3. "Полное" положение равновесия $x(k) = 0$ системы (2.9) равномерно асимптотически y_1 -устойчиво на основании следствия 2.

4. К унификации исследований частичной устойчивости

Вводя обозначения $w_1 = k, r = k - k_0$, нестационарную систему (1.1) представим в виде стационарной дискретной системы

$$x(r+1) = X(w_1(r), x(r)), w_1(r+1) = w_1(r) + 1. (4.1)$$

Заметим, что решение $x(k; k_0, x_0), k \geq k_0$ нестационарной системы (1.1) эквивалентно определяется решением $x(r; 0, x_0), r \geq 0$ стационарной системы (4.1).

Если система (1.1) допускает положение равновесия $x(k) = 0$, то система (4.1) допускает "частичное" положение равновесия $x(r) = 0$. В результате как задача устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия, так и задача устойчивости "частичных" положений равновесия нестационар-

ной системы (1.1) сводятся к задаче устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия стационарной системы (4.1). А именно, задача y -устойчивости положения равновесия $x(k) = 0$ нестационарной системы (1.1) сводится к задаче y -устойчивости "частичного" положения равновесия $x(r) = 0$ стационарной системы (4.1), а задача устойчивости "частичного" положения равновесия $y(k) = 0$ нестационарной системы (1.1) сводится к задаче устойчивости "частичного" положения равновесия $y(r) = 0$ стационарной системы (4.1). Особенность такого сведения состоит в том, что в случае равномерной (или неравномерной) по k_0 частичной устойчивости исходной системы (1.1) постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (4.1) должны отвечать требованию "в целом по w_{10} " (или "при большом w_{10} "). Поскольку при этом постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (4.1) допускают как требование "в целом по z_0 ", так и требование "при большом z_0 ", то в результате приходим к необходимости анализа задач частичной устойчивости, рассмотренных в разделе 1. Кроме того, задача y_1 -устойчивости "частичного" положения равновесия $y(k) = 0$ нестационарной системы (1.1) также сводится к задаче y_1 -устойчивости "частичного" положения равновесия $y(r) = 0$ стационарной системы (4.1) в постановке, рассмотренной в разделе 1.

Указанные выводы свидетельствуют о принципиальном для теории частичной устойчивости дискретных систем характере рассмотренных в разделе 1 задач. Отметим, что ранее обсуждались вопросы: 1) унификации исследований в задачах устойчивости по всем переменным нестационарных дискретных систем и задачах частичной устойчивости стационарных дискретных систем [6]; 2) унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью [9].

Заключение

В работе получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия нелинейной дискретной (конечно-разностной) системы в контексте метода функций Ляпунова. В качестве следствий получены условия устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных "полного" (по всем переменным) положения равновесия дискретных систем.

Дано сравнение полученных результатов с известными результатами по частичной устойчивости дискретных систем, а также с их аналогами для непрерывных систем. Рассмотрен пример, иллюстрирующий особенности предложенного подхода.

Также показано, что предложенная в статье постановка задач частичной устойчивости позволяет унифицировать исследования частичной устойчивости стационарных и нестационарных дискретных систем.

Список литературы

1. Halanay A., Wexler D. Qualitative Theory of Impulsive Systems. Bucharest: Ed. Acad. RPR, 1968.
2. Фурасов В. Д. Устойчивость и стабилизация дискретных процессов. М.: Наука, 1982.
3. Agarwal R. P. Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications. N. Y.: Marcel Dekker, 2000.
4. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations. N. Y.: Springer-Verlag, 2005.
5. Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость движений дискретных динамических систем. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2007.
6. Haddad W. M., Chellaboina V. Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach, Princeton: Princeton University Press, 2008.
7. Зуев А. Л., Игнатъев А. О., Ковалев А. М. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. Киев: Наукова Думка, 2013.
8. Воротников В. И. Об устойчивости и устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия нели-

нейных динамических систем // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 3. С. 332—337.

9. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51, Вып. 5. С. 23—31.

10. Воротников В. И. Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3—59.

11. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. Об устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия систем с последствием // Математические заметки. 2014. Т. 96, Вып. 4. С. 496—503.

12. Pachpatte B. G. Partial stability of solutions of difference equations // Proc. Nat. Acad. Sci., India, 1973. V. A43. P. 235—238.

13. Ramirez-Llanos E., Martinez S. Distributed and robust resource allocation algorithms for multi-agent systems via discrete-time iterations // Proc. IEEE Conf. Decision and Control. 2015. P. 1390—1395.

To Problem of Partial Stability of Nonlinear Discrete-Time Systems

V. I. Vorotnikov, vorot@ntiustu.ru✉,

Ural federal university, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,

Yu. G. Martyshenko, j-mart@mail.ru,

Russian state university of oil and gas, Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: Vorotnikov Vladimir I., D. Sc. (Phys. & Math.), Professor, Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation, e-mail: vorot@ntiustu.ru

Received on December 19, 2016

Accepted on January 17, 2017

It is can identify three main classes of problems broadly characterizing partial stability of a dynamical systems, viz., (1) stability with respect to a part of the variables of the zero equilibrium position (Lyapunov-Rumyantsev partial stability problem), (2) stability of the "partial" zero equilibrium position, and (3) stability with respect to a part of the variables of the "partial" zero equilibrium position. In the problem of stability with respect to a part of the variables of the zero equilibrium position of systems of ordinary differential equations with continuous right-side assumes the domain of initial perturbations to be a sufficiently small neighborhood of the zero equilibrium position. Along with this statement, the case then initial perturbations can be large with respect to one part of non-controlled variables and arbitrary with respect to their other part is also considered. On the other hand, for stability problem of "partial" zero equilibrium positions of systems of ordinary differential equations also naturally assume that initial perturbations of variables that do not define the given equilibrium position can be large with respect to one part of the variables and arbitrary with respect to their other part. Contrary the assumptions that initial perturbations of this variables are either only arbitrary or only large the combined assumption made it possible an admissible trade-off between the meaning sense for notion of stability and the respective requirements on the Lyapunov functions. The article studies the problem of partial stability for nonlinear discrete-time systems: stability with respect to a part of the variables of "partial" equilibrium position. Initial perturbations of variables that do not define the given equilibrium position can be large (belonging to an arbitrary compact set) with respect to one part of the variables and arbitrary with respect to their other part. A conditions of stability of this type are obtained in the context of a discrete analog of the Lyapunov functions method, which generalize a number of existing results. Example is given. The problem of unification of process of studying partial stability problems of stationary and non-stationary nonlinear discrete-time systems is also discussed.

Keywords: discrete-time (difference) systems, partial stability, Lyapunov functions

For citation:

Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. To Problem of Partial Stability of Nonlinear Discrete-Time Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 371—375.

DOI: 10.17587/mau.18.371-375.

References

1. Halanay A., Wexler D. Qualitative Theory of Impulsive Systems. Bucharest, Ed. Acad. RPR, 1968.
2. Furasov V. D. *Ustoichivost i stabilizatsiya diskretnykh protsessov* (Stability and Stabilization of Discrete Processes), Moscow, Nauka, 1982 (in Russian).
3. Agarwal R. P. Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications, 2 ed., N. Y., Marcel Dekker, 2000.
4. Elaydi S. An Introduction to Difference Equations, 3 ed., N. Y., Springer-Verlag, 2005.
5. Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. *Ustoichivost dvizhenii diskretnykh dinamicheskikh sistem* (Stability of Motion of Discrete Dynamical Systems), Saint-Petersburg, Saint-Petersburg Univ. Press, 2007 (in Russian).

6. Haddad W. M., Chellaboina V. Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach, Princeton, Princeton University Press, 2008.

7. Zuyev A. L., Ignatyev A. O., Kovalev A. M. *Ustoichivost i stabilizatsiya nelineynykh sistem* (Stability and Stabilization of Nonlinear Systems), Kiev, Naukova dumka, 2013 (in Russian).

8. Vorotnikov V. I. Partial-equilibrium position of nonlinear dynamical systems: Their stability and stability with respect to some of variables, *Doklady Physics*, 2003, vol. 48, no. 3, pp. 151—155.

9. Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. On the partial stability of nonlinear dynamical systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2010, vol. 49, no. 5, pp. 702—709.

10. Vorotnikov V. I. Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects, *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 4, pp. 511—561.

11. Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. Stability in a part of variables of "partial" equilibria of systems with aftereffect, *Mathematical Notes*. 2014, vol. 96, no. 3, pp. 477—483.

12. Pachpatte B. G. Partial stability of solutions of difference equations, *Proc. Nat. Acad. Sci., India*, 1973, vol. A43, pp. 235—238.

13. Ramirez-Llanos E., Martinez S. Distributed and robust resource allocation algorithms for multi-agent systems via discrete-time iterations, *Proc. IEEE Conf. Decision and Control.*, 2015, pp. 1390—1395.

В. И. Ловчаков, д-р техн. наук, проф., lowi50@mail.ru,
Тулский государственный университет

Необходимые условия максимального быстродействия линейных динамических систем

Для линейных непрерывных объектов высокого порядка рассматривается задача синтеза при учете имеющихся ограничений на управление и перерегулирование оптимального регулятора с минимальным временем регулирования, понимаемым в смысле классической теории автоматического управления. В форме теоремы сформулированы необходимые условия максимального быстродействия линейных систем, определяющие распределение полюсов оптимальной замкнутой системы управления.

Ключевые слова: линейный одномерный объект, критерий быстродействия, перерегулирование, полюса оптимальной системы

Введение

Основным показателем качества любой системы автоматического управления техническим объектом является ее быстродействие. Для многих же технологических процессов, производственных агрегатов желательно, чтобы системы управления, входящие в их состав, отвечали критерию оптимальности по быстродействию, который непосредственно определяет их эффективность функционирования, производительность. Однако строгое решение задач оптимального управления по критерию быстродействия в форме обратной связи представляет серьезную теоретическую проблему даже для линейных объектов относительно невысокого порядка ($n = 3, 4, 5$). Действительно, задача быстродействия полностью решена для объектов второго порядка методом фазовой плоскости [1, 2]. Для объектов третьего порядка быстродействующее управление точно (аналитически) найдено только в отдельных частных случаях [1]. Соответственно, для объектов четвертого и более высоких порядков аналитические решения задачи быстродействия практически неизвестны [3]. С другой, прикладной точки зрения реализация строго оптимальных по быстродействию релейных алгоритмов управления, отличающихся математической сложностью, серьезно затруднена и соответственно требует многократно больших технических и экономических затрат в сравнении с линейными алгоритмами управления. При этом отметим, что применение строго оптимальных релейных алгоритмов в условиях действия интенсивных случайных возмущений является и нецелесообразным по причине увеличения ими среднеквадратичной ошибки регулирования системы по сравнению с теми же линейными законами управления [4]. Необходимо также подчеркнуть, что более 90 % прикладных задач управления техническими объектами решаются с использованием линейных законов обратной связи, например, стандартных П, ПИ и ПИД регуляторов [5].

В связи с указанными причинами в данной работе рассматривается задача синтеза линейной системы управления с минимальным временем переходных процессов, понимаемым в смысле клас-

сической теории систем автоматического управления. Данная известная задача управления согласно анализу работ [11–14] для многих объектов решается приближенными способами, а для некоторых объектов, описываемых передаточными функциями с полюсами и нулями неустойчивого характера, является нерешенной. Ниже предлагается решение данной задачи в ее новой постановке, учитывающей ограничение на перерегулирование синтезируемой системы управления.

1. Постановка задачи управления

Рассмотрим одномерные объекты с постоянными параметрами, динамика которых адекватно описывается передаточной функцией (ПФ)

$$W(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + b_2 p^{m-2} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n},$$

$$m \leq n - 1, \quad (1)$$

общего вида, а их сигнал управления подчиняется ограничению $|u(t)| \leq u_{\max}$.

Для данных объектов сформулируем задачу максимального быстродействия аналогично задаче управления, решаемой в работе [14]: *требуется найти передаточную функцию регулятора, переводящего объект (1) из начального нулевого состояния в конечное, определяемое заданием x_z , с минимальным значением времени переходных процессов системы $t_{\text{пн}}$ и заданным значением перерегулирования*

$$\sigma \leq \sigma^*. \quad (2)$$

Напомним, что временем переходных процессов линейной системы автоматического управления (САУ) называют наименьшее время, по истечении которого отклонение регулируемой выходной переменной от установившегося значения не превышает некоторой заданной величины Δ [13]. В дальнейшем для конкретности принимается значение $\Delta = e^{-\pi} \cdot 100 \% = 4,321 \%$.

Подчеркнем, что в отличие от классической задачи оптимального быстродействия, решением которой является релейный алгоритм управления,

сформулированная задача называется задачей максимального быстродействия линейной системы. Она близка к задаче, исследуемой в работе [14], и отличается от последней только учетом ограничения (2). Необходимо подчеркнуть, что перерегулирование σ^* является важнейшим показателем качества проектируемой САУ, который, с одной стороны, характеризует запас устойчивости системы, а с другой, важное технологическое ограничение, обеспечиваемое системой. Например, для определенных электротермических систем перерегулирование вообще исключается в целях обеспечения сохранности нагревательных элементов и продления срока их эксплуатации. Поэтому значение σ^* для проектируемой системы, как правило, оговаривается. В данной работе, имеющей теоретический характер, для определенности принимается $\sigma^* = \Delta = 4,321\%$.

В работе [14] быстродействующий регулятор отыскивается в форме передаточной функции определенной структуры с использованием метода синтеза по желаемой передаточной функции, определяемой, в свою очередь, в форме нормированной ПФ или передаточной функции в форме Вышнеградского. Как известно, произвольная ПФ (1) может быть преобразована в нормированную заменой переменной p новой переменной $q = \alpha p$, $\alpha = \sqrt[n]{a_0/a_n}$:

$$\bar{W}(q) = \frac{\bar{b}_0 q^m + \bar{b}_1 q^{m-1} + \bar{b}_2 q^{m-2} + \dots + \bar{b}_m}{q^n + \bar{a}_1 q^{n-1} + \bar{a}_2 q^{n-2} + \dots + \bar{a}_{n-1} q + 1}, \quad (3)$$

где

$$\bar{b}_i = \frac{b_i}{a_n \alpha^{m-i}}, \quad \bar{a}_k = \frac{a_k}{a_n \alpha^{m-k}},$$

$$i = 0, 1, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Замена $p = q/\alpha$ переменной преобразования Лапласа равносильна замене $t = \alpha t$ для переменной оригинала и умножения изображения на α . Так как умножение переходной функции на константу не влияет на время регулирования, то время регулирования исходной системы $t_{пп}$ и время регулирования $\tau_{пп}$ для системы с нормированной передаточной функцией связано соотношением $t_{пп} = \alpha \tau_{пп}$. Другие прямые показатели качества, в том числе перерегулирование, для систем управления с исходной и нормированной передаточными функциями совпадают.

Вслед за работами [11, 12] в статье [14] в качестве желаемой (оптимальной) передаточной функции используется нормированная функция вида $W_H(q) = 1/N(q)$, причем характеристический полином $N(q)$ имеет комплексные корни с одинаковыми вещественными частями η и мнимыми частями, образующими арифметическую прогрессию с разностью и первым членом, равным γ . В работе [11] показано, что существует минимальное значение

$\mu = \gamma/\eta$, при котором время регулирования системы минимально. Ниже, в соответствии с этой работой, приводятся характеристические полиномы для трех значений степеней, начиная с $n = 2$, при оптимальных значениях μ :

$$n = 2: N_2(q) = q^2 + 1,38q + 1;$$

$$n = 3: N_3(q) = q^3 + 2,05q^2 + 2,3q + 1; \quad (4)$$

$$n = 4: N_4(q) = q^4 + 2,6q^3 + 3,8q^2 + 2,8q + 1.$$

Далее автор работы [14], зная описание объекта (1) и желаемую передаточную функцию замкнутой системы $W_H(q) = 1/N(q)$ с полиномами (4), известным методом синтеза определяет оптимальную ПФ искомого регулятора. Рассмотренное решение задачи быстродействия имеет следующие недостатки:

1) как будет показано далее, полиномы (4), степень которых выше двух, не обеспечивают максимального быстродействия САУ;

2) предложенное решение не учитывает ограничение на перерегулирование синтезируемой системы, которое является основным показателем качества для подавляющего числа систем управления и оказывает существенное влияние на длительность ее переходных процессов;

3) используемый метод синтеза в силу его особенностей применим не ко всем объектам с передаточными функциями (1). (Этот недостаток лучше исключить — в данной работе он не устраняется.)

Ниже предлагается подход к синтезу линейных систем управления с максимальным быстродействием, практически свободный от указанных недостатков.

2. Необходимые условия максимального быстродействия

В основе предлагаемого подхода лежит использование условий быстродействия, сформулированных в следующей **теореме**: линейная динамическая система четного порядка с передаточной функцией вида $W(p) = K/A(p)$, в которой перерегулирование не должно превышать заданное значение σ^* , а сигнал управления — ограничения $|u(t)| \leq u_{\max}$, может иметь минимальное время переходных процессов, определяемое с использованием зоны $\Delta = \sigma^*$, если

1) ее характеристические числа (полюса) расположены на окружности

$$|p_1| = |p_2| = \dots = |p_n| = R, \quad (5)$$

радиус которой R выбирается из условия выполнения ограничения на сигнал управления;

2) выбранное расположение полюсов вдоль окружности обеспечивает системе перерегулирование, равное заданному значению

$$\sigma = \sigma^*. \quad (6)$$

Предварительно, перед доказательством теоремы, отметим, что распределение полюсов оптимальной системы управления нечетного порядка удовлетворяет условию (5) лишь приближенно. Это условие первоначально было сформулировано в форме гипотезы в работе [15], в которой отмечалась принадлежность окружности (5) полюсов фильтров Баттерворса.

Также необходимо подчеркнуть, что в теореме рассматривается частный, но важный для практики управления случай назначения величины $\sigma^* = \Delta$ перерегулирования системы, который определяет возможность ее применения к решению в линейном приближении актуальной, так называемой задачи быстрогодействия по нескольким (одной) фазовым координатам [16]. Она формулируется следующим образом: найти управление в форме обратной связи $u(X)$, переводящее объект (1) из начального состояния $X(0) = X_0$ в желаемую область

$$|x_1(T)| \leq \Delta_1; |x_2(T)| \leq \Delta_2; \dots; |x_k(T)| \leq \Delta_k; k < n,$$

($\Delta_i, i = 1, 2, \dots, k$, — положительные числа, характеризующие заданную точность регулирования системы по соответствующей фазовой координате, представляющей отклонение определенной переменной от заданного режима) за минимальное время T , причем при $t > T$ синтезируемая замкнутая система управления остается в указанной желаемой области.

Сформулированная задача быстрогодействия по нескольким координатам является обобщением классической задачи оптимального быстрогодействия: она трансформируется в последнюю при $k = n$ и $\varepsilon_i = 0; i = 1, 2, \dots, n$. Соответственно при $k = 1$ задача управления, называемая задачей быстрогодействия одной координаты, является математически наиболее простой из рассматриваемых, но в то же время имеющей большое инженерное значение, так как, например, при $\Delta_1 = 0,05$ указанное время T совпадает с определением времени переходного процесса системы в классической теории управления.

Доказательство условия (5). При установлении равенства (5) будем исходить из следующего факта классической теории автоматического управления: существует линейная замкнутая система n -го порядка с максимальным быстрым действием, которая является асимптотически устойчивой системой и соответственно, в общем случае, описывается передаточной функцией, имеющей некоторое число 2γ комплексных полюсов с отрицательной частью и $n - 2\gamma$ вещественных отрицательных полюсов:

$$W(p) = 1 / \prod_{i=1}^{n-2\gamma} (T_i p + 1) \prod_{j=1}^{\gamma} (T_j^2 p^2 + 2\zeta_j T_j p + 1). \quad (7)$$

Отметим, что передаточная функция (7) соответствует системе, представляющей последовательное соединение определенного числа апериодических и колебательных звеньев, характеризую-

щихся постоянными времени T_i и коэффициентами демпфирования ζ_j , причем коэффициент усиления системы условно принимается равным единице (он не влияет на время ее переходных процессов). Подчеркнем, что в данной работе рассматривается ограниченный класс быстродействующих систем, описываемый ПФ, числитель которых является константой. Аналогичный класс систем управления исследовался и в работе [14].

При решении сформулированной задачи максимального быстрогодействия системы (7) воспользуемся преобразованием (3) и в дальнейшем данную задачу будем рассматривать применительно к системе с ПФ

$$W(q) = 1 / \prod_{i=1}^{n-2\gamma} (\bar{T}_i q + 1) \prod_{j=1}^{\gamma} (\bar{T}_j^2 q^2 + 2\zeta_j \bar{T}_j q + 1), \quad (8)$$

в которой безразмерные (относительные) постоянные времена связаны соотношением

$$\prod_{i=1}^{n-2\gamma} \bar{T}_i \prod_{j=1}^{\gamma} \bar{T}_j^2 = 1. \quad (9)$$

Подчеркнем, что преобразование (3), осуществляющее переход к использованию относительного времени, не изменяет коэффициенты демпфирования ζ_j системы и, соответственно, не изменяет характер (форму) ее переходных процессов, а изменяет только масштаб изображения переходных процессов во времени.

При решении сформулированной задачи максимального быстрогодействия воспользуемся также физически ясным фактом, вытекающим из основ теории автоматического управления, что время переходных процессов системы (8) при фиксированных значениях ее параметров ζ_j (при фиксированном характере переходных процессов) является возрастающей функцией $t_{пп} = f(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{n-\gamma})$ при увеличении значений ее аргументов — постоянных времени \bar{T}_i , т. е. она имеет положительные частные производные по указанным аргументам.

Предположим, что некоторым образом удалось установить значения коэффициентов демпфирования ζ_j , соответствующие системе максимального быстрогодействия с указанными ограничениями на перерегулирование и сигнал управления. При данных фиксированных значениях параметров ζ_j рассмотрим задачу оптимизации (минимизации) времени переходных процессов системы (8) за счет выбора ее постоянных времени $\bar{T}_i, i = 1, 2, \dots, n - \gamma$. Для оптимизации времени переходных процессов рассматриваемой системы в соответствии с возрастающим характером функции $t_{пп} = f(\bar{T}_1, \bar{T}_2, \dots, \bar{T}_{n-\gamma})$ необходимо параметры $\bar{T}_i, i = 1, 2, \dots, n - \gamma$, уменьшать, причем согласно ограничению (9) уменьшение целесообразно осуществлять до значений $\bar{T}_i = 1$.

Дальнейшее же уменьшение $\bar{T}_i < 1$ приведет к увеличению некоторых других постоянных времени $\bar{T}_j > 1$ и, соответственно, к увеличению времени $t_{пп}$ при выполнении следующего важного условия: все постоянные времени \bar{T}_i имеют одинаковую степень влияния на время переходных процессов системы.

Таким образом, при указанном условии приходим к выводу, что нормированная система (8) может иметь минимальное время переходных процессов, если ее постоянные времени

$$\bar{T}_1 = \bar{T}_2 = \dots = \bar{T}_{n-\gamma} = 1, \quad (10)$$

а полюса ее передаточной функции

$$W(q) = 1 / \prod_{i=1}^{n-2\gamma} (q+1) \prod_{j=1}^{\gamma} (q^2 + 2\zeta_j q + 1) \quad (11)$$

соответственно расположены на окружности единичного радиуса. В этом случае исходная (ненормированная) система (7) с учетом соотношения $|p_i| = 1/T_i$ может иметь максимальное быстродействие, если ее полюсы удовлетворяют условию (5) теоремы.

Если же степень влияния различных T_i на время $t_{пп}$ неодинакова, то для минимизации $t_{пп}$ целесообразно уменьшить значения T_i с большей степенью влияния, пожертвовав некоторым увеличением T_i с малой степенью влияния. В результате вектор значений $(T_1, T_2, \dots, T_{n-\gamma})$, доставляющий минимум $t_{пп}$, в этом случае не будет единичным: часть T_i с большой степенью влияния на $t_{пп}$ будет меньше 1, другая — больше 1, но их среднее значение может быть относительно близко к единице.

Дальнейший анализ показал, что постоянные времени аperiodического и колебательного звеньев по-разному влияют на длительность переходных процессов системы. Этот вывод непосредственно следует из физики движения указанных звеньев, а математически выражается в том, что движение аperiodического звена описывается экспоненциальной функцией, а колебательного — принципиально иной функцией: произведением экспоненты на гармонические функции. В то же время нет никаких оснований считать, что влияние на длительность переходных процессов системы однотипных звеньев (только аperiodических или только колебательных) различно. Отталкиваясь от этого вывода, при четном значении n (условие теоремы) передаточную функцию быстродействующей системы представим последовательным соединением однотипных колебательных звеньев, постоянные времени которых в одинаковой степени влияют на время ее переходных процессов и поэтому их значения $T_1 = T_2 = \dots = T_{n/2} \equiv T$ равны, а, соответственно, полюсы $|p_i| = 1/T_i$ системы с максимальным быстродействием расположатся на окру-

ности радиуса $R = 1/T$ — условие (5) теоремы доказано.

Подчеркнем, что быстродействующая система может содержать в своей структуре и аperiodические звенья с равными постоянными времени, которые получаются из указанных колебательных звеньев при $\zeta = 1$.

Необходимо отметить, что меньшее время переходных процессов $t_{пп}$ системы достигается за счет больших значений сигнала управления, и поэтому чем меньше $t_{пп}$ (соответственно, больше радиус $R = 1/T$ окружности размещения полюсов замкнутой системы), то тем больше максимальное по модулю значение управления $|u|$. Следовательно, при синтезе быстродействующего регулятора и последующем его моделировании в целях выбора значения радиуса R окружности размещения полюсов, обеспечивающего выполнение имеющегося ограничения $|u(t)| \leq u_{\max}$, применимо правило: чем больше R , тем больше $|u|$ и тем ближе приближаемся к границе указанного ограничения.

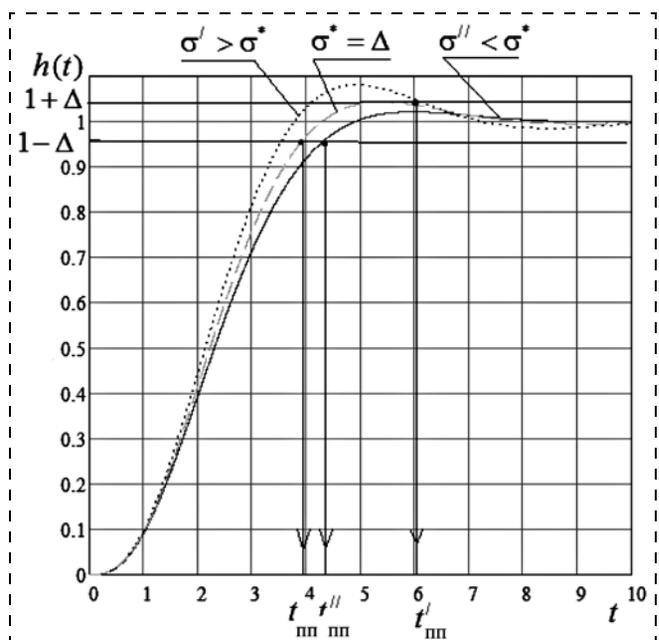
Доказательство условия (6). Рассмотрим систему управления с передаточной функцией

$$W(q) = 1 / \prod_{j=1}^N (q^2 + 2\zeta_j q + 1), \quad (12)$$

удовлетворяющей ранее доказанному соотношению (5). Установим, что для получения минимального времени переходных процессов системы (12) необходимо значения ее коэффициентов демпфирования ζ_j выбрать из условия (6).

Доказательство данного условия проведем методом от противного. Для этого предполагаем, что САУ с передаточной функцией (12) имеет $\sigma \neq \sigma^*$.

Начнем с рассмотрения случая, когда $\sigma > \sigma^*$, причем перерегулирование системы превышает ука-



Определение времени переходных процессов систем

занный уровень на малую величину. В данном случае с учетом значения $\Delta = \sigma^*$ время $t_{пп}$ САУ будет определяться по второму, а то и третьему моменту времени попадания в принятую зону Δ , что увеличивает значение времени переходного процесса системы — это наглядно видно из графиков, представленных на рисунке, показывающих типовые переходные характеристики звена (12) при относительно небольших изменениях его коэффициентов демпфирования.

В анализируемом случае время $t_{пп}$ системы можно уменьшить за счет изменения параметров ее ПФ, сделав $\sigma = \Delta$ и, соответственно, перейдя к определению времени переходного процесса по первому моменту попадания в зону Δ (он здесь также будет и моментом вхождения — достижения зоны без ее покидания).

Теперь рассмотрим случай системы управления с перерегулированием $\sigma < \sigma^* = \Delta$ и установим, что это уменьшение перерегулирования тоже приведет к снижению быстродействия системы. Для этого воспользуемся известным алгоритмом определения перерегулирования системы: 1) из условия равенства нулю производной $\dot{h}(t_m) = 0$ находится момент времени t_m достижения переходной функцией системы максимального значения; 2) находится само максимальное значение $h_m = h(t_m)$ и рассчитывается перерегулирование системы $\sigma = (h_m - h_{уст}) \times 100\% / h_{уст}$, $h_{уст} = 1$.

Наряду с производной $\dot{h}(t_m)$ рассмотрим производную $\dot{h}(t_n)$ в точке $h_{уст} = 1$. Отметим, что наименьшее значение времени, определяемое из условия $h(t_n) = 1$, в теории управления называется временем нарастания системы и используется совместно с $t_{пп}$ для оценки быстродействия систем, имеющих апериодические и колебательные переходные процессы. Если гипотетически предположить, что в точке $h(t_n) = 1$ производная $\dot{h}(t_n)$ равнялась бы нулю, то очевидно, что рассматриваемая система имела бы переходные процессы без перерегулирования, причем их длительность совпадала бы с t_n . Но производная $\dot{h}(t_n) \neq 0$, и система движется далее к точке $h_m = h(t_m)$, $t_m > t_n$. Из данного физического смысла производной $\dot{h}(t_n)$ в точке $h(t_n) = 1$ и указанного алгоритма определения перерегулирования вытекает вывод: большее значение перерегулирования системы достигается за счет более высокой скорости $\dot{h}(t_n)$ и, соответственно, меньшего времени t_n , которое в первом приближении можно оценить значением $1/\dot{h}(t_n)$. Отсюда следует, что при уменьшении $\sigma < \sigma^* = \Delta$ система будет иметь большие значения t_n и $t_{пп}$.

Таким образом, анализ двух случаев ($\sigma > \sigma^* = \Delta$ и $\sigma < \sigma^* = \Delta$) показывает, что отклонение перерегулирования от значения $\sigma = \sigma^* = \Delta$ как в одну, так и в другую сторону приводит к увеличению длительности переходного процесса системы. Поэтому справедлив вывод: время переходного процесса линейной САУ структуры (12) минимально при таких параметрах системы ζ_j , которые обеспечивают выполнение

условия $\sigma = \sigma^*$. Так как минимум может быть локальным, то условие (6) имеет необходимый характер, что и указано в формулировке теоремы.

Необходимо подчеркнуть, что для некоторого класса систем условия теоремы являются не только необходимыми, но и достаточными условиями максимального быстродействия. К данному классу, например, относятся системы с переходными процессами монотонного характера, для которых $\sigma = 0$ и, соответственно, они имеют только действительные отрицательные полюсы. Для этих систем условие (5) и ограничение на управление однозначно определяют параметры K , T оптимальной передаточной функции

$$W(s) = K/(Ts + 1)^n,$$

причем порядок системы n может быть и нечетным. Данный результат был установлен ранее в работах [11, 14].

Для многих объектов условия (5), (6) однозначно определяют параметры передаточных функций (7) замкнутых оптимальных систем управления, зная которые, с использованием метода синтеза по желаемой передаточной функции, относительно легко осуществляется синтез регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие проектируемой системы. Данный метод подробно описан в работах [13, 14]. Так как условия теоремы непосредственно определяют распределение полюсов САУ максимального быстродействия, то для синтеза таких систем применим также метод модального управления [13]. Выбор метода синтеза определяется техническими условиями реализации регулятора. В частности, если измерению доступна только выходная координата объекта, а не полностью вектор состояния объекта, то предпочтителен метод синтеза по желаемой передаточной функции системы.

Моделирование синтезированных систем управления подтвердило необходимость выполнения условий (5) и (6) для получения в них минимального времени переходных процессов.

Заключение

В классе линейных систем управления высокого порядка, описываемых передаточными функциями, числитель которых представляет константу, поставлена и решена с учетом заданных ограничений на управление и перерегулирование задача синтеза регулятора с минимальным временем переходных процессов, понимаемым в смысле классической теории автоматического управления.

Основной этап предлагаемого подхода синтеза состоит в определении оптимальной передаточной функции проектируемой замкнутой системы, структура которой представляется последовательным соединением определенного числа апериодических и колебательных звеньев. Доказана теорема, устанавливающая, что для достижения минимального времени переходных процессов в системе уп-

равления четного порядка указанные звенья должны иметь одинаковое значение постоянных времени, которое выбирается из условия выполнения ограничения на управление. Соответственно коэффициенты демпфирования колебательных звеньев должны находиться из условия обеспечения заданного значения перерегулирования синтезируемой системы.

Теорема доказана для частного, но важного для практики управления случая назначения допустимого значения перерегулирования системы, равного величине зоны, по которой определяется время переходных процессов данной системы управления. Это предопределяет возможность применения теоремы к решению в линейном приближении так называемой задачи быстрогодействия по одной фазовой координате объекта, которая актуальна для инженерной практики.

После определения в соответствии с условиями теоремы оптимальной передаточной функции замкнутой системы управления синтез регулятора, обеспечивающего максимальное быстродействие проектируемой системе, рекомендуется проводить методом синтеза по желаемой передаточной функции или методом модального управления в зависимости от технических условий его реализации.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 302 с.
2. Атанс М., Фалб П. Л. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
3. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Книга 3. Часть II. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регули-

рования / Под ред. проф. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1969. 368 с.

4. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
5. Ключев А. С., Колесников А. А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
6. Колесников А. А., Гельфгат А. Г. Проектирование многокритериальных систем управления промышленными объектами. М.: Энергоатомиздат, 1993. 304 с.
7. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Гибридная схема решения задачи линейного быстрогодействия на основе формализма полиэдральной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 3—9.
8. Ловчаков В. И. Функции переключения оптимального по быстродействию регулятора для четырехкратного интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 3—5.
9. Абдулаев Н. Д., Петров Ю. П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 240 с.
10. Александров А. Г., Паленов М. В. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов // АиТ. 2014. № 2. С. 16—30.
11. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.: Гостехиздат, 1962.
12. Рубинчик А. М. Приближенный метод оценки качества регулирования в линейных системах // Устройства и элементы теории автоматики и телемеханики. М.: Машгиз, 1952.
13. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. / Под ред. К. А. Пупкова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. 736 с.
14. Ким Д. П. Синтез оптимальных по быстродействию непрерывных линейных регуляторов // АиТ. 2009. № 3. С. 5—16.
15. Ловчаков В. И. К решению задачи максимального быстродействия линейных систем // Системы управления электротехническими объектами. Вып. 7. Сб. научных трудов седьмой Всероссийской научно-практической конференции. Тула: Изд-во ТулГУ, 2015. С. 127—133.
16. Ловчаков В. И. К проблеме быстрогодействия систем управления по одной (нескольким) координатам // Системы управления электротехническими объектами. Тр. 3-й Всероссийской научно-практич. конф. Тула: Известия ТулГУ, 2005. С. 111—113.

Necessary Conditions of Time-Optimality of Linear Dynamical Systems

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru✉,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation

Corresponding author: Lovchakov Vladimir I., D. Sc., Full Professor,
Tula State University, department of electrical engineering and electrical equipment,
Tula, 300012, Russian Federation, e-mail: lovvi50@mail.ru

Received on November 16, 2016

Accepted on December 09, 2016

We formulate and solve the problem of regulator design with minimal transient time (in terms of classical control theory) under specified constraints on control and overregulation. The problem is solved in a class of linear high-order control systems described by a transfer function having a constant in the numerator. The main stage of the proposed design approach consists in the determination of optimal transfer function of closed-loop control system with the structure composed by the sequential connection of specific number of aperiodic and oscillatory links. We prove the theorem establishing that for even order control systems these links must have the same values of time constants to provide the minimum transient time, and time constants must be selected from the condition of satisfying the control constraints. Correspondingly, damping coefficients of oscillatory links must be determined from the condition of providing the specified overregulation value of designed system. The theorem is proved for the special, but important for control practice case of specifying the permissible system overregulation value being equal to the value of the zone, using which the transient time of this control system is determined. This predetermine the possibility of theorem application to the solution (in the linear approximation) of so-called problem of time-optimality for one phase

coordinate of an object, which is actual for engineering practice. Conditions of theorem are not only necessary, but also sufficient conditions of time-optimality for several subclasses of control systems. Systems with monotonic transient processes with prohibited overregulation having, correspondingly, only negative real poles are an example of such subclass. After determination of optimal transfer function of closed-loop control system subject to theorem conditions, it is recommended to perform regulator design providing the time-optimality by the synthesis method according to the desired transfer function or by the method of modal control depending on the technical conditions of regulator realization.

Keyword: linear one-dimensional object, time-optimality criterion, overregulation, poles of optimal system

For citation:

Lovchakov V. I. Necessary Conditions of Time-Optimality of Linear Dynamical Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 376–382.

DOI: 10.17587/mau.18.376-382

References

1. **Pontrjagin L. S., Boltjanskij V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** *Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov* (Mathematical theory of optimal processes), Moscow, Fizmatlit, 1961, 302 p. (in Russian).
2. **Atans M., Falb P. L.** Optimal'noe upravlenie, Moscow, Mashinostroenie, 1968. 764 p. (in Russian). (**Athans M., Falb P. L.** Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications. McGraw-Hill, Inc., New York, 1963).
3. **Solodovnikov V. V.** ed. *Tekhnicheskaja kibernetika. Teorija avtomaticheskogo upravlenija. Kniga 3. Chast' II. Teorija nestacionarnykh, nelinejnykh i samonastrajvajushhihsja sistem avtomaticheskogo regulirovanija* (Technical cybernetics. Theory of automatic control. Book 3. Part II. Theory of nonstationary, nonlinear, self-tuning systems of automatic control), Moscow, Mashinostroenie, 1969, 368 p. (in Russian).
4. **Ivanov V. A., Faldin N. V.** *Teorija optimal'nykh sistem avtomaticheskogo upravlenija* (Theory of optimal automatic control systems), Moscow, Nauka, 1981, 336 p. (in Russian).
5. **Kljuev A. S., Kolesnikov A. A.** Optimizacija avtomaticheskikh sistem upravlenija po bystrodejstvu (Time optimization of automatic control systems), Moscow, Jenergoizdat, 1982. 240 p. (in Russian).
6. **Kolesnikov A. A., Gel'fgat A. G.** *Proektirovanie mnogokriterial'nykh sistem upravlenija promyshlennymi ob'ektami* (Design of multi-objective control systems for industrial objects), Moscow, Jenergoatomizdat, 1993, 304 p. (in Russian).
7. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Gibridnaja shema reshenija zadachi linejnogo bystrodejstva na osnove formalizma poljedral'noj optimizacii* (Hybrid solution scheme for linear time optimization problem using polyhedral optimization formalism), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 7, pp. 3–9 (in Russian).

8. **Lovchakov V. I.** *Funkcii pereklyuchenija optimal'nogo po bystrodejstvu reguljatora dlja chetyrehkratnogo integratora* (Switching functions of time-optimal regulator for fourfold integrator), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 3–5 (in Russian).

9. **Abdulaev N. D., Petrov Ju. P.** *Teorija i metody proektirovanija optimal'nykh reguljatorov* (Theory and design methods of optimal regulators) / N. D. Abdulaev. L.: Jenergoatomizdat, 1985. 240 p. (in Russian).

10. **Aleksandrov A. G., Palenov M. V.** Sostojanie i perspektivy razvitiya adaptivnykh PID-reguljatorov, *AiT*, 2014, no. 2, pp. 16–30 (**Alexandrov A. G., Palenov M. V.** Autom Remote Control (2014) 75: 188. doi: 10.1134/S0005117914020027 (in Russian)).

11. **Krasovskij A. A., Pospelov G. S.** *Osnovy avtomatiki i tekhnicheskoi kibernetiki* (Fundamentals of automation and technical cybernetics), Moscow, Gostehizdat, 1962 (in Russian).

12. **Rubinichik A. M.** *Priblizhennyj metod ocenki kachestva regulirovanija v linejnykh sistemah*. In *Ustrojstva i jelementy teorii avtomatiki i telemechaniki* (Approximate method of estimation of control quality in linear systems. In Devices and elements of theory of automation and telemechanics), Moscow, Mashgiz, 1952 (in Russian).

13. **Pupkov K. A.** ed. *Metody klassicheskoi i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija* (Sintez reguljatorov i teorija optimizacii sistem avtomaticheskogo upravlenija), Moscow, Publishing house of MG TU, 2000736 p. (in Russian).

14. **Kim D. P.** Sintez optimal'nykh po bystrodejstvu nepreryvnykh linejnykh reguljatorov, *AiT*, 2009, no. 3, pp. 5–16 (**Kim D. P.** Autom Remote Control (2009) 70: 347. doi: 10.1134/S0005117909030023 (in Russian)).

15. **Lovchakov V. I.** *K resheniju zadachi maksimal'nogo bystrodejstva linejnykh sistem* (On the solution of time-optimal problem for linear systems), *Sistemy upravlenija jelektrotehnicheskimi ob'ektami*, iss. 7, *Sb. nauchnykh trudov sed'moj Vserossijskoj nauchno-prakticheskoi konferencii*, Tula, Publishing house of TulGU, 2015, pp. 127–133 (in Russian).

16. **Lovchakov V. I.** *K probleme bystrodejstva sistem upravlenija po odnoj (neskol'kim) koordinatam* (On the problem of time-optimality of control systems along the one (several) coordinates), *Sistemy upravlenija jelektrotehnicheskimi ob'ektami. Trudy 3-j Vserossijskoj nauchno-praktich. konf.*, Tula, *Izvestija TulGU*, 2005, pp. 111–113 (in Russian).



18–20 сентября 2017 г. в Севастополе на базе
Севастопольского государственного университета состоится

**3-я Всероссийская
научно-практическая конференция
с международным участием**

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ,
УПРАВЛЕНИЕ И МЕХАТРОНИКА
(ИСУМ — 2017)**



Тематика конференции

- ◆ Общие проблемы современной теории управления
- ◆ Теоретические и прикладные проблемы мехатронных и робототехнических систем
- ◆ Информационные технологии в управлении, автоматизации и мехатронике
- ◆ Системы управления вооружением и техникой военно-морского флота

Подробную информацию о конференции см. сайте:
<http://isum.sevsu-iuts.ru/>

В. И. Краснощеченко, канд. техн. наук, доц., kviip@yandex.ru,
Калужский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана

Разработка и исследование математической модели гибкого однозвенного манипулятора с использованием принципа наименьшего действия Гамильтона

Рассматривается аналитический подход к построению математической модели гибкого однозвенного манипулятора на основе принципа наименьшего действия Гамильтона. Получены необходимые уравнения как свободного, так и вынужденного движений манипулятора. Подробно описаны все процедуры вывода необходимых соотношений, включая условие ортогональности и системы уравнений для определения собственных форм и частот колебаний манипулятора. Полученная математическая модель учитывает только массу нагрузки, которая переносится схватом. Решение уравнения Эйлера—Бернулли методом разделения переменных позволило получить математическую модель гибкого манипулятора в пространстве состояний, которую удобно использовать для решения задач управления.

Ключевые слова: принцип наименьшего действия Гамильтона, гибкий манипулятор, математическая модель, уравнение Эйлера—Бернулли, метод разделения переменных

Введение и постановка задачи

В настоящее время в большинстве промышленных роботов-манипуляторов используются достаточно жесткие и тяжелые звенья, что позволяет пренебречь деформациями при рабочих операциях. Такой тип роботов имеет определенные недостатки: низкую скорость; высокое энергопотребление; низкое отношение полезная нагрузка/масса звена. Применение роботов с облегченными гибкими звеньями позволяет получить ряд преимуществ, а именно:

- увеличенную нагрузочную способность: более высокое отношение масса нагрузки/масса звена;
- увеличенную скорость перемещения;
- повышенную безопасность: увеличенная податливость и малый момент инерции звена снижают риски опасных травм;
- уменьшение потребления энергии: легкие звенья используют приводы меньшей мощности;
- увеличение рабочего пространства с использованием удлиненных звеньев;
- снижение стоимости.

Исследования гибких манипуляторов с применением соответствующих математических моделей ведутся уже давно и, тем не менее, остается ряд вопросов:

1) отсутствует (по крайней мере, для автора) прозрачность и полнота вывода окончательных уравнений;

2) до сих пор для одних и тех же исходных данных имеются различные математические модели, различающиеся по граничным условиям (особенно это касается заделки звена (балки) на ступице привода) и совпадающие только по описанию движе-

ния упругой балки уравнением Эйлера—Бернулли. Это можно проследить по работам [1—8].

В данной работе решаются следующие задачи:

- вывод на основе интегрального вариационного принципа Гамильтона уравнений как свободного, так и вынужденного движений упругой балки (гибкого звена) с нагрузкой на конце звена и формирование необходимых граничных условий;
- вывод необходимых уравнений для перехода от уравнения в частных производных к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, что позволит применять данную математическую модель для решения задач управления.

Забегая вперед, отметим, что полученная математическая модель совпадает только с моделью, представленной без вывода в монографии [7] в разделе "Robust Control of a Flexible-Link Manipulator".

Предварительные сведения

Схема манипулятора. Для вывода дифференциальных уравнений, описывающих динамику гибкого однозвенного манипулятора (ГОЗМ) с нагрузкой на конце звена, рассмотрим схематическое изображение движения ГОЗМ в горизонтальной плоскости (рис. 1), где

XOY — неподвижная система координат (СК);

xOy — локальная (подвижная) СК (ось Ox является касательной к деформируемому ГОЗМ в месте его крепления к приводу; является осью вращения абсолютно жесткого недеформируемого звена);

J_0 — момент инерции привода ГОЗМ [$\text{кг} \times \text{м}^2$];

m_L — (схват) масса точечной нагрузки (т. е. считаем ее момент инерции нулевым) [кг];

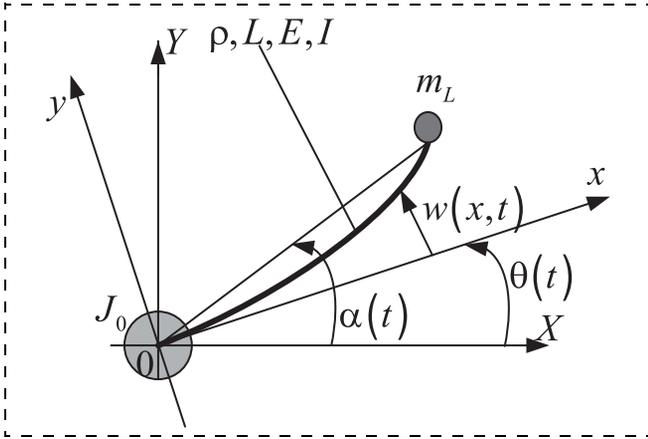


Рис. 1. Схематическое изображение движения ГОЗМ в горизонтальной плоскости

$\theta(t)$ — текущий угол поворота ГОЗМ как абсолютно жесткого тела [рад];

$\alpha(t)$ — текущий угол поворота нагрузки (схвата) [рад];

$w(x, t)$ — гибкое отклонение ГОЗМ от оси Ox в текущей точке x манипулятора $x \in [0, L]$, перпендикулярное к данной оси [м];

L — длина манипулятора [м];

ρ — погонная (линейная) массовая плотность ГОЗМ [кг/м];

I — момент инерции поперечного сечения звена манипулятора [м⁴];

E — модуль упругости Юнга для материала звена [Н/м²];

$EI \cong E \cdot I$ — изгибная жесткость звена манипулятора [Н×м²].

Примем следующие предположения:

- прямоугольное сечение звена манипулятора имеет высоту h , значительно превышающую ее ширину b , $h \gg b$ (рис. 2);
- вертикальные деформации при повороте ГОЗМ в горизонтальной плоскости отсутствуют (абсолютная вертикальная жесткость);
- длина звена манипулятора значительно превышает высоту его поперечного сечения, $L \gg h$.

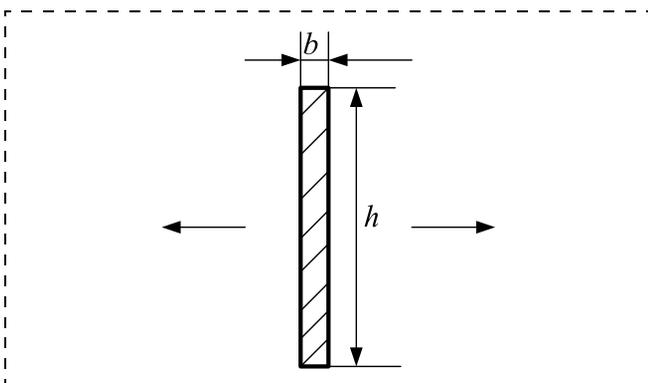


Рис. 2. Поперечное сечение звена манипулятора

Принцип наименьшего действия. Для получения дифференциальных уравнений, описывающих динамику ГОЗМ, воспользуемся интегральным вариационным принципом наименьшего действия Гамильтона [9]. Для этого необходимо определить кинетическую T и потенциальную U энергии и работу внешних (активных) сил. Введем интеграл действия [9–11]

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (L_0 + W) dt, \quad (1)$$

где L_0 — лагранжиан для свободных колебаний.

Принцип наименьшего действия Гамильтона гласит [9, 11]: если в моменты времени t_1 и t_2 механическая система занимает определенные положения, характеризуемые совокупностью обобщенных координат $q_i(t_1), q_i(t_2), i = 1, 2, \dots, n$, то между этими положениями система движется так, что интеграл действия имеет экстремальное значение (определяет истинное движение системы). На концах временного отрезка $[t_1, t_2]$ истинное движение не варьируется, т. е.

$$\delta q_i(t_1) = 0, \delta q_i(t_2) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Вариации обобщенных координат, удовлетворяющие условию (2), назовем допустимыми.

Для стационарных систем (связей) экстремум сводится к минимуму, т. е. вариация интеграла действия (1) равна нулю:

$$\delta S = 0. \quad (3)$$

Определение собственных частот и форм колебаний ГОЗМ

Вначале рассмотрим свободное движение системы (отсутствуют внешние активные силы $W = 0$) для определения собственных частот и форм колебаний звена манипулятора, рассматриваемого как упругая балка прямоугольного сечения с точечной массой на свободном конце и жестко закрепленной на другом конце. Имеем:

- кинетическая энергия свободного звена с нагрузкой

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{w}(x, t)^2 dx + \frac{1}{2} m_L \dot{w}(L, t)^2, \quad (4)$$

где точка сверху обозначает производную по времени;

- потенциальная энергия свободного звена

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (w'(x, t))^2 dx, \quad (5)$$

где штрих сверху обозначает частную производную по пространственной координате x . Сформируем

интеграл действия по Гамильтону для свободного движения ГОЗМ с нагрузкой:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{w}(x, t)^2 dx + \frac{1}{2} m_L \dot{w}(L, t)^2 - \frac{1}{2} \int_0^L EI(w''(x, t))^2 dx \right] dt. \quad (6)$$

Вариацию δS действия (функционала) S будем определять по Лагранжу [12–14], т. е. составим функцию

$$\begin{aligned} \chi(\alpha) &= S(q + \alpha \cdot \delta q) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} (w(x, t) + \alpha \cdot \delta w(x, t)) \right)^2 dx + \right. \\ &+ \frac{1}{2} m_L \left(\frac{\partial}{\partial t} (w(L, t) + \alpha \cdot \delta w(L, t)) \right)^2 - \\ &\left. - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} (w(x, t) + \alpha \cdot \delta w(x, t)) \right)^2 dx \right] dt, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{\partial}{\partial \alpha} \chi(\alpha) \Big|_{\alpha=0} &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \dot{w}(x, t) \delta \dot{w}(x, t) dx dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} m_L \dot{w}(L, t) \delta \dot{w}(L, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI w''(x, t) \delta w''(x, t) dx dt. \quad (7) \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых выражения (7) проинтегрируем по частям и учтем условия принципа наименьшего действия (2):

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \dot{w}(x, t) \delta \dot{w}(x, t) dx dt = \\ &= \int_0^L \rho \dot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \ddot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \ddot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx dt; \quad (8a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} m_L \dot{w}(L, t) \delta \dot{w}(L, t) dt = \\ &= m_L \dot{w}(L, t) \delta w(L, t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m_L \ddot{w}(L, t) \delta w(L, t) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} m_L \ddot{w}(L, t) \delta w(L, t) dt; \quad (8б) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EI w''(x, t) \delta w''(x, t) dx = \\ &= EI w''(x, t) \delta w'(x, t) \Big|_0^L - \int_0^L EI w''(x, t) \delta w'(x, t) dx = \\ &= EI w''(x, t) \delta w'(x, t) \Big|_0^L - EI w'''(x, t) \delta w(x, t) \Big|_0^L + \\ &+ \int_0^L EI w''''(x, t) \delta w(x, t) dx \Big] dt. \quad (8в) \end{aligned}$$

Комментарий к полученным выражениям. В формулах (8а), (8б) использованы условия (2). В формуле (8в) интегрирование по частям проводилось по пространственной переменной x , внешнее интегрирование — по переменной t . Из формул (8а), (8в) в силу произвольности вариаций $\delta w(x, t)$ под интегралом получаем (обратим внимание на знак минус перед общим интегралом в (8в)) уравнение Эйлера—Бернулли для свободных колебаний упругой балки

$$\delta w(x, t): \rho \ddot{w}(x, t) + EI w''''(x, t) = 0. \quad (9)$$

Остальные выражения в формулах (8б) и (8в), не связанные с условиями (2), определяют некоторые условия трансверсальности (т. е. граничные условия вариационной задачи [12–14]), а именно:

- наличие перерезывающей силы на правом конце от действия сил инерции нагрузки

$$\delta w(L, t): m_L \ddot{w}(L, t) - EI w'''(L, t) = 0; \quad (10)$$

- свободный правый конец (нет изгибающего момента, момент инерции нагрузки равен нулю)

$$\delta w'(L, t): w''(L, t) = 0; \quad (11)$$

- жесткая заделка на левом конце:

$$w(0, t) = 0, \quad (12)$$

$$w'(0, t) = 0. \quad (13)$$

Полученное уравнение в частных производных (9) с граничными условиями (10)—(13) используем для нахождения собственных частот и гибких мод изгибных колебаний. Для этого применим метод Фурье (метод разделения переменных) [15].

Метод Фурье. Решение будем искать в виде суммы бесконечного ряда

$$w(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x) q_i(t), \quad (14)$$

где $\phi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, — формы собственных колебаний ГОЗМ; $q_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, — обобщенные координаты, т. е. решение уравнения (9) определяется разложением по собственным функциям.

В методе разложения Фурье для удобства (на начальном этапе, без потери общности) используем в разложении (14) одно слагаемое, т. е. считаем

$$w(x, t) = \phi(x)q(t). \quad (15)$$

Подставляя выражение (15) в уравнение (9), получаем

$$\frac{EI}{\rho} \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}. \quad (16)$$

Равенство (16) для двух независимых переменных x, t должно выполняться для любых значений x, t . Это возможно, если приравнять (16) некоторой константе, например ω^2 . Тогда имеем

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0; \quad (17)$$

$$\phi''''(x) - \frac{\omega^2 \rho}{EI} \phi(x) = 0. \quad (18)$$

Обозначим $\beta^4 = \frac{\omega^2 \rho}{EI}$, подставим в формулу (18)

и решим полученное обыкновенное линейное стационарное дифференциальное уравнение. Характеристический полином $s^4 - \beta^4 = 0$ имеет корни $\{\beta, -\beta, j\beta, -j\beta\}$, которые определяют общее решение однородного уравнения (18):

$$\phi(x) = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) + C \operatorname{sh}(\beta x) + D \operatorname{ch}(\beta x). \quad (19)$$

Если теперь в соотношении (14) ограничиться конечным числом $\infty > n_f \geq 1$ форм собственных колебаний (гибких мод), то получаем

$$\phi_i(x) = A_i \sin(\beta_i x) + B_i \cos(\beta_i x) + C_i \operatorname{sh}(\beta_i x) + D_i \operatorname{ch}(\beta_i x), \quad i = 1, 2, \dots, n_f. \quad (20)$$

Для нахождения коэффициентов A_i, \dots, D_i и частот β_i воспользуемся граничными условиями (10)—(13) и условием ортогональности собственных форм колебаний.

Условие ортогональности должно обеспечить выполнение уравнения (17) для каждой обобщенной координаты, т. е.

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_f. \quad (21)$$

С точки зрения вариационного исчисления это значит, что коэффициенты при обобщенных координатах в уравнении (21) должны сохраняться при всех допустимых вариациях $\delta q_j(t), j = 1, 2, \dots, n_f$. Из соотношений (8а)—(8в), (11)—(13) с учетом разложения (14) имеем:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\rho \ddot{w}(x, t) + EI w''''(x, t)) \delta w(x, t) dx + m_L \ddot{w}(L, t) \delta w(L, t) - EI w''''(L, t) \delta w(L, t) dt =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L \left(\rho \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + EI \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i''''(x) q_i(t) \right) \times \right. \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{n_f} \phi_j(x) \delta q_j(t) dx + m_L \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(L) \ddot{q}_i(t) \times \\ &\quad \left. \times \sum_{j=1}^{n_f} \phi_j(L) \delta q_j(t) - EI \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i''''(L) q_i(t) \sum_{j=1}^{n_f} \phi_j(L) \delta q_j(t) \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\int_0^L \rho \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(x) \phi_j(x) dx + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_L \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(L) \phi_j(L) \right) \ddot{q}_i(t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^L EI \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i''''(x) \phi_j(x) dx - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - EI \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i''''(L) \phi_j(L) \right) q_i(t) \right] \delta q_j(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\int_0^L \rho \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(x) \phi_j(x) dx + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_L \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(L) \phi_j(L) \right) \ddot{q}_i(t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_0^L \rho \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(x) \phi_j(x) dx + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m_L \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(L) \phi_j(L) \right) \omega_i^2 q_i(t) \right] \delta q_j(t) dt, \quad (22) \end{aligned}$$

где при последнем переходе использованы соотношения (10), (17) и (18). Из выражения (22) следует, что равенство (21) при произвольных отдельных вариациях $\delta q_j(t)$ будет справедливо, если выполнены условия ортогональности

$$\begin{aligned} \delta q_j(t): \int_0^L \rho \phi_i(x) \phi_j(x) dx + m_L \phi_i(L) \phi_j(L) &= \delta_{ij}; \\ \delta_{ij} &= \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (23) \end{aligned}$$

Определение собственных частот и форм колебаний ГОЗМ. После получения необходимых соотношений перейдем к нахождению аналитических выражений для определения частот и форм колебаний свободного ГОЗМ. Подставляя разложение (14) в соотношения (10)—(13) с учетом представления (19) и $q_i(t) \neq 0$ почти для всех $t \in [t_1, t_2]$, а также проведя замену

$$\omega^2/EI = \beta^4/\rho, \quad (24)$$

приходим к следующим уравнениям для определения частот и форм (нижние индексы опустим, так как определяем общее уравнение, из которого находим необходимые решения):

$$\begin{aligned} \phi(0) &= B + D = 0; \\ \phi'(0) &= A\beta + C\beta = 0; \\ \phi''(L) &= -A\sin(\beta L)\beta^2 - B\cos(\beta L)\beta^2 + \\ &+ C\operatorname{sh}(\beta L)\beta^2 + D\operatorname{ch}(\beta L)\beta^2 = 0; \\ \phi'''(L) + \frac{\beta^4 m_L}{\rho} \phi(L) &= -A\cos(\beta L)\beta^3 + B\sin(\beta L)\beta^3 + \\ &+ C\operatorname{ch}(\beta L)\beta^3 + D\operatorname{sh}(\beta L)\beta^3 + \frac{m_L \beta^4}{\rho} (A\sin(\beta L) + \\ &+ B\cos(\beta L) + C\operatorname{sh}(\beta L) + D\operatorname{ch}(\beta L)) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Система линейных однородных уравнений (25) относительно неизвестных коэффициентов A, B, C, D будет иметь нетривиальное решение, если определитель матрицы уравнений (25) будет равен нулю. С учетом того, что $\beta \neq 0$ получаем следующее уравнение для нахождения частот $\beta_i, i = 1, 2, \dots$:

$$(\cos(\beta L)\operatorname{sh}(\beta L) - \sin(\beta L)\operatorname{ch}(\beta L))m_L\beta^4 + (\cos(\beta L)\operatorname{ch}(\beta L) + 1)\rho = 0, \quad (26)$$

а затем из формулы

$$\omega_i = \beta_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (27)$$

находим собственные частоты свободных колебаний ГОЗМ.

Неизвестные коэффициенты A_i, B_i, C_i, D_i , определяющие гибкую форму свободных колебаний для частоты ω_i , находим из следующей системы алгебраических уравнений: выбираем любые три уравнения из системы (25) и добавляем к ним условие ортогональности (23):

$$\int_0^L \rho \phi^2(x) dx + m_L \phi^2(L) = F(A_i, B_i, C_i, D_i) = 1. \quad (28)$$

Замечание. Описанный выше двухэтапный алгоритм определения частот, а затем коэффициентов форм колебаний можно объединить, решая сразу систему из пяти алгебраических уравнений (25), (28).

Движение ГОЗМ при наличии внешнего момента

Теперь рассмотрим угловое перемещение звена манипулятора под действием внешнего вращающего момента $\tau(t)$. В этом случае работа внешних обобщенных сил имеет вид

$$W = \tau\theta, \quad (29)$$

где, напомним, θ — угол поворота ГОЗМ под действием момента τ , рассматриваемого как абсолютное жесткое тело. Теперь при повороте общее пере-

мещение любой точки $x \in [0, L]$ деформированного звена манипулятора определяется из соотношения

$$y(x, t) = x\theta(t) + w(x, t). \quad (30)$$

Уравнения движения манипулятора определяются также с использованием принципа наименьшего действия Гамильтона и метода разделения переменных Фурье.

Имеем:

- кинетическая энергия звена с нагрузкой

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \rho (x\dot{\theta}(t) + \dot{w}(x, t))^2 dx + \\ &+ \frac{1}{2} m_L (L\dot{\theta}(t) + \dot{w}(L, t))^2; \end{aligned} \quad (31)$$

- потенциальная энергия звена

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (w''(x, t))^2 dx; \quad (32)$$

- работа внешних сил

$$W = \tau(t)\theta(t). \quad (33)$$

Вариация интеграла действия (1) для соотношений (31)—(33) с использованием принципа наименьшего действия и условия (2) приводит к следующим соотношениям.

- ♦ *Вариации кинетической энергии для интеграла действия*

1) первая компонента

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}(t)^2 \right) dt = -J_0 \ddot{\theta}(t) \delta\theta(t); \quad (34)$$

2) вторая компонента

$$\begin{aligned} &\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho (x\dot{\theta}(t) + \dot{w}(x, t))^2 dx \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x^2 \dot{\theta}(t) \delta\dot{\theta}(t) dx \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \dot{\theta}(t) \delta\dot{w}(x, t) dx \right) dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \dot{w}(x, t) \delta\dot{\theta}(t) dx \right) dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho \dot{w}(x, t) \delta\dot{w}(x, t) dx \right) dt. \end{aligned}$$

Поэлементно:

2а)

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x^2 \dot{\theta}(t) \delta\dot{\theta}(t) dx \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\rho L^3}{3} \ddot{\theta}(t) \delta\theta(t) dt; \quad (35)$$

2б)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \dot{\theta}(t) \delta \dot{w}(x, t) dx \right) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \ddot{\theta}(t) \delta w(x, t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \ddot{\theta}(t) \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(x) \delta q_i(t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_f} a_{i1} \ddot{\theta}(t) \delta q_i(t) dt, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$a_{i1} = \int_0^L \rho x \phi_i(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n_f; \quad (37)$$

2в)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \dot{w}(x, t) \delta \dot{\theta}(t) dx \right) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \ddot{w}(x, t) \delta \theta(t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho x \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) dx \right) \delta \theta(t) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_f} a_{i1}(t) \ddot{q}_i(t) \delta \theta(t) dt; \end{aligned} \quad (38)$$

2г)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho \dot{w}(x, t) \delta \dot{w}(x, t) dx \right) dt &= \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho \ddot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) \sum_{j=1}^{n_f} \phi_j(x) \delta q_j(t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^L \rho \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(x) \phi_j(x) \ddot{q}_i(t) \delta q_j(t) dx \right) dt; \end{aligned}$$

3) третья компонента

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m_L (L \dot{\theta}(t) + \dot{w}(L, t))^2 \right) dt &= \\ &= - m_L \int_{t_1}^{t_2} (L \ddot{\theta}(t) + \ddot{w}(L, t)) (L \delta \theta(t) + \delta w(L, t)) dt = \\ &= - m_L \int_{t_1}^{t_2} L^2 \ddot{\theta}(t) \delta \theta(t) dt - m_L \int_{t_1}^{t_2} L \ddot{\theta}(t) \delta w(L, t) dt - \\ &- m_L \int_{t_1}^{t_2} L \ddot{w}(L, t) \delta \theta(t) dt - m_L \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w}(L, t) \delta w(L, t) dt. \end{aligned} \quad (39)$$

Поэлементно:

3а)

$$m_L \int_{t_1}^{t_2} L^2 \ddot{\theta}(t) \delta \theta(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} m_L L^2 \ddot{\theta}(t) \delta \theta(t) dt; \quad (40)$$

3б)

$$\begin{aligned} m_L \int_{t_1}^{t_2} L \ddot{\theta}(t) \delta w(L, t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} m_L L \ddot{\theta}(t) \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(L) \delta q_i(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} m_L L \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(L) \ddot{\theta}(t) \delta q_i(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_f} a_{i2} \ddot{\theta}(t) \delta q_i(t) dt, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$a_{i2} = m_L L \phi_i(L), \quad i = 1, 2, \dots, n_f; \quad (42)$$

3в)

$$\begin{aligned} m_L \int_{t_1}^{t_2} L \ddot{w}(L, t) \delta \theta(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} m_L L \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(L) \ddot{q}_i(t) \delta \theta(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_f} a_{i2}(t) \ddot{q}_i(t) \delta \theta(t) dt; \end{aligned} \quad (43)$$

3г)

$$\begin{aligned} m_L \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w}(L, t) \delta w(L, t) dt &= \\ &= m_L \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n_f} \phi_i(L) \ddot{q}_i(t) \sum_{j=1}^{n_f} \phi_j(L) \delta q_j(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} m_L \sum_{i=1}^{n_f} \sum_{j=1}^{n_f} \phi_i(x) \phi_j(x) \ddot{q}_i(t) \delta q_j(t) dt. \end{aligned} \quad (44)$$

Вариация потенциальной энергии получена выше при выводе уравнений для определения собственных форм и частот колебаний. Поэтому приводим сразу результат из выражения (22):

$$\begin{aligned} -\delta \frac{1}{2} \int_0^L EI (w''(x, t))^2 dx &= - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^L EI w''(x, t) \delta w''(x, t) dx \right] dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \left(EI w'''(L, t) \delta w(L, t) - \int_0^L EI w''''(x, t) \delta w(x, t) dx \right) dt = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \delta_{ij} \omega_i^2 q_i(t) \delta q_j(t) dt. \end{aligned} \quad (45)$$

Вариация внешней активной работы:

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} W(t) dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \tau(t) \delta \theta(t) dt. \quad (46)$$

Теперь, согласно основной теореме и лемме вариационного исчисления, соберем все компоненты, связанные с каждой из независимых вариаций, вместе и приравняем полученные выражения нулю. В результате получаем дифференциальные уравнения, описывающие динамику ГОЗМ. Имеем:

- Вариация $\delta \theta(t)$: из выражений (34), (35), (40), (38), (43), (46)

$$\begin{aligned} \left(J_0 + \frac{\rho L^3}{3} + m_L L^2 \right) \ddot{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{n_f} (a_{i1} + a_{i2}) \ddot{q}_i(t) = \\ = J_\Sigma \ddot{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{n_f} a_i \ddot{q}_i(t) = \tau(t), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} J_\Sigma = J_0 + \frac{\rho L^3}{3} + m_L L^2; \\ a_i = a_{i1} + a_{i2} = \int_0^L \rho x \phi_i(x) dx + m_L L \phi_i(L), \\ i = 1, 2, \dots, n_f. \end{aligned}$$

- Вариация $\delta q_i(t)$: из выражений (39), (44), (45), (41), (36) с учетом условия ортогональности (23) = (39) + (44)

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + (a_{i1} + a_{i2}) \ddot{\theta}(t) = \\ = \ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + a_i \ddot{\theta}(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_f. \end{aligned} \quad (48)$$

Из полученных результатов видно, что уравнение Эйлера—Бернулли (9) свободного ГОЗМ для вращающейся упругой балки дополняется компонентой из уравнения (36), а именно,

$$\delta w(x, t): \rho(x) \ddot{\theta}(t) + \ddot{w}(x, t) + EI w''''(x, t) = 0. \quad (49)$$

Уравнения (47), (48) описывают динамику ГОЗМ с нагрузкой, но при отсутствии диссипации энергии. В реальных объектах (приводах и упругих балках) всегда имеют место диссипативные силы для рассеивания энергии, поэтому в уравнениях (47), (48) добавим диссипативные составляющие. Получим окончательные уравнения динамики ГОЗМ:

$$\begin{aligned} \Sigma: J_\Sigma \ddot{\theta}(t) + \gamma \dot{\theta}(t) + \sum_{i=1}^{n_f} a_i \ddot{q}_i(t) = \tau(t); \\ \ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) + a_i \ddot{\theta}(t) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n_f, \end{aligned} \quad (50)$$

где γ — коэффициент вязкого трения в приводе; $0 < \xi_i \ll 1$ — коэффициент демпфирования упругих деформаций для i -й гибкой моды.

Заключение

На основе принципа наименьшего действия Гамильтона получены дифференциальные уравнения движения ГОЗМ, которые можно использовать для решения задач управления. Представлены уравнения для определения собственных форм и частот манипулятора. Полученная математическая модель учитывает только массу нагрузки, которая переносится схватом, т. е. не учитывается момент инерции нагрузки, считаем массу нагрузки точечной. Если учитывается момент инерции нагрузки, то необходимо доопределить граничное условие (11) и включить изгибающий момент от нагрузки на конце ГОЗМ.

Список литературы

1. Barbieri E., Ozguner U. Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link // ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control. 1988. V. 110. P. 416—421.
2. Pereira E., Aphale S. S., Feliu V. Integral Resonant Control for Vibration Damping and Precise Tip-Positioning of a Single-Link Flexible Manipulator // IEEE/ASME Trans. on Mechatronics. 2011. V. 16, N. 2. P. 232—240.
3. Cannon R. H., Schmitz Jr. E. Initial Experiments on the End-Point Control of Flexible One-Link Robot // Intern. J. Robotics Reseach. 1984. V. 3, N. 3. P. 62—75.
4. De Luca A., Di Giovanni G. Rest-to-rest motion of a one-link flexible forearm // In Proc. of IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics. 2001. P. 923—928.
5. Qian W. T., Ma C. C. A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator // IEEE Trans. Automatic Control. 1992. V. 37, N. 1. P. 132—137.
6. Tokhi O., Azad A. K. M. Modelling of a Single Link Flexible Manipulator System: Theoretical and Practical Investigations // Robotica. 1996. V. 14. P. 91—102.
7. Gu D.-W., Petkov P. Hr., Konstantinov M. Robust Control Design with Matlab. London: Springer Verlag, 2005. 389 p.
8. Mallkarjuniah S., Narayanna Reddy S. Design of PID Controller for Flexible Link Manipulator // Int. Journal of Engineering Research and Appl. 2013. V. 3, N. 1. P. 1207—1212.
9. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. М.: Наука, 1965. 847 с.
10. Бугаенко Г. А., Маланин В. В., Яковлев В. И. Основы классической механики. М.: Высшая школа, 1999. 366 с.
11. Айзерман М. А. Классическая механика. М.: Наука, 1980. 367 с.
12. Ванько В. И., Ермошина О. В., Кувыркин Г. Н. Вариационное исчисление и оптимальное управление. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. 488 с.
13. Краснов М. Л., Макаренко Г. И., Киселев А. И. Вариационное исчисление. М.: Наука, 1973. 192 с.
14. Каргашев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1980. 288 с.
15. Мартинсон Л. К., Малов Ю. И. Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. 366 с.

Development and Investigation of the Mathematical Model of a Flexible Single-Link Manipulator with the Use of the Hamilton's Principle

V. I. Krasnoshchechenko, kviip@yandex.ru✉,

Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248600, Russian Federation

Corresponding author: Krasnoshchechenko Vladimir I., Ph. D., Senior Lecturer, Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248600, Russian Federation, e-mail: kviip@yandex.ru

Received on October 21, 2016

Accepted on November 25, 2016

The links, presently used in most of the industrial robots-manipulators, are rigid and heavy, which allows us to neglect deformations during the working operations. Such kind of a robot has certain drawbacks: low speed; high energy consumption; low payload-to-weight ratio, etc. Application of the robots with lightweight links gives a number of advantages. Namely: better payload-to-weight ratio; higher speed of movement; increased safety; lower energy consumption; bigger working space with the use of lengthened links; and lower cost. However, such type of a manipulator has an essential drawback — flexibility of a link, which complicates its mathematical model. The flexible single-link manipulator considered in the article as a control object has been attractive for the control specialists for a long time. A regular approach to the design control systems begins with development of a mathematical model of a plant, which describes its dynamic properties in the best way. However, an analysis of the numerous articles and monographs on the problem revealed noticeable distinctions in the used mathematical models, while the initial data concerning the design and operation of the manipulator were the same. Especially this concerns the boundary conditions, the orthogonality conditions and expressions for the flexible mode shapes. In this paper all the formulas for the free and forced motions of the flexible manipulator were received only on the basis of the Hamilton's principle and assumed mode method, namely: the governing equation of motion — Euler-Bernoulli equations, boundary conditions, orthogonality conditions, expressions for the mode shapes and also finite dimensional approximation of the model in the state space. The development of the appropriate formulas is described in every detail.

Keywords: Hamilton's principle, flexible manipulator, mathematical model, Euler-Bernoulli equation, assumed mode method, boundary conditions, orthogonality conditions

For citation:

Krasnoshchechenko V. I. Development and Investigation of the Mathematical Model of a Flexible Single-Link Manipulator with the Use of the Hamilton's Principle, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 383–390.

DOI: 10.17587/mau.18.383-390

References

1. Barbieri E., Ozguner U. Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link, *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1988, vol. 110, pp. 416–421.
2. Pereira E., Aphale S. S., Feliu V. Integral Resonant Control for Vibration Damping and Precise Tip-Positioning of a Single-Link Flexible Manipulator, *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, 2011, vol. 16, no. 2, pp. 232–240.
3. Cannon R. H., Schmitz Jr. E. Initial Experiments on the End-Point Control of Flexible One-Link Robot, *Intern. J. Robotics Reseach*, 1984, vol. 3, no. 3, pp. 62–75.
4. De Luca A., Di Giovanni G. Rest-to-rest motion of a one-link flexible forearm, *In Proc. of IEEE/ASME Int. Conf. on Advanced Intelligent Mechatronics*, 2001, pp. 923–928.
5. Qian W. T., Ma C. C. A New Controller Design for a Flexible One-Link Manipulator, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1992, vol. 37, no. 1, pp. 132–137.
6. Tokhi O., Azad A. K. M. Modelling of a Single Link Flexible Manipulator System: Theoretical and Practical Investigations, *Robotica*, 1996, vol. 14, pp. 91–102.
7. Gu D.-W., Petkov P. Hr., Konstantinov M. Robust Control Design with Matlab, London, Springer Verlag, 2005, 389 p.
8. Mallkarjuniah S., Narayana Reddy S. Design of PID Controller for Flexible Link Manipulator, *Int. Journal of Engineering Research and Appl.*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 1207–1212.
9. Javorskij B. M., Detlaf A. A. *Spravochnik po fizike dlja inzhenerov i studentov vuzov* (Handbook in physics for engineers and students of high schools, in Russian), Moscow, Nauka, 1965, 847 p. (in Russian).
10. Bugaenko G. A., Malanin V. V., Jakovlev V. I. *Osnovy klassicheskoy mehaniki* (Foundations of the classical mechanics, in Russian), Moscow, Vysshaja shkola, 1999, 366 p. (in Russian).
11. Ajzerman M. A. *Klassicheskaja mehanika* (Classical mechanics), Moscow, Nauka, 1980, 367 p. (in Russian).
12. Van'ko V. I., Ermoshina O. V., Kuvyrkin G. N. *Variacionnoe ischislenie i optimal'noe upravlenie* (Calculus of variations and optimal control), Moscow, Publishing house of MGTU im. N.Je. Baumana, 2006, 488 p. (in Russian).
13. Krasnov M. L., Makarenko G. I., Kiselev A. I. *Variacionnoe ischislenie* (Calculus of variations), Moscow, Nauka, 1973, 192 p. (in Russian).
14. Kartashev A. P., Rozhdestvenskij B. L. *Obyknovennye differentsial'nye uravnenija i osnovy variacionnogo ischislenija* (The ordinary differential equations and foundations of calculus of variations), Moscow, Nauka, 1980, 288 p. (in Russian).
15. Martinson L. K., Malov Ju. I. *Differentsial'nye uravnenija matematicheskoy fiziki* (Differential equations of mathematical physics), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Je. Baumana, 1996, 366 p. (in Russian).

В. С. Мелентьев, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, vs_mel@mail.ru,

В. И. Батищев, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, vib@list.ru,

Е. А. Сусова, аспирант, katu_xa@mail.ru,

Самарский государственный технический университет, Самара

Повышение точности измерения параметров емкостных датчиков*

Предложен метод и устройство для отдельного определения емкости, сопротивления изоляции и соединительных проводников датчика. Приведены результаты анализа погрешности измерения емкости датчика. Полученные результаты позволяют выбирать оптимальное значение интервала времени между измерениями и значение сопротивления образцового резистора измерительной цепи в соответствии с требованиями по точности и времени измерения.

Ключевые слова: емкостной датчик, переходный процесс, мгновенные значения, сопротивление проводника, сопротивление изоляции, квантование, погрешность

Введение

В технологических процессах, где необходим непрерывный быстродействующий контроль свойств или состояний веществ [1], разбраковка продукции по свойствам или геометрическим размерам, все более широкое применение находят емкостные датчики (ЕД) [2–4].

Методы измерения емкости датчиков с помощью мостовых схем достаточно хорошо изучены [5], и их совершенствование сводится, в основном, к модернизации способов автоматического уравнивания моста [1, 4]. Однако реализация такого подхода к измерению емкости существенно увеличивает время измерения.

При измерении параметров ЕД учет их многоэлементной схемы замещения позволяет определять значения информативных параметров датчика независимо от неинформативных, что значительно повышает точность измерения емкости.

Однако в большинстве работ, посвященных построению измерительных преобразователей (ИП) параметров ЕД [6, 7], основное внимание уделяется уменьшению погрешностей самих ИП, а не увеличению точности определения параметров датчиков.

К достаточно новому направлению можно отнести методы определения параметров многокомпонентных двухполюсников, использующие подачу на измерительную цепь (ИЦ) импульсов n -й степени с n -кратным дифференцированием сигналов на входе и выходе ИП [8]. Однако такие методы чрезвычайно трудно реализовать на практике.

В настоящее время все большее распространение находят методы определения параметров ЕД

по отдельным мгновенным значениям переходного процесса в измерительной цепи при подключении к ней напряжения постоянного тока. В данных методах время измерения не зависит от постоянной времени ИЦ τ , а определяется, в основном, временем измерения мгновенных значений переходного процесса и реализации алгоритма обработки измеренных значений. Кроме того, на быстродействие устройств, реализующих методы, накладывает ограничение то, как связаны между собой момент начала измерения мгновенного значения переходного процесса и момент подключения напряжения к измерительной цепи [9].

Методы измерения параметров датчиков по мгновенным значениям нескольких переходных процессов обеспечивают дальнейшее сокращение времени измерения [10]. Для этого формируют два переходных процесса на средних точках двух измерительных цепей или на известном и неизвестном элементах ИЦ.

Одним из элементов, оказывающих влияние на точность измерения, является эквивалентное активное сопротивление, обусловленное потерями в изолирующем диэлектрике и сквозными токами утечки. Это приводит к отклонению используемой модели от реального переходного процесса, что неизбежно вызывает дополнительную погрешность определения информативного параметра датчика.

В работах [11, 12] авторами предложены методы отдельного определения неизвестного сопротивления изоляции и емкости датчика. Однако они не дают возможности измерять другой неинформативный элемент — сопротивление соединительных проводников, с помощью которых датчик подключают к ИЦ.

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-08-00252 А).

Разработанные методы определения емкости и сопротивления соединительных проводников [13, 14], в свою очередь, не позволяют находить сопротивление изоляции ЕД.

В статье рассматривается новый метод, реализация которого обеспечивает возможность раздельного определения емкости, сопротивления изоляции и соединительных проводников.

Метод раздельного определения параметров емкостных датчиков

Метод заключается в том, что на ИЦ, состоящую из последовательно включенных первого образцового резистора с сопротивлением R_0 , ЕД, имеющего первый соединительный проводник с сопротивлением r_1 , емкость C_X , сопротивление изоляции R_{X1} , второй соединительный проводник с сопротивлением r_2 , и второго образцового резистора R_0 , подают напряжение постоянного тока U_0 . Через образцовый интервал времени Δt одновременно измеряют мгновенные значения напряжений на участке цепи, содержащем емкостной датчик и второй образцовый резистор, и на втором образцовом резисторе относительно общего вывода ИЦ. Через образцовый интервал времени Δt повторно измеряют мгновенное значение напряжения на том же участке цепи относительно общего вывода; через такой же интервал времени Δt измеряют мгновенное значение напряжения на этом же участке цепи и определяют неизвестные емкость, сопротивление соединительных проводников и сопротивление изоляции по измеренным значениям.

Временные диаграммы, поясняющие метод, приведены на рис. 1.

Если к измерительной цепи подключить источник напряжения постоянного тока U_0 , то переходные процессы на участке цепи, содержащем ЕД и второй образцовый резистор, и на втором образцовом резисторе относительно общего вывода ИЦ будут изменяться в соответствии с выражениями

$$u_1(t) = \frac{U_0}{A} \left\{ R_0 - B \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \right\};$$

$$u_2(t) = \frac{U_0}{A} \left\{ R_0 + R_{X2} + B \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \right\},$$

где $A = 2R_0 + R_{X2}$; $R_{X2} = r_1 + r_2$; $B = \frac{R_0 R_{X1}}{2R_0 + R_{X1} + R_{X2}}$;

$\tau = \frac{C_X R_{X1} (2R_0 + R_{X2})}{(2R_0 + R_{X2} + R_{X1})}$ — постоянная времени ИЦ.

Переходные процессы, протекающие в ИЦ, имеют шесть параметров: C_X , R_{X1} , R_0 , R_{X2} , U_0 и Δt , два из которых (R_0 и Δt) считаются известными. Поэтому для раздельного определения неизвест-

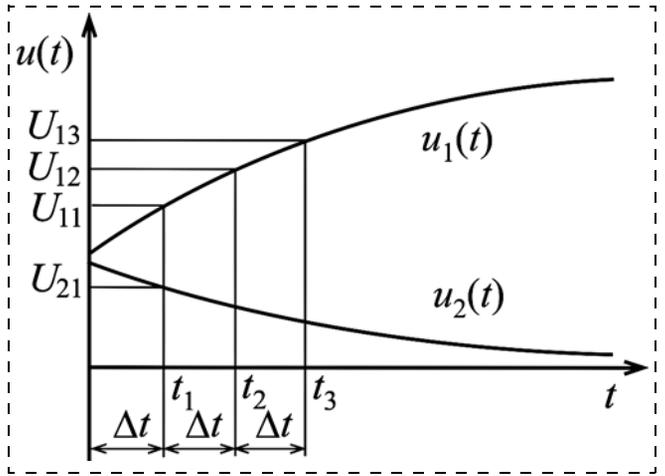


Рис. 1. Временные диаграммы, характеризующие метод измерения

ных параметров необходимо составить систему четырех уравнений:

$$\begin{cases} U_{11} = \frac{U_0}{A} \left\{ R_0 - B \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right] \right\}; \\ U_{21} = \frac{U_0}{A} \left\{ R_0 + R_{X2} + B \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \right\}; \\ U_{12} = \frac{U_0}{A} \left\{ R_0 - B \left[1 - \exp\left(-\frac{2\Delta t}{\tau}\right) \right] \right\}; \\ U_{13} = \frac{U_0}{A} \left\{ R_0 - B \left[1 - \exp\left(-\frac{3\Delta t}{\tau}\right) \right] \right\}. \end{cases} \quad (1)$$

За счет использования мгновенных значений напряжений (1) можно определить сопротивление изоляции, сопротивление соединительных проводников и емкость:

$$R_{X1} = \frac{(U_{12} - U_{11})^3 \times}{R_0 (U_{13} - U_{12})(U_{11} - U_{21})(2U_{12} - U_{13} - U_{11}) -} \rightarrow \frac{\times (2R_0 + R_{X2})^2}{-(2R_0 + R_{X2})(U_{12} - U_{11})^3}; \quad (2)$$

$$R_{X2} = \frac{R_0 [(U_{11} - U_{21})(U_{13} - U_{12}) - 2(U_{12} - U_{11})^2]}{U_{21}(U_{13} - U_{12}) + (U_{12} - U_{11})^2}; \quad (3)$$

$$C_X = - \frac{(2R_0 + R_{X1} + R_{X2})\Delta t}{R_{X1}(2R_0 + R_{X2}) \ln\left(\frac{U_{13} - U_{12}}{U_{12} - U_{11}}\right)}. \quad (4)$$

При определении емкости ЕД в соответствии с выражением (4) используются значения сопротивлений R_{X1} и R_{X2} , полученные согласно соотношениям (2) и (3), что обеспечивает повышение точности измерения C_X .

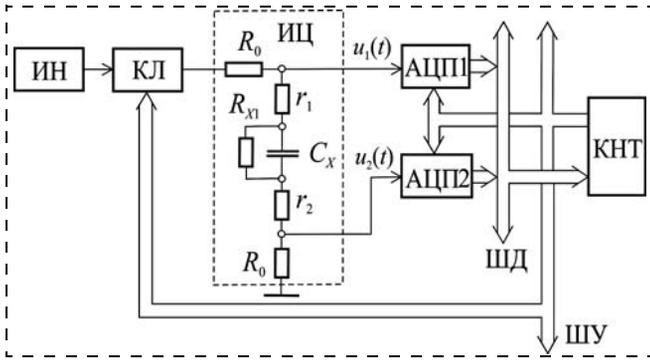


Рис. 2. Схема СИ, реализующего данный метод

Предлагаемый метод можно реализовать с помощью средства измерения (СИ), которое представлено на рис. 2.

В состав СИ входят: источник опорного напряжения постоянного тока ИН; аналоговый ключ КЛ; измерительная цепь ИЦ; два аналого-цифровых преобразователя АЦП1 и АЦП2 и контроллер КНТ с шинами управления ШУ и данных ШД.

Оценка погрешности, обусловленной квантованием мгновенных значений переходных процессов

Для реализации алгоритма раздельного определения параметров ЕД используется преобразование мгновенных значений переходных процессов в код. Применение в цифровых СИ квантования по уровню неизбежно приводит к погрешности, которая оказывает влияние на результат определения параметров.

Для анализа влияния квантования мгновенных значений переходных процессов на погрешность определения емкости можно использовать известную методику [15]. Методика основана на известном положении теории приближенных вычислений, заключающемся в том, что погрешность вычисле-

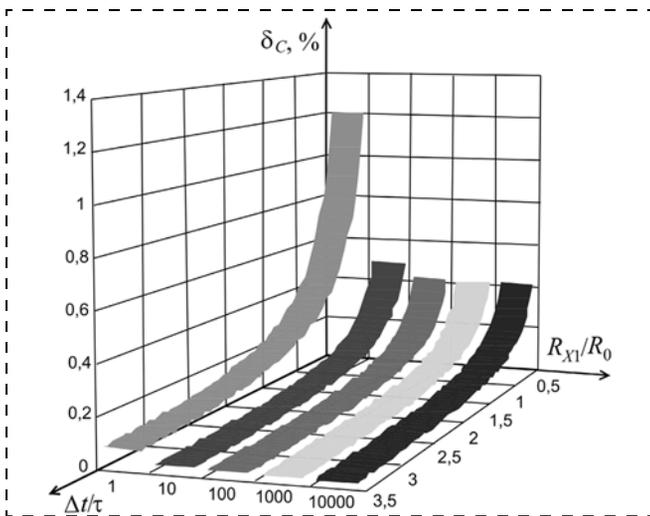


Рис. 3. Графики зависимости погрешности определения емкости от $\frac{\Delta t}{\tau}$ и $\frac{R_{X1}}{R_0}$ при $\frac{R_{X2}}{R_0} = 0,001$

ния функции с приближенно заданными аргументами можно оценить с помощью дифференциала этой функции. Иными словами, погрешность функции — это возможное приращение функции, которое она получит, если аргументам дать приращения, равные их погрешностям. В нашем случае погрешности аргументов соответствуют погрешностям квантования мгновенных значений.

Если считать, что измерение мгновенных значений сигналов U_{11} , U_{12} и U_{13} проводилось с погрешностью преобразования АЦП и абсолютные погрешности измерений равны $\Delta U_{11} = \Delta U_{12} = \Delta U_{13} = \Delta U = U_0/2n$ (где n — число разрядов АЦП), то абсолютная погрешность определения C_X согласно соотношению (4) с учетом погрешности квантования аналого-цифрового преобразователя будет равна

$$\Delta C_X = \left[\left| \frac{\partial C_X}{\partial U_{11}} \right| + \left| \frac{\partial C_X}{\partial U_{12}} \right| + \left| \frac{\partial C_X}{\partial U_{13}} \right| \right] \Delta U. \quad (5)$$

За счет использования выражений (4) и (5) можно определить предельную относительную погрешность измерения емкости датчика:

$$\delta_C = \frac{\tau \left[1 + \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right] (2R_0 + R_{X1} + R_{X2})(2R_0 + R_{X2})}{\Delta t 2^n R_0 R_{X1} \exp\left(-\frac{2\Delta t}{\tau}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]}. \quad (6)$$

Анализ выражения (6) показывает, что погрешность зависит от числа разрядов АЦП, длительности образцового интервала времени Δt , постоянной времени ИЦ τ , сопротивлений образцового резистора R_0 , соединительного проводника R_{X2} и изоляции датчика R_{X1} .

Графики, которые характеризуют зависимость погрешности δ_C от отношения образцового интервала времени Δt к постоянной времени ИЦ τ и отно-

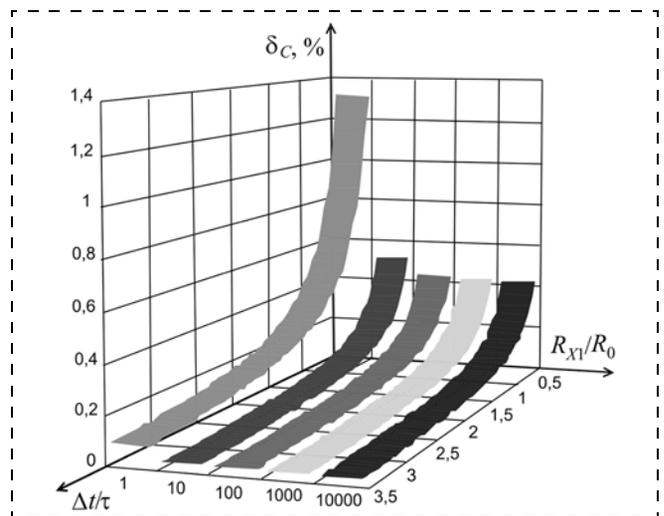


Рис. 4. Графики зависимости погрешности определения емкости от $\frac{\Delta t}{\tau}$ и $\frac{R_{X1}}{R_0}$ при $\frac{R_{X2}}{R_0} = 0,1$

шения сопротивления изоляции датчика R_{X1} к сопротивлению образцового резистора R_0 при $\frac{R_{X2}}{R_0} = 0,001$ и $\frac{R_{X2}}{R_0} = 0,1$, построенные согласно выражению (6), приведены на рис. 3 и 4 соответственно.

Анализ рис. 3 и 4 показывает, что погрешность существенно зависит от $\frac{\Delta t}{\tau}$ и с увеличением данного отношения уменьшается. Кроме того, δ_C определяется отношением $\frac{R_{X1}}{R_0}$. Однако при $\frac{R_{X1}}{R_0} \geq 100$ погрешность практически не изменяется.

Зависимость погрешности от отношения $\frac{R_{X2}}{R_0}$ незначительна, и при достаточно малых значениях сопротивления соединительных проводников ее можно не принимать во внимание.

Заключение

Разработанный метод и реализующее его СИ обеспечивают возможность отдельного определения емкости, сопротивления изоляции и соединительных проводников.

Проведенная оценка погрешности определения емкости датчика, обусловленной квантованием мгновенных значений переходных процессов показывает зависимость данного вида погрешности, в первую очередь, от соотношения образцового интервала времени Δt и постоянной времени измерительной цепи.

Полученные в работе результаты позволяют выбирать оптимальные значения Δt при известном диапазоне изменения емкости датчика, а также значение сопротивления образцового резистора R_0 в соответствии с требованиями по точности и времени измерения.

1. **Golnabi H., Sharifian M.** Investigation of water electrical parameters as a function of measurement frequency using cylindrical capacitive sensors // Measurement. 2013. Vol. 46, Iss. 1. P. 305–314.
2. **Azimloo H., Rezazadeh G., Shabani R.** Development of a capacitive angular velocity sensor for the alarm and trip applications // Measurement. 2015. Vol. 63. P. 282–286.
3. **Kim M., Moon W.** A new linear encoder-like capacitive displacement sensor // Measurement. 2006. Vol. 39, Iss. 6. P. 481–489.
4. **Nerino R., Cabiati F., Picotto G. B., Sacconi A.** A surface profile reconstruction method based on multisensor capacitive transducers // Measurement. 1994. Vol. 13, Iss. 1. P. 77–84.
5. **Малиновский В. Н.** Цифровые измерительные мосты. М.: Энергия, 1976.
6. **Kuznetsov E. N., Kuznetsov N. E., Tsypin B. V.** A two-channel transducer for capacitive sensors // Measurement Techniques. 2008. Vol. 51, Iss. 5. P. 513–515.
7. **Arbuzov V. P.** Time division of the channels of the measuring circuits of capacitive and inductive sensors // Measurement Techniques. 2007. Vol. 50, Iss. 7. P. 752–757.
8. **Ivanov V. I., Titov V. S., Petrov A. S.** Converters of the parameters of multicomponent two-terminal networks with a DC short circuit and a break in the circuit between poles // Measurement Techniques. 2014. Vol. 57, Iss. 3. P. 340–346.
9. **Мелентьев В. С.** Новое в измерениях параметров емкостных датчиков по мгновенным значениям переходных процессов // Датчики и системы. 2010. № 2. С. 26–29.
10. **Melent'ev V. S.** Methods for increasing the accuracy of measurements of the parameters of capacitive transducers // Measurement Techniques. 2014. Vol. 57, Iss. 7. P. 800–804.
11. **Мелентьев В. С., Батищев В. И., Смолина А. М., Евстифеева Т. С.** Повышение точности измерения параметров емкостных датчиков перемещения // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 6. С. 36–38.
12. **Мелентьев В. С., Батищев В. И., Евстифеева Т. С., Левина К. Д.** Исследование метода и средства измерения параметров емкостных датчиков перемещения // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 45–49.
13. **Мелентьев В. С., Смолина А. М., Евстифеева Т. С.** Совершенствование метода измерения параметров емкостных датчиков // Проблемы автоматизации и управления в технических системах: сб. статей Междунар. науч.-техн. конф. Пенза, 2013. С. 238–240.
14. **Melent'ev V. S., Gubanov N. G., Latukhova O. A., Smolina A. M.** Improvement of methods of measuring the parameters of two-terminal electric circuits // Measurement Techniques. 2013. Vol. 56, Iss. 6. P. 691–694.
15. **Мелентьев В. С., Латухова О. А., Евстифеева Т. С.** Метод отдельного определения параметров емкостных датчиков по мгновенным значениям переходных процессов // Ползуновский вестник. 2013. № 2. С. 106–108.

Improving the Accuracy of Measurement of Parameters of Capacitive Sensors

V. S. Melentiev, vs_mel@mail.ru, **V. I. Batishchev**, vib@list.ru✉, **E. A. Susova**, ims@samgtu.ru, The Samara State Technical University, Samara, 443100, Russian Federation

Corresponding author: **Batishchev Vitaliy I.**, D. Sc., Professor, Head of Department, The Samara State Technical Univer, Samara, 443100, Russian Federation, e-mail: vib@list.ru

Received on January 12, 2016

Accepted on January 26, 2016

Briefly considers the current state of the problem of precision measurement of parameters of capacitive sensors and measuring converters for their definition. It is established that at present, a proliferation of methods for the determination of parameters of capacitive sensors on individual instant values of the transition process in the measuring circuit when connected it to a DC voltage. In these methods the time measurement does not depend on the time constant of the measuring circuit, and is determined mainly by the measurement time of the instantaneous values of the signals and the implementation of the algorithm processing the measured values and the duration of the exemplary time interval. One of the problems arising in the implementation of mea-

suring means that use such methods, is the effect of uninformative parameters of the measuring circuit and their instability on the result of the determination of informative parameters. Using the uninformative elements of the equivalent circuit of the sensor allows to determine their influence on informative parameters. A disadvantage of the known methods separate measurement sensors parameters is that they do not allow to define along with the capacity the multiple uninformative parameters. The aim of this work is to study a new method of measurement of parameters of capacitor sensors, which allows to determine the resistance of the connecting conductors that connect the sensor to the measuring circuit, and equivalent resistance due to losses in the insulating dielectric and leakage currents, which allows to increase the accuracy of measurement of capacitance.

Keywords: capacitive sensors, transient, instant values, an error, resistance of connecting conductors, insulation resistance, measuring circuit

Acknowledgements: This work was supported by RFBR, project 16-08-00252 A.

For citation:

Melent'ev V. S., Batishchev V. I., Susova E. A. Improving the Accuracy of Measurement of Parameters of Capacitive Sensors, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 391–395.

DOI: 10.17587/mau.18.391-395

References

1. **Golnabi H., Sharifian M.** Investigation of water electrical parameters as a function of measurement frequency using cylindrical capacitive sensors, *Measurement*, 2013, vol. 46, no. 1, pp. 305–314.
2. **Azimloo H., Rezazadeh G., Shabani R.** Development of a capacitive angular velocity sensor for the alarm and trip applications, *Measurement*, 2015, vol. 63, pp. 282–286.
3. **Kim M., Moon W.** A new linear encoder-like capacitive displacement sensor, *Measurement*, 2006, vol. 39, no. 6, pp. 481–489.
4. **Nerino R., Cabiati F., Picotto G. B., Sacconi A.** A surface profile reconstruction method based on multisensor capacitive transducers, *Measurement*, 1994, vol. 13, no. 1, pp. 77–84.
5. **Malinovskij V. N.** *Cifrovye izmeritel'nye mosty* (Digital measuring bridges), Moscow, Jenergija, 1976 (in Russian).
6. **Kuznetsov E. N., Kuznetsov N. E., Tsylin B. V.** A two-channel transducer for capacitive sensors, *Measurement Techniques*, 2008, vol. 51, no. 5, pp. 513–515.
7. **Arbuzov V. P.** Time division of the channels of the measuring circuits of ca-pacitive and inductive sensors, *Measurement Techniques*, 2007, vol. 50, no. 7, pp. 752–757.
8. **Ivanov V. I., Titov V. S., Petrov A. S.** Converters of the parameters of multi-component two-terminal networks with a DC short

circuit and a break in the circuit between poles, *Measurement Techniques*, 2014, vol. 57, no. 3, pp. 340–346.

9. **Melent'ev V. S.** *Novoe v izmerenijah parametrov emkostnyh datchikov po mgnovennym znachenijam perehodnyh processov* (New in the measurements of capacitive sensors on instant values of transient processes), *Datchiki i Sistemy*, 2010, no. 2, pp. 26–29 (in Russian).

10. **Melent'ev V. S.** Methods for increasing the accuracy of measurements of the parameters of capacitive transducers, *Measurement Techniques*, 2014, vol. 57, no. 7, pp. 800–804.

11. **Melent'ev V. S., Batishhev V. I., Smolina A. M., Evstifeeva T. S.** *Povyshenie tochnosti izmerenija parametrov emkostnyh datchikov peremeshhenija* (Improving the accuracy of measurement of parameters of the capacitive displacement sensors), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2013, no. 6, pp. 36–38 (in Russian).

12. **Melent'ev V. S., Batishhev V. I., Evstifeeva T. S., Levina K. D.** *Issledovanie metoda i sredstva izmerenija parametrov emkostnyh datchikov peremeshhenija* (A study of methods and means of measurement of capacitive displacement sensors), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 45–49 (in Russian).

13. **Melent'ev V. S., Smolina A. M., Evstifeeva T. S.** *Sovershenstvovanie metoda izmerenija parametrov emkostnyh datchikov* (Improvement of the method of measurement of parameters of capacitor sensors), *Problemy avtomatizacii i upravlenija v tehniceskikh sistemah: sb. statej Mezhdunar. nauch.-tehn. konf.*, Penza, 2013, pp. 238–240 (in Russian).

14. **Melent'ev V. S., Gubanov N. G., Latukhova O. A., Smolina A. M.** Improvement of methods of measuring the parameters of two-terminal electric circuits, *Measurement Techniques*, 2013, vol. 56, no. 6, pp. 691–694.

15. **Melent'ev V. S., Latuhova O. A., Evstifeeva T. S.** *Metod razdel'nogo opredelenija parametrov emkostnyh datchikov po mgnovennym znachenijam perehodnyh processov*, *Polzunovskij Vestnik*, 2013, no. 2, pp. 106–108 (in Russian).

УДК 681.5.01

DOI: 10.17587/mau.18.395-406

A. В. Моржов, канд. техн. наук, доц., morzhov@mail.ru,

С. В. Моржова, специалист, svetlana-morzhova@mail.ru,

Тулский государственный университет

Синтез релейного гидропривода при задании ограничений на параметрическую чувствительность его характеристик*

Рассматривается синтез релейного автоколебательного объемного силового гидропривода при задании ограничений на параметрическую чувствительность его характеристик к изменению скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса. Используется нелинейная математическая модель привода. Синтез сводится к решению задачи конечномерной оптимизации по точности режима слежения.

Ключевые слова: объемный гидропривод, релейная система, кусочно-линейный объект управления, чувствительность, автоколебания, режим слежения, синтез

Введение

Релейные автоматические системы широко используются в различных областях техники. К основным достоинствам таких систем относятся про-

стога конструкции, надежность и низкая стоимость. Они находят применение как в системах управления промышленного назначения, так и в системах управления подвижными объектами.

Действительные значения параметров объекта управления релейной автоколебательной системы (как и вообще любой системы автоматического уп-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-08-00662).

равления) практически всегда отличаются от расчетных (номинальных). Это может быть обусловлено неточностью изготовления отдельных элементов системы, изменением их свойств в процессе хранения и эксплуатации, изменением внешних условий и т. д. Степень влияния отклонения отдельных параметров на различные характеристики системы оценивается посредством чувствительности. Обычно под чувствительностью характеристики системы к изменению некоторого параметра понимается значение первой производной исследуемой характеристики по данному параметру.

Отклонение значений параметров объекта управления релейной автоколебательной системы может привести к заметной потере точности слежения системы за входными сигналами, а в особых случаях — к неустойчивости периодических движений в системе и, как следствие, к ее полной не работоспособности. Поэтому в процессе синтеза релейной автоколебательной системы крайне важно осуществлять контроль параметрической чувствительности характеристик синтезируемой системы.

Теория чувствительности как самостоятельное научное направление в теории автоматического управления сформировалась в 60-е годы прошлого столетия и продолжает развиваться в настоящее время [1—4]. Достаточно хорошее представление о состоянии теории дают монографии [5, 6]. Однако, несмотря на общее обилие работ чувствительность релейных систем исследована весьма слабо. Имеется лишь небольшое число работ, в которых рассматривается чувствительность конкретных релейных систем с линейными объектами управления. Между тем реальные объекты управления, как правило, являются нелинейными.

В работах [7—10] были предложены эффективные методы исследования параметрической чувствительности релейных автоколебательных следящих систем с нелинейными объектами управления. В настоящей работе рассматривается синтез с использованием указанных методов следящего релейного автоколебательного объемного силового гидропривода при задании ограничений на чувствительность его характеристик к изменению скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса.

Гидроприводы данного класса весьма часто применяются в системах управления движением технических объектов. Особенности их конструкции

детально рассмотрены в работе [11]. Главные недостатки объемных гидравлических приводов, которые ограничивают их применение в следящих системах управления, заключаются в сложности регулирования насоса переменной производительности и существенной зависимости характеристик привода от скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса. Ее нестабильность отрицательно влияет на точностные характеристики и работоспособность привода.

Необходимо отметить, что впервые синтез объемного гидропривода с релейным законом управления при задании ограничений на параметрическую чувствительность рассматривался в работе [12]. Однако при этом в целях упрощения процедуры синтеза использовалась линейная модель гидропривода как объекта управления, не учитывающая ряд нелинейностей, присущих реальному приводу.

1. Математическая модель релейного гидропривода

На рис. 1 представлена структурная схема упрощенной математической модели некоторого реального следящего релейного автоколебательного объемного силового гидропривода. На рис. 1 введены следующие обозначения: f — входной управляющий сигнал; u — выходной сигнал релейного усилителя мощности; i — ток в обмотках электромагнита; M — момент, создаваемый якорем электромагнита; α — угол поворота заслонки; β — перемещение золотника; γ — угол наклона блока цилиндров гидронасоса; p — перепад давлений в магистралях; ϑ — скорость вращения входного вала редуктора (выходного вала гидродвигателя); φ — угол поворота выходного вала редуктора (нагрузки); C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — коэффициенты обратных связей.

В структурной схеме учитываются ограничители только на угол поворота заслонки α и перемещение золотника β . Именно эти ограничители достигаются в режиме автоколебаний. Влиянием других нелинейностей, присущих гидроприводу, в ходе синтеза можно пренебречь. В модель также входит нестабильный параметр Ω — скорость вращения приводящего двигателя гидронасоса с номинальным значением Ω_0 .

Параметры модели имеют следующие значения: $A = 8 \text{ В}$, $K_i = 0,15 \text{ А/В}$, $T_i = 5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, $K_M = 0,3 \text{ Н} \cdot \text{м/А}$,

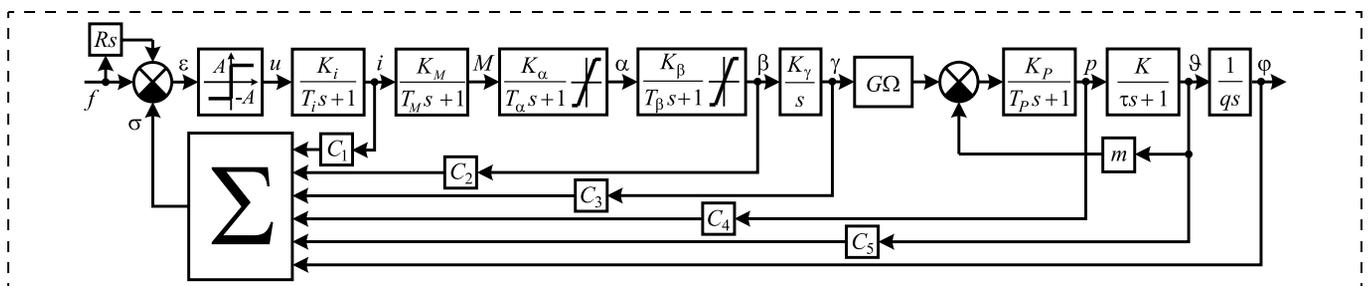


Рис. 1. Структурная схема математической модели релейного гидропривода

$T_M = 2 \cdot 10^{-3}$ с, $K_\alpha = 0,9$ рад/Н·м, $T_\alpha = 1,6 \cdot 10^{-3}$ с,
 $\alpha_{\max} = 0,087$ рад, $K_\beta = 0,02$ м/рад, $T_\beta = 10^{-2}$ с,
 $\beta_{\max} = 0,001$ м, $K_\gamma = 5 \cdot 10^3$ рад/м·с, $G = 4,2598 \times$
 $\times 10^{-5}$ м³/рад², $\Omega_0 = 157$ рад/с, $K_P = 10^{11}$ Н·с/м⁵,
 $T_P = 0,07143$ с, $K = 9,2887 \cdot 10^{-5}$ рад·м²/Н·с,
 $\tau = 6,948$ с, $m = 2,229 \cdot 10^{-5}$ м³/рад, $q = 100$.

Движение звеньев с ограничителями описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{T_\alpha} (K_\alpha M - \alpha), & \text{если } |\alpha| < \alpha_{\max}, \\ \text{или } |\alpha| = \alpha_{\max} \text{ и } (K_\alpha M - \alpha)\text{sign}\alpha \leq 0; \\ 0, & \text{если } |\alpha| = \alpha_{\max} \text{ и } (K_\alpha M - \alpha)\text{sign}\alpha > 0; \end{cases}$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{T_\beta} (K_\beta \alpha - \beta), & \text{если } |\beta| < \beta_{\max}, \\ \text{или } |\beta| = \beta_{\max} \text{ и } (K_\beta \alpha - \beta)\text{sign}\beta \leq 0; \\ 0, & \text{если } |\beta| = \beta_{\max} \text{ и } (K_\beta \alpha - \beta)\text{sign}\beta > 0. \end{cases}$$

Дополнительный корректирующий сигнал $R\dot{f}(t)$, подаваемый на вход системы, позволяет устранить статическую ошибку при слежении системы за линейно нарастающими сигналами, т. е. повысить точность слежения системы за произвольными входными сигналами. Коэффициент R задается выражением

$$R = qC_3 \left(\frac{1}{K_P G \Omega_0 K} + \frac{m}{G \Omega_0} \right) + \frac{qC_4}{K} + qC_5. \quad (1)$$

Таким образом, на вход системы поступает суммарный сигнал

$$y(t) = f(t) + R\dot{f}(t).$$

Гидропривод как объект управления относится к кусочно-линейным системам [13] — широко распространенному классу нелинейных объектов. Обозначим $\mathbf{x} = (i, M, \alpha, \beta, \gamma, p, \vartheta, \varphi)$ — вектор состояния гидропривода. Будем задавать его "свободное" движение (ограничители не достигаются) уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}(\Omega)\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (2)$$

движение по двум ограничителям одновременно — уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}^*(\Omega)\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (3)$$

движение по ограничителю $|\alpha| = \alpha_{\max}$ — уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}_\alpha^*(\Omega)\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \quad (4)$$

а движение по ограничителю $|\beta| = \beta_{\max}$ — уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{C}_\beta^*(\Omega)\mathbf{x} + \mathbf{B}u. \quad (5)$$

Уравнения движения (2)—(5) зависят от упомянутого выше неустойчивого параметра Ω . Числен-

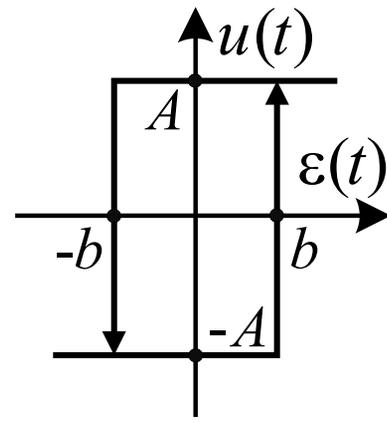


Рис. 2. Статическая характеристика двухпозиционного релейного элемента

ные значения матриц легко определяются по структурной схеме системы (рис. 1).

Управляющий сигнал $u(t)$ определяется соотношениями

$$u = \Phi(\varepsilon, A, b), \quad \varepsilon = y - \mathbf{R}^T \mathbf{x}, \quad y = f + R\dot{f}, \quad (6)$$

причем функция Φ задается статической характеристикой двухпозиционного релейного элемента (рис. 2), $b = 0$, $\mathbf{R}^T = (C_1 \ 0 \ 0 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \ 1)$.

2. Постановка задачи синтеза

Синтез следящего релейного автоколебательно-го объемного силового гидропривода заключается в поиске таких значений коэффициентов его обратных связей C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 , которые позволят обеспечить наибольшую точность замкнутого привода в режиме слежения при заданных ограничениях на чувствительность характеристик привода к изменению скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса.

Так, в условиях допустимых отклонений скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса в пределах 20 % от номинального значения Ω_0 требуется за счет выбора коэффициентов обратных связей C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 достигнуть максимальной точности слежения гидропривода за тестовым входным гармоническим сигналом

$$f(t) = \sin 1,26t \quad (7)$$

в номинальном режиме работы ($\Omega = \Omega_0$) и при этом обеспечить максимальное отклонение амплитуды e_{\max} установившейся ошибки слежения $e(t) = f(t) - \varphi(t)$ от ее номинального значения (значения амплитуды ошибки в номинальном режиме) в пределах, не превышающих 50 %. Следует отметить, что сигнал (7), как показали выполненные исследования, является (из всех допустимых сигналов) наиболее сложным для отработки рассматриваемым приводом, т. е. приводит к максимальной ошибке слежения.

Кроме того, в номинальном режиме работы необходимо гарантировать существование в замкну-

том приводе устойчивых автоколебаний с желаемым периодом, при котором достигаются ограничители по параметрам α и β (это необходимо для нормальной работы электрогидравлического усилителя), а также обеспечить устойчивость автоколебаний и достижимость ограничителей при любых допустимых отклонениях скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса в пределах, указанных выше.

Синтез гидропривода состоит из двух этапов: предварительного и основного — решения задачи конечномерной оптимизации закона управления.

3. Предварительный этап синтеза релейного гидропривода

Предварительный этап синтеза начинается с построения фазового годографа релейного гидропривода как объекта управления при работе в номинальном режиме ($\Omega = \Omega_0$).

В автономной ($f(t) \equiv 0$) системе (2)—(6) периодическое движение может быть задано одной (любой) точкой с предельного цикла. Фазовым годографом [14] релейной системы (2)—(6) называется вектор-функция $\mathbf{x}^*(T)$, $0 \leq T < \infty$ ($2T$ — период), которая задает значения вектора состояния системы \mathbf{x} в симметричном периодическом движении в моменты переключения релейного элемента с "минуса" на "плюс". Фазовый годограф выделяет все возможные простые (в интервале $0 \leq t \leq 2T$ управление $u(t)$ изменяет знак только два раза (рис. 3)) симметричные ($u(t+T) = -u(t)$, $\mathbf{x}(t+T) = -\mathbf{x}(t)$)

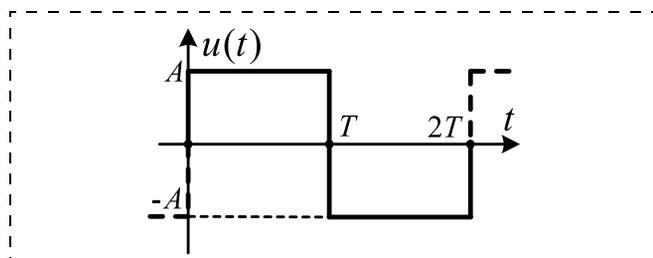


Рис. 3. Симметричный периодический сигнал управления $u(t)$

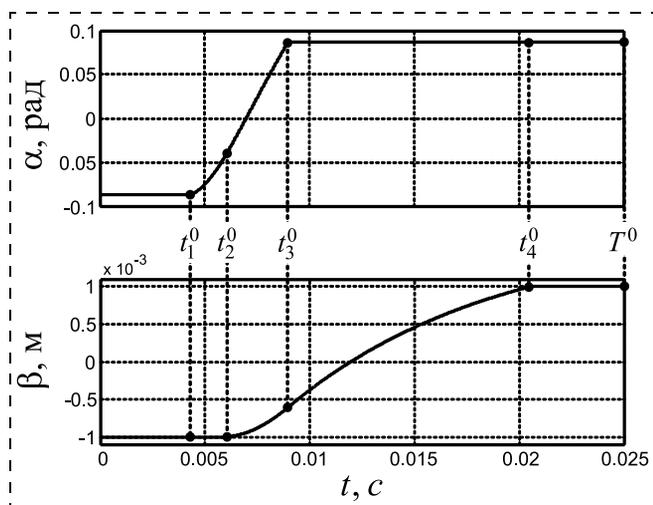


Рис. 4. Вид периодических траекторий $\alpha(t)$ и $\beta(t)$

периодические движения автономной релейной системы (2)—(6), когда еще не выбраны обратные связи.

Если построен фазовый годограф $\mathbf{x}^*(T)$, то период $2T^0$ возникающего в автономной ($f(t) \equiv 0$) системе (2)—(6) автоколебательного движения $\mathbf{x}(t)$ рассчитывается из условия переключения релейного элемента с "минуса" на "плюс" и условия надлежащего направления переключения релейного элемента соответственно:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{x}^*(T^0) = -b, \mathbf{R}^T \mathbf{h} < 0, \quad (8)$$

где \mathbf{h} — значение вектора фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}$ на симметричной периодической траектории $\mathbf{x}(t)$ в моменты переключения релейного элемента с "минуса" на "плюс" (предел слева). Задаваемое соотношением (8) необходимое условие существования периодических движений на этапе синтеза позволяет формировать законы управления, обеспечивающие в системе требуемые параметры автоколебаний.

Методы построения фазового годографа были подробно рассмотрены в работе [14]. Для определения фазового годографа гидропривода использовался итерационный алгоритм с принудительным симметрированием [14]. С его помощью были получены компоненты фазового годографа $i^*(T)$, $M^*(T)$, $\alpha^*(T)$, $\beta^*(T)$, $\gamma^*(T)$, $p^*(T)$, $\vartheta^*(T)$, $\varphi^*(T)$, соответствующие переменным состояниям системы.

Для нормальной работы гидропривода, как уже отмечалось выше, необходимо, чтобы в периодическом движении достигались ограничители по фазовым переменным α и β . Исследование с помощью фазового годографа возможных периодических движений в синтезируемом гидроприводе позволило установить, что для выполнения указанного требования значение периода автоколебаний в системе должно отвечать неравенству

$$2T > 0,034 \text{ с.} \quad (9)$$

Далее, исходя из условия нормального функционирования электромагнита, используемого в электрогидравлическом усилителе гидропривода, было окончательно выбрано желаемое значение периода автоколебаний $2T^0 = 0,05 \text{ с.}$

С помощью значения фазового годографа $\mathbf{x}^*(T^0)$ было определено периодическое движение $\mathbf{x}(t)$ гидропривода в номинальном режиме работы, соответствующее желаемой частоте автоколебаний. На рис. 4 представлены периодические функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ на интервале времени $0 \leq t \leq T^0$. При этом момент времени $t = 0$ совмещен с моментом переключения релейного элемента с "минуса" на "плюс".

Далее, с использованием рис. 4 на полупериоде было выделено пять интервалов времени, в течение которых движение гидропривода как объекта управления задается одним из четырех линейных дифференциальных уравнений (2)—(5). При номинальном режиме работы привода в моменты времени $t_1 = t_1^0 = 0,00419 \text{ с}$ и $t_2 = t_2^0 = 0,00579 \text{ с}$ на полупериоде имеет место сход фазовой траектории

с ограничителей, а в моменты $t_3 = t_3^0 = 0,00899$ с и $t_4 = t_4^0 = 0,02052$ с имеет место выход фазовой траектории на ограничители.

Кроме того, с помощью фазового годографа удобно оценивать устойчивость автоколебаний в релейной системе, а также выполнять линеаризацию релейной системы по полезному сигналу. Линеаризация по полезному сигналу дает возможность весьма быстро и просто определить точность режима слежения релейной системы, что особенно важно на этапе синтеза, когда приходится анализировать большое число вариантов.

В соответствии с алгебраическим критерием, разработанным в работе [13], асимптотическая орбитальная устойчивость номинальной симметричной периодической траектории $\mathbf{x}(t)$ исследуемого релейного гидропривода оценивается по собственным числам матрицы

$$\mathbf{G}(\Omega_0) = \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)\mathbf{Q}(\Omega_0), \quad (10)$$

здесь

$$\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0) = \mathbf{I} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)\mathbf{R}^T}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)}. \quad (11)$$

А именно, если собственные числа λ_i ($i = \overline{1, 8}$) матрицы \mathbf{G} удовлетворяют неравенствам $|\lambda_i| < 1$ ($i = \overline{1, 8}$), то соответствующее периодическое движение автономной релейной автоколебательной системы (2)–(6) асимптотически орбитально устойчиво.

В соотношения (10), (11) входят матрица $\mathbf{Q}(\Omega_0)$ и вектор фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)$ (здесь и далее индексами "-" обозначены пределы слева, а индексами "+" — пределы справа), которые могут быть вычислены заблаговременно до решения задачи конечномерной оптимизации. С учетом формы периодической траектории (см. рис. 4 и работу [13]) указанные вектор и матрица задаются равенствами

$$\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) = -\mathbf{C}^*(\Omega_0)\mathbf{x}^*(T^0) + \mathbf{B}\mathbf{A}; \quad (12)$$

$$\mathbf{Q}(\Omega_0) = \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0)\mathbf{Q}_4\mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0)\mathbf{Q}_3 \times \\ \times \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0)\mathbf{Q}_2\mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0)\mathbf{Q}_1\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0), \quad (13)$$

где

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], \\ \mathbf{Q}_3 = \text{diag}[1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1], \\ \mathbf{Q}_4 = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]; \quad (14)$$

$$\mathbf{V}(\Omega, t) = \mathbf{e}^{\mathbf{C}(\Omega)t}, \quad \mathbf{W}(\Omega, t) = \mathbf{e}^{\mathbf{C}^*(\Omega)t},$$

$$\mathbf{W}_\alpha(\Omega, t) = \mathbf{e}^{\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega)t}, \quad \mathbf{W}_\beta(\Omega, t) = \mathbf{e}^{\mathbf{C}_\beta^*(\Omega)t}.$$

Исследование режима слежения гидропривода выполнялось в работе с помощью метода дискретной линеаризации [15]. В процессе линеаризации дискретным методом релейная система заменяется неоднородным линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами и периодом диск-

ретизации по времени, равным полупериоду автоколебаний. Линеаризующее разностное уравнение, позволяющее определить точность режима слежения гидропривода при номинальном значении параметра Ω , задается равенством

$$\delta\mathbf{X}((k+1)T^0) = \\ = \mathbf{M}(\Omega_0)\delta\mathbf{X}(kT^0) + \mathbf{N}(\Omega_0)y((k+1)T^0), \quad (15)$$

где

$$\mathbf{M}(\Omega_0) = \hat{\mathbf{Q}}(\Omega_0)\mathbf{Q}(\Omega_0),$$

$$\hat{\mathbf{Q}}(\Omega_0) = \mathbf{I} - \frac{(\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) - \dot{\mathbf{x}}^+(T^0))\mathbf{R}^T}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)}, \quad (16)$$

$$\mathbf{N}(\Omega_0) = \frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) - \dot{\mathbf{x}}^+(T^0)}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)},$$

$$y(kT^0) = f(kT^0) + R\dot{f}(kT^0).$$

Уравнение (15) представляет собой систему неоднородных линейных разностных уравнений, которая позволяет рассчитать вариации $\delta\mathbf{X}(kT^0)$. Именно с помощью функции $\delta\mathbf{X}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ в работе оценивается точность режима слежения, поскольку она выделяет среднюю (полезную) составляющую движения системы (2)–(6), на которую наложены автоколебания.

В соотношения (16) входят матрица $\mathbf{Q}(\Omega_0)$ и векторы фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)$, $\dot{\mathbf{x}}^+(T^0)$, которые определяются представленными выше равенствами (12)–(14) и выражением

$$\dot{\mathbf{x}}^+(T^0) = -\mathbf{C}^*(\Omega_0)\mathbf{x}^*(T^0) - \mathbf{B}\mathbf{A}.$$

Как указывалось ранее, данные величины могут быть рассчитаны заблаговременно до решения задачи конечномерной оптимизации.

Из разностного уравнения (15) описанным в работе [15] способом определяется полезная составляющая установившегося движения синтезируемой системы

$$\delta\mathbf{X}(kT^0) = \mathbf{D}\cos(\omega kT^0) + \mathbf{H}\sin(\omega kT^0),$$

обусловленного суммарным входным гармоническим воздействием

$$y(t) = f(t) + R\dot{f}(t) = c\cos(\omega t) + d\sin(\omega t),$$

где $c = 1,26R$, $d = 1$. Искомые векторы задаются следующими соотношениями:

$$\mathbf{D} = \left(\mathbf{I}\sin(\omega T^0) + \frac{1}{\sin(\omega T^0)} (\mathbf{I}\cos(\omega T^0) - \mathbf{M})^2 \right)^{-1} \times \\ \times \left(\frac{1}{\sin(\omega T^0)} (\mathbf{I}\cos(\omega T^0) - \mathbf{M})\mathbf{N}c\cos(\omega T^0) - \right. \\ \left. - \mathbf{M}\mathbf{N}d + \mathbf{N}c\sin(\omega T^0) \right),$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sin(\omega T^0)} ((\mathbf{M} - \mathbf{I}\cos(\omega T^0))\mathbf{D} + \mathbf{N}(\cos(\omega T^0) + d\sin(\omega T^0))).$$

Полученные результаты позволяют рассчитать критерий оптимизации системы — амплитуду установившейся ошибки слежения за тестовым гармоническим сигналом (7) замкнутого гидропривода в номинальном режиме работы ($\Omega = \Omega_0$)

$$e_{\max} = \sqrt{D_\varphi^2 + (H_\varphi - d)^2}, \quad (17)$$

здесь и далее D_φ и H_φ — компоненты векторов \mathbf{D} и \mathbf{H} , соответствующие выходной координате системы φ .

Далее, в целях обеспечения работоспособности привода и относительной стабильности его характеристик в условиях наличия отклонения параметра Ω на каждом шаге оптимизационного поиска необходимо осуществлять контроль параметрической чувствительности характеристик синтезируемого релейного гидропривода. Для определения чувствительности симметричного периодического движения гидропривода $\mathbf{x}(t)$ к отклонению $\delta\Omega$ параметра Ω от номинального значения требуется использовать уравнения в вариациях (см. работу [10]), соответствующие уравнениям движения (2)—(5):

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{C}(\Omega_0)\delta\mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{C}(\Omega_0)}{d\Omega}\mathbf{x}(t)\delta\Omega; \quad (18)$$

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{C}^*(\Omega_0)\delta\mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega}\mathbf{x}(t)\delta\Omega; \quad (19)$$

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)\delta\mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)}{d\Omega}\mathbf{x}(t)\delta\Omega; \quad (20)$$

$$\frac{d\delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)\delta\mathbf{x}(t) + \frac{d\mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)}{d\Omega}\mathbf{x}(t)\delta\Omega. \quad (21)$$

Они связывают отклонение периодической траектории системы $\delta\mathbf{x}(t)$ с изменением параметра Ω . Следует отметить, что при получении уравнений

(18)—(21), а также остальных результатов в рамках работы опускались величины, имеющие порядок малости выше первого относительно вариации $\delta\Omega$.

В соответствии с полученными в работе [10] результатами коэффициент чувствительности полу-периода автоколебаний в гидроприводе задается равенством

$$K_\Omega^T = \frac{\mathbf{R}^T(\mathbf{Q}(\Omega_0)(\mathbf{I} + \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)\mathbf{Q}(\Omega_0))^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0) - \mathbf{I})\mathbf{P}(\Omega_0)}{\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)}, \quad (22)$$

где

$$\mathbf{P}(\Omega_0) = \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0)\mathbf{Q}_4(\mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0)\mathbf{Q}_3 \times \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0)\mathbf{Q}_2(\mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0)\mathbf{Q}_1\mathbf{g}(0, t_1^0) + \mathbf{g}_\beta(t_1^0, t_2^0)) + \mathbf{r}(t_2^0, t_3^0)) + \mathbf{g}_\alpha(t_3^0, t_4^0) + \mathbf{g}(t_4^0, T^0)). \quad (23)$$

Матрицы $\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)$, $\mathbf{Q}(\Omega_0)$ и вектор $\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)$ определяются соотношениями (11), (13) и (12). В соотношении (23): $\mathbf{r}(t_0, t)$ (t_0 — начальный момент времени) — решение уравнения (18) при нулевых начальных условиях, $\delta\Omega = 1$ и $u(t) = A$, символами $\mathbf{g}(t_0, t)$, $\mathbf{g}_\alpha(t_0, t)$, $\mathbf{g}_\beta(t_0, t)$ обозначены решения соответственно уравнений (19), (20), (21) при нулевых начальных условиях, $\delta\Omega = 1$ и $u(t) = A$. Матрицы \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 , \mathbf{Q}_3 , \mathbf{Q}_4 по-прежнему задаются равенствами (14).

Очевидно, векторы $\mathbf{g}(0, t_1^0)$, $\mathbf{g}_\beta(t_1^0, t_2^0)$, $\mathbf{r}(t_2^0, t_3^0)$, $\mathbf{g}_\alpha(t_3^0, t_4^0)$, $\mathbf{g}(t_4^0, T^0)$, а следовательно, и вектор $\mathbf{P}(\Omega_0)$, входящий в выражение (22), также могут быть рассчитаны до процедуры оптимизации.

Далее, как нетрудно установить (см. работу [10]), коэффициенты чувствительности моментов выхода периодической траектории на ограничители и схода с ограничителей t_1, t_2, t_3, t_4 задаются равенствами

$$K_\Omega^{t_1} = -\frac{\mathbf{L}_\alpha^T[\mathbf{C}(\Omega_0)(\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)\mathbf{K}_\Omega^* + \mathbf{g}(0, t_1^0)) + \frac{d\mathbf{C}(\Omega_0)}{d\Omega}\dot{\mathbf{x}}^-(t_1^0)]}{\mathbf{L}_\alpha^T\dot{\mathbf{x}}^-(t_1^0)}, \quad (24)$$

$$K_\Omega^{t_2} = -\frac{\mathbf{L}_\beta^T[\mathbf{C}(\Omega_0)(\mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0)\mathbf{Q}_1(\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)\mathbf{K}_\Omega^* + \mathbf{g}(0, t_1^0)) + \mathbf{g}_\beta(t_1^0, t_2^0))] + \frac{d\mathbf{C}(\Omega_0)}{d\Omega}\dot{\mathbf{x}}^-(t_2^0)]}{\mathbf{L}_\beta^T\dot{\mathbf{x}}^-(t_2^0)}, \quad (25)$$

$$K_\Omega^{t_3} = -\mathbf{L}_\alpha^T(\mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0)\mathbf{Q}_2(\mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0)\mathbf{Q}_1(\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)\mathbf{K}_\Omega^* + \mathbf{g}(0, t_1^0)) + \mathbf{g}_\beta(t_1^0, t_2^0)) + \mathbf{r}(t_2^0, t_3^0))(\mathbf{L}_\alpha^T\dot{\mathbf{x}}^-(t_3^0))^{-1}; \quad (26)$$

$$K_\Omega^{t_4} = -\mathbf{L}_\beta^T(\mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0)\mathbf{Q}_3(\mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0)\mathbf{Q}_2(\mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0)\mathbf{Q}_1(\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)\mathbf{K}_\Omega^* + \mathbf{g}(0, t_1^0)) + \mathbf{g}_\beta(t_1^0, t_2^0)) + \mathbf{r}(t_2^0, t_3^0)) + \mathbf{g}_\alpha(t_3^0, t_4^0))(\mathbf{L}_\beta^T\dot{\mathbf{x}}^-(t_4^0))^{-1}. \quad (27)$$

Здесь

$$\mathbf{L}_\alpha^T = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \mathbf{L}_\beta^T = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$\mathbf{K}_\Omega^* = -(\mathbf{I} + \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)\mathbf{Q}(\Omega_0))^{-1}\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)\mathbf{P}(\Omega_0)$$

— коэффициент чувствительности значения фазового годографа $\mathbf{x}^*(T^0)$, задающего периодическое движение $\mathbf{x}(t)$, к изменению параметра Ω . Входящие в соотношения (24)—(27) векторы фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}^-(t_1^0)$, $\dot{\mathbf{x}}^-(t_2^0)$, $\dot{\mathbf{x}}^-(t_3^0)$, $\dot{\mathbf{x}}^-(t_4^0)$ также могут быть рассчитаны до начала процедуры оптимизации.

Коэффициенты чувствительности K_Ω^T , $K_\Omega^{t_1}$, $K_\Omega^{t_2}$, $K_\Omega^{t_3}$, $K_\Omega^{t_4}$, \mathbf{K}_Ω^* полностью определяют чувствительность симметричного периодического движения $\mathbf{x}(t)$ системы (2)—(6) к изменению параметра Ω . Если найдены указанные показатели чувствительности, то параметры возмущенного симметричного периодического движения $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ в рассматриваемой системе (малое отклонение $\delta\mathbf{x}(t)$ обусловлено малым изменением $\delta\Omega$ параметра Ω относительно номинального значения), пренебрегая величинами, имеющими порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, можно задать с помощью равенств

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^*(T^0 + \delta T) &= \mathbf{x}^*(T^0) + \mathbf{K}_\Omega^* \delta\Omega, \quad T = T^0 + K_\Omega^T \delta\Omega, \\ t_1 &= t_1^0 + K_\Omega^{t_1} \delta\Omega, \quad t_2 = t_2^0 + K_\Omega^{t_2} \delta\Omega, \\ t_3 &= t_3^0 + K_\Omega^{t_3} \delta\Omega, \quad t_4 = t_4^0 + K_\Omega^{t_4} \delta\Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Чувствительность критерия устойчивости автоколебаний в гидроприводе задается коэффициентами чувствительности $K_\Omega^{\lambda_i}$ ($i = \overline{1, 8}$) собственных чисел λ_i ($i = \overline{1, 8}$) матрицы устойчивости \mathbf{G} (см. выражение (10)). Для определения указанных коэффициентов необходимо сначала рассчитать матрицу чувствительности матрицы \mathbf{G} к изменению параметра Ω . Выражение для искомой матрицы чувствительности имеет вид

$$\frac{d\mathbf{G}(\Omega_0)}{d\Omega} = \frac{d\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{Q}(\Omega_0) + \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0) \frac{d\mathbf{Q}(\Omega_0)}{d\Omega}.$$

Остановимся на получении производных $\frac{d\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega}$ и $\frac{d\mathbf{Q}(\Omega_0)}{d\Omega}$. В соответствии с определением производной, принимая во внимание соотношение (11), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega} &= \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0 + \delta\Omega) - \bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{\delta\Omega} = \\ &= \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta\Omega} \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)\mathbf{R}^T}{\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0)} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T^0 + K_\Omega^T \delta\Omega)\mathbf{R}^T}{\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0 - K_\Omega^T \delta\Omega)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь матрица $\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0 + \delta\Omega)$ соответствует случаю, когда в автономном гидроприводе имеет место возмущенное симметричное периодическое движение $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$, близкое к $\mathbf{x}(t)$, малое отклонение $\delta\mathbf{x}(t)$ которого обусловлено малым изменением $\delta\Omega$ параметра Ω относительно номинального значения. Параметры периодического движения $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ задаются равенствами (28).

Далее, пренебрегая величинами, имеющими порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, выразим вектор фазовой скорости:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T^0 + K_\Omega^T \delta\Omega) &= \\ &= -\mathbf{C}^*(\Omega_0 + \delta\Omega)\tilde{\mathbf{x}}^*(T^0 + K_\Omega^T \delta\Omega) + \mathbf{B}(\Omega_0 + \delta\Omega)A = \\ &= -\left(\mathbf{C}^*(\Omega_0) + \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega} \delta\Omega \right) (\mathbf{x}^*(T^0) + \mathbf{K}_\Omega^* \delta\Omega) + \\ &\quad + \left(\mathbf{B}(\Omega_0) + \frac{d\mathbf{B}(\Omega_0)}{d\Omega} \delta\Omega \right) A = \\ &= -\mathbf{C}^*(\Omega_0)\mathbf{x}^*(T^0) + \mathbf{B}(\Omega_0)A + \\ &\quad + \left(\frac{d\mathbf{B}(\Omega_0)}{d\Omega} A - \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{x}^*(T^0) - \mathbf{C}^*(\Omega_0)\mathbf{K}_\Omega^* \right) \delta\Omega. \end{aligned}$$

Последнее равенство можно переписать следующим образом:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^-(T^0 + K_\Omega^T \delta\Omega) = \dot{\mathbf{x}}^-(T^0) + \mathbf{K}_\Omega^{0-} \delta\Omega,$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\Omega^{0-} &= \\ &= \frac{d\mathbf{B}(\Omega_0)}{d\Omega} A - \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{x}^*(T^0) - \mathbf{C}^*(\Omega_0)\mathbf{K}_\Omega^* \end{aligned}$$

— коэффициент чувствительности значения вектора фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}$ на симметричной периодической траектории в моменты переключения релейного элемента с "плюса" на "минус" (в пределе слева). Итак, окончательно выражение для производной $\frac{d\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega}$ примет следующий вид:

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega} = \frac{\dot{\mathbf{x}}^-(T^0)\mathbf{R}^T(\mathbf{R}^T \mathbf{K}_\Omega^{0-}) - \mathbf{K}_\Omega^{0-}\mathbf{R}^T(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0))}{(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0))^2}. \quad (29)$$

Далее, в соответствии с правилами дифференцирования из соотношения (13) получим искомое выражение для производной:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}(\Omega_0)}{d\Omega} &= \frac{d\mathbf{W}(\Omega, T(\Omega) - t_4(\Omega))}{d\Omega} \Big|_{\Omega = \Omega_0} \times \\ &\times \mathbf{Q}_4 \mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0) \mathbf{Q}_3 \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{Q}_2 \mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0) \mathbf{Q}_1 \mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0) + \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0) \times \\
& \times \mathbf{Q}_4 \left. \frac{d\mathbf{W}_\alpha(\Omega, t_4(\Omega) - t_3(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} \mathbf{Q}_3 \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0) \times \\
& \quad \times \mathbf{Q}_2 \mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0) \mathbf{Q}_1 \mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0) + \\
& \quad + \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0) \mathbf{Q}_4 \mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0) \times \\
& \times \mathbf{Q}_3 \left. \frac{d\mathbf{V}(\Omega, t_3(\Omega) - t_2(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} \mathbf{Q}_2 \mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0) \times \\
& \times \mathbf{Q}_1 \mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0) + \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0) \mathbf{Q}_4 \mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0) \times \\
& \times \mathbf{Q}_3 \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0) \mathbf{Q}_2 \left. \frac{d\mathbf{W}_\beta(\Omega, t_2(\Omega) - t_1(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} \times \\
& \times \mathbf{Q}_1 \mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0) + \mathbf{W}(\Omega_0, T^0 - t_4^0) \mathbf{Q}_4 \mathbf{W}_\alpha(\Omega_0, t_4^0 - t_3^0) \times \\
& \quad \times \mathbf{Q}_3 \mathbf{V}(\Omega_0, t_3^0 - t_2^0) \mathbf{Q}_2 \mathbf{W}_\beta(\Omega_0, t_2^0 - t_1^0) \times \\
& \quad \times \mathbf{Q}_1 \left. \frac{d\mathbf{W}(\Omega, t_1(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0}. \quad (30)
\end{aligned}$$

В выражение (30) входит ряд производных, которые требуют определения. Сначала найдем производную

$$\left. \frac{d\mathbf{W}(\Omega, t_1(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = \frac{d\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)}{d\Omega},$$

которая представляет собой матрицу чувствительности матрицы $\mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)$. По определению производной, пренебрегая величинами, имеющими по-

рядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, имеем

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d\mathbf{W}(\Omega, t_1(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = \\
& = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\mathbf{W}(\Omega_0 + \delta\Omega, t_1^0 + K_\Omega^t \delta\Omega) - \mathbf{W}(\Omega_0, t_1^0)}{d\Omega} = \\
& = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{C}^*(\Omega_0 + \delta\Omega)(t_1^0 + K_\Omega^t \delta\Omega)} - \mathbf{e}^{\mathbf{C}^*(\Omega_0)t_1^0}}{\delta\Omega} = \\
& = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\mathbf{e}^{(\mathbf{C}^*(\Omega_0)t_1^0 + (\mathbf{C}^*(\Omega_0)K_\Omega^t + \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega}t_1^0)\delta\Omega)} - \mathbf{e}^{\mathbf{C}^*(\Omega_0)t_1^0}}{\delta\Omega}.
\end{aligned}$$

Пусть Ψ и Θ — произвольные квадратные матрицы одинаковой размерности, а $\delta\varepsilon$ — малая скалярная величина. Путем разложения в степенной матричный ряд было установлено, что с учетом величин первого порядка малости

$$\mathbf{e}^{(\Psi + \Theta\delta\varepsilon)} = \mathbf{e}^\Psi + \sum_{j=0}^i \frac{\sum_{i=0}^j \Psi^{i-j} \Theta^j}{(i+1)!} \delta\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d\mathbf{W}(\Omega, t_1(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = \\
& = \sum_{j=0}^i \frac{\sum_{i=0}^j (\mathbf{C}^*(\Omega_0)t_1^0)^{i-j} (\mathbf{C}^*(\Omega_0)K_\Omega^t + \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega}t_1^0) (\mathbf{C}^*(\Omega_0)t_1^0)^j}{(i+1)!}.
\end{aligned}$$

При практическом использовании данной формулы можно ограничиться вычислением 10...20 членов ряда, поскольку, как правило, он быстро сходится.

Аналогичным образом определяются другие производные, входящие в равенство (30):

$$\left. \frac{d\mathbf{W}(\Omega, T(\Omega) - t_4(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = \frac{\sum_{j=0}^i (\mathbf{C}^*(\Omega_0)(T^0 - t_4^0))^{i-j} (\mathbf{C}^*(\Omega_0)(K_\Omega^T - K_\Omega^{t_4}) + \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega}(T^0 - t_4^0)) (\mathbf{C}^*(\Omega_0)(T^0 - t_4^0))^j}{(i+1)!},$$

$$\left. \frac{d\mathbf{W}_\alpha(\Omega, t_4(\Omega) - t_3(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = \frac{\sum_{j=0}^i (\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)(t_4^0 - t_3^0))^{i-j} (\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)(K_\Omega^{t_4} - K_\Omega^{t_3}) + \frac{d\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)}{d\Omega}(t_4^0 - t_3^0)) (\mathbf{C}_\alpha^*(\Omega_0)(t_4^0 - t_3^0))^j}{(i+1)!},$$

$$\left. \frac{d\mathbf{V}(\Omega, t_3(\Omega) - t_2(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = \frac{\sum_{j=0}^i (\mathbf{C}(\Omega_0)(t_3^0 - t_2^0))^{i-j} (\mathbf{C}(\Omega_0)(K_\Omega^{t_3} - K_\Omega^{t_2}) + \frac{d\mathbf{C}(\Omega_0)}{d\Omega}(t_3^0 - t_2^0)) (\mathbf{C}(\Omega_0)(t_3^0 - t_2^0))^j}{(i+1)!},$$

$$\left. \frac{d\mathbf{W}_\beta(\Omega, t_2(\Omega) - t_1(\Omega))}{d\Omega} \right|_{\Omega=\Omega_0} = \frac{\sum_{j=0}^i (\mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)(t_2^0 - t_1^0))^{i-j} (\mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)(K_\Omega^{t_2} - K_\Omega^{t_1}) + \frac{d\mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)}{d\Omega}(t_2^0 - t_1^0)) (\mathbf{C}_\beta^*(\Omega_0)(t_2^0 - t_1^0))^j}{(i+1)!}.$$

Если найдена матрица чувствительности $\frac{d\mathbf{G}(\Omega_0)}{d\Omega}$, то матрицу устойчивости возмущенного периодического движения $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ в рассматриваемой системе (2)–(6) (малое отклонение $\delta\mathbf{x}(t)$ обусловлено малым изменением $\delta\Omega$ параметра Ω относительно номинального значения), пренебрегая величинами, имеющими порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, можно задать с помощью равенства

$$\mathbf{G}(\Omega_0 + \delta\Omega) = \mathbf{G}(\Omega_0) + \frac{d\mathbf{G}(\Omega_0)}{d\Omega} \delta\Omega.$$

Далее непосредственно рассмотрим процедуру расчета коэффициентов чувствительности собственных чисел матрицы устойчивости (10) (см. работу [8]). Пусть характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{G}(\Omega_0)$, определяющей устойчивость автоколебаний в номинальной системе (2)–(6), имеет вид

$$a_n(\lambda^0)^n + a_{n-1}(\lambda^0)^{n-1} + \dots + a_1\lambda^0 + a_0 = 0, \quad (31)$$

где a_k ($k = \overline{0, n}$) — постоянные коэффициенты, λ^0 — некоторое номинальное собственное число. Анализируя равенство (31), можно сделать вывод, что характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{G}(\Omega_0 + \delta\Omega)$ имеет следующую структуру:

$$(a_n + v_n\delta\Omega)(\lambda^0 + \delta\lambda)^n + (a_{n-1} + v_{n-1}\delta\Omega) \times (\lambda^0 + \delta\lambda)^{n-1} + \dots + (a_1 + v_1\delta\Omega)(\lambda^0 + \delta\lambda) + (a_0 + v_0\delta\Omega) = 0. \quad (32)$$

Здесь v_i ($i = \overline{0, n}$) — постоянные коэффициенты, $\delta\lambda$ — вариация некоторого номинального собственного числа λ^0 .

Опуская величины, имеющие порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$ и $\delta\lambda$, из соотношений (31) и (32) получим выражение

$$na_n(\lambda^0)^{n-1}\delta\lambda + v_n(\lambda^0)^n\delta\Omega + (n-1)a_{n-1}(\lambda^0)^{n-2}\delta\lambda + v_{n-1}(\lambda^0)^{n-1}\delta\Omega + \dots + a_1\delta\lambda + v_1\lambda^0\delta\Omega + v_0\delta\Omega = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\delta\lambda = - \frac{\sum_{j=0}^n v_j(\lambda^0)^j}{\sum_{k=1}^n ka_k(\lambda^0)^{k-1}} \delta\Omega. \quad (33)$$

Подставляя значения различных номинальных собственных чисел матрицы $\mathbf{G}(\Omega_0)$ в выражение (33), легко найти их приращения, обусловленные изменением параметра Ω . Таким образом, искомые коэффициенты чувствительности собственных чисел матрицы устойчивости \mathbf{G} определяются равенствами

$$K_{\Omega}^{\lambda_i} = - \frac{\sum_{j=0}^n v_j(\lambda_i^0)^j}{\sum_{k=1}^n ka_k(\lambda_i^0)^{k-1}}, \quad i = \overline{1, 8}.$$

Собственные числа матрицы устойчивости $\mathbf{G}(\Omega_0 + \delta\Omega)$, опуская величины, имеющие порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, при этом могут быть заданы зависимостями

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + K_{\Omega}^{\lambda_i} \delta\Omega, \quad i = \overline{1, 8},$$

здесь λ_i^0 ($i = \overline{1, 8}$) — собственные числа матрицы устойчивости автоколебаний в номинальной системе (2)–(6).

Отметим, что в работе для расчета коэффициентов v_i и a_k использовались функции математического программного пакета *MATLAB*, позволяющие выполнять символьные (аналитические) вычисления.

Функция чувствительности средней (полезной) составляющей движения замкнутого релейного гидроривода в режиме слежения $\mathbf{S}_{\Omega}(kT^0) = \frac{\partial \delta\mathbf{X}(kT^0)}{\partial \Omega}$ определяется из разностного уравнения

$$\mathbf{S}_{\Omega}((k+1)T^0) = \mathbf{M}(\Omega_0)\mathbf{S}_{\Omega}(kT^0) + \frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega} \delta\mathbf{X}(kT^0) - \mathbf{M}(\Omega_0)\delta\dot{\mathbf{X}}(kT^0)\mathbf{K}_{\Omega}^T + \frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega} y((k+1)T^0), \quad (34)$$

где $y(kT^0) = f(kT^0) + Rf(kT^0)$.

Остановимся теперь на получении производных $\frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega}$ и $\frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega}$.

В соответствии с правилами дифференцирования из выражения (16) следует:

$$\frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega} = \frac{d\hat{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{Q}(\Omega_0) + \hat{\mathbf{Q}}(\Omega_0) \frac{d\mathbf{Q}(\Omega_0)}{d\Omega}.$$

Аналогично тому, как выше была получена зависимость (29), нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{d\hat{\mathbf{Q}}(\Omega_0)}{d\Omega} = \frac{(\dot{\mathbf{x}}^-(T^0) - \dot{\mathbf{x}}^+(T^0))\mathbf{R}^T(\mathbf{R}^T\mathbf{K}_{\Omega}^{0-}) - (\mathbf{K}_{\Omega}^{0-} - \mathbf{K}_{\Omega}^{0+})\mathbf{R}^T(\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T^0))}{(\mathbf{R}^T\dot{\mathbf{x}}^-(T^0))^2},$$

где

$$\mathbf{K}_{\Omega}^{0+} = - \frac{d\mathbf{C}^*(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{x}^*(T^0) - \mathbf{C}^*(\Omega_0)\mathbf{K}_{\Omega}^* - \frac{d\mathbf{B}(\Omega_0)}{d\Omega} A$$

— коэффициент чувствительности значения вектора фазовой скорости $\dot{\mathbf{x}}$ на симметричной периодической траектории в моменты переключения релейного элемента с "плюса" на "минус" (в пределе справа).

Представленные выше выражения для вычисления матрицы $\frac{d\mathbf{Q}(\Omega_0)}{d\Omega}$ сохраняют свою справедливость.

Вновь применяя подход, использованный при получении зависимости (29), найдем выражение для производной

$$\frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega} = \frac{(\mathbf{K}_\Omega^{0-} - \mathbf{K}_\Omega^{0+})(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0) - \dot{\mathbf{x}}^-(T^0) - \dot{\mathbf{x}}^+(T^0))(\mathbf{R}^T \mathbf{K}_\Omega^{0-})}{(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{x}}^-(T^0))^2}.$$

Функцию чувствительности средней (полезной) составляющей установившегося движения замкнутого релейного гидропривода в режиме слежения за тестовым гармоническим сигналом (7) будем искать в виде

$$\mathbf{S}_\Omega(kT^0) = \frac{\partial \delta \mathbf{X}(kT^0)}{\partial \Omega} = \tilde{\mathbf{D}} \cos(\omega kT^0) + \tilde{\mathbf{H}} \sin(\omega kT^0)$$

в полном соответствии с тем, как это было показано в работе [9]. В результате получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}} = & - \left[\mathbf{I} \sin(\omega T^0) + \frac{(\mathbf{M}(\Omega_0) - \mathbf{I} \cos(\omega T^0))^2}{\sin(\omega T^0)} \right]^{-1} \times \\ & \times \left[\frac{\mathbf{M}(\Omega_0) - \mathbf{I} \cos(\omega T^0)}{\sin(\omega T^0)} \left(\frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{D} - \omega K_\Omega^T \mathbf{M}(\Omega_0) \mathbf{H} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega} (c \cos(\omega T^0) + d \sin(\omega T^0)) \right) + \\ & + \frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{H} + \omega K_\Omega^T \mathbf{M}(\Omega_0) \mathbf{D} + \\ & \left. + \frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega} (d \cos(\omega T^0) - c \sin(\omega T^0)) \right], \\ \tilde{\mathbf{H}} = & \frac{1}{\sin(\omega T^0)} \left[(\mathbf{M}(\Omega_0) - \mathbf{I} \cos(\omega T^0)) \tilde{\mathbf{D}} + \right. \\ & + \frac{d\mathbf{M}(\Omega_0)}{d\Omega} \mathbf{D} - \omega K_\Omega^T \mathbf{M}(\Omega_0) \mathbf{H} + \\ & \left. + \frac{d\mathbf{N}(\Omega_0)}{d\Omega} (c \cos(\omega T^0) + d \sin(\omega T^0)) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, средняя (полезная) составляющая движения параметрически возмущенной релейной системы (2)–(6) (при наличии малого изменения $\delta\Omega$ параметра Ω относительно номинального значения), пренебрегая величинами, имеющими порядок малости выше первого относительно $\delta\Omega$, может быть задана равенством

$$\delta \tilde{\mathbf{X}}(kT^0) = \delta \mathbf{X}(kT^0) + \mathbf{S}_\Omega(kT^0) \delta \Omega.$$

После этого на основании требований к допустимым значениям (отклонениям) характеристик гидропривода при заданном диапазоне изменения нестабильного параметра Ω формируются ограничения в виде неравенств на показатели чувстви-

тельности характеристик гидропривода к изменению этого параметра. Остановимся подробнее на данной процедуре.

Требование к допустимым значениям периода автоколебаний (9) можно формализовать с помощью неравенств

$$(T^0 \pm K_\Omega^T \Delta) > 0,017, \quad (35)$$

здесь и далее $\Delta = 0,2\Omega_0$ — максимально допустимое абсолютное отклонение параметра Ω .

Требование к допустимым значениям собственных чисел матрицы устойчивости \mathbf{G} можно формализовать с помощью неравенств

$$|\lambda_i^0 \pm K_\Omega^{\lambda_i} \Delta| < 1, \quad i = \overline{1,8}. \quad (36)$$

Наконец, требование к допустимым отклонениям амплитуды установившейся ошибки слежения гидропривода за тестовым гармоническим сигналом (7) можно формализовать с помощью неравенств

$$\left| \frac{\sqrt{(D_\phi \pm \tilde{D}_\phi \Delta)^2 + (H_\phi + \tilde{H}_\phi \Delta - 1)^2}}{\sqrt{(D_\phi)^2 + (H_\phi - 1)^2}} - 1 \right| < 0,5, \quad (37)$$

здесь \tilde{D}_ϕ и \tilde{H}_ϕ — компоненты векторов $\tilde{\mathbf{D}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, соответствующие выходной координате ϕ системы.

4. Основной этап синтеза релейного гидропривода — оптимизация закона управления

Процедура оптимизации релейного закона управления выполняется в четырехмерном пространстве коэффициентов обратных связей C_1, C_3, C_4, C_5 . В качестве критерия оптимизации выступает амплитуда $e_{\max}(C_1, C_3, C_4, C_5)$ установившейся ошибки $e(t) = f(t) - \phi(t)$ слежения замкнутого гидропривода за тестовым входным гармоническим сигналом (7) при работе в номинальном режиме.

На каждом шаге оптимизации после генерации значений коэффициентов C_1, C_3, C_4, C_5 :

- определяется согласующий коэффициент

$$\begin{aligned} C_2 = & \\ = & \frac{-C_1 i^*(T^0) + C_3 \gamma^*(T^0) + C_4 p^*(T^0) + C_5 \vartheta^*(T^0) + \varphi^*(T^0)}{\beta^*(T^0)}, \end{aligned}$$

обеспечивающий желаемое значение периода автоколебаний в замкнутой автономной системе (2)–(6) в номинальном режиме работы;

- проверяется необходимое условие существования в системе автоколебаний с желаемым периодом (условие надлежащего направления переключения релейного элемента в периодическом движении):

$$\mathbf{R}^T(\mathbf{C}^*(\Omega_0) \mathbf{x}^*(T^0) - \mathbf{B} \mathbf{A}) < 0;$$

- в целях повышения стабильности работы синтезируемого привода контролируется единственность периодического движения в системе

при сформированном векторе коэффициентов обратных связей;

- проверяется выполнение критерия асимптотической орбитальной устойчивости автоколебаний в номинальной системе по собственным числам матрицы (10);
- с помощью равенства (1) рассчитывается коэффициент усиления корректирующего звена R .

Помимо перечисленных выше действий на каждом шаге оптимизации последовательно проверяется выполнение ограничений (35)–(37), накладываемых на чувствительность полупериода автоколебаний в гидроприводе, критерия асимптотической орбитальной устойчивости автоколебаний, амплитуды установившейся ошибки слежения гидропривода за тестовым гармоническим сигналом к отклонению параметра Ω от номинального значения.

Критерий оптимизации рассчитывается в соответствии с равенством (17).

Невыполнение хотя бы одного из перечисленных выше ограничений инициирует переход к следующему шагу оптимизации. Критерием прекращения поиска служит заданное максимально допустимое число совершенных подряд неудачных шагов. К неудачным также относятся шаги, которые не привели к уменьшению критерия оптимизации.

Сформулированная выше задача конечномерной оптимизации была успешно решена с помощью стандартного генетического алгоритма математического пакета *MATLAB*. В результате проведенного синтеза были получены следующие оптимальные значения коэффициентов обратных связей гидропривода:

$$C_1 = 3,0599 \cdot 10^{-4}; C_2 = 0,8053; C_3 = 0,0499; \\ C_4 = 3,4754 \cdot 10^{-10}; C_5 = 3,0235 \cdot 10^{-4}.$$

Для проведения сравнительного анализа процедура оптимизации была повторно выполнена без учета ограничений на чувствительность характеристик гидропривода. Ниже представлены полученные при этом оптимальные значения коэффициентов обратных связей гидропривода:

$$C_1 = -0,1091; C_2 = 129,4408; C_3 = 0,1946; \\ C_4 = 8,3878 \cdot 10^{-11}; C_5 = 3,7315 \cdot 10^{-4}.$$

5. Анализ полученных результатов

В таблице приведены значения амплитуд установившихся ошибок слежения e_{\max} замкнутого гидропривода (с законами управления, синтезированных с учетом и без учета ограничений на чувствительность) за тестовым сигналом (7), полученные с помощью компьютерного моделирования привода.

Таким образом, в номинальном режиме работы более высокую точность демонстрирует замкнутый гидропривод, синтезированный без учета ограничений на чувствительность. Однако его характеристики не отличаются стабильностью: отклоне-

Результаты исследования синтезированного гидропривода

$\delta\Omega_d / \Omega_d^0$	e_{\max} , мрад	
	Привод, синтезированный с учетом ограничений на чувствительность	Привод, синтезированный без учета ограничений на чувствительность
-20 %	7,70	21,01
-10 %	5,97	10,09
0 %	5,45	4,55
10 %	5,90	Система неустойчива
20 %	7,48	Система неустойчива

ние e_{\max} от номинального значения при снижении Ω на 20 % достигает 360 %, а при Ω , превышающем номинальное значение, система становится неработоспособной, так как автоколебательный процесс в ней теряет устойчивость.

В то же время замкнутый гидропривод, синтезированный с учетом ограничений на чувствительность, с запасом удовлетворяет предъявляемым требованиям: при любых допустимых отклонениях параметра Ω он сохраняет работоспособность, а отклонение e_{\max} от номинального значения не превышает 42 %, т. е. он обладает существенно более высокими качественными характеристиками и работоспособностью.

Заключение

Таким образом, разработанные в работах [7–10] методы исследования чувствительности релейных автоколебательных систем позволили успешно решить задачу синтеза следящего релейного автоколебательного объемного силового гидропривода при задании ограничений на чувствительность его характеристик к изменению скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса. Именно этот параметр гидропривода наиболее часто подвержен изменениям на практике. При этом удалось обеспечить стабильно высокую точность и работоспособность привода при изменении скорости вращения приводящего двигателя гидронасоса в весьма широком диапазоне. Важно отметить, что в ходе синтеза использовалась математическая модель гидропривода, учитывающая наиболее существенные нелинейности, присущие реальному приводу. Это повышает практическую значимость полученных результатов.

Список литературы

1. Kanno M., Hara S., Nakamura R., Matsubara M. Algebraic Approach to Sensitivity Analysis in Optimal Feedback Control System Design // Proc. of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design. IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design, CACSD. 2010. P. 1696–1701.
2. Gazdoš F., Dostál P., Marholt J. Robust Control of Unstable Systems: Algebraic Approach Using Sensitivity Functions // International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2011. Vol. 5, N. 7. P. 1189–1196.

3. **Бурдаков С. Ф.** Управление колебательной системой с минимальной параметрической чувствительностью // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2012. Т. 2, № 145. С. 13–19.

4. **Сухих Н. Н., Рукавишников В. Л.** Использование функции чувствительности для анализа бортовых цифровых автоматических систем управления полетом // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2012. № 186. С. 92–95.

5. **Eslami M.** Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An Introduction. Berlin: Springer-Verlag, 1994, 600 p.

6. **Rozenwasser E., Yusupov R.** Sensitivity of Automatic Control Systems. London, New York, Washington, D.C: CRC Press, Boca Raton, 2000. 436 p.

7. **Моржов А. В., Фалдин Н. В.** Функции чувствительности характеристик автоколебаний в релейных системах с нелинейным объектом управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 6. С. 14–24.

8. **Моржова С. В., Фалдин Н. В.** Методы исследования чувствительности автоколебаний в релейных системах управления к изменению параметров объекта управления // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Труды XII Международной конференции (Самара, 2010 г.). Самара: Самарский научный центр РАН, 2010. С. 398–403.

9. **Фалдин Н. В., Моржов А. В.** Чувствительность ошибки слежения к изменению параметров объекта управления в ре-

лейной автоколебательной системе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 2. С. 81–88.

10. **Моржов А. В., Моржова С. В.** Метод исследования чувствительности периодических движений в релейной системе с кусочно-линейным объектом управления // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. Вып. 4. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. С. 236–247.

11. **Гамынин Н. С.** Гидравлический привод систем управления. М.: Машиностроение, 1972. 376 с.

12. **Моржов А. В., Моржова С. В.** Синтез релейного автоколебательного объемного силового гидропривода при задании ограничений на чувствительность // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 6. С. 27–34.

13. **Фалдин Н. В., Моржов А. В.** Автоколебания в релейных системах с кусочно-линейными объектами управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 2. С. 2–9.

14. **Фалдин Н. В.** Релейные системы автоматического управления // Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. С. 573–636.

15. **Фалдин Н. В., Моржов А. В.** Дискретная линеаризация по полезному сигналу релейных автоколебательных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 11. С. 13–19.

The Synthesis of the Relay Hydraulic Power Drive by Setting Limits on Parametrical Sensitivity of its Characteristics

A. V. Morzhov, morzhov@mail.ru, **S. V. Morzhova**, svetlana-morzhova@mail.ru✉,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation

Corresponding author: **Morzhova Svetlana V.**, Engineer,
Tula State University, Tula, 300012, Russian Federation,
e-mail: svetlana-morzhova@mail.ru

Received on January 31, 2017
Accepted on February 21, 2017

Relay control systems are widely used in engineering. Simple construction, reliability and low cost are the main advantages of such systems. Relay control systems are used in industrial control systems and also in moving objects control systems. Real values of control system plant parameters almost always differ from design (nominal) values. It also applies to relay self-oscillating control systems. Deviations of relay self-oscillating control system plant parameters may lead to perceptible reduction of input signals tracking accuracy, and in special case — to instability of periodic motions in the system. It makes the system unusable. So it's very important to control parametrical sensitivity of system characteristics at the stage of relay self-oscillating system synthesis. With the participation of the authors of this article effective methods of research of nonlinear tracking relay self-oscillating systems parametrical sensitivity were developed. These methods allow to research parametrical sensitivity of the system periodic motions and the system tracking mode. In this article the synthesis of the relay self-oscillating power volume hydraulic drive by setting limits on the sensitivity of its characteristics to changes of the pump drive motor rotation speed is considered using designed methods. Such hydraulic drives are often used in control systems of moving technical objects. The main drawbacks of volume hydraulic drives, which limits their application in tracking control systems, are difficulty of variable pump controlling and also significant dependence of drive characteristics on the rotation speed of the drive motor of the hydraulic pump. Its instability adversely affects on accuracy characteristics and efficiency of the drive. As a result, the synthesis could provide high accuracy and efficiency of hydraulic drive.

Keywords: volumetric hydraulic power drive, relay system, piecewise linear plant, sensitivity, self-oscillation, tracking mode, synthesis

Acknowledgements: This work was supported by RFBR, project 14-08-00662.

For citation:

Morzhov A. V., Morzhova S. V. The Synthesis of the Relay Hydraulic Power Drive by Setting Limits on Parametrical Sensitivity of its Characteristics, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 395–406.

DOI: 10.17587/mau.18.395-406

References

1. **Kanno M., Hara S., Nakamura R., Matsubara M.** Algebraic Approach to Sensitivity Analysis in Optimal Feedback Control System Design, *Proceedings of the IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design, CACSD*, 2010, pp. 1696–1701.
2. **Gazdoš F., Dostál P., Marholt J.** Robust Control of Unstable Systems: Algebraic Approach Using Sensitivity Functions, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 2011, vol. 5, no. 7, pp. 1189–1196.
3. **Burdakov S. F.** *Nauchno-tehnicheskie ведомosti Sankt-Petersburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. Informatika.*

Telekommunikacii. Upravlenie, 2012, vol. 2, no. 145, pp. 13–19 (in Russian).

4. **Suhij N. N., Rukavishnikov V. L.** *Nauchnyj vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta graždanskoj aviacii*, 2012, no. 186, pp. 92–95 (in Russian).

5. **Eslami M.** *Theory of Sensitivity in Dynamic Systems: An Introduction*, Berlin, Springer-Verlag, 1994, 600 p.

6. **Rozenwasser E., Yusupov R.** *Sensitivity of Automatic Control Systems*, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C: CRC Press, 2000, 436 pp.

7. **Morzhov A. V., Faldin N. V.** *Izv. RAN. Teorija i sistemy upravlenija*, 2014, no. 6, pp. 14–24 (in Russian).

8. **Morzhova S. V., Faldin N. V.** *Problemy upravlenija i modelirovanija v slozhnyh sistemah: Trudy XII Mezhdunarodnoj konferencii*, Samara, Samarskij nauchnyj centr RAN, 2010, pp. 398–403 (in Russian).

9. **Faldin N. V., Morzhov A. V.** *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 2, pp. 81–88 (in Russian).

10. **Morzhov A. V., Morzhova S. V.** *Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tehničeskije nauki*, Iss. 4, Tula, Publishing house of TulGU, 2016, pp. 236–247 (in Russian).

11. **Gamynin N. S.** *Gidravličeskij privod sistem upravlenija*, Moscow, Mashinostroenie, 1972, 376 p. (in Russian).

12. **Morzhov A. V., Morzhova S. V.** *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2012, no. 6, pp. 27–34 (in Russian).

13. **Faldin N. V., Morzhov A. V.** *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2007, no. 2, pp. 2–9 (in Russian).

14. **Faldin N. V.** *Matematicheskie modeli, dinamičeskije harakteristiki i analiz sistem avtomatičeskogo upravlenija* (K. A. Pupkov, N. D. Egupov ed.), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Je. Bauman, 2004, pp. 573–636 (in Russian).

15. **Faldin N. V., Morzhov A. V.** *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2006, no. 11, pp. 13–19 (in Russian).

УДК 519.7:681.31

DOI: 10.17587/mau/18.407-414

И. Ф. Чебурахин, д-р техн. наук, проф., logicifch@yandex.ru,

О. Н. Гавриш, аспирант, gavrish.o@gmail.com,

НИУ МАИ

Об эффективных методах синтеза булевых формул и схем из функциональных элементов

Целью данной работы является уточнение верхних оценок сложности симметрических булевых функций из стандартного и Жегалкина базисов, а также разработка алгоритмов для автоматизации синтеза дискретных устройств обработки информации. Предлагается конструктивный метод синтеза формул и схем на основе рекуррентных соотношений (функциональных уравнений) [9], сопровождаемый получением заранее аналитически верхних оценок различных показателей сложности (по числу букв; числу подформул; по числу функциональных элементов), в том числе и для схем минимальной сложности.

Ключевые слова: булевы функции, синтез формул и схем, функционал, декомпозиция, сложность, минимизация, функциональные уравнения, симметрические функции

Введение

Имеющиеся значительные успехи в создании и совершенствовании дискретных логических управляющих и вычислительных устройств имеют следующее обоснование. В прошлом столетии на основе булевой алгебры (математической логики) и достижений в электронике создаются первая, вторая и последующие ЭВМ. Далее процесс развития ЭВМ циклично повторяется: успехи математической логики подталкивают к созданию и решению других теоретических вопросов, относящихся к технике (аппаратная часть проекта), в свою очередь, для решения возникающих технических проблем приходится обращаться к математической логике и т. д. Таким образом, вначале создаются образцы вычислительной и управляющей техники, а затем они совершенствуются.

При этом разрабатываются методы минимизации синтеза формул и схем из функциональных элементов (ФЭ) по различным показателям сложности в стандартном базисе и в базисе Жегалкина. Из проводимых исследований в области математической кибернетики и дискретной математики следует, что получение требуемого минимального ре-

шения по определенным показателям сложности неизбежно предполагает использование алгоритмов переборного характера. Следствием этого является большая сложность (в том числе и вычислительная сложность и трудоемкость) получения такого решения уже для функций небольшой размерности. Это потребовало разработки новых подходов к постановке задачи и ее решению, заметно отличающихся по трудоемкости от переборных [1–3].

В ряде работ создана теория специальных алгоритмов оптимизации, алгоритмов вычисления оценок, алгебраическая теория алгоритмов и показано, что можно даже в явном виде строить экстремальные по качеству алгоритмы для решения очень широких классов трудно формализуемых задач, а также разрабатывать математические и прикладные аспекты теории интеллектуальных систем [4–6].

Особо важной является задача вывода оценки показателя сложности при представлении булевой функции в классах формул и схем. Для решения этой задачи в случае получения грубой оценки выбранного показателя сложности в работе применяется метод, основанный на функциональных уравнениях (рекуррентных соотношениях). Метод близок к применяемому ранее методу структурно-функ-

циональной декомпозиции ("от функции", "от аргументов"). Если применяемый аналитический метод структурно-функциональной декомпозиции дает грубую оценку показателя сложности, то применяется уточненный алгоритм для вычислительного метода [7, 8].

Итак, рассматривается проблема реализации булевых функций в классе формул и схем из функциональных элементов в разных базисах. Получаемые при этом схемы применяются в дискретных логических устройствах обработки информации и управления, от сложности (качества) которых зависят основные характеристики вычислительной и управляющей техники. Отмечено, что симметрические булевы функции чаще находят применение при проектировании вычислительных устройств в силу их специфических свойств [7, 8].

В качестве меры сложности (качества) представления функции f формулой F или схемой S из ФЭ определяем соответствующие показатели (дискретные функционалы):

$L_G(f, G)$ — суммарное число вхождений символов переменных (букв) в формулу F , реализующую функцию f в базисе G ;

$L_F(f, G)$ — число подформул (базисных) в F ;

$Dep_F(f, G)$ — глубина F ;

$L_S(f, G)$ — число ФЭ в схеме S , реализующей функцию f ;

$Dep_S(f, G)$ — глубина S , определяемая как наибольшее число ФЭ в цепочке среди всех цепочек, соединяющих вход с выходом.

Между собой эти показатели имеют сложные связи, они по-разному влияют на другие показатели качества синтезируемых схем.

По практическим, экономическим и другим соображениям показатели сложности (дискретные функционалы) минимизируем. При представлении функций в классе формул для минимизации показателей сложности используются эквивалентные преобразования, включая получение скобочных формул, а в классе схем для минимизации числа ФЭ дополнительно применяется ветвление их выходов [7, 8].

1. Функциональные уравнения (ФУ)

Рассмотрим несколько определений разных типов функциональных уравнений (ФУ), относящихся к новым методам [7, 8].

Пусть X — множество булевых переменных, $g^{(2)}$ — двухместная булева функция, задающая начальный член $f^{(2)}$ последовательности изучаемого класса функций $f^{(n)}(X)$, $n \geq 2$, и $h^{(2)}$ — функция рекурсии, входящая в базис G или представляемая через базисные функции. Тогда рекуррентное соотношение, получаемое на основе операции суперпозиции, имеет вид

$$f^{(n_1+n_2)}(X) = h(f^{(n_1)}(X_1), f^{(n_2)}(X_2)), \quad (1)$$

где $X_1 \cup X_2 = X$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n = n_1 + n_2$. Назовем соотношение (1) основным функциональным уравнением, несмотря на частный характер местности базисных функций $g^{(2)}$ и $h^{(2)}$. Данное определение ФУ отлично от имеющихся других.

При $n_1 = n - 1$, $n_2 = 1$ получаем ФУ типа 1:

$$f^{(n)} = h(f^{(n-1)}, x_n); \quad (2)$$

для симметрических функций при $n = 2^s$, $s = 1, 2, \dots$, $n_1 = n_2 = n/2$ получаем ФУ типа 2:

$$f^{(n)}(X) = h(f^{(n/2)}(X_1), f^{(n/2)}(X_2)); \quad (3)$$

при $n_1 = n - 2$, $n_2 = 2$ это будет ФУ типа 3:

$$f^{(n)} = h^{(3)}(f^{(n-2)}, x_{n-1}, x_n), \quad (4)$$

где $h^{(3)}$ — трехместная булева функция.

Применяем метод ФУ для получения оценки сложности реализации произвольной булевой функции $f^{(n)} \in P_2^{(n)}$ в базисе G_3 .

Пусть полином Жегалкина $F^{(n)} = K_1 \oplus \dots \oplus K_i \oplus \dots \oplus K_m$, где K_i — монотонная элементарная конъюнкция ранга r_i , $1 \leq i \leq m$, т. е. $F^{(n)}$ обладает строением $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_i, \dots, r_m)$, $r_1 \geq \dots \geq r_i \geq \dots \geq r_m$ (неравенства для порядка), и реализует произвольную функцию $f^{(n)}$. Для полинома Жегалкина $F^{(n)}$ определяем вектор \mathbf{p} повторяемости переменных множества $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ в формуле $F^{(n)}$ (учитывая возможное приложение при разработке прикладных программ). Пусть вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n)$, где переменная x_i , $1 \leq i \leq n$, повторяется в формуле $F^{(n)}$ p_i раз.

Находим $p_i = \max\{p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_n\}$ и, используя булеву алгебру, получаем функциональное соотношение

$$F^{(n)} = ((x_i \cdot F_0^{(n-1)}) \oplus F_1^{(n-1)}), \quad (5)$$

здесь нижние индексы 0 и 1 — номера соответствующих остаточных подфункций, рассматриваемых на одном множестве $X' = X \setminus \{x_i\}$; "·" — конъюнкция (точка — знак умножения — может также применяться для обозначения арифметического умножения). На основе ФУ (5) строится алгоритм градиентного типа, позволяющий получить требуемую суперпозиционную формулу $F_{с.ф.}^{(n)}$. С помощью соотношения (5) аналитически получаем верхнюю оценку показателя сложности L_F . Каждое применение ФУ (5) порождает не более двух базисных функций и не более двух остаточных функций.

Соотношение (1) применяется к аргументам функции h и так далее, позволяя получить суперпозиционную формулу $F_{с.ф.}$, реализующую функцию $f^{(n)}$. Таким образом, ФУ представляет собой конструктивный метод построения булевых функций определенного класса на основе заданных. Оно характеризуется определенными выше показателями качества, для каждого из которых выводится свое ФУ показателя качества (ФУ_{ПК}). Для получе-

ния оценок показателей качества применяются как непосредственное решение уравнений, так и моделирование ФУ_{ПК}. ФУ (5) применяется до тех пор, пока остаточные функции не будут совпадать с базисными.

2. Элементарные симметрические полиномы (ЭСП) Жегалкина

Рассмотрим элементарные симметрические полиномы Жегалкина $F_i^{(n)}$ (верхний индекс n — конечное число переменных, нижний индекс i — степень полинома, т. е. $2 \leq n \leq N$ и тогда $1 \leq i \leq n$; отличать от произвольного полинома Жегалкина [7, 8]). Они имеют вид

$$\begin{aligned} F_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \oplus \dots \oplus x_n; \\ F_2^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus \dots \oplus x_{n-1} \cdot x_n; \quad (6) \\ &\dots \\ F_n^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \cdot \dots \cdot x_n. \end{aligned}$$

Формулы (6) можно автоматизировано получать с помощью табл. 1 и использовать при синтезе схем из ФЭ, а также применять при создании определенной базы данных.

Пусть для симметрического полинома Жегалкина $F_i^{(n)}$ построена табл. 1 с n строками, числом столбцов i , $1 \leq i \leq n$. Первый и последний элементы строки всегда определены как функции исследованных счетных классов $F_0^{(n)}$ и $F_n^{(n)}$ (полностью исследованных как функции простых классов "&" и "⊕"). Получаем со 2-го по n -й элементы (полиномы Жегалкина) строки с номером $n + 1$ по правилу (см. выделенный фрагмент табл. 1, меняющийся в зависимости от степени i полинома Жегалкина):

$$F_3^{(n+1)} = (F_3^{(n)} \oplus (x_{n+1} \cdot F_2^{(n)})).$$

Таблица 1

Число переменных (n)	Полиномы Жегалкина $F_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \dots, n$					
	$F_1^{(n)}$	$F_2^{(n)}$	$F_3^{(n)}$	$F_4^{(n)}$	$F_5^{(n)}$	$F_6^{(n)}$
	2	3	4	5	6	7
2	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$				
3	$F_1^{(3)}$	$F_2^{(3)}$	$F_3^{(3)}$			
4	$F_1^{(4)}$	$F_2^{(4)}$	$F_3^{(4)}$	$F_4^{(4)}$		
...
n	$F_1^{(n)}$	$F_2^{(n)}$	$F_3^{(n)}$	$F_4^{(n)}$	$F_5^{(n)}$	$F_6^{(n)}$
$n + 1$			$F_3^{(n+1)}$			

В общем виде получается следующий результат:

$$F_i^{(n+1)} = (F_i^{(n)} \oplus (x_{n+1} \cdot F_{i-1}^{(n)})),$$

где $2 \leq i \leq n$.

Теперь исследуем представление ЭСП Жегалкина (в качестве примера с переменной x_n)

$$F_2^{(n)} = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus \dots \oplus x_{n-1} \cdot x_n, \quad n \geq 2, \quad (7)$$

в базисе G_3 на основе ФУ типа 1 (градиентного алгоритма):

$$F_2^{(n)} = (F_2^{(n-1)} \oplus (x_n \cdot F_1^{(n-1)})), \quad n \geq 3. \quad (8)$$

Реализация функции $F_2^{(n)}$ на основе ФУ (8) в классах формул и схем из ФЭ характеризуется следующими пятью ФУ_{ПК}:

$$\begin{aligned} L_6(F_2^{(n)}, G_3) &= \\ &= L_6(F_2^{(n-1)}, G_3) + L_6(F_1^{(n-1)}, G_3) + 1; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_F(F_2^{(n)}, G_3) &= \\ &= L_F(F_2^{(n-1)}, G_3) + L_F(F_1^{(n-1)}, G_3) + 2; \quad (10) \end{aligned}$$

$$Dep_F(F_2^{(n)}, G_3) = Dep_F(F_1^{(n-1)}, G_3) + 1; \quad (11)$$

$$\begin{aligned} L_S(F_2^{(n)}, G_3) &= \\ &= L_S(F_2^{(n-1)}, G_3) + L_S(F_1^{(n-1)}, G_3) + 2; \quad (12) \end{aligned}$$

$$Dep_S(F_2^{(n)}, G_3) = Dep_S(F_1^{(n-1)}, G_3) + 1. \quad (13)$$

Уравнения (11) и (13) совпадают (рассмотрим их ниже по тексту), уравнения (10) и (12) совпадают, причем уравнения (9) и (10) сводятся к одному разностному уравнению с разными начальными условиями.

Начальные условия для показателей L_6 и L_F и $n = 2$ следующие:

$$F_1^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2, \quad F_2^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 x_2,$$

$$L_6(F_2^{(2)}, G_3) = L_6(F_1^{(2)}, G_3) = 2,$$

$$L_F(F_2^{(2)}, G_3) = L_F(F_1^{(2)}, G_3) = 1.$$

Так как здесь схемы S без ветвления (см. ниже замечание 1), то

$$L_S(F_2^{(n)}, G_3) = L_F(F_2^{(n)}, G_3);$$

$$Dep_S(F_2^{(n)}, G_3) = Dep_F(F_2^{(n)}, G_3). \quad (14)$$

Вводим обозначения

$$u_n = L_6(F_1^{(n)}, G_3), \quad u_{n-1} = L_6(F_1^{(n-1)}, G_3) \quad (\text{для } L_6) \text{ и}$$

$$u_n = L_F(F_1^{(n)}, G_3), \quad u_{n-1} = L_F(F_1^{(n-1)}, G_3) \quad (\text{для } L_F).$$

Тогда уравнения (9) и (10) сводятся к одному разностному уравнению с разными начальными условиями:

- для L_6 :

$$u_n = u_{n-1} + L_6(F_1^{(n-1)}, G_3) + 1 = u_{n-1} + (n-1) + 1 = u_{n-1} + n, u_2 = 2; \quad (15)$$

- для L_F :

$$u_n = u_{n-1} + L_F(F_1^{(n-1)}, G_3) + 2 = u_{n-1} + (n-2) + 2 = u_{n-1} + n, u_2 = 1. \quad (16)$$

Решения разностных уравнений (15) и (16) следующие:

$$u_n = L_6(F_2^{(n)}, G_3) = (n^2 + n - 2)/2; \quad (17)$$

$$u_n = L_F(F_2^{(n)}, G_3) = (n^2 + n - 4)/2. \quad (18)$$

Тогда показатель L_S , с учетом выражения (14), принимает вид

$$L_S(F_2^{(n)}, G_3) = (n^2 + n - 4)/2. \quad (19)$$

Для схемы S (без ветвления) оценка (19) является верхней. Рассмотрим задачу минимизации показателя L_S на основе метода ветвления выходов ФЭ. Для ее решения эффективно следующее разложение ЭСП Жегалкина второй степени через полиномы первой степени, получаемое на основе выражения (8) (скобки проставляются в целях определения порядка операций, иногда только для упрощения опускаются, если возможно):

$$\begin{aligned} F_2^{(n)} &= \underline{(F_2^{(n-2)} \oplus (x_{n-1} \cdot F_1^{(n-2)})) \oplus (x_n \cdot F_1^{(n-1)})} = \\ &= \dots = F_2^{(2)} \oplus x_3 \cdot F_1^{(2)} \oplus x_4 \cdot F_1^{(3)} \oplus \dots \oplus \\ &\quad \oplus x_{n-1} \cdot F_1^{(n-2)} \oplus x_n \cdot F_1^{(n-1)} = \\ &= x_2 \cdot F_1^{(1)} \oplus x_3 \cdot F_1^{(2)} \oplus x_4 \cdot F_1^{(3)} \oplus \dots \oplus \\ &\quad \oplus x_{n-1} \cdot F_1^{(n-2)} \oplus x_n \cdot F_1^{(n-1)} = \oplus_{i=2}^n x_i \cdot F_1^{(i-1)} = \\ &= \underline{(((x_1 \cdot x_2) \oplus x_3 (x_1 \oplus x_2)) \oplus x_4 \cdot ((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3)) \oplus} \\ &\quad \underline{\oplus \dots \oplus x_{n-1} \cdot (x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2}) \oplus} \\ &\quad \underline{\oplus x_n \cdot ((x_1 \oplus \dots \oplus x_{n-2}) \oplus x_{n-1})} = F_{с.ф.}, \quad (20) \end{aligned}$$

где F — искомая суперпозиционная формула. Первое подчеркнутое выражение в формуле (20) представляет собой уже повторное преобразование ФУ (8), дальнейшее повторение таких преобразований приводит к полному разложению ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)}$ в ряд по линейным функциям (с возрастанием числа переменных) и получению суперпозиционной формулы $F_{с.ф.}$.

Замечание 1. В первом подчеркнутом выражении (20) неявно записана возможность ветвления для класса схем из ФЭ, в последнем подчеркнутом выражении (20) она присутствует, можно сказать,

очевидно (сумма в скобках умножается на переменную и следом суммируется с ней же). На основе ФУ (8) и разложения (20) (последнее выражение) получаем уточнение ФУ_{ПК} (12) с начальным условием:

$$L_S(F_2^{(3)}, G_3) = 4. \quad (21)$$

Оно состоит в том, что ЭСП Жегалкина $F_1^{(n-1)}$ участвует в построении формулы F дважды (и ФУ (10) сохраняется), но в схеме S за счет ветвления используется один раз и для итерации показатель L_S фактически уменьшается на единицу. Поэтому второе слагаемое в ФУ (8) для каждой итерации, кроме последней, т. е. для $k = 3, 4, 5, \dots, n-1$, увеличивает значение L_S на единицу (один ФЭ, который участвует и в ветвлении), а ФУ_{ПК} (12) тогда принимает вид

$$\begin{aligned} L_S(F_2^{(n)}, G_3) &= \\ &= L_S(F_2^{(n-1)}, G_3) + 3, L_S(F_2^{(3)}, G_3) = 5. \quad (22) \end{aligned}$$

Итак, для (22) разностное уравнение с начальным условием есть

$$u_n - u_{n-1} = 3, u_3 = 5. \quad (23)$$

Решение уравнения (23) имеет вид

$$u_n = 3n - 4, n \geq 3. \quad (24)$$

Возвращаемся к исходному показателю L_S , учитывая, что последняя итерация неполная (соответственно уменьшаем оценку (24) на единицу):

$$L_S(F_2^{(n)}, G_3) = 3n - 5, n \geq 3. \quad (25)$$

Таким образом, за счет использования ветвления на выходе ФЭ порядок многочлена (19) оценки показателя L_S уменьшен на единицу. Докажем минимальность оценки (25) методом математической индукции.

При реализации функции $F_2^{(3)}$ схемой из ФЭ получение $F_1^{(3)}$ не требуется, но для больших значений n ($n \geq 4$) — обязательно (рис. 1).

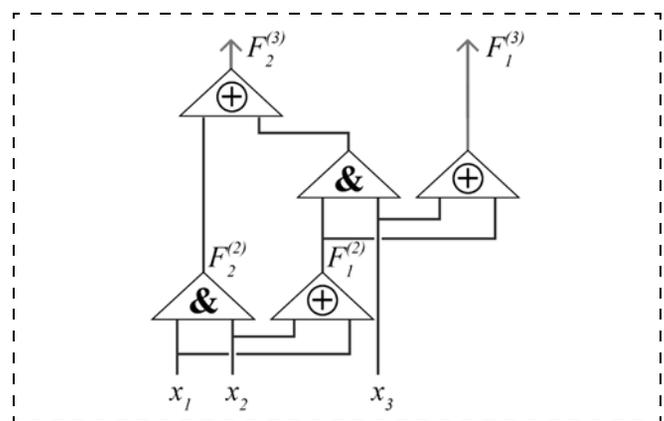


Рис. 1. Начальный фрагмент схемы, реализующей ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)}$, $n \geq 4$ (первая итерация, $k = 1$)

При $n = 3$ для реализации $F_2^{(3)} = x_1 x_2 \oplus x_3 (x_1 \oplus x_2)$ используем для двух базисных функций $g_{\&}^{(2)}$ и $g_{\oplus}^{(2)}$ по два соответствующих ФЭ (рис. 1, иллюстрацию можно проводить также на основе ФУ), получая $L_S(F_2^{(3)}, G_3) = 4$, т. е. для начальных условий утверждение имеет место.

Предположим, что для n утверждение $L_S(F_2^{(n)}, G_3) = 3n - 5$ истинно, и надо получить $L_S(F_2^{(n+1)}, G_3) = 3n - 2$.

На основе ФУ (8) запишем: $F_2^{(n+1)} = (F_2^{(n)} \oplus \oplus (x_{n+1} \cdot F_1^{(n)}))$.

Рассмотрим показатель $L_S(F_2^{(n+1)}, G_3)$ и запишем его на основе ФУ_{ПК} (22), т. е. $L_S(F_2^{(n+1)}, G_3) = L_S(F_2^{(n)}, G_3) + 3 = 3n - 2$ (рис. 2), что и требовалось вывести:

$$L_S(F_2^{(n)}, G_3)_{\min} = 3n - 5. \quad (26)$$

Она также получается на основе метода структуризации ФУ:

для ЭСП $F_2^{(n)}$, $n \geq 2$, в базисе G_3 на основе ФУ типа 1 число итераций равно $(n - 2)$, причем при реализации начальных условий требуется пять ФЭ (см. рис. 1); в каждой из первых $(n - 4)$ итерациях используется три ФЭ (рис. 2, а); в последней итерации — два ФЭ (рис. 2, б). Итого, вычисляя $5 + 3(n - 3) - 1$, повторяем оценку (26).

Оценка (26) справедлива также в классе монотонных симметрических булевых функций, задаваемых ДНФ, представляемых на основе ФУ типа 1 в базисе $G_2 = \{\&, \vee\}$.

В отношении глубины заметим, что оценки Dep_F и Dep_S получаются на основе ФУ (8) и ФУ_{ПК} (11) (и $Dep_S = Dep_F$).

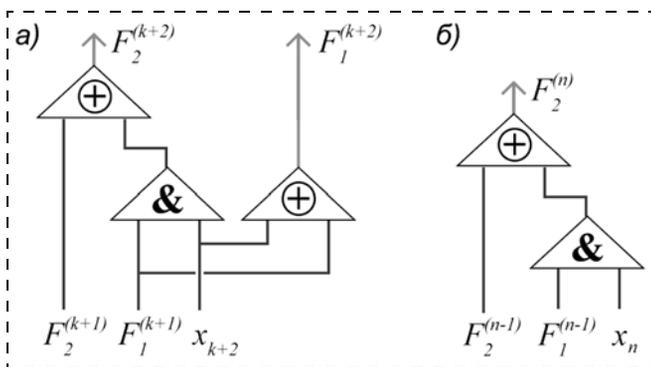


Рис. 2. Общий фрагмент схемы, реализующей ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)}$, k -я полная итерация, $2 \leq k < n - 2$ (а); последний фрагмент схемы, реализующей ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)}$, неполная итерация, $k = n - 2$ (б)

При построении схемы S выполняется ветвление выходов ФЭ при реализации ЭСП Жегалкина $F_1^{(n-1)}$: один выход идет на образование конъюнкции с переменной x_n , другой — на получение $F_1^{(n)}$ для следующей итерации. При этом участвующие в этом две операции чередуются, образуя цепочку, параллельную основной цепочке вычислений $F_2^{(n)}$, меньшей глубины. Вклад, который вносит второе слагаемое правой части (20) в значение глубины за счет ветвления, равен единице. Поэтому приходим к уравнению

$$u_n - u_{n-1} = 2, u_3 = 3. \quad (27)$$

Для (27) получаем решение ФУ_{ПК} (11), оценки Dep_F и Dep_S есть $u_n = 2n - 3$. Эти оценки улучшаются следующим образом.

Определим глубину ЭСП Жегалкина $F_2^{(n)}$ в базисе G_3 на основе определения и ФУ (8):

$$Dep_F(F_2^{(n)}, G_3) = \max\{Dep_F(F_2^{(n-1)}, G_3); 1 + Dep_F(F_1^{(n-1)}, G_3)\} + 1. \quad (28)$$

Моделируя процесс построения формулы F для $n = 4, 5, 6, \dots$, вычислительным методом находим сеточную функцию u_n (табл. 2) для $Dep_F(F_2^{(n)}, G_3)$, откуда она находится аналитически, т. е.

$$Dep_F(F_2^{(n)}, G_3) = n.$$

Таблица 2

$n = 3$	4	5	6	7	8	9	...
$u_n = 3$	4	5	6	7	8	9	...

Для формулы F , полученной данным методом, изоморфно строится схема S (без ветвления), которая преобразуется на основе ФУ (20), и показатель L_S минимизируется за счет ветвления, так как ФУ (20) это позволяет. Таким образом,

$$Dep_F(F_2^{(n)}, G_3) = Dep_S(F_2^{(n)}, G_3) = n. \quad (29)$$

Также можно видеть из схемы синтеза схемы (5), что глубина схемы зависит от двух составляющих: глубины $F_2^{(n-1)}$ и $F_1^{(n-1)}$. Глубина левого рукава задана рекурсивно и зависит от максимума (см. (28)), правый же рукав имеет некоторую вычислимую глубину. Рассмотрим последовательно, начиная с минимальных n и r .

$$F_2^{(3)} = F_2^{(2)} \oplus x_3 \cdot F_1^{(2)};$$

...

$$F_2^{(n)} = F_2^{(n-1)} \oplus x_n \cdot F_1^{(n-1)}.$$

Правый рукав здесь — функции вида $g = x_n \cdot F_1^{(n-1)}$, с подсчитанной ранее глубиной $n - 1$,

т. е. правый рукав имеет прирост по глубине, равный единице. Левый рукав, как видно из соотношения (28), также имеет прирост, равный 1. Таким образом, достаточно показать, что левый рукав имеет меньшее или равное значение показателя глубины на начальный момент времени: $Dep_S(F_1^{(2)}, G_3) = 1$,

$Dep_S(F_2^{(2)}, G_3) = 1$. Отсюда глубина правого рукава равна двум, что больше глубины левого рукава.

Для каждого ряда функций, описываемых выражением (5), левые рукава начинаются с $F_n^{(n)}$, глубина которых равна $n - 1$. Отсюда, при приросте глубины схемы правого рукава +1 при росте степени полинома глубина правого рукава всегда будет больше глубины левого, и итоговая глубина схемы зависит от значения правого рукава, что дает показатель глубины: $Dep_S(F_r^{(n)}, G_3) = n + r - 2, n > r$.

Подсчитанные показатели глубины приведены в табл. 3.

Аналогичным образом в работах [10–12] получены оценки показателя L_S для ЭСП Жегалкина:

$$L_S(F_1^{(n)}, G_3)_{\min} = L_S(F_n^{(n)}, G_3) = n - 1;$$

$$L_S(F_3^{(n)}, G_3)_{\min} = 5n - 13;$$

$$L_S(F_4^{(n)}, G_3) = 7n - 25;$$

$$L_S(F_5^{(n)}, G_3) = 9n - 41.$$

Таблица 3

Степень	Число переменных (n)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2		1	3	4	5	6	7	8	9	10
3			2	5	6	7	8	9	10	11
4				3	7	8	9	10	11	12
5					4	9	10	11	12	13
6						5	11	12	13	14
7							6	13	14	15
8								7	15	16
9									8	17
10										9

Таблица 4

Число переменных (n)	Сложность реализации ЭСП Жегалкина $F_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots, n$, по числу ФЭ					
	$L_S(F_1^{(n)})$	$L_S(F_2^{(n)})$	$L_S(F_3^{(n)})$	$L_S(F_4^{(n)})$	$L_S(F_5^{(n)})$	$L_S(F_6^{(n)})$
2	1	1				
3	2	4	2			
4	3	7	7	3		
5	4	10	12	10	4	
6	5	13	17	17	13	5
7	6	16	22	24	22	
...
n	$n - 1$	$3n - 5$	$5n - 13$	$7n - 25$	$9n - 41$...

Теперь в табл. 1 для каждого вхождения полинома Жегалкина $F_i^{(n)}$ вместо него подставляем соответствующую имеющуюся минимальную оценку показателя сложности $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$, получая табл. 4.

Табл. 4 заполнена для тех значений переменных i и n , для которых выведены оценки показателей сложности $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$, $1 \leq i \leq 5$, и при условии, что они помещаются в отведенной ей части табл. 4. При их размещении использована часть таблицы между вертикалью, относящейся к столбцу $L_S(F_1^{(n)})$ (для $2 \leq n \leq N$ и тогда $1 \leq i \leq n$), и ниже смещенной диагонали (вверх), характеризуемой полиномами Жегалкина $F_n^{(n)}$, $2 \leq n \leq N$. Важной особенностью оценок табл. 4, как ранее было отмечено [9], является совпадение оценок, полученных на основе методов последовательной и параллельной декомпозиции.

Табл. 4 может использоваться для получения оценок сложности $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$, (для соответствующей базы данных). Но что делать, если потребуются оценки из незаполненной части таблицы (нижний правый угол)?

Индексы членов последовательности определяются значением n в столбце. В таком смысле данные табл. 2 упорядочены, приведены к одному стандарту. Представляет интерес следующая задача.

Основная задача 1. Для заданного полинома Жегалкина $F_i^{(n)}$, т. е. для заданных n и i , где $2 \leq n \leq N$ и $1 \leq i \leq n$, получить аналитически функционал сложности $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$ для обеих переменных n и i .

Получать решение задачи 1 можно методами моделирования и/или структуризации, как это делалось в примере для полинома Жегалкина $L_S(F_2^{(n)})$. Это решение трудоемко и сильно усложняется при возрастании n . К тому же, возникают вопросы: на каких значениях переменных n и i надо остановиться; как хранить в памяти всю табл. 4 даже для небольших значений параметров i и n ?

Искомый функционал есть

$$L_S(F_i^{(n)}, G_3) =$$

$$= (n - 1) + (i - 1)(2n - 4) - (2i^2 - 6i + 4).$$

Для решения задачи 1 можно предложить следующий подход. Для имеющихся оценок в табл. 4 провести исследование и вывести общую универсальную оценку $L_S(F_i^{(n)}, G_3) = L_S(i, n)$, зависящую от двух переменных n и i , для $2 \leq n \leq N$ и тогда $1 \leq i \leq n$.

Введем обозначения $U_i = L_S(F_i^{(n)}, G_3)$, $1 \leq i \leq n$.

Для имеющихся оценок сложности [12] проводим исследование и выполняем преобразования, разбивая каждую из них на три алгебраических слагаемых (кроме первой и второй оценок, где просто). Итак, из каждого U_i , $3 \leq i \leq n - 1$ (строки), выделяем пер-

вое слагаемое $(n - 1)$, затем из оставшегося выражения выделяем произведение $(i - 1)(2n - 4)$, т. е.

$$U_1 = L_S(F_1^{(n)}, G_3) = n - 1;$$

$$U_2 = L_S(F_2^{(n)}, G_3) = 3n - 5 = (n - 1) + (2n - 4);$$

$$U_3 = L_S(F_3^{(n)}, G_3) = 5n - 13 = (n - 1) + 2(2n - 4) - 4;$$

$$U_4 = L_S(F_4^{(n)}, G_3) = 7n - 25 = (n - 1) + 3(2n - 4) - 12;$$

$$U_5 = L_S(F_5^{(n)}, G_3) = 9n - 41 = (n - 1) + 4(2n - 4) - 24;$$

$$U_6 = L_S(F_6^{(n)}, G_3) = 11n - 61 = (n - 1) + 5(2n - 4) - 40,$$

...

Тогда оставшаяся часть — некоторая сеточная функция U_i ; 4, 12, 24, 40, ..., для значений аргумента i , $3 \leq i \leq n - 1$, получается вычитанием из исходного выражения $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$ первых двух слагаемых.

После проведенных исследований функцию U_i ищем аналитически в виде многочлена по i с неопределенными коэффициентами. Составляем разности первого, второго и далее порядков, пока не получим нулевую строку (если такая существует). Тогда из табл. 5 следует, что разности третьего порядка нулевые, означающее второй порядок для многочлена U_i .

Таблица 5

i	3	4	5	6	7	...
U_i	4	12	24	40	60	...
$\Delta U_i = U_{i+1} - U_i$		8	12	16	20	...
$\Delta^2 U_i = \Delta U_{i+1} - \Delta U_i$			4	4	4	...
$\Delta^3 U_i$				0	0	...

Поэтому находим третье слагаемое, удовлетворяющее начальному условию, в виде многочлена второй степени

$$U_i = a_0 i^2 + a_1 i + a_2. \quad (30)$$

Решаем систему линейных уравнений, получаемую из выражения (30) (для $i = 3, 4, 5$) следующим образом, минимизируя вычислительную сложность: из 1-го уравнения вычитаем 2-е, из 2-го вычитаем 3-е, затем выполняется эта же процедура для полученных первых двух уравнений, т. е.

$$a_0 \cdot 5^2 + a_1 \cdot 5 + a_2 = 24,$$

$$a_0 \cdot 4^2 + a_1 \cdot 4 + a_2 = 12,$$

$$a_0 \cdot 3^2 + a_1 \cdot 3 + a_2 = 4.$$

И, окончательно, находим $a_0 = 2$; $a_1 = -6$; $a_2 = 4$.

Итого, получена функция $U_i = 2i^2 - 6i + 4$. С третьей составляющей искомым функционал сложности имеет вид

$$U(i, n) = L_S(F_i^{(n)}, G_3) = (n - 1) + (i - 1)(2n - 4) - (2i^2 - 6i + 4). \quad (31)$$

Итак, аналитически получена верхняя оценка показателя $L_S(F_i^{(n)}, G_3)$.

Заключение

Теперь вместо того, чтобы заполнять табл. 4, создавая БД и применяя правила вывода (как это делается в математической логике), используем универсальную оценку (31). Этот метод, бесспорно, будет эффективен при автоматизации и минимизации синтеза и будет требовать меньшие вычислительные ресурсы по сравнению с другими. При этом минимизируется объем рабочей памяти. Итак, полученный функционал $L_S(i, n)$ с большим успехом заменяет ранее созданные таблицы [7, 8].

Список литературы

1. Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики // Проблемы кибернетики. 1962. № 8.
2. Лупанов О. Б. О сложности реализации функций алгебры логики формулами // Проблемы кибернетики. Вып. 3. М.: Физматгиз, 1960.
3. Яблонский С. В. Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем // Проблемы кибернетики. 1959. № 2.
4. Теряев Е. Д., Петрин К. В., Филимонов Н. Б., Филимонов А. Б. Агентные технологии в автоматизированных информационно-управляющих системах. Часть 1. Основы агентного подхода // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 7. С. 11–21.
5. Теряев Е. Д., Петрин К. В., Филимонов Н. Б., Филимонов А. Б. Агентные технологии в автоматизированных информационно-управляющих системах. Часть II. Агентные решения в задачах контроля и управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 10. С. 11–21.
6. Вагин В. Н., Головина Е. Ю., Загорянская А. А. и др. Достоверный и правдоподобный вывод в интеллектуальных системах. М.: Физматлит, 2004.
7. Чебурахин И. Ф. Алгоритмизация представления булевых функций, минимальной сложностью, в базе Жегалкина в классах формул и схем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 12. С. 7–14.
8. Чебурахин И. Ф. Математические модели для минимизации и автоматизации синтеза дискретных управляющих систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 4. С. 5–13.
9. Чебурахин И. Ф. Сложность булевых функций для интеллектуальных систем синтеза цифровых ИС // Изв. РАН. ТиСУ. 2006. № 3. С. 150–165.
10. Чебурахин И. Ф. Показатели сложности симметрических полиномов Жегалкина. Тез. докл. XV Международной конф. "Проблемы теоретической кибернетики" (Казань, 2–7 июня 2008 г.). Казань, 2008. С. 123.
11. Чебурахин И. Ф. Сложность симметрических полиномов Жегалкина // XVII Международная школа-семинар "Синтез и сложность управляющих систем" имени академика О. Б. Лупанова (27.10–1.11.2008. Новосибирск), 2008. С. 180–185.
12. Чебурахин И. Ф., Цурков В. И. Модели для оптимизации и автоматизации синтеза дискретных устройств обработки информации в мехатронных системах // 3-я Российская мультиконференция по проблемам управления. Материалы 7-й научно-технической конференции "Мехатроника, автоматизация, управление МАУ-2010". 12–14 октября 2010. С. 420–423.

About One Efficient Method of Synthesis of Boolean Formulas and Circuits of Functional Elements

I. F. Cheburakhin, logicifch@yandex.ru✉, O. N. Gavrish, gavrish.o@gmail.com,
MAI (NRU) — Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russian Federation

Corresponding author: Cheburakhin Igor F., PhD, Professor,
MAI (NRU) — Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, 125993, Russian Federation, e-mail: logicifch@yandex.ru

Received on September 20, 2016

Accepted on October 26, 2016

Currently relevance of modeling problems of analysis and synthesis of mathematical models of discrete logic control and computing devices persists. Particularly important is the task of estimating the output of difficulty in presenting a Boolean function (BF) in the classes of formulas and schemes of functional elements (FE). This problem is still relevant today. Because of ongoing research in the field of mathematical cybernetics and discrete mathematics should be that obtaining the required minimum solutions using dimensions of complexity inevitably involves the use of nature exhaustive search algorithms. The result is a greater complexity (including computational complexity and labor input) obtaining such a decision has been the functions of small dimension. This required the development of new approaches formulation of the problem and its solutions, significantly differ in the complexity of exhaustive search [1–3]. So, the problem of the realization of Boolean functions in the class of formulas and — circuits made of functional elements in different bases. Obtained in this scheme are applied in discrete logic devices, and management information processing, the complexity (quality) of the main characteristics of which depend on computing and control engineering. And it noted that the symmetric Boolean functions are increasingly being used in the design of computing devices due to their specific properties [7–8]. The purpose of this paper is to clarify the upper bounds for the complexity of symmetric BF in standart and Zhegalkin bases, as well as the development of algorithms to automate the synthesis of discrete information processing devices. An efficient constructive method synthesis of digital circuits and formulas is offered. This method is based on recurrence relations (functional equations — FE [9]) and is accompanied by a receipt in advance analytically upper estimates of various indicators of complexity (the number of letters, number of subformulas; according to the number of functional elements), including schemes for minimum complexity. In this paper we consider some classes of functions, which are accurate upper bounds for the complexity metrics. To automate the process and expanding the study of individual cases the algorithm implemented structural and functional decomposition [2] is used. A convenient model for the representation of a Zhegalkin polynomial form that used in the algorithm the matrix representation has been designed. The results are applicable as in the synthesis device (at the logical design) in multiprocessor computing and control systems, and the development of algorithms for the effective operation of these systems.

Keywords: boolean function, syntheses formula and circuit, decomposition, difficulty, minimization, functional of the equation, symmetric functions

For citation:

Cheburakhin I. F., Gavrish O. N. About One Efficient Method of Synthesis of Boolean Formulas and Circuits of Functional Elements, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 11, pp. 407–414.

DOI: 10.17587/mau/18.407-414

References

1. Zhuravlev Yu. I. *Teoretiko-mnozhestvennyye metody v algebre logiki* (Set-theoretic methods in the algebra of logic), *Problemy Kibernetiki*, 1962, no. 8 (in Russian).
2. Lupanov O. B. *O slozhnosti realizatsii funktsiy algebrы logiki formulami* (About the complexity of realization of Boolean functions by formulas), *Problemy Kibernetiki*, 1960, iss. 3 (in Russian).
3. Yablonsky S. V. *Ob algoritmicheskikh trudnostyakh sinteza minimalnykh kontaktnykh skhem* (About algorithmic difficulties of synthesis of minimal contact circuits), *Problemy kibernetiki*, 1959, no. 2 (in Russian).
4. Teryaev Ye. D., Petrin K. V., Filimonov A. B., Filimonov N. B. *Agentnyye tekhnologii v avtomatizirovannykh informatsionno-upravlyayushchikh sistemakh. Chast I. Osnovy agentnogo podhoda* (Agent-based technology in automated information control systems. Part I. Basics of agent-based approach), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2010, no. 7, pp. 11–21 (in Russian).
5. Teryaev Ye. D., Petrin K. V., Filimonov A. B., Filimonov N. B. *Agentnyye tekhnologii v avtomatizirovannykh informatsionno-upravlyayushchikh sistemakh. Chast II. Agentnyye resheniya v zadachakh kontrolya i upravleniya* (Agent-based technology in automated information control systems. Part II. Agent-based solutions to the problems of monitoring and control), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2010, no. 10, pp. 11–21 (in Russian).
6. Vagin V. N., Golovina E. Yu., Zagoryanskaya A. A. i dr. *Dostovernyy i pravdopodobnyy vyivod v intellektualnykh sistemakh* (Reliable and credible derivation in intelligent systems), V. N. Vagin, D. A. Pospelov ed., Moscow, Fizmatlit, 2004 (in Russian).
7. Cheburakhin I. F. *Algoritmizatsiya predstavleniya bulevykh funktsiy, minimalnoy slozhnostyu, v baze Zhegalkina v klassakh formul i shem* (Algorithmic representation of Boolean functions, minimum complexity in Zhegalkin basis in the class of formulas and schemes), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2012, no. 12, pp. 7–14 (in Russian).
8. Cheburakhin I. F. *Matematicheskiye modeli dlya minimizatsii i avtomatizatsii sinteza diskretnykh upravlyayushchikh sistem* (Mathematical models for minimization and automation the synthesis of discrete control systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2012, no. 4, pp. 5–13 (in Russian).
9. Cheburakhin I. F. *Slozhnost bulevykh funktsiy dlya intellektualnykh sistem sinteza tsifrovyykh IS* (Complexity of Boolean functions for intelligent digital IS synthesis systems), *Izv. RAN. TISU*, 2006, no. 3, pp. 150–165 (in Russian).
10. Cheburakhin I. F. *Pokazateli slozhnosti simmetricheskikh polinomov Zhegalkina* (Indicators complexity of symmetric polynomials Zhegalkin), *Tez.dokl. XV Mezhdunarodnoy konf. "Problemy teoreticheskoy kibernetiki"* (Kazan, 2–7 iyunya 2008 g.), Kazan, 2008, pp. 123 (in Russian).
11. Cheburakhin I. F. *Slozhnost simmetricheskikh polinomov Zhegalkina* (The complexity of symmetric polynomials Zhegalkin), *XVII Mezhdunar. shkola-seminar "Sintez i slozhnost upravlyayushchikh sistem" im. akad. O. B. Lupanova*, Novosibirsk, 2008, pp. 180–185 (in Russian).
12. Cheburakhin I. F., Tsurkov V. I. *Modeli dlya optimizatsii i avtomatizatsii sinteza diskretnykh ustroystv obrabotki informatsii v mehatronnykh sistemakh* (Models for the optimization and automation of synthesis of discrete information processing devices in the mechatronic systems), *3 Rossiyskaya multikonferentsiya po problemam upravleniya. Materialy 7-y nauchno-tehnicheskoy konferentsii "Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie MAU-2010"*, 12–14 october 2010, pp. 420–423 (in Russian).

С. М. Андреев, канд. техн. наук, доц., зав. каф., М. С. Галдин, аспирант,
ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Г. И. Носова", г. Магнитогорск

Структурный синтез системы упреждающего управления тепловым режимом валковой разливки стали

Рассмотрен структурный синтез системы управления тепловым режимом разливки стали на валковом литейно-прокатном агрегате. Предложена структурная схема и алгоритм работы упреждающей системы управления, использующей в своей основе математическую модель процесса валковой разливки. Выполнено моделирование работы системы управления в динамических режимах работы агрегата при внешних контролируемых и неконтролируемых воздействиях.

Ключевые слова: валковая разливка стали, упреждающее управление, математическое моделирование, управление по модели

Введение

Для современного этапа развития мировой черной металлургии характерна постепенная смена стратегии консолидации производства стали на крупных интегрированных предприятиях в пользу создания компактных и гибких технологических модулей. Основными ориентирами развития являются повышение качества и расширение сортамента металлопродукции, увеличение производительности, энергоресурсосбережение и охрана окружающей среды.

Одним из видов металлургических заводов, наиболее полно отвечающих текущим требованиям и тенденциям, являются предприятия по производству плоского проката, в состав которых входят валковые литейно-прокатные агрегаты (ВЛПА) [1].

Технология валковой разливки стали основана на идее прямого совмещения процессов литья и прокатки с использованием первородной теплоты заготовки для реализации контролируемой прокатки.

Схема расположения оборудования на валковом литейно-прокатном агрегате (ВЛПА) представлена на рис. 1. Технологический процесс производства можно описать следующим образом. Жидкий металл из промежуточного ковша попадает в валковый кристаллизатор, конструктивно состоящий из двух расположенных параллельно друг другу валков, которые вращаются в противоположные стороны и образуют разливочную ванну расплавленного металла. На выходе из кристаллизатора полностью затвердевшая полоса проходит через петленакопитель и тянущие ролики в прокатную клетку. Далее следует участок ламинарного охлаждения, резки и смотки на моталках [2, 3].

Особое внимание при производстве металлопродукции на ВЛПА необходимо уделять системе управления тепловым режимом разливки, который является одним из важнейших критериев, определяющих как качество непрерывнолитой полосы и ход самого процесса производства, так и условия эксплуатации оборудования [4].

Основное и главное требование к управлению тепловым режимом валковой разливки стали заключается в том, чтобы на выходе из кристаллизатора полоса полностью затвердела. Иначе повышается риск прорыва жидкого металла из разливочных валков, что является аварийной ситуацией процесса.

В целях получения требуемых прочностных, пластических и вязких свойств стали на ВЛПА реализуется прямая горячая прокатка полосы с использованием технологии контролируемой прокатки. Данная технология, в первую очередь, подразумевает выполнение заданных тепловых режимов прокатки, а именно обеспечение среднемассовой температуры полосы перед прокаткой в диапазоне 1050...1150 °С [5]. На существующих промышлен-

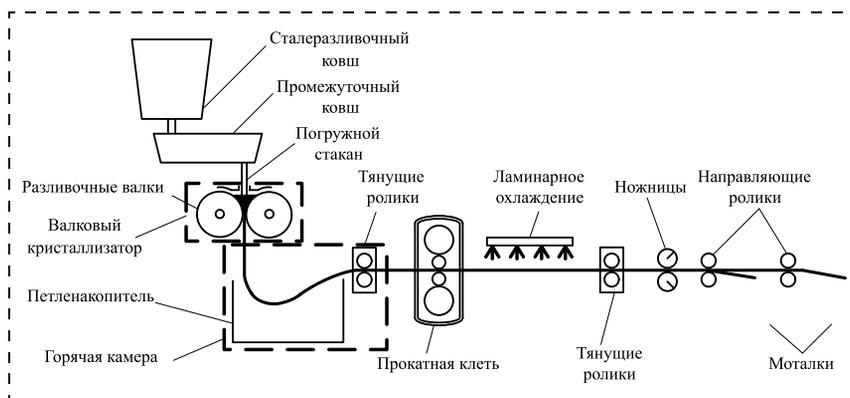


Рис. 1. Схема расположения оборудования ВЛПА

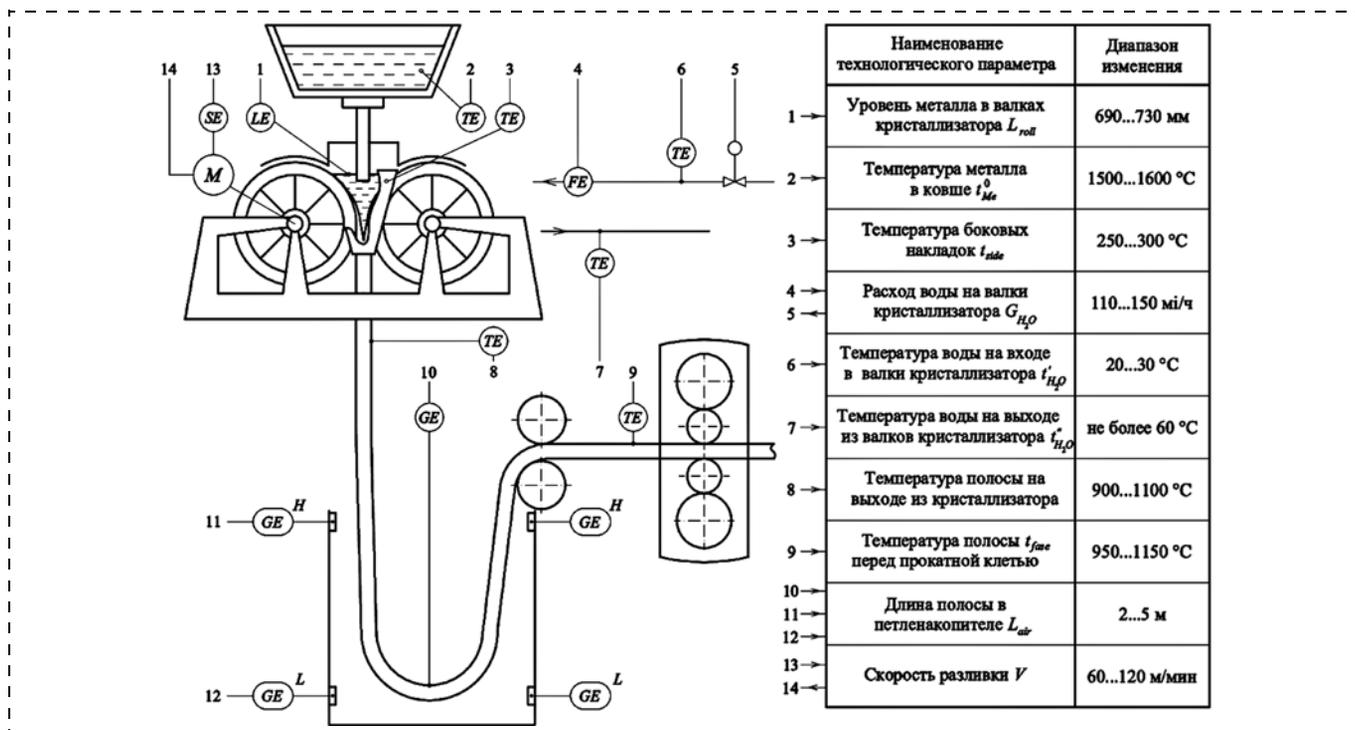


Рис. 2. Функциональная схема управления тепловым режимом разливки на ВЛПА

ных ВЛПА данные требования реализуются путем использования установки подогрева полосы после петленакопителя перед станом горячей прокатки. Однако любая дополнительная технологическая операция, тем более такая, как нагрев, влечет за собой дополнительные затраты и, как следствие, увеличение себестоимости производимой полосы.

Для того чтобы минимизировать или даже полностью исключить данные затраты, охлаждение полосы нужно организовывать таким образом, чтобы получить заданное тепловое поле без использования подогрева заготовки.

Функциональная схема управления тепловым режимом валковой разливки стали представлена на рис. 2. Схемой предусмотрено выполнение следующих функций:

- измерение и контроль параметров разливки, а именно: температуры расплава в промежуточном ковше, уровня металла в валках кристаллизатора, температуры боковых удерживающих на-

кладок, температуры (на входе и выходе) и расхода воды на охлаждение кристаллизатора, длины полосы в петленакопителе, температуры разливаемой полосы на выходе из кристаллизатора и перед прокатной клетью, скорости разливки;

- управление тепловым режимом разливки посредством изменения скорости разливки и расхода воды на валки кристаллизатора.

Рассматриваемый технологический процесс можно представить в виде структурной схемы объекта управления, изображенной на рис. 3.

В качестве объекта управления выступает тепловой режим валковой разливки стали, который характеризуется следующими переменными:

- входными контролируемыми управляемыми параметрами X ;
- выходным показателем процесса, в качестве которого выступает величина среднемассовой температуры полосы t_{mm} перед прокатной клетью;
- входными неконтролируемыми и неуправляемыми переменными Z , характеризующими влияние на тепловой режим разливки внешних возмущающих воздействий.

В качестве объекта управления тепловой режим валковой разливки стали характеризуется большим транспортным запаздыванием из-за использования петлевого накопителя полосы и малой инерционностью, связанной с высокой скоростью разливки. Из теории автоматического управления [6] известно, что устойчивость и качество процесса регулирования определяются, главным образом, отношением запаздывания τ к постоянной времени объекта T . Данное соотношение определяет сложность управляемости объекта и является критерием вы-

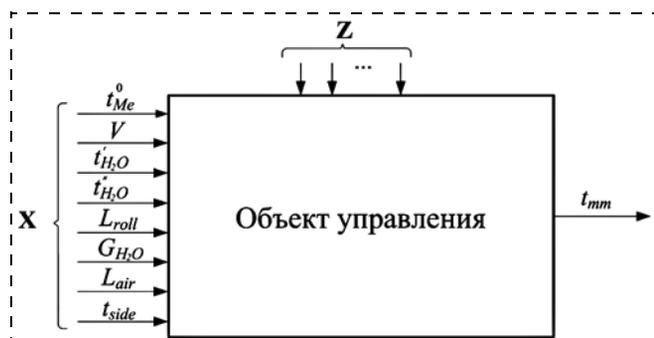


Рис. 3. Структурная схема технологического процесса валковой разливки стали

бора типа и закона регулирования. Для валковой разливки стали выполняется неравенство $\tau/T > 0,5$, поэтому можно утверждать, что такие типовые законы регулирования как П, И, ПИ, ПД или ПИД не в состоянии обеспечить необходимых показателей процесса управления [7, 8]. В связи с этим повысить качество управления можно либо путем уменьшения соотношения τ/T , что для реального процесса не представляется возможным, либо за счет применения специальной системы более сложной структуры, включающей модель объекта управления.

Также к специфическим особенностям технологии валковой разливки стали, оказывающим негативное влияние на управление и устойчивость, относятся нелинейность и сложность математической модели теплового режима разливки и распределенность технологических параметров с жестко накладываемыми на них ограничениями [9].

Разработка системы управления агрегатом подобного типа является на сегодняшний день весьма сложной задачей, требующей применения специальных систем, основанных на новых принципах управления.

1. Анализ существующих систем управления тепловым режимом разливки

Технология валковой разливки стали для производства плоского проката, являясь одной из самых перспективных на данный момент, получила свое распространение и развитие, главным образом, за рубежом [10].

Объем известных отечественных разработок в этой области черной металлургии весьма невелик и ограничен. В частности, можно выделить научно-исследовательские работы на базе АХК "ВНИИМЕТМАШ им. академика А. И. Целикова" [11] и ОАО "Институт Цветметобработка" [12, 13], которых на текущий момент времени для перевода валковой технологии на промышленную основу не достаточно.

Вместе с тем, число зарубежных исследований, направленных на совершенствование и улучшение качественных показателей валковой разливки стали как за счет конструктивных и технологических изменений, так и за счет разработок систем автоматического управления, включающих системы управления тепловым режимом разливки, постоянно увеличивается [2, 3, 9, 14...17].

В работе [14] управление тепловым режимом предлагается реализовывать за счет контроля количества "мягкого материала", под которым подразумевается область центральной части разливаемой полосы с высокой остаточной теплотой. Регулирование осуществляется путем изменения зазора в зоне контакта между литейными валками в соответствии с измеренной температурой поверхности полосы на выходе из кристаллизатора. Недостатком данного способа управления является непостоянство толщины разливаемой полосы, а также тот

факт, что коррекция осуществляется только после отклонения контролируемого параметра от требуемых значений, что в конечном итоге негативно скажется на качестве производимой продукции.

Для устранения этого недостатка (реализации управления только после фактических отклонений контролируемых параметров) авторами работы [15] предлагается использовать тепловую модель, максимально приближенную к реальным условиям разливки. На основании исходных и измеренных технологических параметров разливки проводится моделирование, по результатам которого возможно выполнение необходимых корректировок.

В работе [16] предложено использование системы оптимального регулирования теплового режима разливки на базе статической модели процесса, для которой предусмотрено использование блока хранения архивных технологических параметров для подстройки к реальным условиям. Также в состав системы входит блок оптимизации, который в соответствии с заданным критерием обеспечивает получение заданных технологических параметров в установившемся режиме. Однако использование статической модели в системе управления не позволяет осуществлять эффективное управление в динамических режимах работы агрегата.

В основе системы [17] используется нечеткий регулятор с моделью, синтезированной на базе нейронных сетей, что позволяет уйти от разработки сложной детерминированной математической модели процесса, но требует наличия в достаточном объеме репрезентативной выборки и качественной лингвистической логической модели управления процессом.

Принимая во внимание требования, предъявляемые к организации процесса охлаждения заготовки на валковых агрегатах, а также выявленные в результате анализа недостатки рассмотренных существующих систем, авторы для управления тепловым режимом валковой разливки стали предлагают использовать упреждающую систему управления.

В теории упреждающего управления или управления по прогнозу выделяют два основных класса систем [18]. К первому классу относятся бесперебойные системы управления, рассмотренные, в частности, в работах В. Н. Букова [19], О. Дж. Смита и Дж. Ресвика [20, 21].

В работе Букова [19] предложена система управления, особенностью которой является использование в подсистеме оптимального регулирования, находящейся в обратной связи, эталонной и прогнозирующей моделей процесса, функционирующих в ускоренном времени. Сам процесс оптимизации осуществляется циклически через короткие интервалы расчета и реализации управляющих воздействий. К недостаткам данной системы можно отнести ограничения по части применимости к технологическим объектам, а именно непрерывным и линейным, а также отсутствие явного учета технологических пределов.

В системах регулирования О. Дж. Смита и Дж. Ресвика [20, 21] предложено разделение модели объекта на модели с учетом запаздывания и без, что позволяет определять управляющие воздействия для получения требуемого процесса регулирования с максимальной точностью, но требует высокой степени соответствия используемой модели управляемому технологическому объекту.

Ко второму классу упреждающих систем управления относятся поисковые системы, рассмотренные, в частности, в работах А. А. Перельмана [22]. Для данных систем характерен поиск управляющих воздействий путем перебора возможных вариантов с использованием прогнозирующей модели объекта управления в ускоренном масштабе времени. К недостаткам поисковых упреждающих систем управления можно отнести значительный объем выполняемых вычислений и сложность разработки математической модели.

2. Структурный синтез упреждающей системы управления

Для управления тепловым режимом валковой разливки стали предлагается использовать упреждающую систему управления, относящуюся к классу поисковых и использующую в своей основе математическую модель процесса. В зарубежной литературе данная группа систем управления обозначается как MPC-системы (от *Model-Based Predictive Control*).

Применительно к управлению тепловым режимом валковой разливки стали можно выделить сле-

дующие преимущества использования MPC-систем [23...28]:

- управление средними и крупными технологическими объектами с взаимосвязанными технологическими параметрами и значительным временем запаздывания;
- явный учет ограничений при определении управляющего воздействия;
- адаптивность к постоянно изменяющимся условиям работы;
- обеспечение лучшего качества управления и быстродействия за счет использования как текущих значений контролируемых параметров, так и будущих, полученных в результате прогноза.

Принцип упреждающего управления на основе модели базируется на идее применения модуля прогнозирования для определения ожидаемых состояний объекта управления в будущем. В качестве модуля прогнозирования в MPC-системах выступает модель объекта управления, использующая как прошедшие, так и текущие значения управляющих, задающих и контролируемых технологических параметров [24].

Структурная схема предлагаемой упреждающей системы управления тепловым режимом валковой разливки стали представлена на рис. 4.

Система состоит из двух основных блоков — блока оптимизации и управления (БОУ) и блока слежения и настройки (БСН).

БОУ выполняет функции поиска оптимальной скорости разливки V в соответствии с текущим заданием среднemasсовой температуры полосы t_{mm}^{sp} перед прокаткой. Определение управляющего воз-

действия выполняется путем решения задачи оптимизации в замкнутом контуре в постоянно удаляющемся подвижном горизонте прогноза. Таким образом, управление осуществляется в режиме реального времени. Критерием оптимизации является минимизация целевой функции

$$J(\epsilon, \Delta V) \rightarrow \min,$$

где ϵ ($\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$) — вектор рассогласований между заданным значением среднemasсовой температуры перед прокаткой и расчетным на каждом интервале горизонта прогноза; ΔV ($\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$) — вектор изменений скоростей разливки на каждом интервале горизонта прогноза.

Для управления тепловым режимом разливки наиболее важным является тепловое состояние полосы непосредственно перед прокатной клетью, поскольку изменение тепло-содержания полосы приведет к изменению пластических свойств прокатываемого металла и, как следствие, давления металла на валки прокат-

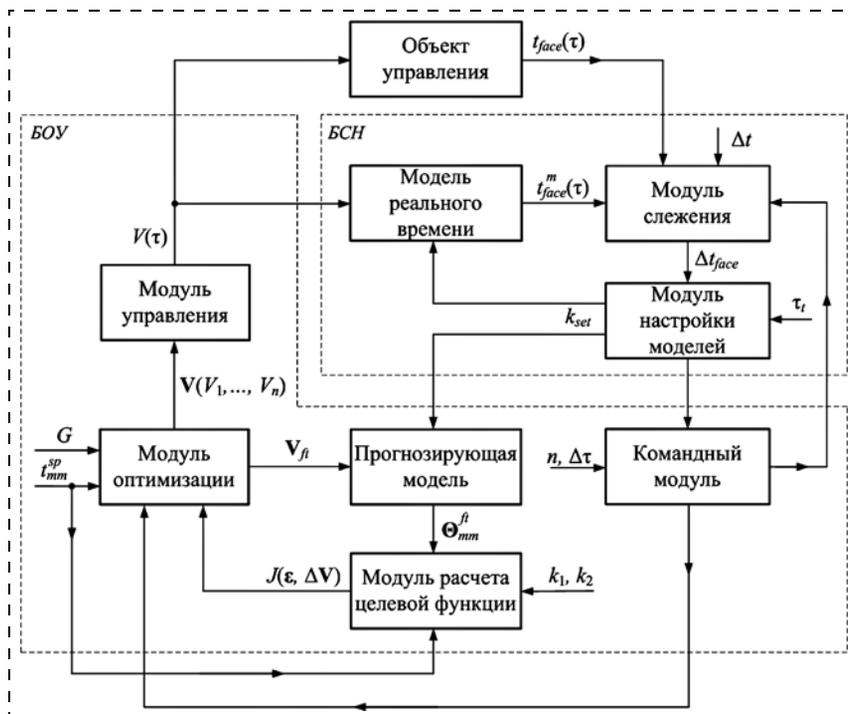


Рис. 4. Структурная схема упреждающей системы управления тепловым режимом разливки стали на ВЛПА

ной клетки и непостоянству толщины полосы на выходе из клетки [29].

Предлагаемой системой управления тепловым режимом работы ВЛПА для корректировки моделей используется температура поверхности полосы перед прокатной клетью. Температура полосы на выходе из кристаллизатора используется при первоначальной настройке и калибровке системы для обеспечения соответствия условий теплопередачи, используемых моделями, реальным условиям. В процессе регулирования в реальном масштабе времени данный параметр необходимо только контролировать для предотвращения режимов работы, приводящих к аварийным ситуациям разливки.

Модулем слежения, входящим в состав БСН, реализуется постоянный контроль соответствия измеренных значений температуры поверхности непрерывнолитой полосы перед прокатной клетью $t_{face}(\tau)$ и аналогичных расчетных значений $t_{face}^m(\tau)$, определяемых моделью реального времени. Основным параметром настройки данного модуля является зона нечувствительности Δt , при превышении которой модуль слежения активирует модуль настройки путем передачи ему информации о модуле и знаке рассогласования, определяемого выражением $\Delta t_{face}(\tau) = t_{face}(\tau) - t_{face}^m(\tau)$. На основании полученной информации модуль настройки выполняет корректировку используемых системой моделей прогноза и реального времени путем аддитивного смещения их статической характеристики. При этом в целях предотвращения некорректной работы БСН в модуле настройки вводится таймер, равный времени выдержки τ_r , в течение которого корректировка не реализуется. Таким образом, данный алгоритм работы и взаимодействия модулей слежения и настройки позволяет компенсировать неконтролируемые возмущения, приводящие к смещению статической характеристики в процессе разливки.

Рассмотрим алгоритм работы предлагаемой системы.

1. В отсчетный момент времени на начальном этапе командный модуль активизирует работу БСН, который при необходимости проводит настройку моделей установочным коэффициентом k_{set} .

2. На основании горизонта прогноза T , численно равного произведению выбранного числа шагов разбиения n и времени каждого шага $\Delta\tau$, командным модулем активируется работа модуля оптимизации, который с учетом накладываемых на процесс технологических ограничений G выполняет поиск скоростей разливки \mathbf{V} на каждом интервале горизонта прогноза. Поиск проводится с использованием прогнозирующей модели, функционирующей в ускоренном времени и выполняющей экстраполяцию теплового режима разливки на время прогнозирования. В основе модуля оптимизации использован метод деформируемого много-

гранника (метод Нелдера—Мида), характеризующийся как один из самых эффективных с отсутствием ограничений на вид целевой функции [30].

3. Полученный вектор \mathbf{V} поступает на модуль управления, который на каждом интервале управления $i = 1, 2, \dots, n$ применяет соответствующее значение текущей скорости разливки $I(\tau)$. При достижении окончания горизонта прогноза повторяются шаги 1...3.

4. При превышении несоответствия, определяемого разницей между $t_{face}(\tau)$ и $t_{face}^m(\tau)$, зоны нечувствительности Δt модуля слежения активируется работа модуля настройки и корректируются модели, после чего инициализируется работа командного модуля, начиная с шага 2. Проводится обновление информации и поиск управляющих воздействий на новом горизонте прогноза. При этом в модуле настройки взводится таймер на время выдержки τ_r , в течение которого корректировка моделей не выполняется. Время выдержки определяется, главным образом, транспортным запаздыванием объекта.

Отличительной особенностью предлагаемой структуры системы управления по сравнению с существующими [18...22] является применение командного модуля и его взаимодействие с модулями слежения и настройки моделей, обеспечивающими выполнение оптимизации в реальном времени с контролем соответствия используемых моделей реальным условиям.

3. Результаты моделирования

Для моделирования процесса управления тепловым режимом валковой разливки стали был разработан MPC-регулятор на основе математической модели [9, 31] и структурной схемы упреждающей системы управления. Алгоритм регулирования реализован на языке программирования высокого уровня и включает в себя структурно все модули и полный функционал описанной системы управления.

Моделирование работы системы в целом выполняли в программном комплексе *VisSim*. В качестве объекта управления была использована модель теплового режима валковой разливки стали [9, 31]. Модель рассчитывает температурное поле полосы в режиме реального времени в соответствии с параметрами разливки и скоростью, полученной от MPC-регулятора. Выходным параметром модели и входным для регулятора является температура поверхности полосы $t_{face}(\tau)$.

При вычислениях были приняты следующие параметры валковой установки:

- радиус разливочных валков $R = 1500$ мм, что соответствует параметрам агрегата, функционирующего в г. Крефельд, Германия [5];
- разливаемая сталь Ст3;
- уровень металла в кристаллизаторе 730 мм;
- толщина разливаемой полосы 6 мм;

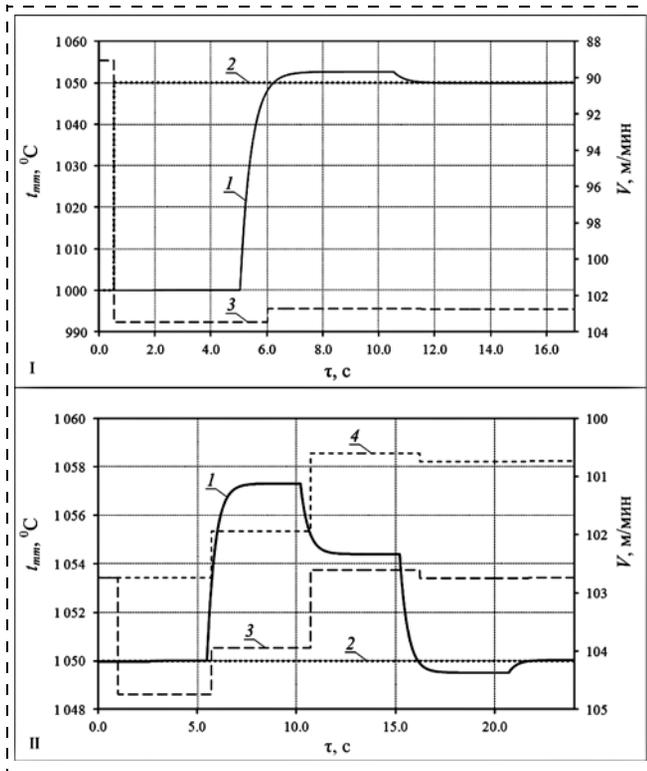


Рис. 5. Полученные в результате моделирования переходные процессы при изменении задания (I) и возмущении по каналу управления (II):

1 — полученная среднемассовая температура перед прокаткой; 2 — заданная среднемассовая температура перед прокаткой; 3 — скорость разливки, приходящая на объект; 4 — скорость разливки с MPC-регулятора

- общая протяженность зоны от валков кристаллизатора до прокатной клетки 8 м.

Результаты моделирования работы системы управления в виде графиков переходных процессов изменения среднемассовой температуры полосы перед прокатной клетью и соответствующей ей скорости разливки представлены на рис. 5, 6.

В блоке I рис. 5 изображены результаты работы системы при изменении задания среднемассовой температуры полосы перед прокаткой с 1000 °C до 1050 °C. Время регулирования составило 11,5 с, перерегулирование — 2,2 °C.

В блоке II рис. 5 изображены результаты работы системы при возникновении возмущения со стороны управляющего воздействия, что может соответствовать неконтролируемому изменению расхода воды на охлаждение валкового кристаллизатора. Время регулирования составило 21 с, перерегулирование — 7,6 °C.

В блоках III и IV рис. 6 изображены результаты работы системы при ступенчатом и линейном смещениях статической характеристики объекта управления соответственно. Ступенчатое смещение статической характеристики при управлении тепловым режимом может быть вызвано неконтролируемым изменением температуры металла в промежуточном ковше. Линейному смещению статической ха-

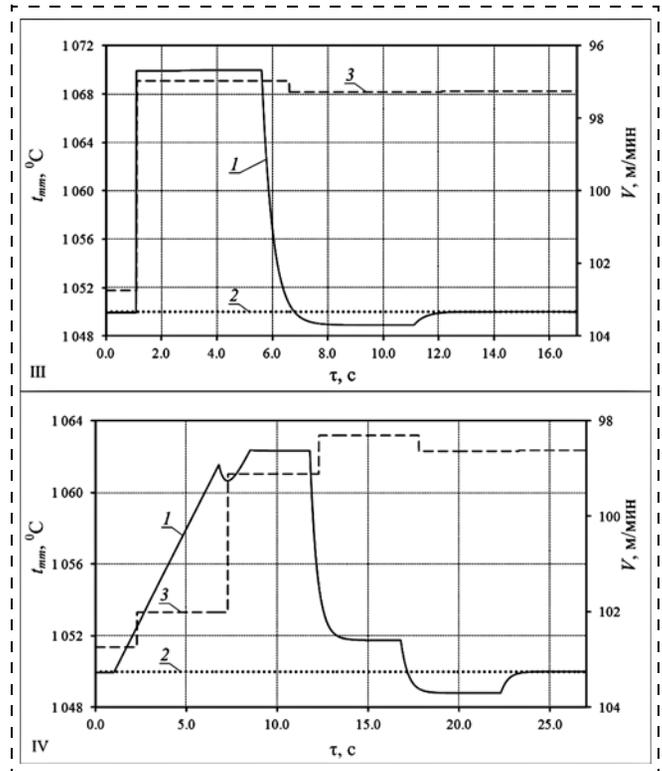


Рис. 6. Полученные в результате моделирования переходные процессы при ступенчатом (III) и линейном (IV) неконтролируемых смещениях статической характеристики:

1 — полученная среднемассовая температура перед прокаткой; 2 — заданная среднемассовая температура перед прокаткой; 3 — скорость разливки, приходящая на объект с MPC-регулятора

рактеристики объекта соответствует, например, изменение условий теплопередачи на участке воздушного охлаждения в горячей камере.

На основе полученных результатов моделирования процессов управления тепловым режимом валковой разливки стальной полосы можно сделать выводы о том, что предложенная система упреждающего управления обеспечивает устойчивость переходных процессов и достаточную точность регулирования температурой полосы при контролируемых и неконтролируемых внешних воздействиях и наличии значительного транспортного запаздывания, вызванного перемещением полосы от валкового кристаллизатора до прокатной клетки.

Заключение

Предлагаемая система предназначена для управления тепловым режимом валковой разливки на основе математической модели процесса. Система управления позволяет согласовать температурно-скоростные режимы процессов разливки и прокатки, а также реализовать технологию контролируемой прокатки на ВЛПА за счет получения требуемой среднемассовой температуры полосы перед прокаткой в динамических режимах работы агрегата при различных внешних воздействиях.

Применение упреждающей системы на основе предложенной структурной схемы позволит повысить качество производимой металлопродукции и увеличить серийность плавок за счет организации оптимального температурного режима и управления по прогнозу модели, а не по факту отклонений контролируемых параметров.

Список литературы

1. **Смирнов А. Н., Сафонов В. М., Дорохова Л. В., Цупрун А. Ю.** Металлургические мини-заводы. Донецк: Норд-Пресс, 2005. 469 с.
2. **Killmore C. R., Creely H., Phillips A., Kaul H.** Development of ultra thin cast strip products by the Castrip process // Materials forum. 2008. Vol. 32. P. 13–28.
3. **Zugghi H., Mahapatra R.** Comparison of Castrip energy consumption and greenhouse gas emissions with conventional strip production technologies // Interoffice report of Castrip LLC, Sept. 2008.
4. **Ткаченко В. Н.** Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов. Т.13. Сер. "Задачи и методы: математика, механика, кибернетика". Киев: Наукова думка, 2008. 244 с.
5. **Коновалов Ю. В.** Справочник прокатчика. Справочное издание в 2-х книгах. Кн. 1. Производство горячекатаных листов и полос. М.: Теплотехник, 2008. 640 с.
6. **Ротач В. Я.** Теория автоматического управления: Учеб. для вузов. М.: Издательский дом МЭИ, 2008. 396 с.
7. **Гурецкий Х.** Анализ и синтез систем управления с запаздыванием: Пер. с польского. М.: Машиностроение, 1974. 328 с.
8. **Денисенко В.** ПИД-регуляторы: принципы построения и модификации // Современные технологии автоматизации. 2007. № 1. С. 78–88.
9. **Галдин М. С.** Математическая модель теплового режима валковой разливки стали / М. С. Галдин, С. М. Андреев // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 10. С. 34–41.
10. **Ганьжин В., Киселев Ю.** Технология XXI века. Перспективы России // Национальная металлургия. 2003. Янв. — февр. С. 77–86.
11. **Протасов А. В., Сивак Б. А.** Электрометаллургические мини-заводы. М.: Триада Импресо, 2012. 500 с.
12. **Бровман М. Я., Николаев В. А., Полухин В. П., Нижник Н. В.** Технологические особенности формирования полосы в валковых литейно-прокатных агрегатах // Прогрессивные технологии в металлургии стали: XXI век: Тр. 3-й междунар. науч.-техн. конф. Донецк: ДонНТУ, 2007. С. 289–294.
13. **Николаев В. А.** Исследование процесса беслитковой прокатки стальной полосы с целью определения эффективных технологических и конструктивных параметров: дис. канд. техн. наук. М., 2008. 193 с.
14. **Блэйд У., Махапатра Р. Б., Шлицтинг М.** Способ и устройство для регулирования скачка температуры в литой полосе. Патент России № 2557379. 2015. Бюл. № 20.
15. **Этцельсдорфер К., Хобенхилер Г., Химани К., Хубмер Г. Ф., Ауцингер Д.** Способ непрерывного литья. Патент России № 2301129. 2007. Бюл. № 17.
16. **Hannes Schulze Horn, Jurgen Adamy.** Intelligent computerized control system. Патент США № 6085183. 2000.
17. **Werner Kuttner, Friedemann Schmid, Hannes Schulze Horn, Kurt Hohendahl, Thomas Berger, Immo Domnig.** Continuous casting and rolling system including control system. Патент США № 6044895. 2000.
18. **Кулаков С. М., Бондарь Н. Ф., Трофимов В. Б.** Типология функциональных структур систем управления с прогнозированием // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2005. № 6. С. 54–60.
19. **Буков В. Н.** Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 232 с.
20. **Киселев С. Ф., Мышляев Л. П., Соловьев В. И.** и др. Об испытаниях и настройке алгоритмов управления промышленными объектами // Автоматическое управление в АСУ ТП. М.: Энергоатомиздат. 1987. С. 28–31.
21. **Авдеев В. П., Кустов Б. А., Мышляев Л. П.** Производственно-исследовательские системы с многовариантной структурой. Новокузнецк: Кузбасс ФИАР, 1992. 188 с.
22. **Перельман И. И.** Оперативная идентификация объектов управления. М.: Энергоиздат, 1982. 272 с.
23. **Ding Bao-Cang.** Modern predictive control. Boca Raton: CRC Press/Taylor & Francis, 2010.
24. **Казаринов Л. С., Парсункин Б. Н., Литвинова А. Е., Литвинов С. А.** Распределенное прогнозирующее управление технологическим процессом в металлургии // Автоматизация в промышленности. 2013. № 2. С. 54–59.
25. **Kouvaritakis V., Cannon M.** Model Predictive Control. Switzerland: Springer International Publishing, 2016. 377 p.
26. **Прохоренков А. М., Качала Н. М.** Построение прогнозирующих моделей систем управления теплоэнергетическими объектами // Вестник Мурманского государственного технического университета. 2011. Т. 14, № 3. С. 546–551.
27. **Mayne D. Q., Rawlings J. B., Rao C. V., Scolaert P. O. M.** Constrained model predictive control: Stability and optimality // Automatica. 2000. Vol. 36. P. 789–814.
28. **Joe Qin S., Badgwell T. A.** A survey of industrial model predictive control technology // Control Engineering Practice. 2003. N. 11. P. 733–764.
29. **Восканьянц А. А.** Автоматизированное управление процессами прокатки. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2010. 85 с.
30. **Данилин А. И.** Методы оптимизации [Электронный ресурс]: электрон. учеб. пособие. Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева (нац. исслед. ун-т), 2011.
31. **Галдин М. С., Андреев С. М.** Исследование теплового режима разливки непрерывнолитых полос по математической модели процесса на валковом литейно-прокатном агрегате // Вестник Иркутского государственного технического университета. Иркутск: ГОУ ВПО "ИРГУ". 2013. № 2. С. 52–57.

Structure Synthesis of Twin-Roll Strip Casting Thermal Mode Predictive Control System

S. M. Andreev, pk_su@bk.ru, **M. S. Galdin**, galdin.mike@gmail.com✉,
Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, 455000 Russian Federation

Corresponding author: **Galdin Mikhail S.**, Postgraduate Student, Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, 455000 Russian Federation, e-mail: galdin.mike@gmail.com

Received on October 22, 2016

Accepted on November 9, 2016

Thermal mode strip casting control is challenging at the present because twin-roll strip casting is characterized by the large time delay and high dynamics with low inertances. Nonlinearity and complexity of the thermal mode mathematical model, distribution and hard limitation of technological parameters are also the technology specific features and all it has a negative impact

on the control and stability of the casting process. Famous control systems don't fully allow ensure the implementation of given problems and need to be revised. Thermal mode control system development is the complex problem to date. Solution of this problem requires to use special systems based on the new control principles. Structural synthesis of model-based predictive control systems is created in this work. Distinctive features of the proposed structure control scheme are the command module application and its interaction with the monitoring and model setting modules, providing real-time optimization performance and checking used models conformity with the real casting conditions. The proposed control system allows to coordinate the casting and rolling processes temperature and speed modes. This system provides for the implementation of controlled rolling technology at twin-roll strip casting unit by obtaining the required mass-average temperature of the strip before rolling in dynamic modes of operation. On the basis of simulation results it was concluded that the proposed model-based predictive control system provides transient process stability and satisfactory temperature control accuracy with controllable and uncontrollable external influences and significant time delay caused by the strip movement from the casting mold to the hot-rolling stand.

Keywords: twin-roll strip casting, predictive control, mathematical modeling, model-based control

For citation:

Andreev S. M., Galdin M. S. Structure Synthesis of Twin-Roll Strip Casting Thermal Mode Predictive Control System, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 415–422.

DOI: 10.17587/mau.18.415-422

References

1. **Smirnov A. N., Safonov V. M., Dorohova L. V., Cuprun A. Ju.** *Metallurgicheskie mini-zavody* (Metallurgical mini-plants), Doneck, Nord-Press, 2005, 469 p. (in Russian).
2. **Killmore C. R., Creely H., Phillips A., Kaul H.** Development of ultra thin cast strip products by the Castrip process, *Materials forum volume*, 2008, vol. 32, pp. 13–28.
3. **Zughbi H., Mahapatra R.** Comparison of Castrip energy consumption and greenhouse gas emissions with conventional strip production technologies, Interoffice report of Castrip LLC, Sept 2008.
4. **Tkachenko V. N.** *Matematicheskoe modelirovanie, identifikacija i upravlenie tehnologicheskimi processami teplovoj obrabotki materialov* (Mathematical modeling, identification and process control of materials heat treatment), vol. 13, Ser. "Zadachi i metody: matematika, mehanika, kibernetika", Kiev, Naukova dumka, 2008, 244 p. (in Russian).
5. **Konovalev Ju. V.** *Spravochnik prokatchika. Spravochnoe izdanie v 2-h knigah. Kniga 1. Proizvodstvo gorjachechatanyh listov i polos* (Roller's hand-book. Reference work in 2 books. Book 1. Production of hot-rolled sheets and strips), Moscow, Teplotehnik, 2008, 640 p. (in Russian).
6. **Rotach V. Ja.** *Teorija avtomaticheskogo upravlenija: Uchebnik dlja vuzov* (Automatic control theory: Textbook for High Schools), Moscow, Izdatel'skij dom MJeI, 2008, 396 p. (in Russian).
7. **Gureckij H.** *Analiz i sintez sistem upravlenija s zapazdyvaniem* (Analysis and synthesis of control systems with time-delay), Moscow, Mashinostroenie, 1974, 328 p. (in Russian).
8. **Denisenko V.** *PID-regulyatory: principy postroenija i modifikacii* (PID-regulators: principles of construction and modification), *Sovremennye Tehnologii Avtomatizacii*, 2007, no. 1, pp. 78–88 (in Russian).
9. **Galdin M. S., Andreev S. M.** *Matematicheskaja model' teplovogo rezhima valkovoj razlivki stali* (Mathematical model of thermal mode of twin-roll strip casting), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 10, pp. 34–41 (in Russian).
10. **Gan'zhin V., Kiselev Ju.** *Tehnologija XXI veka. Perspektivy Rossii* (The technology of the XXI century. Russia's perspectives), *Nacional'naja Metallurgija*, 2003, Janv.-fevr., pp. 77–86 (in Russian).
11. **Protasov A. V., Sivak B. A.** *Jelektrometallurgicheskie mini-zavody* (Electrometallurgical mini-plants), Moscow, Triada Impreso, 2012, 500 p. (in Russian).
12. **Brovman M. Ja., Nikolaev V. A., Poluhin V. P., Nizhnik N. V.** *Tehnologicheskie osobennosti formirovanija polosy v valkovyh litejno-prokatnyh agregatah* (Technological features of strip formation in twin-roll strip casting units), *Progressivnye Tehnologii v Metallurgii Stali: XXI vek: Trudy 3-j mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii*, Doneck, DonNTU, 2007, pp. 289–294 (in Russian).
13. **Nikolaev V. A.** *Issledovanie processa besslittkovoj prokatki stal'noj polosy s cel'ju opredelenija jeffektivnyh tehnologicheskikh i konstruktivnyh parametrov* (The process's Investigation of steel strip rolling with the purpose to determine the effective technological and design parameters): dis. kand. tehn. nauk, Moscow, 2008. 193 p. (in Russian).
14. **Bljejde U., Mahapatra R. B., Shlichting M.** *Sposob i ustrojstvo dlja regulirovanija skachka temperatury v litoj polose* (The method and apparatus for the temperature jump controlling in the casting strip), Patent Rossii № 2557379, 2015, Bjul. № 20.
15. **Jetcel'sdorfer K., Hoenbihler G., Himani K., Hubmer G. F., Aucinger D.** *Sposob nepreryvnogo lit'ja* (Continuous casting method), Patent Rossii № 2301129, 2007, Bjul. № 17.
16. **Hannes Schulze Horn, Jurgen Adamy.** Intelligent computerized control system, Patent SShA № 6085183, 2000.
17. **Werner Kuttner, Friedemann Schmid, Hannes Schulze Horn, Kurt Hohendahl, Thomas Berger, Immo Domnig.** Continuous casting and rolling system including control system, Patent SShA № 6044895, 2000.
18. **Kulakov S. M., Bondar' N. F., Trofimov V. B.** *Tipologija funkcional'nyh struktur sistem upravlenija s prognozirovaniem* (Functional structures typology of control systems with prediction), *Izvestija Vysshih Uchebnyh Zavedenij. Chernaja Metallurgija*, 2005, no. 6, pp. 54–60 (in Russian).
19. **Bukov V. N.** *Adaptivnye prognozirujushhie sistemy upravlenija poletom* (Adaptive predictive flight control systems), Moscow, Nauka, 1987, 232 p. (in Russian).
20. **Myshljaev L. P.** *Avtomaticeskoe upravlenie v ASU TP* (Automatic control in DCS), Moscow, Jenergoatomizdat, 1987, pp. 28–31 (in Russian).
21. **Avdeev V. P., Kustov B. A., Myshljaev L. P.** *Proizvodstvenno-issledovatel'skie sistemy s mnogovariantnoj strukturoj* (Production-research systems with the multivariate structure), Novokuzneck, Kuzbass FIAR, 1992, 188 p. (in Russian).
22. **Perel'man I. I.** *Operativnaja identifikacija ob'ektov upravlenija* (Operational identification of control objects), Moscow, Jenergoizdat, 1982, 272 p. (in Russian).
23. **Ding Bao-Cang.** Modern predictive control, Boca Raton, CRC Press/Taylor & Francis, 2010.
24. **Kazarinov L. S., Parsunkin B. N., Litvinova A. E., Litvinov S. A.** *Raspredeleloe prognozirujushhee upravlenie tehnologicheskim processom v metallurgii* (Distributed predictive process control in metallurgy), *Avtomatizacija v Promyshlennosti*, 2013, no. 2, pp. 54–59 (in Russian).
25. **Kouvaritakis B., Cannon M.** *Model Predictive Control*, Springer International Publishing Switzerland, 2016, 377 p.
26. **Prohorenkov A. M., Kachala N. M.** *Postroenie prognozirujushhih modelej sistem upravlenija teplojenergeticheskimi ob'ektami* (Predictive models construction of the control systems for thermal power facilities), *Vestnik Murmanskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta*, 2011, vol. 14, no. 3, pp. 546–551 (in Russian).
27. **Mayne D. Q., Rawlings J. B., Rao C. V., Scokaert P. O. M.** Constrained model predictive control: Stability and optimality, *Automatica*, 2000, vol. 36, pp. 789–814.
28. **Joe Qin S., Badgwell T. A.** A survey of industrial model predictive control technology, *Control Engineering Practice*, 2003, vol. 11, pp. 733–764.
29. **Voskan'janc A. A.** *Avtomatizirovanoe upravlenie processami prokatki* (Automated control of rolling processes), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Je. Bauman, 2010, 85 p. (in Russian).
30. **Danilin A. I.** *Metody optimizacii* (Optimization methods), Samara, Samar. gos. ajerokosm. un-t im. S. P. Koroleva (nac. issled. un-t), 2011.
31. **Galdin M. S., Andreev S. M.** *Issledovanie teplovogo rezhima razlivki nepreryvnolityh polos po matematicheskoy modeli processa na valkovom litejno-prokatnom agregate* (Researching thermal mode of strip casting at twin-roll unit based on mathematical model), *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta*, 2013, no. 2, pp. 52–57 (in Russian).

А. В. Фомичев, канд. техн. наук, доц., a.v.fomichev@bmstu.ru,

Е. К. Ли, аспирант, elen.k.lee@student.bmstu.ru,

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Аналитический алгоритм терминального управления пространственным движением КА при посадке на поверхность Луны*

Получено аналитическое решение задачи терминального управления пространственным движением космического аппарата при наведении в заданную точку окололунного пространства. На основании полученного решения предложен алгоритм терминального управления движением космического аппарата. Приведены результаты математического моделирования процесса наведения космического аппарата.

Ключевые слова: управление и контроль движения космического аппарата, посадка на Луну, траектория постоянного ускорения, 3D-терминальное управление

Введение

Задача мягкой посадки на поверхность Луны как задача приведения космического аппарата (КА) в заданную точку лунной поверхности или окололунного пространства при наличии ограничений на параметры состояния в конечный момент времени является задачей терминального управления. В настоящей работе рассматривается задача пространственного управления движением КА при наличии терминальных условий по координатам и компонентам вектора скорости КА в момент завершения процесса наведения.

Ввиду наличия погрешностей выведения КА в расчетную точку начала торможения и действия ряда возмущающих факторов использование концепции "невозмущенного-возмущенного" движения для ее решения является нерациональным, и возникает необходимость использования принципа "гибких" траекторий, предполагающего реализацию обновляемой программы управления, обеспечивающей выполнение терминальных условий из текущего состояния, соответствующего моменту обновления программы управления [1, 2].

В данной работе получено аналитическое решение задачи терминального наведения КА в заданную точку окололунного пространства при постоянном тормозном ускорении. Решение получено относительно шести параметров наведения (тормозного ускорения, времени торможения, начальных значений углов ориентации и скоростей их изменения) в виде функций краевых условий. Аналогичный прием был использован в работе [3], однако

* Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00046).

аналитические соотношения для пяти параметров наведения были получены в виде функции краевых условий и времени торможения, которое предлагалось оценивать численно. Предлагаемое в настоящей работе аналитическое решение отличается вычислительной простотой.

На основании полученного решения предложен аналитический алгоритм терминального управления пространственным движением КА, совершающего посадку на поверхность Луны. В отличие от работ [2, 4], в предлагаемом алгоритме учитываются ограничения на управление и параметры траектории, время торможения определяется в результате решения задачи терминального управления, а не фиксируется. Для предстоящих программ посадки на Луну фиксация терминального момента времени не является рациональной. Предлагаемый алгоритм имеет вычислительное преимущество перед алгоритмами, рассмотренными в работах [3, 4], поскольку не использует численных методов прогноза параметров управления. Алгоритм также имеет вычислительное преимущество перед предложенной в работе [5], поскольку в его работе отсутствует процедура оптимизации. В то же время известно, что линейная программа изменения углов ориентации является близкой к оптимальной с точки зрения расхода топлива. В отличие от работ [6, 7], в работе алгоритма отсутствует этап формирования опорной траектории, поскольку аналитическое решение получено непосредственно для параметров управления вектором тяги. Предлагаемый алгоритм, в отличие от предложенного в работе [6], обеспечивает наведение КА в конкретную точку окололунного пространства, что является необходимым требованием предстоящих лунных программ. Программа управления, обеспечивающая выпол-

нение терминальных условий, в отличие от рассмотренной в работе [7], многократно обновляется в процессе полета, что соответствует принципу "гибких" траекторий.

Постановка задачи автоматической посадки на поверхность Луны

▲ Уравнения движения

Рассмотрим посадочную систему координат, связанную с терминальной точкой (ПтСК): ось OZ направлена по местной вертикали, OX — на север по касательной к меридиану в точке посадки, OY дополняет систему до правой.

Вектор состояния КА в ПтСК представим в следующем виде: $\mathbf{X} = [\mathbf{r} \mathbf{V}]^T$, где $\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T$ — радиус-вектор КА в ПтСК, $\mathbf{V} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z}]^T$ — вектор скорости КА в проекциях на оси ПтСК.

Рассмотрим упрощенную модель управляемого движения КА в ПтСК. Ориентация вектора реактивной тяги \mathbf{P} определяется мгновенными значениями углов тангажа ϑ и рыскания ψ (рис. 1). Пренебрегая возмущающим влиянием атмосферы и считая ускорение свободного падения на протяжении всего процесса наведения постоянным, уравнения движения КА при постоянном тормозном ускорении можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \dot{W} \cos\vartheta(t) \cos\psi(t); \\ \ddot{y}(t) &= \dot{W} \cos\vartheta(t) \sin\psi(t); \\ \ddot{z}(t) &= \dot{W} \sin\vartheta(t) - g, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\psi(t)$, $\vartheta(t)$ — мгновенные значения углов рыскания и тангажа; \dot{W} — тормозное ускорение; $g = 1,62 \text{ м/с}^2$ — ускорение силы тяжести у поверхности Луны.

▲ Начальные условия наведения

Пусть в результате решения задачи навигации в начальный момент времени t_0 (момент очередного

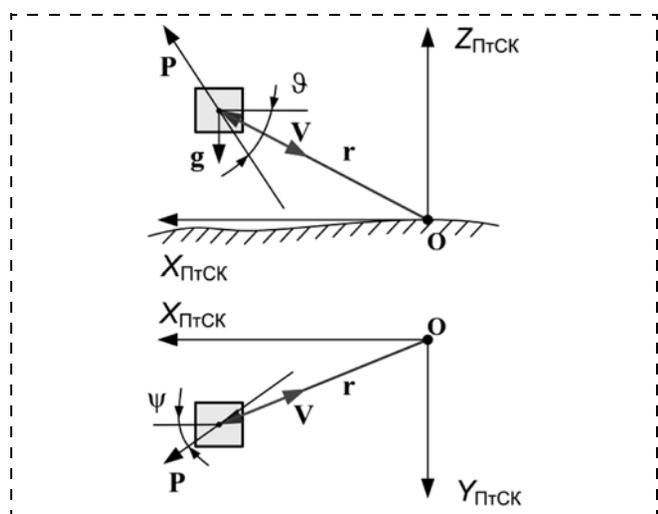


Рис. 1. Фазовые координаты КА

запуска алгоритма наведения) определен вектор состояния КА:

$$\mathbf{X}_0 = [\mathbf{r}_0 \ \mathbf{V}_0]^T = [x_0 \ y_0 \ z_0 \ \dot{x}_0 \ \dot{y}_0 \ \dot{z}_0]^T. \quad (2)$$

▲ Терминальные условия наведения

Пусть задан требуемый вектор состояния КА в момент времени окончания процесса наведения:

$$\mathbf{X}_T^* = [\mathbf{r}_T^* \ \mathbf{V}_T^*]^T = [x_T^* \ y_T^* \ z_T^* \ \dot{x}_T^* \ \dot{y}_T^* \ \dot{z}_T^*]^T. \quad (3)$$

▲ Параметры наведения

Рассмотрим вектор управления \mathbf{u} , обеспечивающий перевод КА из известного начального положения \mathbf{X}_0 в заданное терминальное положение \mathbf{X}_T^* :

$$\mathbf{u} = [\psi_0 \ \dot{\psi} \ \vartheta_0 \ \dot{\vartheta} \ \dot{W} \ T_H]^T,$$

где ψ_0 , ϑ_0 — программные значения углов рыскания и тангажа в момент времени t_0 ; $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$ — программные значения скоростей изменения углов рыскания и тангажа; $\dot{W} = \frac{P}{m}$ — требуемое кажущееся ускорение; P — текущая требуемая реактивная тяга двигателя; m — текущая масса КА; T_H — время, оставшееся до окончания процесса наведения.

Компоненты вектора \mathbf{u} будем называть параметрами наведения.

Наведение осуществляется с постоянным тормозным ускорением. Программа управления по углам рыскания ψ и тангажа ϑ задана в виде линейных функций времени:

$$\psi_{\text{пр}}(t - t_0) = \psi_0 + \dot{\psi}(t - t_0);$$

$$\vartheta_{\text{пр}}(t - t_0) = \vartheta_0 + \dot{\vartheta}(t - t_0).$$

Предположим также, что система управления ориентацией и стабилизации КА в любой момент времени обеспечивает соответствие фактических значений углов рыскания и тангажа их программным значениям:

$$\psi(t) = \psi_{\text{пр}}(t), \quad \vartheta(t) = \vartheta_{\text{пр}}(t).$$

Имеются следующие ограничения на параметры наведения:

$$(\vartheta_0 + \dot{\vartheta}(T_H - t_0)) \in (-\pi/2, 0];$$

$$(\psi_0 + \dot{\psi}(T_H - t_0)) \in (-\pi/2, \pi/2);$$

$$\dot{W} \in [\dot{W}_{\text{min}}, \dot{W}_{\text{max}}] = [P_{\text{min}}/m, P_{\text{max}}/m], \quad (4)$$

где $\dot{W}_{\text{min}} = P_{\text{min}}/m$, $\dot{W}_{\text{max}} = P_{\text{max}}/m$.

P_{min} , P_{max} — нижняя и верхняя границы диапазона дросселирования тяги реактивного двигателя.

▲ Постановка задачи наведения

При заданных математической модели объекта управления (1), начальных условиях (2) и ограничениях (4) требуется определить параметры наведе-

дения, обеспечивающие перевод КА в заданное терминальное положение (3):

- программные значения углов рыскания ψ_0 и тангажа ϑ_0 на момент запуска алгоритма наведения и скоростей их изменения $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$;
- требуемое кажущееся ускорение \dot{W} ;
- время T_H , оставшееся до окончания процесса наведения.

Решение задачи терминального наведения в заданную точку околорунного пространства

Полагая, что изменения углов рыскания ψ и тангажа ϑ за время T_H , оставшееся до окончания процесса наведения, малы (что допускает линеаризацию соответствующих тригонометрических функций углов ориентации), при интегрировании системы уравнений (1) получим следующую систему нелинейных уравнений относительно параметров наведения ψ_0 , $\dot{\psi}$, ϑ_0 , $\dot{\vartheta}$, \dot{W} , T_H :

$$\begin{aligned} \dot{W} \left(\cos \vartheta_0 \cos \psi_0 T_H - (\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \sin \psi_0 + \dot{\vartheta} \sin \vartheta_0 \cos \psi_0) \frac{T_H^2}{2} \right) &= A_x; \\ \dot{W} \left(\cos \vartheta_0 \cos \psi_0 \frac{T_H^2}{2} - (\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \sin \psi_0 + \dot{\vartheta} \sin \vartheta_0 \cos \psi_0) \frac{T_H^3}{6} \right) &= B_x; \\ \dot{W} \left(\cos \vartheta_0 \sin \psi_0 T_H + (\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \cos \psi_0 - \dot{\vartheta} \sin \vartheta_0 \sin \psi_0) \frac{T_H^2}{2} \right) &= A_y; \\ \dot{W} \left(\cos \vartheta_0 \sin \psi_0 \frac{T_H^2}{2} + (\dot{\psi} \cos \vartheta_0 \cos \psi_0 - \dot{\vartheta} \sin \vartheta_0 \sin \psi_0) \frac{T_H^3}{6} \right) &= B_y; \\ \dot{W} \left(\sin \vartheta_0 T_H + \dot{\vartheta} \cos \vartheta_0 \frac{T_H^2}{2} \right) &= A_z; \\ \dot{W} \left(\sin \vartheta_0 \frac{T_H^2}{2} + \dot{\vartheta} \cos \vartheta_0 \frac{T_H^3}{6} \right) &= B_z, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A_x &= \dot{x}_T^* - \dot{x}_0, \quad A_y = \dot{y}_T^* - \dot{y}_0, \quad A_z = \dot{z}_T^* - \dot{z}_0 + gT_H; \\ B_x &= x_T^* - x_0 - \dot{x}_0 T_H; \quad B_y = y_T^* - y_0 - \dot{y}_0 T_H; \\ B_z &= z_T^* - z_0 + \left(\frac{gT_H}{2} - \dot{z}_0 \right) T_H. \end{aligned}$$

Рассмотрим способ решения системы (5), основанный на первоначальном сведении ее к одному уравнению относительно параметра наведения T_H . Аналогичный прием был использован в работе [3].

Разрешим полученные уравнения относительно времени T_H и тормозного ускорения \dot{W} . Возводя в квадрат и последовательно складывая левые и правые части первого, третьего и пятого уравнений системы (5), с учетом принятых допущений получим

$$\begin{aligned} \dot{W}^2 \left(T_H^2 - \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \cos^2 \psi_0 \frac{T_H^3}{2} - \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \psi_0 \frac{T_H^3}{2} + \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \frac{T_H^3}{2} \right) &= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2; \\ \dot{W}^2 \left(T_H^2 - \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \frac{T_H^3}{2} + \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \frac{T_H^3}{2} \right) &= \\ = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2; \\ \dot{W}^2 T_H^2 &= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow \\ \dot{W} &= \frac{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}{T_H}. \end{aligned} \quad (6)$$

Возводя в квадрат и последовательно складывая левые и правые части второго, четвертого и шестого уравнений системы (5), получим

$$\begin{aligned} \dot{W}^2 \left(\frac{T_H^4}{4} - \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \cos^2 \psi_0 \frac{T_H^5}{12} - \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \psi_0 \frac{T_H^5}{12} + \dot{\vartheta} \sin(2\vartheta_0) \frac{T_H^5}{12} \right) &= B_x^2 + B_y^2 + B_z^2; \\ \dot{W}^2 \frac{T_H^4}{4} &= B_x^2 + B_y^2 + B_z^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Выполнив подстановку выражения (6) в уравнение (7), получим следующее уравнение относительно времени T :

$$(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) T_H^2 = 4(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2). \quad (8.1)$$

Выполнив подстановки, получим уравнение 3-го порядка относительно параметра T_H :

$$f_0(T_H) = a_1 T_H^3 + a_2 T_H^2 + a_3 T_H + a_4 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 2g(\dot{z}_T^* + \dot{z}_0); \\ a_2 &= (\dot{x}_T^* - \dot{x}_0) + (\dot{y}_T^* - \dot{y}_0)^2 + (\dot{z}_T^* - \dot{z}_0)^2 - \\ &- 4(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 + (z_T^* - z_0)g); \\ a_3 &= 8((x_T^* - x_0)\dot{x}_0 + (y_T^* - y_0)\dot{y}_0 + (z_T^* - z_0)\dot{z}_0); \\ a_4 &= -4((x_T^* - x_0)^2 + (y_T^* - y_0)^2 + (z_T^* - z_0)^2). \end{aligned}$$

Заметим, что $a_1 \ll a_2$, поэтому предлагается искать решение относительно параметра T_H из решения следующего квадратного уравнения:

$$f(T_H) = a_2 T_H^2 + a_3 T_H + a_4 = 0. \quad (8.2)$$

Корни уравнения (8.2) имеют следующий вид:

$$T_{H1} = \frac{-a_3 + \sqrt{a_3^2 - 4a_2 a_4}}{2a_2}; \quad (9.1)$$

$$T_{H2} = \frac{-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_2 a_4}}{2a_2}. \quad (9.2)$$

Очевидно, что если для заданных начальных и терминальных условий наведения существует такое $T_H \in \mathbf{R}$ вида (9.1)—(9.2), удовлетворяющее следующему ограничению:

$$\dot{W}_{\min}(t_0 + T_H) \leq \frac{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}{T_H} \leq \dot{W}_{\max}(t_0), \quad (10)$$

где $\dot{W}_{\max}(t_0) = P_{\max}/m(t_0)$ — максимальное располагаемое тормозное ускорение в момент времени очередного запуска алгоритма наведения;

$\dot{W}_{\min}(t_0 + T_H) = P_{\min}/m(t_0 + T_H)$ — минимальное располагаемое тормозное ускорение в момент времени окончания процесса наведения;

в соответствии с формулой Циолковского $m(t_0 +$

$T_H) = m(t_0) e^{-\frac{|\Delta V|}{I_{уд}}}$ — масса КА в момент окончания процесса наведения;

$|\Delta V| = \dot{W} T_H = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ — характеристическая скорость маневра;

$I_{уд}$ — удельный импульс реактивного двигателя, то задача терминального управления имеет решение, т. е. можно определить такие параметры наведения ($\vartheta_0, \dot{\vartheta}, \psi_0, \dot{\psi}, \dot{W}, T_H$), которые обеспечат перевод КА из текущего положения в пространстве состояний в заданное терминальное положение.

Предположим, что такое решение существует. В таком случае можно разрешить уравнения системы (5) относительно параметров наведения ($\psi_0, \dot{\psi}$), определяющих программное движение в канале рыскания.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi &= \dot{\psi} \operatorname{tg} \psi_0 + \dot{\vartheta} \operatorname{tg} \vartheta_0; \\ \varepsilon &= \dot{\psi} \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_0} - \dot{\vartheta} \operatorname{tg} \vartheta_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя первое и второе уравнения системы (5), получим

$$\frac{2\left(1 - \xi \frac{T_H}{2}\right)}{T\left(1 - \xi \frac{T_H}{3}\right)} = \frac{A_x}{B_x}; \quad (12)$$

$$\xi = -\frac{3}{T_H} \frac{A_x T_H - 2B_x}{A_x T_H - 3B_x}.$$

Используя третье и четвертое уравнения системы (5), получим

$$\frac{2\left(1 + \varepsilon \frac{T_H}{2}\right)}{T\left(1 + \varepsilon \frac{T_H}{3}\right)} = \frac{A_y}{B_y}; \quad (13)$$

$$\xi = \frac{3}{T_H} \frac{A_y T_H - 2B_y}{A_y T_H - 3B_y}.$$

Используя первое и третье уравнение системы (5), получим

$$\frac{\left(1 - \xi \frac{T_H}{2}\right)}{\operatorname{tg} \psi_0 \left(1 + \varepsilon \frac{T_H}{2}\right)} = \frac{A_x}{A_y}; \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{A_y}{A_x} \frac{2 - \xi T_H}{2 + \varepsilon T_H}.$$

Выполнив подстановку (12), (13) в уравнение (14), получим следующее соотношение для определения значения параметра ψ_0 :

$$\operatorname{tg} \psi_0 = \frac{A_y T_H - 3B_y}{A_x T_H - 3B_x}. \quad (15)$$

Используя уравнения (11) и (15), получим следующее соотношение для определения значения параметра $\dot{\psi}$:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (\xi + \varepsilon) \left(\operatorname{tg} \psi_0 + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi_0} \right)^{-1}; \\ \dot{\psi} &= \frac{-3(A_x B_y - A_y B_x)}{(A_x T_H - 3B_x)^2 + (A_y T_H - 3B_y)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Разрешим также уравнения системы (5) относительно параметров наведения ($\vartheta_0, \dot{\vartheta}$), определяющих программное движение в канале тангажа.

Введем следующие обозначения:

$$\chi = \dot{\vartheta} \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta_0}. \quad (17)$$

Используя пятое и шестое уравнения системы (5), получим

$$\frac{2\left(1 + \chi \frac{T_H}{2}\right)}{T_H \left(1 + \chi \frac{T_H}{3}\right)} = \frac{A_z}{B_z}; \quad (18)$$

$$\chi = -\frac{3}{T_H} \frac{A_z T_H - 2B_z}{A_z T_H - 3B_z}.$$

Значение параметра ϑ_0 можно определить, используя пятое уравнение системы (5):

$$\sin \vartheta_0 = \frac{A_z}{\dot{W} T_H} \left(1 + \chi \frac{T_H}{2}\right)^{-1};$$

$$\sin \vartheta_0 = \frac{2}{\dot{W} T_H^2} (A_z T_H - 3B_z). \quad (19)$$

При условии, что значение параметра ψ_0 мало (это возможно в том случае, если подлет к терминальной точке осуществляется по полярной орбите, долгота восходящего узла которой такова, что селенографическая долгота КА в процессе наведения близка к селенографической долготе терминальной точки), значение параметра ϑ_0 можно определить также по соотношению, аналогичному (15) для определения параметра ψ_0 .

Используя первое и пятое уравнения системы (5), получим

$$\frac{\left(1 - \xi \frac{T_H}{2}\right)}{\operatorname{tg} \vartheta_0 \left(1 + \chi \frac{T_H}{2}\right)} = \frac{A_x}{A_z}; \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{A_z}{A_x} \frac{2 - \xi T_H}{2 + \chi T_H}.$$

Выполнив подстановку соотношений (12), (18) в уравнение (20), получим следующее выражение для определения параметра ϑ_0 :

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{A_z T_H - 3B_z}{A_x T_H - 3B_x}. \quad (21)$$

Используя уравнения (18) и (21), получим следующее соотношение для определения параметра ϑ :

$$\dot{\vartheta} = \chi \operatorname{tg} \vartheta_0;$$

$$\dot{\vartheta} = -\frac{3}{T} \frac{A_z T_H - 2B_z}{A_x T_H - 3B_x}. \quad (22)$$

Анализ полученного аналитического решения

Покажем, что только одно из решений (9.1), (9.2) уравнения (8) относительно параметра T_H является решением поставленной задачи терминаль-

ного наведения КА в заданную точку окололунного пространства. В качестве метода исследования используем метод математического моделирования.

Предлагаемый алгоритм расчета параметров наведения был реализован авторами программно в среде *MATLAB*. Математическое моделирование процесса терминального наведения реализовано посредством следующей циклической процедуры:

- 1) проверка условия завершения наведения;
- 2) запуск алгоритма расчета параметров наведения в ПтСК;
- 3) интегрирование уравнений движения в ПтСК.

За заданное время Δt_{Φ} перед подлетом к терминальной точке расчетные параметры наведения ψ_0 , $\dot{\psi}$, ϑ_0 , $\dot{\vartheta}$, \dot{W} , T_H фиксируются. В качестве условия завершения наведения выбрано следующее: $T_H < h$, где h — шаг интегрирования уравнений движения. В качестве метода интегрирования был использован метод Рунге—Кутты 4-го порядка точности.

Начальные условия наведения:

$$x_0 = 7 \cdot 10^4 \text{ м}, y_0 = -7 \cdot 10^4 \text{ м}, z_0 = 1 \cdot 10^4 \text{ м},$$

$$\dot{x}_0 = -700 \text{ м/с}, \dot{y}_0 = 700 \text{ м/с}, \dot{z}_0 = -50 \text{ м/с}.$$

Терминальные условия наведения:

$$x_T^* = 0 \text{ м}, y_T^* = 0 \text{ м}, z_T^* = 2 \cdot 10^3 \text{ м},$$

$$\dot{x}_T^* = 0 \text{ м/с}, \dot{y}_T^* = 0 \text{ м/с}, \dot{z}_T^* = 0 \text{ м/с}.$$

Иными словами, номинально процесс наведения должен закончиться на высоте 2 км над планируемой точкой посадки, при этом горизонтальная и вертикальная составляющие скорости КА должны обратиться в ноль.

Пусть тяга реактивного двигателя может меняться в диапазоне от 3500 Н до 4800 Н, а начальная масса КА составляет 900 кг.

Ниже представлены результаты исследования динамики процесса терминального наведения при использовании полученных решений $T_H = T_{H1}$ (9.1) и $T_H = T_{H2}$ (9.2) относительно времени, оставшегося до окончания наведения. Результаты теоретического исследования без учета ограничений на параметры управления при использовании решения $T_H = T_{H1}$ (9.1) приведены на рис. 2—4. Анализ полученных результатов показал более стремительный характер гашения скорости КА (рис. 2, б, см. вторую сторону обложки) по сравнению с рассогласованием по положению КА в ПтСК (рис. 2, а, см. вторую сторону обложки), что обеспечивает асимптотическую сходимость параметров вектора состояния КА к желаемым терминальным параметрам. При этом по мере приближения к терминальной точке в силу асимптотического характера исследуемого процесса увеличивается расчетное время наведения (рис. 3, а, см. вторую сторону обложки) по обоим решениям (9.1), (9.2), а программное значение угла тангажа стремится к $\pi/2$ (рис. 4). Более того, требуемое кажущееся ускорение не является

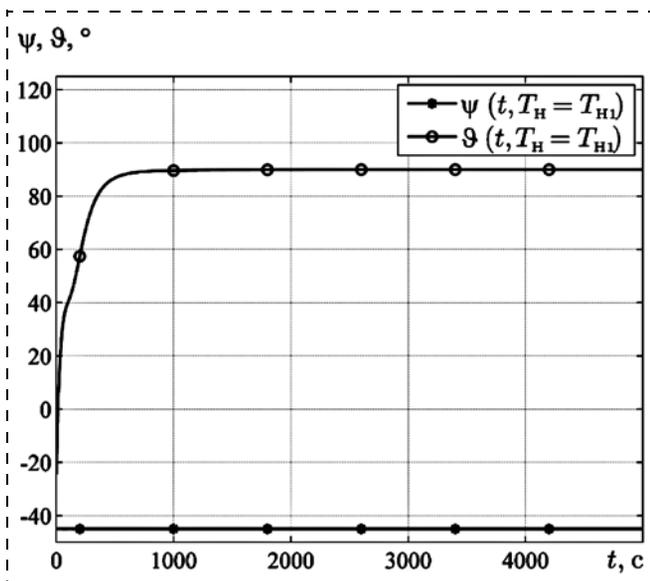


Рис. 4. Программные значения углов рыскания и тангажа в процессе наведения с использованием "ложного" решения $T_H = T_{H1}$ (9.1)

постоянным и изменяется в широких пределах от величины, существенно превышающей максимальное допустимое ускорение в момент времени начала наведения, до ускорения силы тяжести g по мере приближения к терминальной точке (см. рис. 3, б). С математической точки зрения формируемое управляющее воздействие будет компенсировать вектор ускорения силы тяжести и стремиться удерживать объект управления в окрестности терминальной точки бесконечно долго. Очевидно, что описанный процесс физически нереализуем. Таким образом, решение $T_H = T_{H1}$ (9.1) уравнения (8) будем считать "ложным".

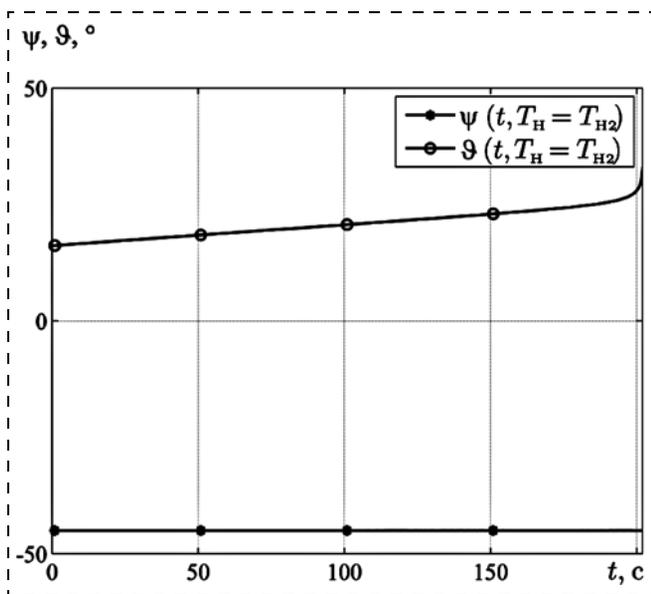


Рис. 7. Программные значения углов рыскания и тангажа в процессе наведения с использованием решения $T_H = T_{H2}$ (9.2)

Результаты аналогичного исследования при использовании решения $T_H = T_{H2}$ (9.2) приведены на рис. 5–7. Процессы изменения положения и скорости КА в ПтСК представлены на рис. 5, а и 5, б (см. третью сторону обложки) соответственно. Время, оставшееся до окончания процесса наведения при использовании данного решения уменьшается по линейному закону (рис. 6, а, см. третью сторону обложки). Требуемое кажущееся ускорение в процессе наведения близко к постоянному значению и находится в пределах заданных ограничений на параметры управления (рис. 6, б, см. третью сторону обложки). На рис. 7 представлены графики изменения программных значений углов ориентации. Закон изменения программных значений углов рыскания и тангажа, как и предполагалось, близок к линейному.

На рис. 8, а, б приведены графики функций $f_0(T_H)$ (8.1) и $f(T_H)$ (8.2) соответственно на начальный момент времени и момент за 10 с до окончания процесса наведения. Анализ рисунков показывает, что "нули" функций, соответствующие решениям T_{H1} и T_{H2} для расчетного параметра наведения T_H , совпадают с приемлемой точностью, что подтверждает возможность поиска решения относительно времени T_H в виде (9.2).

Таким образом, если для заданных начальных и терминальных условий наведения существует такое $T_H \in \mathbf{R}$ вида (9.2), удовлетворяющее ограничению (10), то рассматриваемая задача терминального управления имеет следующее решение относительно параметров наведения $\psi_0, \dot{\psi}, \vartheta_0, \dot{\vartheta}, \dot{W}, T_H$:

$$\begin{aligned}
 T_H &= \frac{-a_3 - \sqrt{a_3^2 - 4a_2a_4}}{2a_2}; \\
 \dot{W} &= \frac{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}{T_H}; \\
 \psi_0 &= \arctg \frac{A_y T_H - 3B_y}{A_x T_H - 3B_x}; \\
 \dot{\psi} &= \frac{-3(A_x B_y - A_y B_x)}{(A_x T_H - 3B_x)^2 + (A_y T_H - 3B_y)^2}; \\
 \vartheta_0 &= \arctg \frac{A_z T_H - 3B_z}{A_x T_H - 3B_x}; \\
 \dot{\vartheta} &= -\frac{3}{T_H} \frac{A_z T_H - 2B_z}{A_x T_H - 3B_x}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Полученное аналитическое решение задачи терминального управления позволяет рассчитать значения шести параметров наведения для приведения СА из начального состояния \mathbf{X}_0 в заданное терминальное состояние \mathbf{X}_T^* . Управление значением тормозного ускорения и ориентацией вектора тяги, сформированное на основании полученных значений параметров наведения для фиксированного

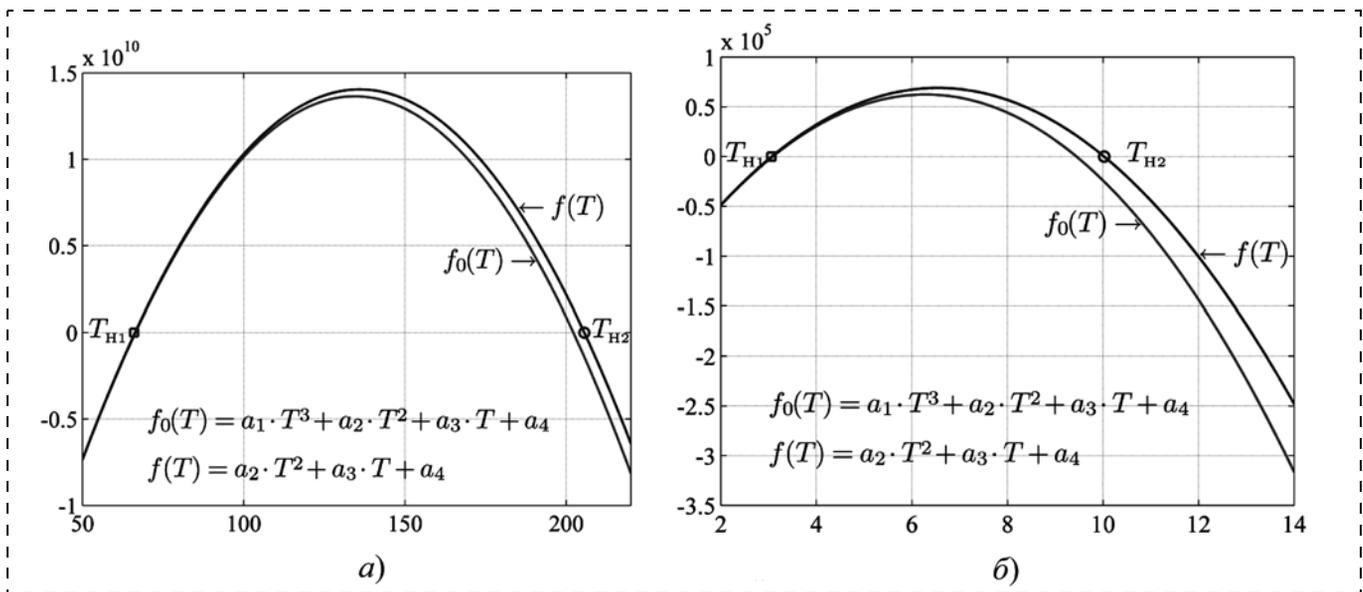


Рис. 8. Графики функций времени, оставшегося до окончания наведения:

a — в момент времени начала процесса наведения; *б* — за 10 с до окончания процесса наведения

начального вектора состояния \mathbf{X}_0 , реализует управление объектом по разомкнутому циклу. Однако предлагаемое аналитическое решение может быть использовано в рамках концепции программно-позиционного управления, впервые предложенной Дрейфусом в виде идеи "размыкаемых обратных связей" [1], или концепции позиционного управления. Следуя принципу "размораживания" начальных условий, т. е. замены начальных условий текущими в программном решении задачи, получим соотношения для параметров наведения в виде функций текущего состояния, что соответствует управлению по принципу обратной связи:

$$T_H = T_H(\mathbf{X}, \mathbf{X}_T^*),$$

$$\dot{W} = \dot{W}(T_H, \mathbf{X}, \mathbf{X}_T^*),$$

$$\vartheta = \vartheta(T_H, \mathbf{X}, \mathbf{X}_T^*),$$

$$\psi = \psi(T_H, \mathbf{X}, \mathbf{X}_T^*).$$

В соответствии с предлагаемым решением, реализующим гибкую стратегию управления, обновляемые на каждом такте программные значения углов ориентации вектора тяги будут соответствовать функциям времени, близким к линейным, а обновляемое программное значение требуемого тормозного ускорения будет близко к постоянному значению.

Алгоритм терминального управления пространственным движением КА при посадке на поверхность Луны

При постановке задачи терминального наведения был принят ряд допущений, и в качестве модели движения объекта были использованы упро-

щенные уравнения движения КА вблизи лунной поверхности. Полученное решение является приближенным, однако при реализации принципа "гибких" траекторий в силу многократного обновления программы управления по мере приближения к терминальной точке погрешность наведения будет уменьшаться. Предполагается, что алгоритм терминального управления на основе данного решения можно использовать при переводе КА с окололунной предпосадочной орбиты в заданную точку окололунного пространства.

Пусть при полете КА по окололунной орбите в некоторый момент времени запущен режим терминального наведения. При запуске режима однократно запускается процедура расчета кватерниона ориентации ПтСК относительно селенографической системы координат (СгСК) $\Lambda_{\text{ПтСК}}$.

С момента времени запуска режима терминального наведения осуществляется запуск алгоритма расчета параметров наведения, входными данными для которого являются расчетный вектор состояния \mathbf{X}_0 и заданный вектор \mathbf{X}_T^* в ПтСК. В очередном запуске, в котором первичное решение будет найдено, выполняется инициализация процесса терминального наведения.

Алгоритм терминального управления, запускаемый с момента инициализации процесса наведения с заданной периодичностью, реализует следующую последовательность действий:

1. Проверка условия завершения процесса наведения.

В качестве условия завершения наведения выбрано следующее условие относительно времени, оставшегося до окончания процесса наведения:

$$T_H < h,$$

где h — такт работы алгоритма.

При выполнении данного условия осуществляется выдача команды на отсечку тяги реактивного двигателя.

2. Расчет вектора состояния КА в ПтСК \mathbf{X}_0 по информации о векторе состояния КА в СгСК, полученной от навигационной системы.

3. Расчет параметров наведения (в ПтСК).

Расчет параметров наведения в соответствии с предложенным аналитическим решением (23) с учетом краевых условий $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_T^*$ может осуществляться не на каждом такте работы алгоритма управления, а с отдельно заданным тактом. При "промежуточных" запусках алгоритма программа управления не обновляется, при этом выполняется пересчет параметров наведения относительно соответствующих параметров на предыдущем такте с учетом заданных программ их изменения:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \psi_0 + \dot{\psi} h; \\ \vartheta_0 &= \vartheta_0 + \dot{\vartheta} h; \\ T_H &= T_H - h. \end{aligned} \quad (24)$$

Программные значения требуемого тормозного ускорения \dot{W} и скоростей изменения углов ориентации $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}$ в "промежуточных" запусках алгоритма не пересчитываются.

За заданное время Δt_Φ перед полетом к терминальной точке параметры наведения $\psi_0, \dot{\psi}, \vartheta_0, \dot{\vartheta}, \dot{W}, T_H$ фиксируются и на последующих тактах до завершения наведения рассчитываются в соответствии с соотношениями (24).

4. Расчет кватерниона программной ориентации системы координат, связанной с КА (ССК), относительно СгСК $\Lambda_{ССК}^{\text{пр}}$:

$$\Lambda_{ССК}^{\text{пр}} = \Lambda_{\text{ПтСК-ССК}}^{\text{пр}} \circ \Lambda_{\text{ПтСК}}, \quad (25)$$

где $\Lambda_{\text{ПтСК-ССК}}^{\text{пр}}$ — кватернион программной ориентации ССК относительно ПтСК, определяемый параметрами наведения ψ_0, ϑ_0 :

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{ПтСК-ССК}}^{\text{пр}} &= \\ &= [\cos(\vartheta_0/2) \ 0 \ \sin(\vartheta_0/2) \ 0] \circ [\cos(\psi_0/2) \ 0 \ 0 \ \sin(\psi_0/2)], \end{aligned}$$

о — символ кватернионного произведения.

5. Расчет углового рассогласования фактической и программной ориентации ССК относительно СгСК $\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_X \ \gamma_Y \ \gamma_Z]^T$ по следующим формулам [8]:

$$\begin{aligned} \gamma_X &= 2\Delta\lambda_0\Delta\lambda_1; \\ \gamma_Y &= 2\Delta\lambda_0\Delta\lambda_2; \\ \gamma_Z &= 2\Delta\lambda_0\Delta\lambda_3, \end{aligned} \quad (26)$$

где γ_i — угол рассогласования по i -й оси ССК; $\Delta\lambda_0, \Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2, \Delta\lambda_3$ — элементы кватерниона рассогласования между программной и фактической ориентацией ССК $\Delta\Lambda$:

$$\Delta\Lambda = \Lambda_{ССК} \circ \tilde{\Lambda}_{ССК}^{\text{пр}},$$

$\Lambda_{ССК}$ — кватернион фактической ориентации ССК относительно СгСК, полученный по информации от навигационной системы; $\tilde{\Lambda}_{ССК}^{\text{пр}}$ — кватернион, сопряженный $\Lambda_{ССК}^{\text{пр}}$.

6. Расчет аргумента управления угловым движением КА $\boldsymbol{\sigma}$ в соответствии с ПД законом регулирования:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{K}_\gamma \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{K}_\omega (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_{\text{пр}}), \quad (27)$$

где $\mathbf{K}_\gamma, \mathbf{K}_\omega$ — (1×3) -матрицы коэффициентов закона управления соответственно по углу и по скорости; $\boldsymbol{\omega}$ — (3×1) -вектор фактической угловой скорости КА в проекциях на оси ССК, полученный по информации от навигационной системы; $\boldsymbol{\omega}_{\text{пр}}$ — (3×1) -вектор программной угловой скорости КА в проекциях на оси ССК, определяемый параметрами наведения $\dot{\vartheta}, \dot{\psi}$:

$$[0 \ \boldsymbol{\omega}_{\text{пр}}^T] = \Lambda_{\text{ПтСК-ССК}}^{\text{пр}} \circ [0 \ 0 \ \dot{\vartheta} \ \dot{\psi}] \circ \tilde{\Lambda}_{\text{ПтСК-ССК}}^{\text{пр}}.$$

7. Расчет программной величины тяги реактивного двигателя $P_{\text{пр}}$:

$$P_{\text{пр}} = \frac{\dot{W}}{m_p}, \quad (28)$$

где m_p — расчетное значение массы КА на текущий момент времени:

$$m_p = m_{p0} - \frac{P_0}{I_{\text{уд}}} h,$$

m_{p0}, P_0 — расчетное значение массы КА и тяга реактивного двигателя на предыдущем такте запуска алгоритма.

Предлагаемый алгоритм допускает разделение процесса спуска и посадки КА на ряд отдельных этапов, а также допускает изменение терминальных условий наведения как до начала этапа, так и в процессе выполнения маневра.

Заключение

Предлагаемое аналитическое решение задачи терминального управления пространственным движением КА получено для постоянного тормозного ускорения, что предполагает изменение значения управляющей тяги на невозможной траектории. Это обстоятельство заставляет искать пути уменьшения необходимого диапазона дросселирования тяги. Одним из таких путей является выбор такого диапазона начальных условий по параметрам состояния в момент начала торможения, при которых наведение потребует среднего значения управляющей тяги, близкого к номинальному значению тяги реактивного двигателя.

Анализ результатов математического моделирования процесса терминального наведения КА в за-

данную точку окололунного пространства с использованием полученного аналитического решения показал принципиальную работоспособность предлагаемого алгоритма. Исследование точности решения задачи терминального наведения с использованием данного алгоритма является следующим этапом работы.

Список литературы

1. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Методы "гибких" траекторий в задачах терминального управления вертикальными маневрами летательных аппаратов. В кн.: Проблемы управления сложными динамическими объектами авиационной и космической техники / Под ред. акад. РАН С. Н. Васильева. М.: Машиностроение, 2015. С. 51—110.

2. **Батенко А. П.** Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 161 с.

3. **Разыграев А. П.** Метод терминального управления пространственным движением при мягкой посадке в заданную точку на поверхности планеты // Основы управления полетом космических аппаратов: Учеб. пособ. для вузов. М.: Машиностроение, 1990. С. 378—386.

4. **Klumpp A. R.** Apollo Lunar Descent Guidance // *Automatica*. 1974. Vol. 10, N. 2. P. 133—146.

5. **Lunghi P., Lavagna M., Armellin R.** A Semi-analytical Guidance Algorithm for Autonomous Landing // *Advances in Space Research*. 2015. Vol. 55, N. 11. P. 2719—2738.

6. **Chomel C. T., Bishop R. H.** Analytical lunar descent guidance algorithm // *Journal of guidance, control, and dynamics*. 2009. Vol. 32, N. 3. P. 915—926.

7. **Li M., Macdonald M., McInnes C. R., Jing W.** Analytical landing trajectories for embedded autonomy // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2010. 224 (11). P. 1177—1191.

8. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

Analytical 3D Terminal Guidance Algorithm for Lunar Landing

A. V. Fomichev, a.v.fomichev@bmstu.ru, **E. K. Li**, elen.k.lee@student.bmstu.ru✉, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: **Li Elena K.**, Assistant Professor, Postgraduate Student, Bauman Moscow State Technical University, e-mail: elen.k.lee@student.bmstu.ru

Received on February 26, 2017

Accepted on March 06, 2017

This article presents three-dimensional (3D) terminal guidance scheme for a spacecraft lunar landing maneuver. An analytical solution to a spacecraft terminal guidance problem for achieving the desired spot in the circumlunar space is proposed. The solution is obtained for constant acceleration trajectory when thrust throttling is used to maintain uniform braking deceleration. The pitch program and the yaw program are essentially linear with time. To achieve 6 terminal conditions (position and velocity terminal vectors components) 6 guidance law parameters are used: pitch angle and pitch rate, yaw angle and yaw rate, braking deceleration and time-to-go. The solution is executed in the coordinate frame associated with the desired terminal spot. Current spacecraft position and velocity relative to this frame is supposed to be known at any time during the guidance. The simulation results of spacecraft guidance and control using proposed solution are presented. Analysis of the simulation results validates the basic performance of the proposed terminal guidance scheme. It should be noted that as the proposed scheme presuppose thrust variation on an undisturbed trajectory it makes sense to look for ways of reducing of required throttling range. The next phase of this research will be intended to carrying out terminal errors analysis and comparison of the accuracy of the proposed scheme and some other schemes.

Keywords: spacecraft guidance and control, lunar landing, constant acceleration trajectory, 3D terminal guidance

Acknowledgements: This work was supported by RFBR, project 14-11-00046.

For citation:

Fomichev A. V., Li E. K. Analytical 3D Terminal Guidance Algorithm for Lunar Landing, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 423—431.

DOI: 10.17587/mau.18.423-431

References

1. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Metody "gibkikh" traektorij v zadachah terminal'nogo upravlenija vertikal'nymi manevrami letatel'nyh apparatov*, In: S. N. Vasil'ev (Ed.), *Problemy upravlenija slozhnymi dinamicheskimi objektami aviacionnoj i kosmicheskoy tehniki* [Control problems of complex dynamic objects in aerospace engineering], Moscow, Mashinostroenie, 2015, pp. 51—110 (in Russian).

2. **Batenko A. P.** *Sistemy terminal'nogo upravlenija* [Terminal Control Systems], Moscow, Radio i svjaz', 1984, 161 p. (in Russian).

3. **Razygraev A. P.** *Metod terminal'nogo upravlenija prostranstvennym dvizheniem pri mjagkoj posadke v zadannuju tochku na poverhnosti planet*, In: Razygraev A. P. *Osnovy upravlenija poljotom kosmicheskikh apparatov* [Fundamentals of spacecraft flight control], Moscow, Mashinostroenie, 1990, pp. 378—386 (in Russian).

4. **Klumpp A. R.** Apollo Lunar Descent Guidance, *Automatica*, 1974, vol. 10, no. 2, pp. 133—146.

5. **Lunghi P., Lavagna M., Armellin R.** A Semi-analytical Guidance Algorithm for Autonomous Landing, *Advances in Space Research*, 2015, vol. 55, no. 11, pp. 2719—2738.

6. **Chomel C. T., Bishop R. H.** Analytical lunar descent guidance algorithm, *Journal of guidance, control, and dynamics*, 2009, vol. 32, no. 3, pp. 915—926.

7. **Li M., Macdonald M., McInnes C. R., Jing W.** Analytical landing trajectories for embedded autonomy, *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 2010, no. 224 (11), pp. 1177—1191.

8. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** *Применение кватернионов в задачах ориентации твоярдого тела* [Application of quaternions in problems of rigid body attitude control], Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).

25—30 сентября 2017 г.
в пос. Дивноморское Геленджикского района Краснодарского края состоится
10-я Всероссийская мультиконференция

ПО ПРОБЛЕМАМ УПРАВЛЕНИЯ (МКПУ-2017)

Председатель Президиума мультиконференции
академик РАН **В. Г. Пешехонов**

Состав мультиконференции

- ◆ **Локальная научно-техническая конференция**
"Модели, методы и технологии интеллектуального управления" (ИУ-2017)
Председатель программного комитета конференции — академик РАН С. Н. Васильев
Заместители председателя:
А. П. Бельтюков, О. П. Кузнецов, Д. А. Новиков, Н. Б. Филимонов
Секции конференции:
— Интеллектуализация систем
— Эргатические проблемы человеко-машинных систем
— Управление в организационных системах
- ◆ **Локальная научно-техническая конференция**
"РОБОТОТЕХНИКА И МЕХАТРОНИКА" (РМ-2017)
Председатель программного комитета конференции — академик РАН Ф. Л. Черноусько
Сопредседатель — академик РАН И. А. Каляев
- ◆ **Локальная научно-техническая конференция**
"УПРАВЛЕНИЕ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ И СЕТЕВЫХ СИСТЕМАХ" (УРСС-2017)
Председатель программного комитета конференции — академик РАН И. А. Каляев
Сопредседатель — академик РАН И. В. Бычков

Секретариат Мультиконференции МКПУ-2017 и конференции УРСС-2017
347928, г. Таганрог, ул. Чехова, 2, НИИ МВС ЮФУ
Т/ф: + 7 (8634) 61-54-59, 36-13-13 E-mail: mail@niimvs.ru
Кухаренко Анатолий Павлович, к. т. н.
Иванова Наталья Юрьевна

Подробная информация о мультиконференции см. на сайте:
<http://www.conf.mvs.sfedu.ru>

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397**, тел./факс: **(499) 269-5510**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *Е. В. Комиссарова*.

Сдано в набор 31.03.2017. Подписано в печать 16.05.2017. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН617. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.

Рисунки к статье А. В. Фомичева, Е. К. Ли

«АНАЛИТИЧЕСКОЙ АЛГОРИТМ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ДВИЖЕНИЕМ КА
ПРИ ПОСАДКЕ НА ПОВЕРХНОСТЬ ЛУНЫ»

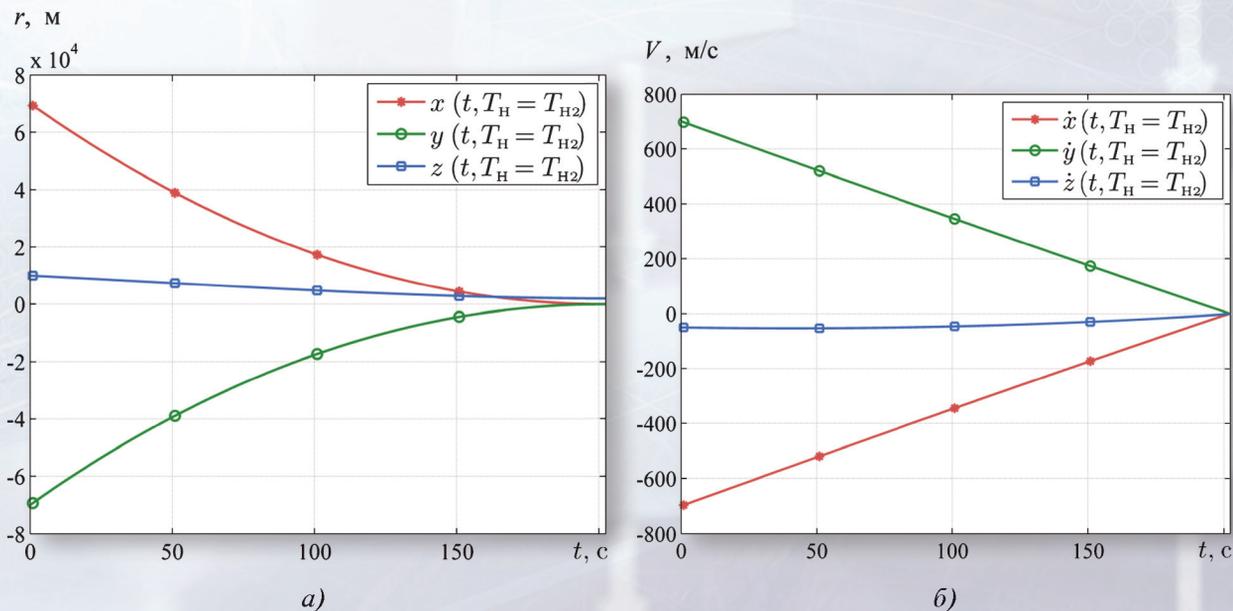


Рис. 5. Изменение параметров вектора состояния в ПтСК
в процессе наведения с использованием решения $T_H = T_{H2}$ (9.2):
 a – по положению; b – по скорости

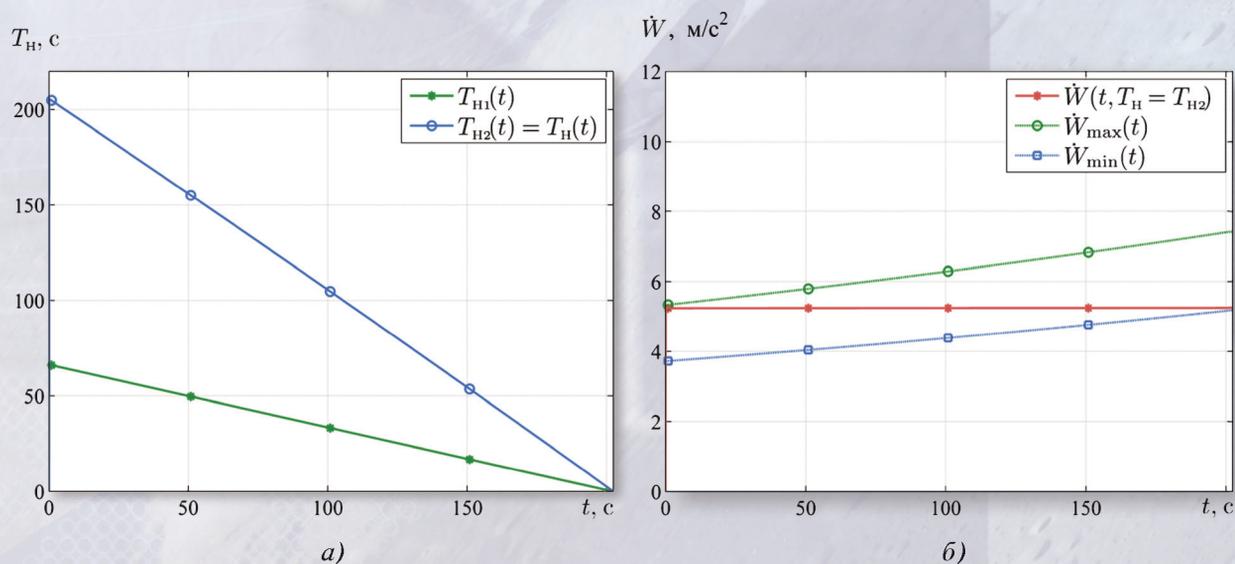


Рис. 6. Изменение параметров управления в процессе наведения
с использованием решения $T_H = T_{H2}$ (9.2):
 a – времени, оставшегося до окончания процесса наведения;
 b – требуемого кажущегося ускорения



Международная научно-техническая конференция «ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ РОБОТОТЕХНИКА»

2–3 ноября 2017 года

ГНЦ РФ ЦНИИ РТК,
Тихорецкий пр., 21,
Санкт-Петербург

ПЕРВОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ

Организатор конференции

- ГНЦ РФ ЦНИИ РТК

Оформление участия в конференции

Для участия в конференции необходимо направить регистрационную форму, материалы доклада и экспертное заключение о возможности публикации на e-mail: mrspsb@rtc.ru

Финансовые условия

Стоимость участия и условия оплаты на сайте <http://er.rtc.ru/>

Требования к тезисам и докладам

Тезисы доклада (на русском и английском языках) не более 1 страницы, а также материалы доклада, аннотация, ключевые слова на русском языке (не более 5 страниц) и на английском языке (не более 5 страниц) пересылаются на e-mail: mrspsb@rtc.ru в виде файла в формате Word for Windows.

Формат страниц – А4, поля: верхнее и нижнее – 1,8 см, левое и правое – 1,9 см. Шрифт текста – Times New Roman Cyr 11 пунктов, позиция табуляции абзаца – 0,8, единичный междустрочный интервал. Таблицы, рисунки, формулы, графики (как объекты) вставляются в текст и обязательно должны содержать название. Графики должны быть выполнены в черно-белом варианте.

Инициалы авторов, фамилия – по центру, шрифт – полужирный курсив, интервал после – 9 пунктов; название – по центру, шрифт – прописной полужирный; интервал после – 9 пунктов; название организации, город, e-mail авторов: шрифт – курсив, интервал после – 9 пунктов; основной текст.

Библиографические ссылки даются арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы - через 6 пунктов после текста без заголовка и абзаца.

Тематика конференции

- **Проектирование робототехнических систем**
Методы, опыт проектирования и применения.
- **Робототехника для экстремальных условий функционирования**
Космическая и морская робототехника. Робототехника для чрезвычайных условий катастроф и аварий.
- **Военная и антитеррористическая робототехника**
Боевые, боевого обеспечения и антитеррористические робототехнические системы. Разведка, разминирование, охрана, спасательные и транспортные операции.
- **Робототехника в медицине и в сфере обслуживания**
Оказание первой помощи. Обслуживание больных и инвалидов, их реабилитация. Микророботы для обследования и лечения внутренних органов.

Основные этапы и даты

Предоставление заявки на участие, тезисов доклада, материалов доклада, экспертного заключения о возможности публикации	до 31 мая 2017
Рассмотрение материалов Программным комитетом и уведомление участников о принятии докладов	до 16 июня 2017
Проведение конференции	2–3 ноября 2017

Официальный язык

Русский; Английский

Председатель программного комитета:
д.т.н., профессор Евгений Иванович Юревич
Тел.: (812) 5524544; e-mail: yurevich@rtc.ru

Секретариат конференции:
Вольпяс Татьяна Владимировна
Тел.: (812) 5524162; e-mail: mrspsb@rtc.ru



Подробная информация о конференции на сайте: <http://er.rtc.ru/>