

# МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ



Том 18  
2017  
№ 5

Рисунки к статье  
 С. Л. Зенкевича, А. В. Назаровой, Хуа Чжу  
 «МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ  
 ГРУППЫ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ  
 В СРЕДЕ ROS»

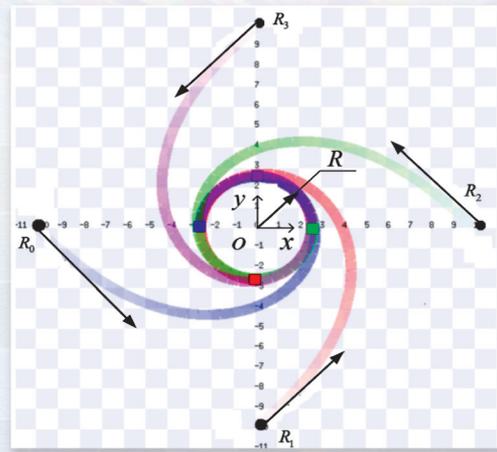


Рис. 4. Траектории движения  
 роботов  $R_0, R_1, R_2, R_3$

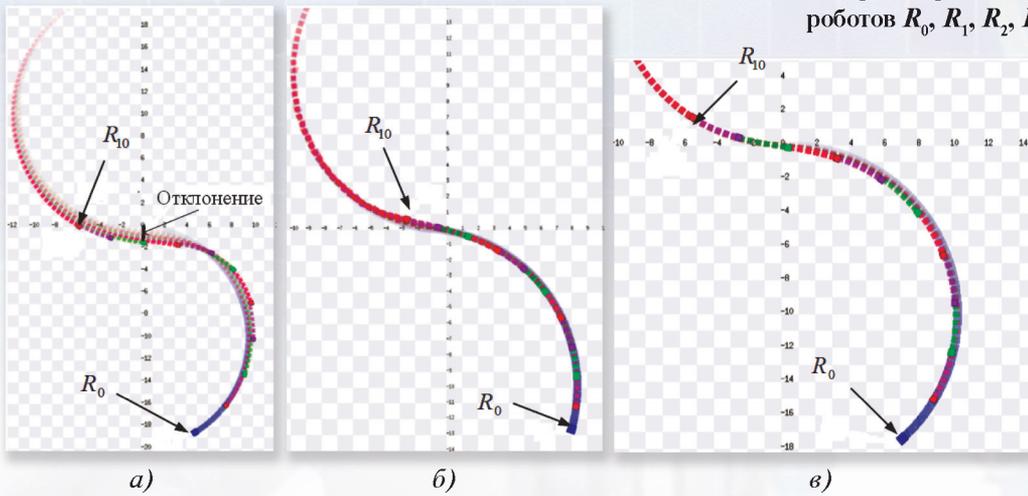


Рис. 5. Траектории роботов: *a* – по алгоритму 1; *b* – по алгоритму 2; *в* – по алгоритму 3

Рисунки к статье А. С. Кодякова, Н. А. Павлока, В. Ю. Будкова  
 «ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИИ  
 АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА АНТАРЕС  
 ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ»

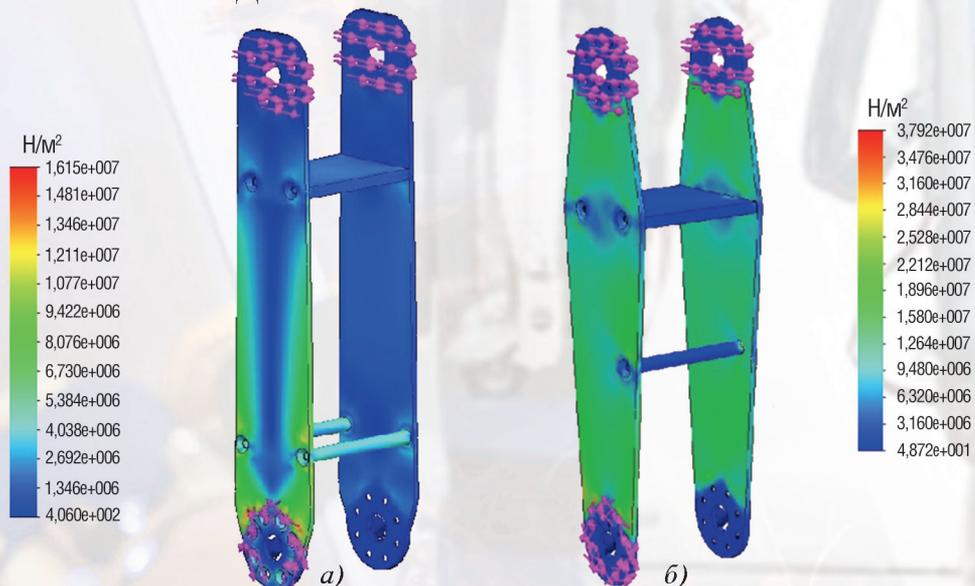


Рис. 2. Внутреннее напряжение в конструктивных элементах ноги: *a* – бедро; *б* – голень

**Редакционный совет:**

CHYI-YEU LIN, PhD, prof.  
GROUMPOS P. P., prof.  
JEN-HWA GUO, PhD, prof.  
KATALINIC B., PhD, prof.  
SUBUDHI B., PhD, prof.  
АЛИЕВ Т. А., акад. НАНА, проф.  
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН, проф.  
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН, проф.  
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН, проф.  
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН, проф.,  
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН, проф.  
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г., чл.-корр. НАНБ, проф.  
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН, проф.  
ЛЕОНОВ Г. А., чл.-корр. РАН, проф.  
МАТВЕЕНКО А. М., акад. РАН, проф.  
МИКРИН Е. А., акад. РАН, проф.  
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН, проф.  
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.  
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН, проф.  
СИГОВ А. С., акад. РАН, проф.  
СОЙФЕР В. А., акад. РАН, проф.  
СОЛОВЬЕВ В. А., чл.-корр. РАН, проф.  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН, проф.  
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН, проф.  
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН, проф.  
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН, проф.  
ШЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.  
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН, проф.

**Главный редактор:**

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д. т. н., с. н. с.

**Заместители гл. редактора:**

ПОДУРАЕВ Ю. В., д. т. н., проф.  
ПУТОВ В. В., д. т. н., проф.  
ЮЩЕНКО А. С., д. т. н., проф.

**Ответственный секретарь:**

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

**Редакционная коллегия:**

АЛЕКСАНДРОВ В. В., д. ф.-м. н., проф.  
АНТОНОВ Б. И.  
АРШАНСКИЙ М. М., д. т. н., проф.  
БУКОВ В. Н., д. т. н., проф.  
ВИТТИХ В. А., д. т. н., проф.  
ГРАДЕЦКИЙ В. Г., д. т. н., проф.  
ЕРМОЛОВ И. Л., д. т. н., доц.  
ИВЧЕНКО В. Д., д. т. н., проф.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д. т. н., проф.  
КОЛОСОВ О. С., д. т. н., проф.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д. т. н., проф.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д. т. н., проф.  
ЛОХИН В. М., д. т. н., проф.  
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д. ф.-м. н., проф.  
ПРОХОРОВ Н. Л., д. т. н., проф.  
ПШИХОПОВ В. Х., д. т. н., проф.  
РАПОПОРТ Э. Я., д. т. н., проф.  
СЕРГЕЕВ С. Ф., д. пс. н., с. н. с.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д. т. н., проф.  
ФРАДКОВ А. Л., д. т. н., проф.  
ФУРСОВ В. А., д. т. н., проф.  
ЮРЕВИЧ Е. И., д. т. н., проф.

**Редакция:**

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

## СОДЕРЖАНИЕ

## МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Левский М. В.** Условия трансверсальности как эффективный инструмент в математических построениях оптимальных процессов . . . . . 291
- Анисимов Д. Н., Май Тхе Ань.** Динамические свойства нечетких систем управления, построенных на основе реляционных моделей . . . . . 298
- Афонин В. Л.** Вейвлет-преобразования в приложениях к анализу систем управления, содержащих существенные нелинейности . . . . . 308

## РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Зенкевич С. Л., Назарова А. В., Хуа Чжу.** Моделирование и анализ движения группы мобильных роботов в среде ROS . . . . . 317
- Кодяков А. С., Павлюк Н. А., Будков В. Ю.** Исследование устойчивости конструкции антропоморфного робота Антарес при воздействии внешней нагрузки . . . . . 321
- Резчиков А. Ф., Кушников В. А., Иващенко В. А., Фоминых Д. С., Богомолов А. С., Филимонок Л. Ю.** Минимизация ущерба от нарушения технологического процесса в сварочных роботизированных технологических комплексах . . . . . 328
- Рыбин И. А., Рубанов В. Г.** Математическая модель системы управления мобильного транспортного средства . . . . . 333
- Гулай А. В., Зайцев В. М.** Кодовое разделение логических каналов передачи транзакций в интеллектуальных мехатронных системах . . . . . 340

## УПРАВЛЕНИЕ АВИАКОСМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

- Александров А. Ю., Александрова Е. Б., Лапшин А. Е., Тихонов А. А.** Электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в режиме двухосной закрутки . . . . . 346
- Рябогин Н. В., Соколов В. Н., Задорожная Н. М.** Комплексование информации инерциальных измерительных блоков и звездных приборов на основании оценки вектора малого поворота . . . . . 351

*Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования*

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

# MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



## MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

### Editorial Council:

ALIEV T. A., prof., Azerbaijan, Baku  
 ANSHAKOV G. P., Russia, Samara  
 BOLOTNIK N. N., Russia, Moscow  
 CHENTSOV A. G., Russia, Ekaterinburg  
 CHERNOUSKO F. L., Russia, Moscow  
 CHYI-YEU LIN, PhD, Prof., Taiwan, Taipei  
 FEDOROV I. B., Russia, Moscow  
 GROUMPOS P. P., prof., Greece, Patras  
 JEN-HWA GUO, PhD, Prof., Taiwan, Taipei  
 KALYAEV I. A., Russia, Taganrog  
 KATALINIC B., PhD, Prof., Austria, Vienna  
 KRASNEVSKIY L. G., Belarus, Minsk  
 KUZNETSOV N. A., Russia, Moscow  
 LEONOV G. A., Russia, S.-Peterburg  
 MATVEENKO A. M., Russia, Moscow  
 MIKRIN E. A., Russia, Moscow  
 PESHEKHONOV V. G., Russia, S.-Peterburg  
 REZCHIKOV A. F., Russia, Saratov  
 SCHERBATYUK A. F., Russia, Vladivostok  
 SEBRYAKOV G. G., Russia, Moscow  
 SIGOV A. S., Russia, Moscow  
 SOJFER V. A., Russia, Samara  
 SOLOMENTSEV Yu. M., Russia, Moscow  
 SOLOVJEV V. A., Russia, Moscow  
 SUBUDHI B., PhD, Prof., India, Sundargarh  
 VASILYEV S.N., Russia, Moscow  
 YUSUPOV R. M., Russia, S.-Peterburg  
 ZHELTOV S. Yu., Russia, Moscow

### Editor-in-Chief:

FILIMONOV N. B., Russia, Moscow

### Deputy Editor-in-Chief:

PODURAEV Yu. V., Russia, Moscow  
 PUTOV V. V., Russia, S.-Peterburg  
 YUSCHENKO A. S., Russia, Moscow

### Responsible Secretary:

BEZMENOVA M. Yu., Russia, Moscow

### Editorial Board:

ALEXANDROV V. V., Russia, Moscow  
 ANTONOV B. I., Russia, Moscow  
 ARSHANSKY M. M., Russia, Tver  
 BUKOV V. N., Russia, Zhukovsky  
 ERMOLOV I. L., Russia, Moscow  
 FILARETOV V. F., Russia, Vladivostok  
 FRADKOV A. L., Russia, S.-Peterburg  
 FURSOV V. A., Russia, Samara  
 GRADETSKY V. G., Russia, Moscow  
 ILYASOV B. G., Russia, Ufa  
 IVCHENKO V. D., Russia, Moscow  
 KOLOSOV O. S., Russia, Moscow  
 KOROSTELEV V. F., Russia, Vladimir  
 LEBEDEV G. N., Russia, Moscow  
 LOKHIN V. M., Russia, Moscow  
 PAVLOVSKY V. E., Russia, Moscow  
 PROKHOROV N. L., Russia, Moscow  
 PSHIKHOPOV V. Kh., Russia, S.-Peterburg  
 RAPOPORT E. Ya., Russia, Samara  
 SERGEEV S. F., Russia, S.-Peterburg  
 VITTIKH V. A., Russia, Samara  
 YUREVICH E. I., Russia, S.-Peterburg

### Editorial Staff:

GRIGORIN-RYABOVA E.V., Russia, Moscow

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

## CONTENTS

### METHODS OF THE THEORY OF AUTOMATIC CONTROL

- Levskii M. V.** Conditions of Transversality as an Effective Instrument in the Mathematical Constructions of the Optimal Processes . . . . . 291
- Anisimov D. N., Mai Tkhe Anh.** Dynamic Properties of the Fuzzy Control Systems Based on the Relational Models . . . . . 298
- Afonin V. L.** Wavelet Transform Method in Applications to the Analysis of the Nonlinear Control Systems . . . . . 308

### ROBOTIC SYSTEMS

- Zenkevich S. L., Nazarova A. V., Zhu Hua.** Simulation and Analysis of the Movement of a Group of Mobile Robots in ROS . . . . . 317
- Kodyakov A. S., Pavliuk N. A., Budkov V. Yu.** Study of Stability of Antares Anthropomorphic Robot under the Action of an External Load . . . . . 321
- Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivaschenko V. A., Fominykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonuk L. Yu.** Minimization of the Damage Caused by Breakdowns of the Technological Processes in the Robotic Welding Technological Complexes . . . . . 328
- Rybin I. A., Rubanov V. G.** Mathematical Model of a Mobile Vehicle Control System . . . . . 333
- Gulay A. V., Zaitsev V. M.** Code Division of the Logical Channels for Transmission of Transactions in the Intelligent Mechatronic Systems . . . . . 340

### CONTROL AEROSPACE SYSTEMS

- Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Lapshin A. E., Tikhonov A. A.** Electrodynamic Stabilization of an Artificial Earth Satellite in the Mode of Biaxial Rotation . . . . . 346
- Ryabogin N. V., Sokolov V. N., Zadorozhnaya N. M.** Inertial Measurement Units and Star Tracker Measurements Fusion on the Basis of the Rodrigues Parameters Estimation . . . . . 351

Information about the journal is available online at:  
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

**М. В. Левский**, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., dp940@mail.ru,

Научно-исследовательский институт космических систем имени А. А. Максимова —  
филиал ГКНПЦ им. М. В. Хруничева

## Условия трансверсальности как эффективный инструмент в математических построениях оптимальных процессов

*Статья посвящена методам математической теории оптимальных процессов. Рассматривается принцип максимума Л. С. Понтрягина. Детально изучены условия трансверсальности, их роль, место и значение в общей процедуре решения задач поиска оптимальных функций. Данная работа устраняет имеющийся методический пробел, связанный с неполным использованием условий трансверсальности. На конкретных примерах демонстрируется, что условия трансверсальности (как одно из необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума) являются крайне эффективным математическим средством (а в ряде случаев даже единственным) при определении характерных свойств, закономерностей и ключевых характеристик (параметров, констант, интегралов движения) оптимального решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (динамических систем).*

**Ключевые слова:** принцип максимума, условия трансверсальности, критерий оптимальности, функционал качества, условия оптимальности, краевая задача

В настоящее время при решении многих оптимизационных задач с помощью принципа максимума Л. С. Понтрягина значение условий трансверсальности явно недооценивается. Целью данной работы было стремление показать, что условия трансверсальности — не простая формальность, участвующая в процедуре нахождения оптимальных временных функций (присутствующая в системе необходимых условий оптимальности, записанных в соответствии с принципом максимума Л. С. Понтрягина [1]), а эффективное средство (а в ряде случаев единственное, ничем не заменимое) для определения характеристик и свойств оптимального процесса, вычисления ключевых его параметров (констант).

Как правило, многие авторы и исследователи [2—5] (в основном в прикладных областях) ограничиваются лишь тем, что проверяют выполнение условий трансверсальности (как необходимых условий оптимальности) только в конце решения задач построения оптимальных процессов, уже после того, как само решение получено, формализовано конкретными математическими зависимостями. При этом краевая задача принципа максимума решается по-разному [7—11]. Проверку делают путем подстановки найденного оптимального решения исходной системы уравнений и сопряженных функций в уравнения, соответствующие условиям трансверсальности (в некоторых частных случаях условия трансверсальности удовлетворяются автоматически [5—7]). Между тем условия трансверсальности являются таким же равноправным необходимым условием оптимальности, как и общепризнанное условие максимума функции Гамильтона и

сопряженная система дифференциальных уравнений, и их необходимо включать в систему необходимых условий оптимальности с самого начала (наравне с сопряженной системой уравнений и условием максимума функции Гамильтона), сразу после введения сопряженных переменных, записи функции Гамильтона и сопряженной системы уравнений. Такой порядок действий и дальнейшего применения процедуры принципа максимума является наиболее правильным и целесообразным. Как показывает практическое применение формализма принципа максимума, во многих случаях включение условий трансверсальности в общую систему необходимых условий оптимальности еще до формализации закономерностей оптимального движения динамической системы, описываемой исходной системой дифференциальных уравнений (задаваемой формулировкой оптимизационной задачи), является единственно верным и позволяет найти решение сложнейших, казалось бы, задач. Решение краевой задачи принципа максимума также будет учитывать условия трансверсальности, что обеспечит полноту и достоверность результатов решения исходной задачи оптимизации, гарантирует законченность полученного решения.

### Постановка задачи

Обычно динамический процесс задается дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор состояния (его компоненты  $x_i$  — фазовые переменные, отражающие текущее состоя-

ние динамической системы,  $i = \overline{1, n}$ ;  $\mathbf{y}$  — вектор управления, у которого компоненты  $y_j$  — искомые функции времени, которые необходимо выбрать оптимальными ( $j = \overline{1, l}$ ). Физическое содержание конкретной оптимизационной задачи определяется видом уравнений  $\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ . Пусть динамический процесс описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_3 x_4 - y_2 x_7, \quad \dot{x}_2 = y_3 x_5 - y_2 x_8, \quad \dot{x}_3 = y_3 x_6 - y_2 x_9, \\ \dot{x}_4 &= y_1 x_7 - y_3 x_1, \quad \dot{x}_5 = y_1 x_8 - y_3 x_2, \quad \dot{x}_6 = y_1 x_9 - y_3 x_3, \quad (2) \\ \dot{x}_7 &= y_2 x_1 - y_1 x_4, \quad \dot{x}_8 = y_2 x_2 - y_1 x_5, \quad \dot{x}_9 = y_2 x_3 - y_1 x_6. \end{aligned}$$

Система (2) определяет изменение временных функций  $x_i(t)$  при известном поведении функций  $y_j(t)$  ( $i = \overline{1, 9}, j = \overline{1, 3}$ ). Движение  $\mathbf{x}(t)$  есть решение дифференциального уравнения (1). Для конкретизации на решения уравнения (1) необходимо наложить некоторые ограничения, в частности, задать условия в начальный  $t = 0$  и конечный  $t = T$  моменты времени. Рассмотрим широко распространенный класс задач, когда краевые условия для траектории движения  $\mathbf{x}(t)$  формализуются равенствами

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T, \quad (4)$$

где  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T$  — фиксированные векторы, задающие состояние динамической системы в начальный и конечный моменты времени.

Заметим, что в большинстве случаев уравнение (1) имеет не одно, а бесконечно много решений, удовлетворяющих заданным условиям (3), (4). Из всего множества решений системы уравнений (1), (3), (4) интересны только те, которые являются оптимальными (наилучшими) в том или ином смысле. Обычно критерий оптимальности выражается функционалом качества

$$G = \int_0^T g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) dt, \quad (5)$$

где  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  — неотрицательная функция;  $T$  — время окончания оптимального процесса.

В самом общем случае задача оптимизации формулируется следующим образом: требуется перевести динамическую систему, описываемую уравнением (1), из состояния (3) в состояние (4), чтобы интеграл (5) был минимальным.

### Процедура решения задачи

Если принять функции  $y_j$ , стоящие в правых частях уравнений (2), кусочно-непрерывными функциями времени, то мы можем использовать принцип максимума Л. С. Понтрягина. В соответствии с ним введем сопряженные переменные  $q_i$ , соот-

ветствующие компонентам  $x_i$  вектора состояния  $\mathbf{x}$ , и составим функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned} H &= \varphi_0 g + q_1(y_3 x_4 - y_2 x_7) + q_2(y_3 x_5 - y_2 x_8) + \\ &+ q_3(y_3 x_6 - y_2 x_9) + q_4(y_1 x_7 - y_3 x_1) + q_5(y_1 x_8 - y_3 x_2) + \\ &+ q_6(y_1 x_9 - y_3 x_3) + q_7(y_2 x_1 - y_1 x_4) + q_8(y_2 x_2 - y_1 x_5) + \\ &+ q_9(y_2 x_3 - y_1 x_6), \end{aligned}$$

где  $\varphi_0 = \text{const} < 0$  ( $\varphi_0 \neq 0$ ).

Уравнения для сопряженных функций  $q_i$  согласно принципу максимума [1] имеют вид

$$\dot{q}_i = -\partial H / \partial x_i \quad (i = \overline{1, 9}, j = \overline{1, 3}). \quad (6)$$

Сопряженные функции  $q_i$  должны удовлетворять условиям трансверсальности:

$$\begin{aligned} q_i(0) &= \sum_{h=1}^m w_h \frac{\partial F_h(\mathbf{x}(0))}{\partial x_i} \Big|_{t=0}; \\ q_i(T) &= \sum_{k=1}^p z_k \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{x}(T))}{\partial x_i} \Big|_{t=T}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $F_h(\mathbf{x}(0))$  — функции, задающие краевое условие на левом конце траектории  $\mathbf{x}(t)$  в форме  $F_h(\mathbf{x}(0)) = 0$ , причем  $h = \overline{1, m}$  ( $m \leq n$ );  $w_k$  — числа, не все равные нулю;  $\Phi_k(\mathbf{x}(T))$  — функции, задающие краевое условие для правого конца траектории  $\mathbf{x}(t)$  в форме  $\Phi_k(\mathbf{x}(T)) = 0$ , причем  $k = \overline{1, p}$  ( $p \leq n$ );  $z_k$  — числа, не все равные нулю; для задачи в постановке (2) — (5) число фазовых переменных  $n = 9$ .

Если время  $T$  окончания оптимального процесса не фиксировано, то оптимальные сопряженные функции  $q_i(t)$  должны удовлетворять еще одному необходимому условию оптимальности, выраженному условием трансверсальности

$$H(\mathbf{x}(T), \mathbf{y}(T), \mathbf{q}(T), T) = - \sum_{k=1}^p v_k \frac{\partial \Phi_k(\mathbf{x}(T), T)}{\partial T}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, \dots, q_9\}$  — вектор сопряженных переменных;  $\Phi_k(\mathbf{x}(T), T)$  — функции, задающие краевое условие на правом конце траектории  $\mathbf{x}(t)$  в форме  $\Phi_k(\mathbf{x}(T), T) = 0$ , причем  $k = \overline{1, p}$  ( $p \leq n$ );  $v_k$  — числа, не все равные нулю (напомним, что для задачи (2)–(5)  $n = 9$ , а  $l = 3$ ).

Из структуры функции Гамильтона, уравнений (6) и условий трансверсальности (7), (8) следует, что оптимальные функции  $q_i$  пропорциональны отрицательной константе  $\varphi_0$ . Поэтому справедливо принять  $\varphi_0 = -1$ .

Так как рассматриваемая задача (2)–(5) — это задача с закрепленными левым и правым концами траектории  $\mathbf{x}(t)$ , то условие трансверсальности (7) для сопряженных переменных  $q_i$  на момент времени  $t = 0$  имеет вид [12]:  $q_i(0) = w_i$  ( $i = \overline{1, 9}$ ), где  $w_1, w_2, \dots, w_9$  — некоторые числа, одновременно не равные нулю. Для сопряженных переменных  $q_i$  на момент времени  $t = T$  условие трансверсальности (7) имеет аналогичный вид [12]:  $q_i(T) = z_i$  ( $i = \overline{1, 9}$ ), где хотя бы одно из чисел  $z_1, z_2, \dots, z_9$  отлично от

нуля; условие трансверсальности (8) принимает форму

$$H(T) = 0. \quad (9)$$

Первые два условия трансверсальности эквивалентны неравенствам

$$\sum_{i=1}^9 \dot{q}_i^2(0) > 0 \text{ и } \sum_{i=1}^9 \dot{q}_i^2(T) > 0 \quad (10)$$

и становятся очевидными, если краевые условия (3), (4) переписать в форме равенств

$$x_i(0) - x_{i0} = 0 \text{ и } x_i(T) - x_{iT} = 0,$$

где  $x_{i0}$  — элементы вектора  $\mathbf{x}_0$ ;  $x_{iT}$  — элементы вектора  $\mathbf{x}_T$ ; отсюда  $F_k = x_i(0) - x_{i0}$ ;  $\Phi_k = x_i(T) - x_{iT}$ ;  $\partial F_k / \partial x_i = \partial \Phi_k / \partial x_i = 1$  для  $k = i$  и  $\partial F_k / \partial x_i = \partial \Phi_k / \partial x_i = 0$ , если  $k \neq i$ .

Последнее условие трансверсальности (требование (9)) получается, если граничное условие (4) для правого конца траектории представить в виде  $\Phi_k = 0$ , где  $\Phi_k = x_i(T) - x_{iT}$ , откуда становится очевидным утверждение  $\partial \Phi_k / \partial T \equiv 0$  для всех  $k$ , а значит, условия (8) и (9) являются эквивалентными. Стоит отметить, что в задачах с нефиксированным временем  $T$ , если гамильтониан  $H$  не зависит явно от времени, то  $H = 0$  в любой момент времени  $t$ , а не только  $H(T) = 0$  [13].

Задача нахождения оптимальной функции  $\mathbf{y}(t)$  и оптимального движения  $\mathbf{x}(t)$  системы (2) сводится к поиску решения уравнений (2), (6) с одновременной максимизацией в каждый момент времени  $t$  функции Гамильтона, удовлетворяющего условиям трансверсальности (10) (если время  $T$  фиксировано) или (9), (10) (если время  $T$  не фиксировано).

Краевая задача принципа максимума заключается в определении таких начальных значений  $q_i(0)$  для сопряженных функций, при которых решение  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{q}(t)$  системы уравнений (2), (6) с начальными условиями (3), удовлетворяющее условию максимума функции Гамильтона в каждый текущий момент времени  $t$  и условиям трансверсальности (10) (или (9), (10) для задач с нефиксированным временем  $T$ ) в начальный и конечный моменты времени, удовлетворяет граничному условию (4).

Предположим, что функционал (5) не содержит переменных состояния  $x_i$ . В этом случае сопряженная система дифференциальных уравнений для  $q_i$  запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= y_3 q_4 - y_2 q_7, \quad \dot{q}_2 = y_3 q_5 - y_2 q_8, \quad \dot{q}_3 = y_3 q_6 - y_2 q_9, \\ \dot{q}_4 &= y_1 q_7 - y_3 q_1, \quad \dot{q}_5 = y_1 q_8 - y_3 q_2, \quad \dot{q}_6 = y_1 q_9 - y_3 q_3, \\ \dot{q}_7 &= y_2 q_1 - y_1 q_4, \quad \dot{q}_8 = y_2 q_2 - y_1 q_5, \quad \dot{q}_9 = y_2 q_3 - y_1 q_6. \end{aligned} \quad (11)$$

Нетрудно показать, что в этом частном варианте постановки задачи (2)—(5) (когда функционал (5) не зависит явным образом от фазовых переменных  $x_i$ ) условия трансверсальности  $\mathbf{q}(0) \neq 0$  и  $\mathbf{q}(T) \neq 0$  выполняются автоматически, если считать функцию  $\mathbf{q}(t)$  не тождественно равной нулю ( $\mathbf{q}$  — вектор со-

пряженных переменных  $q_i$ ). Чтобы убедиться в этом, достаточно проанализировать сумму

$$\sum_{i=1}^9 \dot{q}_i^2(t). \quad (12)$$

Взяв производную по времени от суммы (12) и заменив в получившемся выражении величины  $\dot{q}_i$  правыми частями уравнений (11), получим тождество

$$\sum_{i=1}^9 \dot{q}_i q_i \equiv 0,$$

означающее, что сумма (12) есть величина постоянная. Поэтому, если допустить, что хотя бы одно из условий (10) не выполняется, то вектор  $\mathbf{q}$  сопряженных переменных окажется тождественно равным нулю  $\mathbf{q} \equiv 0$ , а такие сопряженные функции  $q_i(t)$  очевидно не могут быть оптимальными. Следовательно, любое решение  $\mathbf{q} \neq 0$ , удовлетворяющее системе (11), неизбежно будет удовлетворять условиям трансверсальности (7).

Системы уравнений (2) и (11) однотипны относительно коэффициентов  $y_1, y_2, y_3$ . Решения уравнений (2) для переменных  $x_i$  и уравнений (11) для переменных  $q_i$  отличаются начальными условиями.

В функции  $H$  сгруппируем множители для  $y_1, y_2, y_3$ , содержащие фазовые переменные  $x_i$ , и обозначим их  $r_1, r_2, r_3$ . Выделив в явном виде такие множители при  $y_j$ , представим функцию Гамильтона  $H$  в следующем виде:

$$H = -g + y_1 r_1 + y_2 r_2 + y_3 r_3,$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= q_4 x_7 + q_5 x_8 + q_6 x_9 - q_7 x_4 - q_8 x_5 - q_9 x_6; \\ r_2 &= q_7 x_1 + q_8 x_2 + q_9 x_3 - q_1 x_7 - q_2 x_8 - q_3 x_9; \\ r_3 &= q_1 x_4 + q_2 x_5 + q_3 x_6 - q_4 x_1 - q_5 x_2 - q_6 x_3. \end{aligned}$$

Для переменных  $r_j$  справедливы дифференциальные уравнения:

$$\dot{r}_1 = y_3 r_2 - y_2 r_3, \quad \dot{r}_2 = y_1 r_3 - y_3 r_1, \quad \dot{r}_3 = y_2 r_1 - y_1 r_2. \quad (13)$$

Дифференцируя по времени равенства для  $r_j$  ( $j = \bar{1}, 3$ ) и подставляя в них выражения для  $\dot{x}_i$  и  $\dot{q}_i$ , вычисленные по уравнениям (2) и (11) соответственно, получим необходимые дифференциальные уравнения для временных функций  $r_j(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= q_4 \dot{x}_7 + \dot{q}_4 x_7 + q_5 \dot{x}_8 + \dot{q}_5 x_8 + q_6 \dot{x}_9 + \dot{q}_6 x_9 - \\ &- q_7 \dot{x}_4 - \dot{q}_7 x_4 - q_8 \dot{x}_5 - \dot{q}_8 x_5 - q_9 \dot{x}_6 - \dot{q}_9 x_6 = \\ &= y_2 (q_4 x_1 + q_5 x_2 + q_6 x_3 - x_4 q_1 - x_5 q_2 - x_6 q_3) + \\ &+ y_3 (q_7 x_1 + q_8 x_2 + q_9 x_3 - x_7 q_1 - x_8 q_2 - x_9 q_3) = \\ &= y_3 r_2 - y_2 r_3 \end{aligned}$$

(для переменных  $r_2, r_3$  получаем аналогичные выражения). Изменение вектора  $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$  определяется решением уравнения  $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{y}$ , где  $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$ .

Уравнения (13) для компонент  $r_j$  вектора  $\mathbf{r}$  заменяют сопряженную систему уравнений (11). Как нетрудно видеть из уравнений (13), для вектора  $\mathbf{r}$  спра-

ведливо свойство  $|\mathbf{r}| = \text{const}$ . Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы при любом  $t \in [0, T]$  не выполнялись равенства  $x_i = \chi q_i$ , потому что при их выполнении  $r_1 = r_2 = r_3 \equiv 0$ , и дальнейшее решение задачи теряет смысл. Поэтому при поиске оптимального решения векторы  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{q}$  считаются такими, что  $\mathbf{x} \neq \chi \mathbf{q}$ , где  $\chi$  — скалярная величина (в противном случае  $\mathbf{r} \equiv 0$ ), и рассматривается только вариант  $\mathbf{r} \neq 0$  (т. е. когда функции  $q_i$  не пропорциональны переменным  $x_i$ ). Понятно, что если  $\mathbf{r} \neq 0$ , то  $\mathbf{q}(t) \neq 0$ , и условия трансверсальности (7) удовлетворяются.

Задача нахождения оптимальной функции  $\mathbf{y}(t)$  и оптимального движения  $\mathbf{x}(t)$  системы (2) свелась к решению уравнений (2), (13) с одновременной максимизацией в каждый момент времени  $t$  функции Гамильтона и удовлетворением условия трансверсальности (9), если время  $T$  не фиксировано. Краевая задача принципа максимума заключается в определении такого значения вектора  $\mathbf{r}(0) \neq 0$ , при котором решение  $\mathbf{x}(t)$  системы уравнений (2), (13) с начальными условиями (3), удовлетворяющее условию максимума функции Гамильтона в каждый момент времени  $t$  и условию трансверсальности (9) (для задач с нефиксированным временем  $T$ ), удовлетворяет граничному условию (4).

#### Примеры задач, когда условия трансверсальности определяют ключевые характеристики оптимального процесса

Для примера приведем решение задачи (2)—(5), в которой оптимизируемый функционал (5) имеет вид

$$G = \int_0^T \sqrt{k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2} dt, \quad (14)$$

где  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ ,  $k_3 > 0$  — постоянные положительные коэффициенты.

Особенностью минимизируемого функционала (14) является тот факт, что его значение не зависит от длительности  $T$  оптимального процесса; значение  $G$  определяется исключительно краевыми условиями (векторами  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_T$ ) и коэффициентами  $k_1, k_2, k_3$  (данное утверждение будет доказано ниже).

Считается, что  $y_j$  — кусочно-непрерывные функции времени. Запишем функцию Гамильтона для задачи (2)—(4), (14):

$$H = -\sqrt{k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2} + r_1 y_1 + r_2 y_2 + r_3 y_3.$$

Для построения искомой функции  $\mathbf{y}(t)$  и нахождения оптимальной функции  $\mathbf{r}(t)$  сделаем замену переменных  $u_j = y_j \sqrt{k_j}$ ;  $\mu_j = r_j / \sqrt{k_j}$  и введем векторы  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$  и  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ . Функцию Гамильтона перепишем в виде:

$$H = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\mu} - |\mathbf{u}| = |\mathbf{u}|(|\boldsymbol{\mu}| \cos \gamma - 1),$$

где  $\gamma$  — угол между векторами  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\mu}$ . Функция Гамильтона  $H$  максимальна, если  $\gamma = 0$  (когда векторы

$\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\mu}$  имеют одинаковое направление). Оптимальные функции  $y_j$  и  $r_j$  удовлетворяют равенствам

$$r_j = a r_j / k_j, \quad (15)$$

где  $a \geq 0$  — скалярная величина, кроме  $a \equiv 0$ .

В любой момент времени  $t \in [0, T]$  модуль оптимального вектора  $\boldsymbol{\mu}$  остается постоянным  $|\boldsymbol{\mu}| = \text{const}$ . Оптимальные функции  $r_j$  удовлетворяют условию

$$r_1^2/k_1 + r_2^2/k_2 + r_3^2/k_3 = \text{const}. \quad (16)$$

Убедимся в этом, продифференцировав по времени левую часть равенства (16) и заменив по формулам (13) производные компонент  $r_j$  вектора  $\mathbf{r}$ , а затем в полученном выражении компоненты  $y_j$  вектора  $\mathbf{y}$  заменяются по формулам (15), связывающим  $r_j$  и  $y_j$ . В результате имеем

$$r_1 \dot{r}_1/k_1 + r_2 \dot{r}_2/k_2 + r_3 \dot{r}_3/k_3 = y_1 r_2 r_3/k_3 - y_1 r_2 r_3/k_2 + y_1 r_2 r_3/k_2 - y_2 r_1 r_3/k_3 + y_2 r_1 r_3/k_3 - y_1 r_2 r_3/k_3 \equiv 0.$$

Получили ключевое свойство оптимального по критерию (14) процесса.

В задаче (2)—(4), (14) время  $T$  не фиксировано. Поэтому оптимальные векторы  $\mathbf{u}$  и  $\boldsymbol{\mu}$  должны удовлетворять условию трансверсальности (9). Для выполнения  $H(T) = 0$  надо выполнить хотя бы одно из условий  $|\boldsymbol{\mu}(T)| = 1$  или  $|\mathbf{u}(T)| = 0$ . Функция  $H$  является линейной по аргументу  $|\mathbf{u}|$ . Если  $|\boldsymbol{\mu}(T)| > 1$ , то при оптимальном решении  $|\mathbf{u}(T)| \rightarrow \infty$ , как того требует условие максимума функции Гамильтона, но тогда  $H \rightarrow \infty$ , т.е.  $H(T) \neq 0$ , и условие трансверсальности (9) будет нарушено. Если  $|\boldsymbol{\mu}(T)| < 1$ , то в силу (16) условие максимума функции  $H$  в каждый текущий момент времени  $t$  требует, чтобы  $|\mathbf{y}(t)| \equiv 0$ ; но в этом случае будет нарушено краевое условие (4). Единственным допустимым для оптимальных функций  $r_j$  вариантом является условие  $|\boldsymbol{\mu}| = 1$ . Учитывая свойство (16), пришли к выводу, что оптимальное значение  $\mathbf{r}(0)$  обязано удовлетворять условию

$$r_1^2(0)/k_1 + r_2^2(0)/k_2 + r_3^2(0)/k_3 = 1. \quad (17)$$

Из свойств оптимальных функций  $r_j$  следует, что при оптимальном решении  $\mathbf{y}(t)$  максимум функции Гамильтона  $H$  не зависит от модуля  $|\mathbf{y}|$  (а зависит только от направления искомого вектора  $\mathbf{y}$ ), и равенство  $H = 0$  наблюдается на всем отрезке времени  $[0, T]$ . Величина  $|\mathbf{y}|$  не влияет на выполнение необходимых условий оптимальности, а значит, значение функционала качества (14) не зависит от значения функции  $a(t)$  в конкретный момент времени  $t$ .

Можем утверждать, что любое решение системы (2), (13), (15), удовлетворяющее краевым условиям (3), (4) и равенству (17), является оптимальным в смысле минимума интеграла (14). Условие (17) определяет значение ключевой характеристики  $r_0 = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}(0)|$  для оптимальных функций  $r_j(t)$ . Линия, соединяющая точки  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_T$ , остается в конфигурационном гиперпространстве  $R^9$  одной и той же независимо от вида масштабирующей функции

$a(t)$ , определяющей темп приближения к конечной точке  $\mathbf{x}_T$ . Длина оптимальной кривой из точки  $\mathbf{x}_0$  в точку  $\mathbf{x}_T$ , вычисленная в соответствии с выражением (14), определяется в процессе решения краевой задачи принципа максимума одновременно с оптимальным значением  $\mathbf{r}(0)$  и зависит только от  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_T$  и коэффициентов  $k_1, k_2, k_3$ .

Задача минимизации интеграла (14) свелась к решению системы уравнений (2), (13), (15) с одновременным выполнением краевых условий (3), (4) и требования (17). Сформулированная задача (2)–(4), (14) решается с точностью до неотрицательной функции  $a(t)$ .

Произвол в выборе функции  $a(t)$  позволяет сделать так, чтобы построенная оптимальная функция  $\mathbf{y}(t)$  могла удовлетворять каким-то дополнительным условиям (не оговоренным в рамках задачи (2)–(4), (14)), что может оказаться весьма полезным при решении прикладных задач, связанных с оптимизацией физических процессов. Кроме случая выполнения требования  $a(t) \geq 0$  функция  $a(t)$ , присутствующая в уравнениях (15), будет оптимальной тогда и только тогда, когда она удовлетворяет равенству

$$\int_0^T a(t) dt = G_{\text{opt}}, \quad (18)$$

где  $G_{\text{opt}}$  — оптимальное значение интеграла (14), рассчитанное в результате решения краевой задачи принципа максимума (напомним, что  $a(t)$  не может быть тождественно равной нулю).

Свойство инвариантности интеграла (14) по отношению к характеру поведения скалярной функции  $a(t)$  — несомненное преимущество оптимизации по критерию (14). Кроме того, произвольность функции  $a(t)$  и независимость значения (14) от величины  $a(t)$  упрощает решение краевой задачи принципа максимума (нахождение оптимального значения  $\mathbf{r}(0)$ ) и определение характеристики (14) для оптимального процесса. Пользуясь указанным свойством независимости оптимальных значений  $\mathbf{r}(0)$  и (14) от функции  $a(t)$ , при решении краевой задачи принципа максимума мы можем принять  $a(t) = \text{const} = a_0$ . Тогда  $G = a_0 T$ , где  $T$  — время достижения условия (4) для решения  $\mathbf{x}(t)$  системы (2), в которой функции  $y_1, y_2, y_3$  вычисляются по выражениям (15) с учетом уравнений (13), (17) и условия  $a = a_0$ . Если  $a_0 = 1$ , то  $G = T$ . Отсюда следует, что мы можем интерпретировать характеристику (14) оптимального процесса следующим образом: для оптимального закона изменения функции  $\mathbf{y}(t)$  обобщенные затраты  $G_{\text{opt}}$  численно равны времени достижения равенства  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_T$  для решения системы уравнений (2), (13), (17), (15), в которых  $a = 1$  (начальное состояние  $\mathbf{x}(0)$  зафиксировано условием (3)). При произвольном поведении функции  $a(t)$  условие (18) определяет продолжительность оптимального процесса  $T$ .

Данный пример наглядно иллюстрирует, как условия трансверсальности (и только они) дают воз-

можность выявить ключевые свойства оптимального процесса. Для случая минимизации интеграла (14) такими отличительными свойствами оптимального решения являются равенство (17) и независимость значения (14) от неотрицательной тождественно не равной нулю функции  $a(t)$  и, как следствие, от модуля  $|y|$  в конкретный момент времени  $t$ . На данном примере видно, что без условия трансверсальности (9) однозначно определить оптимальное значение вектора  $\mathbf{r}(0)$  и решить краевую задачу принципа максимума было бы невозможно.

Вторым примером является задача оптимального перевода динамической системы (2) из состояния (3) в состояние (4) с минимальным значением функционала

$$S = \int_0^T (k_0 + k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2) dt, \quad (19)$$

где  $k_0 > 0, k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0$  — постоянные положительные коэффициенты.

Принятый нами функционал (19) соответствует квадратичному критерию качества с добавлением затраченного времени, умноженного на постоянный положительный коэффициент ( $k_0 \neq 0$ ). Фактор времени, присутствующий в критерии оптимальности (19), ограничивает длительность  $T$  оптимального процесса некоторым конечным значением  $T_{\text{opt}}$ .

Как и в предыдущей задаче, оптимальное решение  $\mathbf{y}(t)$  ищем в классе кусочно-непрерывных функций. Для задачи (2)–(4), (19) функция Гамильтона имеет вид

$$\Gamma = r_1 y_1 + r_2 y_2 + r_3 y_3 - k_0 - k_1 y_1^2 - k_2 y_2^2 - k_3 y_3^2.$$

Поскольку  $\Gamma$  — квадратичная функция искомого вектора  $\mathbf{y}$ , то ее максимальное значение достигается в точке локального экстремума. Из необходимых условий экстремума  $\partial \Gamma / \partial y_j = 0$  находим, что функция  $\Gamma$  максимальна, если  $r_j - 2k_j y_j = 0$ . Оптимальные функции  $y_j$  связаны с  $r_j$  соотношениями

$$y_j = r_j / 2k_j. \quad (20)$$

Сравнив условия оптимальности (20) с равенствами (15), заключаем, что для оптимального по критерию (19) решения справедливо свойство (16). Поэтому функция Гамильтона  $\Gamma$  является постоянной. Из условия трансверсальности (9), которое имеет вид  $\Gamma(T) = 0$ , находим необходимое условие оптимальности для функций  $r_j(t)$ :

$$(r_1^2/k_1 + r_2^2/k_2 + r_3^2/k_3)/4 - k_0 = 0.$$

Следовательно, оптимальное значение  $\mathbf{r}(0)$  обязано удовлетворять соотношению

$$r_1^2(0)/k_1 + r_2^2(0)/k_2 + r_3^2(0)/k_3 = 4k_0.$$

Оптимальные функции  $y_j(t)$  удовлетворяют зависимости

$$k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + k_3 y_3^2 = k_0. \quad (21)$$

Из полученного свойства оптимальных функций  $y_i(t)$  находим, что значение  $S$  функционала (19) связано с длительностью оптимального процесса зависимостью  $S = 2k_0T$ . Учитывая, что равенства (20) — частный случай условий (15), определим оптимальное время  $T_{\text{opt}}$  через известную характеристику  $G_{\text{opt}}$ , рассчитанную при решении задачи (2)—(4), (14):  $T_{\text{opt}} = G_{\text{opt}}/\sqrt{k_0}$  (функции  $y_i(t)$ , оптимальные в смысле минимума (19), являются оптимальными по критерию (14)). Соответственно значение показателя (19) при оптимальном поведении функций  $y_1, y_2, y_3$  равно  $S_{\text{opt}} = 2\sqrt{k_0} G_{\text{opt}}$ . Значения коэффициентов  $k_1, k_2, k_3$  влияют только на значение  $G_{\text{opt}}$  и определяют его совместно с заданными начальной  $\mathbf{x}_0$  и конечной  $\mathbf{x}_T$  точками траектории  $\mathbf{x}(t)$ .

Таким образом, рассмотренные примеры демонстрируют, что условия трансверсальности — исключительно эффективный инструмент в определении оптимальных функций  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\mathbf{r}(t)$ , и в ряде случаев они являются незаменимыми (а порой и единственным средством), чтобы выявить ключевые свойства оптимального процесса.

Заметим, что если под фазовыми переменными  $x_i$  понимать направляющие косинусы между связанной системой координат твердого тела и инерциальной системой координат, то вектор  $\mathbf{u}$  будет соответствовать угловой скорости вращения связанной системы координат относительно инерциальной системы координат, а управляющие функции  $y_j$  интерпретируются как проекции вектора абсолютной угловой скорости твердого тела на оси связанной системы координат. В этом случае рассмотренные выше задачи оптимизации приобретают вполне конкретный физический смысл. Если при этом коэффициенты  $k_1, k_2, k_3$  в задаче (2)—(4), (19) пропорциональны значениям  $J_1^2, J_2^2, J_3^2$ , где  $J_1, J_2, J_3$  — моменты инерции твердого тела, то условие трансверсальности  $\Gamma(T) = 0$  определяет модуль кинетического момента во время оптимального по критерию (19) вращения твердого тела из положения (3) в положение (4) (уравнение (21) наглядно подтверждает сказанное). Из уравнения (21) следует такая закономерность: для оптимального движения системы (2) с минимальным значением (19) длительность  $T$  перехода из состояния (3) в состояние (4) и значение интеграла (19) связаны прямо-пропорциональной зависимостью  $S_{\text{opt}} = 2k_0T_{\text{opt}}$ .

### Заключение

Проблематика статьи относится к математической теории оптимальных процессов и ее методам. В частности, обсуждаются крайне актуальные вопросы методологии принципа максимума и особенности процедуры его практического применения. Представленная работа устраняет имеющийся методический пробел, связанный с неполным использованием условий трансверсальности. Отмеченный

методологический недостаток, который присутствует в рассуждениях при решении задач оптимального управления на основе принципа максимума, наблюдается у многих авторов.

В статье показано, что для максимально корректного и полного решения задачи оптимального управления условия трансверсальности, являясь необходимыми условиями оптимальности наравне с условием максимума функции Гамильтона и сопряженной системой дифференциальных уравнений, должны учитываться с самого начала и должны быть включены в систему уравнений, формализующих принцип максимума, сразу после введения сопряженных переменных, записи функции Гамильтона и сопряженной системы уравнений, непосредственно определяя свойства оптимальных сопряженных функций и управляющих переменных. Рассмотренные в статье конкретные примеры указывают на исключительно важную роль (нередко ключевую роль) условий трансверсальности в общем алгоритме процедуры применения принципа максимума.

### Список литературы

1. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
2. **Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В.** Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космические исследования. 1984. Вып. 3.
3. **Сиротин А. Н.** Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Механика твердого тела. 1989. № 1.
4. **Голубев Ю. Ф.** Брахистохрона с кулоновским и вязким сопротивлением // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4 (2).
5. **Сапунков Я. Г., Молоденков А. В.** Решение задачи оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота космического аппарата в классе конических движений // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2013. № 2 (70). Вып. 1.
6. **Levskii M. V.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems. 2015. Vol. 21, N. 2 (44).
7. **Левский М. В.** Об одном случае оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4.
8. **Левский М. В.** К вопросу оптимального успокоения космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1.
9. **Lastman G. J.** A shooting method for solving two-point boundary-value problems arising from non-singular bang-bang optimal control problems // International Journal of control. 1978. Vol. 27, N. 4.
10. **Li F., Bainum P. M.** Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1990. Vol. 13, № 1.
11. **Enrico Bertolazzi, Francesco Biral, Mauro Da Lio.** Symbolic-numeric efficient solution of optimal control problems for multibody systems // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol. 185, Iss. 2, 15.
12. **Моисеев Н. Н.** Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
13. **Young L. G.** Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. W. B. Saunders Company. Philadelphia, London, Toronto, 1969.

# Conditions of Transversality as an Effective Instrument in the Mathematical Constructions of the Optimal Processes

M. V. Levskii, dp940@mail.ru✉,

Maximov Research Institute of Space Systems, Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, Moscow Region

Corresponding author: **Levskii Mikhail V.**, Ph. D., Leading Researcher, Maximov Research Institute of Space Systems, Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, Moscow Region, e-mail: dp940@mail.ru

Received on June, 30, 2016

Accepted on July, 21, 2016

The topic of the article concerns the mathematical theory of the optimal processes and its methods. In particular, the extremely topical aspects of the methodology of the maximum principle and the procedure of its practical use are discussed. The article presents in details the transversality conditions, their role, place and significance in the general procedure for solving the problems of finding the optimal functions. This work eliminates the existing methodical defect connected with an incomplete use of the transversality conditions. On concrete examples, it shows that the transversality conditions (as one of the necessary conditions of optimality in the form of the maximum principle) are an extremely effective mathematical tool (and even the only one, in some cases) for determination of the characteristic properties, laws and key characteristics (parameters, constants, integrals of motion) of the optimal solutions for the systems of ordinary differential equations (of the dynamic systems). The importance of the topic is explained by the fact that in the overwhelming majority of cases the authors believe that the transversality conditions complicate the problem of search for the optimum functions, instead of simplifying it. However, it is far from being so, and it is a standard error, which has become almost typical. In the paper, the authors convincingly demonstrate the following conclusion: for a maximally correct and complete solution of the problems of the optimal control, the transversality conditions, being the necessary conditions for a optimality similarly as the condition of the Hamiltonian maximum and the adjoint system of the differential equations, should be taken into account since the beginning and be included in the system of the equations, which formalize the maximum principle, directly after defining the adjoint variables, formation of the Hamiltonian and the adjoint system of equations, determination of the properties of the optimal adjoint functions and the control variables. The concrete examples presented in the article confirm the exclusively significant role (quite often critical role) of the transversality conditions in the general algorithm of the procedure for application of the maximum principle.

**Keywords:** maximum principle, transversality conditions, optimality criterion, functional of quality, conditions of optimality, boundary value problem

For citation:

**Levskii M. V.** Conditions of Transversality as an Effective Instrument in the Mathematical Constructions of the Optimal Processes, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 4, pp. 291–297.

DOI: 10.17587/mau.18.291-297

## References

1. **Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., and Mishchenko E. F.** *Teoriya optimal'nyh processov* (The Mathematical Theory of Optimal Processes), Moscow, Nauka, 1983 (in Russian); Gordon and Breach, New York, 1986. 320 p.
2. **Branets V. N., Chertok M. B., Raznacheev Yu. V.** *Optimal'ny razvorot tverdogo tela s odnoy os'yu simmetrii* (Optimal turn of axis-symmetric rigid body), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1984, iss. 3 (in Russian).
3. **Sirotnin A. N.** *Optimal'noe upravlenie pereorientatsiy simmetrichnogo tverdogo tela iz pologeniya pokoya v pologinie pokoya* (Optimal control of reorientation of symmetric rigid body from state of rest into state of rest), *Mehanika Tverdogo Tela*, 1989, no. 1 (in Russian).
4. **Golubev Yu. F.** *Brahistokhrona s kulonovskim i vyazkim soprotivleniem* (Brahistokhron with Coulon and viscous resistance), *Vestnik Nijegorodskogo universiteta im. N. I. Lobochevskogo*, 2011, no. 4 (2) (in Russian).
5. **Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.** *Reshenie zadachi optimal'nogo v smysle minimuma energeticheskikh zatrat razvorota kosmicheskogo apparata v klasse konicheskikh dvizheniy* (Solution of the problem of spacecraft's optimal turn with minimum of energy expenditures

in class of conical motions), *Vestnik Saratovskogo Gosudarstvennogo Tehnicheskogo Universiteta*, 2013, no. 2 (70), iss. 1 (in Russian).

6. **Levskii M. V.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation, *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, 2015, vol. 21, no. 2 (44).

7. **Levskii M. V.** *Ob odnom sluchae optimal'nogo upravleniya prostranstvennoy orientatsiy kosmicheskogo apparata* (A special case of spacecraft optimal attitude control), *Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2012, no. 4 (in Russian).

8. **Levskii M. V.** *K voprosu optimal'nogo uspokoeniya kosmicheskogo apparata* (On optimal spacecraft damping), *Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2011, no. 1 (in Russian).

9. **Lastman G. J.** A shooting method for solving two-point boundary-value problems arising from non-singular bang-bang optimal control problems, *International Journal of Control*, 1978, vol. 27, no. 4.

10. **Li F., Bainum P. M.** Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, vol. 13, no. 1.

11. **Enrico Bertolazzi, Francesco Biral, Mauro Da Lio.** Symbolic-numeric efficient solution of optimal control problems for multibody systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, vol. 185, iss. 2, 15.

12. **Moiseev N. N.** *Chislennyye metody v teorii optimal'nyh sistem* (Numerical methods in optimal systems theory), Moscow, Nauka, 1971 (in Russian).

13. **Young L. G.** Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, W. B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1969.

**Д. Н. Анисимов**, канд. техн. наук. доц., AnisimovDN@mpei.ru, **Май Тхе Ань**, аспирант, Национальный исследовательский университет "МЭИ"

## Динамические свойства нечетких систем управления, построенных на основе реляционных моделей

*Анализируется влияние различных факторов на динамические характеристики нечеткого логического регулятора. Определены настройки регулятора, которые желательно устанавливать до начала эксплуатации системы, и настройки, которые можно изменять в процессе функционирования системы для достижения лучших показателей качества.*

**Ключевые слова:** нечеткий логический регулятор, динамические характеристики, функция принадлежности, реляционная модель, степень значимости, аппроксимирующая модель

### Введение

В современных системах управления широкое применение получили регуляторы, использующие алгоритмы нечеткого логического вывода (нечеткие логические регуляторы, НЛР). Как было отмечено в работе [1], "...проблемам нечеткого управления посвящено огромное количество книг, журналов, трудов конференций. Однако, с одной стороны, во многих книгах и журналах рассматриваются исключительно математические аспекты, и недостаточно внимания уделяется вопросам собственно нечеткого управления. С другой стороны, многие публикации посвящены простым практическим приложениям, и в них не отражаются теоретические основы нечетких систем управления". Следует заметить, что в последние годы, помимо решения многочисленных прикладных задач, появились серьезные работы, посвященные теоретическим вопросам исследования и разработки систем управления, основанных на использовании нечеткой логики, например, работы [2—4].

Исходной информацией при построении нечетких регуляторов служат знания экспертов. Эти знания формализуются с помощью построения функций принадлежности термов входных и выходных лингвистических переменных и установления нечеткого соответствия между пространством предпосылок и пространством заключений, т. е. построения базы правил. Однако трудно ожидать, что с первого раза будет достигнуто требуемое качество управления. Поэтому, как правило, необходим этап коррекции [5]. Основная проблема данного этапа состоит в сложности целенаправленного изменения базы знаний и параметров алгоритма нечеткого логического регулятора.

Поэтому представляется актуальной задача получения математической модели НЛР, пригодной для анализа системы с позиции классической теории автоматического управления.

### Постановка задачи

При построении систем, основанных на нечетких логических выводах, наибольшее распространение

получили алгоритмы Мамдани [6], Ларсена [7], Цукамото [8], Сугено—Такаги [9], а также реляционные модели [10, 11].

В данной статье для исследования выбран алгоритм на основе нечетких реляционных моделей. Этот алгоритм не является альтернативой перечисленным выше, он может использоваться совместно с ними и представляет собой модификацию механизма нечеткого логического вывода на этапе активизации правил. При использовании этого алгоритма устанавливается нечеткое соответствие между входными и выходными нечеткими переменными, задаваемое одним из трех эквивалентных способов: в теоретико-множественном виде, в матричном виде либо с помощью ориентированных графов [12]. При этом отпадает необходимость привязки к какой-либо из операций нечеткой импликации [13] и появляется возможность влиять на результат нечеткого вывода, изменяя не только функции принадлежности термов входных и выходных лингвистических переменных, но и элементы нечеткого соответствия. В реляционных моделях одной и той же входной ситуации может быть поставлено в соответствие несколько управляющих решений. Степень уверенности в том или ином решении задается с помощью графика нечеткого соответствия. Таким образом, нечеткое соответствие может не обладать свойством функциональности [11], т. е. формально может быть нарушен принцип непротиворечивости базы правил. Однако свойство нефункциональности характерно для многих систем нечеткого логического вывода [14, 15], и в реляционных моделях проблема несовместности правил разрешается достаточно легко путем применения операции композиции на этапе их активизации.

Анализ работы нечетких систем автоматического управления позволил выявить следующие основные факторы, влияющие на качество управления [16]:

- выбор входных и выходных переменных;
- число термов входных и выходных переменных;
- выбор того или иного логического базиса ( $T$ - и  $S$ -норм);

- диапазон изменения и вид функций принадлежности нечетких переменных, составляющих терм-множества лингвистических переменных;
- характер нечеткого соответствия между пространством предпосылок и пространством заключений (база правил);
- способ дефаззификации;
- степени значимости подусловий при их агрегировании.

Перечисленные факторы свидетельствуют о том, что число степеней свободы при построении нечеткой системы управления достаточно велико. С одной стороны, это свойство обеспечивает гибкость настройки НЛР. С другой стороны, большое число сочетаний перечисленных выше факторов затрудняет поиск рационального решения задачи настройки регулятора. Поэтому представляется достаточно важной оценка влияния каждого из этих факторов на динамику системы управления.

В данной работе исследования проводятся по двум направлениям:

- 1) определение зависимостей статических и частотных характеристик НЛР от его настроек;
- 2) анализ переходных процессов в нечеткой системе автоматического управления, построение аппроксимирующей линейной модели НЛР в виде ПД регулятора и определение зависимостей его параметров от настроек регулятора.

Первый подход основан на построении амплитудно-частотных и фазовых частотных характеристик НЛР по первой гармонике при его различных настройках.

Второй подход заключается в следующем. НЛР включается в замкнутый контур управления последовательно с объектом управления, параметры которого известны. На вход системы подается ступенчатый сигнал, и по наблюдениям выходного сигнала проводится идентификация НЛР методом экспоненциальной модуляции [17, 18]. Таким образом определяются коэффициенты пропорциональной ( $K_{\text{П}}$ ) и дифференциальной ( $K_{\text{Д}}$ ) составляющих аппроксимирующего линейного ПД регулятора. Подобный подход позволяет проводить качественное сопоставление между настройками НЛР и параметрами хорошо изученных традиционных линейных регуляторов.

### Лингвистические переменные для описания нечеткого логического регулятора и их терм-множества

В данном исследовании рассмотрим нечеткий регулятор, имеющий два входа, на которые подаются рассогласование системы и его производная, и один выход, представляющий собой сигнал управления, подаваемый на объект (рис. 1).

Здесь НЛР — нечеткий логический регулятор;  $W_o(s)$  — передаточная функция объекта;  $u$  и  $y$  — сигналы на входе и выходе системы соответственно;  $e$  — рассогласование;  $d$  — его производная;  $x$  —

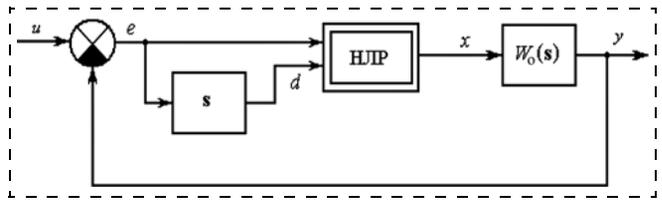


Рис. 1. Структурная схема нечеткой системы управления

сигнал на выходе регулятора. Объект представляет собой последовательное соединение интегрирующего и инерционного звеньев:

$$W_o(s) = \frac{K_o}{s(1 + sT_o)}, \quad (1)$$

где  $K_o = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_o = 1 \text{ с}$ , т. е. обладает достаточно простой структурой. Такой выбор обусловлен тем, что на данном этапе нас в первую очередь интересуют динамические свойства нечеткого регулятора, которые удобнее исследовать на примере хорошо изученных объектов. Введение интегрирующего звена в структуру объекта позволяет в случае возникновения статической ошибки в системе сделать вывод о том, что она обусловлена именно свойствами НЛР, а не объекта.

Мы ограничились рассмотрением пропорциональной и дифференциальной составляющих сигнала рассогласования по следующим соображениям.

- База знаний для НЛР составляется на основе экспертных оценок. Обычно для эксперта не составляет особой сложности высказать суждение о сигнале рассогласования и его первой производной, в то время как оценка его интеграла и высших производных может вызвать затруднения.
- В системах автоматического управления достаточно часто исполнительные механизмы содержат интегрирующие звенья, что обеспечивает астатизм этих систем.
- Введение интегрирующей составляющей в закон управления повышает порядок системы. Это может вызвать дополнительные проблемы, связанные с обеспечением устойчивости системы.
- Увеличение числа входных переменных влечет за собой экспоненциальный рост числа правил нечеткого вывода.

Изложенные аргументы, однако, не являются принципиальными, и описанные ниже подходы к исследованию могут быть распространены на регуляторы с другим набором входных сигналов.

Одним из важных этапов при формировании нечеткого логического вывода является выбор числа термов, описывающих лингвистические переменные. Если увеличение числа входных переменных, как было отмечено выше, обуславливает экспоненциальный рост числа правил нечеткого вывода, то увеличение числа термов лингвистических переменных — полиномиальный рост. Таким образом, возникает вопрос о числе термов, достаточ-

ном для обеспечения заданных показателей качества системы. В принципе, для достаточно простых объектов управления возможно построение регуляторов, лингвистические переменные которых описываются двумя [19] и даже одним термом [20]. Для односвязной модели увеличение числа симметричных функций принадлежности с равномерным распределением вдоль базовой оси приводит к увеличению линейного участка статической характеристики при условии последовательного сопоставления термам входной лингвистической переменной термов выходной лингвистической переменной [3]. При других схемах механизма нечеткого вывода можно получать статические характеристики произвольного вида, что позволяет говорить о нечетком регуляторе как об универсальном аппроксиматоре [21–23]. В данном исследовании будем описывать каждую лингвистическую переменную с помощью трех термов. Такой выбор обусловлен относительной простотой формализации знаний эксперта, а также удобством изменения характера нелинейного преобразования, осуществляемого нечетким регулятором.

Для описания НЛР введем лингвистические переменные «Рассогласование» ("e"),  $T_E, E$ , «Производная» ("d"),  $T_D, D$ , «Управление» ("x"),  $T_X, X$ , где  $E = [-e_0; e_0]$ ,  $D = [-d_0; d_0]$ ,  $X = [-x_0; x_0]$  — их области определения,  $T_E = \{\tilde{T}_E^1, \tilde{T}_E^2, \tilde{T}_E^3\} = \{"N", "Z", "P"\}$ ,  $T_D = \{\tilde{T}_D^1, \tilde{T}_D^2, \tilde{T}_D^3\} = \{"N", "Z", "P"\}$ ,  $T_X = \{\tilde{T}_X^1, \tilde{T}_X^2, \tilde{T}_X^3\} = \{"N", "Z", "P"\}$  — их терм-множества. Здесь значения термов "N", "Z", "P" интерпретируются как "отрицательное", "около нуля", "положительное".

### Выбор логического базиса

Логический базис определяется выбором той или иной  $T$ -нормы и сопряженной с ней  $T$ -конормы ( $S$ -нормы), являющихся нечеткими расширениями операций "И" и "ИЛИ", такими что  $T, S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ , для которых выполняются следующие аксиомы:

$T(x, 1) = x$ ,  $T(x, 0) = 0$ ;  $S(x, 1) = 1$ ,  $S(x, 0) = x$  (граничные условия);

$T(x, y) = T(y, x)$ ;  $S(x, y) = S(y, x)$  (коммутативность);

$T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ ;  $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$  (ассоциативность);

$T(x, y) \leq T(x, z)$ , если  $y \leq z$ ;  $S(x, y) \leq S(x, z)$ , если  $y \leq z$  (монотонность).

$T$ -норма и  $T$ -конорма в определенном смысле являются двойственными понятиями. Эти функции могут быть получены друг из друга, например, с помощью инволютивного отрицания  $n$  и законов Де Моргана следующим образом [24]:

$$S(x, y) = n(T(n(x), n(y)));$$

$$T(x, y) = n(S(n(x), n(y))).$$

Простейшие примеры  $T$ - и  $S$ -норм приведены в таблице.

Выбор того или иного базиса влияет на результат нечеткого логического вывода и, следовательно, потенциально может быть использован для настройки НЛР. В частности, эта проблема обсуждалась в работах [25, 26]. Принципиальная возможность коррекции систем за счет плавного изменения параметрически заданных треугольных норм была показана в работе [27]. В указанных работах были рассмотрены семейства  $T$ - и  $S$ -норм, задаваемых формулами Франка:

$$T_\lambda^F(x_1, x_2) = \log_\lambda \left[ 1 + \frac{(\lambda^{x_1} - 1)(\lambda^{x_2} - 1)}{\lambda - 1} \right];$$

$$S_\lambda^F(x_1, x_2) = 1 - \log_\lambda \left[ 1 + \frac{(\lambda^{(1-x_1)} - 1)(\lambda^{(1-x_2)} - 1)}{\lambda - 1} \right].$$

Выбор для исследования именно семейства  $T$ -норм Франка вполне обоснован, поскольку при  $\lambda \rightarrow 0$  логические операции удовлетворяют максимуму базису, при  $\lambda \rightarrow 1$  — алгебраическому, при  $\lambda \rightarrow \infty$  — ограниченному. Заметим, что в этих работах рассматривался достаточно узкий диапазон изменения параметра треугольных норм и показателей качества. Кроме того, исследовались лишь временные характеристики системы управления конкретным объектом. Для получения более полных суждений о влиянии треугольной нормы на динамику замкнутой системы предлагается исследовать не только переходные процессы в ней, но также статические и частотные характеристики са-

Примеры  $T$ - и  $S$ -норм

Логический базис	Нечеткое расширение "И" ( $T$ -норма)		Нечеткое расширение "ИЛИ" ( $S$ -норма)	
	Обозначение	Формула	Обозначение	Формула
Максиминный	$T_M, x_1 \wedge x_2$	$\min(x_1, x_2)$	$S_M, x_1 \vee x_2$	$\max(x_1, x_2)$
Алгебраический	$T_P, x_1 \bullet x_2$	$x_1 \cdot x_2$	$S_P, x_1 + x_2$	$x_1 + x_2 - x_1 x_2$
Ограниченный	$T_L, x_1 \otimes x_2$	$(x_1 + x_2 - 1) \vee 0$	$S_L, x_1 \otimes x_2$	$(x_1 + x_2) \wedge 1$
Сильный	$T_D, x_1 \Delta x_2$	$x_2$ , если $x_1 = 1$ $x_1$ , если $x_2 = 1$ 0 в других случаях	$S_D, x_1 \nabla x_2$	$x_2$ , если $x_1 = 0$ $x_1$ , если $x_2 = 0$ 1 в других случаях

мого нечеткого регулятора как элемента системы управления [28, 29]. В данной статье также рассмотрено семейство  $T$ - и  $S$ -норм Франка.

В качестве примера приведем расширенные статические характеристики (поверхности управления) НЛР для максиминного, алгебраического и ограниченного базисов и соответствующие им фазовые портреты в системе управления объектом, описываемым передаточной функцией (1) (рис. 2).

Как видно из рис. 2, изменение логического базиса действительно оказывает существенное влияние на динамические характеристики системы. Однако, как показали исследования, представленные в [28], непредсказуемость изменения характеристик нечеткой системы управления и их чувствительность по отношению к изменению вида нечеткого соответствия ставят под сомнение возможность целенаправленного воздействия на динамику нечеткой системы управления путем изменения треугольных норм, определяющих логический базис. Таким образом, в зависимости от специфики объекта управления и решаемой задачи целесообразно выбирать ту или иную треугольную норму на этапе проектирования системы и не изменять ее в процессе функционирования.

### Задание функций принадлежности

Известно достаточно много способов аналитического задания функций принадлежности (ФП), и их разные комбинации могут давать похожие результаты [1]. В данной работе выбран степенной способ задания функций принадлежности. При этом, изменяя один положительный параметр  $\gamma$  (степень), можно получить суждение о влиянии концентрирования или растяжения ФП либо в центре базовой шкалы, либо у ее краев. Степень  $\gamma$  — это степень, в которую возводятся функции принадлежности крайних термов. ФП среднего терма при этом автоматически возводятся в степень  $1/\gamma$ . Аналитическая форма задания ФП представлена следующими выражениями:

- "Отрицательное" —

$$\mu_{\bar{A}}(g) = \begin{cases} 1, & g < -G; \\ \left(-\frac{g}{G}\right)^{\gamma}, & -G \leq g \leq 0; \\ 0, & g > 0; \end{cases} \quad (2)$$

- "Около нуля" —

$$\mu_{\bar{A}}(g) = \begin{cases} 0, & g < -G; \\ \left(\frac{g}{G} + 1\right)^{1/\gamma}, & -G \leq g \leq 0; \\ \left(-\frac{g}{G} + 1\right)^{1/\gamma}, & 0 \leq g \leq G; \\ 0, & g > G; \end{cases} \quad (3)$$

- "Положительное" —

$$\mu_{\bar{A}}(g) = \begin{cases} 0, & g < 0; \\ \left(\frac{g}{G}\right)^{\gamma}, & 0 \leq g \leq G; \\ 1, & g > G, \end{cases} \quad (4)$$

где  $g = \{e, d, x\}$ ,  $G = \{E, D, X\}$ .

Изменение динамических свойств НЛР при изменении степени растяжения/сжатия  $\gamma$  ФП термов

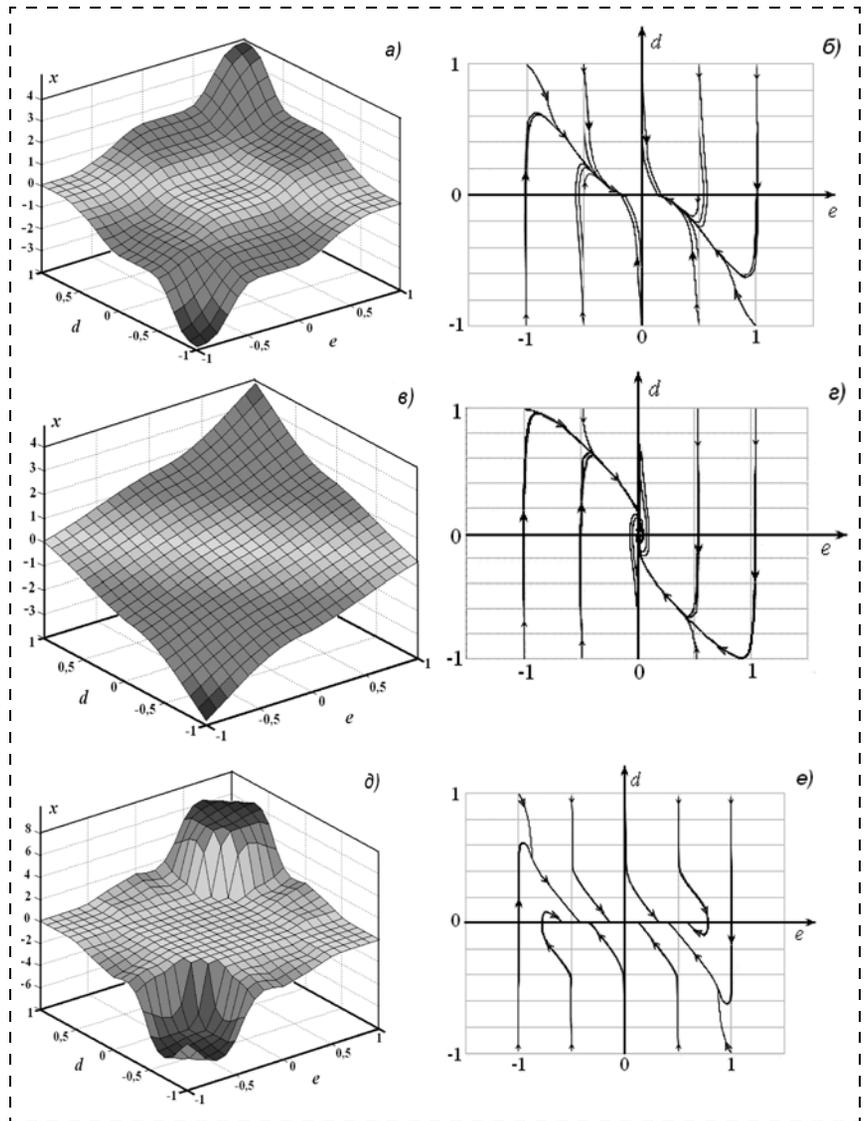


Рис. 2. Поверхности управления (а, в, д) и фазовые портреты (б, г, е) систем, основанных на максиминном, алгебраическом и ограниченном базисах соответственно

лингвистических переменных достаточно наглядно можно проиллюстрировать, рассматривая параметры аппроксимирующего линейного ПД регулятора [30], описываемого передаточной функцией

$$W_{ПД}(s) = K_{П} + K_{Д}s = K_{Ф}(1 + sT_{Ф}). \quad (5)$$

В качестве примера на рис. 3 приведены зависимости параметров аппроксимирующего ПД регулятора при изменении формы ФП термов лингвистической переменной "Рассогласование", полученные при подаче на вход системы скачкообразных воздействий разной амплитуды  $U_m$ .

Анализ этих зависимостей показал, что на параметры аппроксимирующего ПД регулятора основное влияние оказывают соответствующие им входы (т. е. при изменении формы ФП термов лингвистической переменной "Рассогласование" параметр аппроксимирующего ПД регулятора  $K_{П}$  изменяется существенно сильнее, чем параметр  $K_{Д}$ ; при изменении ФП термов лингвистической переменной "Производная" — наоборот). Изменение формы ФП выходной переменной "Управление" влияет на общий коэффициент разомкнутой системы  $K_{Ф}$  и оказывает весьма незначительное влияние на постоянную времени форсирующего звена  $T_{Ф}$ . При этом характер зависимостей практически не зависит от амплитуды входного сигнала. Монотонный характер зависимостей делает удобным использование параметра  $\gamma$  для настройки НЛР. Следует, однако, учесть, что при достаточно больших значениях этого параметра и максимумном логическом базисе на поверхности управления появляется зона

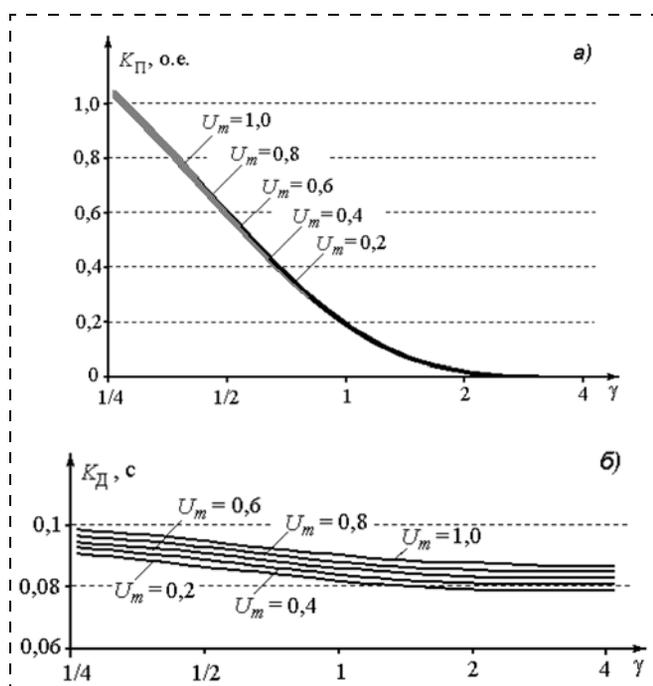


Рис. 3. Зависимости параметров аппроксимирующего ПД-регулятора при изменении формы функций принадлежности термов лингвистической переменной "Рассогласование" (е): а —  $K_{П}$ , б —  $K_{Д}$

нечувствительности, что приводит к появлению статической ошибки в системе.

Другим важным параметром ФП, заданных в форме (2)—(4), является область определения (задаваемый диапазон изменения)  $G$  той или иной лингвистической переменной. По сути, размер этой области определяет наклон ФП. Чем уже эта область, тем круче наклон. Увеличение наклона ФП термов какой-либо входной лингвистической переменной, в свою очередь, увеличивает ее вклад в результат нечеткого вывода. При уменьшении диапазона изменения выходной лингвистической переменной наблюдается обратная зависимость — снижается общий коэффициент усиления НЛР. Параметр  $G$  также вполне пригоден для настройки НЛР. Недостатком его использования является то, что при малой области определения входной лингвистической переменной быстрее достигается насыщение соответствующих ФП, что затрудняет управление системой. Однако, как показали исследования, этот эффект оказывает меньшее влияние на достижение системой заданных показателей качества, чем появление зоны нечувствительности.

#### Нечеткое соответствие между пространством предпосылок и пространством заключений

Как было отмечено выше, при построении нечетких систем, основанных на реляционных моделях, при построении базы правил используются нечеткие соответствия между пространством предпосылок и пространством заключений, которые строятся на основании знаний экспертов. Их удобно задавать с помощью реляционных матриц, элементами которых являются степени уверенности эксперта в том или ином управляющем решении при наблюдении различных входных ситуаций [31]. Для рассматриваемого случая размер реляционной матрицы составляет  $9 \times 3$ , т. е. на результат логического вывода можно влиять, изменяя значения 27 элементов от 0 до 1. Очевидно, для практических задач такое число управляющих решений является чрезмерно большим. Поэтому в работе [29] было предложено ограничиться рассмотрением трех нечетких соответствий, представляющих собой характерные модели принятия решений и задаваемых реляционными матрицами  $R_1, R_2, R_3$ :

$$R_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} N & Z & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} NN \\ NZ \\ NP \\ ZN \\ ZZ \\ ZP \\ PN \\ PZ \\ PP \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}; \quad R_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} N & Z & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} NN \\ NZ \\ NP \\ ZN \\ ZZ \\ ZP \\ PN \\ PZ \\ PP \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,6 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0,3 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$R_3 = \begin{matrix} & N & Z & P \\ \begin{matrix} NN \\ NZ \\ NP \\ ZN \\ ZZ \\ ZP \\ PN \\ PZ \\ PP \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,7 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,3 & 0,8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (6)$$

**Пример.** Пусть нечеткое соответствие задается матрицей  $R_3$ . Тогда третья строка этой матрицы задает следующее правило:

**ПЗ:** ЕСЛИ "Рассогласование" = "Отрицательно" И "Производная" = "Положительна", то "Управление" = "Отрицательно" (со степенью уверенности 0,2), "Около нуля" (со степенью уверенности 0,7), "Положительно" (со степенью уверенности 0,2).

Первое соответствие можно содержательно интерпретировать как "решительную" модель действий, когда лицо, принимающее решение, абсолютно уверенно выбирает одно из возможных управляющих воздействий даже при самых незначительных предпочтениях. Второе соответствие будем называть "неуверенной" моделью действий. Для этого случая характерна очень большая осторожность в принимаемых решениях, однако не выходящая за пределы здравого смысла. Третье соответствие будем называть "взвешенной" моделью, когда при очевидных предпочтениях уверенно выбираются управляющие воздействия, при неочевидных — выбор осуществляется более осторожно.

Различия между этими тремя нечеткими соответствиями отчетливо видны на статических харак-

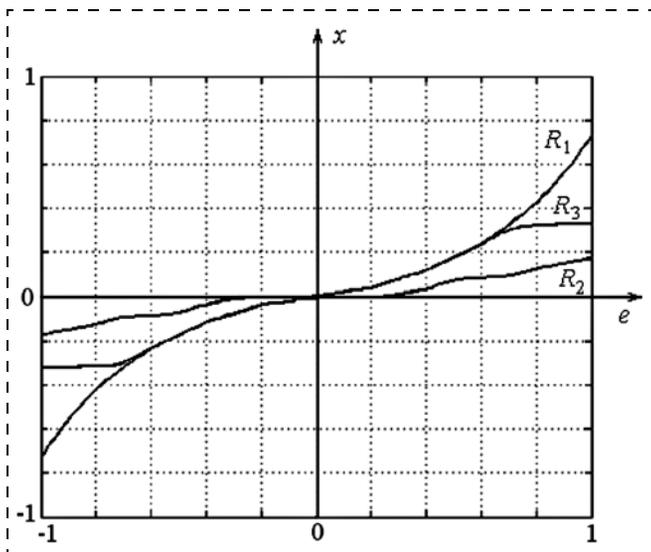


Рис. 4. Статические характеристики нечеткого регулятора для "решительной" ( $R_1$ ), "неуверенной" ( $R_2$ ) и "взвешенной" ( $R_3$ ) моделях нечеткого соответствия

теристиках НЛР (рис. 4), полученных при отключении его дифференциального входа.

Как видно из рис. 4, статическая характеристика НЛР для "решительной" модели нечеткого соответствия вполне предсказуемо обладает наибольшей крутизной, для "неуверенной" — наименьшей. Более того, при "неуверенной" модели появляется достаточно широкая зона нечувствительности, что ставит под сомнение целесообразность ее использования при построении системы управления.

### Дефаззификация

Дефаззификация в системах нечеткого вывода представляет собой процедуру нахождения обычного (не нечеткого) значения для каждой из выходных лингвистических переменных. Применяемые в современных системах управления устройства и механизмы способны воспринимать традиционные команды в форме количественных значений соответствующих управляющих переменных. Именно по этой причине необходимо преобразовать нечеткие множества в некоторые конкретные значения переменных. Поэтому дефаззификацию называют также приведением к четкости.

Для выполнения численных расчетов на этапе дефаззификации могут быть использованы различные формулы, получившие название методов дефаззификации. Приведем выражения для некоторых из них.

#### • Метод центра тяжести

Центр тяжести или центроид площади рассчитывается по формуле

$$x^* = \frac{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x \mu'(x) dx}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu'(x) dx}, \quad (7)$$

где  $\mu'(x)$  — ФП выходной лингвистической переменной, полученная на этапе аккумуляции.

В дискретном виде формула центроида имеет вид

$$x^* = \frac{\sum_{j=1}^N x \mu'(x) dx}{\sum_{j=1}^N \mu'(x) dx}, \quad (8)$$

где  $N$  — число рассматриваемых точек ФП данной лингвистической переменной.

#### • Метод центра площади

Центр площади  $x^*$  определяется из уравнения

$$\int_{x_{\min}}^{x^*} \mu'(x) dx = \int_{x^*}^{x_{\max}} \mu'(x) dx. \quad (9)$$

Таким образом, центр площади равен абсциссе, которая делит площадь, ограниченную графиком кривой ФП соответствующей выходной переменной, на две равные части.

• **Методы левого и правого модальных значений**

Левое и правое модальные значения определяются в соответствии с выражениями

$$x^* = \min\{x_{\text{mod}}\}; \quad (10)$$

$$x^* = \max\{x_{\text{mod}}\}, \quad (11)$$

где  $x_{\text{mod}}$  — модальное значение (мода) нечеткого множества, соответствующего выходной переменной  $x$  после аккумуляции:

$$x_{\text{mod}} = \arg \max_{x \in [x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]} \{\mu'(x)\}. \quad (12)$$

Наибольшее распространение в настоящее время получил метод центра тяжести, поскольку он позволяет более полно учитывать влияние ФП всех термов выходной лингвистической переменной и обеспечивает непрерывность статической характеристики НЛР. Кроме того, за исключением некоторых частных случаев, метод центр тяжести обеспечивает также монотонность статической характеристики НЛР. Такими частными случаями являются:

- изменение естественного порядка взаимосвязей одноименных термов входных и выходных переменных [32];
- использование некоторых логических базисов (например, ограниченного).

В качестве основных недостатков метода центра тяжести указывают [2], во-первых, высокую стоимость вычислений, связанную с интегрированием поверхностей нерегулярной формы, особенно в случае использования ФП, не состоящих из прямолинейных участков (например, гауссовых функций); во-вторых, сужение интервала дефазификации. Заметим, однако, что в подавляющем большинстве случаев НЛР реализуются на цифровой технике, и для вычисления центроида используется формула (8), для которой не имеет значения форма интегрируемой поверхности. Что касается второго недостатка, то он также легко устраняется путем расширения области определения выходных лингвистических переменных.

**Степени значимости подусловий**

Степени значимости подусловий учитываются на этапе агрегирования и являются одним из факторов, влияющих на результат нечеткого логического вывода. Агрегирование представляет собой процедуру вычисления степени выполнения сложных условий, являющихся комбинацией простых. При этом если подусловия соединены связкой "ИЛИ", то эта степень обычно вычисляется при помощи операции  $S$ -нормы:

$$\mu_{\tilde{B}}(c) = \bigvee_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i}(e_i), \quad (13)$$

где  $e_i$  — входные лингвистические переменные;  $\tilde{A}_i$  — их нечеткие значения;  $c$  — агрегированная лингвистическая переменная;  $\tilde{B}$  — ее нечеткое значение;  $\mu_{\tilde{A}_i}(e_i)$  — степени истинности подусловий,  $\mu_{\tilde{B}}(c)$  — степень истинности предпосылки;  $S$  — заданная операция  $S$ -нормы;  $n$  — число подусловий в данном правиле;

если подусловия соединены связкой "И", то с помощью операции  $T$ -нормы:

$$\mu_{\tilde{B}}(c) = \bigwedge_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}_i}(e_i), \quad (14)$$

где  $T$  — заданная операция  $T$ -нормы.

Целесообразность введения в рассмотрение степеней значимости обусловлена тем, что в процессе принятия решений человек оценивает не только истинность какого-либо подусловия, но и его важность [31, 33]. Обозначим  $F_i$  — степень значимости  $i$ -го подусловия ( $F_i \in [0; 1]$ ). Тогда при использовании логической связки "ИЛИ" выражение для вычисления степени выполнения сложного условия примет вид

$$\mu_{\tilde{B}}(c) = \bigvee_{i=1}^n [F_i T \mu_{\tilde{A}_i}(e_i)], \quad (15)$$

при использовании связки "И":

$$\mu_{\tilde{B}}(c) = \bigwedge_{i=1}^n [1 - F_i T (1 - \mu_{\tilde{A}_i}(e_i))]. \quad (16)$$

Нечеткий регулятор, рассматриваемый в данном исследовании, имеет два входа, т. е. каждое из правил логического вывода содержит два подусловия, соединенных связкой "И". Обозначим степени их значимости  $F_e$  и  $F_d$ . При выборе алгебраического базиса ( $a T b = ab$ )

$$\mu_{\tilde{B}}(c) = [1 - F_e(1 - \mu_{T_E}(e_i))][1 - F_d(1 - \mu_{T_D}(d))]. \quad (17)$$

Для исследования влияния степеней значимости на динамику системы оценивались параметры аппроксимирующего линейного ПД регулятора, описываемого передаточной функцией (5). На рис. 5 приведены зависимости параметров аппроксимирующего ПД регулятора при изменении степени значимости  $F_{\Pi}$  подусловия, соответствующего лингвистической переменной "Рассогласование".

Анализ этих зависимостей показывает, что увеличение степени значимости того или иного входа НЛР приводит к увеличению одноименного параметра аппроксимирующего ПД регулятора и слабо влияет на другой параметр. Это свидетельствует о возможности воздействия на динамические характеристики НЛР путем изменения степеней значимо-

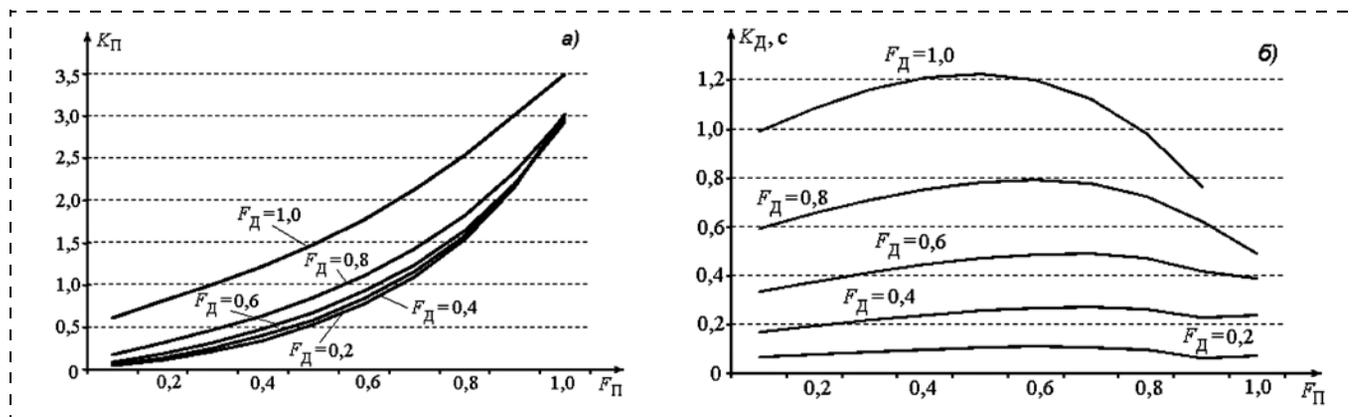


Рис. 5. Зависимости параметров аппроксимирующего ПД регулятора при изменении степени значимости  $F_D$  подусловия, соответствующего лингвистической переменной "Рассогласование" (e): а —  $K_P$ , б —  $K_D$

сти подусловий, определяющих нечеткие значения каждой из входных лингвистических переменных. Заметим, однако, что вследствие ограниченного диапазона изменения степеней значимости (от 0 до 1) они не в состоянии обеспечить настройку НЛР в широких пределах, но вполне пригодны для тонкой подстройки регулятора.

### Заключение

В статье приведены результаты анализа влияния параметров настроек нечеткого логического регулятора на его динамические характеристики, которые позволяют сделать следующие выводы.

1. Выбор входных и выходных переменных, а также числа их термов следует осуществлять исходя из структуры системы управления и требований к ее качеству, избегая их необоснованного увеличения.

2. Логический базис следует выбирать на этапе проектирования системы и не изменять в процессе ее функционирования. При этом алгебраический базис обеспечивает наименьшие нелинейные искажения характеристик НЛР, что делает его поведение достаточно предсказуемым. Вместе с тем, поверхность управления НЛР при использовании максиминного базиса имеет ощутимое уменьшение наклона вблизи начала координат, что усиливает стабилизирующие свойства регулятора.

3. Диапазон изменения и степень растяжения-сжатия ФП нечетких переменных, составляющих терм-множества лингвистических переменных, позволяют плавно изменять характер процессов в системе управления в широких пределах и могут быть использованы для автоматической подстройки регулятора в режиме нормальной эксплуатации.

4. Нечеткое соответствие между пространством предпосылок и пространством заключений (базу правил) желательно настроить в тестовом режиме до начала эксплуатации системы и в дальнейшем его не изменять.

5. Дефаззификацию целесообразно осуществлять методом центра тяжести.

6. Степени значимости подусловий могут быть использованы для автоматической подстройки регулятора в тех случаях, когда параметры объекта управления в процессе функционирования изменяются не более чем на один порядок.

### Список литературы

1. Jager R. Fuzzy logic in control. I11. Thesis Technische Universiteit Delft, 1995.
2. Пергат А. Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
3. Макаров И. М., Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П., Ситников М. С. Исследование периодических колебаний в системах управления с нечеткими регуляторами // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2013. Т. 11. № 6. С. 37—45.
4. Усков А. А., Киселев Е. В. Теория нечетких супервизорных систем управления. Смоленск: Смоленский филиал АНО ВПО ЦС РФ "Российский университет кооперации", 2013.
5. Прикладные нечеткие системы: Пер. с япон. / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др.; под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. М.: Мир, 1993.
6. Mamdani E. H., Assilian S. An experiment in linguistic synthesis with fuzzy logic controller // Int. J. Man-Machine Studies. 1975. Vol. 7, N. 1. P. 1—13.
7. Larsen P. M. Industrial applications of fuzzy logic control // Int. J. Man-Machine Studies. 1980. Vol. 12, N. 1. P. 3—10.
8. Tsukamoto Y. An approach to fuzzy reasoning method // An approach to fuzzy reasoning method. In: M. M. Gupta, Ragade R. K. and Yager R. R. (Eds.) Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications. North-Holland, Amsterdam, 1979. P. 137—149.
9. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics. 1985. Vol. 15, N. 1. P. 116—132.
10. Pedrycz W. Fuzzy Control and Fuzzy Systems. New York: John Wiley and Sons, 1993.
11. Анисимов Д. Н., Пискунова Ю. Ю. Использование нефункциональных соответствий при построении нечетких систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 3. С. 18—21.
12. Анисимов Д. Н. Нечеткие алгоритмы управления: учеб. пособ. М.: Издательство МЭИ, 2004.
13. Борисов В. В., Круглов В. В., Федулов А. С. Нечеткие модели и сети. М.: Горячая линия—Телеком, 2012.
14. Piegat A., Plucifski M. Application of the radial basis-function in modeling and identification of nonlinear systems // Proc.

of the XII Int. Conf. on Systems Science, vol. 1. Wrocław, Poland, 1995. P. 266—274.

15. **González A., Pérez R.** Completeness and consistency conditions for learning fuzzy rules // *Fuzzy Sets and Systems*. 1998. N. 96 (7). P. 37—52.

16. **Анисимов Д. Н.** Использование нечеткой логики в системах автоматического управления // *Приборы и системы*. 2001. № 8. С. 39—42.

17. **Анисимов Д. Н.** Идентификация линейных динамических объектов методом экспоненциальной модуляции // *Вестник МЭИ*. 1994. № 2. С. 68—72.

18. **Анисимов Д. Н., Хрипков А. В.** Законы распределения оценок параметров динамических объектов при идентификации методом экспоненциальной модуляции // *Проблемы управления*. 2007. № 4. С. 18—21.

19. **Гостев В. И.** Проектирование нечетких регуляторов для систем автоматического управления. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.

20. **Макаров И. М., Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П.** Искусственный интеллект и интеллектуальные системы управления. М.: Наука, 2006.

21. **Kosko B.** Fuzzy Systems as Universal Approximators // *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, 1992. P. 1153—1162.

22. **Wang L. X.** Fuzzy Systems Are Universal Approximators // *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, 1992. P. 1153—1162.

23. **Castro J. L.** Fuzzy Logic Controllers Are Universal Approximators // *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*. 1995. Vol. 25, N. 4. P. 629—635.

24. **Батыршин И. З.** Основные операции нечеткой логики и их обобщения. Казань: Отечество, 2001.

25. **Cervinka O.** Automatic tuning of parametric  $T$ -norms and  $T$ -conorms in fuzzy modeling // *Proc. 7th IFSA World Congress*. Prague: ACADEMIA, 1997. Vol. 1. P. 416—421.

26. **Batyршин I., Kaynak O., Rudas I.** Fuzzy modeling based on generalized conjunction operations // *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, October 2002. Vol. 10, N. 5. P. 678—683.

27. **Аверкин А. Н., Сулин К. В.** Построение нечеткого регулятора скорости электродвигателя на базе параметрических логик // *Материалы Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям*. Санкт-Петербург, 1999. С. 226—228.

28. **Анисимов Д. Н., Новиков В. Н., Сафина Э. А., Ситников К. Ю.** Исследование влияния выбора логического базиса на характеристики нечеткого регулятора // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2013. № 8 (149). С. 12—17.

29. **Анисимов Д. Н., Новиков В. Н., Сафина Э. А.** Исследование влияния треугольных норм на динамику нечеткой системы автоматического управления // *Вестник МЭИ*. 2013. № 4. С. 186—192.

30. **Анисимов Д. Н., Дроздова Е. Д., Новиков В. Н.** Исследование свойств нечеткого аппроксимирующего ПД регулятора // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2014. № 9. С. 6—12.

31. **Анисимов Д. Н., Ситников К. Ю.** Методика построения нечетких реляционных систем автоматического управления // *Вестник МЭИ*. 2012. № 3. С. 77—82.

32. **Макаров И. М., Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П., Ситников М. С.** Устойчивость интеллектуальных систем автоматического управления // *Информационные технологии*. 2013. № 2. С. 1—23.

33. **Анисимов Д. Н., Дроздова Е. Д., Новиков В. Н.** Исследование влияния степеней значимости подусловий на динамические характеристики нечеткого логического регулятора // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2015. Т. 16. № 6. С. 363—368.

## Dynamic Properties of the Fuzzy Control Systems Based on the Relational Models

**D. N. Anisimov**, AnisimovDN@mpei.ru✉, **Mai Tkhe Anh**,

National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, 111250, Russian Federation

Corresponding author: **Anisimov Dmitrii N.**, Ph. D., Associate Professor, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, 111250, Russian Federation, e-mail: AnisimovDN@mpei.ru

Received on October 03, 2016

Accepted on November 11, 2016

*The paper is devoted to the analysis of the influence of various factors on the dynamic characteristics of the fuzzy logic controller (FLC). In particular, the following factors are considered: the choice of the input and output variables; the number of terms, the turn-down and the form of the membership functions of the fuzzy variables, the character of the relation between the space of the antecedents and the space of the consequents (the rule base), the mode of defuzzification and the measures of the sub-conditions significance. A research was carried out in two directions. The first direction consisted in determination of the dependence of FLC static and frequency characteristics on its settings. The second one was an analysis of the frequency characteristics in the fuzzy control systems, the construction of FLC linear model in a form of PD controller and determination of the dependence of its parameters on FLC settings. The conducted research allows us to draw the following conclusions. 1. Selection of the input and output variables and the number of terms should be based on the structure of the control system and on the requirements to its quality, avoiding their unreasonable increase. 2. The logical basis should be chosen at the stage of the system design and should not be changed in the process of its functioning. Thus, the algebraic basis ensures the least nonlinear distortion of FLC characteristics, making its behavior quite predictable. On the other hand, the control surface of FLC, when using the maxmin basis, has a small slope near the origin of the coordinates, which enhances the stabilizing properties of the controller. 3. The turn-down and dilatation-concentration degree of the membership functions of the fuzzy variables make it possible to change the system's behavior smoothly in a wide range and can be used for an automatic tuning of FLC during a normal operation. 4. The fuzzy relation between the space of the antecedents and the space of the consequents (the rule base) should be tuned in a test mode before the system operation and should not be changed hereafter. 5. It is advisable to carry out a procedure of defuzzification by the method of the center of gravity. 6. Measures of the sub-condition significance can be used for an automatic tuning of FLC in cases, when the parameters of the control object in the process of operation do not change by more than one order.*

**Keywords:** fuzzy logic inference; dynamic characteristics; membership function; relational model; aggregation of the sub-conditions; truth degrees; measure of significance; fuzzy controller; approximating model; PD-controller

For citation:

**Anisimov D. N., Mai Tkhe Anh.** Dynamic Properties of the Fuzzy Control Systems Based on the Relational Models, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 298—307.

DOI: 10.17587/mau.18.298-307

## References

1. **Jager R.** Fuzzy logic in control. I11, Thesis Technische Universiteit Delft, 1995.
2. **Piegat A.** *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie* (Fuzzy modeling and control), Moscow, Binom. Laboratorija znaniy, 2009 (in Russian).
3. **Makarov I. M., Lohin V. M., Man'ko S. V., Romanov M. P., Sitnikov M. S.** *Issledovanie periodicheskikh kolebanij v sistemah upravlenija s nechetkimi reguljatorami* (Research of periodic fluctuations in control systems with fuzzy regulators), *Informacionno-izmeritel'nye i upravljajushhie sistemy*, 2013, vol. 11, no. 6, pp. 37—45 (in Russian).
4. **Uskov A. A., Kiselev E. V.** *Teorija nechetkih supervizornyh sistem upravlenija* (The theory of fuzzy supervisor control systems), Smolensk, Smolenskij filial ANO VPO CS RF "Rossijskij universitet kooperacii", 2013 (in Russian).
5. **Asai K., Vatada D., Ivai S.** et al. *Prikladnye nechetkie sistemy* (Applied fuzzy systems), T. Tjerano, K. Asai, M. Sugjeno (Eds.), Moscow, Mir, 1993 (in Russian).
6. **Mamdani E. H., Assilian S.** An experiment in linguistic synthesis with fuzzy logic controller, *Int. J. Man-Machine Studies*, 1975, vol. 7, no. 1, pp. 1—13.
7. **Larsen P. M.** Industrial applications of fuzzy logic control, *Int. J. Man-Machine Studies*, 1980, vol. 12, no. 1, pp. 3—10.
8. **Tsukamoto Y.** An approach to fuzzy reasoning method, In: M. M. Gupta, Ragade R. K. and Yager R. R. (Eds.) *Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications*, North-Holland, Amsterdam, 1979, pp. 137—149.
9. **Takagi T., Sugeno M.** Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 1985, vol. 15, no. 1, pp. 116—132.
10. **Pedrycz W.** *Fuzzy Control and Fuzzy Systems*, New York, John Wiley and Sons, 1993.
11. **Anisimov D. N., Piskunova Ju. Ju.** *Ispol'zovanie nefunkcional'nyh sootvetstvij pri postroenii nechetkih sistem upravlenija* (Use of Nonfunctional Agreements in Structure of Fuzzy Control Systems), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2007, no 3, pp. 18—21.
12. **Anisimov D. N.** *Nechetkie algoritmy upravlenija* (Fuzzy algorithms of control), Moscow, Publishing house of MJeI, 2004 (in Russian).
13. **Borisov V. V., Kruglov V. V., Fedulov A. S.** *Nechetkie modeli i seti* (Fuzzy models and networks), Moscow, Gorjachaja linija—Telekom, 2012 (in Russian).
14. **Piegat A., Plucifski M.** Application of the radial basis-function in modeling and identification of nonlinear systems, *Proc. of the XII Int. Conf. on Systems Science*, vol. 1, Wroclaw, Poland, 1995, pp. 266—274.
15. **González A., Pérez R.** Completeness and consistency conditions for learning fuzzy rules, *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, no. 96 (7), pp. 37—52.
16. **Anisimov D. N.** *Ispol'zovanie nechetkoj logiki v sistemah avtomaticheskogo upravlenija* (The use of fuzzy logic in automatic control systems), *Pribory i Sistemy*, — 2001, no. 8, pp. 39—42 (in Russian).
17. **Anisimov D. N.** *Identifikacija linejnyh dinamičeskikh objektov metodom jeksponencial'noj moduljacii* (Identification of linear dynamic objects), *Vestnik MJeI*, 1994, no 2, pp. 68—72 (in Russian).

18. **Anisimov D. N., Hripkov A. V.** *Zakony raspredelenija ocenok parametrov dinamičeskikh objektov pri identifikacii metodom jeksponencial'noj moduljacii* (Distribution laws of dynamic objects' parameter estimates in the identification by exponential modulation method), *Problemy Upravlenija*, 2007, no. 4, pp. 18—21 (in Russian).

19. **Gostev V. I.** *Proektirovanie nechetkih reguljatorov dlja sistem avtomaticheskogo upravlenija* (Design of fuzzy controllers for automatic control systems), SPb., BHV-Peterburg, 2011 (in Russian).

20. **Makarov I. M., Lohin V. M., Man'ko S. V., Romanov M. P.** *Iskusstvennyj intellekt i intellektual'nye sistemy upravlenija* (Artificial intelligence and intelligent control systems), Moscow, Nauka, 2006 (in Russian).

21. **Kosko B.** Fuzzy Systems as Universal Approximators, *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, 1992, pp. 1153—1162.

22. **Wang L. X.** Fuzzy Systems Are Universal Approximators, *Proc. of the IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, San Diego, 1992, pp. 1153—1162.

23. **Castro J. L.** Fuzzy Logic Controllers Are Universal Approximators, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, 1995, vol. 25, no. 4, pp. 629—635.

24. **Batyrshin I. Z.** *Osnovnye operacii nechetkoj logiki i ih obobshhenija* (Basic operations of fuzzy logic and their generalizations), Kazan', Otechestvo, 2001 (in Russian).

25. **Cervinka O.** Automatic tuning of parametric  $T$ -norms and  $T$ -conorms in fuzzy modeling, *Proc. 7th IFSA World Congress*, Prague, ACADEMIA, 1997, vol. 1, pp. 416—421.

26. **Batyrshin I., Kaynak O., Rudas I.** Fuzzy modeling based on generalized conjunction operations, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, October 2002, vol. 10, no. 5, pp. 678—683.

27. **Averkin A. N., Sulin K. V.** *Postroenie nechetkogo reguljatora skorosti jelektromotora na baze parametricheskikh logik* (Building a fuzzy speed regulator of the electric motor based on parametric logic), *Materialy Mezhdunar. konf. po mjagkim vychislenijam i izmerenijam*, Sankt-Peterburg, 1999, pp. 226—228 (in Russian).

28. **Anisimov D. N., Novikov V. N., Safina Je. A., Sitnikov K. Ju.** *Issledovanie vlijanija vybora logičeskogo bazisa na harakteristiki nechetkogo reguljatora* (Research of Logical Basis Choice Influence on Fuzzy Regulator Characteristics), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2013, no. 8 (149), pp. 12—17 (in Russian).

29. **Anisimov D. N., Novikov V. N., Safina Je. A.** *Issledovanie vlijanija treugol'nyh norm na dinamiku nechetkoj sistemy avtomaticheskogo upravlenija* (Research of triangular norms influence on dynamics of the fuzzy logic automatic control system), *Vestnik MJeI*, 2013, no 4, pp. 186—192 (in Russian).

30. **Anisimov D. N., Drozdova E. D., Novikov V. N.** *Issledovanie svojstv nechetkogo approksimirujushhego PD reguljatora* (The study of the properties of the approximating fuzzy PD controller), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 6—12 (in Russian).

31. **Anisimov D. N., Sitnikov K. Ju.** *Metodika postroenija nechetkih reljacionnyh sistem avtomaticheskogo upravlenija* (The construction method for fuzzy relational automatic control systems), *Vestnik MJeI*, 2012, no 3, pp. 77—82 (in Russian).

32. **Makarov I. M., Lohin V. M., Man'ko S. V., Romanov M. P., Sitnikov M. S.** *Ustojčivost' intellektual'nyh sistem avtomaticheskogo upravlenija* (Stability of intelligent systems of automatic control), *Informacionnye Tehnologii*, 2013, no. 2, pp. 1—23 (in Russian).

33. **Anisimov D. N., Drozdova E. D., Novikov V. N.** *Issledovanie vlijanija stepenej znachimosti poduslovij na dinamicheskie harakteristiki nechetkogo logičeskogo reguljatora* (Research of the Influence of the Sub-Conditions Measure of Significance on the Dynamic Characteristics of a Fuzzy Logic Controller), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 6, pp. 363—368 (in Russian).

**В. Л. Афонин**, д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр., afoninwl@rambler.ru,  
Институт машиноведения им. А. А. Благоднарова РАН (ИМАШ РАН), г. Москва

## Вейвлет-преобразования в приложениях к анализу систем управления, содержащих существенные нелинейности

*Рассматривается теория вейвлет-преобразований применительно к анализу и синтезу динамических характеристик систем управления, содержащих существенные нелинейности. Задача решается во временной области, позволяющей анализировать ошибки и устойчивость замкнутых следящих систем, включающих существенные нелинейности типа зона нечувствительности, ограничение, зазор и другие нелинейности.*

**Ключевые слова:** вейвлет-преобразование, потенциальные функции, существенные нелинейности, зона нечувствительности, ограничение, зазор, анализ и синтез нелинейных систем

### Введение

Теория вейвлет-преобразований нашла широкое применение в задачах обработки, анализа и распознавания изображений [1—13]. Несмотря на достаточно большое число работ по теории вейвлетов, практически отсутствуют исследования данного аппарата применительно к анализу и синтезу систем автоматического управления.

В системах автоматического управления существенные нелинейности проявляются в механической части — это зона нечувствительности, ограничения, люфты в редукторах, передачах и др. В электронной части нелинейности представляют зоны нечувствительности и ограничения. Безусловно, это является недостатками изготовления механических и электронных устройств. Но данные недостатки не всегда возможно устранить за счет технологических процессов при изготовлении, и они особенно проявляются при создании высокоточного станочного оборудования, измерительных приборов и другого точного оборудования. Поэтому разработка методов учета данных нелинейностей при исследовании ошибок и устойчивой работы следящих систем при их наличии позволяет повышать динамические характеристики систем управления.

Исследованию нелинейных систем посвящено достаточно много работ, среди которых следует, в первую очередь, отметить работы А. М. Ляпунова. Общий метод анализа устойчивости систем с использованием функции Ляпунова позволяет анализировать устойчивость систем, в том числе нелинейных. Метод фазовой плоскости, введенный А. А. Андроновым [14], основан на построении фазовых траекторий для систем, содержащих нелинейности. Метод точечных преобразований и построение фазовых портретов позволяет графически рассматривать возникновение автоколебаний. Метод гармонической линеаризации, наиболее полно рассмотренный в работах Е. П. Попова, основывается на построении частотных характеристик для нелинейных систем [15].

Современные методы анализа систем управления, в том числе нелинейных, основаны на приме-

нении численного моделирования и поисковых процедур с использованием быстродействующей вычислительной техники. В данной работе рассматривается возможность применения аппарата теории вейвлет-преобразований для анализа и синтеза динамических характеристик систем управления, содержащих существенные нелинейности. Данный аппарат имеет преимущество в сравнении с частотными методами, так как рассматривает процессы во временной области и позволяет аналитически исследовать переходные процессы.

При анализе сложных систем управления, включающих линейные и нелинейные элементы, во временной области не требуется выполнение условия фильтра для линейной части системы, которое является обязательным при применении частотных методов.

### Реакция линейных систем, включающих существенные нелинейности

Рассмотрим выходные сигналы модуля, состоящего из нелинейного и линейного звеньев (рис. 1).

Линейное звено во временной области характеризуется весовой (импульсной переходной) функцией  $k(\tau)$  [16], которая представляет реакцию линейной системы на  $\delta$ -функцию (функцию Дирака):

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{для } \tau \leq t \\ \infty, & \text{для } \tau = t \text{ и } \int \delta(t - \tau) d\tau = 1. \\ 0, & \text{для } \tau \geq t \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим реакцию типовых нелинейностей в совокупности с линейными звеньями на входной

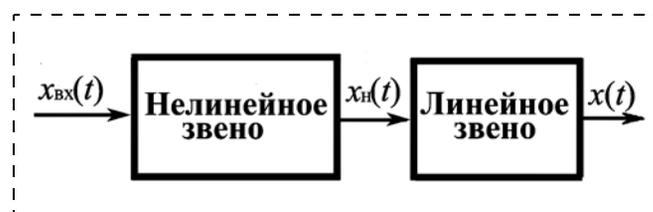


Рис. 1. Модуль, включающий нелинейность и линейное звено

сигнал, представляющий потенциальную функцию

$$x_{\text{вх}}(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n)\varphi(j, t, n), \quad (2)$$

где  $\varphi(j, t, n) = \frac{1}{1 + (2^j t - n)^2}$  — потен-

циальная функция;  $C(j, n)$  — постоянные коэффициенты, определяющие величину  $x_{\text{вх}}(t)$  в текущий момент времени  $t$ ;  $n$  определяет сдвиг и принимает целочисленные значения  $n \in [0, \infty)$ ;  $j$  определяет ширину импульса и также принимает целочисленные значения  $j \in [0, k)$  (рис. 2).

В работе [2] в качестве масштабирующей функции предложена потенциальная функция (2), а в качестве вейвлета (полуволны) рассматривается функция

$$\psi(t) = \frac{C}{1 + (2^j t - n)} - \frac{C}{1 + (2^j t - n - \Delta n)}. \quad (3)$$

Параметры  $j$  и  $C$  определяют вид входного сигнала, параметр  $\Delta n$  определяет вид полуволны и принимается равным 1 (рис. 3).

Аппарат вейвлет-преобразований позволяет аппроксимировать произвольный сигнал путем разложения по масштабирующей функции типа потенциальной функции и вейвлета [2, 3]. Поэтому в данной работе рассмотрим результаты исследований реакций линейных систем, включающих существенные нелинейности, на воздействие вида потенциальной функции (2) и вейвлета (3). Далее для удобства понимания воздействия сигналов на систему будем использовать термин "полуволна" вместо "вейвлет".

Выходной сигнал  $x(t)$  модуля, содержащего нелинейное и линейное звенья (см. рис. 1) представляет интеграл свертки

$$x(t) = \int_0^t k(t - \tau)x_{\text{н}}(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Сигнал с нелинейности  $x_{\text{н}}(t)$  представим как реакцию на воздействие в виде потенциальной функции (2).

Рассмотрим модули, включающие типовые нелинейности. Пусть модуль включает нелинейность типа зона нечувствительности (рис. 4).

Выходной сигнал с нелинейности  $x_{\text{н}}(t)$  (рис. 4) при воздействии на вход сигналом (2) принимает вид

$$x_{\text{н}}(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n)\varphi_{\text{н}}(j, t, n), \quad (5)$$

где  $\varphi_{\text{н}}(j, t, n)$  — реакция нелинейности на воздействие в виде потенциальной функции  $\varphi(j, t, n)$  (рис. 5),

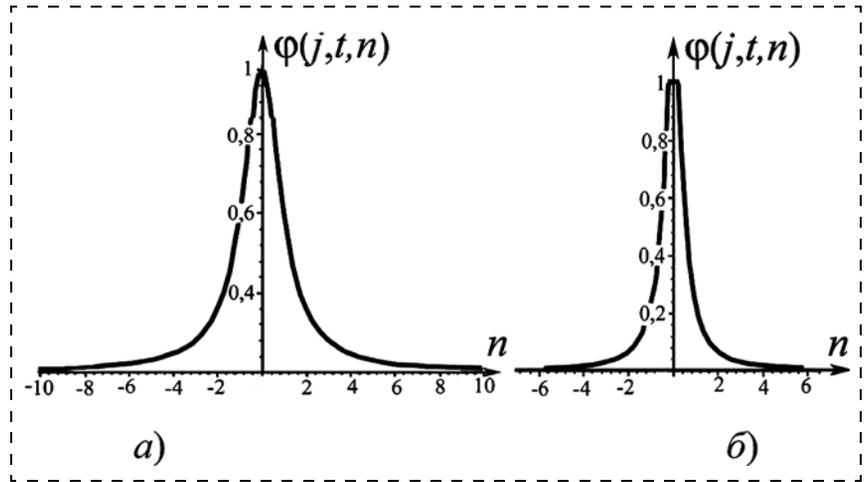


Рис. 2. Графики потенциальной функции  $\varphi(j, t, n)$ : а — при  $n = 0, j = 0$ ; б —  $n = 0, j = 1$

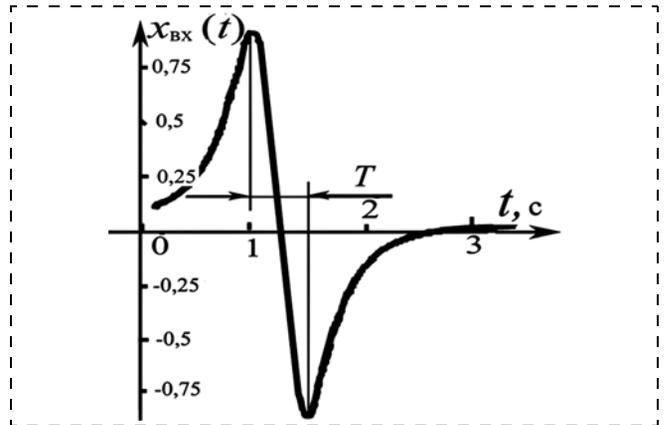


Рис. 3. Полуволна, представляющая сумму двух потенциальных функций

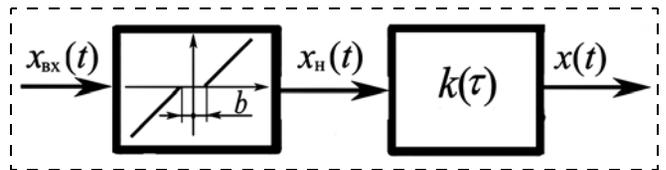


Рис. 4. Модуль, включающий зону нечувствительности

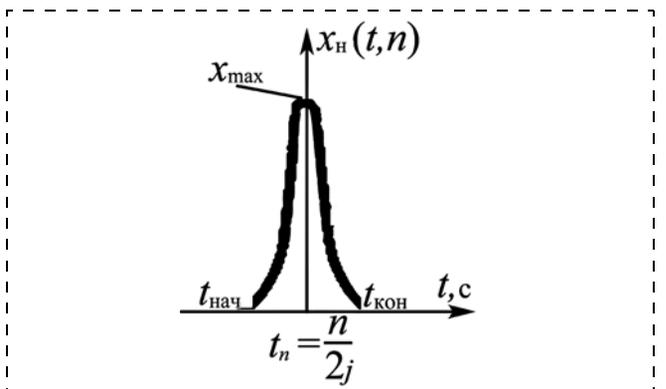


Рис. 5. Реакция нелинейного звена, представляющего зону нечувствительности  $x_{\text{н}}(t, n)$ , на входной сигнал в виде потенциальной функции

$x_{\max} = C(j, n) - b$ ,  $t_{\text{нач}}$  и  $t_{\text{кон}}$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned} C(j, n) \frac{1}{1 + (2^j t - n)^2} &= b; \\ t_{\text{нач}} &= \frac{1}{2^j} \left( n - \sqrt{\frac{C(j, n) - b}{b}} \right); \\ t_{\text{кон}} &= \frac{1}{2^j} \left( n + \sqrt{\frac{C(j, n) - b}{b}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Для рассматриваемой нелинейности выходной сигнал с модуля  $x(t)$  представляется суммой интегралов свертки

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ \int_{t_{\text{нач}}}^t k(t-\tau) (C(j, n)\varphi(j, \tau, n) - b) d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{t_{\text{кон}}}^t k(t-\tau) b d\tau - \int_{t_{\text{кон}}}^t C(j, n) k(t-\tau) \varphi(j, \tau, n) d\tau \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} C(j, n) k(t-\tau) \varphi(j, \tau, n) d\tau - \\ &- \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{t_{\text{нач}}}^{t_{\text{кон}}} k(t-\tau) b d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Выходной сигнал  $x(t)$ , представляющий интегралы свертки, в которых верхний предел всегда представляет текущее время, которое стремится к бесконечности. Поэтому в начальном исходном уравнении (7) при переходе с одного интервала на другой необходимо исключать действие на предыдущем интервале. Должно быть соблюдено реальное изменение выходного сигнала  $x(t)$  при наличии нелинейности и при  $t \rightarrow \infty$ . Далее исходное уравнение может быть упрощено. На рис. 6 приведены упрощенные интегралы свертки для типовых нелинейностей.

Таким образом, аналитические выражения выходных сигналов в виде интегралов свертки с моделей, включающих существенную нелинейность и линейное звено, позволяют анализировать динамические характеристики систем, содержащих нелинейные звенья во временной области, без введения допущений, так как даже в точках "сшива" нелинейных характеристик  $t_{\text{нач}}$  и  $t_{\text{кон}}$  аналитическое выражение выходного сигнала отражает реальное поведение системы.

Одним из трудоемких этапов анализа выходных сигналов с модулей является процедура вычисления интегралов свертки. Поэтому прежде чем анализировать динамические свойства сложных систем, рассмотрим процедуры вычисления данных интегралов свертки.

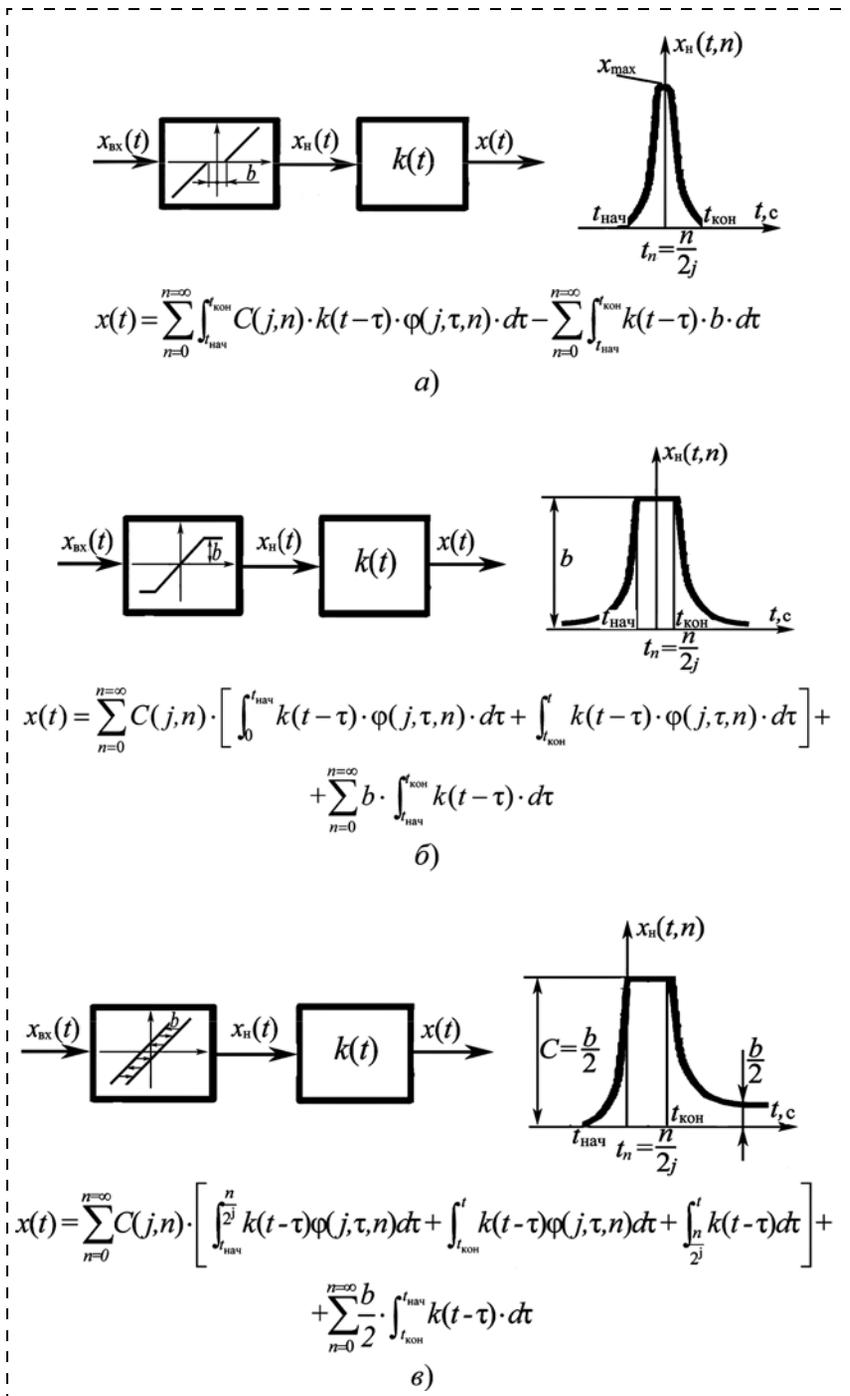


Рис. 6. Упрощенные интегралы свертки для типовых нелинейностей

**Особенности вычисления интегралов свертки, включающих потенциальную функцию**

Потенциальная функция  $\varphi(t)$  и процедура нахождения интегралов вида

$$\int_{t_{\text{нач}}}^t k(t - \tau)\varphi(j, \tau)d\tau \quad (8)$$

относятся к нахождению интегралов от специальных функций, которые приведены в справочной литературе [17]. Как правило, данные интегралы приводятся к табличным интегралам.

Для нахождения интегралов вида (8) потенциальная функция  $\varphi(t)$  представляется суммой

$$\varphi(t) = \frac{C(j, n)}{2(1 + i(2^j t - n))} + \frac{C(j, n)}{2(1 - i(2^j t - n))}, \quad (9)$$

где  $i$  – комплексная переменная ( $i = \sqrt{-1}$ ).

Нахождение интегралов вида (8) рассмотрим на примере линейного звена, представляющего колебательное звено.

**Пример 1.** Реакция колебательного звена, для которого весовая функция имеет самый сложный вид, при воздействии в виде потенциальной функции  $\varphi(t)$  описывается интегралом свертки

$$J_n = A \int_{t_{\text{нач}}}^t e^{\frac{\tau}{T}} [B \sin(a(t - \tau) + b) - \cos(a(t - \tau) + b)] \frac{d\tau}{1 + (2^j t - n)^2}, \quad (10)$$

где  $A = \frac{KC(j, n)}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ ,  $B = \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$ ,  $a = \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{T}$ ,

$$b = \arctg\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right).$$

Для потенциальной функции в виде суммы двух комплексных выражений (9) интеграл (10) представляется в виде суммы интегралов

$$J_n = AB \int_{t_{\text{нач}}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\sin(a(t - \tau) + b)}{1 + i(2^j \tau - n)} d\tau - A \int_{t_{\text{нач}}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\cos(a(t - \tau) + b)}{1 + i(2^j \tau - n)} d\tau + AB \int_{t_{\text{нач}}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\sin(a(t - \tau) + b)}{1 - i(2^j \tau - n)} d\tau - A \int_{t_{\text{нач}}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\cos(a(t - \tau) + b)}{1 - i(2^j \tau - n)} d\tau. \quad (11)$$

Рассматриваемые интегралы находятся с использованием программных средств Maple, приводятся к интегральным показательным функциям  $E_i(1, t)$ , значения которых для конкретных значе-

ний  $t$  сведены в таблицы [см., например 17]. Поэтому, не приводя сложных символьных выражений, запишем окончательные численные выражения интегралов для  $j = 3, n = 40, T = 0,1, \zeta = 0,25, t = \frac{n}{2^j} = 5$  с,  $t_{\text{нач}} = 4,625$  с и  $C = 1, K = 1$ :

$$\begin{aligned} J_{n1} &= AB \int_{t_{\text{нач}}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\sin(a(t - \tau) + b)}{1 + i(2^j \tau - n)} d\tau = 0,1427 + 0,045i; \\ J_{n2} &= A \int_{t_{\text{нач}}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\cos(a(t - \tau) + b)}{1 + i(2^j \tau - n)} d\tau = -0,161 - 0,172i; \\ J_{n3} &= AB \int_{t_{\text{нач}}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\sin(a(t - \tau) + b)}{1 - i(2^j \tau - n)} d\tau = 0,1427 - 0,045i; \\ J_{n4} &= A \int_{t_{\text{нач}}}^t e^{\frac{\tau}{T}} \frac{\cos(a(t - \tau) + b)}{1 - i(2^j \tau - n)} d\tau = -0,161 + 0,172i. \end{aligned} \quad (12)$$

Суммарное значение для интеграла

$$J_n = J_{n1} + J_{n2} + J_{n3} + J_{n4} = 0,1427 + 0,045i + 0,161 + 0,172i + 0,1427 - 0,045i + 0,161 - 0,172i = 0,6074.$$

Полученное значение для  $J_n$  соответствует реакции колебательного звена на воздействие в виде потенциальной функции (рис. 7), где приведено значение выходного сигнала модуля  $x(t) = J_n$  и показано совпадение расчетного значения для одной точки  $t = 5$  с. Для построения выходного сигнала для текущих значений  $t$  требуется процедура вычисления интегралов выполнять с заданным шагом  $\Delta t$ , позволяющим обеспечивать требуемую точность получения выходного сигнала.

Интегралы свертки, определяющие выходной сигнал на воздействие в виде потенциальной функции, не представляют более сложные выражения, чем в рассмотренном примере, и могут быть определены с использованием программного обеспечения Maple и MATLAB Simulink.

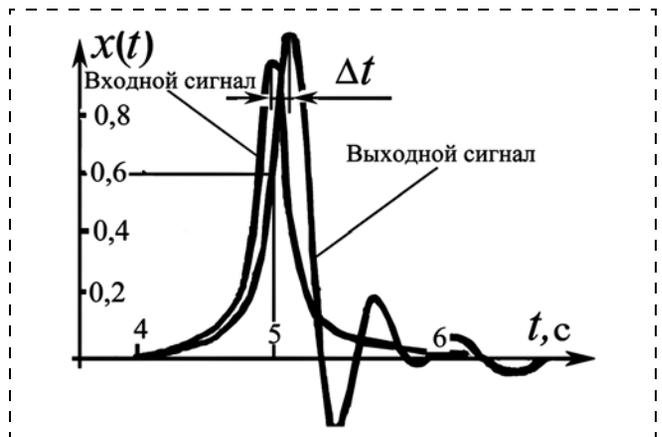


Рис. 7. Входной и выходной сигналы колебательного звена

**Вычисление установившейся ошибки в следящей системе, содержащей существенные нелинейности, при воздействии потенциальной функции**

Рассмотрим ошибки в установившемся режиме, вносимые существенными нелинейностями в следящей системе при воздействии  $x_{вх}(t)$  в виде потенциальной функции  $\varphi(t)$  (2).

При анализе ошибок нелинейных систем управления, как правило, используются приближенные методы. При этом осуществляется линеаризация существенных нелинейных звеньев и замена их линейными, либо выполняется точное моделирование системы. Поэтому для высокоточных и быстродействующих систем рассмотрим аналитический метод анализа погрешностей, используя изложенный выше материал.

Исследование поведения системы во временной области по реакции на ограниченное воздействие в виде потенциальной функции позволяет получать точное описание выходного сигнала. Поэтому рассмотрим условия сходимости полученных временных рядов, содержащих нелинейности, и оценим их влияние на точность системы.

Представим каждый временной ряд, представляющий выходной сигнал (см. рис. 6), в виде двух составляющих: ряд, включающий только линейную часть, и ряд, содержащий нелинейную часть.

Первоначально рассмотрим систему, содержащую зону *нечувствительности*, и определим ошибку выходного сигнала относительно входного:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = x_{вх}(t) - x(t) = & \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n)\varphi(j, t, n) - \\ & - \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n) \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau + \\ & + \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} k(t-\tau)bd\tau = \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n) \left[ \varphi(j, t, n) - \right. \\ & - \left. \int_0^t k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau \right] + \sum_{n=0}^{n=\infty} b \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} k(t-\tau)d\tau + \\ & + \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n) \left[ \int_0^{t_{нач}} k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau + \right. \\ & \left. + \int_{t_{кон}}^t k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения  $\varepsilon(t)$  в установившемся режиме при  $t \rightarrow \infty$  представим соотношение (13) в виде ряда, не учитывающего нелинейность,

$$\varepsilon_{л}(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C(j, n) \left[ \varphi(j, t, n) - \int_0^t k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau \right] \quad (14)$$

и ряда, который включает нелинейную часть

$$\begin{aligned} \varepsilon_{н}(t) = & \sum_{n=0}^{n=\infty} \left[ b \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} k(t-\tau)d\tau + C(j, n) \times \right. \\ & \left. \times \left( \int_0^{t_{нач}} k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau + \int_{t_{кон}}^t k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Ряд, содержащий только линейную часть (14), будет сходящимся при  $t \rightarrow \infty$  для устойчивой системы, так как весовая функция  $k(t-\tau)$  ограничена, функция  $\varphi(j, \tau, n)$  всегда ограничена по определению, следовательно, и произведение  $k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)$  будет ограничено.

Таким образом, наличие нелинейности приводит к дополнительной статической ошибке  $\varepsilon_{н}(t)$  в системе, которая определяется линейной частью системы, зоной нечувствительности, а также значением входного сигнала. Значение дополнительной ошибки определяется из соотношения (15). Для зоны нечувствительности всегда существует статическая ошибка и в соответствии с выражением (15) зависит от зоны нечувствительности  $b$ , весовой функции линейной части  $k(t-\tau)$  и значения  $C(j, n)$  для входного сигнала.

Для нелинейности типа *ограничение* дополнительная установившаяся ошибка определяется уравнением

$$\varepsilon_{н}(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} k(t-\tau)[C(j, n)\varphi(j, \tau, n) - b]d\tau \right\} \quad (16)$$

и может быть минимизирована, если выполнять условие  $C(j, n)\varphi(j, t, n) = b$  для каждого значения  $n$ . Для произвольного входного сигнала  $x_{вх}(t)$  на интервале существования  $0 \leq t \leq t_{кон}$  условие минимума  $\varepsilon_{н}(t)$  может быть выполнено в среднем  $M\{C(j, n)\varphi(j, t, n)\} = b$ .

Для нелинейности типа *зазор* дополнительная установившаяся ошибка определяется уравнением

$$\begin{aligned} \varepsilon_{н}(t) = & \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ C(j, n) \left( \int_{\frac{n}{2^j}}^{t_{кон}} k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau + \right. \right. \\ & + \left. \int_{t_0}^{t_{нач}} k(t-\tau)\varphi(j, \tau, n)d\tau - \int_{\frac{n}{2^j}}^t k(t-\tau)d\tau \right) + \\ & \left. + \frac{b}{2} \int_{t_{кон}}^{t_{нач}} k(t-\tau)d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Дополнительная установившаяся ошибка для данной нелинейности в отличие от зоны нечувствительности и ограничения при наличии входного сигнала равна нулю  $\varepsilon_{уст}(t) = 0$  и сохраняется при отсутствии входного сигнала  $\varepsilon_{уст}(\infty) = \frac{b}{2}$ .

## Исследование устойчивости следящих систем, включающих существенные нелинейности, с использованием вейвлет-преобразования

При анализе устойчивости следящих систем управления частотными методами используются гармонические сигналы, действующие при  $t \rightarrow \infty$ . В этом случае анализируется поведение системы в "большом". При анализе устойчивости "в малом" в соответствии с первым методом Ляпунова рассматривается устойчивость линеаризованной системы. Однако линеаризация существенных нелинейностей, рассмотренных выше, возможна только заменой их линейными звеньями. Поэтому для высокоточных и быстродействующих систем такая замена не дает точного представления об устойчивости и поведении нелинейной системы "в малом".

Исследование поведения системы "в малом" во временной области по реакции на ограниченное воздействие в виде потенциальной функции позволяет получать точное описание выходного сигнала и анализировать устойчивость замкнутой единичной обратной связью следящей системы. В качестве сигнала, по которому оценивается устойчивое состояние системы, примем воздействие в виде полуволны (3) (см. рис. 3). Параметр  $C$  для удобства анализа целесообразно принимать равным 1.

В качестве параметров, по которым будем оценивать устойчивость замкнутой следящей системы по реакции разомкнутой системы на воздействие в виде полуволны (см. рис. 3), принимаются следующие переменные. Параметр  $j$  является основным переменным параметром, относительно которого строятся коэффициент передачи модуля  $K(j)$  и относительное запаздывание  $T_3(j)$ . Относительное запаздывание  $T_3(j)$  представляет собой отношение реального запаздывания выходного сигнала  $\Delta t(j)$  к интервалу времени между максимумом и минимумом полуволны  $T(j)$  (см. рис. 3):

$$T_3(j) = \frac{\Delta t(j)}{T(j)}, \quad (18)$$

где  $T(j) = \frac{\Delta n}{2^j}$ . Коэффициент передачи  $K(j)$  представляет собой отношение максимального сигнала на выходе системы  $x_{\max}$  к  $C$ :

$$K(j) = \frac{x_{\max}}{C}. \quad (19)$$

Процедуры определения коэффициента передачи  $K(j)$  и относительного запаздывания  $T_3(j)$  можно выполнять графически, используя программу MATLAB-Simulink. Аналитически для определения коэффициента передачи  $K(j)$  и относительного запаздывания  $T_3(j)$  целесообразно использовать численные методы дифференцирования и определять значения  $x_{\max}$  и значение  $t$ , соответствующее  $x_{\max}$ . Первоначально рассмотрим реакции линейных звеньев на воздействие в виде полуволны.

## Реакция типовых линейных звеньев на воздействие в виде полуволны

Рассмотрим интегрирующее звено. Построим зависимости коэффициента передачи  $K(j)$  и относительное запаздывание  $T_3(j)$  при воздействии на интегрирующее звено сигнала вида (3). На рис. 8 приведен переходной процесс, а на рис. 9 построены зависимости  $K(j)$  и  $T_3(j)$  для интегрирующего звена.

Для интегрирующего звена запаздывание  $T_3(j)$  имеет постоянное значение, равное  $-0,5$ , не зависящее от  $j$ . Коэффициент передачи  $K(j)$  изменяется по убывающей экспоненте (рис. 9).

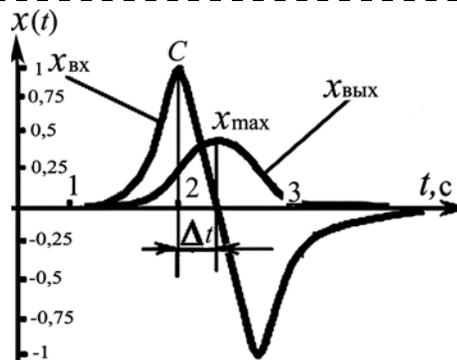


Рис. 8. Переходной процесс интегрирующего звена

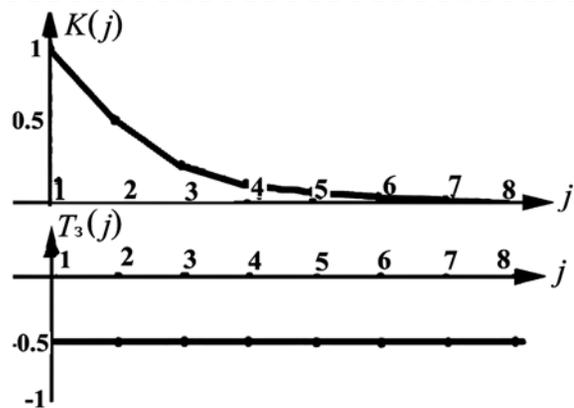


Рис. 9. Функциональные зависимости  $K(j)$  и  $T_3(j)$  для интегрирующего звена

На рис. 10 приведены переходные процессы и зависимости  $K(j)$ ,  $T_3(j)$  для типовых линейных звеньев на воздействие в виде полуволны (3).

### Анализ устойчивости замкнутой системы по реакции разомкнутой системы на типовое воздействие в виде полуволны

Рассмотрим устойчивость замкнутой следящей системы (рис. 11) по реакции разомкнутой системы на типовое воздействие вида (см. рис. 3). Для этого строится зависимость коэффициента передачи  $K(j)$  и относительное запаздывание  $T_3(j)$  для разомкнутой системы.

Для устойчивой системы в разомкнутом состоянии замкнутая система будет устойчива в том случае,

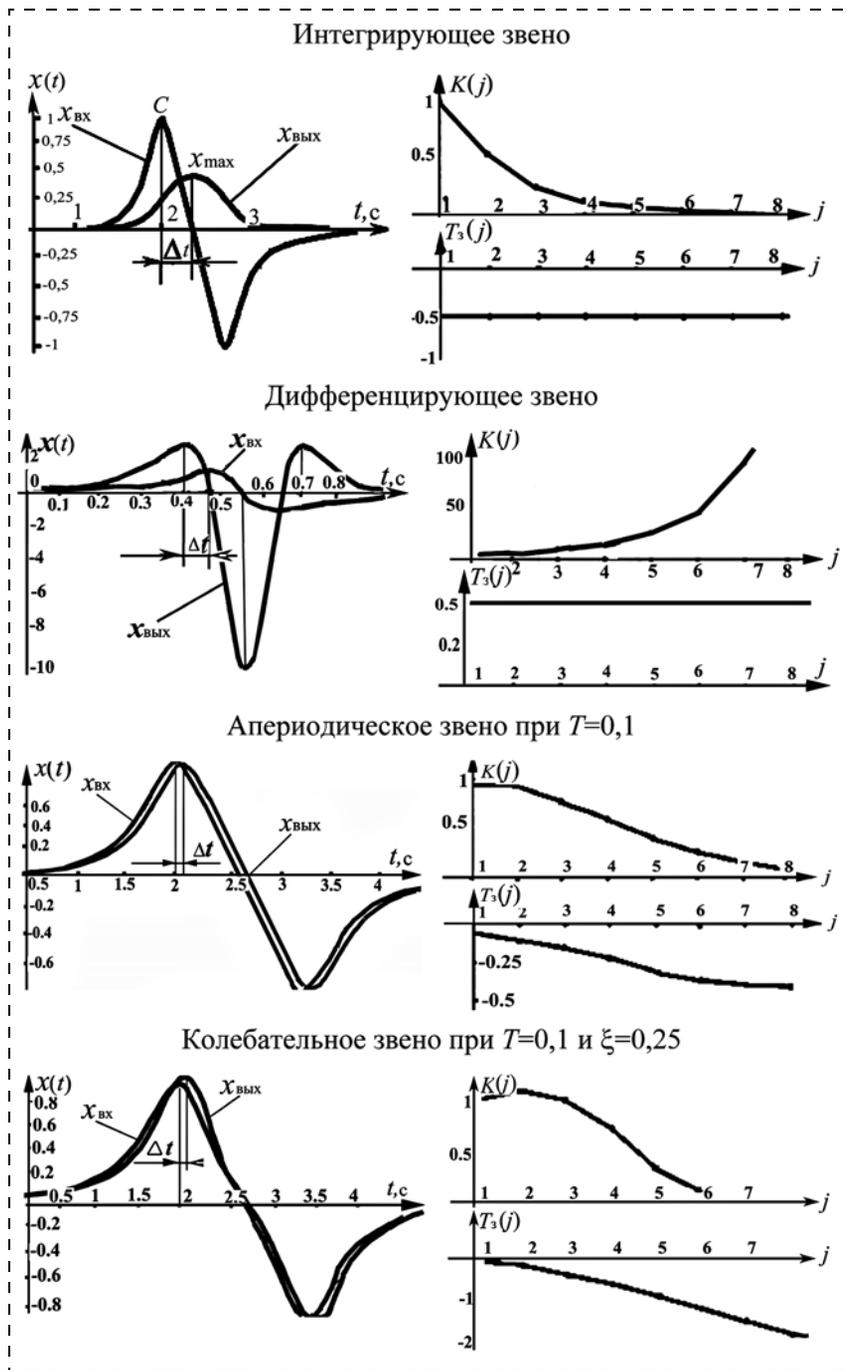


Рис. 10. Переходные процессы и зависимости  $K(j)$ ,  $T_3(j)$  для типовых линейных звеньев на воздействие в виде полуволны (3)

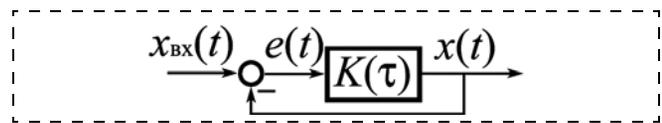


Рис. 11. Замкнутая следящая система, где  $e(t)$  — ошибка следящей системы,  $K(\tau)$  — оператор преобразования сигнала разомкнутой системы

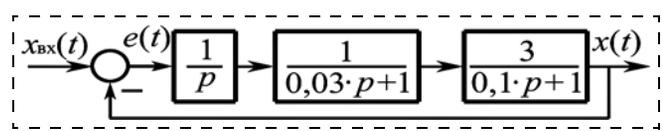


Рис. 12. Система, содержащая линейные звенья

если при изменении  $j$  график зависимости  $T_3(j) = \frac{\Delta t(j)}{T(j)}$  будет пересекать значение  $T_3(j) = -1$  правее точки пересечения  $K(j) = \frac{x_{\max}}{C} = 1$ , где  $T(j) = \frac{\Delta n}{j^2}$ .

Данное утверждение вытекает из свойства воздействия в виде полуволны, которая принимает симметрично положительное и отрицательное значения с периодом  $T(j)$ , а также из структуры следящей системы, замкнутой единичной отрицательной обратной связью.

Если при изменении  $j$  возникает условие, когда для значения  $j = j_3$  запаздывание  $T_3(j_3)$  входного сигнала в прямом тракте системы будет равно  $T_3(j_3) = T(j)$  (см. рис. 3), то выходной сигнал будет совпадать по фазе с отрицательной полуволной входного сигнала. В этом случае при наличии единичной отрицательной обратной связи, если коэффициент передачи  $K(j)$  для прямого тракта системы будет меньше 1, то выходной сигнал будет убывающим если  $K(j)$  больше 1, то выходной сигнал будет расходящимся. В первом случае замкнутая система будет устойчива, а во втором — неустойчива.

Таким образом, для неустойчивой системы в замкнутом состоянии при представлении произвольного входного сигнала в виде суммы потенциальных функций и вейвлетов будут слагаемые, которые приводят к расхождению выходного сигнала.

Первоначально рассмотрим анализ устойчивости замкнутой системы по реакции разомкнутой системы на входное воздействие вида (3) на примере одного модуля, содержащего только линейную часть, и для модуля, включающего существенную нелинейность.

Проверим данное утверждение первоначально на примере линейной системы.

**Пример 2.** Рассмотрим линейную систему (рис. 12), где оператор преобразования прямого тракта для линейной системы включает интегратор и два апериодических звена,  $p$  — оператор дифференцирования,  $1/p$  — оператор интегрирования.

Данная система устойчива в замкнутом состоянии, так как точка пересечения  $T_3(j) = -1$  находится правее точки пересечения  $K(j) = 1$  (рис. 13).

Если увеличить коэффициент  $K(j)$  до значения  $K(j) = 40$ , то система находится на границе устойчивости, а при  $K(j) = 45$  становится неустойчивой. Это следует из построенных характеристик для  $K(j)$  и  $T_3(j)$ . Для неустойчивой системы при изме-

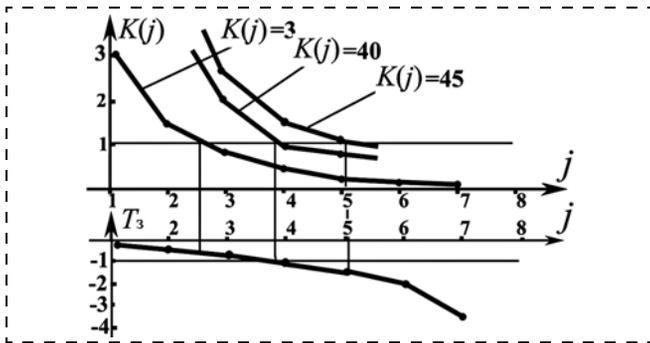


Рис. 13. Функциональные зависимости для  $K(j)$  и  $T_3(j)$  линейной системы (см. рис. 10)

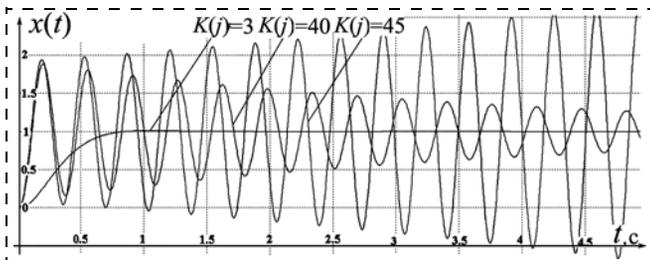


Рис. 14. Переходные процессы для замкнутой системы при единичном воздействии

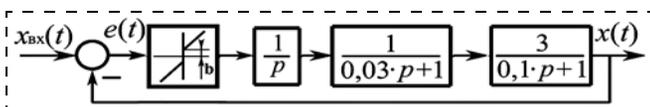


Рис. 15. Следящая система, содержащая линейные звенья и нелинейность типа "опережение"

нении  $j$  график  $T_3(j)$  пересекает значение  $T_3(j) = -1$  левее графика  $K(j)$  при значении  $K(j) = 1$ .

На рис. 14 приведены переходные процессы для замкнутой системы при единичном ступенчатом воздействии, из которых следует, что при  $T_3(j) = 45$  процесс становится расходящимся

Утверждение об устойчивости замкнутой следящей системы, изложенное выше только для линейных систем, справедливо и для следящих систем, содержащих существенные нелинейности. Данное утверждение объясняется тем, что устойчивость системы оценивается непосредственно по переходным процессам во временной области.

Рассмотрим пример системы, в которой кроме линейных звеньев содержится нелинейное звено.

**Пример 3.** Система, представленная на рис. 15, содержит нелинейность типа "опережение". Используя предложенный выше метод, оценим устойчивость замкнутой системы при введении нелинейности. Для этого построим зависимости  $K(j)$ ,  $T_3(j)$  и оценим устойчивость замкнутой системы с введенной нелинейностью, у которой  $b = 0,2$ . Как было показано в предыдущем примере, замкнутая система без нелинейности является устойчивой. Введение нелинейности типа "опережение" приводит к возникновению автоколебаний в замкнутой системе, так как график  $T_3(j)$  пересекает точку  $T_3(j) = -1$  при значении  $K(j) \cong 1$  (рис. 16). Следует отметить, что графики для  $T_3(j)$  для разомкнутой линейной



Рис. 16. Функциональные зависимости  $K(j)$  и  $T_3(j)$  для системы, включающей нелинейность типа "опережение" и системы, не содержащей нелинейность



Рис. 17. Переходной процесс замкнутой системы без нелинейного звена и содержащей нелинейность типа "опережение" при единичном воздействии

системы и для системы с введенной нелинейностью совпадают. Наличие автоколебаний в замкнутой системе с нелинейностью подтверждается переходным процессом замкнутой системы на постоянное входное воздействие (рис. 17).

## Заключение

Применение теории вейвлет-преобразований для анализа нелинейных систем позволяет исследовать сложные системы, содержащие существенные нелинейности, аналогично линейным системам. Предложенная методика анализа нелинейных систем имеет преимущество в сравнении с частотными методами, так как рассматривает процессы во временной области и позволяет аналитически исследовать ошибки и устойчивость следящих систем.

## Список литературы

1. Астафьева Н. М. Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук. 1998. Т. 166, № 11. С. 1145–1170.
2. Афонин В. Л., Чепелев В. М. Метод потенциальных функций для построения вейвлет-рядов // Изв. РАН. ТиСУ. 2008. № 2. С. 104–114.
3. Афонин В. Л., Чепелев В. М. Вейвлет-преобразования на основе потенциальных функций в задачах распознавания образов // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. 94–105.
4. Афонин В. Л., Кондратьев И. М. Применение аппарата вейвлет-разложений для анализа и оценки шероховатости поверхности детали при механической обработке // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2013. № 3. С. 65–70.

5. **Воробьев В. И., Грибунин В. Г.** Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: Изд-во ВУС, 1999.
6. **Добешин И.** Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: РХД, 2001.
7. **Дьяконов В. П.** Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН—Пресс, 2004. 400 с.
8. **Смоленцев Н. К.** Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. М.: ДМК Пресс, 2005. 304 с.
9. **Чуи К.** Введение в вейвлеты. Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. М.: Мир, 2001. 412 с.
10. **Afonin V. L., Sakharova E. I.** Estimation Plane Image Feature Attributes using Wavelet Transform Coefficients // *Engineering & Automation Problems*. 2010. N. 1. P. 82—84.
11. **Dinggang Shen, Horace H. S. Ip.** Discriminative wavelet shape descriptors for recognition of 2-D patterns // *Pattern Recognition*. 1999. V. 32. P. 151—165.
12. **Canuto C., Tabacco A., Urban K.** The Wavelet Element Method. Part II: Realization and Additional Features in 2D and 3D // *NASA/CR—1998—207637, ICASE Report No.* P. 98—117.
13. **Chun—Te Li, Jiang Li, Shizhuo Yin et al.** Synthesize multi-level composite filter for synthetic-aperture radar image identification // *Optics Communications*. 1998. V. 146. P. 285—301.
14. **Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Э.** Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.
15. **Попов Е. П.** Теория нелинейных систем автоматического управления и регулирования: учеб. пособ. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1988. 256 с.
16. **Воронцов А. А.** Основы теории автоматического управления. М.-Л.: Энергия, 1965. 396 с.
17. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике. М.: Наука, 1970. 720 с.

## Wavelet Transform Method in Applications to the Analysis of the Nonlinear Control Systems

V. L. Afonin, afoninwl@rambler.ru✉,

Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute,  
Russian Academy of Sciences, Moscow, 101990, Russian Federation

Corresponding author: **Afonin Vyacheslav L.**, D. Sc., Professor, Chief Researcher, Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Science, Moscow, 101990, Russian Federation, e-mail: afoninwl@rambler.ru

Received on October 03, 2016

Accepted on November 11, 2016

*The article is devoted to the theory of Wavelet—transformations with reference to the analysis and synthesis of the dynamic characteristics of the control systems containing an essential nonlinearity of the type of the zone of tolerance, restriction, backlash, etc. of nonlinearity. In the presented work a possibility of application of a device of the theory of Wavelet—transformations for the analysis and synthesis of the dynamic characteristics of the control systems containing essential nonlinearity is considered. A scaling function and wavelet potential function are proposed. The given device has an advantage in comparison with the frequency methods, because it takes into account the processes in the time area. Reactions of the linear systems, including essential nonlinearity, to the influence of a kind of potential function and wavelet are investigated. Errors in the established mode, because of the essential nonlinearities in the tracking system are considered under the influence of the signals representing a Wavelet—number, made of potential functions and wavelet. The condition of stability of the closed-loop system to reaction of the open-loop on the typical influence in the form of a half wave is formulated. The given condition allows us to analyze the stability of the tracking system containing an essential nonlinearity. For this purpose the dependence of the factor of transfer  $K(j)$  and the relative delay  $T_3(j)$  for the open-loop system, where parameter  $j$  characterizes the width of a half wave, is formed. Application of the theory of Wavelet—transformations for the analysis of the nonlinear systems allows us to investigate the complex systems containing the essential nonlinearity as similarly linear systems. The proposed technique of analysis of the nonlinear systems has an advantage in comparison with the frequency methods, because it considers the processes in the time area and allows us to investigate analytically the errors and stability of the tracking systems.*

**Keywords:** Wavelet Transform, potential functions, essential nonlinearity, zone of tolerance, restriction, backlash, analysis and synthesis of the nonlinear systems

For citation:

**Afonin V. L.** Wavelet Transform Method in Applications to the Analysis of the Nonlinear Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 308—316.

DOI: 10.17587/mau.18.308-316

### References

1. **Astafiev N. M.** *Successes of Physical Sciences*, 1998, vol. 166, no. 11, pp. 1145—1170 (in Russian).
2. **Afonin V. L., Shepelev V. M.** *News of the Russian Academy of sciences. The theory and control stems*, 2008, no. 2, pp. 104—114 (in Russian).
3. **Afonin V. L., Shepelev V. M.** *News of the Russian Academy of sciences. The theory and control systems*, 2009, no. 6, pp. 94—105 (in Russian).
4. **Afonin V. L., Kondratiev I. M.** *Engineering & Automation Problems*, 2013, no. 3, pp. 65—70 (in Russian).
5. **Vorobiev V. I., Gribov V. G.** The theory and practice of Wavelet-transformation, SPb., Publishing house of VUS, 1999 (in Russian).
6. **Dobeshin I.** Ten lectures on of Wavelet, Moscow-Igevs, RHCD, 2001 (in Russian).
7. **Diecov V. P.** Wavelet. From the theory to practice, Moscow, COLON-Press, 2004, 400 p. (in Russian).
8. **Smolensceev N. K.** Bases of the theory Wavelet. Wavelet in MATLAB, Moscow, DMK-Press, 2005, 304 p. (in Russian).
9. **Schui K.** Introduction in Wavelet, Moscow, Mir, 2001, 412 p. (in Russian).
10. **Afonin V. L., Sakharova E. I.** *Engineering & Automation Problems*, 2010, no. 1, pp. 82—84 (in Russian).
11. **Dinggang Shen, Horace H. S. Ip.** *Pattern Recognition*, 1999, vol. 32, pp. 151—165.
12. **Canuto Claudio, Tabacco Anita, Urban Karsten.** The Wavelet Element Method. Part II: Realization and Additional Features in 2D and 3D, NASA/CR—1998—207637, ICASE Report No, pp. 98—117.
13. **Chun—Te Li, Jiang Li, Shizhuo Yin et al.** *Optics Communications*, 1998, vol. 146, pp. 285—301.
14. **Andronov A. A., Vit A. A., Khaikin S. E.** *Teoriya kolebanii (Theor of fluctuations)*, Moscow, Physic Mathem State Publishing, 1959, 915 p. (in Russian).
15. **Popov E. P.** *Teoriya nelineynykh sistem avtomaticheskogo upravleniya i regulirovaniya (Theor's priests of nonlinear systems of automatic control and regulation)*, Moscow, Nauka, The main edition. Fis.-mat. Lit, 1988, 256 p. (in Russian).
16. **Voronov A. A.** *Osnovy teorii avtomaticheskogo upravleniya (Bas's ravens of the theory of automatic control)*, Moscow—Leningrad, Energy, 1965, 396 p. (in Russian).
17. **Corn G., Corn T.** *Spravochnik po matematike (The directory on the mathematician)*, Moscow, Nauka, 1970, 720 p. (in Russian).

**С. Л. Зенкевич**, д-р физ.-мат. наук, проф., mr.zenkev@mail.ru,

**А. В. Назарова**, канд. техн. наук, доц., avn@bmstu.ru, **Хуа Чжу**, аспирант, zhuhua1302@gmail.com,  
Научно-учебный центр "Робототехника" МГТУ им. Н. Э. Баумана

## Моделирование и анализ движения группы мобильных роботов в среде ROS

*Решена задача моделирования движения группы мобильных роботов в среде ROS при отсутствии препятствий. Рассмотрены три типа поведения группы роботов при движении: синхронизация запуска роботов, движение группы роботов- "жуков", движение группы роботов в строю типа "конвой". Проанализированы характеристики движения группы мобильных роботов и исследованы проблемы при осуществлении таких видов движения.*

**Ключевые слова:** моделирование, движение, группа роботов, ROS

### Введение

За последние два десятилетия огромное внимание уделяется исследованиям в областях групповой робототехники. Преимущества использования групп мобильных роботов очевидны. Во-первых, это больший радиус действия, во-вторых, расширенный набор выполняемых функций и, наконец, более высокая вероятность выполнения задания, достигаемая за счет возможности перераспределения целей между роботами группы в случае выхода из строя некоторых из них.

Большая часть исследований в области групповой робототехники направлена на изучение коллективного поведения групп роботов и, прежде всего, на координацию движения. Моделирование движения группы мобильных роботов является актуальным, поскольку построение универсальной математической модели группы роботов затруднительно [1], а проведение натурных экспериментов по групповой робототехнике является технически сложной задачей.

ROS (Robot Operating System, операционная система для роботов) — это одна из основных сред для программирования роботов, предоставляющая возможность моделирования поведения распределенных робототехнических систем [7]. ROS была первоначально разработана в 2007 г. под названием *Switchyard* в Лаборатории искусственного интеллекта Стэнфордского Университета для проекта STAIR. В 2008 г. развитие продолжилось в научно-исследовательском институте робототехники Willow Garage. ROS имеет две основные особенности: будучи, с одной стороны, специализированной операционной системой, она предлагает набор поддерживаемых пользователями пакетов, которые реализуют различные функции, например, SLAM, планирование, восприятие, моделирование и др.

В данной статье рассматривается моделирование движения группы однотипных мобильных роботов в среде ROS с использованием пакета *stage\_ros*.

### 1. Модель каждого робота строя

Исследуемый мобильный робот  $R_i$  перемещается в плоскости  $OXY$ , имея два симметрично расположенных ведущих колеса, левое и правое, а также одно (или более) пассивное колесо (рис. 1). Свяжем с роботом систему координат  $O_iX_iY_i$ , выбрав в качестве начала системы точку  $O_i$ , лежащую посередине отрезка, соединяющего центры колес, ось  $X_i$  направим перпендикулярно этому отрезку, а ось  $Y_i$  направим так, чтобы получилась правая система координат. При моделировании приняты следующие ограничения: отсутствуют продольное и боковое проскальзывания между колесами и плоскостью. В этом предположении вектор линейной скорости направлен вдоль оси  $X_i$ , и кинематические уравнения движения имеют вид [2]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & 0 \\ \sin\theta_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ \omega_i \end{pmatrix}, \quad (1)$$

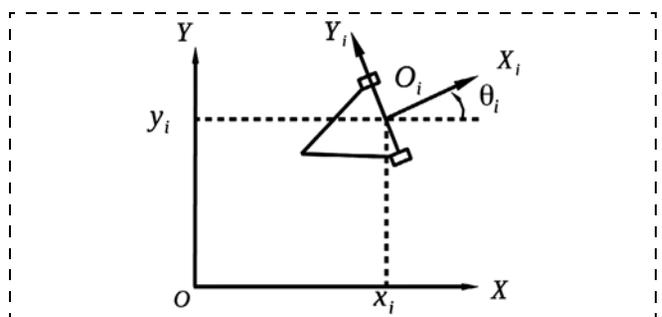


Рис. 1. Мобильный робот  $R_i$

где  $x_i, y_i, \theta_i$  — положение и ориентация робота,  $\omega_i$  — угловая скорость робота, а  $v_i$  — линейная скорость начала связанной системы координат. При моделировании в среде ROS  $v_i$  и  $\omega_i$  представляют собой сигналы управления роботами.

Рассмотрим три типа движения мобильных роботов.

## 2. Моделирование запуска мобильных роботов при централизованном и децентрализованном способах управления группой

**Задача.** Пусть имеется  $n$  мобильных роботов в группе, требуется запустить все роботы приблизительно одновременно.

**Решение.** При централизованном способе управления каждый мобильный робот передает свое сообщение "готов" центру управления. Когда все роботы готовы, центр управления передает сообщение "поехали" каждому роботу, и все роботы начинают двигаться. При децентрализованном управлении каждый мобильный робот передает всем остальным свое сообщение "готов". Все роботы начинают двигаться, когда каждый из них получил  $n$  сообщений "готов".

**Моделирование:** в среде ROS моделируем запуск четырех мобильных роботов. Каждому роботу соответствует процесс `/sync_robot_i`. При централизованном управлении (рис. 2, а) между процессами `/sync_robot_i` и `/centralized_monitor` передаются сообщения `/robot_status` и `/team_status`. В сообщении `/robot_status` содержится информация об идентификации и состоянии робота. В сообщении `/team_status` содержится информация о состоянии группы роботов. При децентрализованном способе (рис. 2, б) только процессы `/sync_robot_i` обмениваются сообщениями друг с другом.

## 3. Моделирование движения мобильных роботов-"жуков"

**Задача.** Рассмотрим группу из четырех однородных мобильных роботов (назовем их роботами-жуками)  $R_0, R_1, R_2, R_3$ . Каждый робот находится в вершине квадрата. Первоначально вектор направления движения робота совпадает со стороной квадрата. При движении каждый мобильный робот перемещается по направлению к соседнему роботу. Требуется исследовать характеристики движения роботов.

**Решение.** Уравнение движения роботов имеет вид (1), в этом случае, выбираем  $v_i = \text{const}$ ,  $\omega_i = k(\arctg2(y_j - y_i, x_j - x_i) - \theta_i)$ , где  $i = 0, 1, 2, 3, j = (i + 1)$  при  $i = 0, 1, 2; j = 0$  при  $i = 3; k$  — параметр регулирования.

**Моделирование.** При программировании в среде ROS используется эмулятор Stage. Начальное положение роботов задается как  $R_0(-10, 0, -45^\circ)$ ,  $R_1(0; -10; 45^\circ)$ ,  $R_2(10, 0, 135^\circ)$ ,  $R_3(0, 10, -135^\circ)$ . Как и в предыдущей задаче, каждый робот имеет собственный процесс. При моделировании предполагаем, что известно положение робота в абсолютной системе координат  $OXY$ , линейная скорость робота равна 1 м/с.

**Результат и анализ.** В процессе моделирования в эмуляторе Stage получаем траектории движения четырех мобильных роботов при параметре регулирования  $k = 0,5$ . Положение и угловая скорость робота  $R_0$  показаны на рис. 3. Рис. 4 (см. вторую сторону обложки) показывает, что через определенное время четыре робота начинают двигаться приблизительно по окружности с радиусом  $R$ .

Выбирая различные параметры регулирования  $k$ , получаем различные "финальные" радиусы движения  $R$  (табл. 1).

Таблица 1

Зависимость радиуса окружности от параметров регулирования  $k$

$k$	0,3	0,5	1,0	1,5	2	10
$R, \text{ м}$	4,3	2,7	1,4	1	0,63	Столкновение

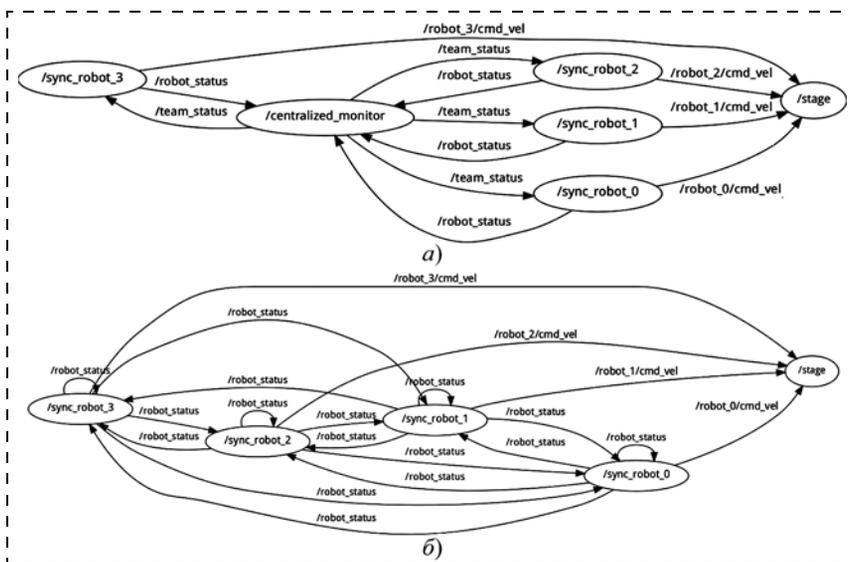


Рис. 2. Вычислительный граф узла (nodes) ROS при: а — централизованном управлении; б — децентрализованном управлении

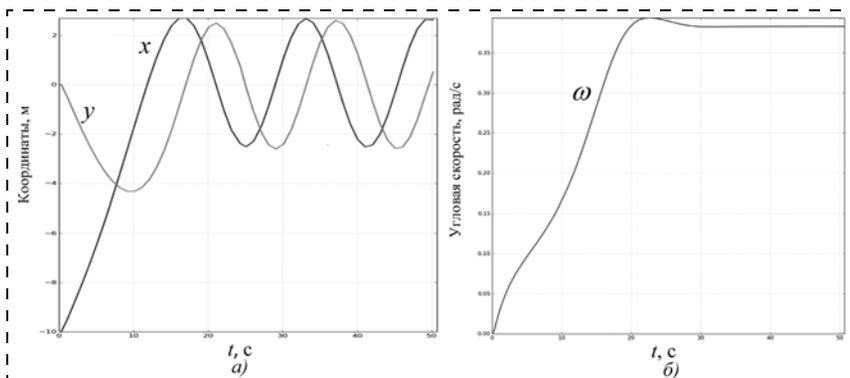


Рис. 3. Положение и угловая скорость робота  $R_0$

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1) четыре робота движутся друг к другу, но начиная с определенного момента начинают перемещаться по окружности и никогда не встречаются, кроме столкновения роботов при большом  $k$ ;

2) радиус окружности, по которой роботы движутся, зависит от параметров регулирования  $k$ . Чем больше  $k$ , тем меньше радиус окружности  $R$ .

#### 4. Моделирование и анализ движения мобильных роботов в строю типа "конвой"

**Задача.** Пусть имеется группа из  $n$  мобильных роботов. Один из них является ведущим роботом  $R_0$ , оснащенным более богатыми сенсорными устройствами, позволяющими ему автономно двигаться в неопределенной среде, а остальные роботы  $R_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) только повторяют его траекторию. Требуется, чтобы траектории всех роботов максимально совпадали при условии обеспечения безопасной дистанции между роботами.

**Решение.** Это задача подражательного поведения. Реализация подражания неизбежно требует решения следующих задач [3]:

1. Распознавание "своих", т. е. выявление объектов для подражания.

2. Определение действий "своих", которым следует подражать. Иными словами, робот должен знать, что делает его окружение, т. е. уметь распознать действия "своих".

3. Копирование такого же действия.

При моделировании движения роботов в строю предполагаем, что каждый робот  $R_i$  подражает поведению робота  $R_{i-1}$ , для этого они должны узнавать положения и скорости других роботов. Задача состоит в нахождении алгоритма управления каждым роботом. Рассмотрим три алгоритма вычислительной скорости ведомых роботов.

• **Алгоритм 1.** Решение задачи стабилизации или следования

Линейная скорость робота  $R_i$ :

$$v_i = k_v \sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2}.$$

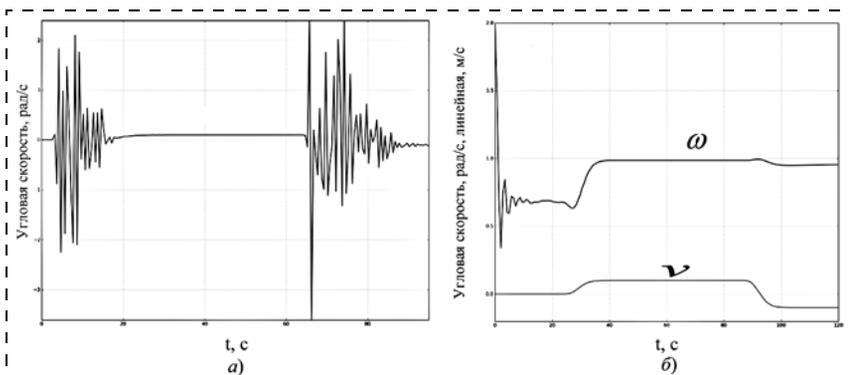


Рис. 6. Угловая скорость робота  $R_{10}$  по алгоритму 2 (а); скорость робота  $R_{10}$  по алгоритму 3 (б)

Угловая скорость робота:

$$\omega_i = k_\omega (\arctg 2(y_{i-1} - y_i, x_{i-1} - x_i) - \theta_i),$$

где  $k_v, k_\omega$  — параметр регулирования (одинаковы для алгоритмов 2 и 3).

• **Алгоритм 2** [4]. *Аппроксимация траектории кривой Безье*

Линейная скорость робота:  $v_i = v_{i-1}$ .

Вычисление координаты  $(x, y, \phi)$  "своих" в собственной системе координат робота  $R_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$\begin{cases} x = (x_{i-1} - x_i) \cos \theta_i + (y_{i-1} - y_i) \sin \theta_i; \\ y = -(x_{i-1} - x_i) \sin \theta_i + (y_{i-1} - y_i) \cos \theta_i; \\ \phi = \theta_{i-1} - \theta_i. \end{cases}$$

Вычисление параметра кубической кривой Безье:

$$d = \frac{2}{3} \sqrt{2} (\sqrt{2} - 1) \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Определение параметра регулирования  $k_\omega$ :

$$k_\omega = \frac{2(y - d \sin \phi)}{3d^2}.$$

Определение угловой скорости робота:  $\omega_i = k_\omega v_i$ .

• **Алгоритм 3** [5]. *Робот  $R_i$  движется с некоторым временным запаздыванием  $T$  по траектории, вдоль которой двигался робот  $R_{i-1}$*

Линейная скорость робота:

$$v_i = k_v ((x_{i-1}(t - T) - x_i(t)) \cos \theta_i(t) + (y_{i-1}(t - T) - y_i(t)) \sin \theta_i(t)).$$

Угловая скорость робота:

$$\omega_i = k_\omega (\theta_{i-1}(t - T) - \theta_i(t)).$$

**Моделирование.** При программировании в среде ROS используется эмулятор Stage. Моделируется движение "конвоя" из одиннадцати роботов. Ведущий робот  $R_0$  совершает движение с постоянной линейной скоростью  $v_i = 5$  м/с и угловой скоростью  $\omega_i = 0,1$  рад/с при  $t < 62,8$  с,  $\omega_i = -0,1$  рад/с при  $t > 62,8$  с, т. е. движется по траектории типа "восьмерка". Скорость остальных роботов вычисляется с использованием одного из алгоритмов 1, 2 или 3.

**Результат и анализ.** В эмуляторе Stage (рис. 5, см. вторую сторону обложки) получены траектории движения одиннадцати мобильных роботов при  $k_v = 4, k_\omega = 0,5$  с использованием алгоритма 1 и при  $k_v = 1, k_\omega = 1, T = 2$  с использованием алгоритма 3.

На рис. 6 представлены графики изменения скорости последнего в конвое робота ( $R_{10}$ ) при реализации алгоритмов 2 (рис. 6, а) и 3 (рис. 6, б).

Сравнение результатов моделирования (табл. 2) при различных траекториях движения позволяет

Сравнение трех алгоритмов

Характеристики	Алгоритм 1	Алгоритм 2	Алгоритм 3
Отклонение между траекториями роботов Характер изменения скоростей последующих роботов	10 %	3 % Колебательный	3 % Апериодический

сделать вывод, что алгоритм 3 имеет преимущества при управлении движением роботов в строю.

### Заключение

Дальнейшая работа состоит в реализации движения группы мобильных роботов в реальной среде. При проведении эксперимента по исследованию движения группы роботов необходимо решить следующие проблемы:

1. Коммуникация между роботами, которая является одним из необходимых условий обеспечения коллективных согласованных действий роботов.

2. Способ локализации мобильных роботов в составе группы. Хотя в настоящее время существу-

ют различные методы локализации для отдельного робота, например, SLAM и визуальная одометрия, необходимо исследовать способы определения положения роботов в группе.

3. Влияние шумов датчиков на точность следования требуемой траектории движения.

### Список литературы

1. **Hamann H., Wörn H.** A framework of space-time continuous models for algorithm in swarm robotics // *Swarm Intelligence*. 2008. № 7. P. 209–239.
2. **Зенкевич С. Л., Назарова А. В.** Система управления мобильного робота // *Вестник МГТУ. Сер. "Приборостроение"*. 2006. № 3. С. 31–51.
3. **Карпов В. Э.** Коллективное поведение роботов. Желаемое и действительное // *Современная мехатроника. Сб. научн. трудов Всероссийской научной школы (г. Орехово-Зуево, 22–23 сентября 2011)*. 2011. С. 35–51.
4. **Chiem S., Cervera E.** Vision-based robot formations with Bezier trajectories // *Proc. Of Intelligent and Autonomous Robots*. 2004. P. 191–198.
5. **Зенкевич С. Л., Чжу Хуа.** Управление движением группы роботов в строю типа "конвой" // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2017. Т. 18, № 1. С. 30–34.
6. **Reynolds C. W.** Steering Behaviors for Autonomous Characters // *Proc. of Game Developers Conference. San Jose (USA)*. 1999. P. 763–782.
7. URL: [www.ros.org](http://www.ros.org)

## Simulation and Analysis of the Movement of a Group of Mobile Robots in ROS

**S. L. Zenkevich**, [mr.zenkev@mail.ru](mailto:mr.zenkev@mail.ru), **A. V. Nazarova**, [avn@bmstu.ru](mailto:avn@bmstu.ru), **Hua Zhu**, [zhuhua1302@gmail.com](mailto:zhuhua1302@gmail.com),  
Robotics Training-Research Center, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: **Zhu Hua**, Ph. D., Robotics Training-Research Center, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: [zhuhua1302@gmail.com](mailto:zhuhua1302@gmail.com)

Received on April 25, 2016

Accepted on May 11, 2016

*The paper presents a simulation of a group movement of mobile robots in absence of obstacles in ROS and a kinematics model of the mobile robots used in the simulation. Three types of motion behavior of the mobile robots in a group were considered. First, the authors achieved a synchronization of the mobile robots in a group using the centralized method, which requires a control center, and the decentralized method, in which the mobile robots in a group communicate with each other. Second, the authors simulated movement of four mobile robots in Zhukov forms, when each robot was controlled according to the relative position of the two neighboring robots. Different trajectories of the mobile robots were obtained depending on the selected control parameters. The authors analyzed the relation between the control parameters and the resulting trajectories. Finally, the authors simulated movement of a group of the mobile robots in a convoy type of formation. Three different control algorithms were considered. The authors analyzed and compared the trajectories of the mobile robots moving in the convoy type of formation using three different control algorithms. The advantages and disadvantages of the three control algorithms were presented. The authors discussed a range of problems, which could be encountered when conducting physical experiments, for example, communication between the robots, the process of localization of the mobile robots in a group, and the impact of a sensor noise.*

**Keywords:** simulation, movement, group, mobile robots, synchronization, convoy, ROS

For citation:

**Zenkevich S. L., Nazarova A. V., Zhu Hua.** Simulation and Analysis of the Movement of a Group of Mobile Robots in ROS, *Mekhatronika, Avtomatizacia, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no 5, pp. 317–320.

DOI: 10.17587/mau.18.317-320

### References

1. **Hamann H., Wörn H.** A framework of space-time continuous models for algorithm in swarm robotics, *Swarm Intelligence*, 2008, no. 7, pp. 209–239.
2. **Zenkevich S. L., Nazarova A. V.** Sistema upravlenija mobil'nogo robota (System of control mobile robot), *Journal of Bauman Moscow State Technical University, series "Instrumentation"*, 2006, no. 3, pp. 31–51 (in Russian).

3. **Karpov V. E.** Kollektivnoe povedenie robotov (Collective behavior of robots). *Zhelaemoe i dejstvitel'noe, Sovremennaja mehatronika. Sb. nauchn. trudov Vserossijskoj nauchnoj shkoly (g. Orekhovo-Zuevo, 22–23 sentjabrja 2011)*, 2011, pp. 35–51 (in Russian).

4. **Chiem S., Cervera E.** Vision-based robot formations with Bezier trajectories, *Proc. Of Intelligent and Autonomous Robots*, 2004, pp. 191–198.

5. **Zenkevich S. L., Zhu Hua.** Upravlenie dvizheniem gruppy robotov v stroju tipa "konvoj" (Control of a group of mobile robots moving in the convoy type formation), *Mekhatronika, Avtomatizacia, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 1, pp. 30–34 (in Russian).

6. **Reynolds C. W.** Steering Behaviors for Autonomous Characters, *Proceedings of Game Developers Conference, San Jose (USA)*, 1999, pp. 763–782.

7. Available at: [www.ros.org](http://www.ros.org)

**А. С. Кодяков**, магистр, kodyakovandrey@gmail.com,

**Н. А. Павлюк**, мл. науч. сотр., antei.hasgard@gmail.com,

**В. Ю. Будков**, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., budkov@iias.spb.su,

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук,  
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

## Исследование устойчивости конструкции антропоморфного робота Антарес при воздействии внешней нагрузки<sup>1</sup>

*Рассматривается поведение основных конструктивных элементов нижних конечностей антропоморфного робота Антарес под воздействием на них различных видов нагрузок (скручивание, излом). В процессе проведения исследования определены требуемые значения моментов вращения для сервоприводов, необходимые для перемещения робота в пространстве. Определены максимальные значения моментов вращения, которые способны выдержать конструкции голени и бедра, равные  $5 \text{ Н} \cdot \text{м}$  и  $5,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$  соответственно.*

**Ключевые слова:** антропоморфные роботы, конструкции деталей, анализ прочности, сервоприводы, моделирование нагрузки, нижние конечности, голень, бедро, кинематика

### Введение

Современные разработки в области антропоморфной робототехники направлены на приближение характеристик движения робота к кинематике человеческого тела [1–3]. Проблема повышенного энергопотребления при реализации кинематики антропоморфного робота частично решается за счет снижения массы конструкции. В связи с этим особый интерес представляют разработки, связанные с исследованием устойчивости конструкций и способности материалов выдерживать заданные нагрузки [4–7].

Одна из простейших конструкций двуногого робота описана в работе [8]. Он собран из двухмиллиметрового листового алюминия, включает шесть сервоприводов, управляется контроллером EyeBot и имеет массу 1,11 кг. При ходьбе робот достигает скорости 120 м/ч при максимальном угле между бедрами  $60^\circ$ . Подобная конструкция робота с шестью сервоприводами применена в работе [9] для исследования рабочих углов соединений колена, лодыжки, бедра.

Антропоморфный робот серии HanSaRam, регулярно участвующий в футбольной лиге роботов FIRA с 2000 г., обсуждается в работе [10]. Робот HanSaRam версии HSR-VIII имеет 28 приводов, имеет массу 5,5 кг и развивает скорость до 12 см/с.

В работе [11] рассматривается антропоморфный робот Lola, имеющий конструкцию ног с 7 степенями свободы, массу 55 кг при росте 180 см. Обсуждается проблема устойчивости робота после остановки, а также поэтапное соприкосновение частей ступни с поверхностью во время ходьбы.

Домашний ассистивный робот с 14 приводами и 16 степенями свободы, представленный в работе [12], имеет антропоморфную конструкцию только верх-

ней части тела и колесную базу. Основное внимание в работе уделено манипуляции предметом двумя руками роботов при перемещении домашних объектов.

Антропоморфный робот SWUMANOID ростом 92 см, использующий в конструкции 24 сервопривода серии Dupaixel, рассмотренный в исследовании [13], разработан для моделирования движений и плавания в воде. Нестабильное качение тела робота в воде осложняет расчет кинематики движений плывущего робота, состоящего из 21 составного конструктивного элемента.

В работе [14] предложена оригинальная программная платформа для моделирования кинематической схемы движения ног антропоморфных роботов, где элементы ног рассматриваются как последовательно соединенные детали, а для решения прямой и обратной задач движения ног применяются рекурсивные алгоритмы с пониженной вычислительной сложностью.

Для движения по сложным неровным поверхностям, не проходимым для гусеничных или колесных роботов, также ведутся разработки более сложных не антропоморфных конструкций с одной [15], четырьмя [16], шестью [17, 18] и большим числом нижних конечностей [19].

### 1. Обобщенная структурная модель антропоморфного робота Антарес

В данной работе проведено исследование основных конструктивных элементов нижних конечностей антропоморфного робота Антарес (рис. 1) на предмет устойчивости при воздействии внешних сил, таких как прямолинейная сила и скручивание. В ходе работы решались следующие задачи:

- 1) анализ движения нижних конечностей;
- 2) моделирование воздействия внешней нагрузки к составным элементам конструкции робота.

Вследствие использования легковесных материалов двигателя потребляют меньше энергии. В конст-

<sup>1</sup> Исследование выполнено при частичной поддержке бюджетной темы № 0073-2015-0005 и РНФ (грант № 16-19-00044).

рукции робота Антарес используются сервоприводы МХ-64Т и МХ-28 фирмы Dynamixel, шестерни выполнены из металла, что позволяет реализовать движения с заданной точностью и запасом по прочности.

Модульная конструкция робота позволяет управлять движением любой конечности независимо от остальной части тела, практически не влияя на производительность [20, 21]. Конструкция специально рассчитана на установку дополнительных датчиков и прокладку соединительных проводов. Также подобный дизайн облегчает периодическое техническое обслуживание робота. Расчетная высота робота составляет 100 см, а масса равна 6 кг.

В ходе моделирования сборки нижних конечностей подвергались двум видам нагрузок — были приложены момент вращения и "прямая сила" в трех направлениях: вертикальном (перпендикулярном поперечной плоскости), боковом по нормали к фронтальной плоскости и боковом перпендикулярно сагиттальной плоскости. (Под термином "сборка" подразумевается набор деталей, которые собраны в конструкцию, в сборку входят пластины, стяжки (алюминиевые стойки диаметром 6 мм и длиной 47 мм, с отверстиями на торцах для вкручивания в нее винтов М2,5) и поперечные пластины (ребра жесткости).) Для проверки ноги на скручивание (рис. 2, см. вторую сторону обложки) была смоделирована ситуация, когда робот находится в положении лежа и стопы упираются в поверхность пола внутренней частью стопы.

В процессе исследования определены требуемые значения моментов вращения для сервоприводов, необходимые для перемещения робота в пространстве. Направление прикладываемой силы выбрано исходя из того, что данная сила будет иметь свое максимальное значение, когда нога будет находиться в положении "сидя", следовательно, направление будет направлено по нормали к сагиттальной плоскости ноги. В результате в ходе моделирования были определены моменты вращения выходного вала двигателя в узлах ноги робота: в голеностопном, коленном и тазобедренном суставах.

Проведение исследования на прочность прошло следующим образом:

1. Способом крепления сборки был выбран способ крепления только на одной пластине, в месте крепления пластины к двигателю посредством подшипника. Так как вал двигателя находится с одной стороны, следовательно, момент вращения вала сервопривода будет приходиться на одну пластину.

2. В качестве внешней нагрузки выступает вес конструкции робота, который составляет 20 Н на одну ногу целиком и направлен перпендикулярно фронтальной плоскости голени (бедр).

В процессе опыта было выяснено, что конструкция голени способна выдержать  $5 \text{ Н} \cdot \text{м}$  момента вращения вала двигателя при нагрузке 20 Н, когда робот выполняет подъем из положения "сидя". Для бедра ситуация аналогична, за исключением того, что конструкция бедра выдерживает  $5,2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

В ходе моделирования было определено, что для перевода робота из положения "сидя" в положение "стоя" требуется момент вращения, в 2,4 раза меньший максимально развиваемого сервоприводом в штатном режиме работы. Также моделирование показало, что конструкция ноги способна выдержать максимальный момент вращения двигателя. На основании этих данных был сделан вывод, что робот способен без повреждений и деформаций выполнить прыжок в вертикальной плоскости, что позднее успешно подтвердилось в ходе испытаний на стенде.

## 2. Анализ движения нижних конечностей

При анализе движения выполняется пространственное моделирование в условиях, приближенных к реальным, и считывание показаний с датчиков, на основании которых делаются соответствующие выводы. Модель робота, представленная на рис. 1, имеет нумерацию сервоприводов, для которых будет проводиться анализ движения по ме-

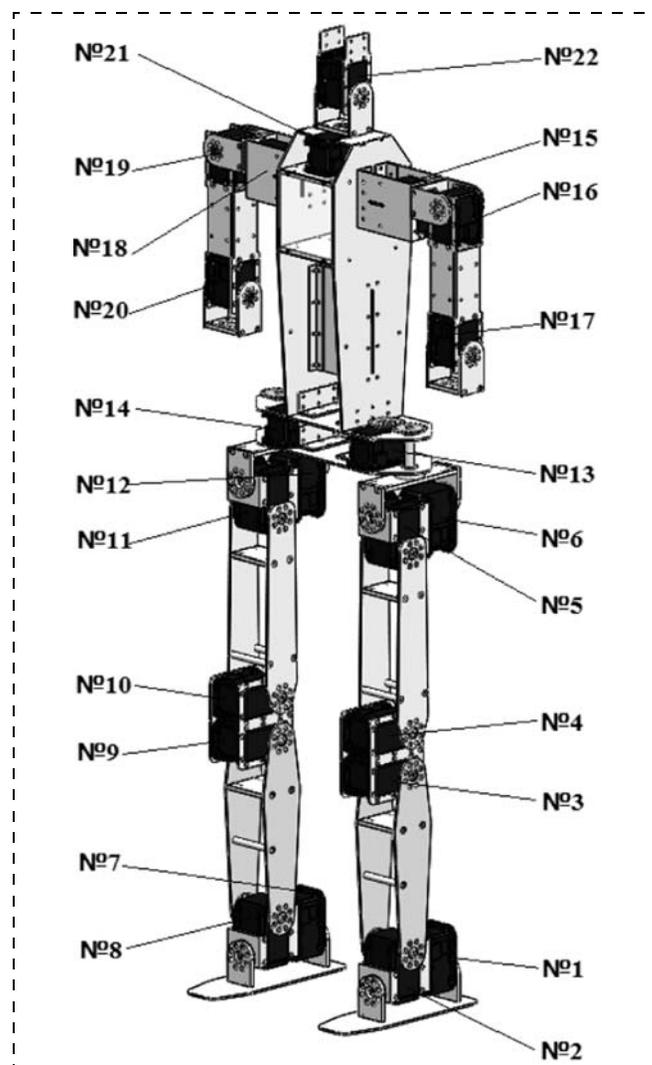


Рис. 1. Нумерация двигателей обобщенной модели антропоморфного робота Антарес

тодике, предложенной в работе [22]. Целью моделирования является определение значений момента вращения и линейной силы, действующих на конструкцию робота. Полученные результаты позволят провести моделирование весовых нагрузок для различных положений робота в пространстве. В результате в ходе моделирования были определены моменты вращения выходного вала двигателя в узлах ноги робота: в голеностопном, коленном и тазобедренном суставах.

Для проведения анализа движения была заблокирована стопа для того, чтобы движение ноги осуществлялось относительно стопы. Сила тяжести принималась равной  $G = 9,81 \text{ м/с}^2$ . Был установлен "контакт поверхностей" на фланцы двигателей, пластины голени и бедра. Были исследованы вращающие моменты двигателей № 2–5 (см. рис. 1) при следующих одинаковых параметрах: время работы двигателя — 3 с, перемещение вала двигателя осуществляется на  $85^\circ$  и тип сегмента — кубический. В качестве внешней нагрузки применялась сила, заменяющая вес торса, равный 20 Н. Для определения момента вращения на валах двигателей № 2–5 установлены датчики, двигатели осуществляют свою работу синхронно.

Из графиков, приведенных на рис. 3, видно, что для поднятия тела двигателям требуется разный момент вращения. Двигатель № 2 осуществляет свою работу только на удерживание равновесия, поэтому у него маленький момент вращения по сравнению с двигателем № 3. Двигатель № 3, вращаясь в коленном суставе, упирается голенью в стопу, таким образом поднимая ногу. Для двигателей № 4 и № 5 ситуация аналогична. Двигатель № 4 осуществляет поднятие ноги, упираясь в двигатель № 3, в то время как двигатель № 5 поддерживает равновесие.

Для двигателя № 2 (рис. 3, а) момент вращения равен  $M = 0,3 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , а для двигателя № 3 (рис. 3, б)

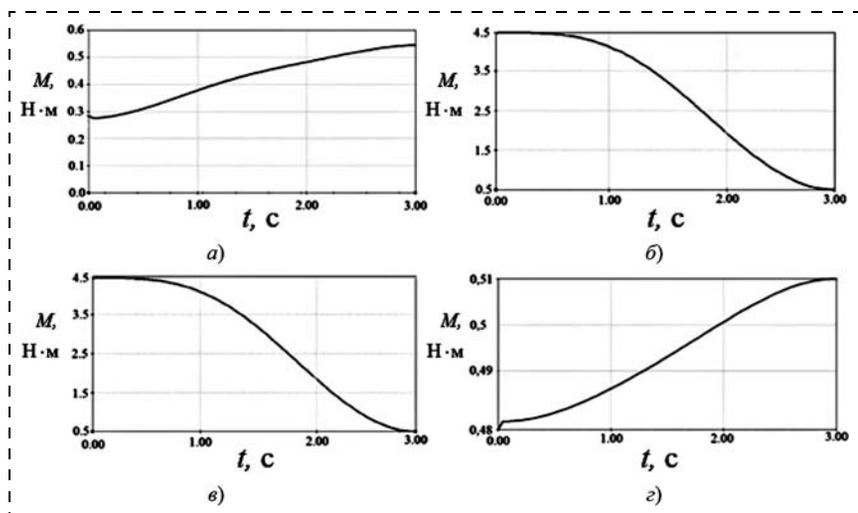


Рис. 3. Зависимость вращающего момента двигателей и времени их работы для конструкции ноги:

а — двигатель № 2; б — двигатель № 3; в — двигатель № 4; г — двигатель № 5

$M = 4,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , следовательно, суммарный момент вращения в начальный период времени (начиная с нулевой по третью секунду) приблизительно равен:  $0,3 + 4,5 = 4,8 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Момент вращения, приходящийся на один двигатель, равен  $2,4 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Момент силы, прикладываемый к сборке голени, когда нога находится в положении сидя:

$$F = \frac{M}{l} = \frac{2,4}{0,17} = 14,11 \approx 15 \text{ Н},$$

где  $l$  — длина плеча, на которое действует сила.

Для двигателя № 4 (рис. 3, в)  $M = 4,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , а для двигателя № 5 (рис. 3, г)  $M = 0,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , следовательно, суммарный момент вращения в начальный момент времени равен:  $4,5 + 0,5 = 5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Момент вращения, приходящийся на один двигатель, равен  $2,5 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Момент силы, прикладываемый к бедру, когда нога находится в положении сидя, равен

$$F = \frac{M}{l} = \frac{2,5}{0,17} = 14,7 \approx 15 \text{ Н}.$$

Таким образом, на основании проведенного анализа движения для двух сборок ноги были определены моменты сил, которые действуют на составные части ноги во время поднятия ее из положения "сидя". Найденные значения момента силы позволили провести симуляцию приложения внешних нагрузок на сборки голени и бедра.

### 3. Моделирование весовых нагрузок основных конструктивных элементов нижних конечностей робота Антарес

Моделирование нагрузки — это проверка деталей и узлов с точки зрения выдерживания различных нагрузок и выявление "слабых" мест в конструкции. Суть анализа сборок конструкций заключается в том, чтобы определить, какие напряжения возникают в деталях. На основании данного анализа делается вывод о пригодности разработанной модели робота для выполнения поставленных задач.

Для исследования была взята сборка бедра и голени. В качестве материала выбран сплав дюралюминия Д16Т и латунь. Из дюралюминия были выполнены пластины голени (бедра) и поперечная стойка. Из латуни выполнена только стяжка пластин голени (бедра). Дюралюминий разрушается при меньшей нагрузке, чем латунь [23], поэтому процесс симуляции прекращается после достижения порога разрушения дюралюминия. В качестве типа крепления был выбран параметр "глобальный контакт (нет перемещений)", означающий, что

в процессе моделирования принимается, что объект моделирования зафиксирован в пространстве и не перемещается. Местом крепления послужили поверхности технологических отверстий. Также совместно с глобальным контактом использовался такой тип соединения, как "болт-соединитель" для равномерного распределения нагрузки. Фиксация сборок осуществлена с помощью "зафиксированной геометрии", которая не дает перемещаться сборкам ноги в месте крепления фланцев сервоприводов. В качестве внешней нагрузки были выбраны "линейная сила" и момент вращения в местах крепления фланцев сервоприводов. Расчетная масса сборки робота составляет 6 кг, масса каждой ноги примерно 1 кг. В процессе исследования на сборку одной ноги приходится вес половины тела (за вычетом ног), следовательно, на сборку одной ноги приходится приблизительно 20 Н. Данное значение было рассчитано для вертикальной и боковой (по нормали к фронтальной плоскости) нагрузки по формуле

$$F = P/2 = 40/2 = 20 \text{ Н},$$

где  $F$  — сила, прикладываемая к сборке голени;  $P$  — вес, который держат ноги, который делится на 2, так как весь вес распределяется на две ноги.

В ходе проведения симуляции сборки подвергались двум видам нагрузок — были приложены момент вращения и "прямая сила" в трех направлениях: вертикальном (перпендикулярном поперечной плоскости), боковом (по нормали к фронтальной плоскости) и боковом (перпендикулярно сагиттальной плоскости).

Вертикальная нагрузка (положение сидя) на сборку голени (бедро) составляет 25 Н, так как 20 Н — это вес тела, и 5 Н — это вес бедра; для бедра вертикальная нагрузка 20 Н, так как на него приходится только вес тела.

Боковая нагрузка (положение ног в поперечном шпагате) была рассчитана на основе "анализа движения" ноги и составила для голени 20 Н, так как 15 Н — это вес тела, и 5 Н — это вес бедра. Для бедра боковая нагрузка 15 Н, так как на него приходится только вес тела.

Так как момент двигателя меняется от 0 до 6 Н·м, то моделирование проводили для максимального значения момента вращения с приложением внешней вертикальной и боковой нагрузки. Направление прикладываемой силы выбрано исходя из того, что данная сила будет иметь свое максимальное значение, когда нога будет находиться в положении "сидя", следовательно, направление будет направлено по нормали к сагиттальной плоскости ноги.

Для проверки сборки ноги на скручивание была смоделирована ситуация, когда робот находится в положении лежа, и стопы упираются в поверхность пола внутренней частью стопы. Скручивание происходит по всей длине ноги, равной 0,5 м, следовательно, момент кручения одинаков как для сборки голени, так и для сборки бедра. Для сборки

ноги при длине стопы 0,0825 м и массе ноги 1 кг момент кручения имеет значение

$$M = Fl = 10 \cdot 0,0825 = 0,825 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

На рис. 4 (см. третью сторону обложки) представлены результаты моделирования нагрузок в виде эпюр напряжений, на основании которых можно сделать выводы о поведении сборки голени и бедра под разными видами прикладываемой нагрузки. По эпюре внутренних напряжений можно судить о способности детали или сборки противостоять приложенным нагрузкам.

Эпюры максимальных внутренних напряжений построены и оценены по эквивалентным внутренним напряжениям в сравнении с пределом текучести для использованного материала. Материал, из которого сделано изделие, начинает разрушаться, когда напряжение становится равным предельному значению напряжения. В большинстве случаев предельному значению напряжения соответствует предел текучести. Пределом напряжения называется такое напряжение, при котором деформация продолжает увеличиваться без увеличения напряжения внутри изделия. Таким образом, результаты представлены в виде эпюры эквивалентных напряжений и графического представления цветовой палитры непосредственно на самой сборке. Местоположение максимального внутреннего напряжения окрашено красным цветом и указано сноской с текущим значением напряжения.

### 3.1. Пространственная модель голени робота

В ходе проведения симуляции модели составных компонентов ноги подвергались двум видам нагрузок — были приложены момент вращения и "прямая сила" в трех направлениях: вертикальном (перпендикулярном поперечной плоскости), боковом по нормали к фронтальной плоскости и боковом перпендикулярно сагиттальной плоскости. Для исследования модели голени проведено четыре опыта, описанные ниже:

1) на сборку голени прикладывается вертикальная нагрузка 25 Н, которая распределяется на всем объеме пластин голени равномерно. Максимальное внутреннее напряжение сборки приходится на пластины голени (рис. 4, а, см. третью сторону обложки), значение напряжения составляет  $4,53 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ ;

2) на сборку голени прикладывается момент вращения фланца двигателя, равный 6 Н·м, и боковая нагрузка 25 Н (рис. 4, б, см. третью сторону обложки). Нагрузка распределяется на всей поверхности пластин голени почти равномерно. Максимальное внутреннее напряжение сборки приходится на место крепления "стяжки" (алюминиевой стойки диаметром 6 мм и длиной 47 мм, с отверстиями на торцах для вкручивания в нее винтов М2,5) и пластины голени, значение напряжения составляет  $3,79 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ . У пластины голени максимальное внутреннее напряжение приходится на технологи-

ческое отверстие стяжки, и значение напряжения составляет  $2,29 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ;

3) на сборку голени прикладывается нагрузка 20 Н (перпендикулярно сагиттальной плоскости). Максимальное внутреннее напряжение сборки приходится на "стяжку" (рис. 4, в, см. третью сторону обложки), значение напряжения составляет  $6,72 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ . У пластины голени максимальное внутреннее напряжение приходится на технологическое отверстие крепления "стяжки" и составляет  $2,45 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ;

4) на сборку голени прикладывается момент вращения вокруг оси, проходящей через центр поперечной пластины, равный  $0,825 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Максимальное внутреннее напряжение сборки приходится на пластину, соединяющую пластины голени (рис. 4, г, см. третью сторону обложки), значение напряжения составляет  $6,13 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ .

### 3.2. Пространственная модель бедра робота

Для исследования модели бедра также было проведено четыре опыта, описанные ниже:

1) на сборку бедра прикладывается вертикальная нагрузка 20 Н, которая распределяется на всем объеме пластин бедра равномерно. Максимальное внутреннее напряжение сборки приходится на пластины бедра (рис. 5, а, см. третью сторону обложки), значение напряжения составляет  $2,78 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ ;

2) на сборку бедра прикладывается момент вращения фланца двигателя, равный  $6 \text{ Н} \cdot \text{м}$ , и боковая нагрузка 20 Н (перпендикулярно поперечной плоскости). Нагрузка распределяется на всей поверхности пластин бедра равномерно. Максимальное внутреннее напряжение сборки приходится на пластины бедра (рис. 5, б, см. третью сторону обложки), значение напряжения составляет  $1,61 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ;

3) на сборку бедра прикладывается нагрузка 15 Н (перпендикулярно сагиттальной плоскости). Максимальное внутреннее напряжение сборки приходится на пластины бедра (рис. 5, в, см. третью сторону обложки), значение напряжения составляет  $2,21 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ ;

4) на сборку бедра прикладывается момент вращения вокруг оси, проходящей через центр поперечной пластины, равный  $0,825 \text{ Н} \cdot \text{м}$ . Максимальное внутреннее напряжение сборки приходится на пластины бедра (рис. 5, г, см. третью сторону обложки), значение напряжения составляет  $1,51 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$ .

На основании предела текучести для разработанной модели ноги можно сделать вывод, что данные виды внешних нагрузок сборка голени и бедра выдержит, так как предел текучести для сборки ноги лежит в допустимых пределах [22, 23].

Разрабатываемый робот ориентирован на применение в образовательных целях для участия в соревнованиях роботов-футболистов, а также при разработке ассистивных технологий человеко-машинного взаимодействия на основе многомодальных интерфейсов [24–28].

## Заключение

В данной работе был проведен анализ движения нижних конечностей, и на основе полученных результатов проведено моделирование приложения внешней нагрузки на составные части ноги робота Антарес. На основании данных, приведенных на рис. 4 и 5 (см. третью сторону обложки), можно заключить, что при приложении различных внешних сил к ногам внутреннее напряжение будет приближено к точке предела текучести для данного материала. Так как сборки конструкции робота выдерживают рассчитанную ранее нагрузку и не разрушаются, то сохраняется устойчивость конструкции ноги. В ходе моделирования также определены некоторые параметры, которыми будет обладать модель робота. Так как при поднятии робота из положения "сидя" требуется в 2,4 раза меньший момент, чем максимальный развиваемый двигателем момент вращения, а конструкция ноги способна выдержать максимальный момент вращения двигателя, то на основании этих данных был сделан вывод, что робот способен выполнить прыжок в вертикальной плоскости, позже успешно подтвержденный в ходе натуральных экспериментов.

## Список литературы

1. Градецкий В. Г., Ермолов И. Л., Князьков М. М., Семенов Е. А., Суханов А. Н. Кинематическая модель экзоскелета руки человека и определение ошибки позиционирования // Мехатроника, Автоматизация, управление. 2014. Вып. 5. С. 37–41.
2. Жиденко И. Г., Кутлубаев И. М. Методика определения сигналов управления антропоморфным роботом // Мехатроника, Автоматизация, управление. 2014. Вып. 5. С. 41–46.
3. Лавровский Э. К., Письменная Е. В. Алгоритмы управления экзоскелетом нижних конечностей в режиме одноопорной ходьбы по ровной и ступенчатой поверхностям // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 44–51.
4. Яцун С. Ф., Савин С. И., Емельянова О. В., Яцун А. С., Турлапов Р. Н. Анализ конструкций, принципы создания, основы моделирования. Курск: Юго-Зап. гос. ун-т, 2015. 179 с.
5. Яцун С. Ф., Савин С. И., Яцун А. С., Климов Г. В. Кинематический анализ экзоскелета в процессе подъема груза // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2015. № 3 (16). С. 24–30.
6. Алямовский А. А. Исследование кинематики приспособлений для машиностроения и деревообработки в SolidWorks // Технические науки и технологии, электронный научный журнал. 2015. Вып. 78. С. 85–92.
7. Филатов В. В. Использование САПР SolidWorksMotion для исследования плавности хода транспортного средства // Транспортная техника, электронный научный журнал. 2014. Вып. 1. С. 1–7.
8. Warnakulasooriyaa S., Bagheria A., Sherburn N., Shanmugavel M. Bipedal Walking Robot — A developmental design // Procedia Engineering. 2012. Vol. 41. P. 1016–1021.
9. Lima S. C., Yeapa G. H. The Locomotion of Bipedal Walking Robot with Six Degree of Freedom // Procedia Engineering. 2012. Vol. 41. P. 8–14.
10. Yoo J. K., Lee B. J., Kim. J. H. Recent Progress and Development of the Humanoid Robot Hansaram // Robotics and Autonomous Systems. 2009. Vol. 57. P. 973–981.
11. Buschmann T., Lohmeier S., Ulbrich H. Humanoid Robot Lola: Design and Walking Control // Journal of Physiology. 2009. Vol. 103. P. 141–148.

12. **Mohameda Z., Capi G.** Development of a New Mobile Humanoid Robot for Assisting Elderly People // *Procedia Engineering*. 2012. Vol. 41. P. 345–351.
13. **Nakashima M., Tsunoda Y.** Improvement of Crawl Stroke for the Swimming Humanoid Robot to Establish an Experimental Platform for Swimming Research // *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 112. P. 517–521.
14. **Shah S. V., Saha S. K., Dutt J. K.** Modular Framework for Dynamic Modeling and Analyses of Legged Robots // *Mechanism and Machine Theory*. 2012. Vol. 49. P. 234–255.
15. **Yua X., Fub C., Chen K.** Modeling and Control of a Single-legged Robot // *Procedia Engineering*. 2011. Vol. 24. P. 788–792.
16. **Potts A. S., Jaime da Cruz J.** A Comparison Between Free Motion Planning Algorithms Applied to a Quadruped Robot Leg // *IFAC-papers online*. Vol. 48, Iss. 19. P. 019–024.
17. **Rostro-Gonzalez H., Cerna-Garcia P. A., Trejo-Caballero G., Garcia-Capulin C. H., Ibarra-Manzano M. A., Avina-Cervantes J. G., Torres-Huitzil C.** A CPG System Based on Spiking Neurons for Hexapod Robot Locomotion // *Neurocomputing*. 2015. Vol. 170. P. 47–54.
18. **Pan P. S., Wu C. M.** Design of a Hexapod Robot with a Servo Control and a Man-Machine Interface // *Robotics and Computer-Integrated manufacturing*. 2012. Vol. 28. P. 351–358.
19. **Vidoni R., Gasparetto A.** Efficient Force Distribution and Leg Posture for a Bio-Inspired Spider Robot // *Robotics and Autonomous Systems*. 2011. Vol. 59. P. 142–150.
20. **Павлюк Н. А., Будков В. Ю., Бизин М. М., Ронжин А. Л.** Разработка конструкции узла ноги антропоморфного робота Антарес на основе двухмоторного колена // *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2016. № 1 (174). С. 227–239.
21. **Pavluk N., Ivin A., Budkov V., Kodyakov A., Ronzhin A.** Mechanical Leg Design of the Anthropomorphic Robot Antares // *Interactive Collaborative Robotics, First International Conference ICR 2016, Budapest, Hungary, August 24–26, 2016*. Springer International Publishing, 2016. LNAI 9812. P. 113–123.
22. **Сагиров Ю. Г.** Прочностной анализ металлоконструкции грузоподъемных кранов с использованием SolidWorks // *Вестник Приазовского государственного технического университета*. Серия: Технические науки. 2013. Вып. 26. С. 194–203.
23. **Таблица** характеристик металлов. URL: [http://splav-kharkov.com/mat\\_start.php?name\\_id=1438/\(дата обращения 20.06.16\)](http://splav-kharkov.com/mat_start.php?name_id=1438/(дата обращения 20.06.16)).
24. **Мотненко А. И., Тарасов А. Г., Дорожко И. В., Басов О. О.** Проактивное управление робототехническими системами спасения пострадавших // *Труды СПИИРАН*. 2016. Вып. 46. С. 174–195.
25. **Ронжин А. Л., Юсупов Р. М.** Многомодальные интерфейсы автономных мобильных робототехнических комплексов // *Известия Южного федерального университета. Технические науки*. 2015. № 1 (162). С. 195–206.
26. **Юсупов Р. М., Крючков Б. И., Карпов А. А., Ронжин А. Л., Усов В. М.** Возможности применения многомодальных интерфейсов на пилотируемом космическом комплексе для поддержания коммуникации космонавтов с мобильным роботом — помощником экипажа // *Пилотируемые полеты в космос*. 2013. № 3 (8). С. 23–34.
27. **Мотненко А. И., Ронжин А. Л., Павлюк Н. А.** Современные разработки аварийно-спасательных роботов: возможности и принципы их применения // *Научный вестник НГТУ*. 2015. № 3 (60). С. 147–165.
28. **Станкевич Л. А., Серебряков С. В.** Когнитивные системы и агенты // *Труды СПИИРАН*. 2006. Вып. 3. Том 1. С. 71–87.

## Study of Stability of Antares Anthropomorphic Robot under the Action of an External Load

**A. S. Kodyakov**, kodyakovandrey@gmail.com, **N. A. Pavliuk**, antei.hasgard@gmail.com✉, **V. Yu. Budkov**, budkov@iias.spb.su,

St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, 199178, Russian Federation

*Corresponding author: Pavliuk Nikita A.*, Researcher, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 199178, Russian Federation

Received on October 26, 2016  
Accepted on November 11, 2016

*Recent trends in the field of anthropomorphic robotics involve approximation to the motion characteristics of the robot kinematics of a human body. The problem of high energy consumption in implementation of the kinematics of an anthropomorphic robot is partially solved by reduction of the weight of a design. In this regard, of special interest are the developments concerning the study of the stability of the structures and materials capable to withstand the set loads. In this paper a research was done of the stability of the basic structural elements of the lower extremities of Antares anthropomorphic robot under the influence of the external forces, such as straight-line power and twisting. The design of Antares robot employs actuators Dynamixel MX-64T and MX-28, the gears are made of a metal, which allows the robot to move with a given accuracy and a margin of safety. During modeling the assembly of the lower extremities were subjected to simulation of 2 types of loads, those were torque and "direct force" orientated in three directions: vertical (perpendicular to the transverse plane), lateral (normal to the front plane) and lateral (perpendicular to the sagittal plane). The direction of the applied force was selected on the basis of the fact that this force would have its maximal value, when the leg will be in a "sitting" position, therefore, the direction would be directed along the normal to the sagittal plane of the leg. In order to test the leg for twisting a situation was modeled, in which the robot was in the lying position with the inner part of its foot resting on the floor surface. During the study the values of the actuators' torques, intended to move the robot in space, were determined. The moments of rotation of the engine output shaft in a robot leg were determined: ankle, knee, hip joint. The maximal values of the rotational moments, able to withstand the construction of the hip and the thigh of 5 Nm and 5.2 Nm, respectively, were determined. During the simulation it was also found out that raising of the robot from "a sitting position" required 2.4 times less effort than the maximal torque developed by the engine, and the design of the leg could withstand the maximal torque of the motor rotation. On the basis of those data a conclusion was made, that the robot was able to jump in the vertical plane, and later this was proved successfully in real experiments.*

**Keywords:** anthropomorphic robots, parts of construction, strength analysis, servomotors, load modeling, lower limbs, shin, hip, kinematics

**Acknowledgements:** The study was partially supported by the budget threads number 0073-2015-0005 and RNF (grant № 16-19-00044).

For citation:

**Kodyakov A. S., Pavliuk N. A., Budkov V. Yu.** Study of Stability of Antares Anthropomorphic Robot under the Action of an External Load, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 321–327.

DOI: 10.17587/mau.18.321-327

## References

1. **Gradeckij V. G., Ermolov I. L., Knjaz'kov M. M., Seme-nov E. A., Suhanov A. N.** *Kinematicheskaja model' jekzoskeleta ruki cheloveka i opredelenie oshibki pozicionirovanija* (The kinematic model of the exoskeleton of the human hand and the definition of positioning errors), *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie*, 2014, vol. 5, pp. 37–41 (in Russian).
2. **Zhidenko I. G., Kutlubaev I. M.** *Metodika opredelenija signalov upravljenija antropomorfnyj robotom* (Method for determining anthropomorphic robot control signals), *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie*, 2014, vol. 5, pp. 41–46 (in Russian).
3. **Lavrovskij Je. K., Pis'mennaja E. V.** *Algoritmy upravljenija jek-zoskeletonom nizhnih konechnostej v rezhime odnoopornoj hod'by po ровной i stupenchatoj poverhnostjam* (Control algorithms in lower limb exoskeletons single support foot mode on flat surfaces and step), *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie*, 2014, vol. 1, pp. 44–51 (in Russian).
4. **Jacun S. F., Savin S. I., Emel'janova O. V., Jacun A. S., Turlapov R. N.** *Analizkonstrukcij, principysozdanija, osnovymodelirovanija* (Analysis of the structures, principles of creation, the basis of the simulation), Kursk, Publishing house of Jugo-Zap. gos. universitet, 2015, 179 p. (in Russian).
5. **Jacun S. F., Savin S. I., Jacun A. S., Klimov G. V.** *Kinematicheskij analiz jekzoskeleta v processe pod'ema gruzja* (Kinematic analysis of the exoskeleton in the process of lifting), *Izvestija Jugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Tehnika i tehnologii*, 2015, vol. 3 (16), pp. 24–30 (in Russian).
6. **Aljamovskij A. A.** *Issledovanie kinematiki prispособlenij dlja mashinostroenija i derevoobrabotki v Solid Works* (Study kinematics devices for machinery and woodworking in Solidworks), *Tekhnicheskienauki i Tehnologii*, 2015, vol. 78, pp. 85–92 (in Russian).
7. **Filatov V. V.** *Ispol'zovanie SAPR Solid Works Motion dlja issledovanija pлавности hoda transportnogo sredstva* (Using CAD Solidworks Motion for investigation of smoothness of vehicle running), *Transportnaja Tehnika*, 2014, vol. 1, pp. 1–7 (in Russian).
8. **Warnakulasooriyaa S., Bagheria A., Sherburn N., Shanmugavel M.** Bipedal Walking Robot — A developmental design, *Procedia Engineering*, 41, 2012, pp. 1016–1021.
9. **Lima S. C., Yeapa G. H.** The Locomotion of Bipedal Walking Robot with Six Degree of Freedom, *Procedia Engineering*, 41, 2012, pp. 8–14.
10. **Yoo J. K., Lee B. J., Kim J. H.** Recent Progress and Development of the Humanoid Robot Hansaram, *Robotics and Autonomous Systems*, 57, 2009, pp. 973–981.
11. **Buschmann T., Lohmeier S., Ulbrich H.** Humanoid Robot Lola: Design and Walking Control, *Journal of Physiology*, 103, 2009, pp. 141–148.
12. **Mohameda Z., Capi G.** Development of a New Mobile Humanoid Robot for Assisting Elderly People, *Procedia Engineering*, 41, 2012, pp. 345–351.
13. **Nakashima M., Tsunoda Y.** Improvement of Crawl Stroke for the Swimming Humanoid Robot to Establish an Experimental Platform for Swimming Research, *Procedia Engineering*, 112, 2015, pp. 517–521.
14. **Shah S. V., Saha S. K., Dutt J. K.** Modular Framework for Dynamic Modeling and Analyses of Legged Robots, *Mechanism and Machine Theory*, 49, 2012, pp. 234–255.
15. **Yua X., Fub C., Chen K.** Modeling and Control of a Single-legged Robot, *Procedia Engineering*, 24, 2011, pp. 788–792.
16. **Potts A. S., Jaime da Cruz J.** A Comparison Between Free Motion Planning Algorithms Applied to a Quadruped Robot Leg, *IFAC-papers online*, 48—19, 2015, pp. 019–024.
17. **Rostro-Gonzalez H., Cerna-Garcia P. A., Trejo-Caballero G., Garcia-Capulin C. H., Ibarra-Manzano M. A., Avina-Cervantes J. G., Torres-Huitzil C.** A CPG System Based on Spiking Neurons for Hexapod Robot Locomotion, *Neurocomputing*, 170, 2015, pp. 47–54.
18. **Pan P. S., Wu C. M.** Design of a Hexapod Robot with a Servo Control and a Man-Machine Interface, *Robotics and Computer-Integrated manufacturing*, 28, 2012, pp. 351–358.
19. **Vidoni R., Gasparetto A.** Efficient Force Distribution and Leg Posture for a Bio-Inspired Spider Robot, *Robotics and Autonomous Systems*, 59, 2011, pp. 142–150.
20. **Pavljuk N. A., Budkov V. Ju., Bizin M. M., Ronzhin A. L.** *Razrabotka konstrukcii uzla nogi antropomorfno robot Antares na osnove dvuhmotorno gokolena* (Development site design legs anthropomorphic robot Antares based on twin-knee), *Izvestija JuFU. Tekhnicheskije nauki*, 2016, vol. 1 (174), pp. 227–239 (in Russian).
21. **Pavljuk N., Ivin A., Budkov V., Kodyakov A., Ronzhin A.** Mechanical Leg Design of the Anthropomorphic Robot Antares. Interactive Collaborative Robotics, *First International Conference ICR 2016*, Budapest, Hungary, August 24–26, 2016, Springer International Publishing, 2016, LNAI 9812, pp. 113–123.
22. **Sagirov Ju. G.** *Prochnostnoj analiz metallokonstrukcii gruzopod'emnyh kranov s ispol'zovaniem Solid Works* (Strength analysis of metal cranes using Solidworks), *Vestnik Pribzovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Serija: Tekhnicheskienauki*, 2013, vol. 26, pp. 194–203 (in Russian).
23. **Tablica harakteristik metallov** (Table of characteristics of metals), available at: [http://splav-kharkov.com/mat\\_start.php?name\\_id=1438/\(date of accessed 20.06.16\)](http://splav-kharkov.com/mat_start.php?name_id=1438/(date of accessed 20.06.16)).
24. **Motienko A. I., Tarasov A. G., Dorozhko I. V., Basov O. O.** *Proaktivnoe upravlenie robototekhnicheskimi sistemami spasenija postradavshih* (Proactive management of rescue robotics systems affected), *Trudy SPIIRAN*, 2016, vol. 46, pp. 174–195 (in Russian).
25. **Ronzhin A. L., Yusupov R. M.** *Mnogomodal'nye interfejsy avtonomnyhmobil'nyh robototekhnicheskikh kompleksov* (Multimodal interfaces autonomous mobile robot), *Izvestija JuFU. Tekhnicheskije nauki*, 2015, vol. 1 (162), pp. 195–206 (in Russian).
26. **Yusupov R. M., Krjuchkov B. I., Karpov A. A., Ronzhin A. L., Usov V. M.** *Vozmozhnosti primenenija mnogomodal'nyh interfejsov na pilotiruemom kosmicheskom komplekse dlja podderzhanija kommunikacii kosmonavtov s mobil'nyj robotom — pomoshhnikom jekipazh* (Possible applications of multimodal interfaces manned space complex to maintain communication with the mobile robot astronauts — the crew assistant), *Pilotiruemye Polety v Kosmos*, 2013, vol. 3 (8), pp. 23–34 (in Russian).
27. **Motienko A. I., Ronzhin A. L., Pavliuk N. A.** *Sovremennye razrabotki avarijno-spasatel'nyh robotov: vozmozhnosti i principy ih primenenija* (Modern development of rescue robots: opportunities and principles of their application), *Nauchnyj Vestnik NGTU*, 2015, vol. 3 (60), pp. 147–165 (in Russian).
28. **Stankevich L. A., Serebrjakov S. V.** *Kognitivnye sistemy i Agenty* (Cognitive systems and agents), *SPIIRAS Proceedings*, 2006, vol. 3, no. 1, pp. 71–87 (in Russian).

**А. Ф. Резчиков**, д-р техн. наук, проф., член-корр. РАН, **В. А. Кушников**, д-р техн. наук, проф.,  
**В. А. Иващенко**, д-р техн. наук, ст. научн. сотр., **Д. С. Фоминых**, канд. техн. наук,  
**А. С. Богомолов**, канд. физ.-мат. наук, доцент, **Л. Ю. Филимонюк**, канд. техн. наук, iptmuran@san.ru,  
 Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов,  
 Саратовский национальный исследовательский университет имени Н. Г. Чернышевского,  
 Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А.

## Минимизация ущерба от нарушения технологического процесса в сварочных роботизированных технологических комплексах<sup>1</sup>

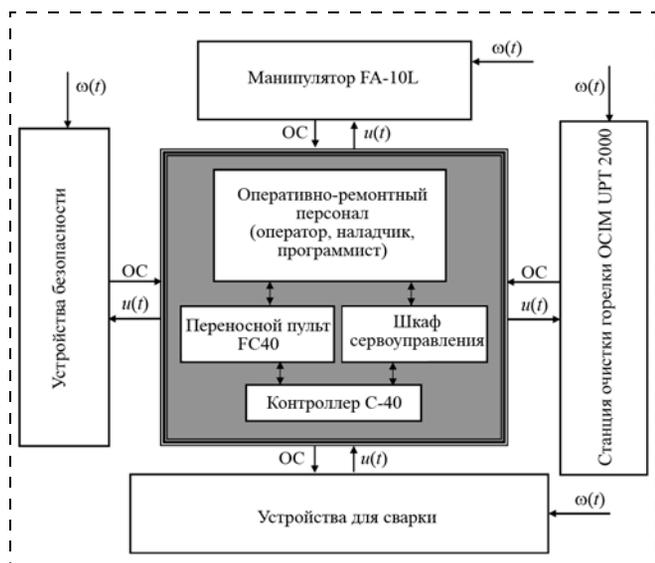
*Разработаны математические модели и алгоритмы минимизации ущерба от изготовления некачественной продукции в сварочных роботизированных технологических комплексах. Предложены программно-технические средства реализации данных моделей и алгоритмов. Их внедрение позволит снизить ущерб от простоев сварочного оборудования и повысить стабильность технологического процесса сварки.*

**Ключевые слова:** роботизированный технологический комплекс, минимизация ущерба от изготовления некачественной продукции, математическая модель, алгоритм, сварка

### Введение

Важной задачей, стоящей перед отечественными машиностроительными предприятиями, является сокращение потерь от выпуска некачественной продукции, обусловленных выполнением сварочных операций. Одним из эффективных способов решения данной задачи является автоматизация производственного процесса за счет внедрения роботизированных технологических комплексов (РТК) дуговой сварки.

Процесс сварки в РТК характеризуется большим числом контролируемых параметров и существенной ролью оперативно-диспетчерского и ремонтного персонала.



**Рис. 1.** Схема технологического процесса дуговой сварки в РТК:  $u(t)$  — управляющие воздействия (УВ); ОС — обратная связь;  $\omega(t)$  — возмущения

РТК дуговой сварки состоит из синхронно работающих манипуляторов, снабженных сварочным оборудованием (источник питания, блок подачи проволоки, блок охлаждения, сварочная горелка и др.). Комплекс снабжен устройствами безопасности (ограждение, кнопки аварийной остановки, фотоэлементные барьеры). Управление и оперативный контроль работы комплекса осуществляется оператором посредством переносного пульта, связанного с контроллером. Схема технологического процесса автоматической сварки как объекта управления на примере роботов Kawasaki со сварочным оборудованием Fronius представлена на рис. 1.

В настоящее время разработаны и прошли проверку на практике различные системы для оптимизации работы РТК. Анализ их функционального назначения показывает, что основное внимание в них уделяется оптимизации работы манипуляторов или сварочного оборудования [1–4]. При этом в используемых РТК, как правило, отсутствует решение задачи минимизации ущерба от изготовления некачественной продукции.

Указанные обстоятельства обуславливают актуальность разработки предложенного подхода к управлению технологическим процессом автоматической сварки в РТК, в основу которого положены новые математические модели и алгоритмы, позволяющие минимизировать ущерб от изготовления некачественной продукции при сварке изделий РТК.

### Математические модели и алгоритмы

Допустим, что на основании анализа опыта эксплуатации сварочных роботизированных комплексов разработан подробный план действий, при реализации которого будет минимизирован ущерб от нарушений в сварочных РТК. Возможность разработки такого плана подтверждается практикой ус-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 16-01-00536.

пешного функционирования РТК на многих отечественных предприятиях.

С учетом данного допущения задача управления РТК в целях минимизации ущерба от нарушения технологического процесса сводится к проверке выполнимости данного плана на различных временных интервалах и реализации мероприятий по устранению нарушений.

На основе анализа причинно-следственных связей между характеристиками процесса сварки и изучения опыта работы персонала, эксплуатирующего РТК на ОАО "Трансмаш" (г. Энгельс), разработан типовой план мероприятий по минимизации ущерба от изготовления некачественной продукции при сварке изделий РТК. Граф этого плана, состоящий из 197 вершин, имеет вид дерева, в котором вершины — мероприятия плана, а дуги определяют их взаимосвязь и последовательность реализации. Фрагмент данного плана изображен на рис. 2.

На выполнимость мероприятий данного плана влияют условия, учитывающие специфику технологического процесса. Эти условия имеют вид продукций:

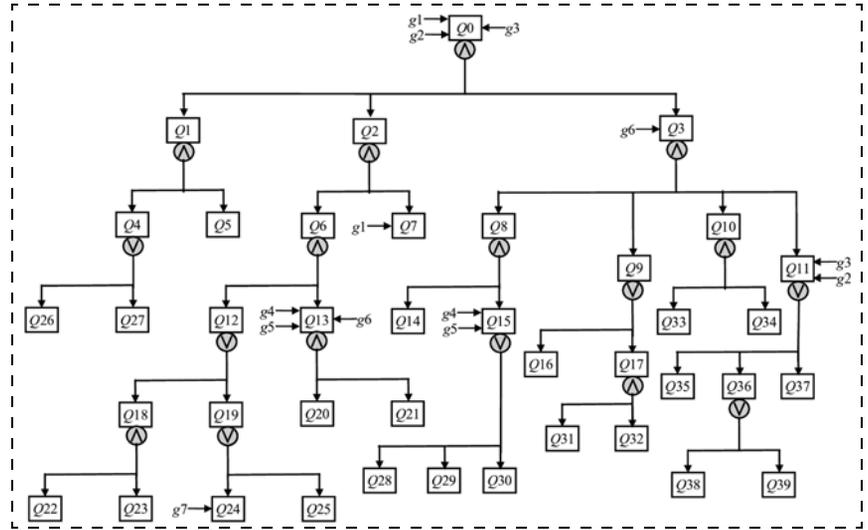
Условие  $g_j$ :

$$\text{ЕСЛИ } \langle B_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) R_1 B_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) R_2 \dots R_j \dots R_{k-1} B_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \rangle,$$

ТО  $\langle$ выполнение мероприятия  $Q_p$  возможно/невозможно $\rangle$ . (2)

Здесь  $B_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , — условия выполнения соответствующих мероприятий;  $R_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k-1$ , — множество логических операций "И", "ИЛИ", "НЕ";  $Q_p \in \{Q_0, Q_1, \dots, Q_{39}\}$  — мероприятия плана. Таким образом, решение задачи сводится к периодической проверке выполнимости мероприятий плана  $Q_0$  при заданных условиях  $g_j$ .

Рассмотрим алгоритм проверки выполнимости плана мероприятий  $Q_0$  на примере процесса дуговой сварки в РТК с манипуляторами Kawasaki FA10L и источниками питания Fronius TPS5000. Исходя из опыта эксплуатации данного оборудования сформировано семь основных условий, влияющих на выполнение мероприятий плана  $Q_0$  (рис. 2). В левой части продукции учтены основные характеристики технологического процесса (см. таблицу).



**Рис. 2. Фрагмент графа плана мероприятий по снижению выпуска некачественной продукции при сварке изделий в РТК:**

$Q_0$  — повышение качества изделий, свариваемых в РТК;  $Q_1$  — контроль ОТК качества сварки;  $Q_2$  — контроль оператором качества сварки в ходе технологического процесса;  $Q_3$  — обеспечение корректной работы программы в ходе сварки;  $Q_4$  — наличие актуальной технологической документации на рабочих местах;  $Q_5$  — осуществление контроля качества сваренного изделия;  $Q_6$  — промежуточный контроль со стороны оператора качества сварочного шва;  $Q_7$  — поддержка необходимого давления защитного газа на входе РТК;  $Q_8$  — корректная работа системы тактильного отклонения;  $Q_9$  — обеспечение стабильности тока на двигателе подающего блока;  $Q_{10}$  — контроль работы программы очистки;  $Q_{11}$  — соблюдение режимов сварки в реальном времени;  $Q_{12}$  — контроль оператором очистки сварочной горелки;  $Q_{13}$  — обеспечение стабильности сварочной дуги;  $Q_{14}$ ,  $Q_{16}$  — визуальный контроль качества сварного шва;  $Q_{15}$  — обеспечение минимального отклонения сварочного тока от номинального;  $Q_{17}$  — мониторинг значений тока двигателя подающего механизма на индикаторах источника питания;  $Q_{18}$  — контроль оператором сопла горелки после очистки;  $Q_{19}$  — контроль оператором работы фрезы станции очистки;  $Q_{20}$  — визуальный контроль сварочной дуги на наличие искр, брызг и др.;  $Q_{21}$  — контроль оператором стабильности параметров сварки на индикаторах источника питания;  $Q_{22}$  — проведение очистки вручную в случае необходимости;  $Q_{23}$  — вызов наладчиков при недостаточной очистке сварочной горелки;  $Q_{24}$  — поддержка необходимого давления сжатого воздуха на станции очистки;  $Q_{25}$  — вызов наладчиков при недостаточном давлении сжатого воздуха на станции очистки;  $Q_{26}$  — периодическая проверка документации цеховым технологом;  $Q_{27}$  — контроль актуальности документации мастерами;  $Q_{28}$  — мониторинг значений сварочного тока с помощью функции RTMON;  $Q_{29}$  — мониторинг значений сварочного тока по индикаторам источника питания;  $Q_{30}$  — контроль порогового значения отклонений сварочного тока в функции RTPM;  $Q_{31}$  — выбор в меню источника питания индикации тока двигателя подающего механизма;  $Q_{32}$  — согласно технологической документации в случае отклонения тока двигателя более чем на 10 % остановить процесс сварки;  $Q_{33}$  — визуальный контроль сопла горелки после очистки;  $Q_{34}$  — поддержка заданного уровня антипригарной жидкости;  $Q_{35}$  — установка скорости сварки согласно технологической документации;  $Q_{36}$  — обеспечение заданного напряжения сварочной дуги;  $Q_{37}$  — контроль горизонтального и вертикального смещения сварочной горелки;  $Q_{38}$  — согласно технологической документации в случае колебания напряжения более чем на 10 % в импульсном режиме остановить процесс сварки;  $Q_{39}$  — согласно технологической документации в случае превышения напряжения более чем на 5 % в линейном режиме остановить процесс сварки;  $g_1, \dots, g_7$  — условия, влияющие на выполнение мероприятий  $Q_0, Q_3, Q_7, Q_{11}, Q_{13}, Q_{15}, Q_{24}$ ;  $\Lambda$  — символ конъюнкции;  $V$  — символ дизъюнкции

**Технологические характеристики процесса дуговой сварки в РТК**

Обозначение	Наименование параметра
$I$	Текущее значение сварочного тока, А
$I_{\text{ном}}$	Номинальное значение сварочного тока, А
$\varepsilon_I$	Пороговое отклонение тока от номинального, А
$I_w$	Текущее значение тока на двигателе подающего механизма, А
$I_w^*$	Пороговое значение тока на двигателе подающего механизма, А
$ErrorCodeC$	Значение ошибки контроллера
$ErrorCodePS$	Значение ошибки источника питания
$P_B$	Давление сжатого воздуха в пневматическом контуре, МПа
$P_\Gamma$	Давление защитного газа на входе, МПа

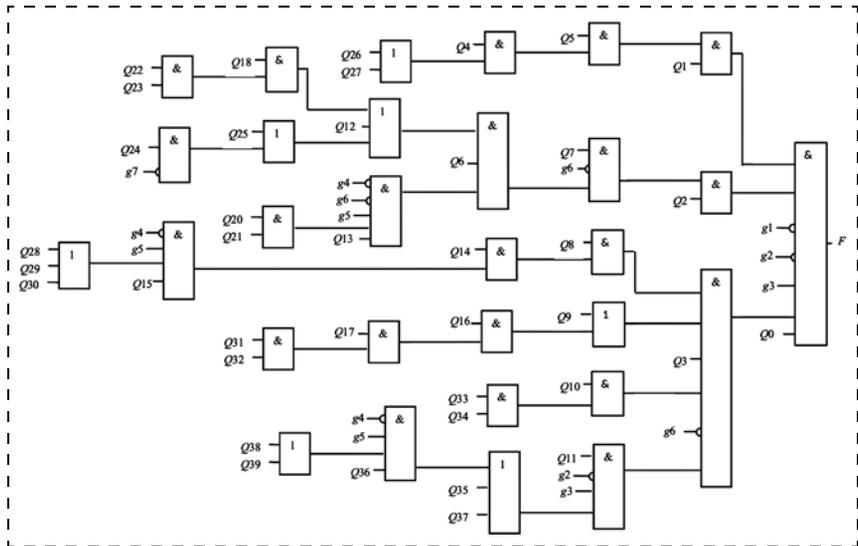


Рис. 3. Структурная схема дискретного устройства для оперативной проверки выполнения плана мероприятий

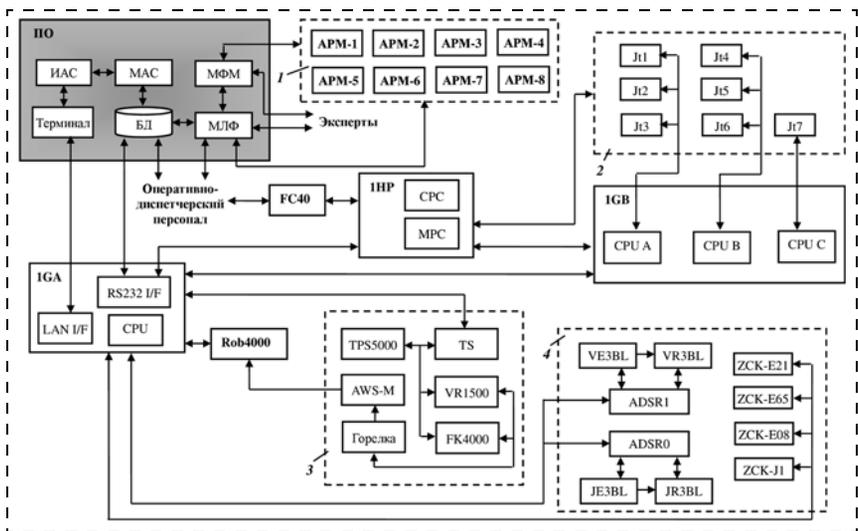


Рис. 4. Структура комплекса технических средств управления процессом сварки в РТК: ПО — программное обеспечение для управления процессом в РТК дуговой сварки; терминал — интегрированный интерфейс RSVIEW32, ИАС — модуль идентификации аварийной ситуации, MAC — модуль выдачи рекомендаций по устранению аварийной ситуации, БД — база данных, МФМ — модуль формирования мероприятий плана по снижению ущерба от некачественной продукции, МЛФ — модуль вычисления логической функции для проверки выполнения плана; 1 — автоматизированные рабочие места специалистов: АРМ-1 — генерального директора, АРМ-2 — технического директора, АРМ-3 — директора по качеству, АРМ-4 — главного механика, АРМ-5 — главного технолога, АРМ-6 — начальника цеха, АРМ-7 — начальника ОТК, АРМ-8 — оператора; 2 — двигатели управления осями манипулятора: Jt1, Jt2, ..., Jt7 — двигатели 1-й, 2-й, ..., 7-й осей соответственно; 3 — сварочный контур: TPS5000 — источник питания, TS — блок тактильного отслеживания детали, VR1500 — блок подачи сварочной проволоки, FK4000 — блок охлаждения сварочной горелки, AWS-M — датчик удара горелки; 4 — устройства безопасности: ADSR0, ADSR1 — реле управления фотоэлементами барьерами, VE3BL, JE3BL — эмиттеры, VR3BL, JR3BL — ресиверы, ZCK-E21 — концевые выключатели движения колонны манипулятора, ZCK-E65 — концевые выключатели начального положения сварочной горелки, ZCK-E08 — концевые выключатели аварийных дверей, ZCK-J1 — концевые выключатели сближения манипуляторов; IGA — блок центрального процессора управления контроллером: RS232 I/F — последовательный интерфейс, LAN I/F — интерфейс для подключения к локальной сети, CPU — центральный процессор контроллера C-40; ИНР — блок управления сервоприводами: СРС — модуль управляющего питания двигателей, МРС — модули датчиков положения манипулятора; IGB — блок управления двигателями осей манипулятора: CPU A — центральный процессор управления двигателями Jt1—Jt3, CPU B — центральный процессор управления двигателями Jt4—Jt6, CPU C — центральный процессор управления двигателем Jt7; FC40 — многофункциональный пульт оператора; Rob4000 — интерфейс пользователей для связи со сварочным оборудованием

Ниже перечислены основные условия, влияющие на выполнение мероприятий плана Q0.

Условие g<sub>1</sub>: ЕСЛИ (произошла утечка защитного газа) ИЛИ (P<sub>г</sub> < 5,5 МПа), ТО (выполнение мероприятий Q0, Q7 невозможно).

Условие g<sub>2</sub>: ЕСЛИ (I<sub>w</sub> > I<sub>w</sub><sup>\*</sup>) ИЛИ (Error Code PS = ERR{056}), ТО (выполнение мероприятий Q0, Q11 невозможно).

Условие g<sub>3</sub>: ЕСЛИ (g<sub>2</sub> = TRUE) И (Error Code C = Cycle Stopped) И (выполнена герметизация газового контура), ТО (выполнение мероприятий Q0, Q11 возможно).

Условие g<sub>4</sub>: ЕСЛИ (Error Code C = -1802) ИЛИ (Error Code PS = ERR{052}) ИЛИ (|I - I<sub>НОМ</sub>| ≥ ε<sub>I</sub>), ТО (выполнение мероприятий Q13, Q15 невозможно).

Условие g<sub>5</sub>: ЕСЛИ (g<sub>4</sub> = TRUE) И (Error Code C = Cycle Stopped), ТО (выполнение мероприятий Q13, Q15 возможно).

Условие g<sub>6</sub>: ЕСЛИ (ворота в цех открыты) И (Error Code C ≠ Cycle Stopped), ТО (выполнение мероприятий Q3, Q13 невозможно).

Условие g<sub>7</sub>: ЕСЛИ (P<sub>в</sub> ≤ 5 МПа), ТО (выполнение мероприятия Q24 невозможно).

Системе продукции (2) и графу мероприятий (рис. 2) поставлена в соответствие логическая функция

$$F(Q1, Q2, \dots, Q39, g_1, g_2, \dots, g_7) = Q5 \wedge Q7 \wedge Q14 \wedge (Q26 \vee Q27) \wedge Q20 \wedge Q21 \wedge (Q22 \wedge Q23 \vee Q24 \wedge g_7 \vee Q25) \wedge (Q28 \vee Q29 \vee Q30) \wedge (Q16 \vee Q31 \wedge Q32) \wedge Q33 \wedge Q34 \wedge (Q35 \vee Q38 \wedge g_5 \vee Q39 \wedge g_5 \vee Q37) \wedge g_1 \wedge g_2 \wedge g_3 \wedge g_4 \wedge g_6$$

$$F(Q1, Q2, \dots, Q39, g_1, g_2, \dots, g_7) = \begin{cases} 1, & \text{если план выполним;} \\ 0, & \text{если план невыполним.} \end{cases}$$

На рис. 3 приведена структурная схема дискретного устройства, построенного по данной булевой функции, для быстрой проверки выполнения плана Q0.

Задавая различные значения аргументов этой функции (выполнение или невыполнение мероприятий

$Q_1, \dots, Q_{39}$  и условий  $g_1, \dots, g_7$ ), в любой момент времени можно оперативно проверить возможность выполнения плана мероприятий в различных производственных ситуациях и, следовательно, решить поставленную задачу.

### Структура и состав комплекса технических средств для реализации предложенных моделей и алгоритмов

На рис. 4 приведена структура комплекса технических средств для реализации представленных выше моделей и алгоритмов.

Разработанное математическое обеспечение в составе описанного комплекса технических средств позволяет осуществить оперативное управление процессом сварки в РТК по критерию, характеризующему ущерб от нарушений качества продукции.

Процедура решения задачи управления процессом сварки в РТК дуговой сварки представлена на информационно-логической схеме (рис. 5).

Как следует из информационно-логической схемы, на временном отрезке "Один раз в час" выполняются анализ состояния РТК и сбор информации об отказах и отклонениях качества сваренных изделий, информация заносится в БД.

На временном отрезке "Один раз в смену" проводится анализ причин возникновения отказов РТК. Информация о причинах отказов и способах их устранения выдается диспетчерскому персоналу и заносится в БД. В случае необходимости корректируются мероприятия плана по снижению выпуска некачественной продукции, выдаются рекомендации оперативному персоналу, реализуются управляющие воздействия, которые заносятся в БД.

На временном отрезке "Один раз в неделю" выполняется сбор информации об отказах комплекса технических средств, отклонениях качества продукции и выполненных мероприятиях плана по снижению ущерба от изготовления некачественной продукции. Проверка выполнимости плана мероприятий проводится с помощью логической функции. В случае его невыполнения выявляются причины и выдаются рекомендации по их устранению.

На временном отрезке "Один раз в месяц" на основе анализа накопленной информации об управляющих воздействиях, реализованных в течение месяца, планово-экономическим отделом предприятия осуществляется оценка экономического эффекта уп-

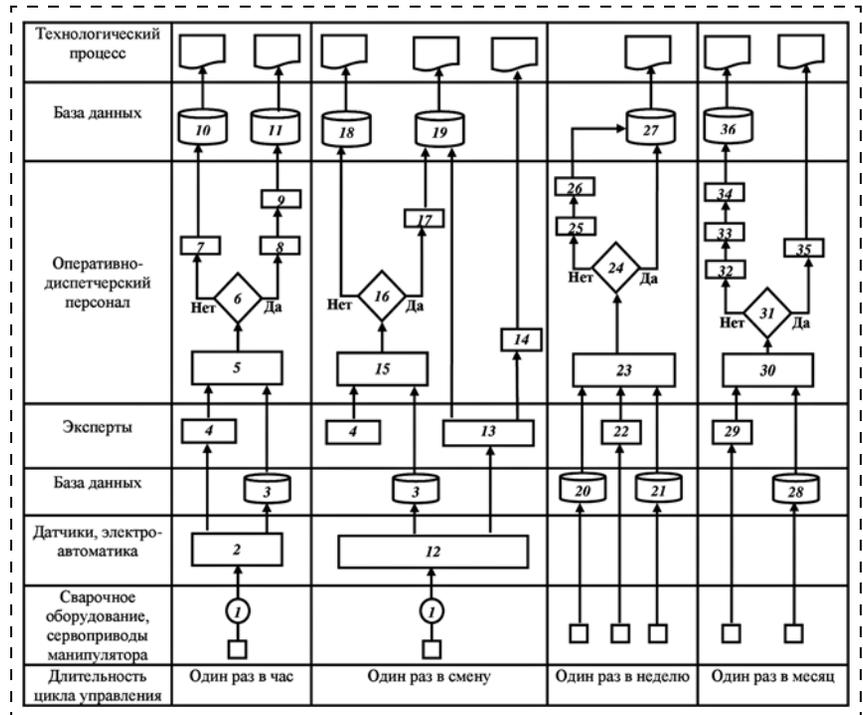


Рис. 5 Информационно-логическая схема решения задачи управления процессом дуговой сварки в РТК:

1 — процесс сварки; 2 — сбор информации о ходе процесса сварки; 3 — запись информации об отклонениях качества сварки в БД; 4 — оценка ситуации при отклонении параметров сварки от номинальных значений; 5 — идентификация текущей ситуации; 6 — ситуация аварийная?; 7 — сообщение о штатной ситуации оператору; 8 — сообщение о возникновении аварийной ситуации оператору; 9 — принятие решения по устранению аварийной ситуации; 10 — занесение информации о штатной ситуации в БД; 11 — занесение информации об аварийной ситуации в БД; 12 — сбор информации об отказах комплекса технических средств; 13 — корректировка плана мероприятий по снижению ущерба от некачественной продукции; 14 — выдача рекомендаций персоналу в соответствии с планом мероприятий; 15 — анализ состояния РТК; 16 — произошел отказ, учтенный в математической модели?; 17 — сообщение ремонтному персоналу и оператору об отказах комплекса технических средств; 18 — занесение информации об отказах в БД; 19 — занесение в БД информации об откорректированной модели; 20 — извлечение из БД информации об отказах за неделю; 21 — извлечение информации из БД о выпуске некачественной продукции за неделю; 22 — сбор экспертной информации об отклонениях качества сварки; 23 — формирование логической функции для проверки выполнения плана мероприятий; 24 — план мероприятий выполнен?; 25 — поиск по графу плана мероприятий причин его невыполнения; 26 — выдача рекомендаций по устранению причин невыполнения плана мероприятий; 27 — занесение в БД информации о результатах минимизации ущерба от выпуска некачественной продукции; 28 — сбор информации о мероприятиях за месяц; 29 — экспертная оценка экономического эффекта от реализации УВ; 30 — анализ выполненных мероприятий оперативным персоналом; 31 — достигнут ли ожидаемый эффект?; 32 — анализ причин неэффективности; 33 — корректировка плана мероприятий по снижению ущерба от некачественной продукции; 34 — утверждение скорректированного плана мероприятий; 35 — премирование персонала; 36 — занесение в БД информации о скорректированном плане мероприятий

равления процессом сварки. При невозможности достижения ожидаемого уровня экономического эффекта проводятся необходимые изменения в плане мероприятий и коррекция параметров математической модели.

### Заключение

Предложенные модели и алгоритмы позволяют обеспечить минимизацию ущерба от изготовления некачественной продукции в роботизированных технологических комплексах. Минимизация ущерба достигается за счет разработки, реализации и проверки выполнимости плана мероприятий по сни-

жению выпуска некачественной продукции при сварке изделий в РТК.

Внедрение данных моделей и алгоритмов наряду со снижением ущерба позволит повысить стабильность технологического процесса сварки.

В настоящее время разработанная система управления процессом сварки проходит апробацию на ОАО "Трансмаш" (г. Энгельс).

#### Список литературы

1. Бабкин А. С. Методы решения задач в технологических САПР сварочного производства: Обзор // Сварочное производство. 1996. № 4. С. 20—23.
2. Иванов В. П., Линьков В. С., Чернецкий Р. И. Специализированная автоматика для роботизированных сварочных комплексов // Автоматизация в промышленности. 2015. № 5. С. 116—121.
3. Нгуен Д. К., Лубенко В. Н. Особенности роботизации сварочного производства в судостроении // Вестник АГТУ. 2008. № 2, С. 149—155.
4. Паршева Е. А. Децентрализованное робастное управление многозвенным манипулятором сварочного производства // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 2. С. 29—35.

5. Аветисян Ю. А., Кушников В. А., Резчиков А. Ф., Родичев В. А. Математические модели и алгоритмы оперативного управления процессами ликвидации чрезвычайных ситуаций // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 11. С. 43—47.

6. Кушников В. А., Резчиков А. Ф., Фоминых Д. С., Санькова А. Б. Модели и алгоритмы системы оперативного управления процессом формования листового стекла // Автоматизация и современные технологии. 2007. № 12. С. 16—24.

7. Кушников В. А., Резчиков А. Ф., Цвиркун А. Д. Управление в человеко-машинных системах с автоматизированной процедурой коррекции целей // Автоматика и телемеханика. 1998. № 7. С. 168—175.

8. Резчиков А. Ф., Шрай Ю. К., Кушников В. А., Донин С. Г. Оперативная идентификация и управление режимами эксплуатации энергосистем предприятия // Приборы и системы управления. 1994. № 5. С. 12—15.

9. Саутин А. В., Кушников В. А. Особенности применения метода анализа главных компонент для обеспечения эффективной работы энергосбытовой организации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. Том 1. № 1 (37). С. 99—104.

10. Шлычков Е. И., Фоминых Д. С., Резчиков А. Ф., Кушников В. А. Автоматизированная система ситуационного управления процессом формования листового стекла // Автоматизация и современные технологии. 2006. № 8. С. 3—11.

11. Щербаков М. А., Кушников В. А. Модели и алгоритмы системы управления аварийными ситуациями при производстве стекла // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. № 2 (55). Ред. 1. С. 196—199.

## Minimization of the Damage Caused by Breakdowns of the Technological Processes in the Robotic Welding Technological Complexes

A. F. Rezchikov, iptmuran@san.ru, V. A. Kushnikov, iptmuran@san.ru,  
V. A. Ivaschenko, iptmuran@san.ru, D. S. Fominykh, dm\_fominyh@mail.ru,✉  
A. S. Bogomolov, iptmuran@san.ru, L. Yu. Filimonyuk, iptmuran@san.ru,  
Institute of Precision Mechanics and Control of RAS, Saratov, 410028, Russian Federation

Corresponding author: Fominykh Dmitrii S., Ph. D.,  
Institute of Precision Mechanics and Control of RAS,  
Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: dm\_fominyh@mail.ru

Received on June 15, 2016

Accepted on July 21, 2016

*The article describes the problems, mathematical models and algorithms for control of the automatic welding technologic processes in the robotic complexes. The problem of a rational control of the process is solved by the criterion used for minimization of the damage caused to the quality by breakdowns. Since a solution by the methods of variations calculus is problematic, the problem of the criterion minimization boils down to development and verification of implementation of a detailed complex action plan for a decrease of the damage due to breakdowns in the technological processes. The action plan was developed based on the causality between the process parameters and learning of the experience by the dispatching personnel. The plan is presented as a directed graph, in which vertices are actions of the plan, and arcs define their relationship and sequence of implementation. The conditions affecting the technological process and implementation of the plan of actions are presented in the form of a production model. For verification of the plan's implementation a logic function was developed in accordance with the graph of the action plan and conditions. By setting different values of the arguments of this function at any time, it is possible to check quickly a possibility of the plan's implementation. The article presents an algorithm for solving of the assignment task at different time intervals by an information-logical scheme. Introduction of the developed models and algorithms in the industrial enterprises using a robotic welding will reduce the damage caused by the defective products.*

**Keywords:** robotic complex, technological process, mathematical model, algorithm, criterion, damage to quality, graph model, action plan

**Acknowledgements:** This work was supported by RFBR, project 16-01-00536

For citation:

Rezchikov A. F., Kushnikov V. A., Ivaschenko V. A., Fominykh D. S., Bogomolov A. S., Filimonyuk L. Yu. Minimization of the Damage

Caused by Breakdowns of the Technological Processes in the Robotic Welding Technological Complexes, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 328—332.

DOI: 10.17587/mau.18.328-332

## References

1. Babkin A. S. *Metody reshenija zadach v tehnologicheskikh SAPR svarochnogo proizvodstva: Obzor* (Methods for solving problems in the CAD technology of welding production: Review), *Svarochnoe Proizvodstvo*, 1996, no. 4, pp. 20–23 (in Russian).
2. Ivanov V. P., Lin'kov V. S., Cherneckij R. I. *Specializirovannaja avtomatika dlja robotizirovannykh svarochnykh kompleksov* (Specialized equipment for robotized welding complexes), *Avtomatizacija v Promyshlennosti*, 2015, no. 5, pp. 116–121 (in Russian).
3. Nguen D. K., Lubenko V. N. *Osobennosti robotizacii svarochnogo proizvodstva v sudostroenii* (Features of robotics welding production in shipbuilding), *Vestnik AGTU*, 2008, no. 2, pp. 149–155 (in Russian).
4. Parsheva E. A. *Decentralizovannoe robustnoe upravlenie mnogozvennym manipulatorom svarochnogo proizvodstva* (Decentralized robust control of multilink manipulator for welding production), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2010, no. 2, pp. 29–35 (in Russian).
5. Avetisjan Yu. A., Kushnikov V. A., Rezchikov A. F., Rodichev V. A. *Matematicheskie modeli i algoritmy operativnogo upravlenija processami likvidacii chrezvychajnykh situacij* (Mathematical models and algorithms for operational process control of emergency response), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie.*, 2009, no. 11, pp. 43–47 (in Russian).
6. Kushnikov V. A., Rezchikov A. F., Fominyh D. S., San'kova A. B. *Modeli i algoritmy sistemy operativnogo upravlenija processom formovanija listovogo stekla* (Models and algorithms for operational control system of forming flat glass process), *Avtomatizacija i sovremennye tehnologii*, 2007, no.12, pp. 16–24 (in Russian).
7. Kushnikov V. A., Rezchikov A. F., Cvirkun A. D. *Upravlenie v cheloveko-mashinnykh sistemah s avtomatizirovannoj proceduroj korekcii celej* (Control of human-machine systems with automated procedure of purposes correction), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1998, no. 7, pp. 168–175 (in Russian).
8. Rezchikov A. F., Shraj Yu. K., Kushnikov V. A., Donin S. G. *Operativnaja identifikacija i upravlenie rezhimami eksploatacii energosistem predprijatija* (Operational identification and control of operation of power systems mode of enterprise), *Pribory i Sistemy Upravlenija*, 1994, no. 5, pp. 12–15 (in Russian).
9. Sajutin A. V., Kushnikov V. A. *Osobennosti primeneniya metoda analiza glavnykh komponent dlja obespechenija effektivnoj raboty energosbytovoj organizacii* (Features of the application of the principal component analysis method to ensure the efficient operation of power sales organization), *Vestnik Saratovskogo Gosudarstvennogo Tehniceskogo Universiteta*, 2009, vol. 1, no. 1 (37), pp. 99–104 (in Russian).
10. Shlychkov E. I., Fominyh D. S., Kushnikov V. A., Rezchikov A. F. *Avtomatizirovannaja sistema situacionnogo upravlenija processom formovanija listovogo stekla* (Automated system of situational control of flat glass molding process), *Avtomatizacija i Sovremennye Tehnologii*, 2006, no. 8, pp. 3–11 (in Russian).
11. Shcherbakov M. A., Kushnikov V. A. *Modeli i algoritmy sistemy upravlenija avarijnymi situacijami pri proizvodstve stekla* (Models and algorithms of emergency control system in the production of glass), *Vestnik Saratovskogo Gosudarstvennogo Tehniceskogo Universiteta*, 2011, no. 2 (55), Ed. 1, pp. 196–199 (in Russian).

УДК 681.513 + 004.94

DOI: 10.17587/mau.18.333-340

И. А. Рыбин, аспирант, intiret@gmail.com, В. Г. Рубанов, д-р техн. наук, проф., rubanov@intbel.ru, Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, г. Белгород

## Математическая модель системы управления мобильного транспортного средства\*

Представлена математическая модель системы управления движением транспортного средства, имеющего шасси с двумя независимыми ведущими колесами. Модель, учитывающая положение колесного мобильного средства относительно заданной трассы, построена с использованием аппарата передаточных функций, что позволяет применять методы как классической, так и современной теории управления для синтеза устройств управления.

**Ключевые слова:** мобильный робот, транспортное средство, система управления, модель, передаточная функция, траектория движения

### Введение

Одной из областей применения мобильных роботов являются транспортно-складские операции на производстве, в которых требуется организовать бесперебойную доставку материалов, инструментов, заготовок к обрабатывающим станкам и своевременную отгрузку готовой продукции на склад. Использование средств навигации, автоматизации и управления позволяет создавать автоматически управляемые транспортные средства (AGV — Automated Guided Vehicle) [1], интеграция которых в систему управления предприятием позволяет сократить время производства, снизить себестоимость продукции, исключить человеческий фактор и участие человека на опасных участках, обеспечить гибкость при переходе на другие виды продукции.

Среди многообразных видов AGV-средств распространены колесные робокары — предназначенные для перевозки грузов роботизированные тележки, шасси которых может иметь различную конфигурацию. Классификация типов шасси приведена в работе [2], где также рассматриваются способы задания трассы движения мобильных роботов, средства их очувствления и приведения в движение.

При разработке систем управления транспортными средствами следует учитывать множество факторов, влияющих на их работу. Математическое и, как следствие, компьютерное моделирование позволяет осуществить анализ системы управления, а также синтез управляющего устройства без необходимости проведения дорогостоящих экспериментов с физическим объектом. Существует большое число моделей транспортных средств, каждая из которых строится на некоторых предположениях и, соответственно, имеет свои преимущества и недостатки.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Белгородской области в рамках проекта N 14-41-08044 "p\_офи\_м".

В работе [3] рассматривается модель трехколесного мобильного робота с двумя управляемыми ведущими колесами, движение которого описывается в матричном виде с использованием уравнений Лагранжа—Максвелла для электромеханической системы. Для аналогичной трехколесной схемы шасси в статье [4] исследована модель, построенная на основе уравнений движения корпуса роботизированного средства и уравнений, отражающих электромеханические процессы, характерные для двигателей постоянного тока с редукторами, вращающих ведущие колеса.

Приведенные модели позволяют структурно представить систему управления транспортным средством, а применение методов классической теории управления для их анализа затруднительно. С этой точки зрения удобной в использовании является представленная в статье [5] структурная схема системы управления боковым отклонением робота от трассы, являющаяся основой математического обеспечения испытательного стенда, описанного в патенте РФ [6]. Основой структурной схемы является модель в виде передаточной функции транспортного средства при его боковом движении из монографии [7], в которой также получена передаточная функция для продольного движения.

Последние указанные модели непосредственно связаны с положением мобильного средства относительно заданной трассы, однако не демонстрируют его движение в пространстве. Кроме того, подсистемы управления боковым и продольным движением колесного робота являются взаимосвязанными, что учитывается в предложенной далее обобщенной модели системы управления движением мобильного транспортного средства.

### Постановка задачи исследования

Рассмотрим робота с четырехколесной ромбовидной схемой шасси с двумя ведущими колесами 4 и 11, расположенными на поперечной оси, и двумя опорными колесами 8 и 13 на продольной оси 1 (рис. 1). Такую схему шасси имеют, например, AGV-средства, применяемые на заводе BMW в Лейпциге [8, 9]. Расположим на продольной оси мобильной платформы на расстоянии  $d$  от центра

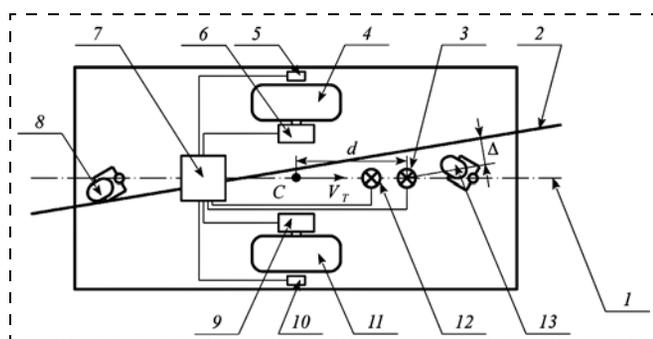


Рис. 1. К построению математической модели робота с ромбовидной схемой шасси

масс  $C$  датчик 3, измеряющий боковое отклонение  $\Delta$  робота от заданной трассы 2. Трасса, вдоль которой движется робот, может иметь оптический (в виде нарисованной линии) или индуктивный способ задания. Продольную скорость движения центра масс обозначим  $V_T$ .

Траектория движения транспортного средства определяется изменением во времени скоростей вращения ведущих колес 4 и 11, каждое из которых приводится в движение посредством двигателя постоянного тока с понижающими редукторами 6, 9, соответственно. Последний может быть конструктивно выполнен совместно с двигателем и служит для увеличения мощности на выходном валу, соединяемом с колесом. Скорость вращения двигателей регулируется бортовым устройством управления 7, формирующим воздействия на основании сигналов от датчика бокового отклонения 3 и датчиков скоростей вращения колес 5 и 10 при использовании выбранного закона или алгоритма управления. Приближение к точкам на трассе, в которых должна происходить остановка транспортного средства для погрузки или разгрузки, определяется бортовым устройством управления по сигналу от датчика 12, который распознает наличие маркера, расположенного на некотором расстоянии до точки останова.

Задача исследования состоит в получении для выбранной схемы транспортного средства математической модели системы управления, которая обладает следующими свойствами:

- учитывает продольное и боковое движение относительно заданной трассы, а также взаимосвязь этих двух движений;
- отражает структуру системы управления транспортного средства;
- позволяет осуществлять анализ и синтез управляющих устройств методами классической теории управления;
- отображает движение мобильного средства в пространстве.

Построение модели проведем при следующих упрощениях, которые используются, например, в работах [4, 10—12]:

- робот движется по гладкой поверхности в горизонтальной плоскости;
- эффекты, связанные с динамическим перераспределением нагрузки на колеса при маневрировании, не учитываются;
- корпус транспортного средства является абсолютно жестким;
- отсутствует проскальзывание при движении всех колес;
- не учитывается влияние ведомых колес на направление движения.

### Метод решения задачи исследования

Представим в каждый момент времени движение робота относительно заданной трассы в виде двух взаимосвязанных движений: бокового, перпен-

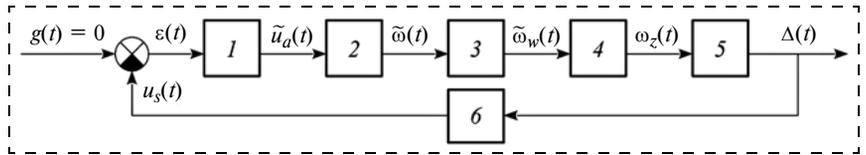
дикулярного к трассе, и продольного, сонаправленного ей. Будем полагать, что управление каждым из рассматриваемых движений осуществляется по своему каналу системы управления.

Заданием для подсистемы управления боковым отклонением является нулевое расстояние центра масс робота до трассы. При наличии отклонения его значение определяется датчиком, который может иметь различную конструкцию в зависимости от способа организации трассы. Пример датчика при индуктивном задании трассы приведен в статье [13]. В случае оптического задания трассы отклонение может определяться по разности показаний двух аналоговых датчиков, один из которых расположен левее, а другой — правее трассы. Ошибка рассогласования, соответствующая боковому отклонению, преобразуется бортовым устройством управления в сигнал ШИМ. Последовательность импульсов, подаваемых на левый двигатель, может иметь скважность, отличную от скважности импульсов, подаваемых на правый двигатель, т. е. средние значения управляющих напряжений левого и правого двигателей в общем случае различны. Таким образом, можно рассмотреть на выходе устройства усиления разность средних значений управляющих напряжений, подаваемых в виде сигнала ШИМ на двигатели постоянного тока. Разность средних значений напряжений создает разность скоростей вращения двигателей, редукторов и, соответственно, ведущих колес, что приводит к повороту мобильной платформы относительно ее центра масс и изменению бокового отклонения. Описанный процесс управления боковым отклонением представим в виде функциональной схемы, изображенной на рис. 2.

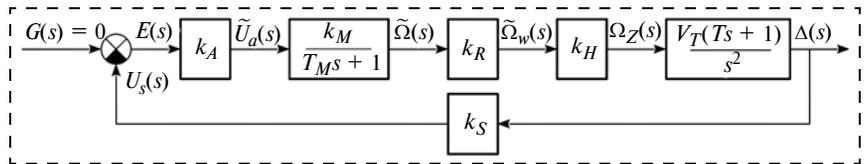
Используя известные из работ [14–16] передаточные функции элементов функциональной схемы и применяя преобразование Лапласа для сигналов, получим структурную схему подсистемы управления боковым отклонением (рис. 3).

Далее рассмотрим управление продольным движением, которое осуществляется в двух режимах. В первом из них происходит управление продольной скоростью, когда робот движется по прямолинейным участкам или участкам поворотов трассы. Второй режим предполагает управление продольным положением транспортного средства в местах останова для осуществления погрузочно-разгрузочных операций.

Процесс управления продольной скоростью представим в виде функциональной схемы (рис. 4). Заданием для соответствующей подсистемы является значение скорости, которое необходимо поддерживать при движении на текущем участке трассы.



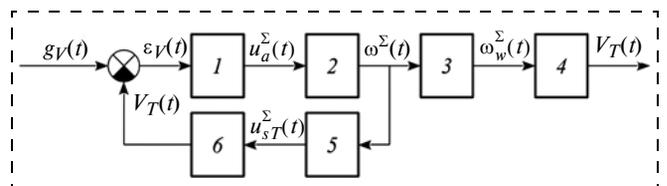
**Рис. 2. Функциональная схема подсистемы управления боковым отклонением:** 1 — усилительное устройство; 2 — двигатели; 3 — редукторы; 4 — шасси; 5 — робокар; 6 — датчик бокового отклонения;  $g(t)$  — заданное боковое отклонение;  $\varepsilon(t)$  — сигнал рассогласования;  $\bar{u}_a(t)$  — разность средних значений напряжений, подаваемых на двигатели;  $\bar{\omega}(t)$  — разность скоростей вращения валов двигателей;  $\bar{\omega}_w(t)$  — разность скоростей вращения ведущих колес;  $\omega_z(t)$  — скорость поворота платформы относительно центра масс;  $u_s(t)$  — напряжение на выходе датчика бокового отклонения



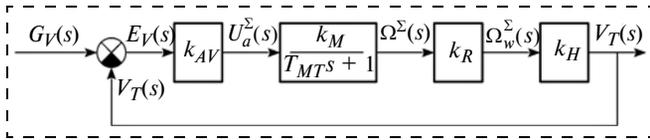
**Рис. 3. Структурная схема подсистемы управления боковым отклонением:**  $k_A$  — коэффициент передачи усилителя;  $k_M$ ,  $T_M$  — коэффициент усиления и постоянная времени двигателей, зависящая от сопротивления двигателям при повороте робота;  $k_R$  — коэффициент передачи редуктора;  $k_H$  — коэффициент передачи шасси;  $T$  — постоянная времени мобильной платформы, равная  $T = d/V_T$ ;  $k_S$  — коэффициент передачи датчика

Реальная скорость движения рассчитывается по измеренным датчиками скоростям вращения двух ведущих колес и зависит от суммы этих скоростей. Разность между заданной и реальной продольными скоростями дает ошибку рассогласования, поступающую на усилительное устройство. На выходе усилителя рассмотрим сумму управляющих сигналов, которые представляют собой среднее значение напряжения, подаваемого в виде ШИМ-сигнала на двигатели. От суммы средних значений управляющих напряжений зависит сумма скоростей вращения валов двигателей, выходных валов редукторов и, соответственно, ведущих колес. Наконец, сумма скоростей вращения колес определяет продольную скорость робота.

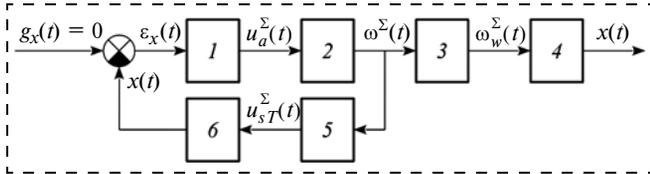
Структурная схема системы управления продольной скоростью, полученная на основе функциональной схемы, после приведения ее к виду



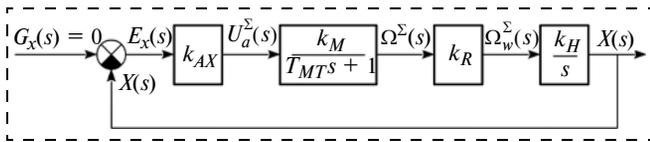
**Рис. 4. Функциональная схема системы управления продольной скоростью:** 1 — усилительное устройство; 2 — двигатели; 3 — редукторы; 4 — шасси; 5 — датчик угловой скорости; 6 — блок вычисления продольной скорости;  $g_V(t)$  — заданное значение продольной скорости;  $\varepsilon_V(t)$  — сигнал рассогласования;  $u_a^\Sigma(t)$  — сумма средних значений напряжений, подаваемых на двигатели;  $\omega^\Sigma(t)$  — сумма скоростей вращения валов двигателей;  $\omega_w^\Sigma(t)$  — сумма скоростей вращения ведущих колес;  $V_T(t)$  — продольная скорость;  $u_s^\Sigma(t)$  — сумма напряжений датчиков, измеряющих скорости вращения валов



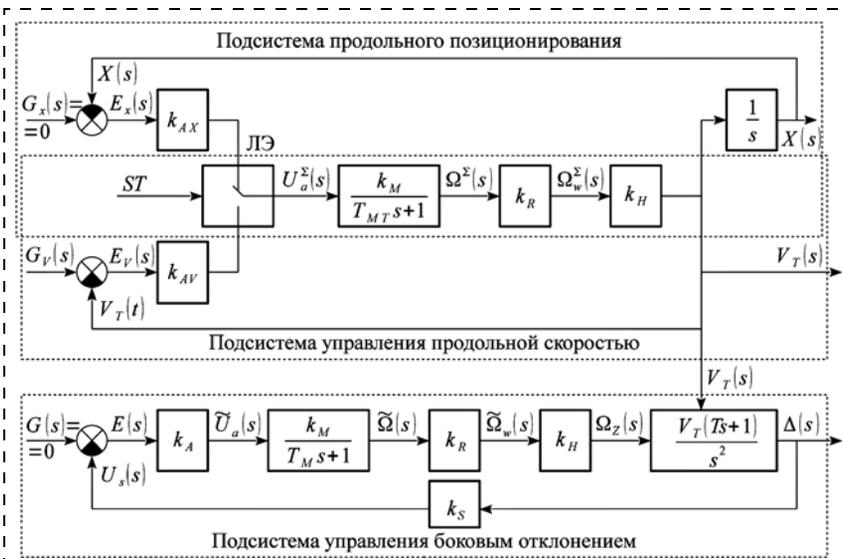
**Рис. 5. Структурная схема подсистемы управления продольной скоростью с единичной отрицательной обратной связью:**  $k_{AV}$  — коэффициент передачи усилителя подсистемы управления продольной скоростью;  $k_M, T_{MT}$  — коэффициент усиления и постоянная времени двигателей, зависящая от сопротивления двигателям при продольном движении;  $k_R$  — коэффициент передачи редуктора;  $k_H$  — коэффициент передачи шасси



**Рис. 6. Функциональная схема системы управления продольным положением:** 1 — усилительное устройство; 2 — двигатели; 3 — редукторы; 4 — шасси; 5 — датчик угловой скорости; 6 — блок вычисления пройденного расстояния;  $g_x(t)$  — заданное расстояние от местоположения робота на трассе до точки останова;  $\epsilon_x(t)$  — сигнал рассогласования;  $u_a^\Sigma(t)$  — сумма средних значений напряжений, подаваемых на двигатели;  $\omega^\Sigma(t)$  — сумма скоростей вращения валов двигателей;  $\omega_w^\Sigma(t)$  — сумма скоростей вращения ведущих колес;  $x(t)$  — пройденный путь от момента начала работы подсистемы управления продольным положением;  $u_{sT}^\Sigma(t)$  — сумма напряжений датчиков, измеряющих скорости вращения валов



**Рис. 7. Структурная схема подсистемы продольного позиционирования с единичной отрицательной обратной связью:**  $k_{AX}$  — коэффициент передачи усилителя подсистемы управления продольного позиционирования;  $k_M, T_{MT}$  — коэффициент усиления и постоянная времени двигателей, зависящая от сопротивления двигателям при продольном движении;  $k_R$  — коэффициент передачи редуктора;  $k_H$  — коэффициент передачи шасси



**Рис. 8. Структурная схема обобщенной модели системы управления робота**

замкнутой системы управления с единичной отрицательной обратной связью и преобразования сигналов по Лапласу представлена на рис. 5.

В случае управления продольным положением задающим сигналом является нулевое расстояние от местоположения робота на трассе до точки останова, а выходным — пройденный путь от момента начала работы подсистемы управления продольным положением до текущего момента времени. При этом значение пройденного пути вычисляется исходя из суммарной скорости двигателей колес, а ошибка рассогласования представляет собой реальное расстояние, которое осталось пройти до места останова. Основываясь на схеме управления продольной скоростью (см. рис. 4), с учетом указанных отличий составим функциональную схему подсистемы продольного позиционирования (рис. 6).

Как и ранее, для простоты анализа получена структурная схема подсистемы продольного позиционирования с единичной отрицательной обратной связью (рис. 7).

По полученным структурным схемам (см. рис. 3, 5, 7) сформируем обобщенную модель системы управления мобильным транспортным средством, учитывая взаимосвязь продольного и бокового движений робота (рис. 8). Переключение би-стабильного логического элемента (ЛЭ) соответствует смене режима управления продольным движением с управления скоростью на управление положением и обратно. Такое переключение происходит по сигналу  $ST$ , формируемому датчиком приближения к маркеру останова.

Как видно, структурная схема обобщенной модели имеет в качестве выходных сигналов продольную скорость робота, которая при интегрировании дает пройденный путь по заданной трассе, и боковое отклонение от трассы. Такая модель полностью определяет положение транспортного средства относительно прямолинейного участка трассы. Для учета имеющихся участков поворота трассы будем считать, что отклонение трассы от прямолинейного направления является возмущающим воздействием для подсистемы управления боковым отклонением робота (рис. 9).

Понятие отклонения от прямолинейного направления будем рассматривать как расстояние  $\Delta_T(t_i)$  от точки, которая рассматривается в следующий момент времени  $t_{i+1}$ , на трассе до прямой, проходящей через точки трассы, соответствующие текущему  $t_i$  и предыдущему  $t_{i-1}$  моментам времени (рис. 10). При малом значении интервала времени  $[t_{i-1}; t_i]$  отрезок, задающий текущее прямолинейное направление движения, будет приблизительно совпадать с участком кривой трассы.

Подача в качестве возмущающего воздействия нулевых и ненулевых

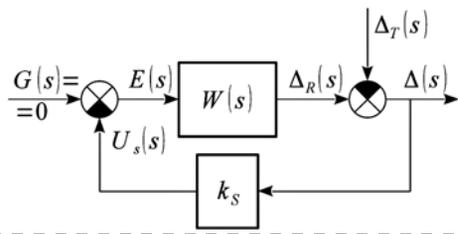


Рис. 9. Подсистема управления боковым отклонением с учетом возмущающего воздействия, являющегося следствием непрямолинейности трассы:

$W(s)$  — передаточная функция прямого канала подсистемы управления боковым отклонением;  $\Delta_R(s)$ ,  $\Delta_T(s)$ ,  $\Delta(s)$  — преобразованные по Лапласу отклонение робота от прямолинейного направления движения, отклонение точки на трассе от прямолинейного направления и боковое отклонение робота от заданной трассы соответственно

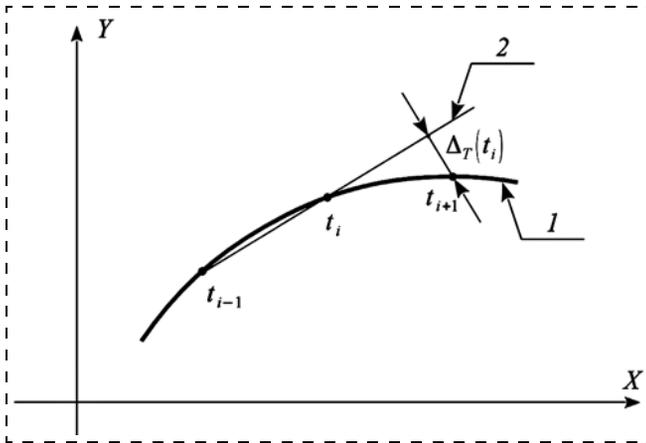


Рис. 10. Рисунок, поясняющий понятие отклонения к прямолинейному направлению трассы:

1 — заданная трасса; 2 — прямолинейное направление трассы в момент времени  $t_i$

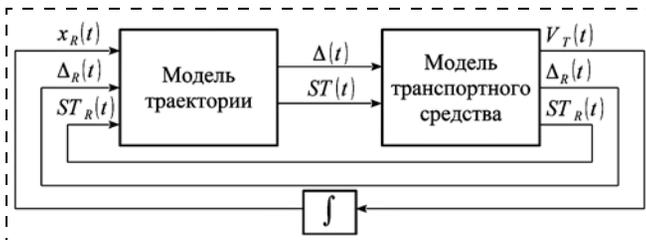


Рис. 11. Взаимосвязь модели трассы и обобщенной модели робота

значений, что соответствует прямолинейным и криволинейным участкам, позволяет моделировать задание различных конфигураций трассы.

Для компьютерного моделирования дополним модель трассы таким образом, чтобы в зависимости от текущего положения транспортного средства, которое определяется пройденным расстоянием  $x_R$ , она предоставляла для модели робота следующую информацию:

- боковое отклонение от трассы  $\Delta$  в текущий момент времени, которое равно разности  $\Delta_R - \Delta_T$ ;
- значение логического сигнала  $ST$  выбора управления продольной скоростью или продольным положением.

Вместе с тем, модель движения транспортного средства, кроме величины  $x_R$ , должна предоставлять для модели трассы:

- значение  $\Delta_R$  бокового отклонения робота от прямолинейного движения;
- значение логического сигнала  $ST_R$ , соответствующего тому, произошла ли полная остановка робота, т. е. готово ли транспортное средство к выполнению погрузочно-разгрузочной операции.

Взаимосвязь модели трассы и модели мобильного робота показана на рис. 11.

Располагая моделью пространственной конфигурации трассы и моделью движения робота относительно трассы, можно путем несложных математических действий определять положение робота в пространстве.

### Интерпретация и иллюстрация полученных результатов исследования

Приведем примеры построения траектории движения транспортного средства с использованием разработанной модели. Представленные далее результаты получены путем компьютерного моделирования в среде MATLAB.

На рис. 12 показано движение робота на участке торможения перед точкой останова с начальным боковым отклонением от трассы 0,2 м. Другие начальные условия: расстояние от точки начала торможения до точки останова — 1 м; продольная скорость — нулевая.

На рис. 13 продемонстрировано использование модели для построения движения робота вдоль прямолинейного участка траектории с управлением по продольной скорости, заданием для которой является значение 0,5 м/с. Начальные условия: продольная скорость — нулевая, боковое отклонение — 0,2 м.

График на рис. 14 является результатом моделирования движения вдоль трассы, каждая точка которой на очередном шаге моделирования имеет отклонение 0,004 м. Другие параметры моделиро-

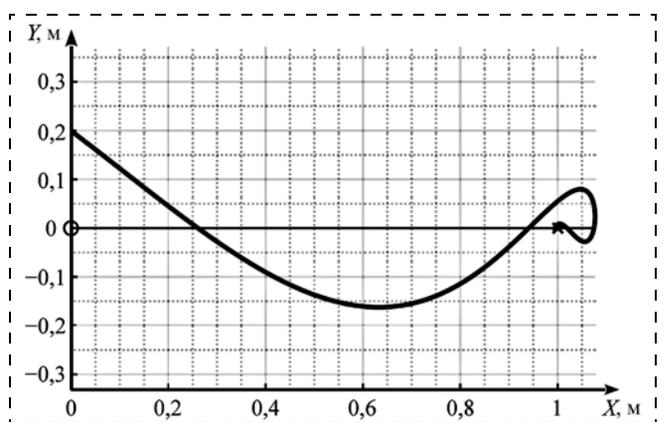


Рис. 12. Движение робота относительно прямолинейного участка торможения:

○ — маркер начала позиционирования; × — точка останова робота

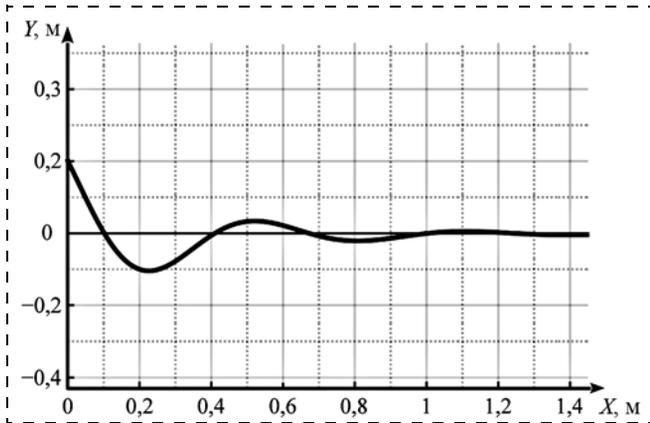


Рис. 13. Траектория движения робота относительно прямолинейного участка при управлении продольной скоростью

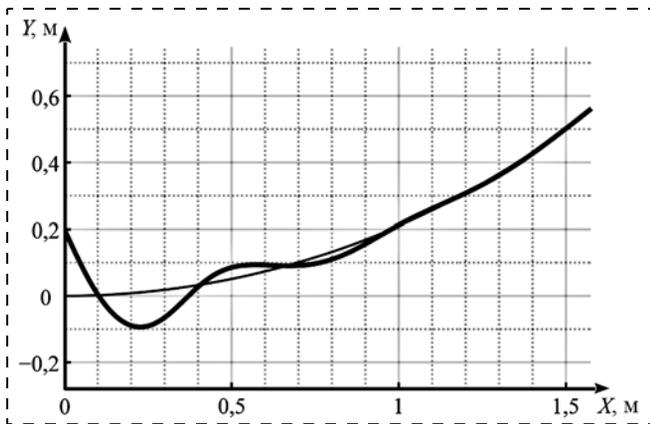


Рис. 14. Траектория движения робота по криволинейному участку трассы при ненулевом начальном боковом отклонении

вания: начальное боковое отклонение 0,2 м, начальное и заданное значение продольной скорости соответственно 0 м/с и 0,5 м/с.

Комбинируя участки прямолинейного движения и участки поворота, можно исследовать движение робота относительно сложной трассы, состоящей из участков прямолинейного движения и участков поворота, а также точек останова транспортного средства для осуществления погрузочно-разгрузочных операций.

Кроме того, если пренебречь взаимосвязью подсистем управления движением (см. рис. 8), легко можно получить показатели качества процесса управления для каждой из них в отдельности. На рис. 15 показан полученный с помощью разработанной модели процесс компенсации бокового отклонения при его начальном значении, равном максимально допустимому 0,2 м, и продольной скорости 0,5 м/с.

Как видно из приведенного графика, процесс управления боковым отклонением обладает достаточно большим перерегулированием  $\sigma$ , временем регулирования  $T_p$  и колебательностью. Управление продольной скоростью и положением также имеет недостатки. Так, процесс набора скорости роботом от нуля до заданного значения, равного 1 м/с

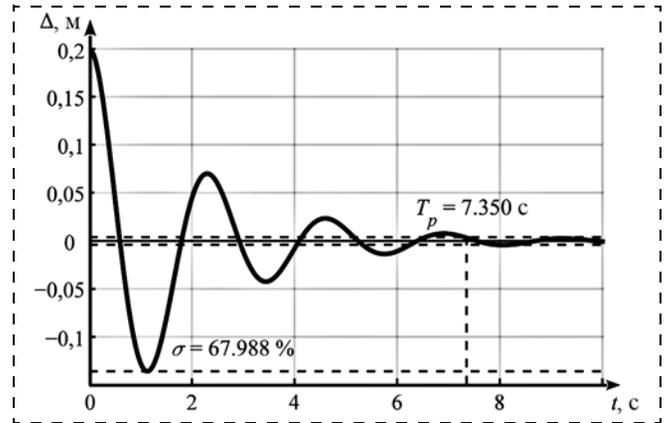


Рис. 15. Реакция подсистемы управления боковым отклонением на ненулевое начальное отклонение от заданной трассы

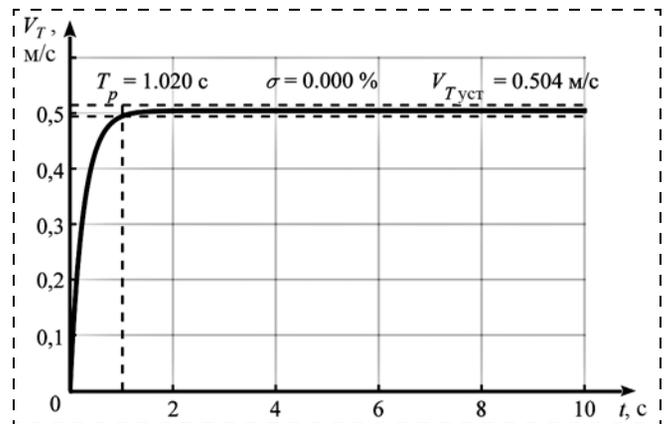


Рис. 16. Переходный процесс подсистемы управления продольной скоростью

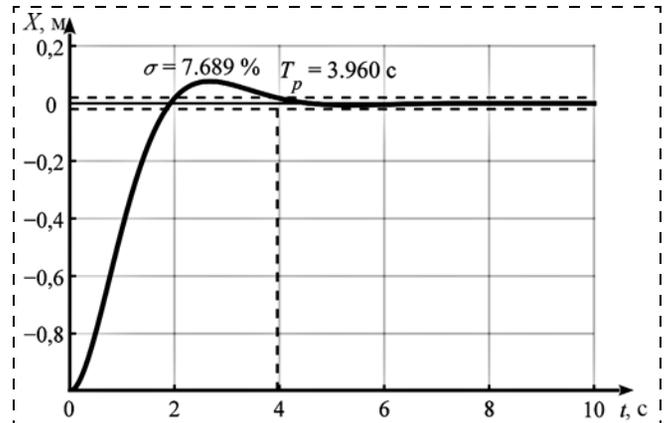


Рис. 17. Переходный процесс подсистемы управления продольным положением

(рис. 16), имеет статическую ошибку, поскольку значение скорости в установившемся режиме  $V_{Tуст} = 0,504$  м/с меньше задания.

Процесс управления по положению представлен на рис. 17. Здесь в момент включения подсистемы позиционирования расстояние до точки требуемого останова равно 1 м.

Наличие перерегулирования на рис. 17 соответствует необходимости реверсивного движения транспортного средства и является нежелательным.

## Заклучение

Достоинством разработанной модели управления движением четырехколесного транспортного средства с двумя ведущими и двумя опорными колесами является декомпозиция системы управления на подсистемы, каждая из которых представляется в виде структурной схемы.

Проведенный анализ выявил следующие недостатки, которые предполагается устранить путем синтеза и внедрения регуляторов для каждой подсистемы в отдельности: управление боковым отклонением обладает большими колебательностью и временем регулирования, управление продольной скоростью имеет статическую ошибку, а для управления положением недостаток заключается в наличии перерегулирования. При этом за счет представления подсистем в виде структурных схем имеется возможность синтеза законов управления методами как классической, так и современной теории управления.

Другое достоинство модели заключается в возможности построения для трассы любой конфигурации, заданной в отклонениях траектории движения мобильного робота в пространстве с учетом взаимосвязи подсистем.

Таким образом, полученная модель полезна для предварительного исследования спроектированных законов управления движения робота.

## Список литературы

1. Berman S., Schechtman E., Edan Y. Evaluation of Automatic Guided Vehicle Systems // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2008. doi: 10.1016/j.rcim.2008.02.009.
2. Siegwart R., Nourbakhsh I. R., Scaramuzza D. Introduction to autonomous mobile robots. Publishing house of Massachusetts Institute of Technology, 2004. 321 p.

3. Martynenko Yu. G. Motion Control of Mobile Wheeled Robots // Journal of Mathematical Sciences. 2007. Vol. 147, N. 2. P. 6569–6606.
4. Аль-Еззи А. Исследование пусковых режимов колесного мобильного робота // Известия ЮЗГУ. Техника и технологии. 2011. № 1. С. 43–52.
5. Рыбин И. А., Рубанов В. Г., Дуюн Т. А. Способ исследования движения мобильного робота на стационарной установке удаленного доступа // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2014. № 11. С. 14–21.
6. Патент РФ № 2013104803/11, 27.08.2015. Рубанов В. Г., Рыбин И. А., Кижук А. С., Дуюн Т. А. Стенд и способ исследования движения робота / Патент России № 2561405. 2013. Бюл. № 24.
7. Рубанов В. Г., Кижук А. С. Мобильные микропроцессорные системы автоматизации транспортно-складских операций. Мобильные робототехнические системы. Белгород: Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова, 2011. 289 с.
8. Ulrich G. Automated Guided Vehicle Systems. A Primer with Practical Applications. Berlin: Springer, 2015. 227 p. DOI 10.1007/978-3-662-44814-4.
9. URL: <http://www.ds-automotion.com/en/automotive/videos.html> (дата обращения: 26.03.2016).
10. Ткачев С. Б. Реализация движения колесного робота по заданной траектории // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. 2008. № 2. С. 33–55.
11. Чувейко М. В., Путов А. В. Математическое моделирование интеллектуальной системы управления и навигации мобильного робота // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 6. URL: [www.science-education.ru/106-7573](http://www.science-education.ru/106-7573) (дата обращения: 09.01.2014).
12. Мартыненко Ю. Г. Динамика мобильных роботов // Соросовский образовательный журнал. 2000. Т. 6, № 5. С. 110–115.
13. Рубанов В. Г., Кижук А. С. Комбинированный индукционный датчик бокового отклонения и позиционирования мобильного робота // Изв. вузов. Приборостроение. 2003. № 11. С. 39–43.
14. Луакурва Дж. П. А. Автоматизация транспортно-складских операций технологического процесса производства асбестоцементных изделий: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.06. Белгород, 2008. 167 с.
15. Волков Н. И., Миловзоров В. П. Электромашинные устройства автоматики. М.: Высш. шк., 1986. 335 с.
16. Подлесный Н. И., Рубанов В. Г. Элементы систем автоматического управления и контроля. К: Выща шк., 1991. 461 с.

## Mathematical Model of a Mobile Vehicle Control System

I. A. Rybin, Postgraduate Student, [intiret@gmail.com](mailto:intiret@gmail.com)✉, V. G. Rubanov, D. Sc., Professor, [rubanov@intbel.ru](mailto:rubanov@intbel.ru), Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov, Belgorod, 308036, Russian Federation

Corresponding author: Rybin Iliya A., Postgraduate Student  
Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov,  
Belgorod, 308036, Russian Federation, e-mail: [intiret@gmail.com](mailto:intiret@gmail.com)

Received on October 26, 2016

Accepted on November 11, 2016

*The paper presents a mathematical model of a motion control system for a vehicle with a chassis of two independent drive wheels. The active wheels are driven by DC motors through the reducers. The vehicle has a wheel speed sensor and a sensor of the lateral deviation from the predetermined route, a signal from which is transmitted to the control unit. The model takes into account the position of the wheeled mobile vehicle in relation to a guide path. It is built with the transfer functions, which allow application of the methods of both classical and modern control theory for the synthesis of the control devices. The model of the vehicle describes three interrelated subsystems, which control the lateral deviation, the longitudinal velocity and the position. Research of each subsystem separately showed their drawbacks. The lateral deviation control has a large overshoot and settling time. The longitudinal speed control has an error in steady state. The drawback of the position control is the presence of an overshoot, which demands the reverse engines. These drawbacks can be eliminated by introduction of the control devices into each of the subsystems. Also, the model envisages a trajectory of the vehicle motion in the coordinate plane. Besides, it provides for a model of the trace, defined in the deviations from the straight direction. This model takes into account the presence of the straight sections, the turning sections and the positioning points on the trace. The developed model is useful for a preliminary research of the synthesized control laws of the vehicle motion.*

**Keywords:** mobile robot, vehicle, control system, model, transfer function, trajectory of motion

**Acknowledgements:** The work was carried out within the framework of the state task of RF 2.1396.2017/IF "Development of methods

for ensuring the survivability of intelligent on-board control systems for unmanned vehicles".

For citation:

**Rybin I. A., Rubanov V. G.** Mathematical Model of a Mobile Vehicle Control System, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 333–340.

DOI: 10.17587/mau.18.333-340

### References

1. **Berman S., Schechtman E., Edan Y.** Evaluation of Automatic Guided Vehicle Systems, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2008, doi: 10.1016/j.rcim.2008.02.009.
2. **Sieglwart R., Nourbakhsh I. R., Scaramuzza D.** Introduction to autonomous mobile robots, Publishing house of Massachusetts Institute of Technology, 2004, 321 p.
3. **Martynenko Yu. G.** Motion Control of Mobile Wheeled Robots, *Journal of Mathematical Sciences*, 2007, vol. 147, no. 2, pp. 6569–6606.
4. **Al'-Ezzi A.** *Izvestiya YuZGU. Tekhnika i Tekhnologii*, 2011, no. 1, pp. 43–52 (in Russian).
5. **Rybin I. A., Rubanov V. G., Duyun T. A.** *Pribory i Sistemy. Upravlenie, Kontrol', Diagnostika*, 2014, no. 11, pp. 14–21 (in Russian).
6. **Rubanov V. G., Rybin I. A., Kizhuk A. S., Duyun T. A.** Patent RF № 2013104803/11, 27.08.2015. Byul. № 24 (in Russian).
7. **Rubanov V. G., Kizhuk A. S.** *Mobil'nye mikroprotsessornye sistemy avtomatizatsii transportno-skladskikh operatsii. Mobil'nye robototekhnicheskie sistemy* (Mobile microprocessor systems automate the transport and warehousing operations. Mobile robotic systems), Bel-

gorod, Publishing house of BGTU im. V. G. Shukhova, 2011, 289 p. (in Russian).

8. **Ullrich G.** *Automated Guided Vehicle Systems. A Primer with Practical Applications*, Berlin, Springer, 2015, 227 p. DOI 10.1007/978-3-662-44814-4.

9. **Available** at: <http://www.ds-automotion.com/en/automotive/videos.html> (data obrashcheniya: 26.03.2016).

10. **Tkachev S. B.** *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Estestvennyye Nauki*, 2008, no. 2, pp. 33–55 (in Russian).

11. **Chuveiko M. V., Putov A. V.** *Sovremennyye Problemy Nauki i Obrazovaniya*, 2012, no. 6, available at: [www.science-education.ru/106-7573](http://www.science-education.ru/106-7573) (date of access 09.01.2014) (in Russian).

12. **Martynenko Yu. G.** *Sorosovskii obrazovatel'nyi zhurnal*, 2000, vol. 6, no. 5, pp. 110–115 (in Russian).

13. **Rubanov V. G., Kizhuk A. S.** *Izvestiya Vuzov. Priborostroenie*, 2003, no. 11, pp. 39–43 (in Russian).

14. **Luakurva Dzh. P. A.** *Avtomatizatsiya transportno-skladskikh operatsii tekhnologicheskogo protsessa proizvodstva asbestotsementnykh izdelii* (Automation of the transport and storage operations of the technological process of production of asbestos cement products): dis. ... kand. tekhn. nauk: 05.13.06, Belgorod, 2008, 167 p. (in Russian).

15. **Volkov N. I., Milovzorov V. P.** *Elektromashinnye ustroystva avtomatiki* (Electric machinery automation devices), Moscow, Vysshaya shkola, 1986, 335 p. (in Russian).

16. **Podlesnyi N. I., Rubanov V. G.** *Elementy sistem avtomaticheskogo upravleniya i kontrolya* (Elements of automatic control and monitoring systems), Kiev, Vyshcha shk., 1991, 461 p. (in Russian).

УДК 681.5.09

DOI: 10.17587/mau.18.340-345

**А. В. Гулай**, канд. техн. наук, зав. кафедрой, is@bntu.by, **В. М. Зайцев**, канд. техн. наук, доц., is@bntu.by, Белорусский национальный технический университет, Минск

## Кодовое разделение логических каналов передачи транзакций в интеллектуальных мехатронных системах

*Предложен численный метод ускоренного выделения битов информационных потоков из бит-кадров при кодовом разделении логических каналов передачи транзакций на основе использования функций Уолша в интеллектуальных мехатронных системах. Проанализирована схема кодового разделения потоков битов за счет введения в мехатронную систему интеллектуальных мультиплексоров потоков битов источников информации на передающей стороне канала и интеллектуальных сепараторов потоков битов на приемной стороне. Особенность данной схемы кодового разделения логических каналов заключается в том, что она полностью реализуется за счет использования программных средств в составе интеллектуальной мехатронной системы.*

**Ключевые слова:** интеллектуальные мехатронные системы, каналы передачи транзакций, кодовое разделение каналов, обработка бит-кадров, функции Уолша

### Введение

Развитие информационных технологий и средств мехатроники привело к построению систем комплексного автоматизированного управления различными производственно-технологическими процессами. Системы управления технологиями и производствами объединяют также группы разнообразных интеллектуальных устройств. Такие системы включают, как правило, интеллектуальные сенсорные устройства, ситуационные центры и центры выработки управленческих решений, а также функционально ориентированные исполнительные механизмы с дистанционным управлением. Современный производственно-технологический объект, как правило, насыщен радиоэлектронным оборудованием автоматизированного контроля и

управления, а также кабельными линиями связи и радиочастотными каналами передачи транзакций.

В большинстве проектов традиционно предусматривается раздельное использование канальных ресурсов источниками и потребителями информации, что сопровождается необходимостью прокладки огромного числа линий связи или выделением достаточно широкого спектра частот из состава весьма дефицитного частотного ресурса. Острота указанной проблемы в значительной мере может быть снижена за счет применения принципов кодового разделения (уплотнения) каналов передачи информации — CDMA (Code Division Multiple Access) [1–6]. Однако большинство проектных решений в этой области относится к сфере построения средств сотовой связи и в той или иной мере повторяет основные положения международной рекомендации

IS—95 [1, 2]. В качестве недостатков технологии CDMA можно отметить сложность технического построения и высокий уровень помех при увеличении числа одновременно функционирующих абонентов, сигналы которых на приемной стороне выделяются аппаратно-программными корреляторами [7—10].

С учетом вышеизложенного в данной работе представлен метод ускоренного выделения битов информационных потоков из бит-кадров при кодовом разделении логических каналов передачи транзакций на основе использования функций Уолша. Исследования показали, что в данном случае схема CDMA может быть полностью реализована программными средствами за счет введения в систему интеллектуальных мультиплексоров потоков битов источников информации на передающей стороне кабельного или радиочастотного каналов и интеллектуальных сепараторов потоков битов на приемной стороне. Установлено, что эти средства целесообразно применять выше уровней физического и логического каналов, но ниже уровня передачи транзакций.

#### Численный метод восстановления значений элементов бит-векторной строки

Рассмотрим численный метод ускоренного выделения битов информационных потоков из бит-кадров при кодовом разделении логических каналов на основе использования функций Уолша. При этом будем полагать, что аппаратные и программные средства передачи телеметрических данных в мехатронной системе должны обеспечивать обмен информацией между группой интеллектуальных сенсорных устройств и оборудованием центра обработки информации. Группа сенсорных компонентов включает  $n$  реально функционирующих независимых источников информации, которые для однонаправленной передачи потоков телеметрических транзакций используют один физический канал с кодовым разделением канального ресурса. Для передачи транзакций управления от оборудования центра обработки информации в направлении периферийных устройств должен применяться второй физический канал с самостоятельным кодовым разделением потоков транзакций между потребителями информации.

Информационная технология кодового разделения канального ресурса между различными источниками или потребителями информации предполагает параллельно-последовательную передачу транзакций, формируемых передающей стороной, с помощью следующих друг за другом информационных блоков, называемых бит-кадрами (или бит-таймами). Бит-кадры обеспечивают образование в одном физическом канале некоторого числа  $N$  логических каналов, в каждый из которых поступают биты транзакций соответствующих источников с исходной скоростью  $V = 1/\Delta t$ , где  $\Delta t$  — шаг по времени.

Схема движения информации в виде потоков битов от сенсорных источников  $1, 2, \dots, n$ , а также потоков битов резервных каналов  $(n + 1), (n + 2), \dots, N$  может быть представлена следующим образом:

- поток битов источника 1:

$$b_1[t + i\Delta t], b_1[t + (i - 1)\Delta t], b_1[t + (i - 2)\Delta t], \dots, \\ b_1[t + \Delta t], b_1[t], b_1[t - \Delta t];$$

- поток битов источника 2:

$$b_2[t + i\Delta t], b_2[t + (i - 1)\Delta t], b_2[t + (i - 2)\Delta t], \dots, \\ b_2[t + \Delta t], b_2[t], b_2[t - \Delta t];$$

...

- поток битов источника  $j$ :

$$b_j[t + i\Delta t], b_j[t + (i - 1)\Delta t], b_j[t + (i - 2)\Delta t], \dots, \\ b_j[t + \Delta t], b_j[t], b_j[t - \Delta t];$$

...

- поток битов источника  $n$ :

$$b_n[t + i\Delta t], b_n[t + (i - 1)\Delta t], b_n[t + (i - 2)\Delta t], \dots, \\ b_n[t + \Delta t], b_n[t], b_n[t - \Delta t];$$

- поток битов канала  $n + 1$ :

$$0_{n+1}[t + i\Delta t], 0_{n+1}[t + (i - 1)\Delta t], 0_{n+1}[t + (i - 2)\Delta t], \dots, \\ 0_{n+1}[t + \Delta t], 0_{n+1}[t], 0_{n+1}[t - \Delta t];$$

...

- поток битов канала  $N$ :

$$0_N[t + i\Delta t], 0_N[t + (i - 1)\Delta t], 0_N[t + (i - 2)\Delta t], \dots, \\ 0_N[t + \Delta t], 0_N[t], 0_N[t - \Delta t].$$

Здесь  $b_j[t + i\Delta t]$  — значение бита источника  $j$  в момент времени  $t + i\Delta t$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$  — текущий номер отсчета времени, соответствующий номеру бит-кадра;  $j = 1, 2, \dots, N$  — номер источника. Величина  $\Delta t$  определяется в зависимости от требуемой скорости  $V$  передачи битов в информационных потоках источников.

Любой бит-кадр следует рассматривать как транспортный технологический блок мультиплексированных данных одновременно всех логических каналов. Каждый бит-кадр содержит специальным образом закодированные биты всех  $N$  логических каналов, при этом в составе текущего бит-кадра размещается по одному очередному биту каждого логического канала. В соответствии с рассматриваемой технологией передача одного бит-кадра должна осуществляться с помощью  $N$  тактов с продолжительностью такта  $\tau$ , которая удовлетворяет условию  $\tau < \Delta t/N$ .

Закрепление источника с конкретным номером  $j$  за определенным логическим каналом может осуществляться как статически, так и динамически. В первом случае номер логического канала на приемной стороне однозначно идентифицирует номер источника информации. Во втором случае идентификация источника должна осуществляться путем оперативного выделения и анализа адресной группы битов очередной транзакции после ее полного получения приемной стороной. При любом вари-

анте построения схемы идентификации источников в каждом логическом канале протоколом информационного взаимодействия передающей и приемной сторон должны быть выделены зарезервированные кодовые комбинации битов для обозначения фактов начала (комбинация "старт") и завершения (комбинация "стоп") передачи отдельных транзакций. Эти комбинации оперативно формируются передающей стороной, а выявляются и обрабатываются на приемной стороне.

Значение  $N$  задает потенциальное число источников, которые одновременно могут использовать ресурс одного физического канала. В незадействованных логических каналах системы идет перманентная передача кодов нулей до момента появления кодовой комбинации битов "старт". При заданном значении  $n$  число логических каналов системы  $N$  необходимо выбирать исходя из следующего условия:

$$N = 2^u; u \geq \text{Ant}[\log_2 n], \quad (1)$$

где  $\text{Ant}[\log_2 n]$  — функция Антье верхней целочисленной границы значения  $\log_2 n$ . Для  $N > n$  избыточные каналы могут рассматриваться как каналный резерв, который в ряде случаев целесообразно специально вводить в целях обеспечения перспектив развития системы.

Для любого момента времени  $t + i\Delta t$  первые по очереди значащие биты потоков всех  $n$  функционирующих источников и нулевые биты  $N - n$  резервных логических каналов группируются в единый бит-кадр. Из отдельных битов  $\{b_j[t + i\Delta t]\}$  информационных потоков предварительно образуется бит-векторная строка:

$$B_i[t + i\Delta t] = \{B_{ij}[t + i\Delta t]\}. \quad (2)$$

В технологических целях элементы строки представляются биполярными единичными значениями:

$$B_{ij}[t + i\Delta t] = +1, \text{ если } b_j[t + i\Delta t] = 1; \quad (3)$$

$$B_{ij}[t + i\Delta t] = -1, \text{ если } b_j[t + i\Delta t] = 0. \quad (4)$$

При кодировании в качестве сигнатуры бит-кадра используется тактированный по времени набор функций Уолша  $k$ -го порядка:

$$\{W_{k,v}\}; v = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

где  $v$  — номера последовательных тактов передачи бит-кадра с продолжительностью такта  $\tau$ . При этом в такте с номером  $v$  передаются биты с номерами  $j = v$  всех источников. Значения  $h_{k,v} = \pm 1$  каждой из функций Уолша  $W_{k,v}$  в тактах  $v$  являются элементами строк матрицы Адамара:

$$H_N = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1v} & \dots & h_{1N} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2v} & \dots & h_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{i1} & h_{i2} & \dots & h_{iv} & \dots & h_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{N1} & h_{N2} & \dots & h_{Nv} & \dots & h_{NN} \end{pmatrix}; h_{ii} = \pm 1. \quad (6)$$

В каждом такте  $v$  выполняется передача не самих значений элементов бит-векторной строки  $B_i[t + i\Delta t] = \{B_{ij}[t + i\Delta t]\}$ , а результирующих параметров тактовых кодообразований  $\{\rho_{i,v}\}$ , которыми заполняется  $i$ -й бит-кадр:

$$\{\rho_{i,v}\} = B_i[t + i\Delta t] \times H_N, \quad (7)$$

при этом

$$\rho_{i,v} = B_{i1}h_{1v} + B_{i2}h_{2v} + \dots + B_{iv}h_{vv} + \dots + B_{iN}h_{Nv}. \quad (8)$$

Для более компактного изображения элементы бит-векторной строки  $B_i[t + i\Delta t]$  далее будут представляться соответствующими значениями  $B_{ij}$ .

На приемной стороне на основе полученного в  $i$ -м бит-кадре вектора тактовых параметров кодообразований  $\{\rho_{i,v}\}$  и известного набора функций Уолша  $\{W_{k,v}\}$  необходимо восстановить значения элементов бит-векторной строки  $B_i[t + i\Delta t]$ . Предлагаемый прямой метод сепарации предполагает непосредственное решение системы линейных алгебраических уравнений (8) относительно значений  $B_{ij}$ . Однако при  $N = 32; 64; 128$  и более затраты времени на решение уравнений могут оказаться чрезмерно большими, в то время как они не должны превышать граничного значения  $\Delta t$ . В практическом отношении это обстоятельство превращает рассматриваемый метод в неэффективный или вообще в непригодный.

#### Метод ускоренного выделения битов информационных потоков из бит-кадров

Рассмотрим возможную схему ускорения метода восстановления значений элементов бит-векторной строки, для чего воспользуемся особенностями формирования и свойствами матриц Адамара  $H_G$ ,  $G = 2^g$ ;  $g = 1, 2, \dots, u$ . Обычно матрицы Адамара формируются с использованием рекуррентного многошагового процесса:

$$H_G = \begin{pmatrix} H_{G/2} & H_{G/2} \\ H_{G/2} & -H_{G/2} \end{pmatrix}; H_1 = 1; H_2 = \begin{pmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для реализации предлагаемого способа важным является такое свойство матрицы Адамара, как неизменяемость ее при транспонировании. Кроме того, следует учитывать тот факт, что множество функций Уолша задается произведениями функций Радемахера:

$$r_{k,v} = \text{sign}\{\sin[\pi 2^{k-1} v]\}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} W_{0,v} &= 1; W_{1,v} = r_{0,v}; W_{2,v} = r_{1,v}; W_{3,v} = r_{1,v}r_{0,v}; \\ W_{4,v} &= r_{2,v}; W_{5,v} = r_{2,v}r_{0,v}; W_{6,v} = r_{2,v}r_{1,v}; \\ W_{7,v} &= r_{2,v}r_{1,v}r_{0,v}. \end{aligned} \quad (11)$$

При этом значения функций Уолша по числу знакоперемен начинают соответствовать элементам определенных строк матриц Адамара.

Выполним набор многоуровневых нисходящих равносильных преобразований системы линейных алгебраических уравнений. Схема вычислений может

быть представлена дихотомичным графом с  $u$  иерархическими уровнями вершин. При фиксированном значении  $N = 2^g$  на каждом уровне  $g = 1, 2, \dots, u$  необходимо обеспечить выполнение  $2^g$  однотипных шагов с вычислительными операциями сложения или вычитания. При этом для уровня  $g$  и шага  $s$  шаговые параметры  $\rho_{(g, s), i, j}$  в операциях сложения и параметры  $\rho_{(g, s), i, j}^*$  в операциях вычитания могут быть рекуррентно определены для каждого бит-кадра по факту его поступления на приемную сторону системы. Это фактически делает излишней реализацию нисходящего процесса непосредственного преобразования матриц уравнений и резко сокращает общую вычислительную сложность задачи.

Нисходящее равносильное преобразование первого уровня проведем путем выполнения операций первого шага алгебраического сложения уравнений с номерами  $1, 2, \dots, N/2$  и уравнений с номерами  $N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N$ . С учетом технологии построения матриц Адамара и функций Уолша равносильная система уравнений будет иметь следующий вид:

$$2[B_{i1}h_{1(N/2)} + B_{i2}h_{2(N/2)} + \dots + B_{i(N/2)}h_{(N/2)(N/2)}] = \rho_{(1, 1), i, (N/2)}, \quad (12)$$

где для первого уровня преобразований ( $u = 1$ ) и первого шага ( $s = 1$ ) этого уровня

$$\begin{aligned} \rho_{(1, 1), i, 1} &= \rho_{i, 1} + \rho_{i, (N/2 + 1)}; \\ \rho_{(1, 1), i, 2} &= \rho_{i, 2} + \rho_{i, (N/2 + 2)}; \dots; \\ \rho_{(1, 1), i, (N/2)} &= \rho_{i, (N/2)} + \rho_{i, N}. \end{aligned} \quad (13)$$

При шаговых операциях сложения имеет место подавление правой половины совокупности искомым неизвестных  $B_{i(N/2 + 1)}, B_{i(N/2 + 2)}, \dots, B_{iN}$  и удвоение коэффициентов неизвестных левой половины совокупности  $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{i(N/2)}$ .

На втором шаге выполняются операции вычитания из уравнений с номерами  $1, 2, \dots, N/2$  уравнений с номерами  $N/2 + 1, N/2 + 2, \dots, N$ . Происходит подавление левой половины совокупности искомым неизвестных  $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{i(N/2)}$  с удвоением коэффициентов неизвестных правой половины совокупности  $B_{i(N/2 + 1)}, B_{i(N/2 + 2)}, \dots, B_{iN}$ . При этом

$$2[B_{i(N/2 + 1)}h_{1(N/2 + 1)} + B_{i(N/2 + 1)}h_{2(N/2 + 2)} + \dots + B_{iN}h_{NN}] = \rho_{(1, 2), i, N}^*, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{(1, 2), i, (N/2 + 1)}^* &= \rho_{i, 1} - \rho_{i, (N/2 + 1)}; \\ \rho_{(1, 2), i, (N/2 + 2)}^* &= \rho_{i, 2} - \rho_{i, (N/2 + 2)}; \dots; \\ \rho_{(1, 2), i, (N = N/2 + N/2)}^* &= \rho_{i, (N/2)} - \rho_{i, N}. \end{aligned} \quad (15)$$

Один уровень равносильных преобразований приводит к расчленению каждой системы алгебраических уравнений этого уровня на две системы и одновременно сокращает порядок каждой вновь получаемой системы в два раза, но матрицы рав-

носильных систем без учета умножения на коэффициент 2 остаются матрицами Адамара, и их элементы не требуют каких-либо пересчетов. Это позволяет с помощью операций сложения и вычитания выполнять шаги второго и последующих уровней нисходящих равносильных преобразований. Например, последовательные равносильные преобразования первого шага второго уровня с помощью операций сложения образуют следующий вычислительный процесс:

$$4[B_{i1}h_{1(N/4)} + B_{i2}h_{2(N/4)} + \dots + B_{i(N/4)}h_{(N/4)(N/4)}] = \rho_{(2, 1), i, (N/4)}, \quad (16)$$

где для первого шага второго уровня преобразований получим:

$$\begin{aligned} \rho_{(2, 1), i, 1} &= \rho_{(1, 1), i, 1} + \rho_{(1, 1), i, (N/4 + 1)}; \\ \rho_{(2, 1), i, 2} &= \rho_{(1, 1), i, 2} + \rho_{(1, 1), i, (N/4 + 2)}; \dots; \\ \rho_{(2, 1), i, (N/4)} &= \rho_{(1, 1), i, (N/4)} + \rho_{(1, 1), i, (N/2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

После проведения первых шагов нисходящих равносильных преобразований на  $(u - 1)$ -м уровне результирующая система приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} [2^{(u-1)}][B_{i1}h_{11} + B_{i2}h_{21}] &= \rho_{(u-1, 1), i, 1}; \\ [2^{(u-1)}][B_{i1}h_{12} + B_{i2}h_{22}] &= \rho_{(u-1, 1), i, 2}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{(u-1, 1), i, 1} &= \rho_{(u-2, 1), i, 1} + \rho_{(u-2, 1), i, 3}; \\ \rho_{(u-1, 1), i, 2} &= \rho_{(u-2, 1), i, 2} + \rho_{(u-2, 1), i, 4}. \end{aligned} \quad (19)$$

Сложение и вычитание этих уравнений приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} [2^{(u-1)}](h_{11} + h_{12})B_{i1} &= \\ = \rho_{(u-1, 1), i, 1} + \rho_{(u-1, 1), i, 2} &= \rho_{(u, 1), i, 1}; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} [2^{(u-1)}](h_{21} - h_{22})B_{i2} &= \\ = \rho_{(u-1, 1), i, 1} - \rho_{(u-1, 1), i, 2} &= \rho_{(u, 1), i, 2}^*. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким образом, обеспечивается прямой расчет значений двух неизвестных:

$$B_{i1} = [\rho_{(u-1, 1), i, 1} + \rho_{(u-1, 1), i, 2}] / [2^{(u-1)}(h_{11} + h_{12})] = \rho_{(u, 1), i, 1} / 2^u; \quad (22)$$

$$B_{i2} = [\rho_{(u-1, 1), i, 1} - \rho_{(u-1, 1), i, 2}] / [2^{(u-1)}(h_{21} - h_{22})] = \rho_{(u, 1), i, 1}^* / 2^u. \quad (23)$$

Параллельные равносильные преобразования с помощью операций вычитания образуют процесс расчета значений еще для одной пары неизвестных:

$$[2^{(u-1)}][B_{i(N/2 + 1)}h_{1(N/2 + 1)} + B_{i(N/2 + 2)}h_{1(N/2 + 2)}] = \rho_{(u-1, [u-1]^2), i, (N/2 + 1)}^*; \quad (24)$$

$$[2^{(u-1)}][B_{i(N/2 + 1)}h_{2(N/2 + 1)} + B_{i(N/2 + 2)}h_{2(N/2 + 2)}] = \rho_{(u-1, [u-1]^2), i, (N/2 + 2)}^*; \quad (25)$$

Дихотомичная схема вычислительного процесса для  $N = 8$

Уровень преобр.	Шаг	Операция сложения	Шаг	Операция вычитания
<b>I</b> $g = 1$	$s = 1$	$\rho_{i,1} + \rho_{i,5} = \rho(1, 1), i, 1$ $\rho_{i,2} + \rho_{i,6} = \rho(1, 1), i, 2$ $\rho_{i,3} + \rho_{i,7} = \rho(1, 1), i, 3$ $\rho_{i,4} + \rho_{i,8} = \rho(1, 1), i, 4$	$s = 2$	$\rho_{i,1} - \rho_{i,5} = \rho_{(1,2),i,5}^*$ $\rho_{i,2} - \rho_{i,6} = \rho_{(1,2),i,6}^*$ $\rho_{i,3} - \rho_{i,7} = \rho_{(1,2),i,7}^*$ $\rho_{i,4} - \rho_{i,8} = \rho_{(1,2),i,8}^*$
<b>II</b> $g = 2$	$s = 1$	$\rho(1, 1), i, 1 + \rho(1, 1), i, 3 = \rho(2, 1), i, 1$ $\rho(1, 1), i, 2 + \rho(1, 1), i, 4 = \rho(2, 1), i, 2$	$s = 2$	$\rho_{i,3} - \rho_{i,7} = \rho_{(1,2),i,7}^*$ $\rho_{i,4} - \rho_{i,8} = \rho_{(1,2),i,8}^*$
	$s = 3$	$\rho_{(1,2),i,5}^* + \rho_{(1,2),i,7}^* = \rho(2, 3), i, 5$ $\rho_{(1,2),i,6}^* + \rho_{(1,2),i,8}^* = \rho(2, 3), i, 6$	$s = 4$	$\rho_{(1,2),i,5}^* - \rho_{(1,2),i,7}^* = \rho_{(2,4),i,7}^*$ $\rho_{(1,2),i,6}^* - \rho_{(1,2),i,8}^* = \rho_{(2,4),i,8}^*$
<b>III</b> $g = 3$	$s = 1; 3; 5; 7$	$B_{i1} = [\rho_{(2,1),i,1}^* + \rho_{(2,1),i,2}^*]/8$ $B_{i3} = [\rho_{(2,2),i,3}^* + \rho_{(2,2),i,4}^*]/8$ $B_{i5} = [\rho_{(2,3),i,5}^* + \rho_{(2,3),i,6}^*]/8$ $B_{i7} = [\rho_{(2,4),i,7}^* + \rho_{(2,4),i,8}^*]/8$	$s = 2; 4; 6; 8$	$B_{i2} = [\rho_{(2,1),i,1}^* - \rho_{(2,1),i,2}^*]/8$ $B_{i4} = [\rho_{(2,2),i,3}^* - \rho_{(2,2),i,4}^*]/8$ $B_{i6} = [\rho_{(2,3),i,5}^* - \rho_{(2,3),i,6}^*]/8$ $B_{i8} = [\rho_{(2,4),i,7}^* - \rho_{(2,4),i,8}^*]/8$

где

$$\begin{aligned} & \rho_{(u-1, [u-1]^2), i, (N/2+1)}^* = \\ & = \rho_{(u-2, [u-2]^2), i, (N/2+1)}^* - \rho_{(u-2, [u-2]^2), i, (N/2+3)}^* \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \rho_{(u-1, [u-1]^2), i, (N/2+2)}^* = \\ & = \rho_{(u-2, [u-2]^2), i, (N/2+1)}^* - \rho_{(u-2, [u-2]^2), i, (N/2+4)}^* \end{aligned} \quad (27)$$

Вычитание и сложение этих уравнений приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} B_{i(N/2+2)} &= \rho_{(u, u^2), i, (N/2+1)}^* / [(2^{(u-1)})(h_{1(N/2+2)} - \\ & - h_{2(N/2+2)})] = \rho_{(u, u^2), i, (N/2+2)}^* / 2^u; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} B_{i(N/2+1)} &= \rho_{(u, u^2), i, (N/2+1)}^* / [(2^{(u-1)})(h_{1(N/2+1)} + \\ & + h_{2(N/2+1)})] = \rho_{(u, u^2), i, (N/2+1)}^* / 2^u, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} & \rho_{(u, u^2), i, (N/2+2)}^* = \\ & = \rho_{(u-1, [u-1]^2), i, (N/2+1)}^* - \rho_{(u-1, [u-1]^2), i, (N/2+2)}^* \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \rho_{(u, u^2), i, (N/2+1)}^* = \\ & = \rho_{(u-1, [u-1]^2), i, (N/2+1)}^* + \rho_{(u-1, [u-1]^2), i, (N/2+2)}^* \end{aligned} \quad (31)$$

Аналогичным образом могут быть получены конечные выражения для расчета значений остальных неизвестных в виде восходящего процесса на основании предварительно определенных  $B_{i1}, B_{i2}, B_{i(N/2+1)}, B_{i(N/2+2)}$ .

Дихотомичная схема вычислительного процесса для случая  $N = 8$  представлена в таблице.

Построение программных моделей интеллектуального мультиплексора и интеллектуального сепаратора в среде MATLAB показало высокую эффективность и устойчивость процессов их функционирования. Даже при  $N = 256$  обеспечивается надежная сепарация информационных битов и их разнесение по источникам при допустимых задержках выполнения операций. Существенный дополнительный выигрыш по времени возникает за счет того, что все операции сепаратора в реальном процессоре обработки бит-кадров могут осуществляться исключительно с помощью коротких команд целочисленной арифметики.

### Заключение

Современный производственно-технологический объект, как правило, насыщен радиоэлектронным оборудованием автоматизированного контроля и управления, а также кабельными линиями связи и радиочастотными каналами передачи транзакций. Уменьшение числа линий связи или числа частотных диапазонов при функционировании интеллектуальных мехатронных систем проводится за счет применения принципов кодового разделения каналов (CDMA). Недостатком данного способа уплотнения каналов является высокий уровень помех при увеличении числа одновременно функционирующих абонентов, сигналы которых на приемной стороне выделяются аппаратно-программными корреляторами. С учетом этого предложен численный метод ускоренного выделения битов информационных потоков из бит-кадров при кодовом разделении логических каналов передачи транзакций на основе использования функций Уолша в интеллектуальных мехатронных системах. Проанализирована схема кодового разделения потоков битов

за счет введения в мехатронную систему интеллектуальных мультиплексоров потоков битов источников информации на передающей стороне канала и интеллектуальных сепараторов потоков битов на приемной стороне. Особенность данной схемы кодового разделения логических каналов заключается в том, что она полностью реализуется за счет использования программных средств в составе интеллектуальной мехатронной системы. Построение программных моделей интеллектуального мультиплексора и интеллектуального сепаратора показало высокую эффективность и устойчивость процессов их функционирования.

#### Список литературы

1. **Феер К.** Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра. М.: Радио и связь, 2000. 520 с.

2. **Ипатов В. П.** Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения. М.: Техносфера, 2007. 486 с.
3. **Варакин Л. Е.** Системы связи с шумоподобными сигналами. М.: Радио и связь, 1985. 384 с.
4. **Окунев Ю. Б.** Цифровая передача информации фазоманипулированными сигналами. М.: Радио и связь, 1991. 295 с.
5. **Dubendorf V. A.** *Wireless Data Technologies*. Chichester: John Wiley & Sons, 2003. 254 p.
6. **Verdu S.** Wireless bandwidth in the making // *IEEE Communication Magazine*. 2000. Vol. 38, № 7. P. 53–58.
7. **Tse D., Viswanath P.** *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005. 323 p.
8. **Fazel K., Kaiser S.** *Multi-Carrier and Spread Spectrum Systems*. Chichester: John Wiley & Sons, 2003. 300 p.
9. **Castoldi P.** *Multiuser Detection in CDMA Mobile Terminals*. London: Artech House, 2002. 227 p.
10. **Kuhn V.** *Wireless Communications over MIMO Channels. Applications to CD Mand Multiple Antenna Systems*. Chichester: John Wiley & Sons, 2006. 363 p.

## Code Division of the Logical Channels for Transmission of Transactions in the Intelligent Mechatronic Systems

**A. V. Gulay**, is@bntu.by✉, **V. M. Zaitsev**, is@bntu.by,  
Belarus National Technical University, Belarus, 220013, Minsk

*Corresponding author: Gulay Anatolii V.*, Associate Professor, Chief of Department, Belarus National Technical University, Belarus, 220013, Minsk, e-mail: is@bntu.by

*Received on April 07, 2016*

*Accepted on July 15, 2016*

*As a rule, modern engineering and manufacturing projects are saturated with electronic equipment for automated monitoring and control, as well as cable communication lines and radio frequency channels for transmission of transactions. During functioning of the intelligent mechatronic systems the number of the communication lines of the frequency ranges is restricted due to application of the CDMA principles. A drawback of this method of channelizing is connected with a high level of the interfering signals in case of an increased quantity of the simultaneously functioning subscribers, whereof signals at the receiving side are highlighted with the hardware and software correlators. Taking this into account, a numeric method was proposed for the accelerated data streams of the bits extraction from the frame bits during the code division multiple access to the transmission of the transactions on the basis of the use of the Walsh function and the intelligent mechatronic systems. The scheme of the code division of the bit streams was analyzed due to introduction of the information source bit streams to the mechatronic system of the intelligent multiplexers at the transmitting channel side and the intelligent bit streams separators at the receiving side. A peculiarity of this code division scheme for the logical channels is that it is fully implemented due to the use of the software as a part of the intelligent mechatronic system. Construction of the software models of the intelligent multiplexer and the intelligent separator proved their high efficiency and stability of their functioning. When up to 256 logical channels are formed in one physical channel, a reliable separation of the information bits is ensured, as well as their diversion by the sources with the allowed delays in the transactions' fulfillment. An essential extra time advantage occurs, because all the separator transactions in the real processor of the bit frames processing take place with the help of short commands of the integer arithmetic.*

**Keywords:** intelligent mechatronic systems, transmission channels for transactions, code division multiple access, bit frames processing, Walsh functions

For citation:

**Gulay A. V., Zaitsev V. M.** Code Division of the Logical Channels for Transmission of Transactions in the Intelligent Mechatronic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 340–345.

DOI: 10.17587/mau.18.340-345

#### References

1. **Feher K.** *Besprovodnaja cifrovaja svjaz'. Metody moduljacji i rasschirenija spectra*, Moscow, Radio i Svjaz', 2000, 520 p. (**Feher, K.** (1995) *Wireless Digital Communications. Modulation and Spread Spectrum Applications*. NJ, Plumber Hall PTR. 544 p.)
2. **Ipatov V. P.** *Schirokopolosnye sistemy i kodovoe razdelenie signalov. Principy i prilozhenija*, Moscow, Tehnosfera, 2007, 486 p. (**Ipatov V. P.** (2004) *Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications*. Chichester, John Wiley & Sons. 373 p.)

3. **Warakin L. E.** *Sistemy svjazi s shumopodobnymi signalami* (Communication systems with noise-like signals), Moscow, Radio i Svjaz', 1985, 384 p. (in Russian).
4. **Okunev Ju. B.** *Cifrovaja peredatscha informacii fazomanipulirovannymi signalami* (Digital data transmission with phase-shift signals), Moscow, Radio i Svjaz', 1991, 295 p. (in Russian).
5. **Dubendorf V. A.** *Wireless Data Technologies*, Chichester, John Wiley & Sons, 2003, 254 p.
6. **Verdu S.** Wireless bandwidth in the making, *IEEE Communication Magazine*, 2000, vol. 38, no. 7, pp. 53–58.
7. **Tse D., Viswanath P.** *Fundamentals of Wireless Communication*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2005, 323 p.
8. **Fazel K., Kaiser S.** *Multi-Carrier and Spread Spectrum Systems*, Chichester, John Wiley & Sons, 2003, 300 p.
9. **Castoldi P.** *Multiuser Detection in CDMA Mobile Terminals*, London: Artech House, 2002, 227 p.
10. **Kuhn V.** *Wireless Communications over MIMO Channels. Applications to CD Mand Multiple Antenna Systems*, Chichester, John Wiley & Sons, 2006, 363 p.

**А. Ю. Александров**, д-р физ.-мат. наук, проф., a.u.aleksandrov@spbu.ru,  
**Е. Б. Александрова**, канд. физ.-мат. наук, доц., e.b.aleksandrova@spbu.ru,  
**А. Е. Лапшин**, студент, st016237@student.spbu.ru,  
**А. А. Тихонов**, д-р физ.-мат. наук, проф., a.tikhonov@spbu.ru,  
 Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

## Электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в режиме двухосной закрутки<sup>1</sup>

*Рассматривается искусственный спутник Земли (ИСЗ) с электродинамической системой управления ориентацией. Решается задача стабилизации спутника в программном режиме движения, при котором ось динамической симметрии ИСЗ стабилизируется в положении, определяемом постоянным углом к местной вертикали, а сам ИСЗ совершает медленное вращение вокруг этой оси. На основе метода функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости стабилизируемого программного режима движения при наличии возмущающего воздействия гравитационного момента. Эти условия позволяют обеспечить рациональный выбор коэффициентов параметрического управления в зависимости от параметров ИСЗ и его орбиты.*

**Ключевые слова:** спутник, магнитное поле Земли, электродинамическое управление, двухосная закрутка, гравитационный момент, стабилизация, асимптотическая устойчивость, функции Ляпунова

### Введение

Электродинамическое взаимодействие искусственного спутника Земли (ИСЗ) с магнитным полем Земли оказывает существенное влияние на динамику вращательного движения ИСЗ относительно его центра масс и может использоваться при построении систем управления ориентацией ИСЗ. Системы управления, основанные на использовании момента магнитного взаимодействия, их преимущества, особенности и недостатки, описаны в работах [1, 2]. Метод стабилизации ИСЗ, основанный на использовании момента лоренцевых сил, предложен в работе [3]. В работе [4] описан электродинамический метод стабилизации ИСЗ, использующий одновременно возможности магнитного и лоренцева моментов. Решена задача стабилизации ИСЗ в прямом положении равновесия (ППР) в орбитальной системе координат. Математическое обоснование метода опирается на рассмотрение дифференциальных уравнений линейного приближения. Доказано существование области значений параметров ИСЗ и его орбиты, обеспечивающих устойчивость ППР при постоянно действующих возмущениях. В работе [5] впервые дано аналитическое обоснование асимптотической устойчивости ППР ИСЗ с электродинамической системой стабилизации в орбитальной системе координат на базе нелинейных дифференциальных уравнений движения. На основе прямо-

го метода Ляпунова и развития способов построения функций Ляпунова, предложенных в работах [6, 7], получены достаточные условия асимптотической устойчивости ППР ИСЗ в орбитальной системе координат при наличии возмущающего воздействия гравитационного момента.

В данной статье рассматривается ИСЗ с электродинамической системой управления ориентацией. Решается задача стабилизации программного движения, при котором ось динамической симметрии ИСЗ стабилизируется вдоль оси, отклоненной на угол  $\varphi$  от местной вертикали, а сам ИСЗ совершает медленное вращение вокруг этой оси. Похожая задача рассматривалась в работе [8], но в ней ось динамической симметрии ИСЗ стабилизировалась по местной вертикали, что соответствует значению угла  $\varphi = 0$ . Такие режимы движения ИСЗ, называемые согласно работе [9] режимами двухосной закрутки, имеют важное прикладное значение.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается динамически симметричный ИСЗ, центр масс которого движется по круговой орбите радиуса  $R$ . Предполагается, что ИСЗ снабжен управляемым электростатическим зарядом  $Q = \int_V \sigma dV$ , распределенным по некоторому объему  $V$  с плотностью  $\sigma$ , и управляемым собственным магнитным моментом  $\mathbf{I}$ . Так же, как и в работе [4], исследуется вращательное движение ИСЗ относительно его центра масс в орбитальной системе ко-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00587, № 16-08-00997 и № 17-01-00672).

ординат (в данной работе используются правые декартовы прямоугольные системы координат)  $C\xi\eta\zeta$  с началом в центре масс ИСЗ, ось  $C\xi(\xi_0)$  которой направлена по касательной к орбите в сторону движения, ось  $C\eta(\eta_0)$  — по нормали к плоскости орбиты, ось  $C\zeta(\zeta_0)$  — вдоль радиус-вектора  $\mathbf{R} = OC = R\zeta_0$  центра масс ИСЗ относительно центра Земли  $O$ . Исследование проводится с учетом вращения орбитальной системы координат относительно инерциальной системы с угловой скоростью  $\omega_0$ . С самим ИСЗ жестко связана система его главных центральных осей инерции  $Cxyz$  (орты  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ). В системе координат  $Cxyz$ , где ось  $Cz$  является по предположению осью динамической симметрии, тензор инерции ИСЗ имеет вид  $\mathbf{J} = \text{diag}(A, A, C)$ . Ориентация осей  $Cxyz$  относительно осей  $C\xi\eta\zeta$  определяется матрицей  $\mathbf{A}$  направляющих косинусов  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) так, что справедливы равенства

$$\xi_0 = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}, \quad \eta_0 = \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}, \\ \zeta_0 = \gamma_1\mathbf{i} + \gamma_2\mathbf{j} + \gamma_3\mathbf{k}.$$

В орбитальной системе координат орты  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  заданы равенствами

$$\xi_0 = (1, 0, 0)^T, \quad \eta_0 = (0, 1, 0)^T, \quad \zeta_0 = (0, 0, 1)^T.$$

Те же самые орты в системе координат  $Cxyz$  обозначим  $\mathbf{s}_i$ :

$$\mathbf{A}^T\xi_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T = \mathbf{s}_1, \\ \mathbf{A}^T\eta_0 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T = \mathbf{s}_2, \\ \mathbf{A}^T\zeta_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T = \mathbf{s}_3. \quad (1)$$

Программная ориентация ИСЗ в орбитальной системе координат задается некоторой матрицей  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0(t)$  направляющих косинусов. Орты, связанные с ИСЗ и неизменные в системе координат  $Cxyz$ , обозначим  $\mathbf{r}_i$ :

$$\mathbf{A}_0^T\xi_0 = (\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30})^T = \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{A}_0^T\eta_0 = (\beta_{10}, \beta_{20}, \beta_{30})^T = \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{A}_0^T\zeta_0 = (\gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30})^T = \mathbf{r}_3. \quad (2)$$

В данной работе рассматривается случай, когда ось динамической симметрии  $Cz$  ИСЗ стабилизируется по оси, отклоненной от местной вертикали  $C\xi$  на угол  $\varphi$  в плоскости  $(\eta, \zeta)$ , а сам ИСЗ совершает вокруг этой оси равномерное вращение с угловой скоростью  $\omega'_0 = \mu\mathbf{k} = (0, 0, \mu)^T$ . Для такого режима движения матрица  $\mathbf{A}_0$  имеет вид

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi\sin\psi & \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $\psi = \mu t$ ,  $\mu$  — малый положительный параметр,  $\varphi = \text{const}$ . Следовательно,

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\psi \\ \cos\varphi\cos\psi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

## 2. Дифференциальные уравнения движения

В процессе движения ИСЗ относительно геомагнитного поля с магнитной индукцией  $\mathbf{B}$  возбуждается лоренцев момент  $\mathbf{M}_L$  и магнитный момент  $\mathbf{M}_M$ , соответственно имеющие вид

$$\mathbf{M}_L = \mathbf{P} \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{M}_M = \mathbf{I} \times \mathbf{A}^T \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{P} = Q\rho_0$ ,  $\rho_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} = Q^{-1} \int_V \sigma \rho dV$  — радиус-вектор центра заряда ИСЗ относительно его центра масс;  $\mathbf{T} = \mathbf{A}^T(\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})$ ;  $\mathbf{v}_C$  — скорость центра масс ИСЗ относительно геомагнитного поля, значение  $\mathbf{B}$  в этой формуле совпадает со значением  $\mathbf{B}$  в центре масс ИСЗ. Кроме того, учитывается гравитационный момент

$$\mathbf{M}_G = 3\omega_0^2 (\mathbf{A}^T \zeta_0) \times (\mathbf{J} \mathbf{A}^T \zeta_0)$$

как основной из возмущающих моментов, действующих на ИСЗ в околоземном пространстве.

Анализ стабилизации программного движения ИСЗ проводится на базе нелинейных дифференциальных уравнений вращательного движения ИСЗ, построенных по схеме Эйлера—Пуассона:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}\omega) + \omega \times (\mathbf{J}\omega) = \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_L + \mathbf{M}_M, \quad (4)$$

$$\frac{d\xi_0}{dt} = \xi_0 \times \omega - \omega_0 \xi_0, \quad \frac{d\eta_0}{dt} = \eta_0 \times \omega, \quad \frac{d\zeta_0}{dt} = \zeta_0 \times \omega + \omega_0 \zeta_0. \quad (5)$$

Здесь  $\omega = \omega' + \omega_0$  — абсолютная угловая скорость ИСЗ,  $\omega'$  — угловая скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат,  $\omega_0 = \omega_0 \eta_0$  — угловая скорость орбитальной системы координат относительно инерциальной. С учетом обозначений (1), (2) дифференциальные уравнения (4), (5) примут вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}(\omega' + \omega_0 \mathbf{s}_2)) + (\omega' + \omega_0 \mathbf{s}_2) \times (\mathbf{J}(\omega' + \omega_0 \mathbf{s}_2)) = \\ = 3\omega_0^2 (\mathbf{s}_3) \times (\mathbf{J} \mathbf{s}_3) + \mathbf{M}_L + \mathbf{M}_M, \quad (6)$$

$$\frac{d\mathbf{s}_1}{dt} + \omega' \times \mathbf{s}_1 = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{s}_2}{dt} + \omega' \times \mathbf{s}_2 = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{s}_3}{dt} + \omega' \times \mathbf{s}_3 = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Управляющие моменты  $\mathbf{M}_L, \mathbf{M}_M$ , вид которых будет конкретизирован в следующем разделе, должны обеспечить существование и асимптотическую устойчивость следующего режима двухосной закрутки ИСЗ:

$$\omega' = \omega'_0, \quad \mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

### 3. Параметрическое управление для стабилизации режима двухосной закрутки

В работе [4] показано, что путем программного изменения управляемых электродинамических параметров  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{I}$  можно обеспечить управление угловым положением ИСЗ. Для решения задачи стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат, рассмотренной в работе [4], было достаточно взять каждый из векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{I}$  в виде суммы двух слагаемых, первое из которых приводило к возникновению восстанавливающего момента, а второе — диссипативного:

$$\mathbf{P} = k_L \mathbf{T}_0 + h_L \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{T}, \quad \mathbf{I} = k_M \mathbf{B}_0 + h_M \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{A}^T \mathbf{B}. \quad (9)$$

В этих формулах  $\mathbf{T}_0 = \mathbf{A}_0^T (\mathbf{v}_C \times \mathbf{B})$ ,  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}_0^T \mathbf{B}$ ,  $k_L$ ,  $k_M$ ,  $h_L$ ,  $h_M$  — коэффициенты пропорциональности, в качестве которых могут выступать скалярные функции времени.

В задаче, рассматриваемой в данной работе, диссипативные слагаемые будут отличаться от соответствующих слагаемых в формулах (9), поскольку погашения требует не угловая скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат, а отклонение угловой скорости от стабилизируемого значения  $\boldsymbol{\omega}'_0$ , т. е.  $\boldsymbol{\omega}'_r = \boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}'_0$ . Кроме того, недостаточно взять векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{I}$  в виде (9), так как для обеспечения равномерного вращения ИСЗ во вращающейся орбитальной системе координат требуется компенсировать гравитационный и гироскопический моменты. Для компенсации указанных возмущающих моментов введем дополнительное слагаемое  $\mathbf{P}_1$  в вектор  $\mathbf{P}$  и дополнительное слагаемое  $\mathbf{I}_1$  в вектор  $\mathbf{I}$ .

Для получения условий реализации программного движения ИСЗ перепишем уравнение (6), подставив выражения (3) и (8) как в левую часть, так и в выражения моментов. Учтем также, что в силу постановки задачи орбита ИСЗ — круговая экваториальная ( $\mathbf{v}_C = v_{C\xi} \boldsymbol{\xi}_0$ ,  $\mathbf{v}_{C\xi} = \text{const} \neq 0$ ), а геомагнитное поле аппроксимируется прямым магнитным диполем ( $\mathbf{B} = B_\eta \boldsymbol{\eta}_0$ ,  $B_\eta = \text{const} \neq 0$ ). Получим

$$k_0 \mathbf{r}_1 = v_{C\xi} B_\eta \mathbf{P}_1 \times \mathbf{r}_3 + B_\eta \mathbf{I}_1 \times \mathbf{r}_2, \quad (10)$$

где  $k_0 = \omega_0 \cos \varphi (4\omega_0(A - C) \sin \varphi + \mu C)$ .

Из уравнения (10) следует, что для компенсации возмущающих моментов, приведенных к виду  $k_0 \mathbf{r}_1$ , достаточно взять вектор  $\mathbf{P}_1$  в виде  $k_{L1} \mathbf{r}_2$  или взять вектор  $\mathbf{I}_1$  в виде  $k_{M1} \mathbf{r}_3$ . Здесь коэффициенты  $k_{L1}$  и  $k_{M1}$  определяются по формулам

$$k_{L1} = \frac{k_0}{v_{C\xi} B_\eta}, \quad k_{M1} = -\frac{k_0}{B_\eta}.$$

Заметим, что можно использовать одновременно оба управляющих момента, включив слагае-

мое  $k_{L1} \mathbf{r}_2$  в вектор  $\mathbf{P}$  и слагаемое  $k_{M1} \mathbf{r}_3$  в вектор  $\mathbf{I}$ . В этом случае должны выполняться равенства

$$k_{L1} = \frac{k_{13}}{v_{C\xi} B_\eta}; \quad k_{M1} = \frac{k_{12}}{B_\eta}; \quad k_{13} - k_{12} = k_0.$$

Далее, для определенности, будем рассматривать случай, когда

$$k_{12} = -\omega_0 \mu C \cos \varphi + \omega_0^2 (C - A) \sin \varphi \cos \varphi, \\ k_{13} = -3\omega_0^2 (C - A) \sin \varphi \cos \varphi.$$

Таким образом, для решения задачи стабилизации ИСЗ в рассматриваемом режиме двухосной закрутки имеем следующие законы программного изменения параметров  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{P} = k_L \mathbf{T}_0 + k_{L1} \mathbf{r}_2 + h_L \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{T}, \\ \mathbf{I} = k_M \mathbf{B}_0 + k_{M1} \mathbf{r}_3 + h_M \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{A}^T \mathbf{B}.$$

### 4. Достаточные условия асимптотической устойчивости

Выделим в уравнениях (6) линейные члены относительно величин  $\boldsymbol{\omega}'_r$ ,  $\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3$ , представляющих собой отклонения от программного движения (8). Получим

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_r) - \omega_0 \mathbf{J} (\boldsymbol{\omega}'_r \times \mathbf{r}_2) + \omega_0 \boldsymbol{\omega}'_r \times (\mathbf{J} \mathbf{r}_2) + \boldsymbol{\omega}'_r \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_0) + \\ + \omega_0^2 (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{J} \mathbf{r}_2) + \omega_0 (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_0) + \\ + \boldsymbol{\omega}'_0 \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_r) + \omega_0 \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_r) + \omega_0^2 \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{J} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)) = \\ = 3\omega_0^2 \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{J} (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)) + 3\omega_0^2 (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) \times (\mathbf{J} \mathbf{r}_3) - \Psi - \\ - h_{M0} (\boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{r}_2 (\boldsymbol{\omega}'_r \mathbf{r}_2)) - h_{L0} (\boldsymbol{\omega}'_r - \mathbf{r}_3 (\boldsymbol{\omega}'_r \mathbf{r}_3)) + \\ + k_{12} \mathbf{r}_3 \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) + k_{13} \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) + \Phi. \quad (11)$$

Здесь  $\Psi = k_{M0} (\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_2) + k_{L0} (\mathbf{s}_3 \times \mathbf{r}_3)$ ,  $k_{L0} = k_L (v_{C\xi} B_\eta)^2$ ,  $k_{M0} = k_M B_\eta^2$ ,  $h_{L0} = h_L (v_{C\xi} B_\eta)^2$ ,  $h_{M0} = h_M B_\eta^2$ , а для векторной функции  $\Phi = \Phi(t, \boldsymbol{\omega}'_r, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$  справедлива оценка

$$\|\Phi\| \leq \tilde{c} (\|\boldsymbol{\omega}'_r\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2),$$

где  $\tilde{c}$  — положительная постоянная.

В статьях [5, 8, 10] была разработана процедура последовательного построения функций Ляпунова для решения задач стабилизации различных программных режимов вращательного движения ИСЗ. Применяя эту процедуру, приходим к следующему выражению для функции Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'_r{}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}'_r + \frac{k_{M0}}{2} \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \frac{k_{L0}}{2} \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 - \\ - \frac{1}{2} \mu \omega_0 C \sin \varphi \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \kappa \boldsymbol{\omega}'_r{}^T \mathbf{J} \Psi + \frac{3}{2} \omega_0^2 (C - A) \times$$

$$\begin{aligned} & \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3)^T \begin{pmatrix} -\cos^2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\varphi \end{pmatrix} (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) + \\ & + \frac{1}{2} \omega_0^2 (C - A) (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2)^T \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -\cos^2\varphi \end{pmatrix} (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2), \end{aligned}$$

где  $\kappa$  — положительный параметр.

Имеем

$$\begin{aligned} V \geq & \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}'^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}' + \left( \frac{k_{M0}}{2} - \frac{1}{2} \mu \omega_0 C \sin\varphi + \frac{1}{2} \omega_0^2 \theta \right) \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \\ & + \left( \frac{k_{L0}}{2} + \frac{3}{2} \omega_0^2 \theta \right) \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 + \kappa \boldsymbol{\omega}'^T \mathbf{J} \Psi. \end{aligned}$$

Здесь  $\theta = \min\{(A - C)\cos^2\varphi; (C - A)\sin^2\varphi\}$ .

Для производной функции  $V$  в силу системы (7), (11) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} \leq & -\min\{h_{M0}; h_{L0}\} \|\boldsymbol{\omega}'\|^2 - \kappa \|\Psi\|^2 + \kappa b_1 \|\boldsymbol{\omega}'\|^2 + \\ & + \kappa b_2 \|\boldsymbol{\omega}'\| (\|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\| + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|) + \kappa \Psi^T \left[ 3\omega_0^2 (C - A) \times \right. \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & \cos^3\varphi & \sin^3\varphi \cos\psi \\ -\cos^3\varphi & 0 & -\sin^3\varphi \sin\psi \\ \sin\varphi \cos^2\varphi \cos\psi & \sin\varphi \cos^2\varphi \sin\psi & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times (\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3) + \omega_0^2 (A - C) \times \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & -\sin^3\varphi & \cos^3\varphi \cos\psi \\ \sin^3\varphi & 0 & -\cos^3\varphi \sin\psi \\ \sin^2\varphi \cos\varphi \cos\psi & -\sin^2\varphi \cos\varphi \sin\psi & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) + \mu \omega_0 C \times \\ & \times \begin{pmatrix} 0 & -\sin^2\varphi & -\sin\varphi \cos\varphi \cos\psi \\ \sin^2\varphi & 0 & \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi \\ \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi & -\sin\varphi \cos\varphi \sin\psi & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \left. \times (\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2) \right] + b_3 (\|\boldsymbol{\omega}'\|^3 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^3 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^3), \end{aligned}$$

в которой  $b_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Нетрудно показать, что если

$$\begin{aligned} k_{M0} & > \omega_0 \sqrt{6(\omega_0^2(A - C)^2 + \mu^2 C^2 \sin^2\varphi)}, \\ k_L & > 3\sqrt{6} \omega_0^2 |A - C|, \end{aligned} \quad (12)$$

а значение параметра  $\kappa$  достаточно мало, то найдутся положительные числа  $c_1, c_2, c_3$  и  $\delta$  такие, что при  $\|\boldsymbol{\omega}'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2 < \delta^2$  будут иметь место неравенства

$$\begin{aligned} c_1 (\|\boldsymbol{\omega}'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2) & \leq V \leq \\ & \leq c_2 (\|\boldsymbol{\omega}'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2), \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dt} \leq -c_3 (\|\boldsymbol{\omega}'\|^2 + \|\mathbf{s}_2 - \mathbf{r}_2\|^2 + \|\mathbf{s}_3 - \mathbf{r}_3\|^2).$$

Таким образом, при выполнении условий (12) программное движение (8) асимптотически устойчиво.

*Замечание.* Для обеспечения асимптотической устойчивости программного движения (8) на параметры  $h_{L0}$  и  $h_{M0}$  не требуется накладывать никаких условий, кроме их положительности.

### Заключение

Среди задач управления ориентацией ИСЗ важную роль играют задачи одноосной стабилизации [6, 7]. В работе [10] задача одноосной стабилизации ИСЗ в орбитальной системе координат решена с использованием электродинамической системы управления. В некоторых случаях существенным требованием, усложняющим задачу одноосной стабилизации, является обеспечение вращения ИСЗ вокруг стабилизированного направления. Поэтому в данной работе рассмотрена задача стабилизации программного движения ИСЗ относительно его центра масс, при котором ось динамической симметрии ИСЗ стабилизируется вдоль оси, отклоненной на некоторый угол от местной вертикали, а сам ИСЗ совершает медленное вращение вокруг этой оси. Подобные режимы движения ИСЗ имеют важное прикладное значение [9]. Например, они используются для обеспечения более равномерного освещения ИСЗ солнечными лучами и снижения нежелательных эффектов, вызванных градиентом температуры ИСЗ.

На основе метода функций Ляпунова получены достаточные условия асимптотической устойчивости стабилизируемого программного движения ИСЗ при наличии возмущающего гравитационного момента. Эти условия позволяют обеспечить рациональный выбор коэффициентов параметрического управления в зависимости от параметров ИСЗ и его орбиты.

В качестве направления дальнейших исследований отметим, что с использованием подходов, предложенных в работах [11, 12], можно получить условия стабилизации заданного программного движения спутника для случая, когда имеется запаздывание в канале обратной связи, возникающее вследствие задержек на обработку и передачу информации.

## Список литературы

1. Коваленко А. П. Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. 248 с.
2. Алпатов А. П., Драновский В. И., Салтыков Ю. Д., Хорошилов В. С. Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления. М.: Машиностроение, 1978. 200 с.
3. Тихонов А. А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. С. 69—79.
4. Антипов К. А., Тихонов А. А. Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 44—56.
5. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация ИСЗ на экваториальной орбите // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 4. С. 335—340.
6. Зубов В. И. Динамика управляемых систем. М.: Высш. школа, 1982. 285 с.

7. Смирнов Е. Я. Некоторые задачи математической теории управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. 200 с.
8. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2012. Вып. 2. С. 79—90.
9. Сазонов В. В., Чебуков С. Ю., Кузнецова Е. Ю. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты // Космические исследования. 2000. Т. 38. № 3. С. 296—306.
10. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Одноосная электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в орбитальной системе координат // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 22—31.
11. Александров А. Ю., Александрова Е. Б., Жабко А. П. Анализ устойчивости гироскопических систем с запаздыванием на основе прямого метода Ляпунова // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 5. С. 3—7.
12. Зубер И. Е., Волошинова Т. В., Гелиг А. Х. Расширенный класс стабилизируемых неопределенных систем // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 2016. Вып. 3. С. 402—407.

## Electrodynamic Stabilization of an Artificial Earth Satellite in the Mode of Biaxial Rotation

A. Yu. Aleksandrov, a.u.aleksandrov@spbu.ru✉, E. B. Aleksandrova, e.b.aleksandrova@spbu.ru,  
A. E. Lapshin, st016237@student.spbu.ru, A. A. Tikhonov, a.tikhonov@spbu.ru,  
St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russian Federation

Corresponding author: Aleksandrov Aleksandr Yu., Professor,  
St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russian Federation,  
e-mail: a.u.aleksandrov@spbu.ru

Received on January 27, 2016  
Accepted on February 01, 2016

*The topic of the article is an artificial Earth satellite in a circular near-Earth orbit. The satellite possesses a dynamical symmetry and is equipped with an electrodynamic attitude control system based on the usage of Lorentz and magnetic torques. The control torques are ensured by a controllable variation of two electromagnetic parameters of the satellite: the intrinsic magnetic moment and the static moment of charge of the first order. In the satellite's programmed motion the axis of the dynamical symmetry is inclined to the local vertical axis at a constant angle and the satellite slowly rotates around that axis. Such a rotation mode is of great importance in space missions, because it can reduce the temperature gradient effect, which may cause problems with the satellite's functioning. But this mode cannot be realized without a control because of the disturbances, among which the gravitational torque should be mentioned as the most important one. In the present paper the satellite's stabilization in the programmed attitude motion is investigated. The stated problem appears to be more complex than the problem of the uniaxial attitude stabilization of a satellite, and previously it was not treated with the use of the electrodynamic control system. On the basis of the Lyapunov direct method the conditions, under which the electrodynamic control solves the problem, were obtained. A new construction of the Lyapunov function was proposed, and using the function sufficient conditions for the asymptotic stability of the programmed motion were found in an explicit form.*

**Keywords:** satellite, geomagnetic field, electrodynamic control, biaxial rotation, gravitational torque, stabilization, asymptotic stability, Lyapunov function

**Acknowledgements:** This work was supported by RFBR (projects № 16-01-00587, № 16-08-00997 and № 17-01-00672).

For citation:

Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Lapshin A. E., Tikhonov A. A. Electrodynamic Stabilization of an Artificial Earth Satellite in the Mode of Biaxial Rotation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 346—351.

DOI: 10.17587/mau.18.346-351

## References

1. Kovalenko A. P. *Magnitnye sistemy upravleniya kosmicheskimi letatel'nymi apparatami* (Magnetic Control Systems of Space Aircrafts), Moscow, Mashinostroenie, 1975. 248 p. (in Russian).
2. Alpatov A. P., Dranovskij V. I., Saltykov Ju. D., Horoshilov V. S. *Dinamika kosmicheskikh apparatov s magnitnymi sistemami upravleniya* (Dynamics of Spacecrafts with Magnetic Control Systems), Moscow, Mashinostroenie, 1978, 200 p. (in Russian).

3. Tikhonov A. A. *Metod polupassivnoj stabilizatsii kosmicheskogo apparata v geomagnitnom pole* (A method of semi-passive attitude stabilization of a spacecraft in the geomagnetic field), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2003, vol. 41, no 1, pp. 69—79 (in Russian).
4. Antipov K. A., Tikhonov A. A. *Parametricheskoe upravlenie v zadache o stabilizatsii kosmicheskogo apparata v magnitnom pole Zemli* (Parametric control in the problem of spacecraft stabilization in the geomagnetic field), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2007, no 8, pp. 44—56 (in Russian).
5. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. *Jelektrodinamicheskaja stabilizatsija ISZ na jekvatorial'noj orbite* (Electrodynamic stabilization of Earth-orbiting satellites in equatorial orbits), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2012, vol. 50, no 4, pp. 335—340 (in Russian).
6. Zubov V. I. *Dinamika upravljaemykh sistem* (Dynamics of Controlled Systems), Moscow, Vyssh. shkola, 1982, 285 p. (in Russian).
7. Smirnov E. Ja. *Nekotorye zadachi matematicheskoy teorii upravleniya* (Some Problems of the Mathematical Control Theory), Leningrad, Publishing house of Leningradskii University, 1981, 200 p. (in Russian).

8. **Aleksandrov A. Yu., Tihonov A. A.** *Jelektrodinamicheskaia stabilizacija programmnogo vrashhenija ISZ v orbital'noj sisteme koordinat* (Electrodynamic Stabilization of the satellite's programmed rotation in the orbital frame), *Vestn. C.-Peterburg. Universiteta. Ser. 1*, 2012, issp. 2, pp. 79–90 (in Russian).

9. **Sazonov V. V. Chebukov S. Ju., Kuznecova E. Ju.** *Dvuhosnaja zakrutka sputnika v ploskosti orbity* (Two-axis rotation of a satellite in the orbital plane), *Kosmicheskie Issledovanija*, 2000, vol. 38, no 3, pp. 296–306 (in Russian).

10. **Aleksandrov A. Yu., Tihonov A. A.** *Odnoosnaja jelektrodinamicheskaia stabilizacija iskusstvennogo sputnika Zemli v orbital'noj sisteme koordinat* (Monoaxial electrodynamic stabilization of earth satellite in

the orbital coordinate system), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2013, no 8, pp. 22–31 (in Russian).

11. **Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Zhabko A. P.** *Analiz ustojchivosti giroskopicheskikh sistem s zapazdyvaniem na osnove prjamogo metoda Ljapunova* (Stability analysis of gyroscopic systems via the Lyapunov direct method), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2014, no 5, pp. 3–7 (in Russian).

12. **Zuber I. E., Voloshinova T. V., Gelig A. H.** *Rasshirennyj klass stabiliziruemykh neopredelennykh sistem* (An extended class of stabilized uncertain systems). *Vestn. C.-Peterburg. Universiteta. Ser. 1*, 2016, iss. 3, pp. 402–407 (in Russian).

УДК 629.78

DOI: 10.17587/mau.18.351-359

**Н. В. Рябогин**, зам. начальника направления, ryabogin@mokb-mars.ru,

**В. Н. Соколов**, д-р техн. наук, зам. директора по научной работе,  
зам. генерального конструктора, sokolov@mokb-mars.ru,  
ФГУП Московское опытно-конструкторское бюро "Марс",

**Н. М. Задорожная**, канд. техн. наук, доц., zanatalie@ya.ru,  
МГТУ имени Н. Э. Баумана

## Комплексирование информации инерциальных измерительных блоков и звездных приборов на основании оценки вектора малого поворота

*Предлагается субоптимальный алгоритм комплексирования информации инерциального измерительного блока и звездных приборов применительно к задаче точного определения ориентации космического аппарата. Алгоритм позволяет эффективно фильтровать высокочастотную шумовую ошибку звездных приборов и обладает небольшими требованиями к вычислительным ресурсам бортовых вычислительных машин космических аппаратов. Алгоритм обеспечивает работу со всей номенклатурой звездных приборов и инерциальных измерительных блоков.*

**Ключевые слова:** бортовые комплексы управления, космические аппараты, точность ориентации, фильтр Калмана, инерциальные измерительные блоки, звездные датчики, комплексирование

### Введение

Контур управления космическим аппаратом (КА), построенный на базе современных инерциальных измерительных блоков (ИИБ) и звездных приборов (ЗП), является наиболее гибким и отказоустойчивым. Совместное использование информации ЗП и ИИБ характерно для многих зарубежных КА [7, 9, 30, 42, 43, 45, 47], что обусловлено особенностями датчиков обоих типов. В отличие от ЗП, ИИБ функционируют в широком диапазоне угловых скоростей и независимы от внешних оптических условий, внешних воздействующих факторов и ионизирующего излучения космического пространства [36–39]. Однако при отсутствии коррекции по измерениям от других приборов, точность определения угловой скорости и параметров ориентации по информации от ИИБ со временем снижается.

Подход к построению бортового комплекса управления (БКУ) КА с объединением информации от ИИБ и ЗП, разработанный МОКБ "Марс" и реализованный в БКУ КА "Спектр-Р" на приборах ГИВУС КИНД34-020 и АД-1, позволил достичь

высокой точности ориентации КА [46]. Подход к совместной обработке информации ИИБ и ЗП базировался на фильтре Калмана с вектором состояния 6-го порядка и учитывал особенности работы ЗП АД-1. Благодаря совместной обработке была достигнута точность определения ориентации в 1,4".

### Особенности комплексирования информации

Разработка систем ориентации, функционирующих на разных физических принципах, основана на комплексной обработке первичной информации из различных источников в целях повышения надежности и точности автономной системы ориентации [2–4, 8–10]. Среди схем комплексирования систем ориентации различных типов наибольшее распространение [8, 12, 22, 27, 44] нашли инвариантные схемы, которые оценивают не параметры ориентации, а их погрешности.

Математическая обработка информации с ИИБ и ЗП позволяет определять параметры ориентации и угловой скорости с высокой точностью, которая необходима для работы системы управления движением КА [4, 8–10].

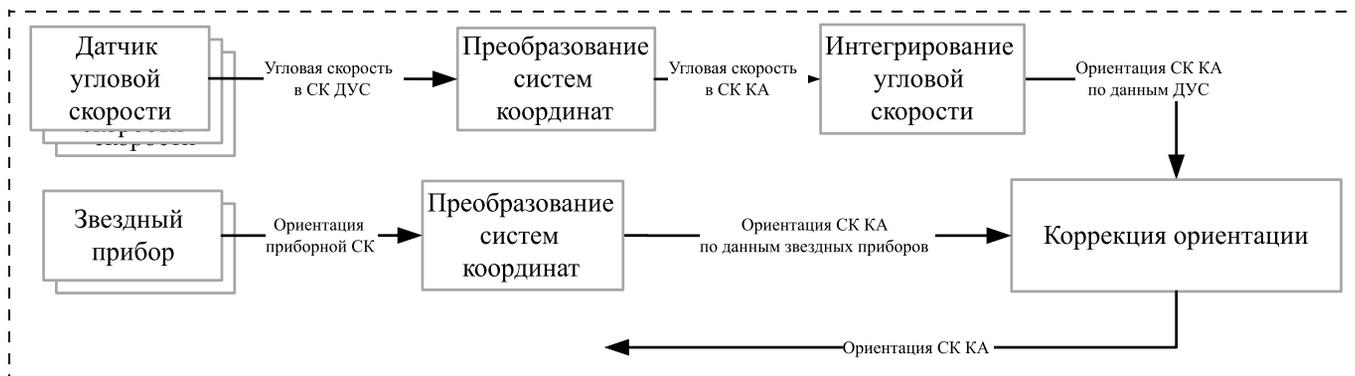


Рис. 1. Функциональный тракт измерения ориентации

Методами оценивания в алгоритмах комплексирования информации ИИБ и ЗП могут быть методы наименьших квадратов (МНК), фильтр Калмана (ОФК) и связанные с ними результаты дальнейших исследований отдельных сторон этих методов, характерных для систем ориентации (оптимизация наблюдений МНК, структурная и параметрическая адаптация фильтра Калмана) [13–15, 18, 20, 23–25].

Во многом каждый случай применения фильтрации базируется на целевом применении КА и адаптируется на основании имеющихся приборов, вычислительных мощностей, динамических свойств объекта управления и т. д. Часто такого рода фильтрация применяется в узкоспециализированных задачах: решение навигационной задачи по сигналам спутниковой навигационной системы, решение задачи устойчивого распознавания ориентации по звездам [31–35].

Задача фильтрации средствами МНК или ОФК требует больших вычислительных средств, поэтому подобные средства применяются в указанных задачах в составе независимых блоков и вычислителей.

Для уменьшения вычислительных требований к алгоритмам фильтрации МНК и ОФК проводят упрощения, например, коэффициенты усиления фильтров рассчитываются на среднее значение и фиксируются.

Внедрение методов комплексной обработки информации ИИБ и ЗП на основе фильтра Калмана в сравнении с другими методами фильтрации позволяет с высокой эффективностью подавлять шум ЗП при построении систем определения ориентации КА.

С точки зрения разработки алгоритмов комплексирования и фильтрации фильтр Калмана является наиболее применяемым и отработанным решением. На практике в космической технике существует ряд примеров применения фильтра Калмана в решении задач обеспечения работы БКУ КА [1, 5, 11, 19, 21, 25, 27, 28, 46].

Цель настоящей работы заключается в формировании субоптимального алгоритма комплексирования информации ИИБ и ЗП в задаче точного определения ориентации КА, позволяющего эффективно фильтровать высокочастотную шумовую

ошибку ЗП и обладающего небольшими требованиями к вычислительной мощности бортовых вычислительных машин КА. Алгоритм должен обеспечивать работу со всей номенклатурой ЗП и ИИБ.

Под ориентацией КА понимается параметрическое описание вращательного движения КА относительно опорной системы координат, соответственно под точностью ориентации КА понимается погрешность знания параметров, описывающих вращательное движение [17].

Рассматривается решение задачи оценки ориентации КА со следующими основными измерителями параметров ориентации КА:

- ИИБ КА, являющимися датчиками угловой скорости;
- ЗП, выполняющими функции датчиков угла.

Функциональная схема тракта измерения ориентации с указанными датчиками представлена на рис. 1.

### Фильтр Калмана в задаче оценки параметров ориентации

Фильтр Калмана — последовательный рекурсивный алгоритм, использующий принятую модель динамической системы для получения оценки, которая может быть существенно скорректирована в результате анализа каждой выборки измерений во временной последовательности. Общая схема дискретного фильтра Калмана, представленная во многих работах, выглядит следующим образом.

Имеется динамическая система, характеризующаяся вектором состояния  $X$ . Модель системы описывается выражением

$$X_{k+1} = \Phi_k X_k + \zeta_k, \quad (1)$$

где индекс  $k$  обозначает такты работы вычислителя системы и соответствующие моменты получения измерительной информации;  $\Phi_k$  — переходная матрица системы в момент времени  $k$ ;  $\zeta_k$  — ошибки модели движения в момент времени  $k$ , которые считаются белым шумом с ковариационной матрицей  $Q$ :

$$\langle \zeta \rangle = 0, \langle \zeta \cdot \zeta^T \rangle = Q.$$

Символом  $\langle \cdot \rangle$  обозначается математическое ожидание величины, указанной в треугольных скобках.

В моменты времени  $k$  проводятся измерения величин  $Z_k$ , связанных с вектором состояния системы соотношением

$$Z_k = H_k X_k + \xi_k,$$

где  $H_k$  — матрица измерений в момент времени  $k$ ;  $\xi_k$  — ошибки измерений в момент времени  $k$ , моделируемые белым гауссовским шумом с ковариационной матрицей  $R$ :

$$\langle \xi \rangle = 0, \langle \xi \cdot \xi^T \rangle = R.$$

Требуется получить оценку вектора состояния  $\hat{X}$  и оценить ее погрешность, характеризуемую ковариационной матрицей  $P$ :

$$\hat{X} = \langle X \rangle, P = \langle (X - \hat{X})(X - \hat{X})^T \rangle.$$

На этапе прогноза с помощью модели движения (1) строятся прогнозируемые оценки вектора состояния  $X_{k/k-1}$  и ковариационной матрицы  $P_{k/k-1}$  на момент  $k$  по результатам измерений в моменты  $0, k-1$ :

$$X_{k/k-1} = \Phi_{k-1} X_{k-1/k-1};$$

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k-1}^T.$$

На этапе коррекции вычисляются обновленные значения оценки вектора состояния  $\hat{X}_{k/k}$  и ковариационной матрицы  $P_{k/k}$  по формулам

$$\hat{X}_{k/k} = \Phi_{k-1} \hat{X}_{k-1/k-1} +$$

$$+ K_k (Z_k - H_k \Phi_{k-1} \hat{X}_{k-1/k-1});$$

$$P_{k/k} = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} + Q_{k/k-1},$$

где матрица  $K_k$  — коэффициент усиления фильтра:

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1}.$$

Для инициализации фильтра требуется задать начальные условия:

$$X_{0/0} = X_0, P_{0/0} = P_0.$$

Стоит отметить, что матрицы ковариации ошибок оценок зависят только от матриц ковариаций шумов модели системы, шумов измерителей и матрицы наблюдений. По этой причине нахождение матриц ковариаций и коэффициента усиления могут быть выполнены заранее.

Модель ошибок измерений ИИБ имеет вид

$$\omega_{\text{вост}} = (G^T G)^{-1} G^T \omega^m =$$

$$= (G^T G)^{-1} G^T (1 + E\lambda) ((G + \Delta G)\omega + b + \eta),$$

где  $\omega = [\omega_X \ \omega_Y \ \omega_Z]^T$  — истинная угловая скорость в проекциях на оси связанной системы координат объекта;  $\omega_{\text{вост}} = [\omega_{X_{\text{вост}}} \ \omega_{Y_{\text{вост}}} \ \omega_{Z_{\text{вост}}}]^T$  — восстановленная угловая скорость в проекциях на оси связанной системы координат объекта;  $\omega^m = [\omega_1^m \ \omega_2^m \ \omega_4^m]^T$  — измеряемые проекции вектора угловой скорости

объекта на оси чувствительности измерительных каналов ИИБ относительно приборной системы координат (ПСК) ИИБ;  $b = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]^T$  — дрейфы измерительных каналов ИИБ;  $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4]^T$  — погрешности масштабного коэффициента измерительных каналов ИИБ;  $\eta$  — вектор шума измерительных каналов (ИК) ИИБ;  $G_{4 \times 3}$  — матрицы ориентации осей чувствительности измерительных каналов ИИБ относительно ССК;  $\Delta G_{4 \times 3}$  — матрица погрешностей ориентации осей чувствительности измерительных каналов ИИБ относительно связанной системы координат (ССК).

При применении алгоритмов калибровки отклонений масштабных коэффициентов и перекосов осей чувствительности ИК ИИБ допустимо следующее упрощение:  $\lambda = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  и  $\Delta G_{4 \times 3} = 0$ . Тогда модель ошибок измерений ИИБ будет выглядеть следующим образом:

$$\omega_{\text{вост}} = (G^T G)^{-1} G^T (G\omega + b + \eta) = \omega + b + \eta.$$

Основными измерениями ЗП являются координаты векторов направления на визируемые источники излучения, рассчитанные в приборной системе координат ЗП. После измерения векторов созвездия в ПСК происходит расчет ориентации ПСК относительно инерциальной системы координат. Модель работы ЗП можно представить следующим образом:

$$\Lambda_{\text{ПСК}}^{\text{ИСК}} = f(\Gamma + \Delta), \quad (2)$$

где  $\Lambda_{\text{ПСК}}^{\text{ИСК}}$  — кватернион (матрица) ориентации ПСК ЗП относительно инерциальной системы координат (ИСК);  $\Gamma$  — массив координат векторов распознанных созвездий в ПСК звездного прибора;  $\Delta$  — ошибки определения координат векторов распознанных созвездий;  $f$  — функционал, рассчитывающий ориентацию ПСК ЗП относительно ИСК по данным визируемых объектов. Выражение (2) можно записать в следующем виде:

$$\Lambda_{\text{ПСК}}^{\text{ИСК}} = \Lambda^{\text{ИСТ}} \circ \Lambda^{\text{ОШ}},$$

где  $\Lambda^{\text{ИСТ}}$  — истинный кватернион ориентации ПСК ЗП относительно ИСК;  $\Lambda^{\text{ОШ}}$  — кватернион малого поворота, переводящий истинную ориентацию ПСК ЗП в ориентацию, полученную под воздействием ошибок измерений.

При разработке алгоритма комплексирования полагаем, что знание ориентаций ПСК ИИБ и ЗП относительно ССК известно, и вычислительные ошибки этих переходов пренебрежимо малы.

Принимая во внимание модели ошибок ИИБ и ЗП [6, 17, 26, 29, 41], вектор состояния системы фильтра Калмана можно записать следующим образом:

$$X_k = [\Lambda^{k/k-1} \ \Delta \Theta^{k/k-1} \ \mathbf{p}^{k/k-1}]^T, \quad (3)$$

где  $\Lambda^{k/k-1} = [\lambda_1^{k/k-1}, \lambda_2^{k/k-1}, \lambda_3^{k/k-1}, \lambda_4^{k/k-1}]$  — кватернион перехода от ССК КА к ИСК КА;

$\Delta\Theta^{k/k-1} = [\Delta\theta_x^{t/t-1}, \Delta\theta_y^{t/t-1}, \Delta\theta_z^{t/t-1}]$  — вектор угловой скорости ССК КА относительно ИСК КА на интервале между оценками;  $P^{k/k-1} = [\rho_x, \rho_y, \rho_z]$  — вектор дрейфов измерительных каналов ИИБ, выраженных на ССК КА.

Для вектора состояния (3) получим переходную матрицу системы. Фильтр Калмана предполагает, что уравнения движения линейны и их можно записать в виде

$$\dot{x}_k = F_{k/k-1} x_{k-1}.$$

В случае если уравнения нелинейные, следует провести линеаризацию. Тогда вектор состояния системы примет вид

$$X_{k/k-1} = \Phi_{k-1} X_{k-1/k-1},$$

где матрица  $\Phi$  находится из разложения:

$$\Phi_{k-1} \approx 1 + F_{k/k-1} \Delta t + \frac{(F_{k/k-1} \Delta t)^2}{2!} + \dots$$

Матрица наблюдений для принятой системы будет иметь вид

$$H = \begin{bmatrix} I_{7 \times 7} & 0_{7 \times 3} \\ 0_{3 \times 7} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}.$$

С учетом принятого вектора состояния фильтр Калмана примет следующий вид:

$$X_{k/k-1} = \Phi_{k-1} X_{k-1/k-1}; \quad (4)$$

$$\hat{X}_{k/k} = \Phi_{k-1} \hat{X}_{k-1/k-1} + K_k (Z_k - H_k \Phi_{k-1} \hat{X}_{k-1/k-1}); \quad (5)$$

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k-1}^T; \quad (6)$$

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1}. \quad (7)$$

Фильтр Калмана, определяемый соотношениями (4)–(7), с вектором состояния (3) 10-го порядка на каждом такте счета требует вычисления матриц высокого порядка, что требует значительных ресурсов.

Для бортовой реализации с учетом ограничений на вычислительные ресурсы желательно разработать фильтр более низкого порядка. Такой фильтр в сравнении с фильтром (4)–(7) не будет обладать свойствами оптимальности, однако субоптимальность можно обеспечить с помощью дополнительных алгоритмических решений [2, 40].

### Редуцированный фильтр Калмана в рассматриваемой задаче

Основной задачей алгоритма комплексирования информации ИИБ и ЗП является фильтрация высокочастотных шумов ЗП для обеспечения заданного уровня ошибки определения ориентации. Дан-

ная задача может быть решена путем фильтрации изменения ориентации ЗП относительно измерительной информации ИИБ. Для построения фильтра рассмотрим вектор малого поворота визирной системы координат (ВСК) КА относительно ИСК. Принимая во внимание модель погрешности измерений ЗП (2), для двух соседних тактов получения информации от ЗП запишем

$$\Lambda_{ЗП}^i = \Lambda_{ИСТ}^i \circ \Lambda^{ОШ}. \quad (8)$$

Учитывая характер движения КА и временной интервал между измерениями ЗП, выражение (8) можно представить следующим образом:

$$\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \circ d\Lambda;$$

$$\Lambda^{ОШ} = d\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\theta_x}{2} & \frac{\theta_y}{2} & \frac{\theta_z}{2} \end{bmatrix};$$

$$d\Theta = [\theta_x \ \theta_y \ \theta_z],$$

где  $d\Theta$  — вектор малого поворота ВСК КА относительно ИСК в проекциях на оси ВСК КА за такт формирования информации от ЗП, рассчитанный по данным от ЗП и ИИБ.

Несложно вывести, что

$$\Delta \dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix}.$$

Для фильтра Калмана в качестве вектора состояния системы примем вектор малого поворота между соответствующими одному моменту времени кватернионами ориентации ИИБ и ЗП. Тогда вектор состояния будет выглядеть следующим образом:

$$X_k = [\theta_x^{t/t-1} \ \theta_y^{t/t-1} \ \theta_z^{t/t-1}]^T. \quad (9)$$

Введем дополнительное условие к работе алгоритмов фильтрации, заключающееся в том, что работа алгоритмов осуществляется на участке научных измерений при постоянной угловой скорости, без возмущений движения КА, вызванных движениями солнечных батарей, антенн и работой реактивной двигательной системы. Исходя из того, что шумы измерителей (ИИБ и ЗП) различаются между собой более чем на два порядка, примем вектор ошибок системы  $\zeta_k$  и шумы ИИБ равными нулю. Также примем, что с каждым тактом приема информации от ЗП уходы ИИБ, вызванные дрейфами измерительных каналов, компенсируются соответствующими алгоритмами. С учетом выражения (9) и равенства  $\zeta_k = 0$  уравнение фильтра запишем в виде

$$\begin{bmatrix} \theta_x^{k/k-1} \\ \theta_y^{k/k-1} \\ \theta_z^{k/k-1} \end{bmatrix} = \Phi_{k-1} \begin{bmatrix} \theta_x^{k-1/k-1} \\ \theta_y^{k-1/k-1} \\ \theta_z^{k-1/k-1} \end{bmatrix}.$$

Модель измерений системы примет вид

$$Z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x^k \\ \theta_y^k \\ \theta_z^k \end{bmatrix} + \xi_k = I_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \theta_x^k \\ \theta_y^k \\ \theta_z^k \end{bmatrix} + \xi_k.$$

Тогда вектор ошибок измерителей  $\xi_k$  будет состоять только из высокочастотных ошибок ЗП, приведенных на оси ВСК КА:

$$\xi_k = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Начальные условия фильтрации задаются следующим образом:

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix};$$

$$R_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{bmatrix}.$$

В качестве данных для расчета начальной ковариационной матрицы используется информация о шумовых погрешностях из технических условий на ЗП. Тогда начальное значение коэффициента усиления фильтра будет выглядеть следующим образом:

$$K_0 = P_0(2P_0)^{-1}.$$

Как видно, в такой постановке задачи фильтрации отсутствует измерительная информация ИИБ по угловым скоростям ССК КА. Введем в алгоритм фильтрации данные об угловых скоростях следующим образом. На момент получения измерений ЗП фиксируются данные об ориентации, рассчитанные алгоритмами интегрирования угловой скорости от ИИБ. В начале такта работы фильтра рассчитывается вектор малого поворота, полученный интегрированием угловой скорости ИИБ:

$$\Delta\Theta_{\text{ИИБ}}^{k/k-1} = [\theta_{\text{ИИБ}x}^{k/k-1} \quad \theta_{\text{ИИБ}y}^{k/k-1} \quad \theta_{\text{ИИБ}z}^{k/k-1}].$$

С учетом малости величин:

$$\omega = \Delta\Theta_{\text{ИИБ}}^{k/k-1} = [\omega_X \quad \omega_Y \quad \omega_Z].$$

Тогда введение измерительной информации ИИБ в алгоритмы фильтрации будет осуществляться путем расчета переходной матрицы системы по дан-

ным векторов малого поворота, рассчитанных по измерениям ИИБ:

$$\Phi_{k-1} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку имеются ограничения на вычислительные ресурсы, уточнение коэффициента усиления будет происходить с периодом, большим периода работы фильтра. С учетом принятых ограничений алгоритм комплексирования и фильтрации измерений ЗП по информации от ИИБ примет вид

$$P_{k/k-1} = \Phi^{k-1} P_{k-1/k-1} \Phi_{k-1}^T;$$

$$K^k = P_{k/k-1} (P_{k/k-1} + R_k)^{-1};$$

$$\hat{\theta}_x^{k/k} = \Phi_{(1,:)}^{k-1} \hat{\theta}_x^{k-1/k-1} + K_{(1,:)}^k (\theta_x^{k/k} - \Phi_{(1,:)}^{k-1} \hat{\theta}_x^{k-1/k-1});$$

$$\hat{\theta}_y^{k/k} = \Phi_{(2,:)}^{k-1} \hat{\theta}_y^{k-1/k-1} + K_{(2,:)}^k (\theta_y^{k/k} - \Phi_{(2,:)}^{k-1} \hat{\theta}_y^{k-1/k-1});$$

$$\hat{\theta}_z^{k/k} = \Phi_{(3,:)}^{k-1} \hat{\theta}_z^{k-1/k-1} + K_{(3,:)}^k (\theta_z^{k/k} - \Phi_{(3,:)}^{k-1} \hat{\theta}_z^{k-1/k-1});$$

$$P_{k/k} = (I - K_k) P_{k/k-1}.$$

Здесь индекс (1, :) обозначает первую строку матрицы, индекс (2, :) — вторую строку и т. д.

#### Апробация алгоритма в составе математического стенда моделирования работы бортового комплекса управления космического аппарата

Предлагаемый алгоритм должен функционировать в составе вычислителя БКУ КА. Такт работы вычислителя составляет 100 мс, частота получения данных от ИИБ — 10 Гц, частота получения данных от ЗП — 5 Гц. Такт работы алгоритма комплексирования совпадает с тактом получения данных от ЗП. На вход алгоритма подаются два кватерниона ориентации ССК КА относительно ИСК, рассчитанные по данным ИИБ и по данным ЗП. Поскольку формирование информации ЗП происходит с запаздыванием, в алгоритме запоминаются данные, рассчитанные по информации от ИИБ, соответствующие моменту формирования измерительной информации от ЗП. На основании данных соответствующих тактов получения информации и предыдущих полученных данных происходит вычисление векторов малого поворота. На рис. 2 представлена циклограмма функционирования разработанных алгоритмов комплексирования информации ИИБ и ЗП.

Необходимые для работы параметры рассчитываются в соответствии с частотой работы алгорит-

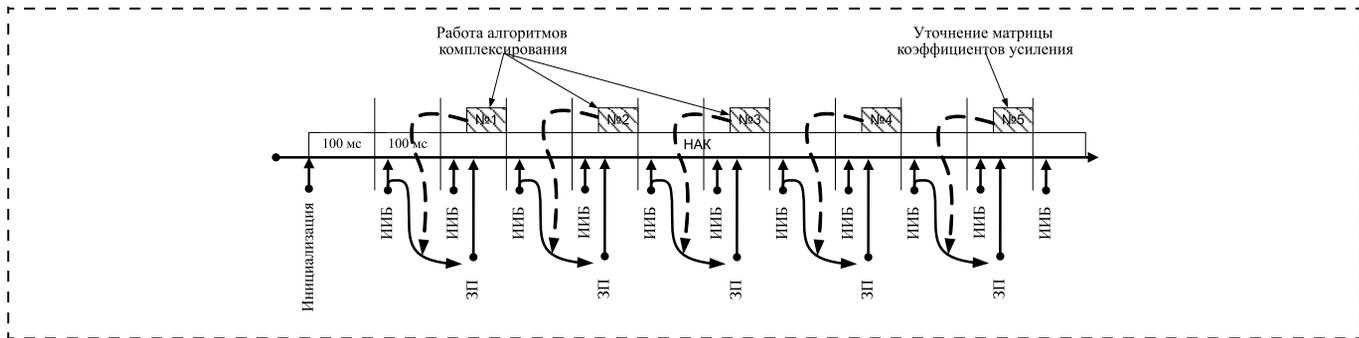


Рис. 2. Циклограмма работы алгоритмов комплексирования ИИБ и ЗП

ма комплексирования, кроме коэффициентов усиления фильтра и ковариационных матриц. Расчет этих матриц является самой вычислительно нагруженной операцией алгоритма, так как требуется расчет обратной матрицы третьего порядка. Предложенный алгоритм разработан с возможностью функционирования в вычислительной системе КА с существенными ограничениями на вычислительные мощности. Принимая во внимание это ограничение, уточнение коэффициентов усиления предлагается проводить раз в пять тактов работы алгоритма фильтрации и комплексирования.

Выходом алгоритма комплексирования является оценка вектора малого поворота между соответствующими одному моменту времени кватернионами ориентации КА, рассчитанными по измерительной информации ИИБ и ЗП. Выходная информация алгоритма комплексирования уточняет параметры ориентации КА.

Отработку и моделирование предлагаемого алгоритма комплексирования проводили на стендах математического моделирования ФГУП МОКБ "Марс". В качестве ИИБ был рассмотрен ГИВУС КИНД34-020-01, характеристики которого представлены ниже:

- Полный диапазон измерений,  $^{\circ}/с$  .....  $\pm 0,4$
- Масштабный коэффициент,  $^{\circ}/имп.$  .....  $0,03...0,05$
- Устойчивость в интервале 1 ч,  $^{\circ}/ч$  .....  $< 0,002$

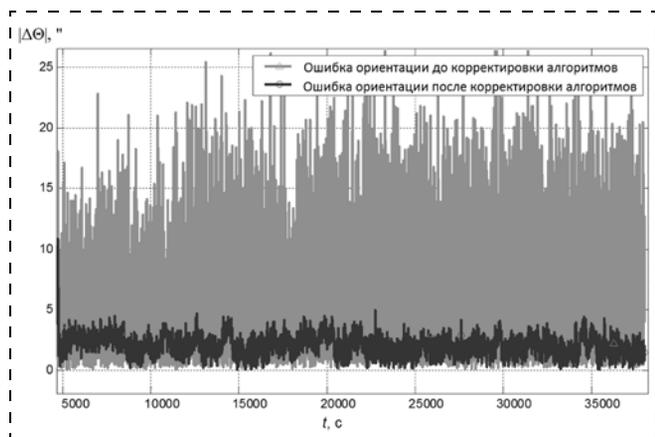


Рис. 3. Графики ошибки определения ориентации КА

В качестве ЗП был рассмотрен SED26, характеристики которого представлены ниже:

- Допустимое угловое ускорение,  $^{\circ}/с^2$  ..... 5
- Допустимая угловая скорость,  $^{\circ}/с$  ..... 3
- Высокочастотная шумовая составляющая ПСК X, Y ( $3\sigma$ ), " ..... 24
- Высокочастотная шумовая составляющая ПСК Z ( $3\sigma$ ), " ..... 164

ГИВУС КИНД34-020-0 и SED26 входят в состав систем ориентации КА "Электро-Л" № 2, "Спектр-РГ" и "Арктика-М". При моделировании применяли модели ИИБ, ЗП и КА, разработанные по исходным данным фирм разработчиков соответствующих элементов.

Результаты моделирования представлены на графике (рис. 3), где показана погрешность определения ориентации КА, выраженная через модуль вектора малого поворота  $|\Delta\Theta|$  между ориентацией КА по указанной модели и рассчитанной ориентацией. Стоит отметить, что до внедрения указанных в статье алгоритмов для фильтрации высокочастотной погрешности ЗП применялся фильтр Калмана с постоянными коэффициентами. На графике приведено сравнение результатов фильтрации высокочастотной ошибки ЗП до и после внедрения предложенного в статье алгоритма. Уровень ошибки от шумов ЗП снизился в три раза.

Как видно из представленного результата, предложенный алгоритм редуцированного фильтра Калмана позволяет реализовать эффективную фильтрацию шумов ЗП. При этом стоит отметить, что по сравнению с реализацией "полного" фильтра Калмана требуемые вычислительные ресурсы для бортовой реализации сократились в 2,7 раза.

#### Список литературы

1. **Космическое** аппаратостроение: Научно-технические исследования и практические разработки ГНПРКЦ "ЦСКБ-Прогресс" / Под ред. д. т. н. А. Н. Кирилина. Самара: Издательский дом "АГНИ", 2011. 280 с.
2. **Проектирование** и испытание бортовых систем управления: учеб. пособ. Т. 3 / Под редакцией А. С. Сырова. М.: МАИ-ПРИНТ, 2011.
3. **Бровкин А. Г., Бурдыгов Б. Г., Гордийко С. В.** и др. Бортовые системы управления космическими аппаратами: учебное пособие / Под ред. А. С. Сырова. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 304 с.
4. **Бессонов Р. В.** Разработка и исследование интегрированного датчика ориентации космического аппарата: Автореферат

дисс. на соискание ученой степени канд. техн. наук. Институт космических исследований РАН. М., 2008.

5. **Vandersteen J.** Observation and Estimation for Space Applications: Doctor in Engineering Dissertation. Heverlee, Belgium: Katholieke Universiteit Leuven. Faculty of Engineering, 2012.

6. **Каргу Л. И.** Точность гироскопических устройств систем управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1990.

7. **Rozelle D. M.** The Hemispherical Resonator Gyro: From Wineglass to the Planets. Northrop Grumman Co, Navigation Systems Division. White paper.

8. **Распопов В. Я., Иванов Ю. В., Алалуев Р. В., Матвеев В. В.** и др. Комплексированные микросистемы ориентации малоразмерных беспилотных летательных аппаратов. СПб.: Изд. ГНЦРФ ЦНИИ "Электроприбор", 2011. С. 161–169.

9. **Hartman R., Michel K., Ratzsch D., Raue H. K., Schmidt U., Schodlbauer D.** Тенденции дальнейшего развития систем управления положения и орбиты высокоподвижных КА ДЗЗ на основе интеллектуальных звездных датчиков // Матер. второй междунар. науч.-техн. конф. "Актуальные проблемы создания космических систем дистанционного зондирования Земли", г. Москва, 2014.

10. **Аванесов Г. А., Воронков С. В., Форш А. А., Куделин М. И.** Звездные координаторы систем ориентации космических аппаратов // Известия вузов. Приборостроение. 2003. № 4.

11. **Решетнев М. Ф., Лебедев А. А., Бартенев В. А., Красильщиков М. Н., Мальшев В. А., Мальшев В. В.** Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах. М.: Машиностроение, 1988.

12. **Солодов А. В.** Методы теории систем в задаче непрерывной линейной фильтрации. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. 264 с.

13. **Сизиков В. С.** Устойчивые методы обработки результатов измерений: учеб. пособ. СПб.: СпецЛит, 1999. 240 с.

14. **Макс Ж.** Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. Т. 1. М.: Мир, 1983. 312 с.

15. **Фомин В. Н.** Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. 288 с.

16. **James R. Wertz.** Spacecraft attitude determination and control. Netherlands: Kluwer Academic Publisher, 1980. 858 p.

17. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. 320 с.

18. **Купер Дж., Макгиллем К.** Вероятностные методы анализа сигналов и систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 376 с.

19. **Markley F. L., Mortari D.** How To Estimate Attitude from Vector Observations // AAS/AIAA Astrodynamics Conference: Proceedings: Advances in the Astronautical Sciences. 1999. Vol. 103. P. 1979–1996.

20. **Shuster M. D.** A Simple Kalman Filter and Smoother for Spacecraft Attitude // The Journal of the Astronautical Sciences. January–March 1989. Vol. 37, N. 1. P. 89–106.

21. **Steyn W. H.** Full Satellite State Determination from Vector Observations // Automatic Control in Aerospace 1994. A Postprint Volume from the IFAC Symposium. 1995. P. 195–200.

22. **Степанов О. А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1. Введение в теорию оценивания. СПб.: Изд. ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2009. С. 351–352.

23. **Schmidt S. F.** The Kalman Filter: Its Recognition and Development for Aerospace Applications // Journal of Guidance and Control. 1961. Vol. 4. P. 4–7.

24. **Lefferts E. J., Markley F. L., Shuster M. D.** Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1982. Vol. 5, N. 5. P. 417–429.

25. **Лэффертс И. Дж., Маркли Ф. Л., Шустер М. Д.** Использование фильтров Калмана для оценивания пространственной ориентации КЛА // Аэрокосмическая техника. 1983. Т. 1, № 8. С. 135–149.

26. **Abdelrahman M., Samaan M.** New Algorithm for Gyroless Spacecraft Angular Rate Estimation and its Applications // Proc. of

the ACSE 05 Conference, 19–21 December 2005, CICC, Cairo, Egypt. P. 47–52.

27. **Иванов Д. С., Карпенко С. О., Овчинников М. Ю.** Алгоритм оценки параметров ориентации малого космического аппарата с использованием фильтра Калмана // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2009. Т. 48.

28. **Галкин Д. И.** Алгоритм оценки параметров ориентации космического аппарата с использованием фильтра Калмана // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана: электронное издание. 2013.

29. **Pittelkau M. E.** Seven Reasons to Fully Calibrate a Redundant IMU // Aerospace control Systems, LLC, September 2007.

30. **Bayard D. S.** Advances in Precision Pointing Control for the NASA Spitzer Space Telescope. Pasadena, CA. 2004. 19 p. (Preprint Jet Propulsion Laboratory, National Aeronautics and Space Administration).

31. **Thienel J. K.** Nonlinear Observer / Controller Designs for Spacecraft Attitude Control Systems with Uncalibrated Gyros, dissaition, 2004.

32. **Thienel J. K., Sanner R. M.** Nonlinear Observers for Gyro Calibration. Breckenridge, CO. 2003. 17 p. (preprint NASA Goddard Space Flight Center NASA, CASI 20040034068).

33. **Hashmall J. A., Radomski M., Sediak J.** On-orbit Calibration of Satellite Gyroscopes // Astrodynamics Specialist Conference, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences. 2000. P. 399–409.

34. **Bar-Itzhack I. Y., Harman R. R.** Implicit and Explicit Spacecraft Gyro Calibration // AIAA Guidance, Navigation and Control Conference. 2004. Vol. 5.

35. **McConley M. W.** Nonlinear Estimation for Gyroscope Calibration for the Inertial Pseudo Star Reference Unit // Thesis (M. S.)-Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Aeronautics and Astronautics, 1994.

36. **Dorman L. I.** Different Space Weather Effects in malfunctions of the High and Low Orbital Satellite // EU INTAS-00810.

37. **Spacecraft Orbital Anomaly Report (SOAR) System, No. PD-ED-1232, 7 p.**

38. **Leach R. D.** Electronic Systems Failures and Anomalies Attributed to Electromagnetic Interference // NASA Reference Publication 1374. 1995. 30 p.

39. **Robertson B., Stoneking E.** Satellite GN & C Anomaly Trends. Breckenridge, CO. 2003. 15 p. (preprint NASA Goddard Space Flight Center AAS 03-071).

40. **Рябогин Н. В.** Калибровка дрейфов датчиков угловой скорости космических аппаратов по информации от звездных датчиков при вращении вокруг произвольной оси // Системы управления беспилотными космическими и атмосферными летательными аппаратами: Тезисы докл. II Всеросс. науч.-техн. конф. М.: МОКБ "Марс", 2012. С. 42–43.

41. **Соловьев И. В., Рябогин Н. В.** Метод полетной калибровки резервированного гироскопического измерителя вектора угловой скорости космического аппарата // Авиакосмическое приборостроение. 2016. № 3. С. 11–21.

42. **Griffin M. D., French J. R.** Space vehicle desing // American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc. 2004. 665 p.

43. **Авдеевский В. С., Успенский Г. Р.** Космическая индустрия. М.: Машиностроение, 1989. 568 с.

44. **Степанов О. А.** Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации. СПб.: Изд. ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 1998. 370 с.

45. **Разработка систем космических аппаратов /** Под ред. П. Фортескую, Г. Суайнерда, Д. Старка; Пер. с англ. М.: Альпина Паблшер, 2015. 765 с.

46. **Лисаков М. М., Войнаков С. М., Сыров А. С., Соколов В. Н., Добрынин Д. А., Шатский М. А., Комальдинова Р. А., Сосновцев В. В., Вьюницкая Т. Б., Рябогин Н. В., Филиппова Е. Н.** Работа системы ориентации космического аппарата Спектр-Р // Космические исследования. 2014. Т. 52.

47. **Rumerman J. A.** NASA Earth science and space application, aeronautics, technology, and exploration, tracking and data acquisition. 1989–1998. NASA Historical Data Book Vol. 8 // U. S. Government Printing Office. 2012. 728 p.

# Inertial Measurement Units and Star Tracker Measurements Fusion on the Basis of the Rodrigues Parameters Estimation

**N. V. Ryabogin**, ryabogin@mokb-mars.ru, **V. N. Sokolov**, sokolov@mokb-mars.ru,  
Mars Experimental Design Bureau, Moscow,  
**N. M. Zadorozhnaya**, zanatalie@ya.ru✉,  
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: **Zadorozhnaya Natalia M.**, Ph. D, Associated Professor,  
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation,  
e-mail: zanatalie@ya.ru

Received on January 16, 2017

Accepted on January 27, 2017

*The on-board satellite attitude and orbit control systems (AOCS) equipped with the inertial measurement units (IMU) and star trackers (ST) are the most versatile and reliable. Simultaneous processing of IMU and ST measurements is common for the foreign scientific spacecraft, which makes the basis of the operating principle of both devices. IMU functions in a wide angular rate range and doesn't depend on the external conditions. However, in case the measurement correction by another source of information is not available, the accuracy of the attitude determination might be reduced. The mathematical fusion of IMU and ST measurements allows AOCS to estimate with high accuracy and frequency the attitude and the angular rate parameters. This paper presents a suboptimal algorithm based on reduced Kalman filter and designed for IMU and ST measurements fusion. The Kalman filter state vector was chosen as a three dimensions vector. This vector is the Rodrigues parameters of the attitude between the attitude estimated by ST and the attitude estimated by IMU angular rate integration. Such a state vector has a minimal dimension for that purpose. Also it allows us to estimate the attitude parameters without additional information lag for the stabilization subsystems. Another feature of the algorithm is a different computation frequency of the state vector estimation and gain matrix. The gain matrix and the covariance matrix are 5 times slower than the state vector estimation. This algorithm performs an efficient decrease of the noise equivalent angle. Also this algorithm is not characterized by a computational complexity and significant AOCS computer requirements, which are 2,7 times lower compared with the full Kalman filter. The algorithm can function with various IMU and ST obtained by the state vector provided by the Rodrigues parameters of the attitude between ST attitude and IMU attitude. The algorithm is a part of AOCS software, verified on AOCS test bench. The test bench includes models of SED26 star tracker and GIVUS KIND34-020 IMU. Due to the new algorithm and with this equipment AOCS attitude error is lower than 5 arc. seconds.*

**Keywords:** satellite on-board control systems, satellites, spacecraft, inertial measurement unit, star tracker, Kalman filter, measurements fusion

For citation:

**Ryabogin N. V., Sokolov V. N., Zadorozhnaya N. M.** Inertial Measurement Units and Star Tracker Measurements Fusion on the Basis of the Rodrigues Parameters Estimation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 5, pp. 351–359.

DOI: 10.17587/mau.18.351-359

## References

1. Kirillin A. N. ed. *Kosmicheskoe apparostroenie: nauchno-tehnicheskie issledovaniya I prakticheskie razrabotki* (Space equipment development: Scientific researches and practices in GSVSDC "CSDC-Progress"), Samara, Publishing house "AGNI", 2011, 280 p. (in Russian).
2. Syrov A. S. ed. *Proektirovanie i ispitaniye bortovih sistem upravleniy. Uchebnoye posobie* (On-board control system design and testing. Studying materials), Moscow, MAI-PRINT, 2011, 342 p. (in Russian).
3. Syrov A. S. ed. *Bortovye sistemy upravleniya kosmicheskimi aparatami. Uchebnoye posobie* (Satellite on-board control systems. Studying materials), Moscow, MAI-PRINT, 2010, 304 p. (in Russian).
4. Bessonov R. V. *Razrabotka i issledovanie integririvannogo datchika orientatsii kosmicheskogo apparata* (Satellite integrated attitude sensor development and research) Abstract of dissertation for the degree of Cand. tehn. sciences, Space Research Institute, Moscow, 2008 (in Russian).
5. Vandersteen J. *Observation and Estimation for Space Applications*. Doctor in Engineering Dissertation, Katholieke Universiteit Leuven, Faculty of Engineering, Heverlee, Belgium, 2012.
6. Kargu L. I. *Tochnost' giroskopicheskikh ustroystv sistem upravleniya letatel'nykh apparatov* (The accuracy of gyroscopic devices, aircraft control systems), Moscow, Mashinostroenie, 1990 (in Russian).
7. David M. Rozelle. *The Hemispherical Resonator Gyro: From Wineglass to the Planets*, Northrop Grumman Co, Navigation Systems Division. White paper.
8. Raspopov V. Ya., Ivanov U. V., Alaluev R. V., Matveev V. V. *Kompleksirovannyye mikrosistemy orientatsii malorazmernykh bespilotnykh letatel'nykh apparatov* (Fused attitude control microsystems of unmanned flying vehicles), St.-Peterburg, GNCRF CNII Ehlektropribor, 2011, p. 161–169 (in Russian).
9. Hartman R., Michel K., Ratzsch D., Raue H. K., Schmidt U., Schodlbauer D. *Tendentsii dalnejshego razvitiya sistem upravleniya polozheniya i orbity vysokopodvizhnykh KA DZZ na osnove intelligentnykh zvezdnykh datchikov* (Earth surveillance satellite AOCS with intelligent star trackers further evolution tendencies), *Digest of second international conference "Aktualnye problemy sozdaniya kosmicheskikh sistem distantsionnogo zondirovaniya Zemli"*, Moscow, 2014 (in Russian).
10. Avanesov G. A., Forsh A. A., Bessonov R. V., Ziman Ya. L., Kudelin M. I., Zalyalova R. G. *Zvezdnyy koordinatork BOKZ-M i perspektivy ego razvitiya* (Star tracker BOKZ-M and its prospective), *Digest of XIV Integrated navigation systems international conference in Saint-Petersburg*, 2007 (in Russian).
11. Reshetnev M. F., Lebedev A. A., Bartenev V. A., Krasilshchikov M. N., Malyshev V. A., Malyshev V. V. *Upravlenie i navigatsiya iskusstvennykh sputnikov Zemli na okolostrukovnykh orbitakh* (Earth surveillance satellite control and navigation on near round orbits), Moscow, Mashinostroenie, 1988 (in Russian).
12. Solodov A. V. *Metody teorii sistem v zadache nepreryvnoy lineynoy filtratsii* (System theory methods in continuous linear filtration), Moscow, Nauka, 1976, 264 p. (in Russian).
13. Sizikov V. S. *Ustojchivyye metody obrabotki rezultatov izmereniy, Uchebnoye posobie* (Sustainable methods of processing measurement results. Studying materials), St.-Peterburg, SpecLit, 1999, p. 240.
14. Maks Z. H. *Metody i tekhnika obrabotki signalov pri fizicheskikh izmereniyah* (Methods and technics of signal processing at the physical measurements), Moscow, Mir, 1983, vol. 1, 312 p. (in Russian).
15. Fomin V. N. *Rekurrentnoye ocenivanie i adaptivnaya filtratsiya* (Recursive estimation and adaptive filtering), Moscow, Nauka, 1984, 288 p. (in Russian).
16. James R. Wertz. *Spacecraft attitude determination and control*, Kluwer Academic Publisher, Netherlands, 1980, 858 p.
17. Branec V. N., Smiglevskiy I. P. *Primeneniye kvaternionov v zadachah orientatsii tverdogo tela* (Quaternion application in solid object attitude), Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).

18. **Kuper Dzh., Makgille K.** *Veroyatnostnye metody analiza signalov i sistem* (Probabilistic methods for the analysis of signals and systems), Moscow, Mir, 1989, 376 p. (in Russian).
19. **Markley F. L., Mortari D.** How To Estimate Attitude from Vector Observations, *AAS/ALAA Astrodynamics Conference: Proceedings: Advances in the Astronautical Sciences*, 1999, vol. 103, pp. 1979–1996.
20. **Shuster M. D.** A Simple Kalman Filter and Smoother for Spacecraft Attitude, *The Journal of the Astronautical Sciences*, January–March 1989, vol. 37, no. 1, pp. 89–106.
21. **Steyn W. H.** Full Satellite State Determination from Vector Observations, *Automatic Control in Aerospace*, 1994, A Postprint Volume from the IFAC Symposium, 1995, pp. 195–200.
22. **Stepanov O. A.** *Osnovi teorii ocenivaniya s prilozheniyami k zadacham obrabotki navigacionnoy informacii* (Basics in estimation theory in navigation information treatment), St-Petersburg, Electropribor, 2009, 352 p. (in Russian).
23. **Schmidt S. F.** The Kalman Filter: Its Recognition and Development for Aerospace Applications, *Journal of Guidance and Control*, 1961, vol. 4, pp. 4–7.
24. **Lefferts E. J., Markley F. L., Shuster M. D.** Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1982, vol. 5, no. 5, pp. 417–429.
25. **Lefferts E. J., Markley F. L., Shuster M. D.** *Ispolzovanie filtrov Kalmana dlya ocenivaniya prostiranstvennoy orientacii KLA* (Filtering for Spacecraft Attitude Estimation), Moscow, *Aehrokosmicheskaya Tekhnika*, 1983, vol. 1, no. 8, pp. 135–149 (in Russian).
26. **Abdelrahman M., Samaan M.** New Algorithm for Gyroless Spacecraft Angular Rate Estimation and its Applications, *Proc. of the ACSE 05 Conference*, 19–21 December 2005, CICC, Cairo, Egypt, pp. 47–52.
27. **Ivanov D. S., Karpenko S. O., Ovchinnikov M. YU.** *Algoritm ocenki parametrov orientacii malogo kosmicheskogo apparata s ispolzovaniem filtra Kalmana* (Kalman Filter Algorithm for Satellite Attitude Parameters Estimation), Moscow, Preprint of KIAM RAS, 2009, p. 33 (in Russian).
28. **Galkin D. I.** *Algoritm ocenki parametrov orientacii kosmicheskogo apparata s ispolzovaniem filtra Kalmana* (Kalman Filter Algorithm for Satellite Attitude Parameters Estimation), Moscow, *Vestnik BMSTU*, p. 2013 (in Russian).
29. **Pittelkau M. E.** Seven Reasons to Fully Calibrate a Redundant IMU, *Aerospace Control Systems*, LLC, September, 2007.
30. **Bayard D. S.** Advances in Precision Pointing Control for the NASA Spitzer Space Telescope. Pasadena, CA. 2004. 19 p. (Preprint Jet Propulsion Laboratory, National Aeronautics and Space Administration).
31. **Thienel J. K.** Nonlinear Observer/Controller Designs for Spacecraft Attitude Control Systems with Uncalibrated Gyros, dissertation, 2004.
32. **Thienel J. K., Sanner R. M.** Nonlinear Observers for Gyro Calibration, Breckenridge, CO, 2003, 17 p. (preprint NASA Goddard Space Flight Center NASA, CASI 20040034068).
33. **Hashmall J. A., Radomski M., Sediak J.** On-orbit Calibration of Satellite Gyroscopes, *Astrodynamics Specialist Conference, Guidance, Navigation, and Control and Co-located Conferences*, 2000, pp. 399–409.
34. **Bar-Itzhack I. Y., Harman R. R.** Implicit and Explicit Spacecraft Gyro Calibration, *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, 2004, vol. 5.
35. **McConley M. W.** Nonlinear Estimation for Gyroscope Calibration for the Inertial Pseudo Star Reference Unit, *Thesis (M. S.)*, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Aeronautics and Astronautics, 1994.
36. **Dorman L. I.** Different Space Weather Effects in malfunctions of the High and Low Orbital Satellites, EU INTAS-00810.
37. **Spacecraft** Orbital Anomaly Report (SOAR) System, No. PD-ED-1232.
38. **Leach R. D.** Electronic Systems Failures and Anomalies Attributed to Electromagnetic Interference, *NASA Reference Publication 1374*, 1995, 30 p.
39. **Robertson B., Stoneking E.** Satellite GN & C Anomaly Trends, Breckenridge, CO, 2003, 15 p. (preprint NASA Goddard Space Flight Center AAS 03-071).
40. **Ryabogin N. V.** *Kalibrovka dreyfov datchikov uglovoy skorosti kosmicheskikh apparatov po informacii ot zvezdnykh datchikov pri vrashenii vokrug proizvol'noj osi* (In-flight gyro device calibration with star tracker information), *Thesises of II Science-technical All-Russian conference*, Moscow, 2012, pp. 42–43 (in Russian).
41. **Solov'ev I. V., Ryabogin N. V.** *Metod poletnoy kalibrovki rezervirovannogo giroskopicheskogo izmeritelya vektora uglovoy skorosti kosmicheskogo apparata* (In-flight calibration method of satellite redundant gyro device), Moscow, Digest of Airspace instrumentation, 2016, no. 3, pp. 11–21 (in Russian).
42. **Griffin M. D., French J. R.** Space vehicle desing, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2004, 665 p.
43. **Avduevskiy V. S., Uspenskiy G. R.** *Kosmicheskaya industriya* (Space industry), Moscow, Mashinostroenie, 1989, 568 p. (in Russian).
44. **Stepanov O. A.** *Primenenie teorii nelineynoy filtratsii v zadachah obrabotki navigacionnoy informacii* (Non-linear filtration theory application in navigation information treatment), St-Peterburg, Electropribor, 1998, 370 p. (in Russian).
45. **Fortescue P., Swinerd G., Stark J.** *Razrabotka sistem kosmicheskikh apparatov* (Spacecraft systems engineering), Moscow, Publishing house "Alpina Publisher", 2015, 765 p. (in Russian).
46. **Lisakov M. M., Syrov A. S., Sokolov V. N., Dobrynin D. A., Shatsky M. A., Kamaldinova R. A., Sosnovtsev V. V., Ryabogin N. V., Vyunitskaya T. B., Filippova E. N.** *Rabota sistemy orientacii kosmicheskogo apparata Spektr-R* (Operation of the SPECTR-R orientation system), *Kosmicheskije Issledovaniya*, 2014, vol. 52.
47. **Rumerman J. A.** NASA Earth science and space application, aeronautics, technology, and exploration, tracking and data acquisition, 1989–1998. *NASA Historical Data Book*, vol. 8, U. S. Government Printing Office, 2012, 728 p.

## Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *Е. В. Комиссарова*.

Сдано в набор 01.03.2017. Подписано в печать 11.04.2017. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН517 Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций  
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".  
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.



# Международная научно-техническая конференция «ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ РОБОТОТЕХНИКА»

2–3 ноября 2017 года

ГНЦ РФ ЦНИИ РТК,  
Тихорецкий пр., 21,  
Санкт-Петербург

## ПЕРВОЕ ИНФОРМАЦИОННОЕ СООБЩЕНИЕ

### Организатор конференции

- ГНЦ РФ ЦНИИ РТК

### Оформление участия в конференции

Для участия в конференции необходимо направить регистрационную форму, материалы доклада и экспертное заключение о возможности публикации на e-mail: [mrspsb@rtc.ru](mailto:mrspsb@rtc.ru)

### Финансовые условия

Стоимость участия и условия оплаты на сайте <http://er.rtc.ru/>

### Требования к докладам

Материалы доклада на русском языке (не более 5 страниц) и английском языке (не более 5 страниц) пересылаются на e-mail: [mrspsb@rtc.ru](mailto:mrspsb@rtc.ru) в виде файла в формате Word for Windows.

Формат страниц – А4, поля: верхнее и нижнее – 1,8 см, левое и правое – 1,9 см.

Шрифт текста – Times New Roman Cyr 11 пунктов, позиция табуляции абзаца – 0,8, единичный междустрочный интервал.

Таблицы, рисунки, формулы, графики (как объекты) вставляются в текст и обязательно должны содержать название. Графики должны быть выполнены в черно-белом варианте.

Инициалы авторов, фамилия – по центру, шрифт – полужирный курсив, интервал после – 9 пунктов; название – по центру, шрифт – прописной полужирный; интервал после – 9 пунктов; название организации, город, e-mail авторов: шрифт – курсив, интервал после – 9 пунктов; основной текст.

Библиографические ссылки даются арабскими цифрами в квадратных скобках. Список литературы - через 6 пунктов после текста без заголовка и абзаца.

### Тематика конференции

- **Проектирование робототехнических систем**  
Методы, опыт проектирования и применения.
- **Робототехника для экстремальных условий функционирования**  
Космическая и морская робототехника. Робототехника для чрезвычайных условий катастроф и аварий.
- **Военная и антитеррористическая робототехника**  
Боевые, боевого обеспечения и антитеррористические робототехнические системы. Разведка, разминирование, охрана, спасательные и транспортные операции.
- **Робототехника в медицине и в сфере обслуживания**  
Оказание первой помощи. Обслуживание больных и инвалидов, их реабилитация. Микророботы для обследования и лечения внутренних органов.

### Основные этапы и даты

Предоставление заявки на участие, материалов доклада, экспертного заключения о возможности публикации	до 31 мая 2017
Рассмотрение материалов Программным комитетом и уведомление участников о принятии докладов	до 16 июня 2017
Проведение конференции	2–3 ноября 2017

### Официальный язык

Русский; Английский

**Председатель программного комитета:**  
д.т.н., профессор Евгений Иванович Юевич  
Тел.: (812) 5524544; e-mail: [yurevich@rtc.ru](mailto:yurevich@rtc.ru)

**Секретариат конференции:**  
Вольяс Татьяна Владимировна  
Тел.: (812) 5524162; e-mail: [mrspsb@rtc.ru](mailto:mrspsb@rtc.ru)

Рисунки к статье А. С. Кодякова, Н. А. Павлока, В. Ю. Будкова  
 «ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСТРУКЦИИ  
 АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА АНТАРЕС  
 ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ»

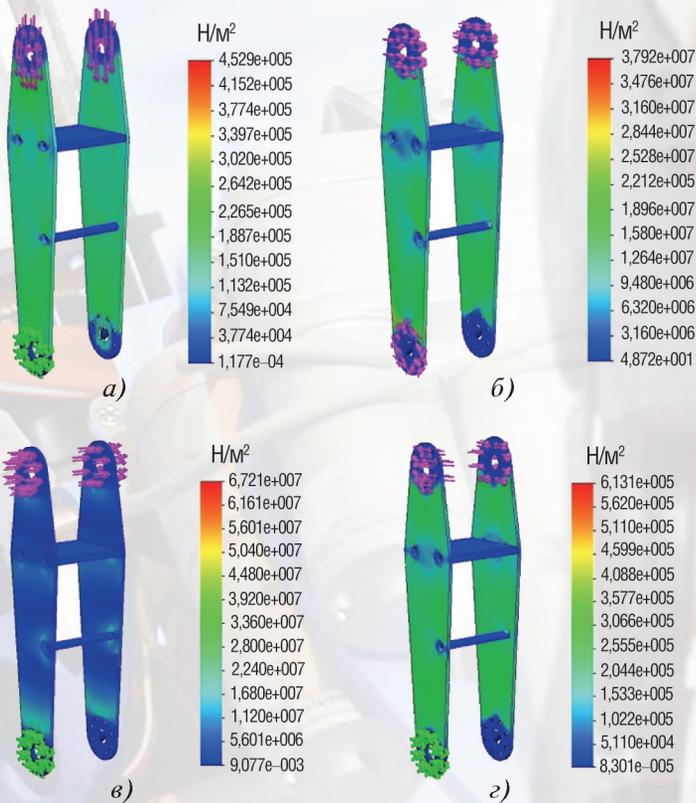


Рис. 4. Результаты симуляции модели голени:

- а – вертикальная нагрузка;
- б – нагрузка момента вращения и боковая нагрузка (по нормали к поперечной плоскости);
- в – боковая нагрузка (перпендикулярно сагиттальной плоскости);
- г – скручивание

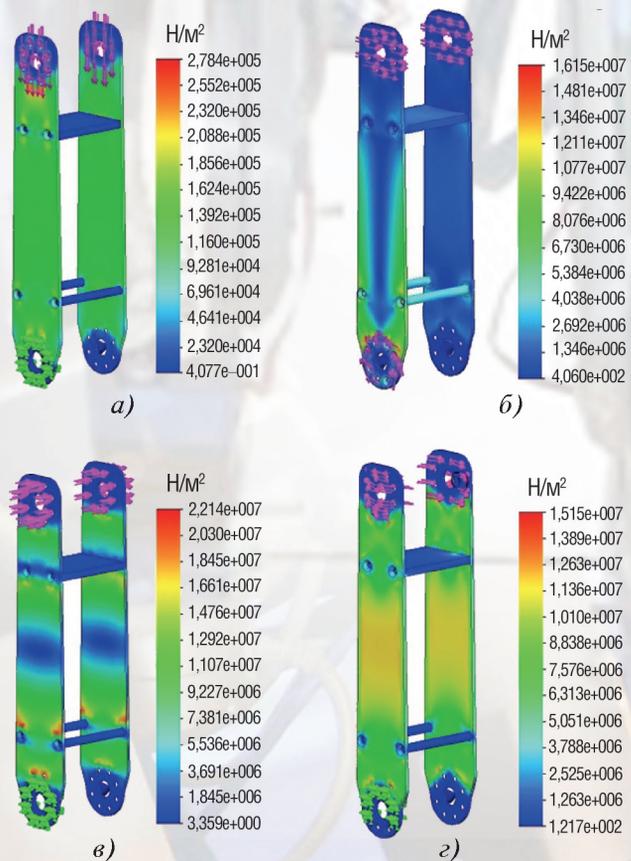
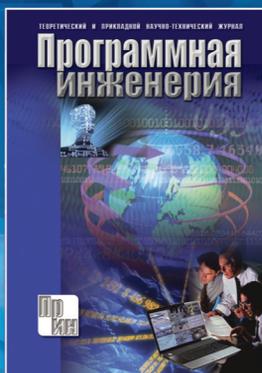


Рис. 5. Результаты симуляции модели бедра:

- а – вертикальная нагрузка;
- б – боковая нагрузка (по нормали к фронтальной плоскости);
- в – боковая нагрузка (перпендикулярно сагиттальной плоскости)
- г – скручивание

# Издательство “НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ” выпускает научно-технические журналы



Теоретический и прикладной научно-технический журнал

## ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ

В журнале освещаются состояние и тенденции развития основных направлений индустрии программного обеспечения, связанных с проектированием, конструированием, архитектурой, обеспечением качества и сопровождением жизненного цикла программного обеспечения, а также рассматриваются достижения в области создания и эксплуатации прикладных программно-информационных систем во всех областях человеческой деятельности.

Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 22765; «Пресса России» – 39795

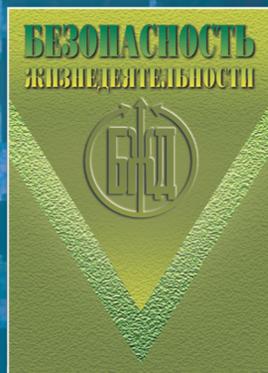


Ежемесячный теоретический и прикладной  
научно-технический журнал

## ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития основных направлений в области разработки, производства и применения информационных технологий.

Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 72656; «Пресса России» – 94033



Научно-практический и учебно-методический журнал

## БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В журнале освещаются достижения и перспективы в области исследований, обеспечения и совершенствования защиты человека от всех видов опасностей производственной и природной среды, их контроля, мониторинга, предотвращения, ликвидации последствий аварий и катастроф, образования в сфере безопасности жизнедеятельности.

Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 79963; «Пресса России» – 94032



Ежемесячный междисциплинарный  
теоретический и прикладной научно-технический журнал

## НАНО- и МИКРОСИСТЕМНАЯ ТЕХНИКА

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития нано- и микросистемной техники, рассматриваются вопросы разработки и внедрения нано- и микросистем в различные области науки, технологии и производства.

Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 79493; «Пресса России» – 27849

Все журналы  
распространяются  
только по подписке.

Оформить подписку можно  
через подписные агентства  
либо непосредственно  
в редакции журналов.

Адрес редакции журналов для авторов и подписчиков:  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4. Издательство “НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ”  
Тел.: (499) 269-55-10, 269-53-97. Факс: (499) 269-55-10.

E-mail: antonov@novtex.ru