

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 17
2016
№ 9

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Редакционный совет:

CHYI-YEU LIN, PhD, prof.
GROUMPOS P. P., prof.
JEN-HWA GUO, PhD, prof.
KATALINIC B., PhD, prof.
SUBUDHI B., PhD, prof.
АЛИЕВ Т. А., акад. НАНА, проф.
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН, проф.
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН, проф.
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН, проф.
КАЛЯЕВ И. А., чл.-корр. РАН, проф.
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г., чл.-корр. НАНБ, проф.
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН, проф.
ЛЕОНОВ Г. А., чл.-корр. РАН, проф.
МАТВЕЕНКО А. М., акад. РАН, проф.
МИКРИН Е. А., акад. РАН, проф.
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН, проф.
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН, проф.
СИГОВ А. С., акад. РАН, проф.
СОЙФЕР В. А., чл.-корр. РАН, проф.
СОЛОВЬЕВ В. А., чл.-корр. РАН, проф.
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН, проф.
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН, проф.
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН, проф.
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН, проф.
ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН, проф.

Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д. т. н., с. н. с.

Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В., д. т. н., проф.
ПУТОВ В. В., д. т. н., проф.
ЮЩЕНКО А. С., д. т. н., проф.

Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В., д. ф.-м. н., проф.
АНТОНОВ Б. И.
АРШАНСКИЙ М. М., д. т. н., проф.
БУКОВ В. Н., д. т. н., проф.
ВИТТИХ В. А., д. т. н., проф.
ГРАДЕЦКИЙ В. Г., д. т. н., проф.
ЕРМОЛОВ И. Л., д. т. н., доц.
ИВЧЕНКО В. Д., д. т. н., проф.
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д. т. н., проф.
КОЛОСОВ О. С., д. т. н., проф.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д. т. н., проф.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д. т. н., проф.
ЛОХИН В. М., д. т. н., проф.
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д. ф.-м. н., проф.
ПРОХОРОВ Н. Л., д. т. н., проф.
ПШИХОПОВ В. Х., д. т. н., проф.
РАПОПОРТ Э. Я., д. т. н., проф.
СЕРГЕЕВ С. Ф., д. пс. н., с. н. с.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д. т. н., проф.
ФРАДКОВ А. Л., д. т. н., проф.
ФУРСОВ В. А., д. т. н., проф.
ЮРЕВИЧ Е. И., д. т. н., проф.

Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Фуртат И. Б. Алгоритм робастного управления линейными объектами с векторными входами-выходами в условии насыщения сигнала управления 579

Атамуратов А. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А. Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами 587

ЭРГАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

Сергеев С. Ф. Нейроадаптивные биоморфные интерфейсы в эргатических системах: проблемы и решения 599

Лохин В. М., Манько С. В., Александрова Р. И., Романов М. П., Диане С. А. К. Принципы построения и программно-алгоритмическое обеспечение человеко-машинного интерфейса для автономных роботов и мультиагентных робототехнических систем 606

ЭЛЕКТРОННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ

Жуков А. А., Аджибеков А. А., Кудров М. А., Зудов К. А., Гелиев А. В., Веселаго В. Г. Метаматериалы в бортовых беспроводных системах приема и преобразования СВЧ энергии мобильных автономных устройств 615

Неусыпин К. А., Сизых В. В., Шахтарин Б. И., Шевцев В. А. Анализ системы фазовой автоподстройки с квадратурными каналами при наличии аддитивных гармонических помех и широкополосного шума методом кумулянтов 621

УПРАВЛЕНИЕ В АВИАКОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 2 633

Шибанов Г. П. Автоматизация процесса защиты газотурбинных двигателей от пожара 644

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Editorial Council:

ALIEV T. A., prof., Azerbaijan, Baku
 ANSHAKOV G. P., Russia, Samara
 BOLOTNIK N. N., Russia, Moscow
 CHENTSOV A. G., Russia, Ekaterinburg
 CHERNOUSKO F. L., Russia, Moscow
 CHYI-YEU LIN, PhD, Prof., Taiwan, Taipei
 FEDOROV I. B., Russia, Moscow
 GROUMPOS P. P., prof., Greece, Patras
 JEN-HWA GUO, PhD, Prof., Taiwan, Taipei
 KALYAEV I. A., Russia, Taganrog
 KATALINIC B., PhD, Prof., Austria, Vienna
 KRASNEVSKIY L. G., Belarus, Minsk
 KUZNETSOV N. A., Russia, Moscow
 LEONOV G. A., Russia, S.-Peterburg
 MATVEENKO A. M., Russia, Moscow
 MIKRIN E. A., Russia, Moscow
 PESHEKHONOV V. G., Russia, S.-Peterburg
 REZCHIKOV A. F., Russia, Saratov
 SCHERBATYUK A. F., Russia, Vladivostok
 SEBRYAKOV G. G., Russia, Moscow
 SIGOV A. S., Russia, Moscow
 SOJFER V. A., Russia, Samara
 SOLOMENTSEV Yu. M., Russia, Moscow
 SOLOVJEV V. A., Russia, Moscow
 SUBUDHI B., PhD, Prof., India, Sundargarh
 VASILYEV S.N., Russia, Moscow
 YUSUPOV R. M., Russia, S.-Peterburg

Editor-in-Chief:

FILIMONOV N. B., Russia, Moscow

Deputy Editor-in-Chief:

PODURAEV Yu. V., Russia, Moscow
 PUTOV V. V., Russia, S.-Peterburg
 YUSCHENKO A. S., Russia, Moscow

Responsible Secretary:

BEZMENOVA M. Yu., Russia, Moscow

Editorial Board:

ALEXANDROV V. V., Russia, Moscow
 ANTONOV B. I., Russia, Moscow
 ARSHANSKY M. M., Russia, Tver
 BUKOV V. N., Russia, Zhukovsky
 ERMOLOV I. L., Russia, Moscow
 FILARETOV V. F., Russia, Vladivostok
 FRADKOV A. L., Russia, S.-Peterburg
 FURSOV V. A., Russia, Samara
 GRADETSKY V. G., Russia, Moscow
 ILYASOV B. G., Russia, Ufa
 IVCHENKO V. D., Russia, Moscow
 KOLOSOV O. S., Russia, Moscow
 KOROSTELEV V. F., Russia, Vladimir
 LEBEDEV G. N., Russia, Moscow
 LOKHIN V. M., Russia, Moscow
 PAVLOVSKY V. E., Russia, Moscow
 PROKHOROV N. L., Russia, Moscow
 PSHIKHOPOV V. Kh., Russia, S.-Peterburg
 RAPOPORT E. Ya., Russia, Samara
 SERGEEV S. F., Russia, S.-Peterburg
 VITTIKH V. A., Russia, Samara
 YUREVICH E. I., Russia, S.-Peterburg

Editorial Staff:

GRIGORIN-RYABOVA E.V., Russia, Moscow

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

METHODS OF THE THEORY OF AUTOMATIC CONTROL

Furtat I. B. Robust Control Algorithm for Linear MIMO Plants in Conditions of Saturation of the Control Signal 579

Atamuratov A. G., Mikhailov I. E., Muravey L. A. The Moment Problem in Control Problems of Elastic Dynamic Systems 587

ERGATIC CONTROL SYSTEMS

Sergeev S. F. Biomorphic Neuroadaptive Interfaces in the Ergatic Systems: Problems and Solutions 599

Lokhin V. M., Manko S. V., Alexandrova R. I., Romanov M. P., Diane S. A. K. Man-Machine Interface for Autonomous Robots and Multi-Agent Robotic Systems 606

ELECTRONIC COMPONENTS OF MECHATRONIC SYSTEMS

Zhukov A. A., Adzhibekov A. A., Kudrov M. A., Zudov K. A., Geliev A. V., Veselago V. G. Metamaterials in the Onboard Wireless Reception Systems and Conversion of the Microwave Energy of the Mobile Autonomous Devices 615

Neusypin K. A., Sizykh V. V., Shakhhtarin B. I., Shevtsev V. A. Cumulant Analysis of the Cos-tas Loop with Additive Effects of the Harmonic Interference and Broadband Noise 621

CONTROL IN AEROSPACE SYSTEMS

Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Investigation of the Task of the Optimal Reorientation of a Spacecraft Orbit through a Limited or Impulse Jet Thrust, Orthogonal to the Plane of the Orbit. Part 2 633

Shibanov G. P. Process of Automation the Protect Gas-Turbine Engine from the Surge . . 644

Information about the journal is available online at:
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: mech@novtex.ru

И. Б. Фуртат, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., проф., cainenash@mail.ru,
Институт проблем машиноведения РАН, Университет ИТМО, Санкт-Петербург

Алгоритм робастного управления линейными объектами с векторными входами-выходами в условии насыщения сигнала управления*

Предложен алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами с векторными входами и выходами в условии параметрической неопределенности и внешних ограниченных возмущений. Рассмотрена задача слежения выхода объекта управления за эталонным сигналом. Предложенный алгоритм обобщен на случай заданных ограничений функции управления. Приведены условия на параметры объекта, эталонной модели и регулятора, при выполнении которых система управления будет работоспособной.

Ключевые слова: объект управления с векторными входами и выходами, робастное управление, насыщение сигнала управления, компенсация возмущений

Введение

Одной из ключевых проблем в теории управления является управление объектами в условии неопределенности, когда недоступны измерения производных выхода объекта управления. Об этом свидетельствует большое число публикаций на эту тему. Одним из эффективных способов управления объектами в условии неопределенности является робастное управление, для которого на сегодняшний день предложено достаточное число решений [1–6].

В работах [2, 3] для управления объектами в условиях параметрической неопределенности и внешних возмущений используются различные модификации наблюдателей с большим коэффициентом усиления (high-gain observer) для оценки производных выхода объекта. Наличие большого коэффициента необходимо для обеспечения робастной устойчивости замкнутой системы по отношению к данным неопределенностям. Однако при рассогласовании начальных условий объекта и системы управления увеличение коэффициента усиления в наблюдателе может привести к увеличению множества значений функции управления в начальный момент времени. В работе [4] на базе результатов статьи [3] получена простая схема управления, представленная последовательным соединением апериодических и форсирующих звеньев. В работе [5]

рассмотрено решение задачи компенсации возмущений с использованием динамического вспомогательного контура, подключенного параллельно объекту управления, и наблюдателя, представленного последовательным соединением реальных дифференцирующих звеньев. Результат статьи [5] позволил получить в работе [6] простой регулятор, представленный передаточной функцией, знаменатель которой содержит нулевой корень и малый параметр.

Анализ работ [2–6] показал, что представленные схемы управления отличаются лишь их частной реализацией. Поэтому возникает задача, связанная с получением нового способа управления, который бы позволил синтезировать новый класс регуляторов с учетом результатов работ [2–6].

Следующая проблема состоит в том, что при синтезе большинства алгоритмов управления в условии неопределенности, например в работах [1–6], требуется ограниченность функции управления, но границы множества ее возможных значений не фиксированы. Данное множество зависит от неизвестных начальных условий и параметров объекта управления, а также параметров системы управления. Однако на практике произвольное множество возможных значений функции управления может привести к неработоспособности системы управления из-за присутствия реальных ограничений.

В условиях определенности параметров объекта управления и внешних возмущений можно использовать в автоматических системах законы управления с введением ПИ или ПИД закона регулирования. Однако из-за насыщения управляющего сигнала переменные интегрирующего звена в ПИ и ПИД регуляторах могут быть неограниченными (windup), что приводит к невыполнению постав-

* Результаты разделов 3 и 5 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (договор № 14.W01.16.6325-МД (МД-6325.2016.8)). Результаты раздела 2 получены в ИПМаш РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-29-00142). Другие исследования частично поддержаны грантом Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 14.Z50.31.0031) и грантом Правительства Российской Федерации (проект № 074-U01).

ленной цели или к потере устойчивости замкнутой системы [7]. В данном случае работоспособность системы управления с ПИ регулятором может достигаться введением контура, предотвращающего рост параметров в регуляторе (anti-windup, [8, 9]).

Впервые задача управления в условиях неопределенности и насыщения сигнала управления была рассмотрена в работе [10], однако результаты, касающиеся насыщения, не имеют строгого доказательства. Аналогичный результат был описан в работе [5], где на этапе моделирования системы с учетом известного множества возможных значений параметров объекта, предлагалась методика выбора параметров в регуляторе. В статье [11] для решения задачи функция насыщения сигнала управления заменялась гиперболическим тангенсом от сигнала управления. В работе [12] предложено адаптивное управление объектами в условиях неопределенности, где для частичной компенсации ограничений на сигнал управления параллельно ошибке слежения вводился вспомогательный контур с настраиваемым параметром. Заметим, что результаты работ [11, 12] справедливы, если доступен измерению вектор состояния объекта управления.

Таким образом, следующей задачей, рассматриваемой в статье, является обобщение алгоритма, синтезированного без учета насыщения сигнала управления, на случай заданных ограничений функции управления, когда не доступны измерению производные регулируемой переменной.

В статье решена задача управления линейными динамическими объектами с векторными входами и выходами в условиях параметрической неопределенности, внешних возмущений, заданных ограничений на сигнал управления и недоступности измерению производных входных и выходных сигналов. Вначале предложен алгоритм управления, обеспечивающий робастность замкнутой системы по отношению к параметрическим неопределенностям и внешним возмущениям без учета ограничений на функцию управления. Показано, что предложенный алгоритм обобщает известные результаты [2–6] и позволяет синтезировать новый класс алгоритмов. Далее полученный результат обобщается для управления в условиях заданных ограничений функции управления. Приведены условия на параметры модели объекта управления, эталонной модели и регулятора, при выполнении которых система управления будет работоспособной. Рассмотрены примеры моделирования, иллюстрирующие работоспособность предлагаемой схемы управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t), \quad (1)$$

где $y(t) \in R^l$ — вектор регулируемых переменных, $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_l(t)]^T \in R^l$ — вектор управления, $f(t) \in R^l$ — неконтролируемое ограниченное возмущение;

$$Q(p) = \begin{bmatrix} Q_{11}(p) & \dots & Q_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{l1}(p) & \dots & Q_{ll}(p) \end{bmatrix}, \quad R(p) = \begin{bmatrix} R_{11}(p) & \dots & R_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{l1}(p) & \dots & R_{ll}(p) \end{bmatrix},$$

$Q_{ij}(p)$, $R_{ij}(p)$ — линейные дифференциальные операторы, $\deg Q_{ij}(p) = n_{ij}$, $\deg R_{ij}(p) = m_{ij}$, причем $n_{ii} > n_{ij}$, $m_{ii} \geq m_{ij}$ при $i \neq j$, $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, l}$, $p = d/dt$ — оператор дифференцирования.

Цель управления состоит в синтезе непрерывного закона регулирования, обеспечивающего выполнение условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t > T, \quad (2)$$

и нахождении сигналов $u_i(t)$ во множествах $|u_i(t)| \leq \bar{u}_i$,

$i = \overline{1, l}$, где $y_m(t)$ — эталонный сигнал такой, что

$$|y_m^{(j)}(t)| \leq \bar{y}_m^j, \quad j = \overline{1, v}, \quad v = \max_{i = \overline{1, l}} n_{ii}, \quad \delta > 0 — \text{точность}$$

регулирования, $T > 0$ — время, по истечении которого должно быть выполнено неравенство (2), $\bar{u}_i > 0$ — известная величина. Также необходимо, чтобы все переменные в замкнутой системе были бы ограниченными. Здесь и далее под $|s(t)|$ будем понимать евклидову норму вектора $s(t)$.

Сформулированную задачу будем решать при следующих **предположениях**:

1. Незвестные коэффициенты операторов $Q_{ij}(p)$, $R_{ij}(p)$, $i = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, l}$, принадлежат известному ограниченному множеству Ξ .

2. Тривиальное решение уравнения $R(p)u(t) = 0$ является асимптотически устойчивым.

3. Известны числа $\bar{f}$ и $\bar{y}_m$, где $|f(t)| \leq \bar{f}$ и $\bar{y}_m = \|\bar{y}_m^1, \bar{y}_m^2, \dots, \bar{y}_m^v\|^T$.

2. Синтез алгоритма без учета насыщения сигнала управления

Ради простоты рассмотрим сначала синтез алгоритма управления без учета насыщения регулируемой переменной. Представим операторы $Q_{ij}(p)$ и $R_{ij}(p)$ в виде следующих сумм:

$$Q_{ij}(p) = Q_{ij}^m(p) + \Delta Q_{ij}(p), \quad R_{ij}(p) = R_{ij}^m(p) + \Delta R_{ij}(p), \quad i = \overline{1, l}, j = \overline{1, l}, \quad (3)$$

где $Q_{ij}^m(p)$, $R_{ij}^m(p)$ — известные линейные дифференциальные операторы, $\deg Q_{ij}^m(p) \geq n_{ij}$, $\deg R_{ij}^m(p) \leq m_{ij}$; многочлены $Q_{ij}^m(\lambda)$, $\det Q_m(\lambda)$, $R_{ij}^m(\lambda)$ и $\det R_m(\lambda)$ — гурвицевы; λ — комплексная переменная;

$$Q_m(p) = \begin{bmatrix} Q_{11}^m(p) & \dots & Q_{1l}^m(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{l1}^m(p) & \dots & Q_{ll}^m(p) \end{bmatrix}, \quad R_m(p) = \begin{bmatrix} R_{11}^m(p) & \dots & R_{1l}^m(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{l1}^m(p) & \dots & R_{ll}^m(p) \end{bmatrix},$$

$\Delta Q_{ij}(p)$, $\Delta R_{ij}(p)$ — линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $\deg \Delta Q_{ij}(p) \leq \deg Q_{ij}^m(p)$, $\deg \Delta R_{ij}(p) \leq m_{ij}$.

Подставим соотношения (3) в выражение (1) и составим уравнение для ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ в виде

$$Q_m(p)e(t) = R_m(p)u(t) + \varphi(t), \quad (4)$$

где $\varphi(t) = D(p)f(t) - \Delta Q(p)y(t) + \Delta R(p)u(t) - Q_m(p)y_m(t)$ — функция, содержащая информацию о параметрической неопределенности и внешних возмущениях объекта (1); $\Delta Q(p) =$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_{11}(p) & \dots & \Delta Q_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta Q_{l1}(p) & \dots & \Delta Q_{ll}(p) \end{bmatrix},$$

$$\Delta R(p) = \begin{bmatrix} \Delta R_{11}(p) & \dots & \Delta R_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta R_{l1}(p) & \dots & \Delta R_{ll}(p) \end{bmatrix}.$$

Зададим закон управления в виде

$$u(t) = -\alpha^{-1}(p) R_m^{-1}(p) Q_m(p) e(t), \quad (5)$$

где матричный полином $\alpha(\lambda)$ порядка $l \times l$ выбирается таким, что многочлен $\det \alpha(\lambda)$ — гурвицев, и каждый элемент матричной передаточной функции $\alpha^{-1}(\lambda) R_m^{-1}(\lambda) Q_m(\lambda)$ имеет неотрицательную относительную степень.

Обозначим $P(\lambda) = \det \alpha(\lambda) \det R_m(\lambda) Q(\lambda) + R(\lambda) \alpha^*(\lambda) R_m^*(\lambda) Q_m(\lambda)$, где $\alpha^*(\lambda)$ и $R_m^*(\lambda)$ — присоединенные матрицы к $\alpha(\lambda)$ и $R_m(\lambda)$ соответственно. Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого алгоритм (5) обеспечит выполнение целевого условия (2).

Утверждение 1. Пусть выполнены условия предположений 1—3. Тогда существуют $\alpha(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$ такие, что многочлен $\det P(\lambda)$ — гурвицев для любых параметров (1) из класса Ξ , и регулятор (5) обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы, а также выполнение целевого условия (2).

Доказательство Утверждения 1 приведено в Приложении.

Замечание 1. Из соотношений (3) и (5) видно, что алгоритм (5) не требует точного знания порядков элементов матричных операторов $Q(p)$ и $R(p)$. Поэтому алгоритм (5) будет работоспособен для класса линейных структурно-неопределенных объектов (см., например, работы [13, 14]).

Замечание 2. Рассмотрим объект управления (1) при $u(t) \in R$ и $y(t) \in R$. Если в законе (5) $\alpha(p) = \text{const}$,

то получим результат, подобный результату работ [2, 3]; если $\alpha(p) = (Tp + 1)^\gamma$, где $T > 0$, то получим результат, найденный в работе [4]. При $\alpha(p) = (\mu p + 1)^\gamma - 1$, где $\mu > 0$ — достаточно малое число, получим результат, представленный в статье [6].

Таким образом, в настоящей статье получен алгоритм (5), устанавливающий связь между известными результатами [2—6] и позволяющий синтезировать новый класс алгоритмов за счет выбора структуры и параметров $\alpha(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$.

3. Структура закона управления в условиях насыщения входного сигнала

В условиях ограничения на функцию управления сформируем каждую компоненту вектора $u(t)$ в виде

$$u_i(t) = \frac{1}{1 + \sigma_i} \left(u_{ci}(t) + \sigma_i \tilde{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i} \right) \right), \quad i = \overline{1, l}, \quad (6)$$

где $\sigma_i > 0$, $0 < \tilde{u}_i < \bar{u}_i$, $u_{ci}(t)$ — новый сигнал управления, необходимый для компенсации неопределенностей объекта (1).

Замечание 3. Из соотношения (6) следует, что при $|u_{ci}(t)| \leq \tilde{u}_i$ $u_i(t) = u_{ci}(t)$, при $|u_{ci}(t)| > \tilde{u}_i$ $u_i(t) = \frac{1}{1 + \sigma_i} (u_{ci}(t) + \sigma_i \tilde{u}_i \text{sgn}(u_{ci}(t)))$. Тогда при $\sigma_i < \infty$ величина $|u_i(t)|$ может принимать значения, большие,

чем $\tilde{u}_i$. Однако при $\sigma_i \rightarrow \infty$ $u_i(t) \rightarrow \tilde{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i} \right)$. Зна-

чит, при достаточно больших σ_i величину $\tilde{u}_i$ можно выбирать достаточно близкой к $\bar{u}_i$. Так, при $\tilde{u}_i = \bar{u}_i$

и $\sigma_i \rightarrow \infty$ $u_i(t) \rightarrow \bar{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\bar{u}_i} \right)$. В дальнейшем будет

получено условие выбора величины σ_i в соотношении (6) для обеспечения $|u_i(t)| \leq \bar{u}_i$.

Замечание 4. Из выражения (6) видно, что коэффициент σ_i можно выбирать из условия $\sigma_i \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. Однако ради простоты синтеза системы управления положим в (6) $\sigma_i > 0$.

Принимая во внимание соотношение (5), зададим закон компенсации возмущений $u_c(t) = [u_{c1}(t), \dots, u_{cl}(t)]^T$ в виде

$$u_c(t) = -\alpha^{-1}(p) R_m^{-1}(p) Q_m(p) e(t). \quad (7)$$

Перед формулировкой утверждения введем следующие обозначения:

$$W_1 = \|Q_m^{-1}(\lambda) R_m(\lambda) \alpha(\lambda)\|, \quad W_2 = \|Q_m^{-1}(\lambda)\|,$$

$$W_3 = \sup_{\Xi} \|Q_m^{-1}(\lambda) \Delta Q(\lambda)\|, \quad W_4 = \sup_{\Xi} \|Q_m^{-1}(\lambda) Q(\lambda)\|,$$

$$W_5 = \sup_{\Xi} \|Q_m^{-1}(\lambda)R(\lambda)\|, \quad W_6 = \|\alpha^{-1}(\lambda)R_m^{-1}(\lambda)Q_m(\lambda)\|,$$

$$\varepsilon(t) = [e^T(t), \dot{e}^T(t), \dots, (e^{(v)}(t))^T]^T, \quad \bar{u} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l]^T.$$

Здесь и далее под $\|W(\lambda)\|$ будем понимать H^∞ норму передаточной функции $W(\lambda)$, т.е. $\|W(\lambda)\| = \sup_{\operatorname{Re} \lambda \geq 0} \|W(\lambda)\|_2$.

Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого алгоритм (6), (7) обеспечит выполнение целевого условия (2) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия предположений 1–3 и Утверждения 1. Тогда при

$$|\varepsilon(0)| \leq W_1 \bar{u}, \quad (8)$$

$$W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m \leq (W_1 - W_3 W_1 - W_5) \bar{u}, \\ W_1 - W_3 W_1 - W_5 > 0, \quad (9)$$

$$\sigma_i \geq \frac{\bar{u}_i + W_6(W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u})}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i} \quad (10)$$

система управления (6), (7) обеспечит ограниченность сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия (2) с точностью

$$\delta \leq W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u}. \quad (11)$$

Доказательство Утверждения 2 приведено в Приложении.

Стоит отметить, что оценки (8)–(11) достаточно грубые из-за использования грубых оценок в доказательстве Утверждения 2. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим примеры.

4. Примеры управления объектом со скалярными входом и выходом

Рассмотрим объект управления со скалярным входом-выходом, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$(p^3 - q_3 p^2 - q_2 p - q_1)y(t) = ru(t) + f(t). \quad (12)$$

Множество Ξ задано следующими неравенствами: $-1 \leq q_1 \leq 2$, $-4 \leq q_2 \leq -3$, $-0,5 \leq q_3 \leq 1$, $1 \leq r < 20$ и $\bar{f} = 0,4$. Цель управления состоит в обеспечении условия (2) и нахождении функции управления $u(t)$ во множестве $[-1; 1]$.

Выберем $Q_m(p) = (p + 1)^3$, $R_m(p) = 1$, $\alpha(p) = (0,01p + 1)^3 - 1$ и $\tilde{u} = 0,97$. Согласно выражениям (6) и (7) сформируем систему управления, представленную следующими уравнениями:

$$u_c(t) = -\frac{(p + 1)^3}{(0,01p + 1)^3 - 1} e(t),$$

$$u(t) = \frac{1}{1 + \sigma} \left(u_c(t) + 0,97 \sigma \operatorname{sat} \left(\frac{u_c(t)}{0,97} \right) \right). \quad (13)$$

Принимая во внимание множество Ξ , воспользуемся условиями (8)–(10): $|\varepsilon(0)| < 1,15 \cdot 10^{-2}$, $\bar{y}_m < 0,21$,

$\sigma > 2,3 \cdot 10^8$. Как отмечалось, эти условия достаточно грубые. Результаты моделирования показали, что система управления будет работоспособной, например, при $\bar{y}_m = 0,4$, $|\varepsilon(0)| \leq 0,1\sqrt{3}$ и $\sigma = 10^7$.

Положим $\sigma = 10^7$. Рассмотрим объект управления (12) со следующими параметрами: $q_1 = -1$, $q_2 = -4$, $q_3 = 1$, $r = 1$, $f(t) = 0,1 + 0,3 \sin t$, $y(0) = 0,1$, $\dot{y}(0) = 0,1$, $\ddot{y}(0) = 0,1$. Эталонный сигнал $y_m(t)$ изображен на рис. 1, а. На рис. 1, б представлены результаты моделирования по $e(t)$, на рис. 2 — по $u(t)$.

Анализ результатов моделирования показал, что замкнутая система робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса Ξ . В системе управления с начала ее функционирования динамическая ошибка не превышает значения 0,15. Из рис. 2 видно, что сигнал управления находится в заданном отрезке $[-1; 1]$, тогда как без использования алгоритма (13) (т.е. при $u(t) = u_c(t)$) сигнал управления $u(t)$ в начальный момент времени достигает значе-

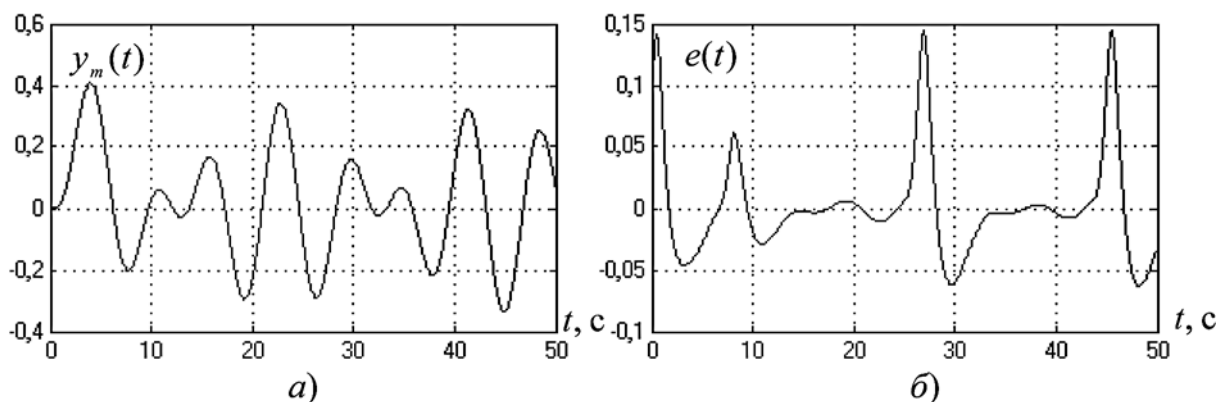


Рис. 1. Переходные процессы по $y_m(t)$ (а) и $e(t)$ (б)

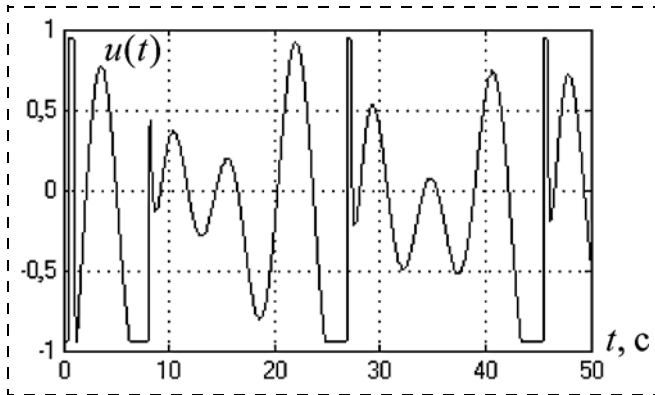


Рис. 2. График сигнала управления $u(t)$

ния -10^4 , и только на 0,2 с $u(t)$ входит в отрезок $[-1,12; 1,12]$, что недопустимо по условию задачи.

5. Пример управления объектом с векторным входом-выходом

Пусть модель объекта управления описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} (p^2 + q_1p + q_2)y_1(t) + q_3y_2(t) &= \\ = (r_1p + r_2)u_1(t) + r_3u_2(t) + f_1(t), \\ (p^2 + q_4p + q_5)y_2(t) + (q_6p + q_7)y_1(t) &= \\ = r_4u_2(t) + r_5u_1(t) + f_2(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Множество Ξ определено в виде: $q_1 \in [-1; 1]$, $q_2 \in [-1; 1]$, $q_3 \in [1; 3]$, $q_4 \in [-0,5; 2]$, $q_5 \in [-0,5; 2]$, $q_6 \in [-1; 1]$, $q_7 \in [-1; 1]$, $r_1 \in [1; 3]$, $r_2 \in [1; 3]$, $r_3 \in [0; 2]$, $r_4 \in [1; 2]$, $r_5 \in [0; 1]$ и $\bar{f} = 2$. Цель управления состоит в обеспечении условия (2) и нахождения функций управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ во множестве $[-3,6; 3,6]$ и $[-30; 30]$ соответственно.

Выберем $Q_m(p) = (p + 1)^2 I_2$, $R_m(p) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда

$R_m^{-1}(p) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Положим $\alpha(p) = [(0,01p + 1)^2 - 1]I_2$,

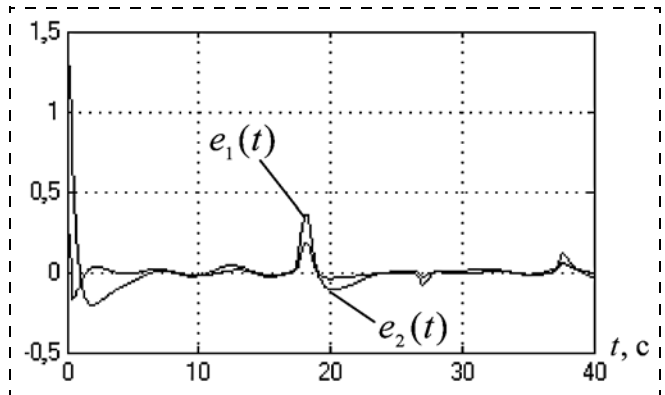


Рис. 3. Результаты моделирования по $e_i(t)$, $i = 1, 2$

$\tilde{u}_1 = 3,5$, $\tilde{u}_2 = 29,5$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^5$. Согласно выражениям (6) и (7) сформируем систему управления, представленную следующими уравнениями:

$$\begin{bmatrix} u_{c1}(t) \\ u_{c2}(t) \end{bmatrix} = - \frac{(p + 1)^2}{(0,01p + 1)^2 - 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}; \quad (15)$$

$$u_1(t) = \frac{1}{1 + 10^5} \left(u_{c1}(t) + 3,5 \cdot 10^5 \text{sat}\left(\frac{u_{c1}(t)}{3,5}\right) \right);$$

$$u_2(t) = \frac{1}{1 + 10^5} \left(u_{c2}(t) + 29,5 \cdot 10^5 \text{sat}\left(\frac{u_{c2}(t)}{29,5}\right) \right). \quad (16)$$

Рассмотрим объект управления (14) со следующими параметрами: $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, $q_4 = 2$, $q_5 = 3$, $q_6 = q_7 = 1$, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$, $r_5 = 0,1$, $f_1(t) = \sin 1,2t$, $f_2(t) = 2\sin t$, $y_1(0) = 0,5$, $\dot{y}_1(0) = 0,5$, $y_2(0) = 1$, $\dot{y}_2(0) = 1$. Пусть $y_{m1}(t) = 0,7 + 0,3\sin 0,7t$, $y_{m2}(t) = \sin 0,3t$. На рис. 3 представлены результаты моделирования по ошибкам $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$, на рис. 4 — по $u_i(t)$, $i = 1, 2$.

Результаты моделирования показали, что система управления робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса Ξ . В системе управления через 1 с динамические ошибки не превышают зна-

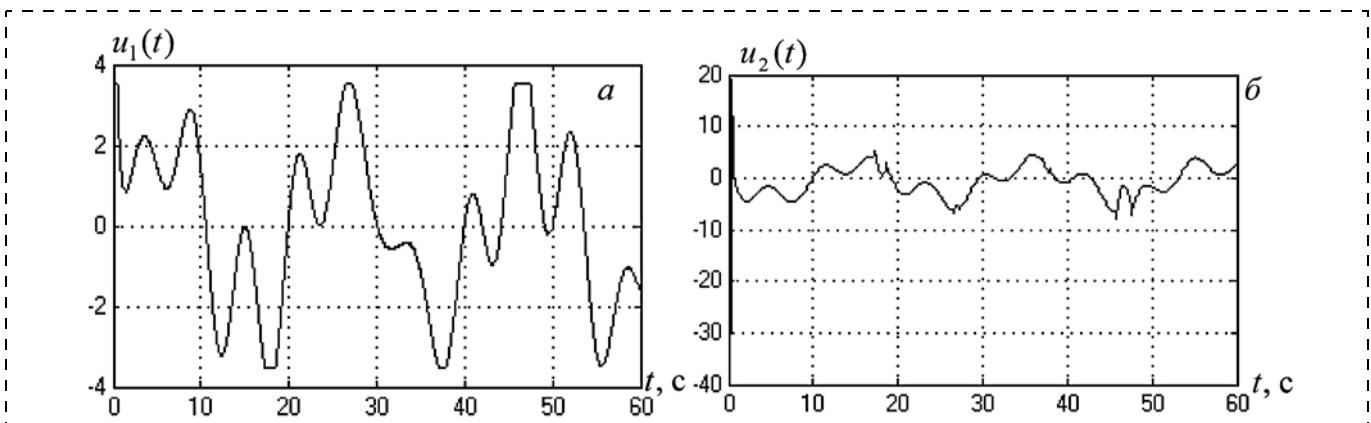


Рис. 4. Графики сигналов управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$

чения 0,4. Из рис. 4 видно, что сигналы управления находятся в заданных множествах, тогда как без использования алгоритма (16) сигналы $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в начальный момент времени достигают значений 12 000 и 5000 соответственно, а после 1 с сигнал $u_1(t)$ находится в отрезке $[-4,5; 4,5]$, что недопустимо по условию задачи.

Заключение

В статье приведен синтез системы управления для линейных динамических объектов с векторными входами-выходами в условиях параметрической неопределенности, внешних возмущений и заданных ограничений на функцию управления. Предложен робастный алгоритм, обобщающий известные результаты [2–6]. Разработана схема формирования сигнала управления и получены условия на параметры объекта управления, эталонной модели и регулятора, при выполнении которых система управления будет работоспособной в условиях ограничений на управление. При этом алгоритм (6), предложенный в условиях ограничений на управление, является независимым, т. е. им можно дополнить любой из существующих алгоритмов, разработанных без учета ограничений.

Приложение

Доказательство утверждения 1. Подставим выражение (5) в уравнение (4) и, принимая во внимание структуру функции $\varphi(t)$ и разложение (3), перепишем (4) в виде

$$\begin{aligned} Q(p)e(t) &= \\ &= R^{-1}(p)\alpha^{-1}(p)R_m^{-1}(p)Q_m(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + f(t). \end{aligned}$$

Из последнего следует уравнение связи эталонного сигнала и внешнего возмущения с ошибкой слежения, которое определено следующим выражением:

$$\begin{aligned} e(t) &= \\ &= \frac{1}{\det P(p)} \det \alpha(p) \det R_m(p) P^*(p) (f(t) - Q(p)y_m(t)). \end{aligned}$$

Очевидно, что для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы полином $\det P(\lambda)$ был гурвицевым для любых значений параметров объекта (1) из множества Ξ . Покажем, что существуют $\alpha(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$ такие, что будет обеспечена гурвицевость полинома $\det P(\lambda)$. Для этого сформулируем вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть заданы многочлены $Q(\lambda)$, $T(\lambda)$ порядков n и m соответственно. Тогда существуют многочлены $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$ с порядками $k \geq 0$ и $g \geq n - 1$ такие, что может быть получен произвольный многочлен $M(\lambda)$ порядка $\mu = \max \{n + k, m + g\}$, который определен следующим соотношением:

$$M(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda) + R(\lambda)T(\lambda). \quad (\text{П.1})$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим многочлены $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ порядков $m + z + \mu$ и $n + z + \mu$

($z \geq 0$) соответственно, которые обеспечивают выполнение условия

$$Q(\lambda)A(\lambda) + B(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda). \quad (\text{П.2})$$

Представив многочлены $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в виде $A(\lambda) = \bar{A}(\lambda)M(\lambda)$ и $B(\lambda) = M(\lambda)\bar{B}(\lambda)$, где $\deg \bar{A}(\lambda) = m + z$, $\deg \bar{B}(\lambda) = n + z$, перепишем условие (П.2) в виде

$$Q(\lambda)\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + M(\lambda)\bar{B}(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda). \quad (\text{П.3})$$

Преобразуем $M(\lambda)\bar{B}(\lambda)$ как

$$M(\lambda)\bar{B}(\lambda) = Q(\lambda)N(\lambda) + R(\lambda), \quad (\text{П.4})$$

где $\deg N(\lambda) = \mu + z$. Подставив выражение (П.4) в (П.3), получим

$$Q(\lambda)[\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + N(\lambda)T(\lambda)] + R(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda). \quad (\text{П.5})$$

Поскольку $\deg \bar{A}(\lambda)M(\lambda) = \deg N(\lambda)T(\lambda) \geq \deg P(\lambda)$, то выберем $\bar{A}(\lambda)$, $\bar{B}(\lambda)$ такими, что $\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + N(\lambda)T(\lambda) = P(\lambda)$. Следовательно, соотношение (П.1) выполнено. Лемма 1 доказана.

Лемма 1 является обобщением Утверждения 1 в работе [15] и Леммы 2 в работе [16]. В [15, 16] рассматриваются многочлены $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$ такие, что $\deg P(\lambda) = \deg R(\lambda) = n - 1$, что сужает класс разрабатываемых алгоритмов управления. Поскольку в Лемме 1 $\deg P(\lambda) = k \geq 0$ и $\deg R(\lambda) = g \geq n - 1$, то Лемму 1 можно применять к построению алгоритмов управления для структурно неопределенных объектов.

Опираясь на результаты Леммы 1, рассмотрим Лемму 2 для матричных многочленов.

Лемма 2. Рассмотрим матричные многочлены $Q(\lambda)$ и $T(\lambda)$ размерности $s \times s$, $\deg Q_{ij}(\lambda) = n_{ij}$, $\deg T_{ij}(\lambda) = m_{ij}$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, s}$. Тогда существуют матричные многочлены $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$ размерности $s \times s$ и порядков $\deg P_{ij}(\lambda) = k_{ij} \geq 0$ и $\deg R_{ij}(\lambda) = g_{ij} \geq n_{ij} - 1$ такие, что может быть выполнено следующее соотношение:

$$Q(\lambda)P(\lambda) + R(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda), \quad (\text{П.6})$$

где $M(\lambda)$ — произвольный матричный многочлен размерности $s \times s$ с порядком ij -элемента, равным $\mu_{ij} = \max_{r = \overline{1, s}} \{n_{ir} + k_{rj}, m_{rj} + g_{ir}\}$.

Доказательство леммы 2. Перепишем соотношение (П.6) в виде

$$\sum_{r=1}^s [Q_{ir}(\lambda)P_{rj}(\lambda) + R_{ir}(\lambda)T_{rj}(\lambda)] = M_{ij}(\lambda), \quad i = \overline{1, s}, j = \overline{1, s}.$$

Рассмотрим операторы $A_{rj}(\lambda)$ и $B_{ir}(\lambda)$ порядков $m_{rj} + z_{ij} + \mu_{ij}$ и $n_{ir} + z_{ij} + \mu_{ij}$ ($z_{ij} \geq 0$) соответственно, такие, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s [Q_{ir}(\lambda)A_{rj}(\lambda) + B_{ir}(\lambda)T_{rj}(\lambda)] &= M_{ij}(\lambda), \\ i &= \overline{1, s}, j = \overline{1, s}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Представив $A_{rj}(\lambda)$ и $B_{ir}(\lambda)$ в виде

$$A_{rj}(\lambda) = \bar{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda) \quad \text{и} \quad B_{ir}(\lambda) = M_{ij}(\lambda)\bar{B}_{ir}(\lambda),$$

где $\deg \bar{A}_{rj}(\lambda) = m_{rj} + z_{ij}$, $\deg \bar{B}_{ir}(\lambda) = n_{ir} + z_{ij}$, перепишем условие (П.7) в виде

$$\sum_{r=1}^s [Q_{ir}(\lambda) \bar{A}_{rj}(\lambda) M_{ij}(\lambda) + M_{ij}(\lambda) \bar{B}_{ir}(\lambda) T_{rj}(\lambda)] = M_{ij}(\lambda). \quad (\text{П.8})$$

Преобразуем $M_{ij}(\lambda) \bar{B}_{ir}(\lambda)$ к виду

$$M_{ij}(\lambda) \bar{B}_{ir}(\lambda) = Q_{ir}(\lambda) N_{ij}(\lambda) + R_{ir}(\lambda), \quad (\text{П.9})$$

где $\deg N_{ij}(\lambda) = \mu_{ij} + z_{ij}$. Подставив соотношение (П.9) в выражение (П.8), получим

$$\sum_{r=1}^s [Q_{ir}(\lambda) (\bar{A}_{rj}(\lambda) M_{ij}(\lambda) + N_{ij}(\lambda) T_{rj}(\lambda)) + R_{ir}(\lambda) T_{rj}(\lambda)] = M_{ij}(\lambda).$$

Поскольку $\deg \bar{A}_{rj}(\lambda) M_{ij}(\lambda) = \deg N_{ij}(\lambda) T_{rj}(\lambda) \geq \deg P_{rj}(\lambda)$, то выберем $\bar{A}_{rj}(\lambda)$, $\bar{B}_{ir}(\lambda)$ такими, что $\bar{A}_{rj}(\lambda) M_{ij}(\lambda) + N_{ij}(\lambda) T_{rj}(\lambda) = P_{rj}(\lambda)$. Следовательно, соотношение (П.6) будет выполнено. Лемма 2 доказана.

Согласно Лемме 2 существуют $\alpha(\lambda)$, $Q_m(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ такие, что можно получить произвольный многочлен $P(\lambda)$, а следовательно, обеспечить гурвицевость многочлена $\det P(\lambda)$. Отметим, что соответствующим выбором $\alpha(\lambda)$, $Q_m(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ можно обеспечить требуемое значение δ в целевом условии (2).

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что в процессе функционирования системы $|u_{ci}(t)| \leq \tilde{u}_i$. Тогда из выражения (6) $u_i(t) = u_{ci}(t)$, а значит, будут выполнены условия Утверждения 1. Выясним, при каких параметрах объекта и системы управления первый случай будет справедлив. Перепишем соотношение (7) в виде

$$e(t) = -Q_m^{-1}(p) R_m(p) \alpha(p) u_c(t). \quad (\text{П.10})$$

Оценим (П.10) как $|e(t)| \leq W_1 |u_c(t)| \leq W_1 \tilde{u}$, где $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_l]^T$. Поскольку $|e(t)| \leq \varepsilon(t)$, потребуем, чтобы оценка на $\varepsilon(0)$ находилась во множестве

$$|\varepsilon(0)| \leq W_1 \tilde{u}. \quad (\text{П.11})$$

Преобразуем уравнение (4) к виду

$$e(t) = Q_m^{-1}(p) [f(t) - \Delta Q(p) e(t) - Q(p) y_m(t) + R(p) u(t)]. \quad (\text{П.12})$$

Оценим правую часть (П.12) как

$$Q_m^{-1}(p) [f(t) - \Delta Q(p) e(t) - Q(p) y_m(t) + R(p) u(t)] \leq W_2 \bar{f} + W_3 W_1 \tilde{u} + W_4 \bar{y}_m + W_5 \tilde{u}. \quad (\text{П.13})$$

Принимая во внимание условия $|e(t)| \leq W_1 \tilde{u}$ и (П.13), потребуем выполнение условия

$$W_2 \bar{f} + W_3 W_1 \tilde{u} + W_4 \bar{y}_m + W_5 \tilde{u} \leq W_1 \tilde{u}. \quad (\text{П.14})$$

Тогда из (П.14) следуют верхние оценки на $\bar{f}$ и $\bar{y}_m$ в виде

$$W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m \leq (W_1 - W_3 W_1 - W_5) \tilde{u}, \\ W_1 - W_3 W_1 - W_5 > 0. \quad (\text{П.15})$$

В результате, при $|u_{ci}(t)| \leq \tilde{u}_i$ и выполнении условий Утверждения 1, (П.11) и (П.15) целевое условие (2) будет выполнено.

2. Рассмотрим случай, когда

$$\tilde{u}_i < |u_{ci}(t)| \leq \bar{u}_i. \quad (\text{П.16})$$

Поскольку $|e(t)| \leq |\varepsilon(t)|$ и $|u_{ci}(t)| \leq \bar{u}_i$, то с учетом (П.10) потребуем, чтобы оценка на начальные условия находилась во множестве (8).

Оценим правую часть (П.12) как

$$Q_m^{-1}(p) [f(t) - Q(p) y_m(t) - \Delta Q(p) e(t) + R(p) u(t)] \leq W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u}. \quad (\text{П.17})$$

Тогда из (П.17) следует оценка (11). Подставив (П.17) в условие $|e(t)| \leq W_1 \bar{u}$, получим

$$W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u} \leq W_1 \bar{u}. \quad (\text{П.18})$$

Тогда из соотношения (П.18) следуют оценки (9).

В результате, при $|u_{ci}(t)| \leq \bar{u}_i$ и выполнении условий Утверждения 1, (8) и (9) будет выполнено целевое условие (2). Результирующие оценки (8), (9) следуют из того, что правые части (8) и (9) меньше, чем правые части (П.11) и (П.15) соответственно.

Теперь определим оценку для коэффициента σ_i , при котором $|u_{ci}(t)| \leq \bar{u}_i$. Для этого оценим выражение (6) как

$$\frac{1}{1 + \sigma_i} \left(u_{ci}(t) + \sigma_i \tilde{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i} \right) \right) \leq \bar{u}_i.$$

Разрешим последнее неравенство относительно σ_i :

$$\sigma_i \geq \frac{\bar{u}_i - u_{ci}(t)}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i} \right)}.$$

Оценим сверху правую часть последнего неравенства в виде

$$\frac{\bar{u}_i - u_{ci}(t)}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i} \right)} \leq \frac{\bar{u}_i + |u_{ci}(t)|}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i} \leq \frac{\bar{u}_i + W_1 |e(t)|}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i}. \quad (\text{П.19})$$

С учетом соотношений (П.19) и (11) получим результирующую оценку для σ_i в виде (10).

Очевидно, что оценки (8)—(9) достаточно грубые, но из них видно, что существуют определенные значения параметров объекта, эталонной модели и регулятора, при которых в условиях ограничений на сигнал управления можно обеспечить выполнение целевого условия (2).

Список литературы

1. **Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
2. **Atassi A. N., Khalil H. K.** A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // *IEEE Trans. on Automat. Control*. 1999. V. 44. N. 9. P. 1672–1687.
3. **Бобцов А. А.** Синтез закона управления для стабилизации нелинейной системы по измерениям выхода // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2004. № 3. С. 40–45.
4. **Бобцов А. А., Шаветов С. В.** Управление по выходу линейным параметрически неопределенным объектом в условиях возмущающих воздействий и неучтенной динамики // *Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики*. 2011. № 1 (71). С. 33–39.
5. **Цыкунов А. М.** Алгоритм робастного управления нестационарным линейным объектом с компенсацией возмущений // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2008. № 4. С. 33–40.
6. **Цыкунов А. М.** Алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами по выходу // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2010. № 3. С. 9–14.
7. **Lozier J. C.** A steady-state approach to the theory of saturable servo systems // *IRE Trans. on Automatic Control*. 1956. May. P. 19–39.
8. **Kapasouris P., Athans M.** Multivariable Control Systems with Saturating Actuators Antireset Windup Strategies // *American Control Conf. Boston*, 2004. P. 1579–1584.
9. **Edwards C., Postlethwaite I.** Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes // *Automatica*. 1998. V. 34. N. 2. P. 199–210.
10. **Monopoli R.** Adaptive Control for Systems for Hard Saturation // *14th IEEE Conf. on Decision and Control*. Houston, TX, 1975. P. 841–842.
11. **Wen C., Zhou J., Liu Z., Su H.** Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2011. V. 56. N. 7. P. 1672–1678.
12. **Schwager M., Annaswamy A. M.** Direct Adaptive Control of Multi-Input Plants with Magnitude Saturation Constrains // *44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, Spain*, 2005. P. 783–788.
13. **Фуртат И. Б., Цыкунов А. М.** Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // *Проблемы управления*. 2008. № 5. С. 2–7.
14. **Фуртат И. Б., Цыкунов А. М.** Адаптивное управление объектами с неизвестной относительной степенью // *Автоматика и телемеханика*. 2010. № 6. С. 109–118.
15. **Feuer A., Morse A. S.** Adaptive control of single-input, single-output linear systems // *IEEE Trans. on Automat. Control*. 1978. V. AC-23. N. 4. P. 557–569.
16. **Narendra K. S., Valavani L. S.** Stable Adaptive Controller Design — Direct Control // *IEEE Trans. on Automat. Control*. 1978. V. AC-23. N. 4. P. 570–583.

Robust Control Algorithm for Linear MIMO Plants in Conditions of Saturation of the Control Signal

I. B. Furtat, cainenash@mail.ru✉, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: Furtat Igor' B., D. Sc., Professor, Leading Researcher, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation, e-mail: cainenash@mail.ru

Received on April 26, 2016

Accepted on May 16, 2016

The paper describes the robust control algorithm for the linear dynamic multi input multi output plants in the conditions of parametric uncertainties, external bounded disturbances and saturation of the input signal. Firstly, the author proposed the disturbance compensation algorithm, which ensured tracking of a plant output to the reference signal with a given accuracy without constraints in the control signal. It is shown that the structure of the control law does not depend on the dynamical order of the plant model. Therefore, the proposed algorithm can be used for the structural uncertainty plants. Besides, the proposed result generalizes some control algorithms, such as the consecutive compensator designed by A. A. Bobtsov, the algorithm based on a high gain observer proposed by H. Khalil and the auxiliary loop algorithm designed by A. M. Tsykunov. Secondly, the proposed algorithm is generalized for the case, when a control signal belongs to the given bounded set. The approximation algorithm of saturation of nonlinearity and the disturbance compensation algorithm for the design of the control law are used. The conditions depending on the parameters of the plant, the reference model and the algorithm for implementation of the control system under perturbations and control constraints are presented. The author considers two examples for the single input single output plant and the multi input multi output plant. The simulation results illustrate the efficiency of the proposed algorithm and confirm the analytical results. The theorem of the sum of the stable polynomials proposed by A. Feuer, A. S. Morse, K. S. Narendra and L. S. Valavani is generalized on the structural uncertainty polynomials and matrix polynomials for the proof of the closed-loop stability.

Keywords: MIMO plant, robust control, saturation control signal, disturbance compensation

Acknowledgements: The results of Sections 3 and 5 were obtained with support of the Russian President's grant (№ 14.W01.16.6325-MD (MD-6325.2016.8)). Section 2 results were obtained by IPME RAS with support of the Russian Science Foundation (Project № 14-29-00142). Other studies were supported in part by a grant from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project № 14.Z50.31.0031) and a grant from the Government of the Russian Federation (project number 074-U01).

For citation:

Furtat I. B. Robust Control Algorithm for Linear MIMO Plants in Conditions of Saturation of the Control Signal, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 579–587.

DOI: 10.17587/mau.17.579-587

References

1. **Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.** Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems, Dordrecht, Kluwer, 1999.
2. **Atassi A. N., Khalil H. K.** A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1999, vol. 44, no. 9, pp. 1672–1687.
3. **Bobtsov A. A.** *Sintez zakona upravleniya dlja stabilizatsii nelinejnoj sistemy po izmerenijam vyhoda* (Synthesis of control law for stabilization of a nonlinear system based on measurements of output), *Izv. RAN. Teorija i Sistemy Upravlenija*, 2004, no. 3, pp. 40–45.

(Bobtsov A. A. Synthesis of control law for stabilization of a nonlinear system based on measurements of output, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2004, vol. 43, no. 3, pp. 363–368).

4. Bobtsov A. A., Shavetov S. V. *Upravlenie po vyvodu lineinym parametricheski neopredelennym objektom v usloviyah vozmushhajushhih vozdeystvii i neuchtennoj dinamiki* (Output control of linear parametrically uncertain plant under disturbances and unaccounted dynamics), *Nauchno-tehnicheskij vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2011, no. 1 (71), pp. 33–39.

5. Tsykunov A. M. *Algoritm robustnogo upravlenija nestacionarnym lineinym objektom s kompensaciej vozmushhenij* (An algorithm of robust control of a non-stationary linear plant with perturbation compensation), *Izv. RAN. TiSU*, 2008, no. 4, pp. 33–40 (Tsykunov A. M. An algorithm of robust control of a non-stationary linear plant with perturbation compensation, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 4, pp. 527–534).

6. Tsykunov A. M. *Algoritm robustnogo upravlenija lineinymi mi-cheskimi objektami po vyvodu* (Algorithm for linear robust control of chemical facilities to overcome), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2010, no. 3, pp. 9–14.

7. Lozier J. C. A steady-state approach to the theory of saturable servo systems, *IRE Trans. on Automatic Control*, 1956, May, pp. 19–39.

8. Kapasouris P., Athans M. Multivariable Control Systems with Saturating Actuators Antireset Windup Strategies, *American Control Conf. Boston*, 2004, pp. 1579–1584.

9. Edwards C., Postlethwaite I. Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes, *Automatica*, 1998, vol. 34, no. 2, pp. 199–210.

10. Monopoli R. Adaptive Control for Systems for Hard Saturation, *14th IEEE Conf. on Decision and Control*. Houston, TX, 1975, pp. 841–842.

11. Wen C., Zhou J., Liu Z., Su H. Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2011, vol. 56, no. 7, pp. 1672–1678.

12. Schwager M., Annaswamy A. M. Direct Adaptive Control of Multi-Input Plants with Magnitude Saturation Constrains, *44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville*, Spain, 2005, pp. 783–788.

13. Furtat I. B., Tsykunov A. M. *Robustnoe upravlenie nestacionarnymi nelineinymi strukturno neopredelennymi objektami* (Robust control of unsteady nonlinear structurally undefined objects), *Problemy Upravlenija*, 2008, no. 5, pp. 2–7.

14. Furtat I. B., Tsykunov A. M. *Adaptivnoe upravlenie objektami s neizvestnoj otnositel'noj stepen'ju* (Adaptive control of plants of unknown relative degree), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2010, no. 6, pp. 109–118. (Furtat I. B., Tsykunov A. M. Adaptive control of plants of unknown relative degree, *Automation and Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 6, pp. 1076–1084).

15. Feuer A., Morse A. S. Adaptive control of single-input, single-output linear systems, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1978, vol. AC-23, no. 4, pp. 557–569.

16. Narendra K. S., Valavani L. S. Stable Adaptive Controller Design — Direct Control, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1978, vol. AC-23, no. 4, pp. 570–583.

УДК 681.51

DOI: 10.17587/mau.17.587-598

А. Ж. Атамуратов, канд. техн. наук, вед. спец., goofydog@mail.ru,

ООО Пепсико Холдинг,

И. Е. Михайлов, д-р физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр., mikh_igor@mail.ru,

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,

Л. А. Муравей, д-р физ.-мат. наук, проф., l_muravey@mail.ru,

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами¹

Рассматривается классическая проблема моментов, возникающая в задачах управления упругими динамическими системами, моделируемыми уравнениями в частных производных четвертого порядка, гиперболическими по Петровскому. Задача управления заключается в нахождении минимального времени, за которое можно погасить колебания, возникающие в системах вследствие начальных возмущений. Доказывается существование минимального значения времени и оптимального управления на примере гашения колебаний балок и пластин, являющихся типичными элементами различных механических конструкций, таких как трубопроводы, антенны и несущие элементы космических платформ. При этом время гашения колебаний и оптимальное управление найдено в явном виде. Для получения приближенных решений введены так называемые точечные движущиеся демпферы и стационарные узкие демпферы, упрощающие разработку вычислительных алгоритмов на основе метода редукции и координатного спуска.

Ключевые слова: гашение колебаний, тригонометрическая проблема моментов, ортогональные системы и базис Рисса, асимптотическая проблема моментов, стационарные и движущиеся демпферы, метод редукции, метод координатного спуска

Введение

Методы гашения колебаний элементов сложных механических систем, таких как струны и мембраны, начали интенсивно развиваться в 70-х годах прошлого столетия. Наиболее значимой была работа Д. Лагнесса [1], в которой исследовалась возможность гашения поперечных колебаний струны

$u(t, x)$, описываемых следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{1}{2} u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = g(t, x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t; \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = h_0(x), \quad u_t|_{t=0} = h_1(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (1.2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t, \quad (1.3)$$

где начальные данные $h_0(x)$, $h_1(x)$ рассматриваются как начальные возмущения, а функция $g(t, x)$ — как

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00425).

функция управления. При этом предполагается, что потенциал $q(x)$ — непрерывная функция на $[0, l]$ (заметим, что условия закрепления струны на концах (1.3) можно заменить на более общие условия $\alpha_0 u + \beta_0 u_x|_{x=0} = \alpha_1 u + \beta_1 u_x|_{x=l} = 0$ при некоторых ограничениях на коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, i = 0, 1$). Решение задачи (1.1)—(1.3) рассматривается обобщенное (т. е. выполняется для интегрального тождества), и для него определен интеграл энергии

$$E(t) = \int_0^l [u_t^2(t, x) + a^2 u_x^2(t, x)] dx,$$

который при $g(t, x) \equiv 0$ тождественно равен

$$E(0) = \|h_0(x)\|_{W_2^1(0, l)}^2 + \|h_1(x)\|_{L_2(0, l)}^2,$$

где $L_2(0, l)$ — пространство измеримых на $(0, l)$ функций, квадраты которых интегрируемы по Лебегу на промежутке $(0, l)$, а $W_2^1(0, l)$ — соболевское пространство функций $v(x)$ из $L_2(0, l)$, имеющих обобщенные производные $v'(x) \in L_2(0, l)$, и таких, что $v(0) = v(l) = 0$.

Постановка задачи

Задача управления заключается в возможности перевести систему (1.1)—(1.3) из начального состояния (1.2) в произвольное состояние

$$u|_{t=T} = \tilde{h}_0(x), \quad u_t|_{t=T} = \tilde{h}_1(x).$$

Следуя Ж. Лионсу [2], данное свойство системы будем называть *строгой управляемостью*.

Задача гашения колебаний заключается в нахождении минимального времени $T > 0$ такого, что для любых начальных возмущений $h_0(x) \in W_2^1(0, l)$, $h_1(x) \in L_2(0, l)$ найдется оптимальная управляющая функция $g(t, x) \in L_2((0, T) \times (0, l))$, такая что

$$E(T) = 0, \quad (1.4)$$

или, что то же самое, в момент времени $t = T$ решение задачи (1.1)—(1.3) принимает следующие значения:

$$u|_{t=T} = 0, \quad u_t|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.5)$$

Отметим, что для задачи Штурма—Лиувилля

$$-v_{xx} + q(x)v = \lambda v, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.6)$$

$$v(0) = v(l) = 0, \quad (1.7)$$

хорошо известны собственные значения, образующие монотонную последовательность $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$, а отвечающие им собственные функции $v_1(x), v_2(x), v_3(x), \dots, v_n(x), \dots$ образуют ортонормированный базис в $L_2(0, l)$. При этом

$$\omega_n = a\sqrt{\lambda_n} = \frac{a\pi}{l}n + c_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

что позволяет разложить функции $u(t, x)$, $g(t, x)$, $h_0(x)$, $h_1(x)$ в ряды Фурье по системе $\{v_n(x)\}$.

Тригонометрическая проблема моментов

Выполнение условий (1.5) приводит нас к системе интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T g_n(t) \cos \omega_n t dt &= b_n, \\ \int_0^T g_n(t) \sin \omega_n t dt &= -a_n \omega_n, \end{aligned} \right\} n = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

которую принято называть тригонометрической проблемой моментов. Здесь $a_n, b_n, g_n(t)$ — коэффициенты Фурье разложения функций $h_0(x)$, $h_1(x)$, $g(t, x)$ в ряды по ортонормированному базису $\{v_n(x)\}$.

Отметим, что фундаментальные результаты по исследованию разрешимости проблемы моментов для более сложных систем, чем тригонометрические, но конечномерных в $L_p(0, T)$, $1 \leq p < \infty$, были получены М. Крейном, Н. Ахиезером, И. Глазманом, М. Красносельским [3—6] и др.

Что касается случаев, рассматриваемых в данной работе, они отличаются тем, что тригонометрическая система бесконечномерная в $L_2(0, T)$, и при этом время T является неизвестной величиной. Основу исследований составляет установление асимптотики соответствующих значений ω_n , позволяющей использовать известные теоремы Н. Левинсона [7] и Р. Беллмана [8].

Продолжим исследование задачи Д. Лагнесса. Из асимптотики (1.8) вытекает существование положительного предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\omega_n} = \frac{l}{a\pi}$. Полагая $\frac{l}{a\pi} = \frac{T}{2\pi}$, в силу теоремы Н. Левинсона [7] заключаем, что при

$$T = \frac{2l}{a} \quad (1.10)$$

тригонометрическая система $\{\sin \omega_n t, \cos \omega_n t\}$ образует базис Рисса в $L_2(0, T)$, следовательно, для нее существует биортогональная в $L_2(0, T)$ система функций $\{\varphi_n(t), \psi_n(t)\}$. Поэтому существует решение проблемы моментов (1.9) — оптимальное управление $w(t) \in L_2(0, T)$, такое что

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \omega_n \varphi_n(t) - b_n \psi_n(t)), \quad (1.11)$$

причем для него справедлива оценка

$$\|w(t)\|_{L_2(0, T)}^2 \leq \text{const} (\|h_0(x)\|_{W_2^1(0, l)}^2 + \|h_1(x)\|_{L_2(0, l)}^2). \quad (1.12)$$

Управление в подобласти

Д. Лагнессом также была решена задача гашения колебаний струны, если управление $g(t, x)$ сосредото-

точено в произвольной области $[\alpha, \beta]$, т. е. $g(t, x) \in L_2(0, T) \times [\alpha, \beta]$. Эта задача эквивалентна проблеме моментов

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^T \int_\alpha^\beta g(t, x) \cos \omega_n t dx dt = -\beta_n, \\ & \int_0^T \int_\alpha^\beta g(t, x) \sin \omega_n t dx dt = \alpha_n \omega_n, \end{aligned} \right\} n = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

В этом случае искомая функция

$$g(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 (\omega_n a_n \varphi_n(t) - b_n \psi_n(t)) v_n(x) \chi_{[\alpha, \beta]}(x), \quad (1.14)$$

где $\chi_{[\alpha, \beta]}(x)$ — характеристическая функция отрезка

$$[\alpha, \beta], \text{ а } A_n^2 = \left(\int_\alpha^\beta v_n^2(x) dx \right)^{-1}, \text{ причем } \inf_n \int_\alpha^\beta v_n^2(x) dx > 0,$$

так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\alpha^\beta v_n^2(x) dx = \beta - \alpha$ (что легко проверить

интегрированием умноженного на v_n уравнения (1.6) для $\lambda = \lambda_n$ и $v = v_n$). Следовательно, справедлива аналогичная (1.12) оценка

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\alpha^\beta (g(t, x))^2 dx dt \leq \\ & \leq \frac{\text{const}}{\beta - \alpha} (\|h_0(x)\|_{W_2^1(0, l)}^2 + \|h_1(x)\|_{L_2(0, l)}^2). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Заметим, что из соотношения (1.15) не вытекает возможность использовать так называемый точечный демпфер, так как при $\beta - \alpha \rightarrow 0$ эта оценка $\rightarrow \infty$.

Результаты Д. Лагнесса имеют важное практическое значение для определения времени T гашения колебаний, однако весьма затруднительно построить приближенное оптимальное управление, так как приходится решать бесконечную систему интегральных уравнений для нахождения сопряженных функций и суммировать бесконечный ряд (1.14). Следовательно, для нахождения приближенных решений необходимо существенно сузить класс управляющих функций.

О классах управлений

Д. Рассел [9] предложил использовать только одну управляющую функцию, т. е. взять

$$g(t, x) = w(t)f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t, \quad (1.16)$$

где $f(x)$ — некоторая заданная функция. Однако, даже в случае управления колебаниями струн ($q \equiv 0$),

когда λ_n и $v_n(x)$ имеют явный вид $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$,

$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$, для нахождения оптимального

управления $w(t)$ мы снова имеем бесконечную проблему моментов:

$$\int_0^T e^{i\frac{\pi a n t}{l}} w(t) dt = \frac{b_n - i\frac{\pi n}{l}}{f_n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.17)$$

где

$$f_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx \neq 0. \quad (1.18)$$

Заметим, что $e^{i\frac{\pi a n t}{l}} = \left(e^{i\frac{\pi a t}{l}}\right)^n$, поэтому из предельного соотношения Н. Левинсона (1.10) полу-

чаем сразу $T = \frac{2l}{a}$, система $\left\{\left(e^{i\frac{\pi a t}{l}}\right)^n\right\} = \left\{\left(e^{i\frac{2\pi a t}{T}}\right)^n\right\}$

образует ортогональный базис в комплексном пространстве $L_2(0, T)$, и оптимальная функция управления $w(t)$ представляется в виде ряда

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\frac{a\pi n t}{l}} \frac{b_n - i\frac{\pi n}{l}a_n}{f_n}. \quad (1.19)$$

Если $f(x) \in L_2(0, l)$, то $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2$, откуда

$|f_n| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Значит, ряд (1.19), вообще говоря, не сходится в $L_2(0, T)$. Если положить все $f_n = 1$, то получим, что

$$f(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \delta(x), \quad (1.20)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Точечный демпфер

Исследованию проблемы моментов для управления вида

$$g(t, x) = w(t)\delta(x - x_0), \quad x_0 \in (0, l) \quad (1.21)$$

(так называемый точечный демпфер) посвящен ряд работ А. Бутковского [10, 11]. Из них вытекает,

в частности, что для $f_n = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right)$ точки $x_0 = \frac{k}{n}l$,

$k, n = 1, 2, \dots, k < n$, образуют множество точек неуправления системы (1.1)—(1.3), в этом случае возникают решения, соответствующие однородной системе в виде стоячих волн (энергия которых по-

стоянна), и это множество $\left\{\frac{k}{n}l\right\}$ всюду плотно на

промежутке $(0, l)$. Это затрудняет для остальных точек промежутка $(0, l)$, называемых точками управляемости, построение устойчивых алгоритмов численного (приближенного) решения задачи гашения

колебаний. При этом принадлежность оптимального управления $w(t)$ пространству $L_2(0, T)$ требует значительной гладкости начальных возмущений.

Точечный движущийся демпфер

Заметим однако, что множество точек неуправляемости имеет лебегову меру нуль на промежутке $(0, l)$. Поэтому естественно рассматривать (Л. Муравей, [12–13]) управление в виде

$$g(t, x) = w(t)\delta(x - x_0 - s(t)) \quad (1.22)$$

(так называемый точечный движущийся демпфер) в предположении ограниченной вариации производной функции $s(t)$ на отрезке $[0, T]$. Введение второй управляющей функции позволяет почти для всех $t \in [0, T]$ находиться в точках управляемости и, тем самым, избежать появления стоячих волн. Проблема моментов для простейшего демпфера типа

$$(1.22), x_0 = 0 \text{ и } s(t) = \begin{cases} bt, & 0 \leq t \leq \frac{l}{b}; \\ \frac{2l}{b} - t, & \frac{l}{b} \leq t \leq \frac{2l}{b}; \end{cases} \text{ была ис-}$$

следована в работах Б. Билалова и Л. Муравья [14–15], где было доказано, что система

$$\left\{ e^{\frac{i\pi ant}{l}} \sin \frac{\pi b_n t}{l} \right\} \quad (1.23)$$

при $b > a$ образует базис Рисса в $L_2(0, T)$ на отрезке $[0, T]$, где $T = \frac{2l}{b}$. Чтобы пояснить этот результат, заметим, что

$$e^{\frac{i\pi ant}{l}} \sin \frac{\pi b_n t}{l} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{i(a+b)\pi nt}{l}} - e^{\frac{i(b-a)\pi nt}{l}} \right), t \in [0, T],$$

поэтому систему (1.23) можно заменить системой

$$\{(\varpi(t))^n\}, t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right],$$

где

$$\varpi(t) = \begin{cases} e^{o(t)}, & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]; \\ e^{\delta(t)}, & t \in \left[-\frac{T}{2}, 0\right], \end{cases}$$

$$\sigma(t) = i\frac{\pi}{l}(a+b)t, \delta(t) = i\frac{\pi}{l}(b-a)t, b > a. \quad (1.24)$$

Следовательно, функция $\varpi(t)$ непрерывно возрастает на отрезке $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$, и предельное условие Н. Левинсона принимает вид

$$\frac{\pi}{l}(a+b)\frac{T}{2} + \frac{\pi}{l}(b-a)\frac{T}{2} = 2\pi, \text{ откуда } T = \frac{2l}{b}. \quad (1.25)$$

Значит, время гашения колебаний точечным движущимся демпфером, вообще говоря, меньше времени гашения колебаний методом Д. Лагнесса.

О численном решении задач гашения колебаний

Отметим, что использование точечного движущегося демпфера (1.22) при ограничениях $\alpha \leq x_0 + s(t) \leq \beta$, где $(\alpha, \beta) \in [0, l]$, а также метода характеристик решения задачи (1.1)–(1.3) позволило разработать эффективные численные методы гашения колебаний струны и прямоугольной мембраны (А. Махмудов, Л. Муравей [16]; С. Асланов, И. Михайлов, Л. Муравей [17]; А. Атамуратов [18]).

Пример 1. Рассмотрим задачу гашения колебаний струны при $a = 2$, заключающуюся в нахождении оптимальных управляющих функций $w(t)$, $s(t)$ и времени гашения колебаний T . Начальные возмущения $h_0(x)$, $h_1(x)$ представлены на рис. 1 и рис. 2.

На рис. 3 и рис. 4 изображены оптимальные управляющие функции $w(t)$ и $s(t)$ соответственно.

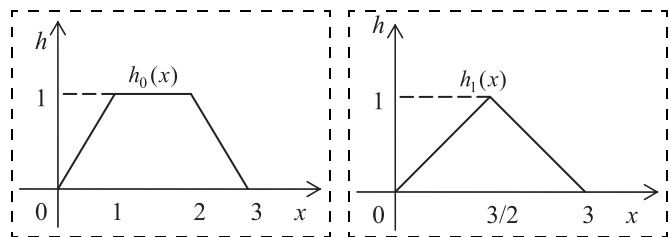


Рис. 1. Начальное возмущение $h_0(x)$ Рис. 2. Начальное возмущение $h_1(x)$

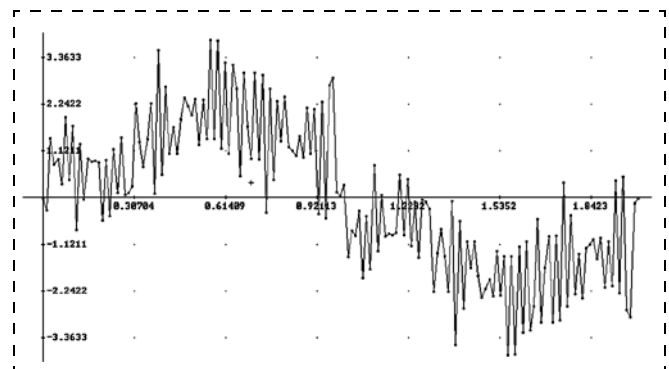


Рис. 3. Оптимальная управляющая функция $w(t)$

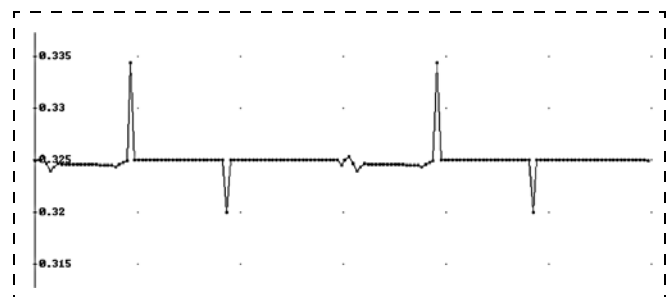


Рис. 4. Оптимальная управляющая функция $s(t)$

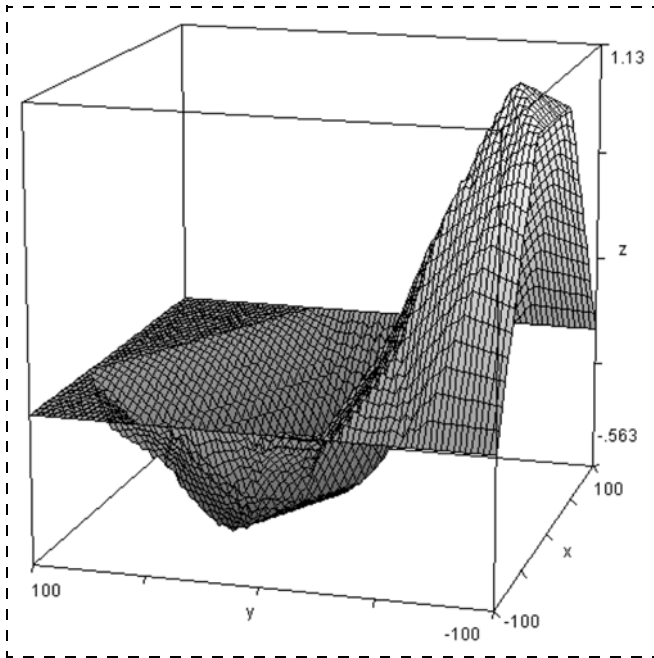


Рис. 5. Вид функции $u(t, x)$

На рис. 5 изображен вид функции $u(t, x)$ (ось t направлена справа налево). За время $T = 3$ происходит практически полное гашение колебаний.

Результаты работ [16—18] показали, что если $\beta - \alpha$ достаточно мало, то управление $w(t)\delta(x - x_0 - s(t))$ можно с большой точностью заменить управлением $w(t)\chi_{[\alpha, \beta]}(x)$ (так называемый узкий демпфер). Поэтому аналогичные демпферы будут использоваться в дальнейшем при исследовании задачи гашения колебаний балки и прямоугольной пластины.

Целью данной работы является исследование управляемости упругих систем, описываемых гиперболическими по Петровскому уравнениями четвертого порядка. Типичными объектами являются балки (трубопроводы, космические антенны) и пластины, являющиеся элементами многочисленных конструкций (космические платформы).

Гашение колебаний балки

Колебания балки описываются гиперболическим по Петровскому уравнением

$$u_{tt} = -a^2 u_{xxxx} + g(t, x), \quad (t, x) \in \Pi = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}. \quad (2.1)$$

Начальные отклонение и скорость перемещения балки

$$u|_t = 0 = h_0(x), \quad u_t|_t = 0 = h_1(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.2)$$

мы снова будем рассматривать как начальные возмущения. На концах балки наложим условия нежесткого закрепления

$$u|_x = 0 = u_{xx}|_x = 0, \quad u|_x = l = u_{xx}|_x = l = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Будем искать управляющую функцию $g(t, x) \in L_2(\Pi)$, переводящую балку из состояния (2.2) в состояние

$$u|_t = T = 0, \quad u_t|_t = T = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.4)$$

за минимальное время T , предполагая что $h_0(x) \in W_2^0(\Pi)$, $h_1(x) \in L_2(\Pi)$.

Соответствующая системе (2.1)—(2.4) задача Штурма—Лиувилля

$$\begin{cases} -a^2 u_{xxxx} = \lambda v, & x \in [0, l]; \\ v(0) = v_{xx}(0) = 0, & v(l) = v_{xx}(l) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

имеет последовательность собственных чисел $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4$ и отвечающую ей ортонормированную последовательность собственных функций $v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$, $n = 1, 2, \dots$ Аналогично изложенному выше получаем следующую проблему моментов:

$$\int_0^T g_n(t) e^{ia\omega_n^2 t} dt = b_n - ia\omega_n^2 a_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

где a_n , b_n , $g_n(t)$ — коэффициенты Фурье функций $h_0(x)$, $h_1(x)$, $g(t, x)$ по ортонормированному в $L_2(0, l)$

базису $\{v_n(x)\}$, где $\omega_n = \sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi^2}{l^2} n^2$, $n = 1, 2, \dots$

Система экспонент

$$\left\{ e^{ia\omega_n^2 t} \right\} = \left\{ \left(e^{ia\frac{\pi^2}{l^2} t} \right)^{n^2} \right\} \quad (2.7)$$

является ортогональной на отрезке $[0, T]$, если

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{l^2}{\pi^2 a}, \quad \text{т. е. } T = \frac{2l^2}{\pi a}. \quad (2.8)$$

Таким образом найдено, вообще говоря, не минимальное время гашения колебаний. Отвечающее ему управление

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ia\frac{2\pi n^2}{T} t} (b_n - ia\omega_n^2 a_n) \quad (2.9)$$

в силу условий на начальные возмущения принадлежит $L_2(0, T)$.

$$\text{Далее исследуем систему } \left\{ \varphi_n(t) = \frac{e^{ia\frac{\pi^2 n^2}{l^2} t}}{\sqrt{\tau}} \right\} \text{ на}$$

отрезке $[0, \tau]$, $\tau < T$. Ясно, что эта система не полна,

однако является почти биортогональной по Р. Беллману [8], поскольку удовлетворяет следующим двум условиям:

$$1) \int_0^{\tau} |\varphi_n(t)|^2 dt = 1; \quad (2.10)$$

$$2) \text{ если положить } a_{mn} = \begin{cases} \int_0^{\tau} \varphi_m(t) \bar{\varphi}_n(t) dt, & m \neq n, \\ 0, & m = n, \end{cases} \quad (2.11)$$

то должно выполняться неравенство

$$\sum_{m \neq n} |a_{mn}|^2 < +\infty. \quad (2.12)$$

Первое условие (2.10) очевидно. Проверим второе условие (2.11). Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_m(t) \bar{\varphi}_n(t) &= \\ &= \frac{1}{\tau} \left[\cos\left(\frac{a\pi^2}{l^2}(n^2 - m^2)t\right) - i \sin\left(\frac{a\pi^2}{l^2}(n^2 - m^2)t\right) \right], \end{aligned} \quad (2.13)$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \varphi_m(t) \bar{\varphi}_n(t) dt &= \\ &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{l^2 \sin\left(\frac{a\pi^2}{l^2}(n^2 - m^2)\tau\right)}{a\pi^2(m^2 - n^2)} - i \frac{l^2 \left(\cos\left(\frac{a\pi^2}{l^2}(n^2 - m^2)\tau\right) - 1\right)}{a\pi^2(m^2 - n^2)} \right]. \end{aligned}$$

Значит, $n \neq m$ и

$$\begin{aligned} |a_{mn}| &\leq \frac{l^2 \sqrt{2}}{a\pi^2(m^2 - n^2)\tau} \sqrt{1 - \sin \frac{2a\pi^2(n^2 - m^2)}{l^2}} \leq \\ &\leq \frac{2l^2}{a\pi^2|m^2 - n^2|\tau} \end{aligned} \quad (2.14)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq n} |a_{mn}|^2 &\leq \frac{8l^4}{a^2 \pi^4 \tau^2} \sum_{m < n} \frac{1}{(m^2 + n^2)(n^2 - m^2)} = \\ &= \frac{32l^4}{a^2 \pi^4 \tau^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2 n^2} \leq \frac{32}{a^2 \tau^2} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Заметим, что условия 1), 2) выполняются и при $\tau > T$. При выполнении условий 1) и 2) из работы Р. Беллмана [8] вытекают следующие неравенства:

1) если вещественнозначная функция $w(t) \in \tilde{L}_2(0, \tau)$, где $\tilde{L}_2(0, \tau)$ — замыкание системы $\{\varphi_n(t)\}$ в норме $L_2(0, \tau)$, и если $d_n = \int_0^{\tau} w(t) \bar{\varphi}_n(t) dt$, $m \neq n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 \leq \int_0^{\tau} |w(t)|^2 dt \left[1 + \frac{32}{a^2 \tau^2} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \right]; \quad (2.16)$$

2) следовательно, справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| d_n - \int_0^{\tau} w(t) \bar{\varphi}_n(t) dt \right|^2 \leq \frac{32}{a^2 \tau^2} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} |d_n|^2. \quad (2.17)$$

В частности, из оценки (2.17) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| d_n - \int_0^{\tau} w(t) \bar{\varphi}_n(t) dt \right| = 0, \quad (2.18)$$

т. е. проблему моментов (2.6) можно решить в $\tilde{L}_2(0, \tau)$ только асимптотически.

Заметим, что коэффициент $\frac{32}{a^2 \tau^2} \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 = \left(\frac{4T}{\pi\tau}\right)^2$

в неравенстве (2.17) показывает, что при уменьшении τ нахождение приближенного оптимального управления усложняется. Наоборот, при $\tau \gg T$ проблему моментов можно с требуемой точностью решить достаточно просто.

Численное решение задачи гашения колебаний балки

Для получения управляющей функции будем использовать численные методы. В качестве управляющей функции будем рассматривать движущийся точечный демпфер

$$g(t, x) = w(t) \delta(x - x_0 - s(t)), \quad (2.19)$$

где $w(t)$ и $s(t)$ — две искомые управляющие функции, δ — дельта-функция Дирака. Мы будем предполагать, что $w(t) \in L_2(0, T)$, а $s(t)$ — функция с ограниченной вариацией.

Уравнение (2.1) можно свести к системе двух уравнений второго порядка [20]

$$\begin{cases} u_t = av_{xx}; \\ v_t = -au_{xx} + f(t, x), \end{cases} \quad (2.20)$$

где

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \\ &= \begin{cases} -\frac{x}{al} w(t)(l - x_0 - s(t)), & x < x_0 + s(t); \\ \frac{1}{a}(x - x_0 - s(t))w(t) - \frac{x}{al}(l - x_0 - s(t))w(t), & x \geq x_0 + s(t). \end{cases} \end{aligned}$$

Начальные и граничные условия переписутся следующим образом:

$$u(0, x) = h_0(x),$$

$$v(0, x) = \frac{1}{a} \int_0^x \left[\int_0^\xi h_1(\eta) d\eta \right] d\xi - \frac{x}{al} \int_0^l \left[\int_0^\xi h_1(\eta) d\eta \right] d\xi, \quad (2.21)$$

$$u(t, 0) = 0, u(t, l) = 0, v(t, 0) = 0,$$

$$v(t, l) = \int_0^t f(t, l) dt + \frac{1}{a} \int_0^l h_1(y) dy dx - \frac{1}{a} \int_0^l \left[\int_0^\xi h_1(\eta) d\eta \right] d\xi. \quad (2.22)$$

Построим конечно-разностную схему для приближенного решения системы (2.20). Разобьем рассматриваемую область на прямоугольные ячейки параллельными прямыми $x_m = mh_x$, $m = 0, \dots, N_X$, $t_n = nh_t$, $n = 0, \dots, N_T$, где $h_x = l/N_X$ и $h_t = T/N_T$. В результате этих операций мы можем записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{h_t} = \frac{a}{2} \left[\frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h_x^2} + \frac{v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{h_x^2} \right]; \\ \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{h_t} = -\frac{a}{2} \left[\frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h_x^2} + \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h_x^2} \right] + \frac{f_m^n + f_m^{n+1}}{2}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Если сделать замену

$$y_m^n = \begin{pmatrix} u_m^n \\ v_m^n \end{pmatrix}, \alpha = \frac{2h_x^2}{ah_t}, \beta = \frac{h_x^2}{a}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{и } V = \begin{pmatrix} -f_m^n - f_m^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

то систему (2.24) можно записать в векторной форме

$$y_{m-1}^{n+1} - [2E + \alpha B] y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1} = -(y_{m-1}^n - [2E + \alpha B] y_m^n + y_{m+1}^n + \beta V), \quad (2.25)$$

где E — единичная матрица. Положим $C = 2E + \alpha B$, $\tilde{C} = 2E - \alpha B$ и $F_m^n = y_{m-1}^n - \tilde{C} y_m^n + y_{m+1}^n + \beta V$. Тогда наша система запишется следующим образом:

$$y_{m-1}^{n+1} - C y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1} = -F_m^n. \quad (2.26)$$

Заметим, что схема (2.26) является безусловно устойчивой.

Будем решать ее методом редукции. Для решения задачи гашения колебаний будем использовать метод координатного спуска. Аппроксимируем

функции $w(t)$ и $s(t)$ кусочно-постоянными функциями: $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$ положим $w(t) = w_i$, $s(t) = s_i$, где w_i, s_i — const, $i = 0, \dots, N_{T-1}$. Тогда интеграл энергии балки будет являться функцией переменных $w_0, w_1, \dots, w_{N_T}, s_0, s_1, \dots, s_{N_T}$

$$E(T) = L(w_0, w_1, \dots, w_{N_T}, s_0, s_1, \dots, s_{N_T}). \quad (27)$$

Оптимальные значения $w_0, w_1, \dots, w_{N_T}, s_0, s_1, \dots, s_{N_T}$, минимизирующие (2.27) с заданной точностью ε , и будут искомым решением задачи.

Пример 2. Начальные условия $h_0(x) = 0,25\sin(\pi x)$, $h_1(x) = 0$, $x_0 = 0,5$. Входные параметры $l = 1$, $a = 1$, $h_t = h_x/2$, в методе редукции зададим число $M = 5$, тогда $h_x = 0,0312$, $h_t = 0,0156$. Будем считать, что задача гашения колебаний решена, если $E(T) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,001$. Минимальное время, требуемое для гашения, равно $T = 0,141$. На рис. 6, 7 изображен процесс гашения первоначального возмущения балки: график значений функции $u(t, x)$ (рис. 6), и вид управляющей функции $w(t)$ (рис. 7). При этом можно положить $s(t) \equiv 0$.

Многочисленные расчеты показали, что гашение колебаний происходит за наименьшее время, если неподвижный точечный демпфер находится в точке максимума амплитуды начального возмущения (2.2), по сравнению со случаем, когда демпфер помещается в другую точку балки.

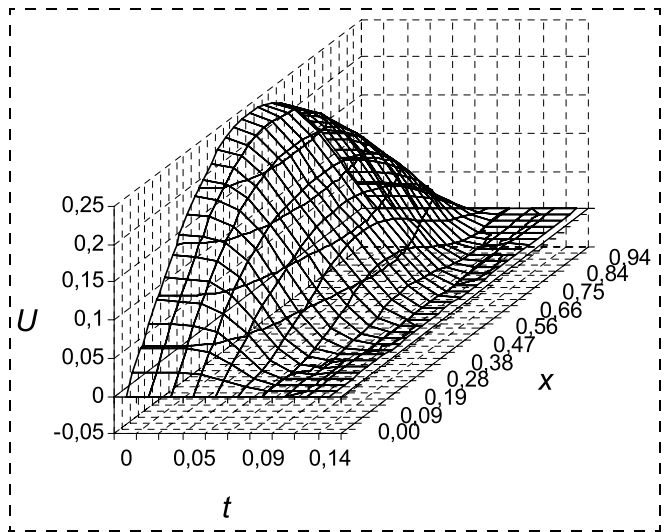


Рис. 6. Процесс гашения колебания

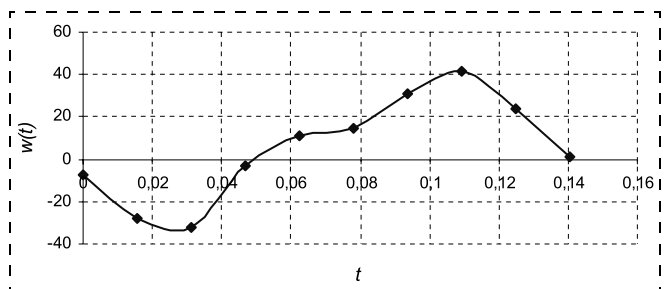


Рис. 7. Управляющая функция $w(t)$

Пример 3. Рассмотрим условия примера 2, но положим $x_0 = 0,687$. Условием гашения колебаний, как и прежде, будем полагать $E(T) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,001$. В этом случае минимальное время, требуемое для гашения, увеличилось до $T = 0,219$. На рис. 8, 9 изображен процесс гашения первоначального возмущения балки: график значений функции $u(t, x)$ (рис. 8), и вид управляющей функции $w(t)$ (рис. 9). При этом можно положить $s(t) \equiv 0$.

Выше уже говорилось, что если точечный стационарный демпфер (1.21) помещен на струне в точку x_0 , которая является узлом стоячих волн решений однородного уравнения колебаний струны, то задача либо неразрешима, либо неустойчива. Этот факт также может иметь место и при гашении колебаний балки.

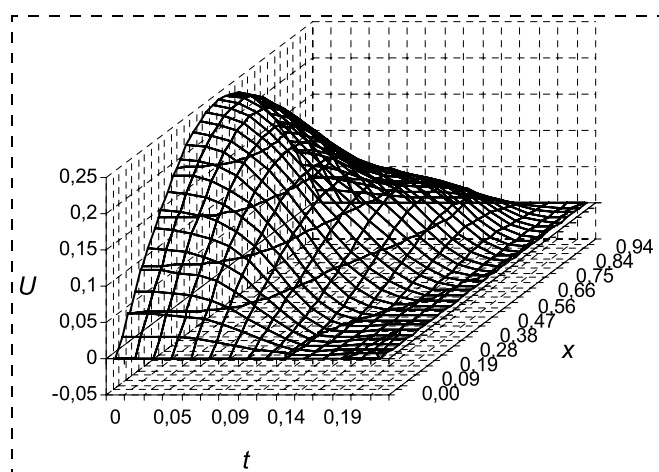


Рис. 8. Процесс гашения колебания

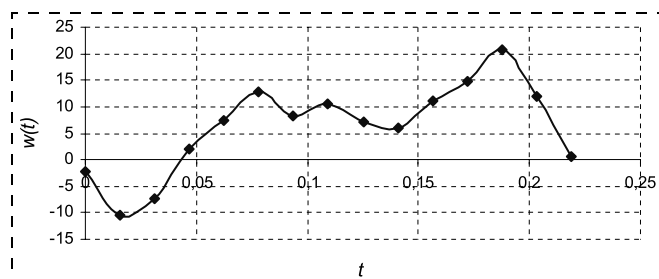


Рис. 9. Управляющая функция $w(t)$

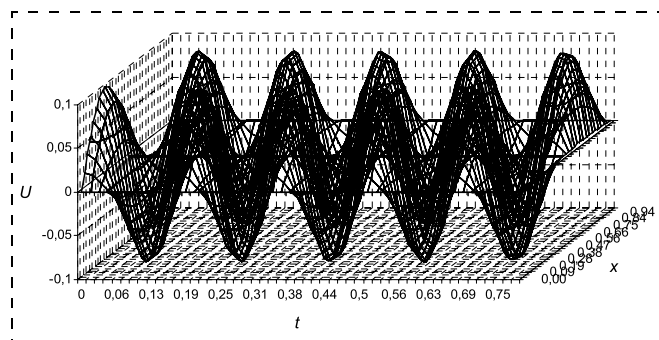


Рис. 10. Функция расположения точечного демпфера $s(t)$

Пример 4. Пусть $h_0(x) = 0,1\sin(2\pi x)$, $h_1(x) = 0$, $x_0 = 0,5$, $s(t) \equiv 0$. Демпфер, установленный в точку $x_0 = 0,5$, не может погасить колебания балки, поскольку в самой точке $x_0 = 0,5$ колебаний не происходит, и функция управления принимает вид $w(t) \equiv 0$. Это наглядно видно на рис. 10.

Использование же движущегося точечного демпфера позволяет решить задачу.

Пример 5. Пусть $h_0(x) = 0,1\sin(2\pi x)$, $h_1(x) = 0$, $x_0 = 0,5$. Функция $s(t)$ задавалась по закону, изображенному на рис. 11. Время гашения для данных условий равнялось $T = 0,781$. Управляющая функция $w(t)$ представлена на рис. 12, а процесс гашения — на рис. 13.

Таким образом, задача гашения колебаний балки решается за конечное время.

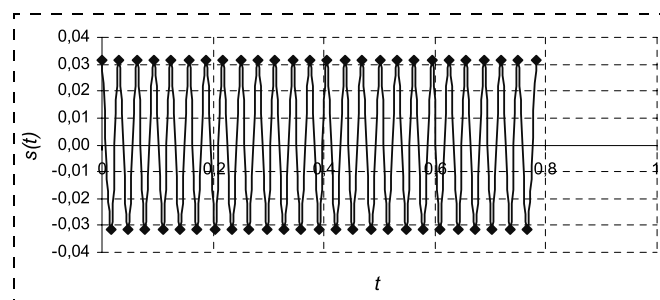


Рис. 11. Функция перемещения точечного демпфера $s(t)$

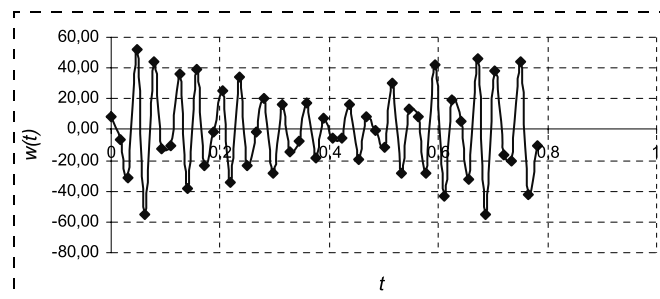


Рис. 12. Управляющая функция $w(t)$

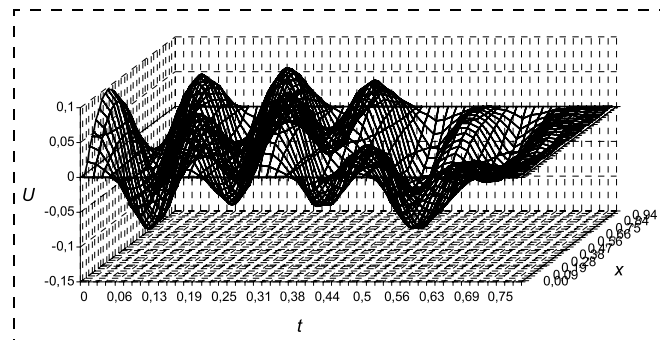


Рис. 13. Процесс гашения колебания

Гашение колебаний прямоугольной пластины

Малые поперечные колебания упругой изотропной пластины постоянной толщины h описываются уравнением Софи-Жармен

$$\rho u_{tt} = -D\Delta\Delta u + \tilde{g}(t, x, y), \quad 0 \leq t, (x, y) \in \Pi = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\},$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — изгибная жесткость пластины;

ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; ρ — удельная плотность на единицу площади пластины;

t — время, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа. Считая ρ и D постоянными, исходное уравнение можно привести к виду (гиперболическому уравнению по Петровскому четвертого порядка)

$$u_{tt} = -a^2\Delta\Delta u + g(t, x, y), \quad t \geq 0, (x, y) \in \Pi. \quad (3.1)$$

Начальное отклонение и скорость пластины от положения равновесия будем задавать как начальные условия и считать их нежелательными возмущениями

$$u(0, x, y) = h_0(x, y), \quad u_t(0, x, y) = h_1(x, y), \quad (x, y) \in \Pi. \quad (3.2)$$

На границе Γ пластины наложим условие шарнирного закрепления

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad \Delta u|_{\Gamma} = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.3)$$

Правую часть уравнения (3.1) $g(t, x, y)$ будем называть функцией управления. Как и ранее, нам удобно рассматривать обобщенное решение задачи (3.1)—(3.3) (в смысле интегрального тождества), которое существует и единственно в соболевском пространстве $W_2^{1,2}([0, T] \times \Pi)$, если предположить,

что $h_0(x, y) \in W_2^0(\Pi)$, $h_1(x, y) \in L_2(\Pi)$ и $g(t, x, y) \in L_2([0, T] \times \Pi)$.

Заметим, что для обобщенного решения интеграл энергии $E(t)$ имеет вид

$$E(t) = \int_{\Pi} (u_t^2 + a^2(u_{xx}^2 + 2u_{xy}^2 + u_{yy}^2)) dx dy, \quad (3.4)$$

причем для $g(t, x, y) \equiv 0$

$$\begin{aligned} E(t) &= E(0) = \int_{\Pi} (h_1^2(x, y) + a^2(h_{0xx}^2(x, y) + \\ &+ 2h_{0xy}^2(x, y) + h_{0yy}^2(x, y))) dx dy = \\ &= \|h_1\|_{L_2(\Pi)}^2 + a^2\|h_0\|_{W_2^0(\Pi)}^2. \end{aligned}$$

Задача гашения колебаний прямоугольной пластины заключается в нахождении минимального значения $t = T$ такого, что при любых начальных возмущениях $h_0(x, y)$, $h_1(x, y)$ (из приведенных

классов) найдется управляющая функция $g(t, x, y)$ (из описанного класса), что

$$E(T) = 0. \quad (3.5)$$

Отметим, что условие (3.5) эквивалентно условиям

$$u(T, x, y) = 0, \quad u_t(T, x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Pi. \quad (3.6)$$

Чтобы получить проблему моментов, рассмотрим соответствующую задачу Штурма—Лиувилля

$$-\Delta^2 v = \lambda v, \quad (x, y) \in \Pi, \quad (3.7)$$

$$v|_{\Gamma} = 0, \quad \Delta v|_{\Gamma} = 0. \quad (3.8)$$

Нетрудно показать, что собственные значения этой задачи имеют вид

$$\lambda_{k,p} = \left(\left(\frac{\pi k}{l_1} \right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l_2} \right)^2 \right)^2, \quad k, p = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

а отвечающая им система собственных функций

$$\begin{aligned} v_{k,p}(x, y) &= \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\pi} \sin\left(\frac{\pi k}{l_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi p}{l_2} y\right), \\ k, p &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.10)$$

образует ортонормированный базис в $L_2(0, \pi)$. Следовательно, разлагая функции $h_0(x, y)$, $h_1(x, y)$, $g(t, x, y)$ в ряды Фурье по этому базису $\{v_{k,p}(x, y)\}$, мы получим решение задачи (3.1)—(3.3) в виде ряда

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= \\ &= \sum_{k,p=1}^{\infty} \left(a_{k,p} \cos(a\sqrt{\lambda_{k,p}} t) + \frac{b_{k,p}}{a\sqrt{\lambda_{k,p}}} \sin(a\sqrt{\lambda_{k,p}} t) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{a\sqrt{\lambda_{k,p}}} \int_0^t g_{k,p}(\tau) \sin[a\sqrt{\lambda_{k,p}}(t-\tau)] d\tau \right) v_{k,p}(x, y), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $a_{k,p}$, $b_{k,p}$, $g_{k,p}(t)$ — коэффициенты Фурье функций $h_0(x, y)$, $h_1(x, y)$, $g(t, x, y)$ соответственно.

Из соотношения (3.11) стандартными преобразованиями с учетом условий (3.6) получим бесконечную систему интегральных уравнений первого рода относительно неизвестных функций $g_{k,p}(t)$ — проблему моментов

$$\begin{cases} \int_0^T g_{k,p}(t) \cos(a\sqrt{\lambda_{k,p}} t) dt = b_{k,p}, \\ \int_0^T g_{k,p}(t) \sin(a\sqrt{\lambda_{k,p}} t) dt = -a\sqrt{\lambda_{k,p}} a_{k,p}, \end{cases} \quad k, p = 1, 2, \dots \quad (3.12)$$

Заметим, что ее можно переписать в виде

$$\int_0^T g_{k,p}(t) e^{ia\pi^2 \omega_{k,p} t} dt = d_{k,p} = b_{k,p} - ia\pi^2 \omega_{k,p} a_{k,p}, \quad (3.13)$$

$$\text{где } \omega_{k,p} = \frac{k^2}{l_1^2} + \frac{p^2}{l_2^2}, \quad k, p = 1, 2, \dots$$

Исследование разрешимости проблемы моментов тесно связано с асимптотическими свойствами при достаточно больших значениях k, p соответствующей системы экспонент

$$\left\{ e^{ia\pi^2 \omega_{k,p} t} \right\} \quad (3.14)$$

в пространстве $L_2(0, T)$. Перенумеруем $\omega_{k,p}$ в порядке их неубывания с учетом возможной кратности. Тогда получим неубывающую последовательность чисел $\omega_n, n = 1, 2, \dots$, где номер n однозначно определяется некоторым номером $(k(n), p(n))$, т. е. $\omega_n = \omega_{k(n), p(n)}$. Найдем асимптотику чисел ω_n при больших значениях n . Для этого обозначим через $N(\rho), \rho > 0$ число таких $\omega_{k,p}$ с учетом кратности, для которых

$$\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{p^2}{l_2^2} \leq \rho. \quad (3.15)$$

Ясно, что $N(\rho)$ равно числу точек (k, p) , удовлетворяющих неравенству (3.15), или площади фигуры $M_{\sqrt{\rho}}$, составленной из прямоугольников $\Pi_{k,p} = \{(x, y): (k-1)l_1 \leq x \leq kl_1, (p-1)l_2 \leq y \leq pl_2\}$, или, что то же самое, умноженной на $1/l_1 l_2$ площади фигуры, составленной из единичных квадратов $K_{k,p} = \{(x, y): k-1 \leq x \leq k, p-1 \leq y \leq p\}$, удовлетворяющих неравенству

$$k^2 + p^2 \leq \rho. \quad (3.16)$$

Откуда, очевидно, вытекает оценка

$$N(\rho) \leq \frac{\pi \rho}{4l_1 l_2}. \quad (3.17)$$

Пусть q_n — кратность числа ω_n , тогда

$$n + q_n - 1 = N(\omega_n). \quad (3.18)$$

При этом кратность q_n можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} q_n &\leq \frac{\pi}{4l_1 l_2} \omega_n - \frac{\pi}{4l_1 l_2} \left(\sqrt{\omega_n} - \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \right)^2 \leq \\ &\leq \frac{\pi \sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{2l_1 l_2} \sqrt{\omega_n}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из выражений (3.13), (3.17)—(3.19) вытекает соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a\pi^2 \omega_n} = \frac{\pi l_1 l_2}{a\pi^3}. \quad (3.20)$$

Следовательно, для системы экспонент $\left\{ e^{ia\pi^2 \omega_n t} \right\}$ на отрезке $[0, T]$ справедлива теорема Н. Левинсона, если

$$\frac{T}{2\pi} = \frac{\pi l_1 l_2}{4a\pi^3}, \text{ т. е. } T = \frac{8l_1 l_2}{a\pi^2}. \quad (3.21)$$

Таким образом, на отрезке $[0, T]$ эти системы экспонент образуют базис Рисса в $L_2(0, T)$. Значит, решение проблемы моментов (3.13) в новой форме

$$\int_0^T g_n(t) e^{ia\pi^2 \omega_n t} dt = b_n - ia\pi^2 \omega_n a_n, \quad (3.22)$$

где $g_n = g_{k(n), p(n)}(t)$, $\omega_n = \omega_{k(n), p(n)}$, $a_n = a_{k(n), p(n)}$, $b_n = b_{k(n), p(n)}$, представляется в виде

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(t)(b_n - ia\pi^2 \omega_n a_n), \quad (3.23)$$

где $\{\Psi_n(t)\}$ — система биортогональная системе

$$\left\{ e^{ia\pi^2 \omega_n t} \right\} \text{ в } L_2(0, T).$$

Так же, как и в случае гашения колебаний струны, может быть решена задача гашения колебаний пластины, если управление сосредоточено в произвольном прямоугольнике $(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \subset \Pi$.

Численное решение задачи гашения колебаний прямоугольной пластины

Для получения управляющей функции будем использовать численные методы. Уравнение (3.1) можно привести к системе двух уравнений

$$\begin{cases} u_{tt} = a\Delta v + g(t, x, y); \\ v = -a\Delta u. \end{cases} \quad (3.24)$$

Начальные и граничные условия для функции v задаются соотношениями

$$v(0, x, y) = -a((h_0)_{xx} + (h_0)_{yy}), \quad v|_{\Gamma} = 0. \quad (3.25)$$

Для того чтобы численно решить систему (2.14), построим конечно-разностную схему для приближенного решения. Для этого разобьем рассматриваемую область на прямоугольные ячейки параллельными прямыми $x_m = mh_x, m = 0, \dots, N_x, y_k = kh_y, k = 0, \dots, N_y, t_n = nh_t, n = 0, \dots, N_T$, где $h_x = l/N_x$, $h_y = l/N_y$ и $h_t = T/N_T$.

В результате этих операций мы можем записать следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{u_{m,k}^{n+1} - 2u_{m,k}^n + u_{m,k}^{n-1}}{h_t^2} = a \left(\frac{v_{m+1,k}^n - 2v_{m,k}^n + v_{m-1,k}^n}{h^2} + \frac{v_{m,k+1}^n - 2v_{m,k}^n + v_{m,k-1}^n}{h^2} \right) + g_{k,m}^n; \\ v_{m,k}^n = -a \left(\frac{u_{m+k,j}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m-1,k}^n}{h^2} + \frac{u_{m,k+1}^n - 2u_{m,k}^n + u_{m,k-1}^n}{h_x^2} \right). \end{cases} \quad (3.26)$$

Схема устойчива по Нейману при условии

$$h_t \leq h_x^2 h_y^2 / (2a(h_x^2 + h_y^2)). \quad (3.27)$$

Для решения задачи гашения колебаний будем искать управляющую функцию в виде

$$g(t, x, y) = w(t) \begin{cases} 1, x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \& y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta); \\ 0, x \notin (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \& y \notin (y_0 - \beta, y_0 + \beta), \end{cases} \quad (3.28)$$

где (x_0, y_0) — центр расположения демпфера на пластине, $w(t) \in L_2(0, T)$, $(\alpha, \beta) \times (\alpha, \beta) \subset \Pi$, и будем использовать метод координатного спуска. Аппроксимируем функцию $w(t)$ кусочно-постоянной функцией: $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$ положим $w(t) = w_i$, где $w_i = \text{const}$, $i = \overline{0, N_{T-1}}$. Тогда интеграл энергии (2.4) будет являться функцией переменных $w_0, w_1, \dots, w_{N_T}$:

$$E(t) = L(w_0, w_1, \dots, w_{N_T}). \quad (3.29)$$

Оптимальные значения $w_0, w_1, \dots, w_{N_T}$, минимизирующие интеграл энергии $E(t)$ с заданной точностью ε , и будут являться искомым решением задачи.

Пример 6. Рассмотрим начальные условия $h_0(x, y) = 0,01 \sin(\pi x/l_1) \sin(\pi y/l_2)$, $h_1(x, y) = 0$. Входные параметры $h_x = 0,1$, $h_y = 0,1$, $h_t = 3,5355 \cdot 10^{-7}$, $a = 1$,

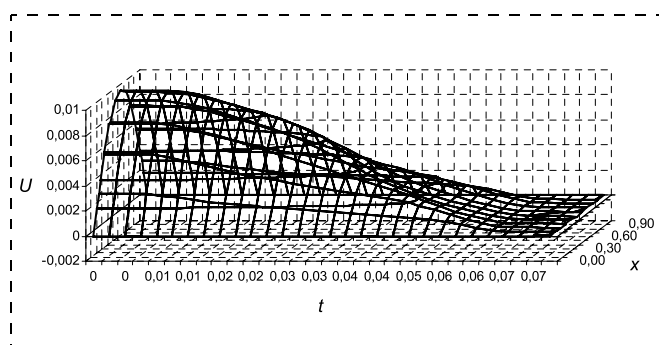


Рис. 14. Процесс колебания в сечении $y = 0,5$

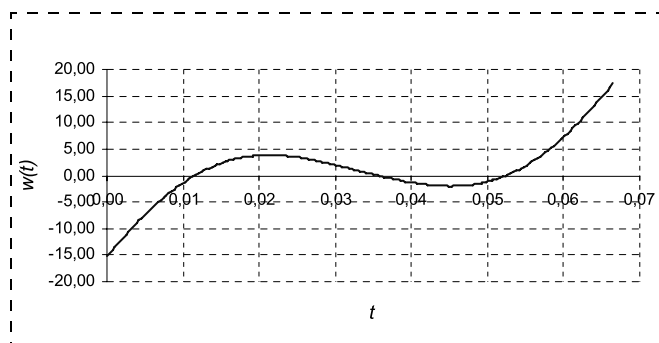


Рис. 15. Управляющая функция $w(t)$

$l_1 = l_2 = 1$, $x_0 = 0,5$, $y_0 = 0,5$, $\alpha = \beta = 0$. Условием гашения будем полагать выполнение неравенства $E(t) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,001$. Задача решается за время $T = 0,0668$. На рис. 14 изображен процесс гашения в сечении $y = 0,5$. При этом управляющая функция $w(t)$, с помощью которой удалось погасить колебания, имеет вид, изображенный на рис. 15.

Таким образом, задача гашения колебаний прямоугольной пластины решается за конечное время.

Список литературы

1. **Lagness J.** Control of wave process with distributed controls supported on a subregion // SIAM Journ. Control and Optim. 1983. Vol. 1, N. 1. P. 68—85.
2. **Lions J. L.** Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system // SIAM Review. 1988. Vol. 30, N. 1. P. 1—68.
3. **Красносельский М. А., Крейн М. Г.** Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов // УМН. 1947, 2:3 (19), С. 60—106.
4. **Ахизер Н. И., Крейн М. Г.** О некоторых вопросах теории моментов. ДнТВУ, 1938. 256 с.
5. **Ахизер Н. И., Глазман И. М.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, Физматлит, 1966. 544 с.
6. **Ахизер Н. И.** Классическая проблема моментов. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 314 с.
7. **Levinson N.** Gap and density theorem // Amer. Math. Soc. Colog. Publ. 1940. Vol. 26.
8. **Bellman R.** Almost orthogonal series // Amer. Math. Soc. 1944. Vol. 50.
9. **Russel D.** Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations // SIAM Review. 1978. Vol. 20, N. 5. P. 639—739.
10. **Бутковский А. Г.** Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
11. **Бутковский А. Г.** Приложение некоторых результатов теории чисел к проблеме финитного управления и управляемости в распределенных системах // ДАН СССР. 1976. Т. 227, № 2. С. 309—311.
12. **Muravey L. A.** On the suppression on membrane oscillations // Summaries of IUTAM Symposium "Dynamical problems of rigid-elastic system", Moscow, 1990. P. 50—51.
13. **Muravey L. A.** Mathematical problems on the damp of vibration // Preprint of IFAC Conference "Identification and system parameter estimations". Budapest. 1991. Vol. 1. P. 746—747.
14. **Билалов Б. Т.** О базисности системы $\{e^{i\sigma n x} \sin nx\}$ и экспонент со сдвигом // ДАН РАН. 1995. Т. 345, № 2. С. 644—647.
15. **Билалов Б. Т., Муравей Л. А.** О гашении колебаний больших механических систем // Труды международного симпозиума Intels-96. С.-Петербург. Ч. II. 1996. С. 246—254.
16. **Makmudov A., Muravey L.** The problem of string vibrations damping // Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Analysis and Nonlinear Modeling, Fethiye, Turkey, 2001. P. 174—182.
17. **Асланов С. Ж., Михайлов И. Е., Муравей Л. А.** Аналитические и численные методы в задаче гашения колебаний струны точечным демпфером // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 7. С. 28—35.
18. **Атамуратов А. Ж.** О гашении колебаний прямоугольной мембраны // Вестник Тверского государственного университета. Серия Прикладная математика. 2013. № 2. С. 49—59.

The Moment Problem in Control Problems of Elastic Dynamic Systems

A. G. Atamuratov, goofydog@mail.ru, Pepsico Holding LTD, Moscow, 125315, Russian Federation,
I. E. Mikhailov, mikh_igor@mail.ru, Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS,
Moscow, 119333, Russian Federation,
L. A. Muravey, l_muravey@mail.ru, Moscow Aviation Institute (State Research University),
Moscow, 121552, Russian Federation

Corresponding author: **Mikhailov Igor E.**, D. Sc., Professor, Leading Researcher,
Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS,
Moscow, 119333, Russian Federation, e-mail: mikh_igor@mail.ru

Received on May 10, 2016

Accepted on May 30, 2016

Methods for damping for oscillations of elements of complex mechanical systems such as strings and membranes began to develop rapidly in the 70s of the last century. The most significant results were obtained by J.-L. Lions, D. Lagnesse, D. Russel, A. Butkovskiy, which dealt with cases of string oscillations (with various types of restraints at the borders) and circular membrane. In this paper we consider the control problem of elastic dynamic systems modeled by partial differential equations of the fourth order, hyperbolic by Petrovsky, which describe, in particular, oscillations in antennas and other elements of space platforms, pipelines, bridge openings. The control problem is to find the minimum time to damp oscillations arisen due to initial perturbation of the system. To solve this problem we derive trigonometric moment problem (infinite system of integral equations of first order for the time component of the control function). We prove the existence of the minimum time and optimal control in case of beams and plates. Wherein time for damping of oscillations and optimal control are given in explicit form. To obtain these results we study the asymptotic behavior of eigenvalues of the corresponding spectral problem by using the classic theorem of N. Levinson (on the basis of the Riesz exponential systems) and Bellman (of almost orthogonal trigonometric systems). Note that the classical solutions of the moment problem presented in the form of infinite series of functions and to obtain the elements of these series is a separate difficult problem. Therefore in order to find the approximate solution we consider the class of control functions such as point moving and slim dampers and build effective numerical methods. Given examples confirm that proposed numerical methods allow us to find solution of problem with sufficient accuracy.

Keywords: damping of oscillations, trigonometric moment problem, orthogonal systems and Riesz basis, asymptotic moment problem, stationary and moving dampers, reduction method, coordinate descent method

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (№ 16-01-00425 project).

For citation:

Atamuratov A. G., Mikhailov I. E., Muravey L. A. The Moment Problem in Control Problems of Elastic Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 587–598.

DOI: 10.17587/mau.17.587-598

References

1. Lagness J. Control of wave process with distributed controls supported on a subregion, *SIAM Journ. Control and Optim.*, 1983, vol. 1, no. 1, pp. 68–85.
2. Lions J. L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system, *SIAM Review*, 1988, vol. 30, no. 1, pp. 1–68.
3. Krasnoselskiy M. A., Krein M. G. *Osnovnye teoremi o rashirenii ermitovih operatorov i nekotore ih primeneiya k teorii ortogonal'nih polinomov i problem momentov* (Fundamental theorems on the extension of Hermitian operators and their applications to the theory of orthogonal polynomials and the problem of moments), *UMN*, 1947, 2:3 (19), pp. 60–106 (in Russian).
4. Ahiezer N. I., Krein M. G. *O nekotorekh voprosakh teorii momentov* (On some questions of the theory of moments), *DnTVU*, 1938, 256 p. (in Russian).
5. Ahiezer N. I., Glazman I. M. *Teoriya lineinih operatorov v gilbertovom prostranstve* (The theory of linear operators in Hilbert space), Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1966, 544 p. (in Russian).
6. Ahiezer N. I. *Klassicheskaya problema momentov*, Moscow, Gos Izd fiziko-matematicheskoy literature, 1961, 314 p.
7. Levinson N. Gap and density theorem, *Amer. Math. Soc. Colog. Publ.*, 1940, vol. 26.
8. Bellman R. Almost orthogonal series, *Amer. Math. Soc.*, 1944, vol. 50.
9. Russel D. Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations, *SIAM Review*, 1978, vol. 20, no. 5, pp. 639–739.
10. Butkovskiy A. G. *Metodi upravleniya sistemami s raspredelennymi parametrami* (The methods of controlling the system with distributed parameters), Moscow, Nauka, 1975, 568 p. (in Russian).
11. Butkovskiy A. G. *Prilozhenie nekotorekh rezul'tatov teorii chisel k probleme finitnogo upravleniya i upravlyaemosti v raspredelennih sistemah* (The application of some of the results of number theory to the problem of finite control and controllability of distributed systems), *DAN USSR*, 1976, vol. 227, no. 2, pp. 309–311 (in Russian).
12. Muravey L. A. On the suppression on membrane oscillations, *Summaries of IUTAM Symposium "Dynamical problems of rigid-elastic system"*, Moscow, 1990, pp. 50–51.
13. Muravey L. A. Mathematical problems on the damp of vibration, *Preprint of IFAC Conference "Identification and system parameter estimations"*, Budapest, 1991, vol. 1, pp. 746–747.
14. Billalov B. T. O bazisnosti sistemi $\{e^{i\sigma_n x} \sin nx\}$ i eksponent so sdvigom (On the basis of the system $\{e^{i\sigma_n x} \sin nx\}$ and exponents with a shift), *DAN RAN*, 1995, vol. 345, no. 2, pp. 644–647 (in Russian).
15. Billalov B. T., Muravey L. A. *O gashenii kolebanii bolshih mehanicheskikh system* (On damping of vibrations of large mechanical systems), *Trudi mezhdunarodnogo simpoziuma Intels-96. St.-Petersburg*, P. II, 1996, pp. 246–254 (in Russian).
16. Makmudov A., Muravey L. The problem of string vibrations damping, *Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Analysis and Nonlinear Modeling*, Fethiye, Turkey, 2001, pp. 174–182.
17. Aslanov S. Zh., Mikhailov I. E., Muravey L. A. *Analiticheskie i chislennye metodi v zadache gasheniya kolebanii struni tochechnim dempferom* (Analytical and numerical methods in the problem of damping of string vibration by point damper), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2006, no. 7, pp. 28–35 (in Russian).
18. Atamuratov A. Zh. *O gashenii kolebanii pryamougol'noi membrane* (On vibrations damping of rectangular membrane), *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Prikladnaya matematika*, 2013, no. 2, pp. 49–59 (in Russian).

С. Ф. Сергеев, д-р психол. наук, проф., s.f.sergeev@spbu.ru,
Санкт-Петербургский государственный университет

Нейроадаптивные биоморфные интерфейсы в эргатических системах: проблемы и решения*

Рассматриваются проблемы создания гибридных биоморфных нейроадаптивных интерфейсов, включающих искусственные сенсорные модальности, обеспечивающие эффективное взаимодействие оператора с управляемыми мехатронными системами.

Ключевые слова: адаптация, биоморфный интерфейс, информационно-коммуникационные технологии, межсистемная интеграция, симбиоз

Введение

Проблема создания интерфейса входит в круг основных задач при построении эффективных человеко-машинных систем [1] и определении степени включения человека в интерактивные взаимодействия с управляемой системой и средой в процессе достижения субъективно понятого результата достижения цели.

Особенно важную роль играют точки и границы контакта человека с искусственным миром, обеспечивающие включение и погружение в его содержание, дающие возможность эффективного и безопасного взаимодействия с ним.

Интерфейс в широком смысле — это определенная стандартами, правилами взаимодействия граница между взаимодействующими функционально-независимыми системными объектами. Интерфейс задает параметры, процедуры и характеристики взаимодействия. В системном подходе это понятие отражает формы, средства и возможности обеспечения взаимодействия двух или более систем (их компонентов) между собой независимо от их физической или ментальной природы в процессе достижения общих целей [2].

Интерфейс является в настоящее время чрезвычайно популярным и широко распространенным в научно-практическом дискурсе междисциплинарным понятием, служащим для объяснения межсистемных объединений и проектирования систем и механизмов, обеспечивающих селективные неразрушающие связи в объектах живой и неживой природы. Наблюдается его экспансия в область информационных технологий, инженерной психологии и эргономики, где наибольшее распространение получили термины "пользовательский ин-

терфейс" и "человеко-машинный интерфейс" [3]. Однако проблема интерфейса в эргатических системах, несмотря на известные успехи и достижения в области инженерного проектирования, еще далека от окончательного решения в силу появления и развития технологий, позволяющих повысить степень управляемости параметрами эргатической системы. Кроме того, внедрение технологий искусственного интеллекта и поддержки оператора ведет к новым формам сетевой и технобиотической интеграции человека с искусственным миром.

Современное состояние проблемы транссистемной интерфейсной интеграции в эргатических системах

Основной задачей при проектировании интерфейса является достижение прозрачности процедуры управления, механизмы осуществления которой для субъекта должны быть невидимыми. Это позволяет создать иллюзию непосредственности, естественности, открытости, понятности, прозрачности интерфейсной связи. Эволюция в сфере межсистемной интеграции человека с техническими системами и средами порождает новые формы интерфейсов, которые позволяют осуществить эффективную интеграцию человека с эргатической системой (см. таблицу).

Традиционное понимание проблемы интерфейса связано с обеспечением физического контакта оператора с органами управления, которые определяют характер и форму возможного воздействия на объект управления и организацию обратной связи по результатам. Данная парадигма реализована в инженерных решениях органов управления (механических интерфейсах). Граница взаимодействия в данном случае возникает только в момент существования механической связи с телом оператора (перемещения органов управления, касания кнопок и активных зон). В такой схеме используются в основном неинвазивные методы связи че-

* Работа выполнена при поддержке РГНФ, проект № 15-06-10640, РФФИ, проект № 16-08-00313.

Классификация эргатических и акторных интерфейсных сред по степени межсистемной интеграции

Тип интерфейса (интерфейсной среды)	Объект управления	Базовые технологии проектирования	Степень интеграции пользователя с рабочей средой	Форма управления. Тип контакта со средой
Механический со зрительной обратной связью (ОС)	Управляемый физический объект в среде деятельности	Механические, электро-механические и пневмогидравлические системы	На уровне физических взаимодействий с органами управления	Сенсомоторные и моторные действия. Физический контакт
Механический с ОС через информационную модель	Информационная модель управляемого объекта	Электромеханические и пневмогидравлические системы	На уровне выполнения алгоритма работы на рабочем месте	Физический, с информационной моделью
Компьютерный пользовательский	Реальные и виртуальные объекты	Компьютерные технологии, мехатроника	На когнитивном уровне с виртуальными объектами	Ввод данных с помощью манипуляторов
Виртуальный	Виртуальная среда и ее элементы	Системы виртуальной и смешанной реальности	На уровне симбиоза органов чувств с иммерсивной средой	Через виртуальные представления органов управления
Нейрокомпьютерный, "мозг—компьютер"	Управляемый объект в среде деятельности	Анализ состояния активности мозга при формировании команд	На биофизическом и нейропсихологическом уровнях	Мысленными командами. Датчики и контакты
Симбиотический	Среды с искусственным интеллектом	Компьютерные технологии, искусственный интеллект среды	Совместная работа с искусственным интеллектом среды	Коммуникация, вербальная, невербальная
Биоморфный	Мозг, субъективная сфера	Интеграция с мозгом искусственных органов чувств	Включение искусственных структур в системную организацию тела	Сенсомоторные действия с искусственными модальностями
Технобиотический	Мозг в искусственном теле	Мехатроника, искусственный интеллект и др.	Полная, рабочая среда, часть киберорганизма	Естественные действия в средах
Воплощенный в среду искусственный разум	Искусственный разум на небиологических носителях	Кибернетика, компьютерные технологии и другие неизвестные нам	Полная. Актор является организующей частью рабочей среды	Непосредственное параметрами управляемой среды

ловека с интерфейсом, и основная проблема проектирования заключается в обеспечении согласования интерфейса тела человека с интерфейсной частью машины. Решение проблемы проектирования данных интерфейсов находится в области антропометрии и физической макроэргономики [4].

Следующим шагом в разработке интерфейсов явилось появление "умной рабочей среды" обратной связи, обеспечивающей оптимальное понимание рабочей ситуации оператором и формирование зоны соответствующих ситуации управляющих действий. Решение проблем проектирования в этом классе интерфейсов связано с созданием адекватного оперативного образа рабочей ситуации [5—7], с использованием методов юзабилити [8, 9] и технологий виртуальной и гибридной реальности [10, 11].

Дальнейшая эволюция межсистемных отношений человека с управляемой средой связана с появлением пользовательских компьютерных интерфейсов, развитие которых в настоящее время стимулируется массовым использованием компьютерных и сетевых технологий управления. Проектировщиков все более интересует человеческий компонент интерфейсной связи. Наблюдается переход от технологий инженерного проектирования, развитых в рамках проблемы человеко-машинного взаимодействия, к методам юзабилити и "User experience" (UX — учет пользовательского опыта) [8, 9]. Вместе

с тем, ряд авторов (например, И. В. Бурмистров, 2016) отмечают кризисные явления в области проектирования пользовательского интерфейса, связанные с недостаточным учетом человеческого фактора, подменяемого графическим дизайном.

Стремление проектировщиков интерфейсов избавиться от различных форм непосредственной механической связи привело к созданию виртуальных интерфейсов, оперирующих с различными формами искусственной машинно-генерированной реальности, воздействие на которую приводит к изменениям в управляемом объекте [10]. В качестве средств управления используются различные манипуляторы, преобразующие жесты и движения тела человека в управляющие команды. Широко применяются различные технологии смешанной и индуцированной реальности.

В настоящей статье нас интересуют подходы к реализации биоморфных интерфейсов, под которыми понимаются интерфейсы, включенные в физическую связь с мозгом, образующие совместно с ним искусственные органы чувств, формирующие дополнительные модальности или их симбиоз с существующими в субъективном мире субъекта, позволяющие расширить возможности субъекта при управлении эргатической системой. Нужно отметить, что это малоизученная тема, редко обсуждаемая в научном сообществе, хотя принципиальных запретов на создание в будущем подобных уст-

роиств нет. Предтечами данного класса интерфейсов являются нейрокомпьютерные интерфейсы или интерфейсы мозг—компьютер [12, 13].

Интерфейс мозг—компьютер (BCI от англ. brain—computer interface) — нейротехнология, обеспечивающая человеку коммуникацию с внешними электронными и электронно-механическими устройствами без использования мышц и периферических нервов, например, только на основе регистрации электрической активности головного мозга [14, 15]. Успехи данной технологии, несмотря на окружающий ее пиар в средствах массовой информации, довольно скромны. Технология используется в очень ограниченном варианте в реабилитационной медицине и в сфере управления протезами конечностей. Ее развитие сдерживается высокой сложностью и слабой изученностью мозга, отсутствием входов-выходов, инвазивным характером точек контакта с мозгом и нервной системой. Несмотря на это интерес к данной технологии очень высок [16]. Идет поиск нейрофизиологических коррелятов субъективным состояниям и вербальным стимулам. Например, используются методы выделения вызванных потенциалов P300 на задуманный пользователем стимул-сигнал [13], создаются системы классификации электроэнцефалографических сигналов воображаемых движений [17].

Одна из основных проблем при построении интерфейсов мозг—компьютер связана с особенностями принципов системной и функциональной организации мозга, формирующего субъективную модель окружающего мира, и информационно-кибернетических моделей, положенных в основание разрабатываемых программно-аппаратных модулей. Повышение качества человеко-машинного взаимодействия и решение связанных с этим проблем требуют от исследователей применения новых подходов к проектированию и реализации человеко-машинных интерфейсов, учитывающих особый характер системной организации живого и, прежде всего, его самоорганизующийся характер.

Особенности адаптации в интерфейсах живых систем

В последнее время в среде проектировщиков интерфейсных систем заметен интерес к технологиям динамической адаптации и, в первую очередь, к человеко-машинным обучающим системам, тренажерам и интерфейсам [17—23].

При этом в рамках классических инженерно-психологических представлений решаются следующие задачи адаптивного информационного взаимодействия:

- исследование закономерностей стохастической детерминации поведения человека;
- регистрация, качественный и количественный анализы факторов и критериев сложности решения мыслительных и перцептивных задач, выбор оптимальных моделей, методов и средств

адаптации структуры и средств взаимодействия в нормальных и экстремальных условиях;

- разработка физических, математических, биологических и других моделей адаптивного взаимодействия;
- исследование психологических закономерностей протекания мыслительных, мнемических и перцептивных процессов в условиях интенсивного информационного взаимодействия [24].

Под адаптацией в широком смысле понимается приспособление системы к особым условиям среды. Однако схемы адаптации, распространенные в живом мире, отличаются от таковых в технических системах особым активным, целенаправленным характером формирования связей на разных уровнях регуляции поведения, деятельности, состояния [25]. В них реализуются следующие функции:

1) *рецепторная* — организм оценивает состояние внешней среды и собственной границы. Рецептор — система, состоящая из сенсоров, преобразующих определенный вид энергии (раздражитель) в унифицированный сигнал, и механизма изменения порога чувствительности к данному виду энергии;

2) *эффекторная* — изменение границ взаимодействия и воздействие на внешнюю среду. Эффе́ктор — исполнительный элемент (орган) организма, состояние которого изменяется под воздействием управляющего унифицированного сигнала;

3) *коммутационная* — динамическое распределение унифицированных сигналов, формирование адекватных реакций на изменения среды.

Несмотря на достаточно понятные принципы функционирования адаптивных интерфейсов перцептивных систем их непосредственная техническая реализация сталкивается с нерешенной по настоящее время проблемой интеграции биологических систем с техническими системами. Развитие технологий в рамках NBICS-конвергенции вселяет некоторый оптимизм, что технические компоненты искусственных органов чувств будут созданы в ближайшее десятилетие.

Системно-технологические проблемы и решения в области биоморфной нейроадаптивной интеграции

Более серьезная проблема в создании систем человеко-машинной интеграции связана с имплантированием интерфейса в системные контуры мозга и формированием в субъективной реальности человека опыта новой модальности. Эта задача является основной причиной неудач в области системной интеграции. Живой организм не терпит вмешательства в его функционирование, особенно на уровне нервной системы и психической регуляции.

По современным нейробиологическим представлениям живые организмы на всех уровнях их функционирования представляют собой аутопоэтические системы, существующие в виде сетевых паттернов самоорганизации [26, 27]. В них реализуются рекурсивные, циклически повторяющиеся процессы

разной качественной природы. Непосредственное вмешательство в работу данных систем приводит к их разрушению, так как нарушается их операциональная замкнутость, обеспечивающая их структурно-функциональное воспроизведение. Следовательно, включение новых сенсорных модальностей, чувствительных к спектрам изменений физической реальности, не должно нарушать работу системных механизмов мозга. Мы не понимаем, как интегрируются в акте восприятия компоненты субъективного образа и порождающие их физиологические структуры.

В качестве перспективной идеи для создания модели работы мозга, позволяющей создать инструменты влияния на субъективную реальность, является идея повторного входа (Re-Entry), идущая от работ Хайнца фон Ферстера и его ученика Умберто Матураны, развитая в трудах Джеральда Эдельмана [28]. По мнению Эдельмана, в основе возникновения субъективных феноменов лежит один и тот же механизм повторного входа возбуждения в те же нейронные группы после дополнительной обработки информации в других группах или поступления сигналов из внешней среды. Имеются подтверждения работоспособности данной идеи в нейрофизиологии в исследованиях А. М. Иваницкого [29]. Видимо, фундаментальным принципом самоорганизации в живых организмах, порождающим психические явления, является возврат возбуждения к местам первоначальных проекций, чем обеспечивается информационный синтез опыта субъекта со вновь поступающей информацией. Эта операция определяет содержание сознания как постоянно корректируемый личный опыт и разворачивающийся во времени процесс порождения внутреннего "Я".

В случае отсутствия возможности включения искусственного органа чувств в цикл повторного входа в субъективную реальность человека не возникает условий для формирования новой модальности чувственного опыта.

Таким образом, в основе сознания лежит идея непрерывного обновления в процессе циклического самовоспроизведения. Физиологические механизмы мозга создают условия для возникновения циклических процессов движения информационных потоков, а их взаимодействия ведут к появлению субъективной реальности [21].

Основные технологические проблемы создания инвазивных точек контакта интерфейсных элементов с мозгом связаны с биологической совместимостью. Показано, что при использовании многоэлектродных матриц электроды последних постепенно зарастают соединительными тканями, что приводит к ухудшению электрического контакта с мозгом, с полным нарушением впоследствии [30]. Вторая проблема — возможность инфицирования в точке контакта. И третья проблема связана с этическими проблемами, возникающими при операциях на открытом мозге.

Несмотря на успехи инженерии следует признать ее достаточно серьезную ограниченность при создании сложных систем. Вместе с тем, существуют варианты создания дополнительных органов чувств методами генной инженерии и биологии. Например, показана роль гена *Rax-6* (окулярорбин) в развитии органов зрения. Манипуляция этим геном позволяет в эксперименте вырастить дополнительные глаза у лягушки и мухи дрозофилы [31]. Известны исследования дизайна живых организмов в природе [32], что может, по нашему мнению, стать основой для развития новых направлений в эргономике, объединяющих достижения нейронауки, генетики и высоких технологий. Вместе с тем, многое из рассматриваемой проблемы требует дополнительного научного исследования. Прежде всего, неясно, может ли формироваться в мозге дополнительное сенсорное поле при создании дополнительных органов чувств у взрослого человека, или это возможно только в растущем организме? Неясно, какие формы субъективной реальности при этом возникнут. В живой природе известны необычные формы субъективной реальности. Например, дельфин видит одновременно в световом и ультразвуковом диапазонах, а полушария его мозга, работая попеременно, позволяют ему быть в постоянном состоянии бодрствования [33]. Кроме того, дельфины способны чувствовать магнитное поле Земли и используют его для ориентации в пространстве. Мы можем только догадываться о форме и свойствах субъективной реальности дельфина, объединяющей столь разную информацию, получаемую со столь необычных органов чувств, но она обеспечивает его эффективное существование и выживание.

Появление биоморфных интерфейсов ставит проблему симбиотической интеграции искусственных миров и сред [34—38] с новыми формами человеческой чувственности. Данная проблема в настоящее время не решена. Имеются лишь отдельные факты, свидетельствующие о возможных серьезных изменениях во всех сферах психики человека, включая личностный уровень, при попытках его интеграции в искусственные миры виртуальной и сетевой реальности.

В завершение нашего исследования отметим, что эволюция в области интеграции человека с искусственной средой может привести к появлению воплощенного в среду искусственного разума, выходящего за пределы человеческого тела, организованного на небиологических носителях. Однако заметим, что эта проблема находится на границе научного знания и интересна лишь для анализа философских проблем, возникающих в крайних границах интеграции человека и техники.

Заключение

Разработка биоморфных нейроадаптивных интерфейсов является актуальным и перспективным научно-техническим направлением в создании ин-

терфейсных форм, расширяющих перцептивные возможности человека при работе в сложных техногенных средах. Появляются новые возможности по созданию искусственных органов чувств и перцептивных систем человека, дающие возможность сформировать у человека новые более эффективные или дополняющие существующие формы субъективной реальности, обогащающие мир человеческого опыта. Интеграция новых биоморфных форм интерфейса у человека с эргатическими системами и средами позволит получить новые свойства возникающих гибридных человеко-машинных систем и сред.

Список литературы

1. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Интеллектуальная поддержка человека-оператора в эргатических системах управления // Труды Второй Междунар. науч.-практ. конф. "Человеческий фактор в сложных технических системах и средах" (Эрго-2016). СПб.: Межрегион. эргономическая ассоциация, 2016. С. 117—123.
2. Сергеев С. Ф. Психологические аспекты проблемы интерфейса в техногенном мире // Психологический журнал. 2014. Т. 35, № 5. С. 88—98.
3. Сергеев С. Ф., Падерно П. И., Назаренко Н. А. Введение в проектирование интеллектуальных интерфейсов. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. 108 с.
4. Вудсон У., Коновер Д. Справочник по инженерной психологии для инженеров и художников-конструкторов. М.: Мир, 1968. 520 с.
5. Ошанин Д. А. Предметное действие и оперативный образ. Воронеж: НПО МОДЭК, 1999. 512 с.
6. Обознов А. А. Представление о структуре концептуальной модели в трудах Д. А. Ошанина // Д. А. Ошанин и современная психология: к 100-летию со дня рождения Д. А. Ошанина / Под общ. ред. В. И. Панова и Н. Л. Мориной. М.: Обнинск: ИГ СОЦИН, 2008. 292 с.
7. Завалова Н. Д., Ломов Б. Ф., Пономаренко В. А. Образ в системе психической регуляции деятельности. М.: Наука, 1986. 176 с.
8. Сергеев С. Ф. Методы тестирования и оптимизации интерфейсов информационных систем: учеб. пособ. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2015. 150 с.
9. Сергеев С. Ф., Соколов В. Н., Коротеев Г. Л. Методы юзабилити в тренажерах и обучающих системах. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 132 с.
10. Сергеев С. Ф. Обучающие и профессиональные иммерсивные среды. М.: Народное образование, 2009. 432 с.
11. Сергеев С. Ф. Введение в инженерную психологию и эргономику иммерсивных сред: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СПбГУ ИТМО, 2011. 258 с.
12. Гончаров С. М., Маркин М. Е. "Интерфейс мозг-компьютер" как нестандартная технология управления и передачи информации // Доклады ТУСУР. 2014. № 2 (32). С. 252—256.
13. Ганин И. П., Шишкин С. Л., Кочетова А. Г., Каплан А. Я. Интерфейс мозг—компьютер "на волне P300": исследование эффекта номера стимулов в последовательности их предъявления // Физиология человека. 2012. Т. 38, № 2. С. 5—13.
14. Vidal J. J. Towards direct brain-computer communication // Annual review of Biophysics and Bioengineering. 1973. Vol. 2, N. 1. P. 157—180.
15. Wolpaw J. R., Birbaumer N., McFarland D. J. et al. Brain—computer interfaces for communication and control // Clinical Neurophysiology. 2002. V. 113. P. 767.
16. Фролов А. А., Рошин В. Ю. Интерфейс мозг—компьютер. Реальность и перспективы: Научная конференция по нейроинформатике, МИФИ 2008 год, Лекции по нейроинформатике. URL: <http://neurolcures.narod.ru/2008/Frolov-2008.pdf>.
17. Сонькин К. М. Система классификации электроэнцефалографических сигналов воображаемых движений мелкой моторики для интерфейса мозг—компьютер: дис. ... канд. техн. наук: 05.11.16. СПб., 2016. 163 с.

18. Сергеев С. Ф. Адаптивность в тренажерах // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2011. № 6 (76). С. 118—123.
19. Сергеев С. Ф. Адаптивная автоматизация деятельности оператора в среде иммерсивного интерфейса мехатронного подвижного объекта // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 5. С. 15—21.
20. Сергеев С. Ф., Заплаткин Ю. Ю., Захаревич М. А., Соколов В. Н. Проблема адаптивности в тренажерах // Российский научный журнал. 2012. № 2 (27). С. 132—141.
21. Сергеев С. Ф. Регуляция, саморегуляция, самоорганизация, саморазвитие в понятийном базисе психологии // Актуальные проблемы психологии труда, инженерной психологии и эргономики. Вып. 4. М.: Институт психологии РАН, 2012. С. 238—259.
22. Сергеев С. Ф. Методологические проблемы человеко-машинного интерфейса // XII Всеросс. совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16—19 июня 2014 г.: Труды. [Электронный ресурс] М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН. 2014. С. 6414—6421.
23. Анохин А. Н. Адаптивный интерфейс для операторов сложных систем // Тр. XII Всеросс. совещания по проблемам управления: ВСПУ-2014 (Москва, 16—19 июня 2014). М.: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2014. С. 6345—6356.
24. Инженерная психология / Под ред. Б. Ф. Ломова, В. Ф. Рубахина, В. Ф. Венды. М.: Наука, 1977. 302 с.
25. Дикая Л. Г. Адаптация: методологические проблемы и основные направления исследований // Психологическая адаптация и социальная среда: современные подходы, проблемы, перспективы. М.: Институт психологии РАН, 2007. С. 17—41.
26. Матурана У. Биология познания // Язык и интеллект / Пер с англ. и нем. / Сост. и вступ. ст. В. В. Петрова. М.: Прогресс, 1996. С. 95—142.
27. Матурана У., Варела Ф. Древнее познание / Пер. с англ. Ю. А. Данилова. М.: Прогресс-Традиция, 2001.
28. Edelman G. M. The remembered present. A biological theory of consciousness. New York: Basics Books, 1989.
29. Иваницкий А. М. Мозговая основа субъективных переживаний: гипотеза информационного синтеза // Журнал высшей нервной деятельности им. И. П. Павлова. 1996. Т. 46, № 2. С. 241—252.
30. Dodson R. F. et al. (1978). Cerebral tissue response to electrode implantation // Can. J. Neurol. Sci. 5 (4). P. 443—446.
31. Suga H., Tschopp P., Graziussi D. F., Stierwald M., Schmid V., Gehring W. J. (2010) Flexibly deployed Pax genes in eye development at the early evolution of animals demonstrated by studies on a hydrozoan jelly fish // Proc. Natl. Acad. Sci. USA 107 (32): 14263—14268.
32. Miran M. D., & Miran E. R., Chen N. Design Of Living Systems In The Information Age: Brain, Creativity and the Environment, In J Seckbach et al. (Eds.), Origin(s) of Design in Nature: A Fresh, Interdisciplinary Look at How Design Emerges in Complex Systems, Especially Life, Springer: 2012.
33. Куксова Н. С. Эти удивительные дельфины // Нейрохирургия. 2011. № 3. С. 3—7.
34. Сергеев С. Ф. Интеллектуальные симбионты в дружественном интерфейсе глобальных техногенных сред // Матер. 8-й Всеросс. мультikonф. по проблемам управления (28 сентября — 3 октября 2015 года). Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2015. Т. 1. С. 150—153.
35. Сергеев С. Ф. Проблема эффективного взаимодействия человека-оператора с интеллектуальными техническими системами и средами // Матер. 3-го междунар. науч.-техн. семинара "Современные проблемы прикладной математики, информатики, автоматизации, управления" (9—13 сентября, г. Севастополь). М.: ИПИ РАН, 2013. С. 183—197.
36. Сергеев С. Ф. Эргономика иммерсивных сред: методология, теория, практика: дис. ... д-ра психол. наук: 19.00.03: защищена 7.04.10: утв. 28.01.11 / Сергеев Сергей Федорович. СПб., 2010. 420 с.
37. Сергеев С. Ф. Присутствие и иммерсивность в обучающих средах. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2011. 122 с.
38. Сергеев С. Ф. Наука и технология XXI века. Коммуникации и НБИКС-конвергенция // Глобальное будущее 2045. Конвергентные технологии (НБИКС) и трансгуманистическая эволюция. М.: ООО "Издательство МБА", 2013. С. 158—168.

Biomorphic Neuroadaptive Interfaces in the Ergatic Systems: Problems and Solutions

S. F. Sergeev, Professor, s.f.sergeev@spbu.ru✉,
St. Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034 Russia

Corresponding author: **Sergeev Sergei F.**, D. Sc., Professor,
St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russian Federation,
e-mail: s.f.sergeev@spbu.ru

Received on April 30, 2016

Accepted on May 20, 2016

The article shows evolution of the human-machine interface ergonomic systems in the direction of improvement of integration with human, who connects the controlled technical environments. The author presents a classification of the interfaces and the interface environments depending on the degree of the user's integration with the operating environment. The author describes the following types of the integrative interfaces based on the level of the physical interaction of the mechanical controls intended to complete integration of an actor (actors) in the organized working environment: mechanical, with an immediate visual feedback, the mechanical feedback through an information model, a computer user virtual, neurocomputing, symbiotic, biomorphic, technobiotics hypothetical interfaces embodied in the artificial intelligence environment. The author considers the brain-computer interface, ensuring a direct link with the brain of an operator as one of the promising areas of the inter-system integration, which can be used in the form of a "brain-computer" technology. The author shows fundamental limitations in the technology and methodology for creation of this class of interfaces. The next section of the paper deals with the problems of creation of the hybrid biomorphic neuroadaptive interfaces, including creation of the artificial sensory modalities, which ensure an effective interaction with the operator control system. The author notes the potential of creation of the biomorphic and hybrid interfaces as a result of the joint use of the genetic engineering and technical design as a part of the system of non-classical representations. The key problem in creation of the biomorphic interfaces is the problem of inter-system integration between the classic technical systems and biological systems, which implement the cyclic self-reproduction (autopoiesis), because of the interference in the operational structure of the autopoietic systems, which leads to their destruction. In conclusion, the author points out that the evolution of the human integration with the artificial environment can lead to appearance of an embodied mind in an artificial environment, which goes beyond the human nature, organized like a non-biological media. This issue is currently on the cutting edge of the scientific knowledge and can be interesting as a philosophical problem arising in the extreme boundaries of the inter-system integration of man and technology.

Keywords: adaptation, biomorphic interface information and communication technologies, inter-system integration, symbiosis

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Foundation for Humanities, the project number 15-06-10640, RFBR, project number 16-08-00313.

For citation:

Sergeev S. F. Biomorphic Neuroadaptive Interfaces in the Ergatic Systems: Problems and Solutions, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 599–604.

DOI: 10.17587/mau.17.599-604

References

1. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Intellektual'naya podderzhka cheloveka-operatora v ehrgaticheskikh sistemah upravleniya* (Intellectual support of the human operator in ergatic control systems), *Trudy Vto-roj Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. "Chelovecheskij faktor v slozhnykh tekhnicheskikh sistemah i sredah"* (Ehrgo-2016), SPb., Mezhtregion. ehrgonomicheskaya asociatsiya, 2016, pp. 117–123 (in Russian).
2. **Sergeev S. F.** *Psihologicheskie aspekty problemy interfejsa v tehnogenom mire* (Psychological aspects of interface problems in man-made world), *Psihologicheskij Zhurnal*, 2014, vol. 35, no. 5, pp. 88–98 (in Russian).
3. **Sergeev S. F., Paderno P. I., Nazarenko N. A.** *Vvedenie v proektirovanie intellektual'nykh interfejsov* (Introduction to the design of intelligent interfaces), SPb, SPBGU ITMO, 2011 (in Russian).
4. **Vudson U., Konover D.** *Spravochnik po inzhenernoj psikhologii dlja inzhenerov i hudozhnikov-konstruktorov* (Handbook of engineering psychology for engineers and artists-designers), Moscow, Mir, 1968 (in Russian).
5. **Oshanin D. A.** *Predmetnoe dejstvie i operativnyj obraz* (The subject action and operational image), Voronezh, NPO MODJeK, 1999 (in Russian).
6. **Oboznov A. A.** *Predstavlenie o strukture konceptual'noj modeli v trudah D. A. Oshanina* (Insight into the structure of the conceptual model in the works of D. A. Oshanin), *D. A. Oshanin i sovremennaja psihologija: k 100-letiju so dnja rozhdenija D. A. Oshanina*, Moscow, Obninsk, IG SOCIN, 2008, 292 p. (in Russian).
7. **Zavalova N. D., Lomov B. F., Ponomarenko V. A.** *Obraz v sisteme psicheskoy reguljatsii dejatel'nosti* (The image in the system of mental regulation of activities), Moscow, Nauka, 1986 (in Russian).
8. **Sergeev S. F.** *Metody testirovaniya i optimizatsii interfejsov informacionnykh sistem: Uchebnoe posobie* (Methods of testing and optimization of interfaces of information systems: a tutorial), SPb, Publishing house of S.-Peterb. university, 2015 (in Russian).
9. **Sergeev S. F., Sokolov V. N., Koroteev G. L.** *Metody juzabiliti v trenazherah i obuchajushhih sistemah* (Usability methods in the simulators and training systems), SPb, Publishing house of Politehn. unta, 2012 (in Russian).
10. **Sergeev S. F.** *Obuchajushhie i professional'nye immersivnye sredy* (Training and professional immersive environment), Moscow, Narodnoe obrazovanie, 2009 (in Russian).
11. **Sergeev S. F.** *Vvedenie v inzhenernuju psihologiju i jergonomiku immersivnykh sred: Uchebnoe posobie* (Introduction to engineering psychology and ergonomics immersive environments: a Training manual.), SPb, Publishing house of SPBGU ITMO, 2011 (in Russian).
12. **Goncharov S. M., Markin M. E.** *"Interfejs mozg-komp'yuter" kak nestandartnaja tehnologija upravlenija i peredachi informacii* ("Brain-computer interface" as a non-standard control technology and information transfer), *Doklady TUSUR*, 2014, no. 2 (32), pp. 252–256 (in Russian).
13. **Ganin I. P., Shishkin S. L., Kochetova A. G., Kaplan A. Ja.** *Interfejs mozg-komp'yuter "na volne P300": issledovanie jeffekta nomera stimulov v posledovatel'nosti ih pred'javlenija* (Interface brain-computer "in the Wake of P300: an investigation of the effect of numbers of stimuli in the sequence they are presented), *Fiziologija Cheloveka*, 2012, vol. 38, no. 2, pp. 5–13 (in Russian).
14. **Vidal J. J.** *Towards direct brain-computer communication, Annual Review of Biophysics and Bioengineering*, 1973, vol. 2, no. 1, pp. 157–180.

15. **Wolpaw J. R., Birbaumer N., McFarland D. J.** et al. Brain—computer interfaces for communication and control, *Clinical Neurophysiology*, 2002, vol. 113, 767 p.
16. **Frolov A. A., Roshhin V. Ju.** *Interfejs mozg-komp'yuter. Real'nost' i perspektivy: Nauchnaya konferenciya po neiroinformatike MIFI 2008 god, Lekcii po neiroinformatike* (Interface brain-computer. Reality and prospects: Scientific conference on Neuroinformatics, Moscow engineering physics Institute 2008, Lectures on Neuroinformatics), available at: <http://neuroleures.narod.ru/2008/Frolov-2008.pdf> (in Russian).
17. **Son'kin K. M.** *Sistema klassifikatsii jelektroencefalograficheskikh signalov voobrazhaemykh dvizhenij melkoj motoriki dlja interfejsa mozg-komp'yuter* (The system of classification of electroencephalographic signals of imaginary movement's fine motor skills to interface brain-computer): dis. ... kand. tehn. nauk: 05.11.16. SPb., 2016 (in Russian).
18. **Sergeev S. F.** *Adaptivnost' v trenazhiorah* (Adaptability in the trainer), *Nauchno-Tekhnicheskij Vestnik Sankt-Peterburgskogo Gosudarstvennogo Universiteta Informacionnykh Tehnologij, Mekhaniki i Optiki*, 2011, no. 6 (76), pp. 118—123 (in Russian).
19. **Sergeev S. F.** *Adaptivnaya avtomatizatsiya dejatel'nosti operatora v srede immersivnogo interfejsa mehatronnogo podvizhnogo ob'ekta* (Adaptive automation of operator activities in the immersive environment of the mechatronic interface for movable object), *Mehatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2012, no. 5, pp. 15—21 (in Russian).
20. **Sergeev S. F., Zaplatkin Ju. Ju., Zaharevich M. A., Sokolov V. N.** *Problema adaptivnosti v trenazherah* (The problem of adaptability in the trainer), *Rossijskij Nauchnyj Zhurnal*, 2012, no. 2 (27), pp. 132—141 (in Russian).
21. **Sergeev S. F.** *Reguljacija, samoreguljacija, samoorganizatsija, samorazvitie v ponjatijnom baze psihologii* (Regulation, self-regulation, self-organization, self-development in the conceptual basis of psychology), *Aktual'nye problemy psihologii truda, inzhenernoj psihologii i jergonomiki*, Iss. 4, Moscow, Institut psihologii RAN, 2012, pp. 238—259 (in Russian).
22. **Sergeev S. F.** *Metodologicheskie problemy cheloveko-mashin-nogo interfejsa* (Methodological problems in man-machine interface), *Proc. of XII Vserossijskoe soveshhanie po problemam upravljenja VSPU-2014*, Moscow, Institut problem upravljenja im. V. A. Trapeznikova RAN, 2014, pp. 6414—6421 (in Russian).
23. **Anohin A. N.** *Adaptivnyj interfejs dlja operatorov slozhnykh sistem* (An adaptive interface for operators of complex systems), *Proc. of XII Vserossijskoe soveshhanie po problemam upravljenja VSPU-2014*, Moscow, Institut problem upravljenja im. V. A. Trapeznikova RAN, 2014, pp. 6345—6356 (in Russian).
24. **Lomov B. F., Rubahin V. F., Vandy V. F.** ed. *Inzhenernaja psihologija* (Engineering psychology), Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).
25. **Dikaja L. G.** *Adaptatsija: metodologicheskie problemy i osnovnye napravlenija issledovanij* (Adaptation: methodological problems and main directions of research), *Psihologicheskaja adaptatsija i social'naja sreda: sovremennye podhody, problemy, perspektivy*, Moscow, Institut psihologii RAN, 2007, pp. 17—41 (in Russian).
26. **Maturana U.** *Biologija poznaniya* (The biology of cognition), *Jazyk i intellect*, Moscow, Progress, 1996, pp. 95—142 (in Russian).
27. **Maturana U., Varela F.** *Drevo poznaniya* (The tree of knowledge), Moscow, Progress-Tradicija, 2001 (in Russian).
28. **Edelman G. M.** *The remembered present. A biological theory of consciousness*, New York: Basics Books, 1989.
29. **Ivanickij A. M.** *Mozgovaja osnova sub'ektivnykh perezhivanij: gipoteza informacionnogo sinteza* (Brain basis of subjective experiences: the hypothesis of information synthesis), *Zhurnal vysshej nervnoj dejatel'nosti im. I. P. Pavlova*, 1996, v. 46, no. 2, pp. 241—252 (in Russian).
30. **Dodson R. F.** et al. Cerebral tissue response to electrode implantation, *Can. J. Neurol. Sci.*, 1978, 5 (4). pp. 443—446.
31. **Suga H., Tschopp P., Graziussi D. F., Stierwald M., Schmid V., Gehring W. J.** Flexibly deployed Pax genes in eye development at the early evolution of animals demonstrated by studies on a hudozoan jelly fish, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2010, 107 (32): 14263—14268.
32. **Miran M. D. & Miran E. R., Chen N.** *Design Of Living Systems In The Information Age: Brain, Creativity and the Environment*, In J. Seckbach et al. (Eds.), *Origin(s) of Design in Nature: A Fresh, Interdisciplinary Look at How Design Emerges in Complex Systems*, Especially Life, Springer, 2012.
33. **Kuksova N. S.** *Jeti udivitel'nye del'fina* (These amazing dolphins), *Neirohirurgija*, 2011, no. 3, pp. 3—7 (in Russian).
34. **Sergeev S. F.** *Intellektnye simbiozisty v družestvennom interfeise global'nykh tehnogennykh sred* (Intelligent symbionts in a friendly interface of global man-made environments), *Proc. of 8th Vseross. mul'tikonf. po problemam upravljenja*, Rostov-na-Donu, Publishing house of Juzhnogo federal'nogo universiteta, 2015, vol. 1, pp. 150—153 (in Russian).
35. **Sergeev S. F.** *Problema jeffektivnogo vzaimodejstvija cheloveka-operatora s intellektual'nymi tehnicheskimi sistemami i sredami* (The problem of effective interaction of the human operator with intelligent technical systems and environments), *Proc. of 3rd Internat. science-technical. seminar "Sovremennye problemy prikladnoj matematiki, informatiki, avtomatizatsii, upravljenja"*, Moscow, IPI RAN, 2013, pp. 183—197 (in Russian).
36. **Sergeev S. F.** *Jergonomika immersivnykh sred: metodologija, teorija, praktika* (Ergonomics immersive environments: methodology, theory, practice): dis. ... d-ra psihol. nauk: 19.00.03: zashhishhena 7.04.10: utv. 28.01.11, SPb, 2010 (in Russian).
37. **Sergeev S. F.** *Prisutstvie i immersivnost' v obuchajushchih sredah* (The presence and immersively in learning environments), SPb, Publishing house of Politehn. university, 2011 (in Russian).
38. **Sergeev S. F.** *Nauka i tehnologija XXI veka. Kommunikatsii i NBIKS-konvergencija* (Science and technology of the XXI century. Communications and NBIC-convergence), *Global'noe budushhee 2045. Konvergentnye tehnologii (NBIKS) i transgumanisticheskaja jevoljucija*, Moscow, Izdatel'stvo MBA, 2013, pp. 158—168 (in Russian).

В. М. Лохин, д-р техн. наук, проф., cpd@mirea.ru, **С. В. Манько**, д-р техн. наук, проф., cpd@mirea.ru,
Р. И. Александрова, науч. сотр., cpd@mirea.ru, **М. П. Романов**, д-р техн. наук, проф., cpd@mirea.ru,
С. А. К. Диане, канд. техн. наук., ассистент, cpd@mirea.ru,
 Московский технологический университет (МИРЭА), Москва

Принципы построения и программно-алгоритмическое обеспечение человеко-машинного интерфейса для автономных роботов и мультиагентных робототехнических систем¹

Представлен обзор средств и методов человеко-машинного интерфейса для робототехнических систем специального назначения. Предложены принципы построения человеко-машинного интерфейса для мультиагентных робототехнических систем. Обоснованы структура и состав программно-алгоритмических средств для оперативного описания и постановки прикладных задач группе автономных роботов, приводятся результаты моделирования.

Ключевые слова: автономный робот, мультиагентная робототехническая система, человеко-машинный интерфейс

Введение

Результаты научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ, активно ведущихся во всем мире в области мультиагентных робототехнических систем (МАРС), убедительно свидетельствуют о возможности их создания и перспективности применения для широкого круга приложений в военном деле, сельском хозяйстве, строительстве и множестве других сфер. При этом основные усилия разработчиков концентрируются вокруг проблем распределения заданий и планирования взаимодействий в группе роботов, организации информационного обмена, обобщения сенсорной информации и т.д. В то же время, совершенно очевидно, что эффективность применения МАРС будет во многом определяться возможностями средств человеко-машинного интерфейса по оперативной постановке решаемых прикладных задач и контролю их выполнения оператором.

Настоящая статья продолжает цикл авторских публикаций, посвященных проблематике группового управления роботами, которые должны обеспечивать совместное решение поставленных прикладных задач, взаимодействуя друг с другом [1—5, 33, 34]. В ней предлагаются принципы построения человеко-машинного интерфейса для мультиагентных робототехнических систем, дается обоснование структуры и состава программно-алгоритмических средств для оперативного описания и постановки прикладных задач группе автономных роботов, приводятся результаты моделирования.

Развитие средств и методов человеко-машинного интерфейса для робототехнических систем специального назначения

Организация человеко-машинного интерфейса всегда относилась к числу основополагающих вопросов создания робототехнических систем и комп-

лексов. Эта проблематика, названная в зарубежной литературе *"Human-Robot Interaction"* [6—9], рассматривается в качестве самостоятельного раздела современной робототехники как сложного междисциплинарного научного направления.

Следует отметить, что по мере развития робототехники от жестко программируемых промышленных манипуляторов до автономных устройств, способных решать широкий спектр требуемых прикладных задач в условиях неопределенности, способы реализации функций человеко-машинного интерфейса также претерпевали существенные изменения. Результаты подобной эволюции привели к появлению устоявшейся классификации средств и методов обеспечения человеко-машинного взаимодействия в робототехнике [6—17] с выделением таких основных составляющих, как обучение показом (прямое обучение), удаленное (дистанционное), телеоператорное, супервизорное и интерактивное управление, программирование на специализированных языках высокого уровня (роботили задачно-ориентированных), визуальное программирование и виртуальное моделирование, естественно-языковой интерфейс (рис. 1). Так, средства и методы обучения показом (прямого обучения) предполагают, что совокупность необходимых дейст-



Рис. 1. Классификация средств и методов человеко-машинного интерфейса в составе робототехнических систем

¹ Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 16-29-04379.

вий и движений робота задается непосредственно в процессе их демонстрации или путем принудительного проведения системы вдоль множества требуемых состояний с запоминанием соответствующих параметров и их последующей отработкой.

Средства и методы удаленного и телеоператорного управления с использованием задающих устройств предполагают формирование значений параметров исполняемых действий и движений робота для обеспечения активного контроля процессов его функционирования в реальном масштабе времени (при наличии и отсутствии условий прямой видимости, соответственно).

В свою очередь, средства и методы супервизорного управления предполагают диспетчеризацию действий робота в согласии с командами оператора, указывающими тип выполняемой операции и/или значения ее параметров.

Интерактивное управление предполагает поддержание двусторонней диалоговой связи между роботом и оператором, когда после получения очередной команды система запрашивает недостающие параметры или выдает сообщения о результатах ее выполнения или другую служебную информацию.

Средства и методы программирования на специализированных языках высокого уровня предполагают необходимость описания процесса выполнения решаемой прикладной задачи в терминах действий робота либо технологических операций с указанием значений требуемых параметров, которое передается в систему управления для последующего исполнения. Сформированная таким образом робото- или задачно-ориентированная программа передается в систему управления для последующего исполнения.

Визуальное программирование и виртуальное моделирование ориентировано на активное использование средств машинной графики при описании и постановке прикладных задач для системы управления роботом. В этом случае собственно виртуальное моделирование выступает в качестве мощного и эффективного инструмента, который может использоваться не только для отладки создаваемой программы или проверки правильности постановки решаемой задачи, но и для контроля действий робота, воспроизводимых по телеметрическим данным в ходе их выполнения.

Естественно-языковой интерфейс обеспечивает поддержание вербального диалога между оператором и роботом для постановки решаемых задач, для ввода заданий и командных целеуказаний, для обучения системы управления, контроля ее состояния и результатов функционирования. В общем случае эффективность практического применения интеллектуальных систем такого рода определяется не только моделями естественного (или близкого к нему) языка с реализацией тех или иных подходов к фразеологическому анализу и синтезу, но и методами учета контекста, способами голосового или

текстового ввода/вывода информации, объемами словарного запаса и т.д. [15, 16].

В последнее время активное внимание научного сообщества привлечено к нейрокомпьютерным интерфейсам, исследование и разработка которых происходят на стыке нейробиологии и технологий управления и обработки информации в технических системах. Перспективы применения подобных интерфейсов охватывают не только задачи протезирования и реабилитации пациентов, но и задачи повышения удобства и эффективности взаимодействия оператора с робототехническими системами различных типов и назначения [17, 18].

Приведенная классификация является достаточно условной, поскольку средства человеко-машинного интерфейса в составе робототехнических систем на практике часто строятся с использованием комбинированных подходов, позволяющих оператору задавать требуемый тип действий или движений, указывать последовательность выполнения необходимых операций или описывать решаемую прикладную задачу. Особую актуальность вопросы человеко-машинного интерфейса стали приобретать в связи с появлением полуавтоматических и автономных роботов специального назначения (рис. 2) [19, 20], а также мультиагентных робототехнических систем, создаваемых на их основе и ориентированных на выполнение сложных миссий в автоматическом режиме в априорно неопределенных и экстремальных средах [19–24].

Использование таких устройств и систем в реальных приложениях предполагает необходимость постановки решаемых задач в условиях, которые являются крайне некомфортными для оператора ввиду острого дефицита времени, наличия стресса, негативности внешних воздействий различного характера, общей неблагоприятности обстановки.

Следует отметить, что совершенствование средств человеко-машинного интерфейса, ставящее своей целью снижение нагрузки на оператора, улучшение условий и повышение безопасности его работы, неразрывно связано с расширением функциональных возможностей бортовых систем управления роботами (рис. 3).



Рис. 2. Развитие роботов специального назначения, их систем управления и средств человеко-машинного интерфейса



Рис. 3. Функциональные возможности систем управления роботами с различными типами человеко-машинного интерфейса

Поиск перспективных путей обеспечения эффективного взаимодействия оператора с полуавтоматическими и автономными роботами обусловили создание целого ряда систем человеко-машинного интерфейса, нашедших свое практическое применение. Как показано на рис. 4 (см. вторую сторону обложки), в своем подавляющем большинстве аппаратно-программные средства человеко-машинного интерфейса для робототехнических систем специального назначения, принятых на вооружение армейских и силовых структур различных стран мира, позволяют совмещать возможности режимов удаленного, телеоператорного и супервизорного (а в некоторых случаях и автономного) управления с двусторонней передачей данных по беспроводным каналам связи.

При этом на экране пульта оператора отображается видеoinформация с бортовых телекамер робота, карта местности с указанием текущего местоположения, а также параметры его движения и текущего состояния отдельных подсистем (рис. 4, е, см. вторую сторону обложки) [25].

Управление движением робота осуществляется с помощью задающих органов (рис. 4, б, в, г, см. вторую сторону обложки) или при активизации экранных опций (рис. 4, д, е), позволяющих указать требуемую команду и параметры ее выполнения.

Соблюдение требований принятого в США, Израиле и ряде других стран стандарта JAUS [26, 27] позволяет обеспечить применение унифицированных пультов оператора для работы с различными типами робототехнических систем. Примером подобного рода служат аппаратно-программные средства человеко-машинного интерфейса *ROCU-7* (*Roboteam Ltd, Israel*) (рис. 4, б, см. вторую сторону обложки), предназначенные для управления разведывательным роботом *MTGR* (*Roboteam Ltd, Israel*) и БПЛА [28].

Перспективные образцы систем человеко-машинного интерфейса для роботов специального назначения обладают развитым набором дополнительных функций, связанных с использованием

ортофотоснимков [20] и виртуальных моделей для планирования автономных миссий и контроля их проведения [29–31].

Так, в частности, система человеко-машинного интерфейса *Mobius™ Command & Control Software* (*Autonomous Solutions, USA*) предусматривает широкие возможности для управления мобильными роботами с применением средств и методов трехмерного моделирования и виртуальной реальности. При этом использование унифицированного протокола SAE AS-4 обеспечивает поддержку телеоператорного, полуавтоматического и автономного режимов работы с роботами различных типов, соответствующих стандарту JAUS [29].

Принятая на вооружение армии США система моделирования виртуальной реальности *MetaVR* (*MetaVR, Inc., USA*) ориентирована на решение ряда задач, непосредственно связанных с проблемой организации человеко-машинного взаимодействия, включая подготовку кадрового состава для управления роботами военного назначения, а также отработку тактики и приемов их боевого применения (рис. 5, а, см. третью сторону обложки). Состав системы включает специализированные библиотеки динамических моделей роботов, боевой и гражданской техники, военного и гражданского персонала, зданий и сооружений, картографические и сценарные базы данных, средства виртуального моделирования, средства оперативной обработки ортофотоснимков с последующим построением моделей трехмерных сцен и т.д. Имеющийся набор программно-инструментальных средств позволяет обеспечить моделирование различных типов роботов и робототехнических группировок военного назначения в среде виртуальной реальности с имитацией конкретных боевых ситуаций, особенностей внешней обстановки, погодных и климатических условий, а также предполагаемых способов противодействия противника [32].

Близкой по своему назначению является система *Дин-Софт РобСим 5* (*МИРЭА, Дин-Софт, Россия*), функциональные возможности которой в том числе охватывают задачи отработки тактики и способов применения различных типов роботов и робототехнических группировок по результатам их моделирования в среде виртуальной реальности (рис. 5, б, см. третью сторону обложки) [34].

Обобщение результатов проведенного обзора наглядно свидетельствует о существовании разнообразных вариантов организации интерфейса оператора с роботами различных типов. Специфика каждого из подходов определяется особенностями и назначением робота, сложностью решаемых им задач, способами его применения, методами управления и множеством других факторов. Появление мультиагентных робототехнических систем обуславливает необходимость разработки концептуально новых средств и методов человеко-машинного взаимодействия, создаваемых на основе имеющихся заделов с учетом особенностей задач

группового управления и возможностей современных интеллектуальных технологий для их решения.

Принципы построения человеко-машинного интерфейса для мультиагентных робототехнических систем

Экстремальность условий и среды функционирования МАРС является одной из характерных особенностей подавляющего большинства областей их прикладного применения [1], включая оборонную сферу, сельское хозяйство, строительство, горное дело и т.д. При этом работа оператора сопряжена с дефицитом времени на постановку задачи, с наличием стресса и быстрой утомляемостью, с негативным влиянием климатических и погодных факторов.

Другие факторы, определяющие специфику практического применения МАРС, связаны с выбором их состава и структуры под решение конкретной прикладной задачи. Так, например, в зависимости от особенностей рассматриваемых приложений оперативное формирование мультиагентной системы может осуществляться в соответствии с централизованной, децентрализованной или смешанной структурой с объединением в составе группировки автономных роботов различных типов и назначения наземного, воздушного, а в некоторых случаях и надводного или подводного базирования.

В связи с этим организация человеко-машинного интерфейса должна предусматривать не только обеспечение возможностей полномасштабной информационной подготовки МАРС к выполнению требуемых задач и последующего контроля ее функционирования, но и интеллектуальную поддержку действий оператора.

Таким образом, в основу общей концепции построения универсального человеко-машинного интерфейса для управления МАРС могут быть положены четыре основных принципа:

- комплексная автоматизация процессов информационной подготовки МАРС к решению требуемых прикладных задач и контроля их выполнения;
- унификация программно-аппаратных средств;
- интеллектуализация процессов принятия решений на всех этапах информационной подготовки МАРС к решению требуемых прикладных задач и контроля их выполнения;
- модульность программно-алгоритмического обеспечения.

Реализация *первого принципа*, предполагающего комплексную автоматизацию процессов информационной подготовки МАРС к решению требуемых прикладных задач и контроля их выполнения, предусматривает разработку следующего набора программно-алгоритмических средств:

- оперативной постановки и описания условий выполнения прикладной задачи, решаемой с помощью МАРС;

- выбора структуры и состава, а также оценки численности МАРС, необходимых для выполнения поставленной задачи;
- анализа выполнимости поставленной задачи по результатам оперативного моделирования МАРС с учетом выбранных параметров комплектования;
- оперативного приема и передачи данных по каналам беспроводной сетевой связи между пультом оператора и МАРС;
- оперативного контроля выполнения поставленной задачи и текущего состояния отдельных роботов, действующих в составе мультиагентной системы.

В свою очередь, *принцип унификации* программно-аппаратных средств человеко-машинного интерфейса предполагает, что его функциональные возможности должны обеспечивать поддержку различных стратегий группового управления в МАРС с централизованной, децентрализованной и смешанной архитектурой.

Третий принцип обуславливает применение современных методов и технологий искусственного интеллекта для представления и обработки экспертных знаний по обоснованному выбору состава и структуры МАРС, а также стратегий и алгоритмов группового управления роботами в зависимости от особенностей задач их прикладного применения, описываемых оператором с использованием средств человеко-машинного интерфейса.

И, наконец, *последний принцип* предполагает, что унификация средств интеллектуального человеко-машинного интерфейса, используемого на всех этапах информационной подготовки МАРС к выполнению требуемых задач (с учетом многообразия допустимых постановок), может и должна обеспечиваться за счет модульного построения программно-алгоритмического обеспечения.

Сформированные принципы, по существу, регламентируют обобщенную структуру интеллектуального человеко-машинного интерфейса для МАРС различных типов и назначения. Как показано на рис. 6 (см. третью сторону обложки), ее состав включает следующие основные модули:

- описания и постановки прикладной задачи (выполнение которой должно осуществляться с помощью МАРС);
- описания условий выполнения поставленной задачи;
- выбора структуры, состава и оценки численности МАРС;
- виртуального моделирования МАРС и оценки реализуемости поставленной задачи с передачей исходных данных на выполнение;
- контроля выполнения поставленной задачи в режиме моделирования МАРС на основе использования телеметрических данных о ее функционировании;
- контроля выполнения поставленной задачи с отображением на цифровой карте текущего положения роботов;

- контроля поэтапного выполнения поставленной задачи с отображением завершения отдельных операций в рамках установленного сценария;
- контроля состояния отдельных роботов, функционирующих в составе МАРС.

Наличие фундаментальных и прикладных заделов по ключевым аспектам рассмотренной концепции обуславливает реализуемость интеллектуального человеко-машинного интерфейса для автономных роботов и мультиагентных робототехнических систем.

Программно-алгоритмические средства человеко-машинного интерфейса для оперативного описания и постановки прикладных задач группе автономных роботов

Важнейшая особенность разработки человеко-машинного интерфейса для управления МАРС связана с обеспечением адекватности инструментальных средств оперативного описания и постановки прикладных задач моделям и алгоритмам планирования действий и распределения заданий.

Планирование целесообразных действий МАРС для целого ряда приложений осуществляется на основе анализа сценария поэтапной реализации решаемой прикладной задачи. Соответствующая сценарная модель строится в виде сети типовых конечных автоматов, структура взаимосвязей и состояние которых отражают логику следования и стадию выполнения необходимых технологических операций. При этом выявление доступных для исполнения операций осуществляется по мере очередности завершения предыдущих (рис. 7), обеспечивая возможность формирования заданий для интеллектуальных автономных роботов, действующих в составе мультиагентной системы [3, 4, 34].

Удобной формой представления такого рода сценарных моделей являются графы, узлы которых ставятся в соответствие отдельным операциям или

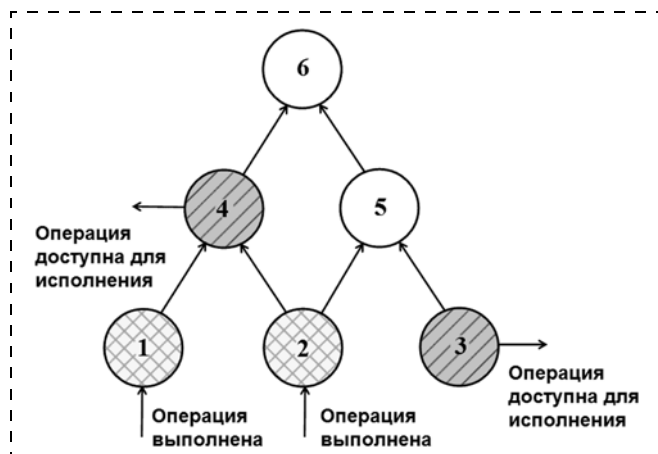


Рис. 7. Выявление доступных для исполнения операций по мере очередности завершения предыдущих на основе контроля за выполнением поставленной прикладной задачи по установленному сценарию

этапам, а дуги определяют требуемый порядок их следования.

В связи с этим функциональные возможности человеко-машинного интерфейса по обеспечению ввода всей совокупности исходных данных для постановки прикладной задачи группе автономных роботов (а также последующего контроля за ходом и результатами ее решения) должны предусматривать создание сценарных графов с указанием параметров выполнения необходимых "технологических" операций:

$$G = \langle (V, D), U \rangle, \quad (1)$$

где $V = \{v_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ — множество вершин, соответствующих тем "технологическим" операциям или этапам, выполнение которых обеспечивает решение требуемой прикладной задачи;

$D = \{t_i, p_i, s_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ — множество комплектов данных, ассоциируемых с вершинами графа и характеризующих имена, наборы параметров и статус выполнения соответствующих "технологических" операций или подзадач;

$U = \{u_j / j = 1, 2, \dots, m\}$ — множество дуг связей между вершинами, регламентирующих порядок выполнения соответствующих "технологических" операций.

В состав комплекта данных, ассоциируемых с каждой из вершин сценарного графа (1), включается показатель статуса, выступающего в роли индикатора текущего состояния технологической операции:

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{если операция не выполнена;} \\ 0,5, & \text{если операция передана на выполнение;} \\ 1, & \text{если операция выполнена.} \end{cases} \quad (2)$$

В общем случае изменение статуса технологических операций (2) осуществляется на основе интерпретации данных, сообщаемых автономными агентами по мере их проведения. Полученные значения показателя статуса позволяют обеспечить обновление текущего состояния сценарной модели, используемой для планирования заданий по выполнению поставленной прикладной задачи. В то же время маркировка соответствующих узлов сценарного графа с учетом показателей статуса обуславливает возможность графического отображения хода и результатов реализации формируемых планов на мониторе оператора.

В свою очередь, такой элемент комплекта данных, как имя (или идентификатор типа) операции, не только определяет команду на ее выполнение, но и может быть использован как условие по выбору соответствующего робота на этапе формирования состава МАРС:

$$t_i \in T^R = \{t_k^R / k = 1, 2, \dots, l\},$$

где $T^R = \bigcup_p T^{R_p}$, $p = 1, 2, \dots, q$, $T^{R_p} = \{t_y^{R_p} / y = 1, 2, \dots, v\}$ — множество имен технологических операций, потенциально выполняемых роботом p -го типа и определяющих его функциональные возможности.

Автоматизация процесса построения сценарного графа с возможностью указания параметров выполнения отдельных операций осуществляется с помощью средств графического и текстового редактирования, включаемых в состав человеко-машинного интерфейса для реализации режима оперативной постановки прикладной задачи группе роботов. При этом интерактивный ввод исходной информации сопровождается заполнением априорно зарезервированного массива памяти в соответствии с определенной структурой представления данных.

Такая структура, вариант которой приведен на рис. 8, должна однозначно отражать особенности поставленной прикладной задачи, выступая в качестве конструктивной основы для формирования ее сценарной модели.

Таким образом, сценарная модель прикладной задачи, создаваемая автоматически по исходным описаниям оператора, представляет собой сеть типовых конечных автоматов, логика построения и функционирования которой позволяет обеспечить не только оперативный контроль и планирование хода и порядка проведения необходимых технологических операций, но и решение вспомогательных вопросов по обоснованию численности требуемых исполнителей [3–5, 34].

Апробация предложенного подхода к построению интеллектуального человеко-машинного интерфейса в составе МАРС потребовала разработки соответствующего комплекса программно-инструментальных средств, функциональная структура которого включает следующие основные модули (рис. 9):

- ввода/вывода графической, текстовой и других видов информации с/на консоли оператора;
- формирования сценарной модели прикладной задачи;
- формирования базы данных по моделям автономных роботов;
- выбора и оценки численности автономных агентов (включаемых в состав МАРС для совместного выполнения поставленной прикладной задачи);
- планирования действий и распределения заданий (в составе МАРС);
- моделирования МАРС;
- формирования картографической базы данных;
- интерпретации данных о состоянии автономных агентов;
- подготовки и обработки сообщений, передаваемых или поступающих по каналам беспроводной сетевой связи с автономными роботами при выполнении поставленной прикладной задачи в составе МАРС;

- супервизора, обеспечивающего логический контроль и диспетчеризацию работы модулей в составе системы человеко-машинного интерфейса.
- Следует отметить, что выбор и оценка численности автономных роботов в составе мультиагентной группировки, планирование целесообразных действий и распределение заданий по их выполнению осуществляются на основе соответствующих алгоритмов анализа сценарной модели поставленной прикладной задачи [3–5, 34].

Подсистема моделирования МАРС может формироваться на основе использования различных

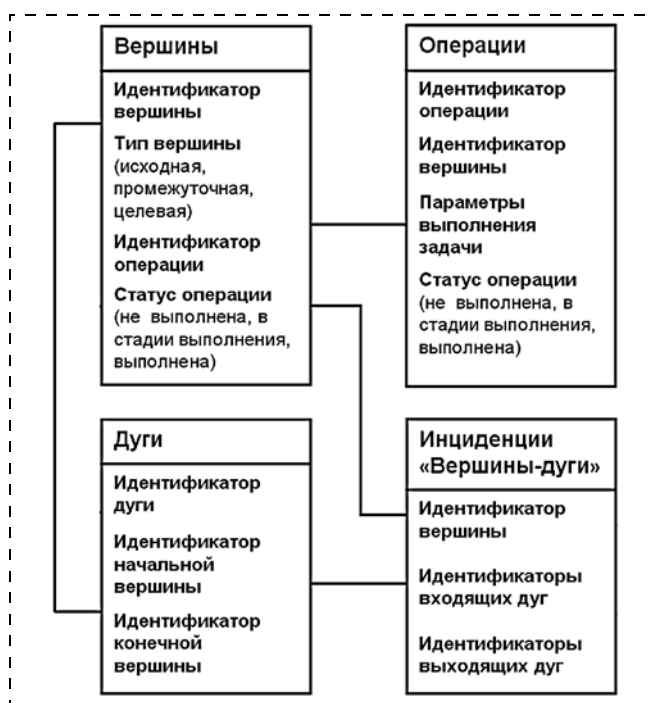


Рис. 8. Структура представления данных, регламентирующей постановку прикладной задачи в виде сценарного графа



Рис. 9. Функциональная структура программно-алгоритмического обеспечения человеко-машинного интерфейса в составе МАРС

средств разработки приложений в области трехмерной графики и виртуальной реальности, включая такие системы, как *RobSim 5* [35, 36] или открытые программные библиотеки (и их расширения) типа *OpenGL* [38], *OGRE* [39] и т.д. При этом возможности подсистемы моделирования МАРС используются в двух целях:

- для оперативной оценки реализуемости поставленной прикладной задачи с учетом выбранных в качестве исполнителей автономных агентов, а также особенностей среды и рельефа местности, отображаемых в среде виртуальной реальности в соответствии с указанным фрагментом цифровой карты;
- для контроля действий автономных агентов в ходе их совместного функционирования при выполнении поставленной задачи.

В последнем случае моделирование МАРС осуществляется на основе телеметрических данных, поступающих по каналам беспроводной сетевой связи и характеризующих текущее состояние агентов.

Подсистема подготовки и обработки сообщений обеспечивает преобразование форматов данных, передаваемых и принимаемых по каналам беспроводной сетевой связи с МАРС.

Подсистема интерпретации данных о состоянии агентов обеспечивает обобщение и анализ посту-

пающей информации в целях формирования объективной картины о функционировании МАРС, текущих результатах выполнения поставленной прикладной задачи с учетом изменения статуса технологических операций в ходе их проведения.

Опытная версия человеко-машинного интерфейса для постановки прикладных задач и контроля их выполнения группой автономных роботов прошла тестовые испытания (рис. 10), подтвердив свою работоспособность и эффективность на примерах виртуального и натурного моделирования МАРС различных типов и назначения [36, 37].

Заключение

Активизация поисковых исследований, проводимых в России на протяжении ряда последних лет по тематике мультиагентных робототехнических систем по инициативе отдельных научных коллективов и организаций, позволила накопить определенный фундаментальный и прикладной задел, необходимый для дальнейшего развития данной предметной области. Соответствующие результаты, накопленные в МИРЭА и других научных центрах страны, связаны с разработкой методов и алгоритмов группового управления роботами, планирования их целесообразного поведения, оперативного формирования и распределения заданий, кооперативного картографирования, а также организации человеко-машинного интерфейса. Полученные решения и приобретенный опыт представляют собой объективные предпосылки для создания макетных и опытных образцов мультиагентных робототехнических систем различных типов и назначения.

Список литературы

1. Макаров И. М., Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П., Крючков Е. Н., Кучерский Р. В., Диане С. А. Мультиагентные робототехнические системы: примеры и перспективы применения // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 2. С. 22–32.
2. Макаров И. М., Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П. Принципы построения и проблемы разработки мультиагентных робототехнических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 3. С. 11–16.
3. Макаров И. М., Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П., Крючков Е. Н., Кучерский Р. В., Худак Ю. И. Модели и алгоритмы планирования действий и распределения заданий в мультиагентных робототехнических системах // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 5. С. 44–50.
4. Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П., Диане С. А. Способы представления знаний и особенности функционирования мультиагентных робототехнических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. № 1. 2014. С. 36–39.
5. Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П., Диане С. А., Трипольский П. Э., Карпов С. А. Модели и алгоритмы оценки численности состава мультиагентных робототехнических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 3.
6. Human Robot Interaction. Edited by N. Sarkar, I-Tech Education and Publishing, 2007. 522 p.
7. Advances in Human-Robot Interaction. Edited by V. A. Kulyukin. Croatia. In-Tech, 2009. 342 p.
8. Human-Robot Interaction. Edited by D. Chugo. Croatia. In-Tech, 2010. 288 p.

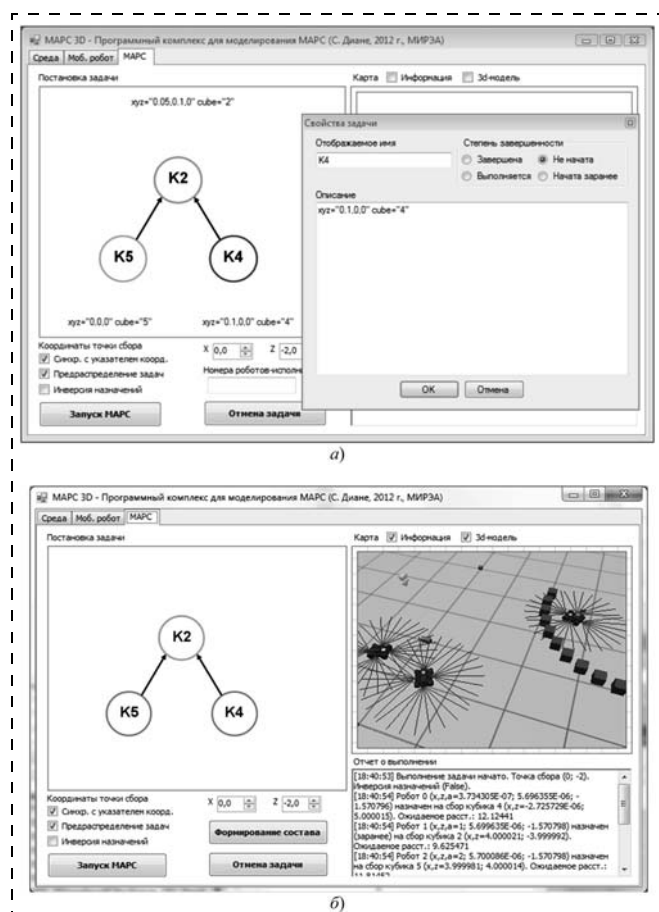


Рис. 10. Использование средств человеко-машинного интерфейса для постановки прикладной задачи группе роботов (а) и контроля их функционирования в ходе ее выполнения (б)

9. **Mobile Robots — Control Architectures, Bio-Interfacing, Navigation, Multi Robot Motion Planning and Operator Training.** Edited by J. Będkowski. Croatia. In-Tech, 2011. 390 p.
10. **Кулаков Ф. М.** Супервизорное управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1980.
11. **Lozano-Perez T.** Robot programming // Proc. of IEEE. 1983. Vol. 71, no. 7. P. 821–841.
12. **Назарова А. В.** Языки программирования роботов: Обзор. М.: МЦНТИ, 1988.
13. **Справочник** по промышленной робототехнике. Кн. 2 / Под ред. Ш. М. Нофа. М.: Машиностроение, 1990.
14. **Манько С. В., Штыков А. В.** Автоматизация программирования роботов. М.: МИРЭА, 1997.
15. **Невзорова О. А.** Машинное обучение и задачи обработки естественного языка // Новости искусственного интеллекта. 1998. № 1.
16. **Макаров И. М., Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П.** Технологии обработки командной информации и управления поведением в интеллектуальных робототехнических системах // Информационные технологии. 2005. № 7.
17. **Владимирский Б. М., Кирой В. Н., Скоморохов А. А.** Пути создания интерфейса "мозг-компьютер" для людей // Известия ЮФУ. Технические науки. 2008. № 6 (83). С. 210–212.
18. **Hochberg L. R.** et al. Reach and grasp by people with tetraplegia using a neurally controlled robotic arm // Nature. 2012. 485 (7398). P. 372–375.
19. **Autonomous Vehicles in Support of Naval Operations** // Committee on Autonomous Vehicles in Support of Naval Operations, National Research Council / USA, National Academies Press, 2005.
20. **Technology Development for Army Unmanned Ground Vehicles** / Committee on Army Unmanned Ground Vehicle Technology, National Research Council / USA, National Academies Press, 2002.
21. **Multi Robot Systems, Recent Advances.** Edited by A. Lazinica. Croatia, I-Tech Education and Publishing, 2008. 318 p.
22. **Multiagent Systems.** Edited by S. Ahmed and M. N. Karsiti. Croatia, I-Tech, 2009. 425 p.
23. **Swarm Robotics, From Biology to Robotics.** Edited by E. M. Martin. InTech, 2010. 101 p.
24. **Multi-robot systems, trends and development.** Edited by T. Yasuda, InTech, 2011. 586 p.
25. **Drury J. L., Scholtz J., Kieras D.** The Potential for Modeling Human-Robot Interaction with GOMS / Human Robot Interaction. Edited by N. Sarkar, I-Tech Education and Publishing, 2007. P. 21–38.
26. **Бобровский С.** JAUS: стандарт на разработку военных и мирных роботов // PC Week / RE. 2004. № 38.
27. **Enterprise Structure: JAUS.** URL: <http://www.jointrobotics.com/enterprise02.php>
28. **ROCU-7 Ruggedized Operator's Control Unit.** URL: <http://www.robo-team.com/uploads/docs/ROCU-7.pdf>
29. **Mobius — Universal Control for Unmanned Systems.** URL: <http://autonomoussolutions.com/brochure/mobius.pdf>
30. **Mobi — portable handheld Operator Control Unit.** URL: <http://autonomoussolutions.com/brochure/mobi.pdf>
31. **Autonomous Solutions, Inc. Overview.** URL: <http://oilandgas-innovation.com/wp-content/uploads/2013/05/Autonomous-Solutions-Inc.pdf>
32. **Geospecific simulation with game quality graphics.** URL: <http://www.metavr.com/>
33. **Манько С. В., Лохин В. М., Романов М. П.** Концепция построения мультиагентных робототехнических систем // ВЕСТНИК МГТУ МИРЭА. 2015. № 3. Т. 1.
34. **Манько С. В., Диане С. А. К., Лохин В. М., Романов М. П.** Модели и программно-алгоритмическое обеспечение мультиагентных робототехнических систем // ВЕСТНИК МГТУ МИРЭА. 2015. № 3. Т. 1.
35. **Евстигнеев Д. В., Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П.** Комплекс программно-инструментальных средств для проектирования, моделирования и отработки тактики применения автономных роботов и мультиагентных робототехнических систем // ВЕСТНИК МГТУ МИРЭА. 2015. № 3. Т. 1.
36. **Программный комплекс для моделирования роботов и робототехнических систем Дин-Софт РобСим 5.** URL: <http://rob-sim.dynsoft.ru/working.php>
37. **Лохин В. М., Манько С. В., Романов М. П.** Универсальный полигон для отработки технологий интеллектуального и сетевидного управления автономными роботами и мультиагентными робототехническими системами // ВЕСТНИК МГТУ МИРЭА. № 3. 2015. Т. 1.
38. **Графическая библиотека OpenGL.** URL: <http://www.rsdn.ru/article/opengl/opengl2.xml>
39. **OGRE.** URL: <http://ru.wikipedia.org/wiki/OGRE>

Man-Machine Interface for Autonomous Robots and Multi-Agent Robotic Systems

V. M. Lokhin, cpd@mirea.ru, **S. V. Manko**, cpd@mirea.ru, **R. I. Alexandrova**, cpd@mirea.ru, **M. P. Romanov**, cpd@mirea.ru, **S. A. K. Diane**, sekoudiane1990@gmail.com✉, Moscow Technical University (MIREA), Moscow, 119454, Russian Federation

Corresponding author: **Diane Sekou A. K.**, PhD, Assistance, MIREA, Moscow, 119 454, Russian Federation, e-mail: sekoudiane1990@gmail.com

Received on May 25, 2016

Accepted on June 01, 2016

The article provides an overview of tools and methods of man-machine interface for special types of robotic systems. It continues the series of previous publications on multi-robot systems that can provide a cooperative solution to the specified task. Although most multi-robot systems research is centered around the problems of group control, it is obvious that the effectiveness of such systems will be determined by the capabilities of man-machine interface designed to interact with them. In this article we show the evolution of man-machine interfaces starting from manually controlled robots and finishing with autonomous robots. We also discuss a variety of approaches to implementation of such interfaces. From the analysis of modern interfaces functional capabilities we offer the construction principles of man-machine interface for multi-agent robotic systems. These principles are based on complex automatization of information preprocessing for a multi-robot systems at every stage of their operation; intellectualization of decision-making process; software modularity and unification. The structure and composition of software and algorithmic tools for multi-robot group's task description are justified including the systems responsible for information input/output; task scenario model formation; agents number estimation; task planning; multi-robot system modelling; information gathering and interpretation. Supervising software is presented that controls the coordinated functioning of man-machine interface subsystems. The results of the simulation are given including the task scenario formation and its execution monitoring.

Keywords: autonomous robot, multi-agent robotic system, man-machine interface

Acknowledgements: Work is executed under the project number 16-29-04379 RFBR.

For citation:

Lokhin V. M., Manko S. V., Alexandrova R. I., Romanov M. P., Diane S. A. K. Man-Machine Interface for Autonomous Robots and Multi-Agent Robotic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 606–614.

DOI: 10.17587/mau.17.606-614

References

1. **Makarov I. M., Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P., Kriuchenkov E. N., Kucherskiy R. V., Diane S. A.** Multiagentnye robototekhnicheskie sistemy: primery i perspektivy primeneniya, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2012, no. 2, pp. 22–32 (in Russian).
2. **Makarov I. M., Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P.** Printci py postroeniya i problemy razrabotki multiagentnykh robototekhnicheskikh system, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2012, no. 3, pp. 11–16 (in Russian).
3. **Makarov I. M., Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P., Kriuchenkov E. N., Kucherskiy R. V., Hudak Iu. I.** Modeli i algoritmy planirovaniya deistvii i raspredeleniya zadaniy v multiagentnykh robototekhnicheskikh sistemakh, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2012, no. 5, pp. 44–50 (in Russian).
4. **Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P., Diane S. A.** Sposoby predstavleniya znaniy i osobennosti funkcionirovaniya multiagentnykh robototekhnicheskikh system, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 1, pp. 36–39 (in Russian).
5. **Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P., Diane S. A., Tripolskiy P. E., Karpov S. A.** Modeli i algoritmy ocenki chislennosti sostava multiagentnykh robototekhnicheskikh system, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 3 (in Russian).
6. **Sarkar N.** ed. Human Robot Interaction, I-Tech Education and Publishing, 2007, 522 p.
7. **Kulyukin V. A.** ed. Advances in Human-Robot Interaction, Croatia, In-Tech, 2009, 342 p.
8. **Chugo D.** ed. Human-Robot Interaction, Croatia. In-Tech, 2010, 288 p.
9. **Bedkowski J.** ed. Mobile Robots — Control Architectures, Bio-Interfacing, Navigation, Multi Robot Motion Planning and Operator Training, Croatia, In-Tech, 2011, 390 p.
10. **Kulakov F. M.** *Supervizornoe upravlenie manipulatsionnymi robotami*, Moscow, Nauka, 1980 (in Russian).
11. **Lozano-Perez T.** Robot programming, *Proc. of IEEE*, vol. 71 (no. 7), 1983, pp. 821–841.
12. **Nazarova A. V.** *Iazyki programmirovaniya robotov*, Obzor, Moscow, MCNTI, 1988 (in Russian).
13. **Nofa Sh. M.** ed. Spravochnik po promyshlennoi robototekhnike. Vol. 2, Moscow, Mashinostroenie, 1990.
14. **Manko S. V., Shtykov A. V.** *Avtomatizatsiya programmirovaniya robotov*, Moscow, MIREA, 1997 (in Russian).
15. **Nevzorova O. A.** Mashinnoe obucheniye i zadachi obrabotki estestvennogo iazyka, *Novosti Iskusstvennogo Intellekta*, 1998, no. 1 (in Russian).
16. **Makarov I. M., Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P.** Tekhnologii obrabotki komandnoi informatsii i upravleniya povedeniem v intellektualnykh robototekhnicheskikh sistemakh, *Informatsionnye Tekhnologii*, 2005, no. 7 (in Russian).
17. **Vladimirskiy B. M., Kiroi V. N., Skomorohov A. A.** Puti sozdaniya interfeisa "mozg-kompiuter" dlia liudei, *Izvestiya IUFU. Tekhnicheskie Nauki*, 2008, no. 6 (83), pp. 210–212.
18. **Hochberg L. R.** et al. Reach and grasp by people with tetraplegia using a neurally controlled robotic arm, *Nature*, 2012, 485 (7398), pp. 372–375.
19. **Autonomous Vehicles in Support of Naval Operations**, Committee on Autonomous Vehicles in Support of Naval Operations, National Research Council / USA, National Academies Press, 2005.
20. **Technology Development for Army Unmanned Ground Vehicles**, Committee on Army Unmanned Ground Vehicle Technology, National Research Council / USA, National Academies Press, 2002.
21. **Lazinica A.** ed. Multi Robot Systems, Recent Advances, Croatia, I-Tech Education and Publishing, 2008, 318 p.
22. **Ahmed S., Karsiti M. N.** ed. Multiagent Systems. Croatia, I-Tech, 2009, 425 p.
23. **Martin E. M.** ed. Swarm Robotics, From Biology to Robotics. InTech, 2010, 101 p.
24. **Yasuda T.** ed. Multi-robot systems, trends and development. InTech, 2011, 586 p.
25. **Drury J. L., Scholtz J., Kieras D.** The Potential for Modeling Human-Robot Interaction with GOMS, *Human Robot Interaction*. Edited by N. Sarkar, I-Tech Education and Publishing, 2007, p. 21–38.
26. **Bobrovskiy C.** JAUS: standart na razrabotku voennykh i mirnykh robotov, *PC Week / RE*, 2004, no. 38.
27. **Enterprise Structure: JAUS**, available at: <http://www.jointrobotics.com/enterprise02.php>
28. **ROCU-7 Ruggedized Operator's Control Unit**, available at: <http://www.robo-team.com/uploads/docs/ROCU-7.pdf>
29. **Mobius — Universal Control for Unmanned Systems**, available at: <http://autonomoussolutions.com/brochure/mobius.pdf>
30. **Mobi — portable handheld Operator Control Unit**, available at: <http://autonomoussolutions.com/brochure/mobi.pdf>
31. **Autonomous Solutions, Inc.** Overview, available at: <http://oilandgasinnovation.com/wp-content/uploads/2013/05/Autonomous-Solutions-Inc.pdf>
32. **Geospecific simulation with game quality graphics**, available at: <http://www.metavr.com/>
33. **Manko S. V., Lokhin V. M., Romanov M. P.** Kontseptciya postroeniya multiagentnykh robototekhnicheskikh system, *Vestnik MGTU MIREA*, 2015, vol. 1, no. 3.
34. **Manko S. V., Diane S. A. K., Lokhin V. M., Romanov M. P.** Modeli i programmno-algoritmicheskoe obespecheniye multiagentnykh robototekhnicheskikh system, *Vestnik MGTU MIREA*, 2015, vol. 1, no. 3.
35. **Evstigneev D. V., Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P.** Kompleks programmno-instrumentalnykh sredstv dlia proektirovaniya, modelirovaniya i otrabotki taktiki primeneniya avtonomnykh robotov i multiagentnykh robototekhnicheskikh system, *Vestnik MGTU MIREA*, 2015, vol. 1, no. 3.
36. **Programmnyi kompleks dlia modelirovaniya robotov i robototekhnicheskikh sistem** Din-Soft RobSim 5, available at: <http://rob-sim.dynsoft.ru/working.php>
37. **Lokhin V. M., Manko S. V., Romanov M. P.** Universalnyi poligon dlia otrabotki tekhnologii intellektualnogo i setecentricheskogo upravleniya avtonomnymi robotami i multiagentnymi robototekhnicheskimi sistemami, *Vestnik MGTU MIREA*, 2015, vol. 1, no. 3.
38. **Graficheskaya biblioteka OpenGL**, available at: <http://www.rsdn.ru/article/opengl/oglut2.xml>
39. **OGRE**, available at: <http://ru.wikipedia.org/wiki/OGRE>

А. А. Жуков¹, д-р техн. наук, зав. кафедрой, and_zhukov@mail.ru,
А. А. Аджибеков³, аспирант, вед. инженер-исследователь, **М. А. Кудров**², канд. техн. наук, и. о. декана,
К. А. Зудов², науч. сотр., **А. В. Гелиев**², канд. физ.-мат. наук, ассистент, alexander.geliev@mail.ru,
В. Г. Веселаго², д-р физ.-мат. наук, проф.,

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва,

²Московский физико-технический институт (государственный университет),

г. Долгопрудный Московской обл.,

³АО "Российские космические системы", г. Москва

Метаматериалы в бортовых беспроводных системах приема и преобразования СВЧ энергии мобильных автономных устройств

Проведен анализ структурной схемы бортовой аппаратуры приема и преобразования СВЧ энергии мобильных автономных устройств. Показано, что элементами, в составе которых могут применяться метаматериалы в бортовой аппаратуре, являются антенна (ректенна) и фильтр высоких гармоник. Показана целесообразность применения метаматериалов в составе ректенн: число каналов передачи энергии сокращается до двух раз, что приводит к пропорциональному уменьшению массы приемной части. Проанализирована возможность применения в качестве фильтра высоких гармоник фильтров на основе интегрированных в подложку волноводов с метаматериалами, основным преимуществом которых являются небольшие размеры, стоимость, простота в изготовлении и возможность интеграции с другими элементами цепи, выполненными по планарной технологии. Уменьшение массогабаритных характеристик бортовой аппаратуры приема и преобразования СВЧ энергии связано с применением микроэлектронных, микромашинных технологий и технологией печатных плат, а также с реализацией излучателей ректенн, согласующих цепей и фильтров высоких гармоник в едином конструктивно-технологическом варианте.

Ключевые слова: метаматериал, ректенна, интегрированный в подложку волновод (SIW), мобильные автономные устройства, микроробот, беспилотный летательный аппарат, пико- и наноспутник

Введение

В настоящее время значительный прогресс достигнут в области разработки многочисленных автономных мобильных наземных, водных, воздушных и космических устройств — роботов, микророботов, беспилотных летательных и плавающих аппаратов, пико- и наноспутников, выполняющих разнообразные задачи без присутствия человека и управляемых им дистанционно [1, 2]. Одной из труднорешаемых проблем остается энерговооруженность таких мобильных автономных устройств, определяющая продолжительность функционирования служебных и функциональных бортовых информационных и исполнительных систем. Повышение энерговооруженности осуществляют двумя путями: с одной стороны, разрабатывают новые энергоемкие источники энергии, с другой — совершенствуют бортовые системы приема и преобразования энергии. Реализация последних возможна как в проводном, так и в беспроводном исполнении. Беспроводную передачу энергии реализуют на нескольких принципах — лазерным излучением, электромагнитной индукцией, СВЧ излучением. В настоящей работе рассмотрены пути совершенствования бортовых беспроводных систем приема и преобразования СВЧ энергии мобильных авто-

номных устройств за счет применения метаматериалов. Как известно, метаматериал — композитный диэлектрический материал, включающий регулярную периодическую структуру 2D или 3D, например кольцевых разрезных резонаторов (КРР), проявляющий электромагнитные свойства, отличные от изотропного материала той же природы (отрицательная относительная диэлектрическая и/или магнитная проницаемости) [17]. При этом геометрические размеры, а значит, и массогабаритные характеристики функциональных элементов, выполненных на основе метаматериала, меньше по сравнению с функциональными аналогами, выполненными по традиционным технологиям. В связи с этим применение новых технологий с использованием метаматериалов в бортовых беспроводных системах приема и преобразования СВЧ энергии мобильных автономных устройств позволяет надеяться на снижение массогабаритных характеристик без ухудшения их функциональных характеристик.

Целью работы является оценка возможностей совершенствования бортовых беспроводных систем приема и преобразования СВЧ энергии мобильных автономных устройств за счет применения метаматериалов.

Анализ структурной схемы бортовой аппаратуры приема и преобразования СВЧ энергии мобильных автономных устройств

Один из возможных вариантов структурной схемы бортовой аппаратуры приема и преобразования энергии представлен на рис. 1 [3, 6]. Бортовая аппаратура приема и преобразования энергии включает в себя приемные излучатели (И), согласующие цепи (СЦ), вентиляльные блоки (ВБ), фильтры гармоник (ФГ), сглаживающие фильтры (СФ) и сумматор (Σ). Приемные излучатели обычно представляют собой слабонаправленные антенны в полосковом исполнении и обеспечивают прием падающего СВЧ излучения. Для согласования выходных сопротивлений излучателей и входных сопротивлений последующих узлов используются согласующие цепи. СВЧ колебания с выходов согласующих цепей через фильтры гармоник подаются на вентиляльные блоки. Каждый вентиляльный блок, будучи нелинейным устройством, при попадании на его вход гармонических колебаний порождает высшие гармоники с частотами, кратными частоте поступающих колебаний. Для предотвращения переизлучения через излучатели отраженных от вентиляльных блоков волн, порождаемых высшими гармониками, в свободное пространство используются фильтры гармоник, представляющие собой полосовые СВЧ фильтры с полосой пропускания, обеспечивающей свободное прохождение СВЧ колебаний, подаваемых на вход вентиляльного блока, и препятствующей прохождению в сторону излучателей паразитных волн с кратными частотами. СВЧ колебания на входе вентиляльных блоков преобразуются в пульсирующее знакопостоянное напряжение. После сглаживания пульсаций в сглаживающих фильтрах токи на выходе каждого приемного канала суммируются в сумматоре и подаются в бортовую цепь питания.

Как видно из структурной схемы аппаратуры приема и преобразования энергии, линейными резонансными элементами, работающими на высокой частоте, в составе которых могут применяться метаматериалы, являются излучатели и фильтры гармоник. Как уже было упомянуто выше, метаматериал — композиционный материал, свойства которого обусловлены не столько свойствами со-

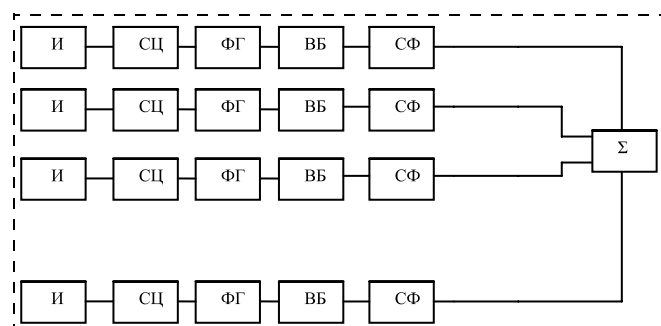


Рис. 1. Структурная схема аппаратуры приема и преобразования энергии [3, 6]

ставляющих его элементов, сколько искусственно созданной периодической структурой из макроскопических элементов, обладающих произвольными размерами и формой [17].

Ниже представлен анализ возможностей и эффективность применения метаматериалов для этих конструктивных элементов.

Антенна аппаратуры приема и преобразования СВЧ энергии

При дистанционной передаче энергии мощность сигнала, принятая приемной антенной, в отсутствие потерь определяется соотношением

$$P_{\text{пр}} = \frac{P_{\text{пер}} G_{\text{пер}} S_{\text{пр}}}{4\pi r^2}, \quad (1)$$

где $P_{\text{пер}}$ — мощность передатчика; $G_{\text{пер}}$ — коэффициент усиления передающей антенны; $S_{\text{пр}}$ — эффективная площадь приемной антенны; r — расстояние между антеннами [4]. При этом длина волны, коэффициент усиления и эффективная площадь антенны связаны следующим соотношением:

$$G = \frac{4\pi S}{\lambda^2}, \quad (2)$$

где λ — длина волны; S — эффективная площадь антенны [4].

Таким образом, для увеличения мощности, передаваемой дистанционно, необходимо повышать мощность передатчика, эффективную площадь приемной антенны (за счет увеличения габаритных размеров) и коэффициент усиления передающей антенны (за счет увеличения рабочей частоты и габаритных размеров). Рост частоты и мощности передатчика помимо увеличения передаваемой мощности ведет к увеличению его размеров и усложнению конструкции. С увеличением частоты растут поглощение радиоволн в атмосфере и дополнительное рассеивание в атмосферных осадках. В сильный дождь потери на частоте 30 ГГц на расстоянии 100 м оставляют около 0,5 дБ (11 %) [5]. Таким образом, рационально использовать для передачи энергии коротковолновую часть сантиметрового диапазона, т.е. частоту приблизительно 20 ГГц. На рис. 2 показана зависимость принимаемой мощности от отношения эффективной площади приемной антенны к длине волны, рассчитанной с помощью соотношения (1) на частоте 20 ГГц при расстоянии между приемной и передающей антеннами 100 м, коэффициенте усиления передающей антенны 50 дБ и мощности передатчика 1000 Вт. Как видно из рис. 2, для того чтобы передать при таких условиях приемнику мощность 20...200 Вт, эффективная площадь приемной антенны должна составлять 113...1117 квадратных длин волн. Эта площадь соответствует антенному полотну с поперечными размерами в десятки длин волн. В СВЧ энергетике для получения полотен таких размеров обычно ис-

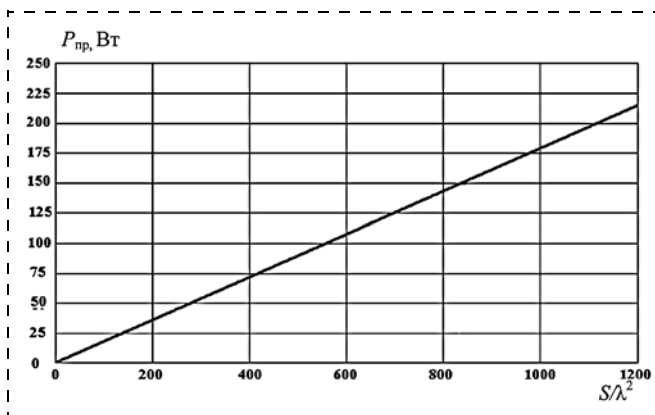


Рис. 2. Зависимость принимаемой мощности от отношения эффективной площади приемной антенны к квадрату длины волны

пользуются решетки ректенн (рис. 3) — массивы слабонаправленных излучателей, нагруженных на выпрямители, т.е. ректенна представляет собой антенну, конструктивно совмещенную с выпрямительным блоком [6].

Каждая ректенна принимает энергию независимо, при этом суммирование энергии после приема осуществляется по постоянному току после выпрямления. Помимо увеличения принимаемой мощности такая схема также обеспечивает слабую зависимость эффективности приемника от угла падающего излучения.

Для снижения массы бортовой аппаратуры приема и преобразования энергии возможно применение метаматериалов в приемной антенне. Как показано в работах [7, 8], размещение метаматериалов над антенной позволяет увеличить ее направленность. На рис. 4 показаны излучатели в виде полосковой антенны и полосковой антенны с расположенным над ней метаматериалом [8].

Поле антенны, представленной на рис. 3, должно удовлетворять системе уравнений Максвелла (3)–(6):

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}; \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t}; \quad (4)$$

$$\operatorname{div} D = 0; \quad (5)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (6)$$

где E — вектор напряженности электрического поля; H — вектор напряженности магнитного поля; B — вектор магнитной индукции; D — вектор электрической индукции.

Источником возбуждения является коаксиальная линия с волновым сопротивлением 50 Ом. Кроме того, искомые поля должны удовлетворять граничным условиям: на поверхности диэлектриков тангенциальные составляющие векторов E и H должны быть непрерывны, на поверхности металлов должно выполняться условие равенства тангенциальных составляющих вектора E нулю, условие конечности энергии в области острых кромок, а также условие излучения

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial u}{\partial R} + iku \right) = 0, \quad (7)$$

где $u = E$ или $u = H$; i — мнимая единица; k — волновое число; R — расстояние от антенны до точки наблюдения.

Решение поставленной задачи выполняли методом конечных разностей в частотной области в среде CST MWS [18]. Получены диаграммы направленности, отображающие нормированную мощность:

$$F_{\Pi}(\theta) = \frac{F(\theta)}{F_{\max}},$$

где $F(\theta)$ — зависимость мощности излучения от углового направления $(\theta, ^\circ)$; $F_{\max}$ — максимум излучаемой мощности.

Диаграммы направленности одиночной полосковой антенны и полосковой антенны под метаматериалом представлены на рис. 5 и 6 соответственно.

При этом происходит сужение главного максимума диаграммы направленности в 2,2 раза и увеличение коэффициента усиления на 3 дБ (при этом площадь эквивалентной апертуры антенны увеличивается в два раза). Асимметрия диаграммы направленности на рис. 6 объясняется влиянием асимметрии запитки полосковой антенны. При размещении таких антенн в составе полотна возможно увеличение шага решетки по аналогии с антенными решетками направленных излучателей, применяемых в радиосвязи. Применение полотна ректенн с метаматериалами не позволяет добиться сокращения линейных размеров полотна при со-

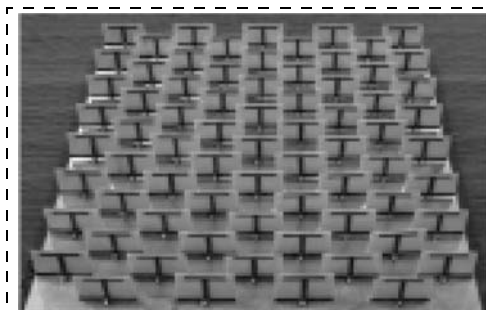


Рис. 3. Приемная антенна в виде полотна ректенн [6]

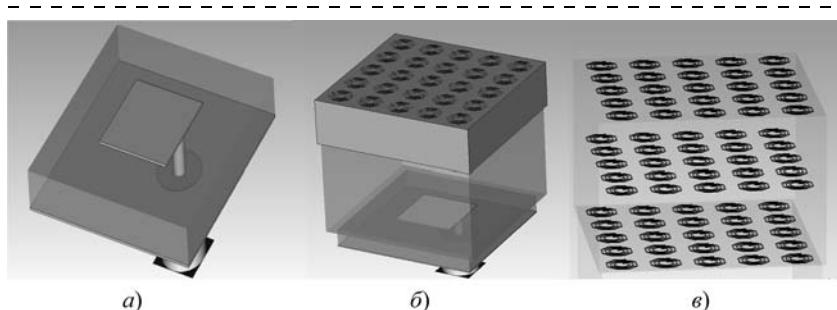


Рис. 4. Полосковая антенна (а), полосковая антенна с метаматериалом (б), метаматериал на основе КРР (в)

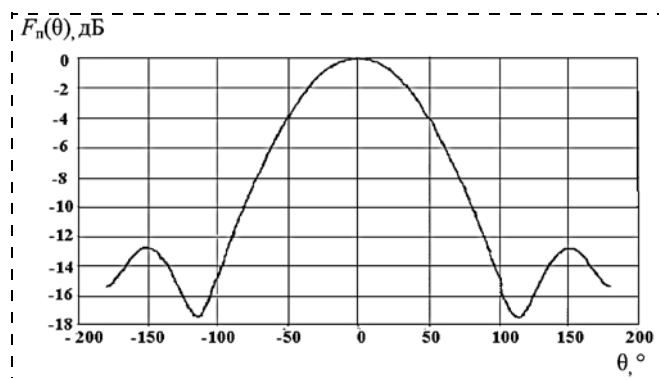


Рис. 5. Расчетная диаграмма направленности одиночной полосковой антенны [6]

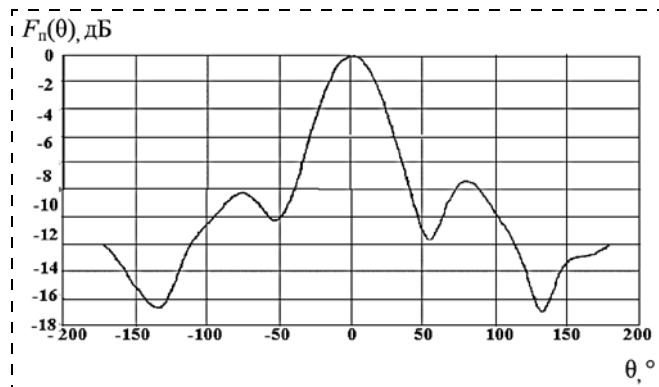


Рис. 6. Расчетная диаграмма направленности полосковой антенны под метаматериалом [7]

хранении принимаемой мощности, однако общее число ректенн и, соответственно, приемных каналов уменьшится приблизительно до двух раз. Таким образом, при применении метаматериалов в составе ректенн возможно уменьшение числа каналов до двух раз, что приводит к пропорциональному уменьшению массы приемной части.

Фильтр высоких гармоник

В последние годы активно развивается технология интегрированных в подложку волноводов Substrate Integrated Waveguide (SIW), основанная на приемах планарной и микромашинной технологий, технологий многослойных печатных плат и функциональных СВЧ устройств. Исследованиями и разработками фильтров занимаются в университетах Китая (Sichuan University), Ирана (Iran University of Science and Technology), Канады (University of Victoria), Индии (Arni University), Алжира (Université de Tlemcen), США (Texas A & M University), агрессивную патентную политику проводит Sony Corp. В России систематическими разработками и исследованиями в области фильтров занимается группа В. В. Землякова (ЮФУ) [9]. К настоящему времени SIW-компоненты применяют в различных СВЧ цепях [10]. Успешно реализованы множество пассивных СВЧ компонентов и устройств, таких как антенны [11], направленные ответвители [12], диплексеры [13], фазовращатели [14].

Конструктивно интегрированный в подложку волновод представляет собой металлизированную с обеих сторон диэлектрическую подложку, со сформированными в ней расположенными в заданном порядке металлическими цилиндрами заданного диаметра с низким электрическим сопротивлением, при этом на одной из поверхностей подложки выполнен топологический рисунок, обеспечивающий вход и выход СВЧ сигнала. От заданных частотных характеристик и добротности зависят как конфигурация топологического рисунка, взаимное расположение металлизированных сквозных отверстий, их поперечные размеры, шаг, отклонение от цилиндрической формы, так и выбор материала подложки (рис. 7).

Рассматриваемые интегрированные в подложку волноводы можно с некоторым допущением отнести к метаматериалам, поскольку это безусловно пространственно-неоднородные композиционные 3D-структуры, проявляющие резонансные свойства за счет инкорпированных в тело диэлектрика металлизированных сквозных отверстий, расположенных с определенным шагом. Вряд ли следует ждать проявления свойств отрицательных относительных диэлектрической и магнитной проницаемостей от такой структуры. В большинстве случаев моделирование базируется на хорошо известных моделях прохождения электромагнитного излучения через плоский волновод, ограниченный резонансной областью.

В работе [15] представлены результаты численного моделирования фильтров, функционирующих на частоте 8...13 ГГц и содержащих сформированные KPP на подложках RT/Duroid 5880. Показано, что полоса пропускания фильтра, содержащего пару KPP, составляет приблизительно 456 МГц на резонансной частоте 9,17 ГГц. Показано влияние числа и конфигурации KPP в топологии фильтра на S-параметры фильтра (рис. 8).

Примером может также служить фильтр, предложенный в работе [16] для Ku-диапазона, который может быть реализован для различных СВЧ частот на подложках с низкими потерями. Размеры фильтра составляют 50 × 10 мм, потери — менее 2 дБ в полосе. Фильтр рассчитан для ламината RT/Duroid 5880 и демонстрирует добротность приблизительно 150 на частоте 18,3 ГГц.

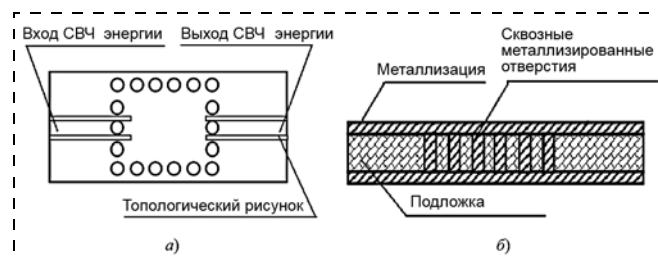


Рис. 7. Типичная конструкция фильтра на основе интегрированного в подложку волновода:

а — вид сверху на топологический рисунок; б — поперечное сечение

Таким образом, основным преимуществом конструкции фильтров на основе интегрированных в подложку волноводов являются низкие размеры и стоимость, простота в изготовлении и возможность интеграции с другими элементами цепи. Реалистичной представляется реализация излучателей ректенн, согласующих цепей и фильтров высоких гармоник в едином конструктивно-технологическом варианте, выполненном по совмещенным планарным технологиям микроэлектроники, микромашиным технологиям и технологиям печатных плат.

Заключение

Проведен анализ структурной схемы бортовой аппаратуры приема и преобразования СВЧ энергии. Показано, что элементами, в качестве которых могут применяться метаматериалы в бортовой аппаратуре, являются излучатели ректенн и фильтры высоких гармоник. При применении метаматериалов в составе ректенн возможно сокращение числа каналов передачи энергии до двух раз, что приводит к пропорциональному уменьшению массы приемной части. Проанализирована возможность применения в качестве фильтра высоких гармоник фильтра на основе интегрированного в подложку волновода, основным преимуществом которого являются низкие размеры и стоимость, простота в изготовлении и возможность интеграции с другими элементами цепи, выполненными по планарной технологии. Показано, что уменьшение массогабаритных характеристик бортовой аппаратуры приема и преобразования СВЧ энергии напрямую связано с реализацией излучателей ректенн, согласующих цепей и фильтров высоких гармоник в едином конструктивно-технологическом варианте, выполненном по совмещенным планарным технологиям микроэлектроники, микромашиным технологиям и технологиям печатных плат.

Список литературы

1. ICINCO 2015 // Proc. of 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. France. 2015.
2. Макриденко Л. А., Волков С. Н., Ходненко В. П. Концептуальные вопросы создания и применения малых космических аппаратов // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. 2010. Т. 114. С. 15–26.
3. Suh Y.-Ho., Chang K. A High-Efficiency Dual-Frequency Rectenna for 2,45 — and 5,8 GHz Wireless Power Transmission // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2002. V. 50, N. 7. P. 1784–1789.
4. Воскресенский Д. И., Гостюхин В. Л., Максимов В. М., Пономарев Л. И. Устройства СВЧ и антенны. М.: Радиотехника, 2006. 376 с.
5. Никольский В. Н. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, Гл. ред. физматлит, 1973. 609 с.
6. Huang W., Zhang B., Huang X. C. K., Liu C. Study on an S-Band Rectenna Arrey for Wireless Microwave Power Transmis-

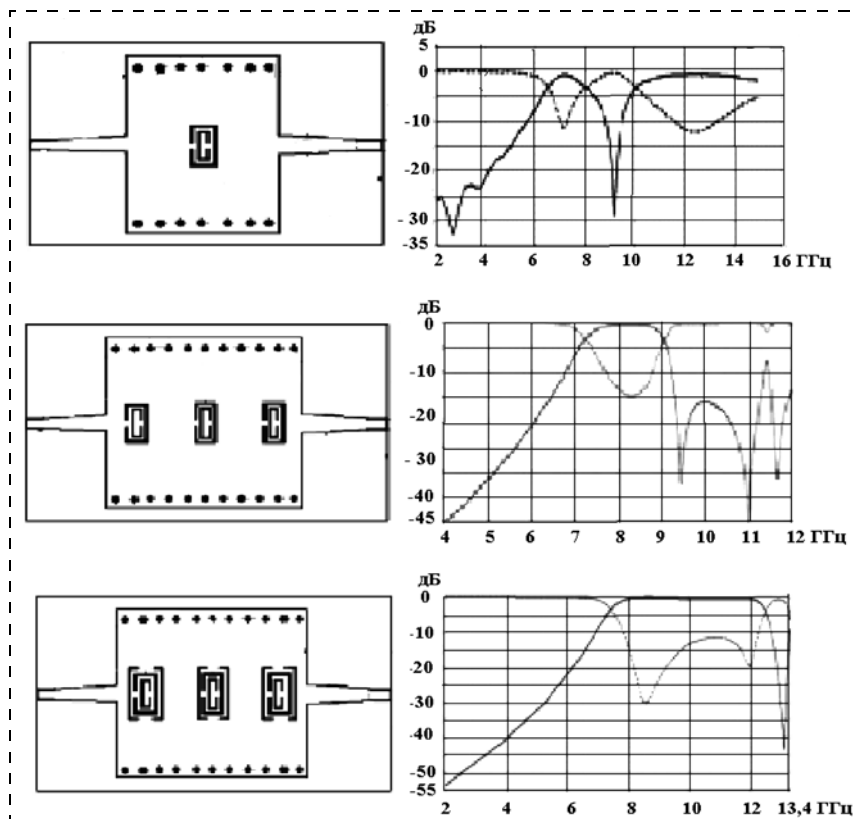


Рис. 8. Топологии фильтров с метаматериалами, варьируемой геометрией КРР и результаты моделирования S -параметров [15]

sion // Progress In Electromagnetics Research. 2013. V. 135. P. 747–758.

7. Аджибеков А. А., Бредихин И. Ю., Веселаго В. Г., Жуков А. А., Капустян А. В., Корпунин А. С. Малогабаритная узконаправленная антенна на основе слоистого 3D-метаматериала // Успехи современной радиоэлектроники. 2013. № 1. С. 93.

8. Аджибеков А. А., Бредихин И. Ю., Капустян А. В., Жуков А. А. Экспериментальная оценка характеристик малогабаритной антенны на основе метаматериала // Антенны. 2013. № 6. С. 28.

9. Заргано Г. Ф., Земляков В. В., Крутиев С. В. Полосно-пропускающие фильтры на индуктивных диафрагмах в гребневых волноводах, реализованных по SIW-технологии // Электромагнитные волны и электронные системы. 2015. № 6. С. 33–37.

10. Deslandes D., Wu K. Integrated microstrip and rectangular waveguide in planar form // IEEE Microwave Wireless Components Letter, 2001. V. 11. P. 68–70.

11. Henry M., Free C. E., Izqueirdo B. S., Batchelor J., Young P. Millimeter wave sub strate integrated waveguide antennas: Design and fabrication analysis // IEEE Transactions on Advanced Packaging. February 2009. V. 32, № 1.

12. Wang Y.-T., Zhu X.-W., Tian L. Design of crossed-SIW directional couplers with different angles // APMC. 16–20 December 2008. P. 1–4.

13. Tang H.-J., Hong W., Chen J.-X., Luo G.-Q., Wu K. Development of millimeter-wave planar duplexers based on complementary characters of dual-mode substrate integrated waveguide filters with circular and elliptic cavities // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. April 2007. V. 55. P. 776–782.

14. Chen Y. J., Hong W., Wu K. Novel substrate integrated waveguide xed phase shifter for 180-degree directional coupler // Proc. of IEEE MTT-S. June 2007. P. 189–192.

15. Mehdi D., Keltouma N., Bouazza T. H. C., Feham M. Design of Substrat Integrated Waveguide Bandpass Filter of SCRRs in the Microstrip Line // International Journal of Engineering Research and General Science. April–May 2014. V. 2. Iss. 3. P. 302–314.

16. Sotoodeh Z., Biglarbegian B., Kashani F. H., Ameri H. A Novel Bandpass Waveguide Filter // Progress In Electromagnetics Research Letters. 2008. V. 2. P. 141–148.

17. Вендик И. Б., Вендик О. Г. Метаматериалы и их применение в технике сверхвысоких частот (Обзор) // Журнал технической физики. 2013. Т. 83. Вып. 1. С. 4–28.

18. URL: www.cst.com.

Metamaterials in the Onboard Wireless Reception Systems and Conversion of the Microwave Energy of the Mobile Autonomous Devices

A. A. Zhukov, and_zhukov@mail.ru✉,

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russian Federation,

A. A. Adzhibekov, Leading Research Engineer, shah-mursa@mail.ru,

Russian Space Systems, Moscow, 111250, Russian Federation,

M. A. Kudrov, mkudrov@mail.ru, K. A. Zudov, xzudov@mail.ru, A. V. Geliev, alexander.geliev@mail.ru,

V. G. Veselago, MIPT, Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russian Federation

Corresponding author: Zhukov Andrew A., D. Sc.,
Head of Department, MAI, e-mail: and_zhukov@mail.ru

Received on May 17, 2016

Accepted on May 25, 2016

Significant progress has been recently achieved in the field of development of numerous autonomous mobile ground, water, air and space device-robots, micro robots, unmanned aerial and floating vehicles, pico- and nanosatellites, which perform diverse tasks without human presence and are remote controlled by people. The power loading of such mobile autonomous devices determining the duration of functioning of the service and functional onboard informational and control systems remains one of the intractable problems. The work analyzes the structure scheme of the onboard equipment for reception and conversion of the microwave energy of the mobile autonomous devices. It demonstrates that the elements, which as metamaterials can be used in the onboard equipment, are emitters of rectenna and high harmonic filters. The use of the microelectronic and micro-machinery technologies, metamaterials as a part of rectenna and filters based on the substrate waveguides integrated, allows us to halve the amount of the energy transfer canals and dramatically decrease the mass characteristic of the reception equipment and conversion of the microwave energy mobile autonomous devices in comparison with the analogues.

Keywords: metamaterial, rectenna, substrate integrated waveguide (SIW), portable independent devices, micro robot, unmanned aerial vehicle, nano- and picosatellite

For citation:

Zhukov A. A., Adzhibekov A. A., Kudrov M. A., Zudov K. A., Geliev A. V., Veselago V. G. Metamaterials in the Onboard Wireless Reception Systems and Conversion of the Microwave Energy of the Mobile Autonomous Devices, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 615–620.

DOI: 10.17587/mau.17.615-620

References

1. ICINCO 2015, Proc. of 12th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, 12, France, 2015.
2. Makridenko L. A., Volkov S. N., Khodnenko V. P. *Kontseptual'nye voprosy sozdaniya i primeneniya mal'kh kosmicheskikh apparatov. Voprosy elektromekhaniki* (The conceptual question of creation and application small spacecrafts. The question of Electro mechanics), *Trudy VNIIE*, 2010, vol. 114, P. 15–26 (in Russian).
3. Suh Y.-Ho., Chang K. A High-Efficiency Dual-Frequency Rectenna for 2.45- and 5.8 GHz Wireless Power Transmission, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2002, vol. 50, no. 7, P. 1784–1789.
4. Voskresenskii D. I., Gostyukhin V. L., Maksimov V. M., Ponomarev L. I. *Pod red. D. I. Boskrecenskogo. Ustroistva SVCh i anteny* (The devices of microwave and antennas), Moscow, Radio-tekhnika, 2006, 376 p. (in Russian).
5. Nikol'skii V. N. *Elektrodinamika i rasprostraneniye radiovoln* (Electrodynamics and radio wave propagation), Moscow, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury izdatel'stva "Nauka", 1973, 609 p. (in Russian).
6. Huang W., Zhang B., Huang X. C.K., Liu C. Study on an S-Band Rectenna Array for Wireless Microwave Power Transmission, *Progress In Electromagnetics Research*, 2013, vol. 135, P. 747–758.
7. Adzhibekov A. A., Bredikhin I. Yu., Veselago V. G., Zhukov A. A., Kapustyan A. V., Korpukhin A. S. *Malogabaritnaya uzkonapravlenaya antenna na osnove sloistogo 3D-metamateriala* (Compact single-minded focus antenna on the basis of layered 3D-metamaterial), *Uspekhi sovremennoi radioelektroniki*. 2013, no. 1, p. 93. (in Russian).
8. Adzhibekov A. A., Bredikhin I. Yu., Kapustyan A. V., Zhukov A. A. *Eksperimental'naya otsenka kharakteristik malogabaritnoi anteny na osnove metamateriala* (The experimental mark of characteristics compact antennas on the basis of metamaterial), *Antenny*, 2013, no. 6, p. 28. (in Russian).
9. Zargano G. F., Zemlyakov V. V., Krutiev S. V. *Polosno-propuskayushchie fil'try na induktivnykh diafragmakh v grebnevyykh volnovodakh, realizovannykh po SIW—tehnologii* (Bandpass filters inductive diaphragms in the ridge waveguides realized on SIW-technology.), *Elektromagnitnye volny i elektronnyye sistemy*, 2015, no. 6, p. 33–37. (in Russian).
10. Deslandes D., Wu K. Integrated microstrip and rectangular waveguide in planar form, *IEEE Microwave Wireless Components Letter*, 2001, vol. 11, P. 68–70.
11. Henry M., Free C. E., Izqueirdo B. S., Batchelor J., Young P. Millimeter wave substrate integrated waveguide antennas: Design and fabrication analysis, *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, February 2009, vol. 32, no. 1.
12. Wang Y.-T., Zhu X.-W., Tian L. Design of crossed-SIW directional couplers with different angles, *APMC*, 16–20 December 2008. P. 1–4.
13. Tang H.-J., Hong W., Chen J.-X., Luo G.-Q., Wu K. Development of millimeter-wave planar duplexers based on complementary characters of dualmode substrate integrated waveguide filters with circular and elliptic cavities, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, April 2007, vol. 55, P. 776–782.
14. Chen Y. J., Hong W., Wu K. Novel substrate integrated waveguide xed phase shifter for 180-degree directional coupler, *Proceeding of IEEE MTT-S*, June 2007. P. 189–192.
15. Mehdi D., Keltouma N., Bouazza T. H.C., Feham M. Design of Substrat Integrated Waveguide Bandpass Filter of SCRRs in the Microstrip Line, *International Journal of Engineering Research and General Science*, April–May 2014, vol. 2, no. 3. P. 302–314.
16. Sotoodeh Z., Biglarbegian B., Kashani F. H., Ameri H. A Novel Bandpass Waveguide Filter, *Progress In Electromagnetics Research Letters*, 2008, vol. 2, P. 141–148.
17. Vendik I. B., Vendik O. G. *Metamaterialy i ikh primeneniye v tekhnike sverkhvysokikh chastot (Obzor)* (Metamaterials and their application in the technique of microwave (Review)), *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*, 2013, vol. 83, no. 1. P. 4–28. (in Russian).
18. Available at: www.cst.com.

К. А. Неусыпин¹, д-р техн. наук, проф., **В. В. Сизых**², д-р техн. наук, доц., vsizykh@yandex.ru,
Б. И. Шахтарин¹, д-р техн. наук, проф., shakhtarin@mail.ru, **В. А. Шевцев**², аспирант, vshevtsev@inbox.ru,

¹Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

²Московский технологический университет (МИРЭА)

Анализ системы фазовой автоподстройки с квадратурными каналами при наличии аддитивных гармонических помех и широкополосного шума методом кумулянтов

Представлена марковская математическая модель системы фазовой автоподстройки частоты с квадратурными каналами (система Костаса) при одновременном воздействии аддитивных гармонических помех и белого гауссовского шума в форме стохастических дифференциальных уравнений, учитывающая влияние низкочастотных фильтров в контуре регулирования на форму импульсов полезного сигнала. Представлен анализ системы методом кумулянтов в нормальном приближении. Проведено сравнение статистических характеристик сигнала ошибки, полученных методом кумулянтов и в линейном приближении.

Ключевые слова: фазовая автоподстройка частоты, система Костаса, фазоквадратурное кольцо, восстановление несущей, фазовая ошибка, метод линеаризации, метод кумулянтов

Введение

Вопросы анализа статистических характеристик систем радиоавтоматики, в частности фазовой автоподстройки (ФАП), относятся к классическим задачам статистической радиотехники.

Одной из широко применяемых приближенных аналитических процедур исследования статистических характеристик ФАП наряду с методом усреднения и статистической линеаризацией является метод кумулянтов [1–4]. Например, в работе [4] была решена задача анализа методом кумулянтов в нормальном приближении классической ФАП произвольного порядка.

ФАП с фазоквадратурным кольцом слежения была предложена Джоном Костасом еще в 50-х годах прошлого века [5, 6], однако несмотря на это она изучена недостаточно полно. В дальнейшем данную систему будем называть просто системой Костаса. В настоящее время данная система радиоавтоматики находит широкое практическое применение в телекоммуникационных устройствах, системах глобального позиционирования (GPS, ГЛОНАСС), медицинских имплантах, системах мобильной связи. В отличие от классической ФАП система Костаса одновременно решает задачи восстановления подавленной несущей и демодуляции входного сигнала [7–11].

Следует упомянуть ряд недавних работ, посвященных математическим моделям детерминированной схемы Костаса [12], воздействию гармонических помех на детерминированные системы синхронизации [13], вопросам имитационного моделирования системы Костаса при наличии широкополосных случайных помех (белого шума) [14, 15]. При этом как в указанных работах, так и в большинстве других исследуется случай, когда фильтры нижних частот контура регулирования имеют достаточно широкую полосу пропускания, при этом эффектом

искажения формы импульсов полезного сигнала можно пренебречь.

Построим марковскую модель указанной ФАП, учитывающую эффект искажения форм импульсов полезного сигнала, действующего на фоне аддитивной смеси белого шума и гармонической помехи. Проведем анализ системы методом кумулянтов в нормальном приближении. Сравним полученные результаты с данными имитационного моделирования с использованием исходной модели и данными анализа линеаризованной модели, полученными, следуя подходам, изложенным в работе [17].

Особенности системы

Классическая функциональная схема ФАП с фазоквадратурным кольцом слежения приведена на рис. 1. Контур регулирования данной схемы состоит из двух каналов — синфазного и квадратурного. Колебание с местного управляемого генератора (УГ) прикладывается к входам фазовых детекторов (ФД), которые на схеме представлены как умножители. Перед поступлением на ФД в синфазном канале фаза колебания с выхода УГ поворачи-

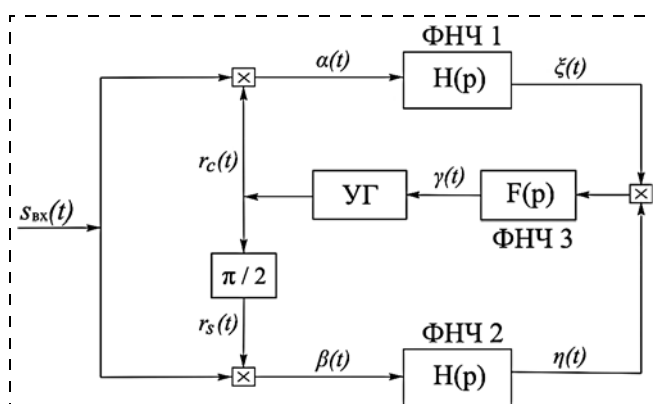


Рис. 1. Функциональная схема петли Костаса

вается на 90° . На другие входы ФД поступает сигнал с двухпозиционной фазовой манипуляцией (ФМ2), с частотой которого необходимо синхронизировать частоту УГ. Важной особенностью данной ФАП является возможность слежения за центральной частотой входного сигнала, которая была подавлена вследствие применения модуляции.

Колебания с выходов ФД фильтруются с помощью низкочастотных фильтров ФНЧ1 и ФНЧ2 и перемножаются в третьем ФД. Сигнал с выхода данного детектора пропускают через третий низкочастотный фильтр ФНЧ3 для подавления шумов и высокочастотных составляющих. Напряжение с выхода ФНЧ3 применяется для регулирования частоты УГ таким образом, чтобы она совпадала с частотой входного сигнала.

Процесс управления приводит к тому, что сигнал в синфазном канале максимально усиливается, а в квадратурном — подавляется. Заметим также, что колебание на выходе ФНЧ1 в синфазном канале соответствует информационному сообщению, передаваемому с помощью ФМ2 сигнала. Таким образом, данная система не только синхронизирует частоту УГ с частотой входного сигнала, но и выступает в роли демодулятора.

Математическая модель системы

Построим математическую модель рассматриваемой системы в условиях воздействия наряду с полезным сигналом детерминированной помехи и аддитивного шума.

Входной сигнал системы Костаса представляет собой смесь сигнала с двухпозиционной фазовой манипуляцией (ФМ2) $s_c(t)$, детерминированной помехи $s_{\Pi}(t)$ и белого гауссовского шума $v(t)$:

$$s_{\text{вх}}(t) = s_c(t) + s_{\Pi}(t) + v(t).$$

Будем считать, что полезный ФМ2 сигнал и помеха имеют вид

$$s_c(t) = \sqrt{2}A_c M(t) \sin(\omega_0 t + \theta_c(t));$$

$$s_{\Pi}(t) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^R A_{\Pi i}(t) \sin[\omega_0 t + \theta_{\Pi i}(t)],$$

где $\sqrt{2}A_c(t)$ и $\sqrt{2}A_{\Pi i}(t)$ — законы изменения огибающей сигнала и помехи, обычно медленно изменяющейся по сравнению с колебанием частоты ω_0 ; $\theta_c(t)$ и $\theta_{\Pi i}(t)$ — законы изменения фазы сигнала и помехи; $M(t)$ — информационная последовательность (телеграфный сигнал, принимающий значения ± 1).

Аддитивный шум $v(t)$ представим в виде

$$v(t) = \sqrt{2}v_c(t) \cos(\omega_0 t) - \sqrt{2}v_s(t) \sin(\omega_0 t),$$

где $v_c(t)$ и $v_s(t)$ — некоторые случайные процессы, которые будем считать независимыми и гауссовскими.

Поскольку после перемножителей находятся ФНЧ, которые подавляют гармоники частоты $2\omega_0$, то колебание на выходе перемножителя в квадратурном канале (верхнего на рис. 1) при $r_c(t) = \sqrt{2}A_c \cos(\omega_0 t + \theta_r(t))$ приближенно можно записать в виде

$$\alpha(t) = A_r \left[A_c M(t) \sin(\theta_c - \theta_r) + \sum_{i=1}^R A_{\Pi i} \sin(\theta_{\Pi i} - \theta_r) + v_c \cos \theta_r + v_s \sin \theta_r \right],$$

а на выходе перемножителя в синфазном канале при $r_s(t) = \sqrt{2}A_s \sin(\omega_0 t + \theta_r(t))$ — в виде

$$\beta(t) = A_r \left[A_c M(t) \cos(\theta_c - \theta_r) + \sum_{i=1}^R A_{\Pi i} \cos(\theta_{\Pi i} - \theta_r) + v_c \sin \theta_r - v_s \cos \theta_r \right].$$

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(t) = \theta_c(t) - \theta_r(t);$$

$$\varepsilon_i(t) = \frac{A_{\Pi i}(t)}{A_c(t)}; \Delta_i(t) = \theta_{\Pi i}(t) - \theta_c(t);$$

$$h_1(\varphi, t) = M(t) \sin \varphi + \sum_{i=1}^R \varepsilon_i(t) \sin(\Delta_i + \varphi);$$

$$h_2(\varphi, t) = M(t) \cos \varphi + \sum_{i=1}^R \varepsilon_i(t) \cos(\Delta_i + \varphi);$$

$$v_1(t) = \frac{1}{A_c} [v_c \cos(\theta_c - \varphi) + v_s \sin(\theta_c - \varphi)];$$

$$v_2(t) = \frac{1}{A_c} [v_c \sin(\theta_c - \varphi) - v_s \cos(\theta_c - \varphi)].$$

Тогда получим, что

$$\alpha(t) = A_r A_c \tilde{\alpha}(t); \beta(t) = A_r A_c \tilde{\beta}(t),$$

где $\tilde{\alpha}(t) = [h_1(\varphi, t) + v_1(t)]$; $\tilde{\beta}(t) = [h_2(\varphi, t) + v_2(t)]$.

Будем считать, что передаточные функции фильтров ФНЧ1 и ФНЧ2 совпадают и равны $H(s)$. Передаточная функция фильтра ФНЧ3 равна $F(s)$. Пусть рассматриваемые передаточные функции фильтров являются дробно-рациональными:

$$H(s) = \frac{A_0 + A_1 s + \dots + A_{n_1} s^{n_1}}{B_0 + B_1 s + \dots + B_{n_2} s^{n_2}};$$

$$F(s) = \frac{C_0 + C_1 s + \dots + C_{m_1} s^{m_1}}{D_0 + D_1 s + \dots + D_{m_2} s^{m_2}},$$

где $n_1 \leq n_2$; $m_1 \leq m_2$.

Будем рассматривать случай $n_1 = n_2 = n$ и $m_1 = m_2 = m$. Перейти к случаю $n_1 < n_2$ можно просто, приняв $A_n = A_{n-1} = \dots = A_{n_1+1} = 0$ (аналогично и для случая $m_1 < m_2$). Тогда колебания на выходе фильтров ФНЧ1 и ФНЧ2 можно записать в форме

$$\xi(t) = H(p)\alpha(t); \eta(t) = H(p)\beta(t),$$

а колебание на выходе фильтра ФНЧ3 представить в виде

$$\gamma(t) = F(p)[\xi(t)\eta(t)].$$

Будем считать, что фаза $\theta_r(t)$ колебания пере-страиваемого генератора связана с управляющим напряжением $\gamma(t)$ зависимостью

$$\frac{d\theta_r}{dt} = k_r \gamma(t),$$

где k_r — некоторый постоянный коэффициент.

В этом случае получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta_c}{dt} - \frac{d\theta_r}{dt} = \frac{d\theta_c}{dt} - k_r \gamma(t).$$

В итоге получаем систему дифференциальных уравнений, описывающую работу системы:

$$\begin{aligned} B_0 \tilde{\xi} + B_1 \tilde{\xi}' + \dots + B_n \tilde{\xi}^{(n)} &= \\ &= A_0 \tilde{\alpha} + A_1 \tilde{\alpha}' + \dots + A_n \tilde{\alpha}^{(n)}; \\ B_0 \tilde{\eta} + B_1 \tilde{\eta}' + \dots + B_n \tilde{\eta}^{(n)} &= \\ &= A_0 \tilde{\beta} + A_1 \tilde{\beta}' + \dots + A_n \tilde{\beta}^{(n)}; \\ D_0 \tilde{\gamma} + D_1 \tilde{\gamma}' + \dots + D_m \tilde{\gamma}^{(m)} &= \\ &= C_0 [\tilde{\xi} \tilde{\eta}] + C_1 [\tilde{\xi} \tilde{\eta}]' + \dots + C_m [\tilde{\xi} \tilde{\eta}]^{(m)}; \\ \varphi' &= \theta_c' - K \tilde{\gamma}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\tilde{\xi} = \xi/(A_r A_c)$; $\tilde{\eta} = \eta/(A_r A_c)$; $\tilde{\gamma} = \gamma/(A_r A_c)^2$; $K = k_r (A_r A_c)^2$.

В дальнейшем будем считать, что $A_n = 0$. Рассмотрим случай, когда квадратурные составляющие $v_c(t)$ и $v_s(t)$ представляют собой гауссовские независимые белые шумы с двусторонней спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Тогда систему уравнений (1) можно записать в нормальной форме в виде

$$dX_i = m_i(\mathbf{X}, t)dt + \sigma_{i1}(\mathbf{X}, t)d\omega_1 + \sigma_{i2}(\mathbf{X}, t)d\omega_2, \quad (2)$$

где

$$N = 2n + m + 1; \mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]^T;$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = X_{i+1} + q_i h_1(X_N, t) \text{ при } i = \overline{1, n-1};$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{l=1}^n B_n^{-1} B_{l-1} X_l + q_n h_1(X_N, t) \text{ при } i = n;$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = X_{i+1} + q_{i-n} h_2(X_N, t) \text{ при } i = \overline{n+1, 2n-1};$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{l=n+1}^{2n} B_n^{-1} B_{l-n-1} X_l + q_n h_2(X_N, t) \text{ при } i = 2n;$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = X_{i+1} + g_{i-2n} X_1 X_{n+1} \text{ при } i = \overline{2n+1, 2n+m-1};$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{l=2n+1}^{2n+m} D_m^{-1} D_{l-2n-1} X_l + g_m X_1 X_{n+1} \text{ при } i = 2n+m;$$

$$m_i(\mathbf{X}, t) = \theta_c' - K[X_{2n+1} + g_0 X_1 X_{n+1}] \text{ при } i = N;$$

$$\sigma_{i1}(\mathbf{X}, t) = q_i \sqrt{\frac{N_0}{2A_c^2}} \text{ при } i = \overline{1, n};$$

$$\sigma_{i1}(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ при } i = \overline{n+1, N};$$

$$\sigma_{i2}(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ при } i = \overline{1, n};$$

$$\sigma_{i2}(\mathbf{X}, t) = q_{i-n} \sqrt{\frac{N_0}{2A_c^2}} \text{ при } i = \overline{n+1, 2n};$$

$$\sigma_{i2}(\mathbf{X}, t) = 0 \text{ при } i = \overline{2n+1, N};$$

$$X_1 = \tilde{\xi} - q_0 \tilde{\alpha}; X_{n+1} = \tilde{\eta} - q_0 \tilde{\beta};$$

$$X_{2n+1} = \tilde{\gamma} - g_0 [\tilde{\xi} \tilde{\eta}]; X_N = \varphi;$$

$$q_0 = B_n^{-1} A_n; g_0 = D_m^{-1} C_m;$$

$$q_k = B_n^{-1} \left(A_{n-k} - \sum_{h=0}^{k-1} B_{n-k+h} q_h \right);$$

$$g_k = D_m^{-1} \left(C_{m-k} - \sum_{h=0}^{k-1} D_{m-k+h} g_h \right).$$

Например, рассмотрим случай, когда в качестве фильтров нижних частот используются интегрирующие фильтры с постоянными времени T_1 и T_2 , и детерминированная помеха является гармоническим сигналом:

$$s_n(\tilde{t}) = \sqrt{2} A_n \sin[\omega_0 \tilde{t} + \theta_n(\tilde{t})];$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + T_1 s}; F(s) = \frac{1}{1 + T_2 s}.$$

Здесь и в дальнейшем будем считать, что $A_c = \text{const}$, $A_n = \text{const}$, и фаза сигнала и детерминированной помехи имеют вид

$$\theta_c(\tilde{t}) = \Omega_c \tilde{t} + \varphi_c; \theta_n(\tilde{t}) = \Omega_n \tilde{t} + \varphi_n;$$

$$\Delta\Omega = \Omega_n - \Omega_c; \varphi_1 = \varphi_n - \varphi_c,$$

где Ω_c и Ω_n — начальные расстройки по частоте сигнала и помехи относительно частоты управляемого генератора; φ_c и φ_n — начальные фазы сигнала и помехи.

В этом случае $n = 1$, $m = 1$ и $N = 4$. Рассчитывая коэффициенты системы (2), получаем

$$q_0 = 0; q_1 = B_1^{-1} A_0 = \frac{1}{T_1}; g_0 = 0; g_1 = D_1^{-1} C_0 = \frac{1}{T_2}.$$

Введем нормированное время $t = K\tilde{t}$, тогда в итоге получим систему стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} dx_1 &= -\alpha_1^2 [x_1 - M \sin x_4 - \\ &- \varepsilon \sin(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4)] dt + \alpha_1^2 \sqrt{\frac{2}{r}} d\omega_1; \\ dx_2 &= -\alpha_1^2 [x_2 - M \cos x_4 - \\ &- \varepsilon \cos(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4)] dt + \alpha_1^2 \sqrt{\frac{2}{r}} d\omega_2; \\ dx_3 &= -\alpha_2^2 [x_3 - x_1 x_2] dt; \\ dx_4 &= [\beta - x_3] dt, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{KT_1}}; \alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{KT_2}}; \beta = \frac{\Omega_c}{K}; \beta_1 = \frac{\Delta\Omega}{K}; r = \frac{4A_c^2}{N_0 K}.$$

Линеаризованная модель

Будем следовать рассуждениям работы [17]. Считая, что $\Omega_{pi} = \Omega_c$ и случайная величина M имеет фиксированное значение, можем найти точки устойчивого положения $\mathbf{X}_y = [X_{y1}, X_{y2}, \dots, X_{yN}]^T$, приравняв левые части системы (2) и решив получившуюся систему алгебраических уравнений.

Далее перейдем к новым переменным $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_y$, характеризующим отклонение системы от точек устойчивого положения. Будем считать, что отклонения от устойчивого положения малы, поэтому, отбрасывая члены второго порядка $\hat{X}_i \hat{X}_j$, аппроксимируя $\sin \hat{X}_N = \hat{X}_N$ и $\cos \hat{X}_N \approx 1$, перейдем к системе линейных дифференциальных уравнений

$$d\hat{X}_i = F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) dt + \sigma_{i1}(\hat{\mathbf{X}}, t) d\omega_1 + \sigma_{i2}(\hat{\mathbf{X}}, t) d\omega_2; \quad (4)$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \hat{X}_{i+1} + q_i f_1(X_{yN}, t) \hat{X}_N \text{ при } i = \overline{1, n-1};$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \sum_{l=1}^n B_n^{-1} B_{l-1} \hat{X}_l + q_n f_1(X_{yN}, t) \hat{X}_N \text{ при } i = n;$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \hat{X}_{i+1} + q_{i-n} f_2(X_{yN}, t) \hat{X}_N \text{ при } i = \overline{n+1, 2n-1};$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \sum_{l=n+1}^{2n} B_n^{-1} B_{l-n-1} \hat{X}_l + q_n f_2(X_{yN}, t) \hat{X}_N \text{ при } i = 2n;$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \hat{X}_{i+1} + g_{i-2n} X_{yn+1} \hat{X}_1 + g_{i-2n} \hat{X}_{n+1} X_{y1} \text{ при } i = \overline{2n+1, 2n+m-1};$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = \sum_{l=2n+1}^{2n+m} D_m^{-1} D_{l-2n-1} \hat{X}_l + g_m \hat{X}_1 X_{yn+1} + g_m \hat{X}_{n+1} X_{y1} \text{ при } i = 2n+m;$$

$$F_i(\hat{\mathbf{X}}, t) = -K[\hat{X}_{2n+1} + g_0 \hat{X}_1 X_{yn+1} + g_0 \hat{X}_{n+1} X_{y1}] \text{ при } i = N,$$

где

$$f_1(X_{yN}, t) = M \cos(X_{yN}) + \sum_{i=1}^R \varepsilon_i \cos(\varphi_{1i} + X_{yN});$$

$$f_2(X_{yN}, t) = -M \sin(X_{yN}) - \sum_{i=1}^R \varepsilon_i \sin(\varphi_{1i} + X_{yN}).$$

Систему (4) можно представить в матричном виде:

$$d\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t) \hat{\mathbf{X}} dt + \mathbf{G} d\omega. \quad (5)$$

Вычислив математическое ожидание от правой и левой частей (5), перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно математических ожиданий:

$$\frac{d\hat{\mathbf{M}}}{dt} = \mathbf{F}(t) \hat{\mathbf{M}}. \quad (6)$$

Теперь найдем матрицу дисперсий случайного процесса $\hat{\mathbf{X}}$ в стационарном режиме. Если случайный процесс задан системой линейных уравнений (5), то матрица дисперсий удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\frac{d\hat{\mathbf{D}}}{dt} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}^T + \mathbf{G}\mathbf{G}^T. \quad (7)$$

Мы получили вектор математических ожиданий и матрицу дисперсий в стационарном режиме при условии, что случайная величина M приняла фиксированное значение. Усредняя решения уравнений (6) и (7) по M , получим вектор безусловных математических ожиданий и матрицу безусловных дисперсий.

Найдем точки устойчивого равновесия системы (3) при условии, что $\beta_1 = 0$. Для этого решим следующую систему уравнений:

$$x_{y1} - M \sin(x_{y4}) - \varepsilon \sin(\varphi_1 + x_{y4}) = 0;$$

$$x_{y2} - M \cos(x_{y4}) - \varepsilon \cos(\varphi_1 + x_{y4}) = 0;$$

$$x_{y3} - x_{y1} x_{y2} = 0; \beta - x_{y3} = 0.$$

От системы (6) переходим к линейной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\hat{x}_1 &= -\alpha_1^2 [\hat{x}_1 - x_{y2}\hat{x}_4]dt + \alpha_1^2 \sqrt{\frac{2}{r}} d\omega_1; \\ d\hat{x}_2 &= -\alpha_1^2 [\hat{x}_2 + x_{y1}\hat{x}_4]dt + \alpha_1^2 \sqrt{\frac{2}{r}} d\omega_2; \\ d\hat{x}_3 &= -\alpha_2^2 [\hat{x}_3 - x_{y2}\hat{x}_1 - x_{y1}\hat{x}_2]dt; \\ d\hat{x}_4 &= -\hat{x}_3 dt. \end{aligned} \quad (8)$$

Представим систему (8) в матричном виде:

$$d\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{X}}dt + \mathbf{G}d\boldsymbol{\omega},$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -\alpha_1^2 & 0 & 0 & \alpha_1^2 x_{y2} \\ 0 & -\alpha_1^2 & 0 & -\alpha_1^2 x_{y1} \\ \alpha_2^2 x_{y2} & \alpha_2^2 x_{y1} & -\alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 \sqrt{\frac{2}{r}} & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 \sqrt{\frac{2}{r}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор математических ожиданий $\hat{\mathbf{M}}$ случайного процесса $\hat{\mathbf{X}}$ находим, решая систему уравнений (6). Учитывая соотношение $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{X}_y$, получаем, что вектор математических ожиданий случайного процесса $\mathbf{X}$ равен $\mathbf{M} = \hat{\mathbf{M}} + \mathbf{X}_y$. Усредняя вектор $\mathbf{M}$ по M , получим вектор безусловных математических ожиданий. Так как $\mathbf{X}_y$ при фиксированном M является постоянным вектором, то дисперсия $\mathbf{D}$ случайного процесса $\mathbf{X}$ равна дисперсии $\hat{\mathbf{D}}$ случайного процесса $\hat{\mathbf{X}}$. Опять же, усредняя дисперсию $\mathbf{D}$ по M , получим безусловную матрицу дисперсий.

Метод кумулянтов

Заметим, что систему уравнений (2) можно представить в виде

$$d\mathbf{X} = [\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}x_1x_{n+1} + \mathbf{C}_1\sin x_N + \mathbf{C}_2\cos x_N]dt + \mathbf{G}d\mathbf{W}_t, \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ — вектор-столбцы размерности $N \times 1$; $\mathbf{A}$ — матрица размерности $N \times N$; $\mathbf{G}$ — матрица размерности $N \times 2$; $\mathbf{W}_t = [\omega_1, \omega_2]^T$ — двумерный винеровский случайный процесс.

Например, для системы уравнений (3) будем иметь

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 \sqrt{\frac{2}{r}} & 0 \\ 0 & \alpha_1^2 \sqrt{\frac{2}{r}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 [M + \varepsilon \cos(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4)] \\ -\alpha_1^2 \varepsilon \sin(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 \varepsilon \sin(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4) \\ \alpha_1^2 [M + \varepsilon \cos(\beta_1 t + \varphi_1 + x_4)] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть случайный марковский процесс $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ито [5]:

$$d\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}, t)d\mathbf{t} + \mathbf{B}(\mathbf{Y}, t)d\mathbf{W}_t,$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{Y}, t)$ — вектор-столбцы размерности $N \times 1$; $\mathbf{B}(\mathbf{Y}, t)$ — матрица размерности $N \times r$; $\mathbf{W}_t = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r]^T$ — вектор независимых стандартных винеровских процессов размерности $r \times 1$.

Будем также считать, что процесс $\mathbf{Y}$ имеет нормальную совместную плотность распределения

$$\mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{D}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \mathbf{M})^T \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{M}) \right],$$

где $\mathbf{M}$ — вектор математических ожиданий размерности $N \times 1$; $\mathbf{D}$ — матрица дисперсий размерности $N \times N$; $|\mathbf{D}|$ — определитель матрицы дисперсий.

В этом случае уравнения относительно вектора математических ожиданий и матрицы дисперсий будут иметь вид

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = \int_{R^N} \mathbf{A}(\mathbf{Z}, t) \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{D}(t)}{dt} &= \int_{R^N} \mathbf{B}(\mathbf{Z}, t) \mathbf{B}^T(\mathbf{Z}, t) \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} + \\ &+ \int_{R^N} \mathbf{A}(\mathbf{Z}, t) [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} + \\ &+ \int_{R^N} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)] \mathbf{A}(\mathbf{Z}, t)^T \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя соотношение (9) в уравнения для математического ожидания (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} &= \int_{R^N} [\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}z_1z_{n+1} + \\ &+ \mathbf{C}_1\sin z_N + \mathbf{C}_2\cos z_N] \mathbf{W}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим отдельно интегралы от слагаемых, входящих в (12):

$$\int_{R^N} \boldsymbol{\Omega} \mathbf{W}_{\mathbf{X}}(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Omega};$$

$$\int_{R^N} \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{A} \mathbf{M};$$

$$\int_{R^N} \mathbf{B} z_{1n+1} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{B} (D_{1, n+1} + m_1 m_{n+1}) = \\ = \mathbf{B} \mathbf{Q}_1^T (\mathbf{D} + \mathbf{M} \mathbf{M}^T) \mathbf{Q}_2,$$

где $\mathbf{Q}_1$ — вектор-столбец размерности $N \times 1$, в первой строке которого стоит единица, а в остальных строках — нули; $\mathbf{Q}_2$ — вектор-столбец размерности $N \times 1$, в $(n+1)$ -й строке которого стоит единица, а в остальных строках — нули.

Для четвертого слагаемого в квадратных скобках (12) получим

$$\int_{R^N} \mathbf{C}_1 \sin z_N \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ = \frac{1}{2i} \mathbf{C}_1 \int_{R^N} [\mathbf{e}^{iz_N} - \mathbf{e}^{-iz_N}] \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z}. \quad (13)$$

Заметим, что

$$\int_{R^N} \mathbf{e}^{i\mathbf{S}^T \mathbf{Z}} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{S}, t)}, \quad (14)$$

где $\Psi_X(\mathbf{S}, t) = i\mathbf{M}^T(t)\mathbf{S} - \frac{1}{2}\mathbf{S}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{S}$ — кумулянтная функция нормального распределения.

Тогда с учетом (14) находим, что

$$\int_{R^N} \mathbf{e}^{iz_N} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ = \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{V}} [\cos \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V} + i \sin \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V}],$$

где $\mathbf{V}$ — вектор-столбец размерности $N \times 1$, в N -й строке которого стоит единица, а в остальных строках — нули. Проводя аналогичные рассуждения, получим

$$\int_{R^N} \mathbf{e}^{-iz_N} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ = \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{V}} [\cos \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V} - i \sin \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V}].$$

В итоге получаем окончательное выражение для интеграла (13):

$$\int_{R^N} \mathbf{C}_1 \sin z_N \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{V}} \sin \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V}.$$

Таким же образом находим выражения для последнего слагаемого в квадратных скобках (12)

$$\int_{R^N} \mathbf{C}_2 \cos z_N \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{C}_2 \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{V}} \cos \mathbf{M}^T(t)\mathbf{V}.$$

Окончательное уравнение относительно математического ожидания будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{\Omega} + \mathbf{A} \mathbf{M} + \mathbf{B} \mathbf{Q}_1^T (\mathbf{D} + \mathbf{M} \mathbf{M}^T) \mathbf{Q}_2 + \\ + \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)\mathbf{V}} [\mathbf{C}_1 \sin \mathbf{M}^T \mathbf{V} + \mathbf{C}_2 \cos \mathbf{M}^T \mathbf{V}]. \quad (15)$$

Теперь получим дифференциальное уравнение относительно матрицы дисперсий. Уравнение (11) состоит из трех слагаемых. Рассмотрим их в отдельности.

Для первого слагаемого (11) находим

$$\int_{R^N} \mathbf{G} \mathbf{G}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{G} \mathbf{G}^T.$$

Рассмотрим второе слагаемое уравнения (11). С учетом (9) оно будет иметь вид

$$\int_{R^N} [\mathbf{\Omega} + \mathbf{A} \mathbf{Z} + \mathbf{B} z_{1n+1} + \mathbf{C}_1 \sin z_N + \mathbf{C}_2 \cos z_N] \times \\ \times [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z}. \quad (16)$$

Последовательно найдем все интегралы от слагаемых в квадратных скобках уравнения (16):

$$\int_{R^N} \mathbf{\Omega} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = 0;$$

$$\int_{R^N} \mathbf{A} \mathbf{Z} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ = \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T - \mathbf{A} \mathbf{M} \mathbf{M}^T = \mathbf{A} \mathbf{D};$$

$$\int_{R^N} \mathbf{B} z_{1n+1} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ = \mathbf{B} E\{z_{1n+1} \mathbf{Z}^T\} - \mathbf{B} E\{z_{1n+1}\} \mathbf{M}^T. \quad (17)$$

Заметим, что $z_{1n+1} \mathbf{Z}^T$ является вектор-строкой размерности $1 \times N$, элементы которой имеют вид $z_{1n+1} z_k$, где $k = \overline{1, N}$. Для совместно распределенных гауссовских случайных величин имеем

$$E\{z_{1n+1} z_k\} = m_1 D_{n+1, k} + m_{n+1} D_{1, k} + \\ + m_k D_{1, n+1} + m_1 m_{n+1} m_k.$$

Также $E\{z_{1n+1}\} \mathbf{M}^T$ является вектор-строкой размерности $1 \times N$, элементы которой имеют вид $E\{z_{1n+1}\} m_k = D_{1, n+1} m_k + m_1 m_{n+1} m_k$, где $k = \overline{1, N}$.

Таким образом, получили, что $\mathbf{H}^T = E\{z_{1n+1} \mathbf{Z}^T\} - E\{z_{1n+1}\} \mathbf{M}^T$ есть вектор-строка размерности $1 \times N$, элементы которой имеют вид $m_1 D_{n+1, k} + m_{n+1} D_{1, k}$, где $k = \overline{1, N}$. Вектор $\mathbf{H}$ можно выразить через вектор математических ожиданий и матрицу дисперсий:

$$\mathbf{H} = \mathbf{Q}_1^T \mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_2^T \mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{Q}_1. \quad (18)$$

В итоге получаем окончательное выражение для (17):

$$\int_{R^N} \mathbf{B}z_1 z_{n+1} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{B}\mathbf{H}^T.$$

Теперь вычислим интеграл от четвертого слагаемого в квадратных скобках (16). Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \sin z_N \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = \frac{1}{2i} \mathbf{C}_1 \int_{R^N} [\mathbf{e}^{iz_N} - \mathbf{e}^{-iz_N}] \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (19)$$

Заметим, что

$$\mathbf{e}^{i\mathbf{Z}^T \mathbf{S}} \mathbf{Z}^T = -i \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}^T} \mathbf{e}^{i\mathbf{Z}^T \mathbf{S}}.$$

Тогда, проводя вычисления, находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \mathbf{e}^{i\mathbf{Z}^T \mathbf{V}} \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}^T} \int_{R^N} \mathbf{e}^{i\mathbf{Z}^T \mathbf{S}} \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} \Big|_{\mathbf{S}=\mathbf{V}} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 \frac{\partial \Psi_X(\mathbf{S}, t)}{\partial \mathbf{S}^T} \mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{S}, t)} \Big|_{\mathbf{S}=\mathbf{V}} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 [i\mathbf{M}^T(t) - \mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)] \mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{V}, t)}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \mathbf{e}^{i\mathbf{Z}^T \mathbf{V}} \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 [i\mathbf{M}^T(t) - \mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)] \mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{V}, t)}. \end{aligned}$$

Теперь можем записать окончательное выражение для (19):

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \sin z_N \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 [i\mathbf{M}^T(t) - \mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)] \mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{V}, t)} + \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{C}_1 [i\mathbf{M}^T(t) + \mathbf{V}^T \mathbf{D}(t)] \mathbf{e}^{\Psi_X(-\mathbf{V}, t)}. \end{aligned}$$

Далее найдем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \sin z_N \mathbf{M}^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = -\frac{1}{2} \mathbf{C}_1 [\mathbf{e}^{\Psi_X(\mathbf{V}, t)} - \mathbf{e}^{\Psi_X(-\mathbf{V}, t)}] i\mathbf{M}^T. \end{aligned}$$

С учетом проведенных вычислений получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_1 \int_{R^N} \sin z_N [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = \mathbf{C}_1 \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \cos \mathbf{M}^T \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Таким же образом находим выражение для последнего слагаемого в квадратных скобках (16):

$$\begin{aligned} & \mathbf{C}_2 \int_{R^N} \cos z_N [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = -\mathbf{C}_2 \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \sin \mathbf{M}^T \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Теперь можем записать окончательное выражение для интеграла (16):

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} [\Omega + \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}z_1 z_{n+1} + \mathbf{C}_1 \sin z_N + \mathbf{C}_2 \cos z_N] \times \\ & \times [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H}^T + \\ & + \mathbf{C}_1 \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \cos \mathbf{M}^T \mathbf{V} - \mathbf{C}_2 \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \sin \mathbf{M}^T \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные вычисления для третьего слагаемого (11), получим

$$\begin{aligned} & \int_{R^N} [\mathbf{Z} - \mathbf{M}(t)] [\Omega + \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}z_1 z_{n+1} + \\ & + \mathbf{C}_1 \sin z_N + \mathbf{C}_2 \cos z_N]^T \mathbf{W}_X(\mathbf{Z}, t) d\mathbf{Z} = \\ & = \mathbf{D}\mathbf{A}^T + \mathbf{H}\mathbf{B}^T + \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{C}_1^T \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \cos \mathbf{M}^T \mathbf{V} - \\ & - \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{C}_2^T \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \sin \mathbf{M}^T \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Тогда дифференциальное уравнение относительно матрицы дисперсий будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathbf{D}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{B}^T + \\ & + [\mathbf{C}_1 \mathbf{V}^T \mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{C}_1^T] \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \cos \mathbf{M}^T \mathbf{V} - \\ & - [\mathbf{C}_2 \mathbf{V}^T \mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{V}\mathbf{C}_2^T] \mathbf{e}^{-\frac{1}{2} \mathbf{V}^T \mathbf{D} \mathbf{V}} \sin \mathbf{M}^T \mathbf{V} + \mathbf{G}\mathbf{G}^T. \end{aligned} \quad (20)$$

Результаты расчетов

Рассмотрим уравнения (3), описывающие работу системы с двумя интегрирующими фильтрами. В первую очередь, будем рассматривать характеристики переменной состояния x_4 и ее производной $\dot{x}_4$, так как они соответствуют фазовой и частотной ошибкам регулирования. Находя математическое ожидание от правой и левой частей четвертого уравнения системы (3), получим

$$E\{\dot{x}_4\} = \beta - m_3,$$

где m_3 — математическое ожидание переменной состояния x_3 . Также находим из последнего уравнения системы (3), что дисперсия ошибки по частоте равна дисперсии x_3 .

В дальнейшем на рисунках сплошной линией будем обозначать данные, полученные с помощью имитационного моделирования, основанного на численном решении системы стохастических дифференциальных уравнений (3). Пунктиром будем обозначать данные расчета методом линейаризации по формулам (6) и (7), штриховой линией — результаты, полученные с помощью метода кумулянтов по формулам (15) и (20).

На рис. 2—5 приведены математические ожидания и дисперсии фазовой и частотной ошибок при $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $r = 40$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\varphi_1 = \pi/2$. Для рис. 2, 3 $\beta_1 = 0$, а для рис. 4, 5 $\beta_1 = 0,2$.

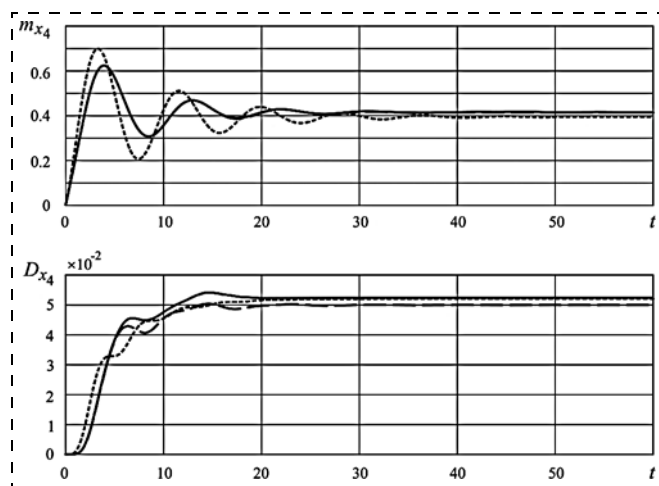


Рис. 2. Зависимость математического ожидания и дисперсии фазовой ошибки от времени при $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $r = 40$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi/2$

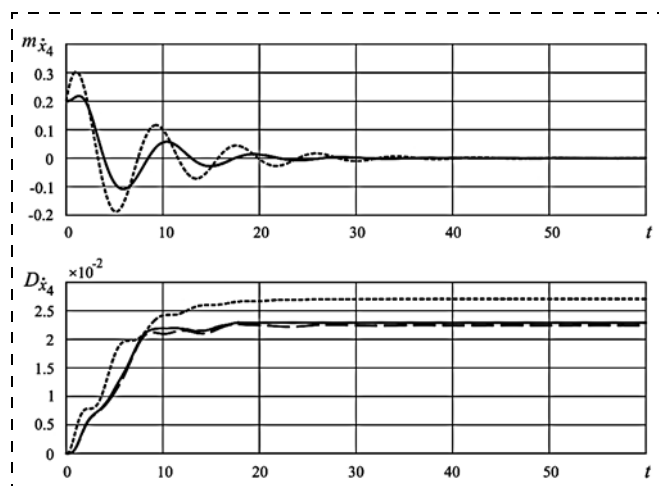


Рис. 3. Зависимость математического ожидания и дисперсии частотной ошибки от времени при $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $r = 40$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi/2$

Расчеты показывают хорошее совпадение приближенных формул с данными имитационного моделирования, причем, как видно из рис. 2, 3, результаты метода кумулянтов лучше результатов, полученных с помощью линейаризации. При $\beta_1 \neq 0$ система (3) не имеет точек устойчивого равновесия, поэтому результаты для метода линейаризации на рис. 4, 5 не представлены.

Далее на рис. 6—9 приведены зависимости дисперсии фазовой и частотной ошибок от параметра r при различных значениях α_1^2 и α_2^2 , $\beta = 0$ и отсутствии гармонической помехи ($\varepsilon = 0$). Для рис. 6, 7 $\alpha_2^2 = 1$, а для рис. 8, 9 $\alpha_1^2 = 1$.

Также на рис. 10—13 представлены зависимости дисперсии фазовой и частотной ошибок от параметра r при различных значениях φ_1 , $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta_1 = 0$ и $\varepsilon = 0,2$. Для рис. 10, 11 $\beta = 0$, а для рис. 12, 13 $\beta = 0,2$.

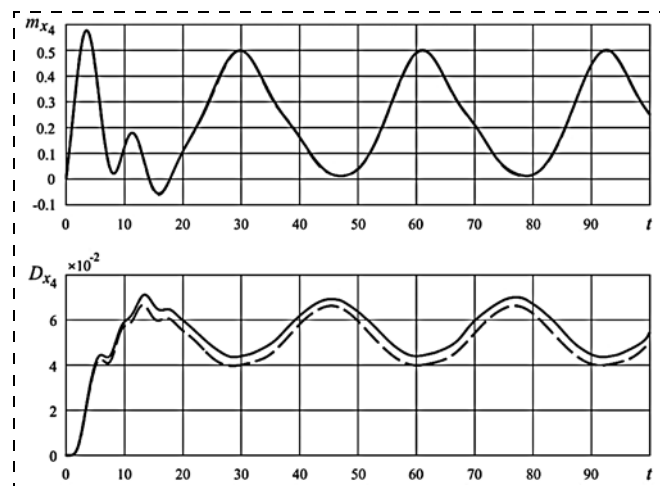


Рис. 4. Зависимость математического ожидания и дисперсии фазовой ошибки от времени при $\alpha_2^2 = \alpha_1^2 = 1$, $r = 40$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi/2$

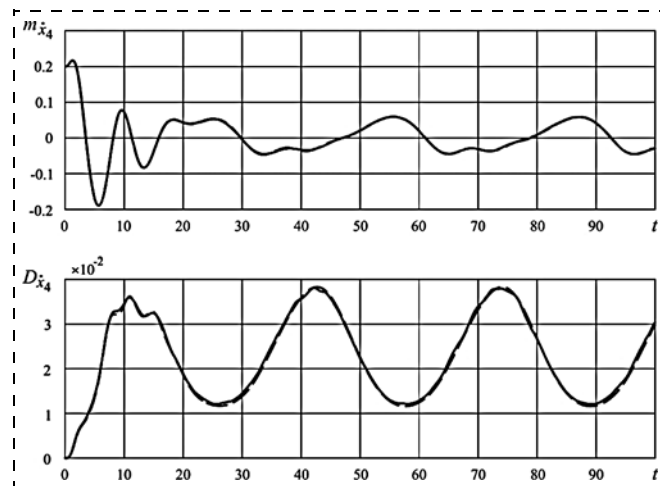


Рис. 5. Зависимость математического ожидания и дисперсии частотной ошибки от времени при $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $r = 40$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi/2$

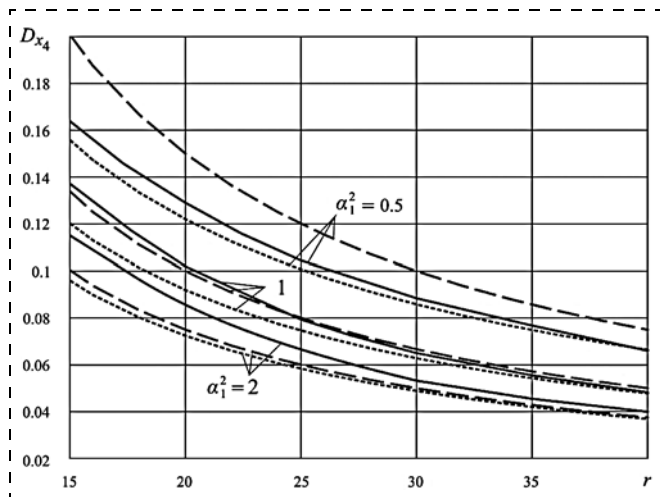


Рис. 6. Зависимость дисперсии фазовой ошибки от r при различных значениях α_1^2 и $\alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

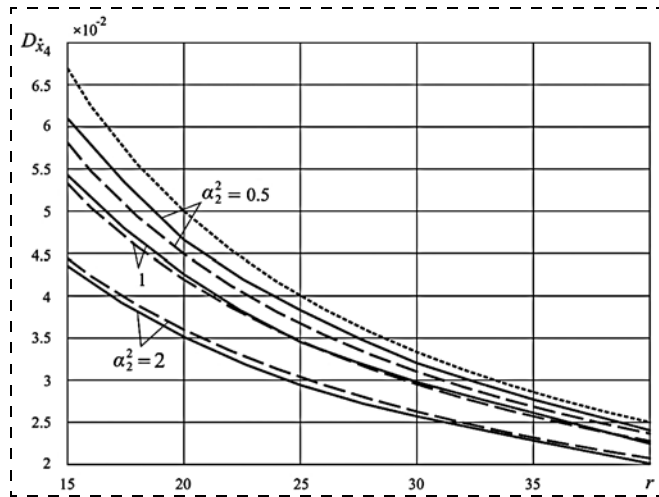


Рис. 9. Зависимость дисперсии частотной ошибки от r при различных значениях α_2^2 и $\alpha_1^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

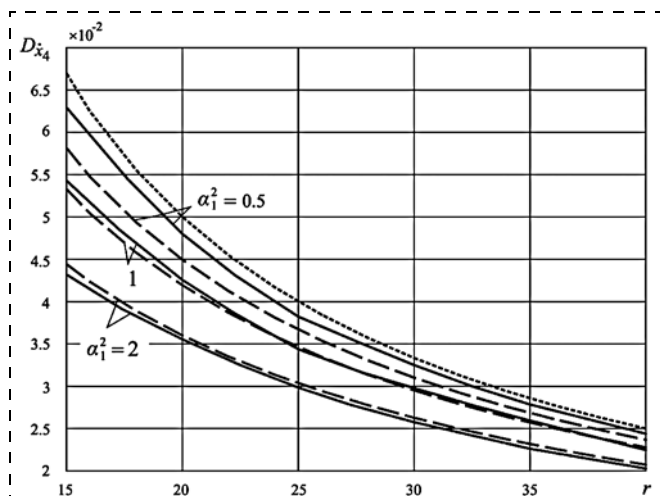


Рис. 7. Зависимость дисперсии частотной ошибки от r при различных значениях α_1^2 и $\alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

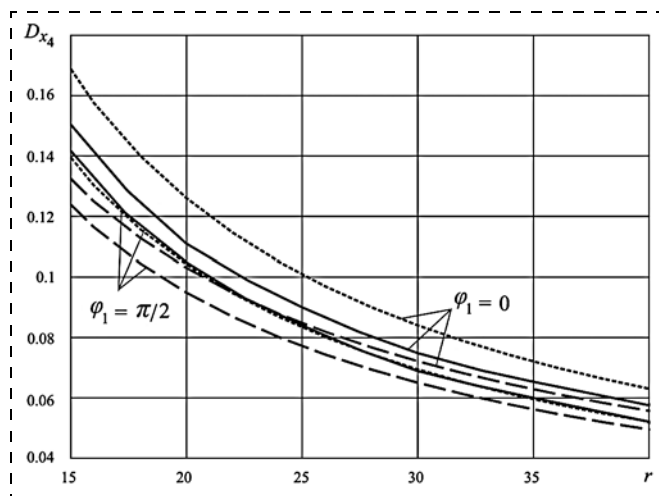


Рис. 10. Зависимость дисперсии фазовой ошибки от r при различных значениях φ_1 и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.2$, $\beta_1 = 0$

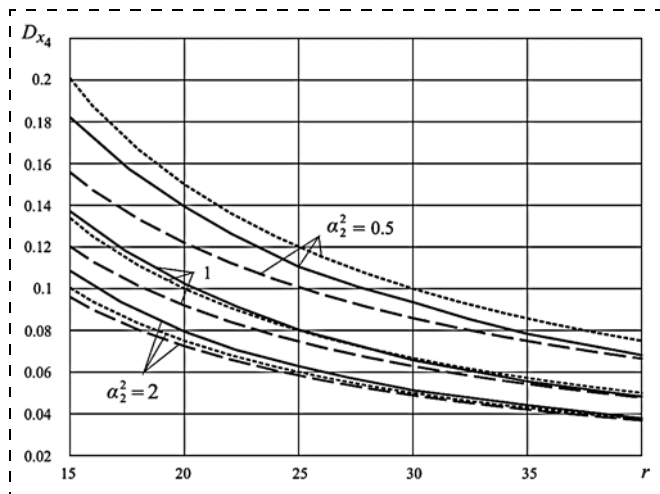


Рис. 8. Зависимость дисперсии фазовой ошибки от r при различных значениях α_2^2 и $\alpha_1^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

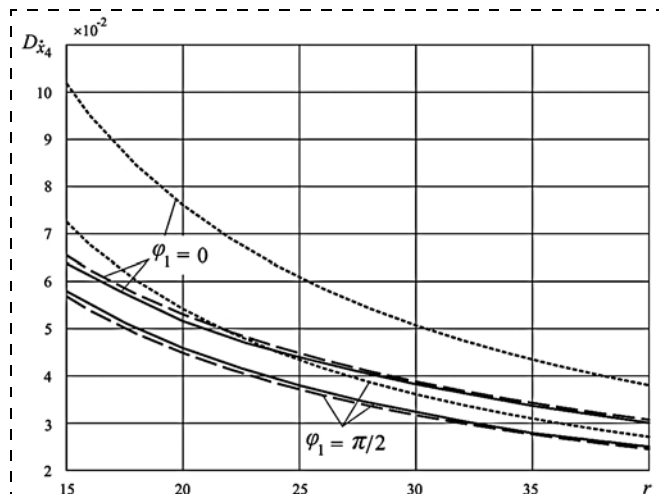


Рис. 11. Зависимость дисперсии частотной ошибки от r при различных значениях φ_1 и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0.2$, $\beta_1 = 0$

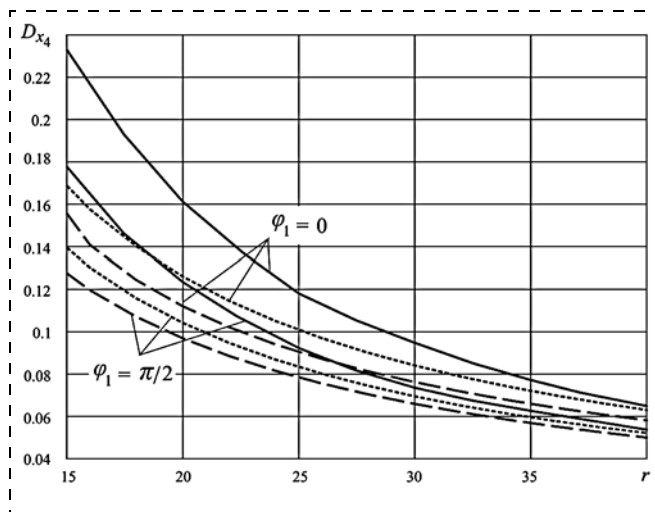


Рис. 12. Зависимость дисперсии фазовой ошибки от r при различных значениях φ_1 и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$

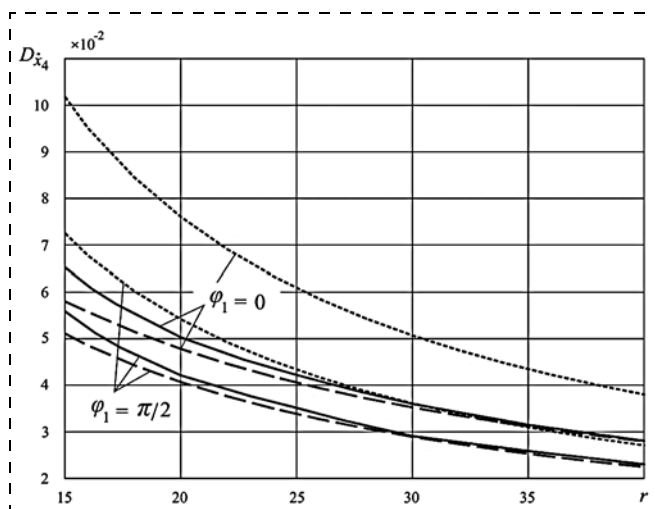


Рис. 13. Зависимость дисперсии частотной ошибки от r при различных значениях φ_1 и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$

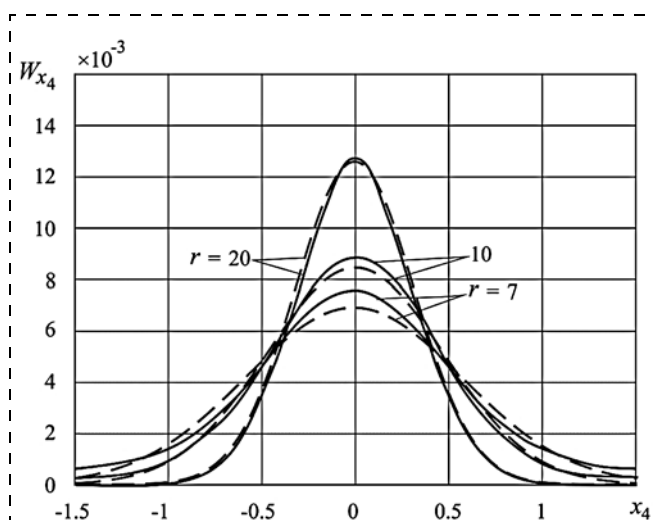


Рис. 14. Плотность распределения вероятностей фазовой ошибки при различных значениях r и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

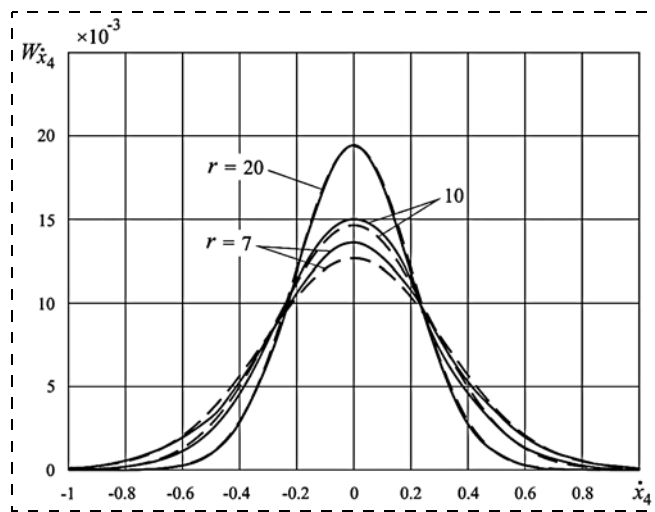


Рис. 15. Плотность распределения вероятностей частотной ошибки при различных значениях r и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$

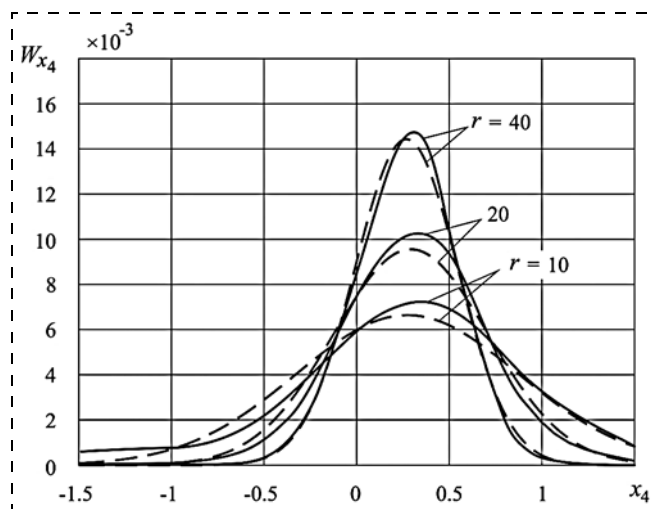


Рис. 16. Плотность распределения вероятностей фазовой ошибки при различных значениях r и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$

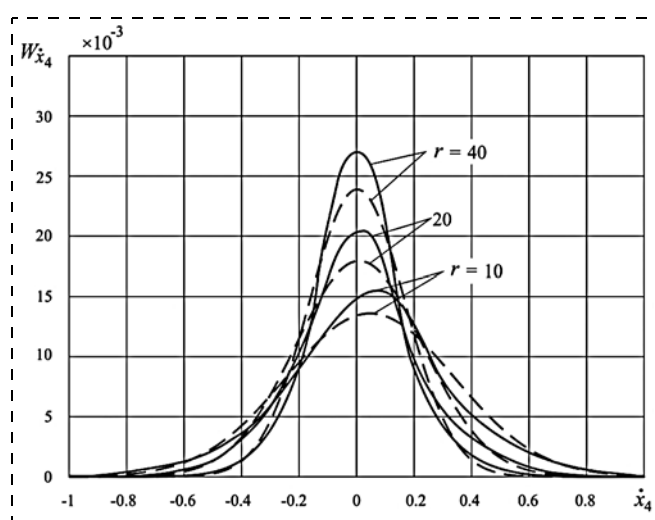


Рис. 17. Плотность распределения вероятностей частотной ошибки при различных значениях r и $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$, $\beta_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$

Из приведенных рисунков видно, что результаты, полученные с помощью метода кумулянтов, в целом лучше совпадают с данными имитационного моделирования, чем результаты, найденные методом линеаризации. Интересно отметить, что в методе линеаризации дисперсия частотной ошибки вообще не зависит от значений α_1^2 и α_2^2 . Также на рисунках можно увидеть, что при уменьшении значения r совпадение результатов несколько ухудшается, что можно объяснить появлением срывов слежения. Метод линеаризации возможность возникновения срывов слежения не учитывает, так как линейная модель (8) имеет всего одно положение устойчивого равновесия.

В случае расчета методом кумулянтов применяется нормальное приближение, однако появление срывов слежения приводит к тому, что плотность распределения вероятностей при уменьшении значения r начинает существенно отличаться от нормальной.

В этом можно убедиться, взглянув на рис. 14—17, на которых приведены плотности распределения вероятностей фазовой и частотной ошибок при различных значениях r , $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$, $\beta_1 = 0$. Для рис. 14, 15 $\beta = 0$ и $\varepsilon = 0$, а для рис. 16, 17 $\beta = 0,2$, $\varepsilon = 0,2$ и $\varphi_1 = 0$. Сплошными линиями представлены плотности, полученные с помощью имитационного моделирования, а штриховыми — нормальные плотности распределения вероятностей с теми же математическими ожиданиями и дисперсиями.

Из приведенных рисунков видно, что результаты, полученные с помощью метода кумулянтов, адекватны данным имитационного моделирования и, очевидно, лучше совпадают с ними, чем результаты применения метода линеаризации.

Заключение

Построена марковская модель системы фазовой автоподстройки с квадратурными каналами при воздействии гармонической помехи и белого гауссовского шума, учитывающая искажение формы импульсов информационного сигнала в контуре регулирования. На основе линеаризации модели и метода кумулянтов в нормальном приближении предложены приближенные формулы для математического ожидания и дисперсии фазовой и частотной ошибки. Данные результаты можно использовать в дальнейшем при инженерном анализе помехозащищенности данной системы при наличии гармонических помех на фоне широкополосного шума, что характерно для работы систем связи и навигации в сложной помеховой обстановке, вы-

званной либо индустриальными широкополосными и узкополосными помехами указанных видов, либо наличием преднамеренных помех систем радиоэлектронной борьбы. Полученная модель и изложенные подходы к ее анализу могут быть также использованы при спектральном анализе фазовых шумов системы.

Список литературы

1. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. Анализ и фильтрация. М.: Физматгиз. 1962.
2. Дашевский М. Л. Приближенный анализ точности нестационарных нелинейных систем методом семиинвариантов // Автоматика и телемеханика. 1967. № 11.
3. Шалфеев В. Д. Использование кумулянтного анализа для исследования СФС // Системы фазовой синхронизации. М.: Радио и связь, 1982.
4. Шахтарин Б. И. Статистическая динамика систем синхронизации. М.: Радио и связь, 1998.
5. Costas J. P. Synchronous communications // Proc. IRE. 1956. V. 44. No. 12. P. 1713.
6. Taylor D. Introduction to "Synchronous Communications", A Classic Paper by J. P. Costas // IEEE Proc. 2002. V. 90, N. 8. P. 1459.
7. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. М.: Вильямс, 2003.
8. Tsui J. B. Y. Fundamentals of Global Positioning System receivers software approach. N. Y.: Wiley, 2000.
9. Gardner F. M. Phase lock techniques. N. Y.: Wiley, 2005.
10. Simon M. K., Smith J. G. Offset Quadrature Communications with Decision-Feedback Carrier Synchronization // IEEE Trans. on Comm. 1974. V. 22. N. 10. P. 1576—1584.
11. Линдсей В. Системы синхронизации в связи и управлении. М.: Сов. радио, 1978.
12. Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Юлдашев М. В., Юлдашев Р. В. Дифференциальные уравнения схемы Костаса // Доклады академии наук. 2012. Т. 446. № 2. С. 149.
13. Шахтарин Б. И. Динамические характеристики фазовой автоподстройки частоты при наличии гармонической помехи // Радиотехника и электроника. 2012. Т. 57. № 6. С. 649.
14. Шахтарин Б. И., Фоменко А. Ю. Синтез и моделирование схемы Костаса // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2012. № 2. С. 122.
15. Шахтарин Б. И., Сидоркина Ю. А., Кульков И. А. Моделирование гибридной системы фазовой и тактовой синхронизации ФМ-сигналов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 4. С. 123.
16. Simon M. K., Lindsey W. C. Optimum Performance of Costas Receivers Containing Soft Bandpass Limiters // IEEE Trans. on Comm. 1977. V. 25. N. 8. P. 822.
17. Ziemer R. E. Perturbation analysis of the effect of CW interference in Costas Loop // Rec. Nat. Telecommun. Conf. Houston, TX. Dec. 4—6, 1972. P. 20—G1.
18. Пугачев В. С., Сеницын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1985.

Cumulant Analysis of the Costas Loop with Additive Effects of the Harmonic Interference and Broadband Noise

K. A. Neusypin¹, V. V. Sizykh², vsizykh@yandex.ru,

B. I. Shakhtarin¹, shakhtarin@mail.ru, V. A. Shevtsev², vshevtsev@inbox.ru

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation,

² Moscow Technological University (MIREA), Moscow, 119454, Russian Federation

Corresponding author: **Shakhtarin Boris I.**,

Bauman Moscow State University, Moscow, 105005, Russian Federation

E-mail: shakhtarin@mail.ru

Received on May 25, 2016

Accepted on June 01, 2016

Questions of analysis of the statistical characteristics of the radioautomatic systems, in particular, the phase-locked loops (PLL), refer to the classical problems of the statistical communication theory. The Costas loop was proposed by John Costas in the middle of the previous century, but despite this it has been studied insufficiently. Currently, this radioautomatic system finds wide application in the telecommunication devices, global positioning systems (GPS, GLONASS), medical implants, and mobile communication systems. In contrast to the classic approaches PLL Costas loop simultaneously solves the problem of recovery of the suppressed carrier and demodulation of the input signal. This article presents Markov mathematical model of the Costas loop in the form of the stochastic differential equations with the additive effects of harmonic interference and white Gaussian noise, which takes into account the impact of the loop arm low-pass filters on the data modulation. The statistical properties of the loop phase error in the linear approximation are considered. The cumulant analysis of the Costas loop in the Gaussian approximation is offered. These results can be used for the engineering analysis of the noise immunity of the system in the presence of harmonic interference and Gaussian noise, which is typical for communication and navigation systems in difficult noise conditions caused by the industrial broadband and narrowband interferences. The resulting model and the considered linear and Gaussian approximation can also be used for the spectral analysis of the phase noise of the system.

Keywords: phase locked loop, Costas loop, quadrature loop, carrier recovery, phase error, linearization, cumulant analysis

For citation:

Neusypin K. A., Sizykh V. V., Shakhtarin B. I., Shevtsev V. A. Cumulant Analysis of the Costas Loop with Additive Effects of the Harmonic Interference and Broadband Noise, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 621–632.

DOI: 10.17587/mau.17.621-632

References

1. Kazakov I. E., Dostupov B. G. *Statisticheskaya dinamika nelineinykh avtomaticheskikh sistem* (Statistical dynamics of nonlinear automatic systems), Moscow, Fizmatgiz, 1962 (in Russian).
2. Dashevsky M. L. *Priblizhenniy analiz tochnosti nestacionarnykh nelineinykh sistem metodom semiinvariantov* (Approximate analysis of unstable nonlinear system accuracy by method of semi-invariants), *Avtomatika i Telemekhanika*, 1967, no. 11 (in Russian).
3. Shalfeev V. D. *Ispolzovanie kumuliruyemykh analizov dlya issledovaniy SFS, Systemy fazovoy sinkhronizatsii* (System of phase synchronization), Moscow, Radio i svayz, 1982 (in Russian).
4. Shakhtarin B. I. *Statisticheskaya dinamika sistem sinkhronizatsii* (Statistical dynamics of synchronization systems), Moscow, Radio i svayz, 1998 (in Russian).
5. Costas J. P. Synchronous communications, *Proc. IRE*, 1956, vol. 44, no. 12, pp. 1713.
6. Taylor D. Introduction to "Synchronous Communications", A Classic Paper by J. P. Costas, *IEEE Proc.*, 2002, vol. 90, no. 8, pp. 1459.
7. Sklar B. *Cifrovaya svyaz. Teoreticheskie osnovy i prakticheskoe primeneniye* (Digital communication. Fundamentals and Applications), Moscow, Vilams, 2003 (in Russian).
8. Tsui J. B. Y. *Fundamentals of Global Positioning System receivers software approach*, N. Y., Wiley, 2000.
9. Gardner F. M. *Phase lock techniques*, N. Y., Wiley, 2005.
10. Simon M. K., Smith J. G. Offset Quadrature Communications with Decision-Feedback Carrier Synchronization, *IEEE Trans. on Comm.*, 1974, vol. 22, no. 10, pp. 1576–1584.
11. Lindsey V. *Systemy sinkhronizatsii v svyazi i upravlenii* (Synchronization systems in communication and), Moscow, Sov. radio, 1978 (in Russian).
12. Leonov G. A., Kuznetsov N. V., Yuldashev M. V., Yuldashev R. V. *Differentsialnoye uravneniye khemi Costatsa* (Differential equations of Costas loop), *Doklady Akademii Nauk*, 2012, vol. 446, no. 2, pp. 149 (in Russian).
13. Shakhtarin B. I. *Dinamicheskiye harakteristiki fazovoi avtopodstroiki chastoty pri nalichii garmonicheskoi pomehi* (Analysis of phase locked loop in the presence of harmonic interference), *Radiotekhnika i Elektronika*, 2012, vol. 57, no. 6, pp. 649 (in Russian).
14. Shakhtarin B. I., Fomenko A. U. *Sintez i modelirovaniye shemi Costasa* (Synthesis and Simulation of Costas Loop), *Vestnik MGTU im. Bauman. Ser. Priborostroeniye*, 2012, no. 2, pp. 122 (in Russian).
15. Shakhtarin B. I., Sidorkina Y. A., Kulkov I. A. *Modelirovaniye gibridnoi sistemi fazvoi i taktovoi sinkhronizatsii Fm-signalov* (Simulation of hybrid system phase and clock synchronization PM-signals), *Vestnik MGTU im. Bauman. Ser. Priborostroeniye*, 2014, no. 4, pp. 123 (in Russian).
16. Simon M. K., Lindsey W. C. Optimum Performance of Costas Receivers Containing Soft Bandpass Limiters, *IEEE Trans. on Comm.*, 1977, vol. 25, no. 8, pp. 822.
17. Ziemer R. E. Perturbation analysis of the effect of CW interference in Costas Loop, *Rec. Nat. Telecommun. Conf. Houston, TX*, Dec. 4–6, 1972, pp. 20–G1.
18. Pugachev V. S., Sinityn I. N. *Stokhasticheskiye differentsialnye sistemi* (Stochastic differential systems), Moscow, Nauka, 1985 (in Russian).

Я. Г. Сапунков, канд. физ.-мат. наук, доц., ChelnokovYuN@gmail.com,

Ю. Н. Челноков, д-р физ.-мат. наук, проф., зав. лаб., ChelnokovYuN@gmail.com,

Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов,

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 2*

С использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты космического аппарата (КА) и принципа максимума Понтрягина изучается задача оптимальной переориентации орбиты КА с помощью ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Во второй части статьи излагается новая теория решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА в импульсной постановке (с использованием импульсной (большой) реактивной тяги). Приводятся алгоритмы решения краевых задач оптимальной двухимпульсной и многоимпульсной переориентации орбиты КА (для нефиксированного числа импульсов реактивной тяги) и примеры численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА с использованием ограниченной (малой) или импульсной (большой) тяги, в которых для описания ориентации орбиты КА используется кватернионный оскулирующий элемент ориентации орбиты.

Ключевые слова: космический аппарат, ориентация орбиты, ограниченная (малая) и импульсная (большая) реактивная тяга, оптимальное управление, кватернион

Введение

В работе с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты космического аппарата (КА) [1–8] и принципа максимума Понтрягина изучается задача оптимальной переориентации орбиты КА с помощью реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Частным случаем этой задачи является хорошо известная и имеющая большое практическое значение задача коррекции угловых элементов орбиты КА, когда изменения угловых элементов орбиты в процессе управления имеют малые значения. Использование управления, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты КА, позволяет корректировать элементы орбиты КА, сохраняя ее форму и размеры неизменными. Это ценное свойство изучаемого процесса переориентации орбиты КА является полезным при решении как задачи коррекции угловых элементов орбиты КА, так и других задач механики космического полета, например, при управлении конфигурацией группировки спутников.

Комбинированный функционал, определяющий качество процесса переориентации орбиты КА, представляет собой свертку с весовыми множителями двух критериев: времени и суммарного импульса реактивной тяги, затраченных на процесс управления (частные случаи этого функционала — случай быстрогодействия и случай минимизации характе-

ристической скорости). Рассмотрены случаи оптимальной переориентации орбиты КА с помощью ограниченной или импульсной реактивной тяги.

В первой части нашей работы [9] был приведен обзор работ по дифференциальным уравнениям ориентации орбиты КА и изучаемой проблеме оптимальной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. В ней также была изложена известная кватернионная постановка задачи оптимальной переориентации орбиты КА посредством ограниченной тяги, ортогональной плоскости орбиты КА, принадлежащая авторам работы, приведены основные уравнения и соотношения, полученные при решении этой задачи с помощью дифференциальных уравнений, содержащих кватернионное дифференциальное уравнение ориентации орбиты КА, и принципа максимума Понтрягина.

На практике [10] также рассматривается управление плоскостью орбиты КА (долготой восходящего узла Ω_u или (и) наклоном орбиты I) импульсного типа с помощью вектора реактивной тяги, ортогонального плоскости оскулирующей орбиты КА. При этом время работы реактивного двигателя считается малым, так что изменением радиуса-вектора $\mathbf{r}$ центра масс КА за время маневра пренебрегают. Схемы маневров такого типа описаны в работе [10], где приводятся векторные диаграммы маневров для малых углов поворота плоскости орбиты КА. Для нахождения зависимостей в работе [10] используют теоремы сферической тригонометрии. При этом вопросы оптимизации маневров (в стро-

* Часть 1 опубликована в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление" № 8, 2016.

гой линейной или нелинейной постановке) не затрагиваются.

Основная цель настоящей работы — решение задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием двигателя большой тяги (в импульсной постановке) и с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА. При решении этой задачи нами в соответствии с известной методологией решения задач оптимальных импульсных перелетов КА [11] используются соответствующие предельные переходы в кватернионных уравнениях и соотношениях, полученных с помощью принципа максимума Понтрягина в задаче оптимальной переориентации орбиты КА с использованием ограниченной (малой) тяги и приведенных в первой части статьи [9].

Отметим, что исследованию задачи оптимальной переориентации орбиты КА в различных непрерывных постановках (с использованием двигателя малой тяги) и с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА были посвящены также работы [12–15].

В настоящей (второй) части статьи излагаются в строгой нелинейной постановке новая теория и новые алгоритмы решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА посредством импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты, с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА для нефиксированного числа импульсов тяги.

Построенная теория содержит формулы, лежащие в основе оптимальной импульсной переориентации орбиты КА: формулу, связывающую алгебраическую величину импульса реактивной тяги с углом поворота орбиты КА вокруг радиуса-вектора центра масс КА; формулы для приращений на активном участке траектории кватерниона конечного поворота орбиты КА, кватернионной сопряженной переменной и скалярной сопряженной (по отношению к истинной аномалии) переменной, а также формулы для приращений переменных, описывающих процесс (линию) переключения управления, и формулу, описывающую дополнительное условие для внутреннего импульса реактивной тяги.

Предложенные алгоритмы численного решения задачи оптимальной двухимпульсной и многоимпульсной переориентации орбиты КА для нефиксированного числа импульсов реактивной тяги позволяют определять оптимальные моменты включения реактивного двигателя, оптимальные алгебраические величины импульсов реактивной тяги и их оптимальное число.

Импульсная задача оптимальной переориентации орбиты КА

Решение задачи об оптимальной переориентации орбиты КА с большой (импульсной) тягой, ортогональной плоскости орбиты КА, можно получить в результате предельного перехода в аналогичной

задаче с ограниченной тягой [9], когда максимальное значение безразмерной тяги u_m реактивного двигателя неограниченно увеличивается, т.е. $u_m \rightarrow \infty$, а безразмерная длительность активных этапов управления $\Delta\tau_i$ уменьшается, т.е. $\Delta\tau_i \rightarrow 0$.

В те моменты времени, когда выполняется равенство

$$\frac{|N_1 \cos \varphi_i + N_2 \sin \varphi_i|}{2(1 + e \cos \varphi_i)} = \alpha_2, \quad (1)$$

в результате работы двигателя большой тяги (сообщения импульса тяги) орбита КА будет поворачиваться на некоторый конечный угол вокруг оси, совпадающей с радиус-вектором КА в этот момент времени. Во все остальные моменты времени двигателя большой тяги выключен, КА совершает пассивное движение, орбита остается неподвижной и выполняется неравенство

$$\frac{|N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi|}{2(1 + e \cos \varphi)} < \alpha_2. \quad (2)$$

Здесь φ — истинная аномалия (угловая переменная, отсчитываемая в плоскости орбиты от ее перицентра и характеризующая положение КА на орбите); e — эксцентриситет орбиты; N_1, N_2 — переменные [9], описывающие линию переключения оптимального управления; $\alpha_2 > 0$ — постоянный безразмерный весовой множитель в функционале минимизации [9], характеризующий долю затрат характеристической скорости на переориентацию орбиты КА.

Предел произведения безразмерной величины тяги u с учетом ее знака в момент безразмерного времени τ_i на длительность активного этапа $\Delta\tau_i$ при условии, что $u_m \rightarrow \infty$, $\Delta\tau_i \rightarrow 0$, будем называть безразмерным импульсом тяги и обозначать U_i . Знак импульса U_i согласно закону оптимального управления (23) (см. работу [9]) должен совпадать со знаком суммы

$$N_{1,i-1} \cos \varphi_i + N_{2,i-1} \sin \varphi_i,$$

где $N_{1,i-1}, N_{2,i-1}$ — значения переменных N_1, N_2 на этапе пассивного движения перед сообщением импульса в момент τ_i .

Функционал, определяющий качество процесса управления и принимающий минимальное значение для оптимального процесса в импульсной задаче, в безразмерных переменных имеет вид

$$J = \alpha_1 \tau_k + \alpha_2 \sum_{i=1}^k |U_i|, \quad (3)$$

где $\alpha_1 \geq 0$ — постоянный безразмерный весовой множитель, характеризующий долю затрат времени на переориентацию орбиты КА; k — число моментов включения двигателя большой тяги.

Угол поворота орбиты $\Delta\psi_i$ под действием импульса U_i согласно второму дифференциальному кватернионному уравнению системы (12) (см. ра-

боту [9]), описывающему мгновенную ориентацию орбиты КА, будет определяться по формуле

$$\Delta\psi_i = \frac{U_i}{1 - e\cos\varphi_i}. \quad (4)$$

Если обозначить $\Lambda_i - 1$ значение кватерниона, определяющего ориентацию орбиты на этапе перед сообщением импульса U_i в момент τ_i , а Λ_i — значение кватерниона ориентации орбиты после сообщения импульса, то они будут связаны соотношением

$$\Lambda_i = \Lambda_{i-1} \circ \mathbf{B}_i, \\ \mathbf{B}_i = \cos \frac{\Delta\psi_i}{2} + \sin \frac{\Delta\psi_i}{2} (\mathbf{i}_1 \cos\varphi_i + \mathbf{i}_2 \sin\varphi_i). \quad (5)$$

Здесь и далее $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — векторные мнимые единицы Гамильтона, $\circ$ — символ кватернионного умножения.

Аналогичное соотношение (согласно кватернионному сопряженному уравнению (19) (см. работу [9])) будет между кватернионами $\mathbf{M}_{i-1}$ и $\mathbf{M}_i$ в результате сообщения импульса U_i :

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{M}$ — кватернионная сопряженная переменная, соответствующая кватернионной фазовой переменной Λ , характеризующей ориентацию оскулирующей орбиты КА в инерциальной системе координат.

Согласно (20) (см. работу [9]), (5) и (6) значения кватернионной переменной $\mathbf{N}$, компоненты N_1, N_2, N_3 векторной части которой описывают собой линию переключения оптимального управления, до момента сообщения импульса и после него будут связаны соотношением

$$\mathbf{N}_i = \tilde{\mathbf{B}}_i \circ \mathbf{N}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i. \quad (7)$$

Изменение $\Delta\chi_i$ скалярной переменной χ , сопряженной по отношению к скалярной фазовой переменной φ (истинной аномалии), за промежуток безразмерного времени $\Delta\tau_i$ под действием двигателя большой тяги согласно уравнению (22) (см. работу [9]), которому удовлетворяет сопряженная переменная χ , определяется по формуле

$$\Delta\chi_i = 2e \int_{\tau_i}^{\tau_i + \Delta\tau_i} \chi(1 + e\cos\varphi)\sin\varphi d\tau + \\ + \frac{1}{2} \int_{\tau_i}^{\tau_i + \Delta\tau_i} \frac{u}{(1 + e\cos\varphi)^2} (N_1 \sin\varphi - N_2(e + \cos\varphi)) d\tau. \quad (8)$$

При предельном переходе, в котором $u_m \rightarrow \infty$, $\Delta\tau_i \rightarrow 0$, значение первого слагаемого в правой части формулы (8) будет стремиться к нулю, так как подынтегральная функция остается ограниченной. При вычислении предела второго слагаемого в правой части (8) можно полагать, что $\varphi \approx \varphi_i$, и согласно кватернионному дифференциальному урав-

нению ориентации орбиты КА (второму уравнению фазовой системы (12) (см. работу [9])) орбита равномерно вращается вокруг неподвижной оси, так как промежуток активного этапа мал, а управляющий параметр u на этом этапе согласно закону оптимального управления (23) (см. работу [9]) сохраняет постоянное значение.

Введем на промежутке $\Delta\tau_i$ кватернион $\mathbf{B}_i(\Delta\tau)$ по формуле

$$\mathbf{B}_i(\Delta\tau) = \cos\left(\frac{\Delta\psi_i \Delta\tau}{2\Delta\tau_i}\right) + \sin\left(\frac{\Delta\psi_i \Delta\tau}{2\Delta\tau_i}\right) (\mathbf{i}_1 \cos\varphi_i + \mathbf{i}_2 \sin\varphi_i), \\ 0 \leq \Delta\tau \leq \Delta\tau_i. \quad (9)$$

Тогда внутри промежутка $\Delta\tau_i$ во время работы двигателя большой тяги кватернионы $\Lambda, \mathbf{M}$ по аналогии с (5) и (6) будут определяться по формулам

$$\Lambda = \Lambda_{i-1} \circ \mathbf{B}_i(\Delta\tau), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i(\Delta\tau). \quad (10)$$

Согласно формулам (7) и (9) кватернионная переменная $\mathbf{N}$ внутри промежутка $\Delta\tau_i$ будет определяться через свое значение $\mathbf{N}_{i-1}$ перед сообщением импульса по формуле

$$\mathbf{N} = \tilde{\mathbf{B}}_i(\Delta\tau) \circ \mathbf{N}_{i-1} \circ \mathbf{B}_i(\Delta\tau). \quad (11)$$

Компоненты N_1, N_2, N_3 кватерниона $\mathbf{N}$ внутри промежутка $\Delta\tau_i$ согласно (9), (11) определяются по формулам

$$N_1 = N_{1,i-1} - \sin\varphi_i \Phi_i(\Delta\tau), \\ N_2 = N_{2,i-1} + \cos\varphi_i \Phi_i(\Delta\tau), \\ N_3 = \sin\left(\frac{\Delta\psi_i \Delta\tau}{\Delta\tau_i}\right) (N_{1,i-1} \sin\varphi_i - N_{2,i-1} \cos\varphi_i) + \\ + N_{3,i-1} \cos\left(\frac{\Delta\psi_i \Delta\tau}{\Delta\tau_i}\right); \quad (12) \\ \Phi_i(\Delta\tau) = 2\sin^2\left(\frac{\Delta\psi_i \Delta\tau}{\Delta\tau_i}\right) (N_{1,i-1} \sin\varphi_i - N_{2,i-1} \cos\varphi_i) + \\ + N_{3,i-1} \sin\left(\frac{\Delta\psi_i \Delta\tau}{\Delta\tau_i}\right).$$

Если соотношения (12) подставить в формулу (8) и выполнить предельный переход, в котором $u_m \rightarrow \infty$, $\Delta\tau_i \rightarrow 0$, то изменение $\Delta\chi_i$ сопряженной переменной χ под действием импульса U_i будет определяться по формуле

$$\Delta\chi_i = \frac{U_i}{2(1 + e\cos\varphi_i)^2} \left\{ N_{1,i-1} \sin\varphi_i - \right. \\ \left. - N_{2,i-1} (e + \cos\varphi_i) - (1 + e\cos\varphi_i) \times \right. \\ \times \left[(N_{1,i-1} \sin\varphi_i - N_{2,i-1} \cos\varphi_i) \left(1 - \frac{\sin(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_i}\right) + \right. \\ \left. + N_{3,i-1} \frac{1 - \cos(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_i} \right] \left. \right\}. \quad (13)$$

Из соотношения (7) следует, что выражение $N_1 \cos \varphi + N_2 \sin \varphi$ в момент сообщения импульса остается непрерывным, хотя при этом переменные N_1, N_2 испытывают разрыв, т.е.

$$\begin{aligned} N_{1,i-1} \cos \varphi_i + N_{2,i-1} \sin \varphi_i &= \\ = N_{1,i} \cos \varphi_i + N_{2,i} \sin \varphi_i. \end{aligned} \quad (14)$$

В каждый момент времени, когда аппарату сообщается импульс тяги в результате работы двигателя большой тяги, выполняется соотношение (1). Кватернионные переменные $\mathbf{A}, \mathbf{M}$ в этот момент испытывают разрыв, их значения по обе стороны от разрыва связаны соотношениями (5), (6).

Сопряженная переменная χ на пассивных этапах управления определяется формулой (28) (см. работу [9]). Поэтому эта переменная должна оставаться непрерывной в те моменты сообщения импульсов тяги, которые не совпадают с начальным или конечным моментами времени движения КА, т.е. в те моменты времени, которые являются внутренними моментами сообщения импульсов тяги. В эти моменты времени согласно формуле (13) должно выполняться соотношение $\Delta \chi_i = 0$ или соотношение

$$\begin{aligned} N_{1,i-1} \sin \varphi_i - N_{2,i-1} (e + \cos \varphi_i) - \\ - (1 + e \cos \varphi_i) \left[(N_{1,i-1} \sin \varphi_i - N_{2,i-1} \cos \varphi_i) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{\sin(\Delta \psi_i)}{\Delta \psi_i} \right) + N_{3,i-1} \frac{1 - \cos(\Delta \psi_i)}{\Delta \psi_i} \right] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Импульс тяги U_i и угол поворота орбиты $\Delta \psi_i$, фигурирующий в формуле (15), связаны соотношением (4). Поэтому если импульс тяги U_i сообщается во внутренний момент времени, то он должен удовлетворять условию (15).

Таким образом, с использованием дифференциального кватернионного уравнения ориентации оскулирующей орбиты КА получены соотношения, лежащие в основе импульсной оптимальной переориентации орбиты КА: формула (4), связывающая импульс реактивной тяги U_i на i -м активном участке траектории с углом $\Delta \psi_i$ поворота орбиты КА вокруг его радиуса-вектора; формула (5), связывающая значение кватерниона $\mathbf{A}_{i-1}$, определяющего ориентацию орбиты перед сообщением импульса U_i в момент τ_i , со значением кватерниона ориентации орбиты $\mathbf{A}_i$ после сообщения импульса; аналогичная формула (6) для кватернионной сопряженной переменной $\mathbf{M}$, формула (13) для приращения $\Delta \chi_i$ скалярной сопряженной переменной χ , а также формула (14), связывающая значения переменных N_1, N_2 , описывающих функцию переключения управления, в начальный и конечный моменты времени i -го активного участка. Получено, кроме того, дополнительное условие (15) для внутреннего импульса реактивной тяги.

Структура и алгоритмы оптимального импульсного управления ориентацией орбиты КА

I. Как было отмечено в первой части статьи [9], в задаче с ограниченной тягой последний этап оптимального управления должен быть активным. По этой причине в задаче с импульсным двигателем момент окончания оптимального управления должен совпадать с моментом сообщения импульса. Следовательно, в конечный момент времени $\tau = \tau_k$ в скалярном исчислении должны выполняться шесть условий: условие (1), а также условия (15), (24), (25), приведенные в работе [9]:

$$\frac{|N_{1,k-1} \cos \varphi_k + N_{2,k-1} \sin \varphi_k|}{2(1 + e \cos \varphi_k)} = \alpha_2,$$

$$\text{vect}(\tilde{\mathbf{A}}(\tau_k) \circ \mathbf{A}_k) = 0, (\mathbf{M}, \mathbf{A})_{\tau_k} = 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \frac{U_k}{2} \left\{ N_{1,k-1} \sin \varphi_k - N_{2,k-1} (e + \cos \varphi_k) - \right. \\ \left. - (1 + e \cos \varphi_k) \left[(N_{1,k-1} \sin \varphi_k - N_{2,k-1} \cos \varphi_k) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - \frac{\sin(\Delta \psi_k)}{\Delta \psi_k} \right) + N_{3,k-1} \frac{1 - \cos(\Delta \psi_k)}{\Delta \psi_k} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В соотношениях (16) через k обозначен номер момента сообщения последнего импульса, условие (26) (см. работу [9]) учтено выбором формулы (28) (см. работу [9]) для определения сопряженной переменной χ перед моментом сообщения последнего импульса.

Если начальный момент времени $\tau = 0$ совпадает с моментом сообщения импульса, то при $\varphi = \varphi_0$ должно выполняться условие (1):

$$\frac{|N_{1,0} \cos \varphi_0 + N_{2,0} \sin \varphi_0|}{2(1 + e \cos \varphi_0)} = \alpha_2. \quad (17)$$

Пусть оптимальное управление содержит два импульса, которые сообщаются в начальный и конечный моменты времени. Тогда соотношения (16), (17) дают семь уравнений (в скалярном исчислении) для определения семи неизвестных, а именно: U_1 — начального (первого) импульса, U_k — конечного (последнего) импульса, φ_k — значения истинной аномалии в конечный момент времени, $\mathbf{M}_0$ — значения кватернионной сопряженной переменной в начальный момент времени. Если оптимальное управление состоит только из одного импульса, который сообщается в конечный момент времени, то соотношения (16) дают шесть уравнений для определения шести (в скалярном исчислении) неизвестных: $U_k, \varphi_k, \mathbf{M}_0$.

Если оптимальное управление включает импульсы, которые сообщаются во внутренние моменты времени (т.е. число импульсов реактивной тяги больше двух), то каждый такой момент порождает две новые неизвестные U_i, φ_i и два новых уравнения (1) и (15). Кватернионный интеграл (29) (см. ра-

боту [9]) имеет место и для импульсной задачи оптимального управления и позволяет условие transversальности (25) (см. работу [9]) (третье из условий (16)) выполнить в начальный момент времени.

Так же, как и для случая решения задачи с ограниченным управлением, при решении задачи оптимального управления с импульсным управлением кватернионную переменную $\mathbf{M}$ можно исключить, если использовать кватернионную переменную $\mathbf{N}$ с нулевой скалярной составляющей.

Если оптимальное управление состоит только из двух импульсов, которые сообщаются в начальный и конечный моменты времени, то использование кватернионной переменной $\mathbf{N}$ с нулевой скалярной частью существенно упрощает решение задачи. Обозначим U_1 — начальный (первый) импульс, U_2 — второй (последний) импульс, φ_k — истинная аномалия в конечный момент времени. Тогда углы поворотов $\Delta\psi_1$, $\Delta\psi_2$ орбиты вокруг радиус-вектора КА в начальный и конечный моменты времени будут определяться согласно соотношению (4) по формулам

$$\Delta\psi_1 = \frac{U_1}{1 + e\cos\varphi_0}, \Delta\psi_2 = \frac{U_2}{1 + e\cos\varphi_k}. \quad (18)$$

Согласно соотношениям (5) вводятся кватернионы $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \cos \frac{\Delta\psi_1}{2} + \sin \frac{\Delta\psi_1}{2} (\mathbf{i}_1 \cos\varphi_0 + \mathbf{i}_2 \sin\varphi_0); \\ \mathbf{B}_2 &= \cos \frac{\Delta\psi_2}{2} + \sin \frac{\Delta\psi_2}{2} (\mathbf{i}_1 \cos\varphi_k + \mathbf{i}_2 \sin\varphi_k). \end{aligned} \quad (19)$$

Кватернионы Λ_1 и Λ_2 , определяющие ориентации орбиты после сообщения первого и второго импульсов, согласно соотношениям (5) определяются по формулам

$$\Lambda_1 = \Lambda_0 \circ \mathbf{B}_1, \Lambda_2 = \Lambda_1 \circ \mathbf{B}_2 = \Lambda_0 \circ \mathbf{B}_1 \circ \mathbf{B}_2. \quad (20)$$

Векторное условие (15) (см. работу [9]) (второе из условий (16)), которое можно записать в виде

$$\text{vect}(\tilde{\Lambda}_2 \circ \Lambda_k) = \text{vect}(\tilde{\mathbf{B}}_2 \circ \tilde{\mathbf{B}}_1 \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_k) = 0, \quad (21)$$

дает три скалярных уравнения для определения неизвестных U_1 , U_2 , φ_k , из которых видно, что эти искомые величины не зависят от весовых множителей α_1 , α_2 функционала минимизации. Заметим, что для нелинейной системы трансцендентных уравнений (21) можно получить аналитическое решение.

Если компоненты кватерниона $\mathbf{N} = \mathbf{N}_1$ с нулевой скалярной частью на пассивном этапе движения КА после сообщения первого (начального) импульса обозначить $N_{1,1}$, $N_{2,1}$, $N_{3,1}$, то для их определения согласно соотношениям (16), (17) можно записать систему трех линейных алгебраических уравнений:

$$N_{1,1}\cos\varphi_0 + N_{2,1}\sin\varphi_0 = 2\alpha_2(1 + \cos\varphi_0)\text{sign } U_1; \quad (22)$$

$$N_{1,1}\cos\varphi_k + N_{2,1}\sin\varphi_k = 2\alpha_2(1 + \cos\varphi_k)\text{sign } U_2; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \frac{U_2}{2} \left\{ N_{1,1}\sin\varphi_k - N_{2,1}(e + \cos\varphi_k) - \right. \\ \left. - (1 + e\cos\varphi_k) \left[(N_{1,1}\sin\varphi_k - N_{2,1}\cos\varphi_k) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - \frac{\sin(\Delta\psi_2)}{\Delta\psi_2} \right) + N_{3,1} \frac{1 - \cos(\Delta\psi_2)}{\Delta\psi_2} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнения (22) и (23) определяют $N_{1,1}$, $N_{2,1}$, а уравнение (24) определяет $N_{3,1}$.

Значения кватернионов $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0$ и $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$ в начальный момент времени перед сообщением первого импульса согласно соотношениям (7) и (20) (см. работу [9]) определяются по формулам

$$\mathbf{N}_0 = \mathbf{B}_1 \circ \mathbf{N}_1 \circ \tilde{\mathbf{B}}_1, \mathbf{M}_0 = \Lambda_0 \circ \mathbf{N}_0. \quad (25)$$

Из соотношений (22)–(24) видно, что значения сопряженных переменных $\mathbf{N}_0$, $\mathbf{M}_0$ в начальный момент времени зависят от весовых множителей α_1 , α_2 .

Длительность пассивного этапа управления между двумя последовательными моментами сообщения импульса в безразмерных переменных определяется по формуле

$$\begin{aligned} \tau_i - \tau_{i-1} &= \frac{1}{1 - e^2} \times \\ &\times \left[-\frac{e\sin\varphi}{1 + e\cos\varphi} + \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \text{arcth} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \text{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right]_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i}. \end{aligned} \quad (26)$$

После решения импульсной задачи оптимального управления необходимо проверить выполнение условия (2) на промежутках между моментами включения импульсного двигателя для того, чтобы были выполнены все условия принципа максимума Понтрягина.

Отметим основные особенности решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА (с использованием кватернионного оскулирующего элемента орбиты КА):

1. На пассивном этапе управления кватернион Λ ориентации орбиты КА сохраняет свое значение постоянным, а на активных этапах орбита КА поворачивается как неизменяемая фигура вокруг оси, направленной вдоль радиус-вектора КА.

2. Краевые условия задачи оптимальной переориентации орбиты КА и условия transversальности на правом подвижном конце траектории при использовании кватерниона Λ записываются проще (естественнее), чем при использовании кватерниона λ ориентации орбитальной системы координат [5].

3. Дифференциальное кватернионное уравнение для переменной $\mathbf{M}$, сопряженной к кватернионной фазовой переменной Λ , совпадает по своей форме с дифференциальным кватернионным уравнением для переменной Λ . Этот эффект является следст-

вием свойства самосопряженности кватернионного кинематического уравнения вращательного движения твердого тела, установленного В. Н. Бранцем и И. П. Шмыглевским [16]. Указанный эффект позволяет получить кватернионный первый интеграл (29) (см. работу [9]) дифференциальных фазовых и сопряженных уравнений изучаемой задачи.

4. В импульсной задаче оптимальной переориентации орбиты КА кватернион Λ ориентации орбиты КА и сопряженный ему кватернион M во время работы импульсного двигателя (двигателя большой тяги) изменяются скачкообразно. Изменению фазового кватерниона Λ соответствует поворот орбиты КА на конечный угол вокруг радиуса-вектора КА.

5. Решение импульсной задачи оптимальной переориентации орбиты КА в случае, когда оптимальное управление состоит из двух импульсов реактивной тяги, сообщаемых КА в начальный и конечный моменты времени движения, сводится к решению системы алгебраических уравнений, которая расщепляется на две системы алгебраических уравнений, решаемых последовательно. Первая система (21), состоящая из трех нелинейных уравнений, служит для определения алгебраических величин начального U_1 и конечного U_2 импульсов тяги реактивного двигателя и истинной аномалии φ_k , характеризующей положение КА на орбите в конечный момент времени. Вторая линейная система алгебраических уравнений (22)–(24) служит для определения значений компонент кватернионной переменной N (имеющей нулевую скалярную часть) после сообщения первого импульса тяги. По этим значениям вычисляются с помощью формул (25) значения кватернионной переменной N и кватернионной сопряженной переменной M в начальный момент времени. По формуле (26) вычисляется длительность пассивного этапа управления между двумя моментами сообщения импульса, а следовательно, и длительность всего процесса управления. После этого необходимо проверить выполнение условия (2) на промежутках между моментами включения импульсного двигателя. Таким образом, имеем простой алгоритм решения задачи двухимпульсной переориентации орбиты КА в случае, когда оптимальные импульсы реактивной тяги сообщаются КА в начальный и конечный моменты времени.

Отметим, что в случае оптимальной переориентации орбиты КА, реализованной с помощью двух импульсов, сообщаемых КА в начальный и конечный моменты времени движения, оптимальное управление не зависит от значений весовых множителей в функционале качества, а зависит только от истинной аномалии КА в начальный момент времени, начальной и конечной ориентаций орбиты КА.

Свойства, аналогичные свойствам 1 и 3–5, имеются и при решении импульсной задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием в качестве кватернионной фазовой переменной кватерниона λ ориентации орбитальной системы координат [5].

II. Приведем алгоритм решения краевой задачи оптимального управления для переориентации орбиты КА с импульсной тягой, ортогональной к плоскости оскулирующей орбиты, в общем случае, когда заранее не задается число импульсов.

Как было показано выше, в случае, когда импульсный двигатель включается в момент времени, который является внутренней точкой промежутка управления, в этот момент времени должны выполняться следующие соотношения:

$$|N_{1,i-1}\cos\varphi_i + N_{2,i-1}\sin\varphi_i| = 2\alpha_2(1 + e\cos\varphi_i); \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & N_{1,i-1}\sin\varphi_i - N_{2,i-1}(e + \cos\varphi_i) - \\ & - (1 + e\cos\varphi_i) \left[(N_{1,i-1}\sin\varphi_i - N_{2,i-1}\cos\varphi_i) \times \right. \\ & \times \left. \left(1 - \frac{\sin(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_i} \right) + N_{3,i-1} \frac{1 - \cos(\Delta\psi_i)}{\Delta\psi_i} \right] = 0, \quad (28) \end{aligned}$$

где $\Delta\psi_i = \frac{U_i}{1 + e\cos\varphi_i}$, φ_i — истинная аномалия КА в момент сообщения импульса; U_i — алгебраическая величина импульса; $N_{1,i-1}$, $N_{2,i-1}$, $N_{3,i-1}$ — координаты вектора N (т.е. кватерниона N с нулевой скалярной частью) на промежутке пассивного движения перед моментом сообщения импульса.

Кроме того, в этот момент происходит скачкообразное изменение кватерниона ориентации орбиты Λ и вектора N по формулам

$$\Lambda_i = \Lambda_{i-1} \circ B_i, \quad N_i = \tilde{B}_i \circ N_{i-1} \circ B_i; \quad (29)$$

$$B_i = \cos \frac{\Delta\psi_i}{2} + \sin \frac{\Delta\psi_i}{2} (i_1 \cos\varphi_i + i_2 \sin\varphi_i). \quad (30)$$

Если момент сообщения импульса совпадает с начальным моментом процесса управления, то в этот момент выполняется соотношение

$$|N_{1,0}\cos\varphi_1 + N_{2,0}\sin\varphi_1| = 2\alpha_2(1 + e\cos\varphi_1), \quad (31)$$

где $\varphi_1 = \varphi_0$ — истинная аномалия КА в начальный момент времени; $N_{1,0}$, $N_{2,0}$ — координаты вектора N в начальный момент времени.

В конечный момент времени, который обязательно совпадает с моментом сообщения последнего импульса, должны выполняться следующие соотношения:

$$|N_{1,k-1}\cos\varphi_k + N_{2,k-1}\sin\varphi_k| = 2\alpha_2(1 + e\cos\varphi_k); \quad (32)$$

$$\text{vect}(\tilde{\Lambda}(\tau_k) \circ \Lambda_k) = 0; \quad (33)$$

$$\alpha_1 + \frac{U_k}{2} \left\{ N_{1,k-1} \sin \varphi_k - N_{2,k-1} (e + \cos \varphi_k) - \right. \\ \left. - (1 + e \cos \varphi_k) \left[(N_{1,k-1} \sin \varphi_k - N_{2,k-1} \cos \varphi_k) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(1 - \frac{\sin(\Delta \psi_k)}{\Delta \psi_k} \right) + N_{3,k-1} \frac{1 - \cos(\Delta \psi_k)}{\Delta \psi_k} \right] \right\} = 0, \quad (34)$$

где $\Delta \psi_k = \frac{U}{1 + e \cos \varphi_k}$, а $N_{1,k-1}$, $N_{2,k-1}$, $N_{3,k-1}$ — компоненты вектора $\mathbf{N} = \mathbf{N}_{k-1}$ на пассивном участке перед конечным моментом времени.

После сообщения импульса (за исключением последнего) необходимо проверить, что за моментом сообщения импульса следует пассивный этап. Для этого необходимо потребовать, чтобы знак дроби

$$\frac{N_{1,i} \cos \varphi + N_{2,i} \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}, \quad (35)$$

где $N_{1,k}$, $N_{2,k}$ — компоненты вектора $\mathbf{N} = \mathbf{N}_k$ на этапе после сообщения импульса, и знак ее производной по истинной аномалии φ в момент сообщения импульса были противоположные. Следовательно, в этом случае должно выполняться условие

$$(N_{1,i} \cos \varphi + N_{2,i} \sin \varphi) \times \\ \times (-N_{1,i} \sin \varphi + N_{2,i} (e + \cos \varphi)) < 0. \quad (36)$$

Возможны два варианта в структуре оптимального управления: первый вариант, когда начальный момент не совпадает с моментом сообщения импульса, и второй вариант, когда эти моменты совпадают.

В первом варианте задаются (выбираются) значения $N_{1,0}$, $N_{2,0}$, $N_{3,0}$ трех координат вектора $\mathbf{N}_0$ в начальный момент времени и значение истинной аномалии φ_k в конце процесса управления. Значения координат вектора $\mathbf{N}_0$ должны удовлетворять условию отсутствия импульса в этот момент времени:

$$|N_{1,0} \cos \varphi_0 + N_{2,0} \sin \varphi_0| < 2\alpha_2(1 + e \cos \varphi_0). \quad (37)$$

Затем значение истинной аномалии φ постепенно изменяется в большую сторону (в сторону движения КА) и проверяется условие отсутствия импульса

$$|N_{1,0} \cos \varphi + N_{2,0} \sin \varphi| < 2\alpha_2(1 + e \cos \varphi). \quad (38)$$

Как только условие (38) нарушается, из соотношения (27) определяется значение истинной аномалии φ_1 в момент сообщения первого импульса. Из соотношения (28) определяется алгебраическое значение первого импульса U_1 . По формулам (29) и (30) по известным значениям Λ_0 и $\mathbf{N}_0$ вычисляются значения кватерниона ориентации орбиты Λ_1 и вектора $\mathbf{N}_1$ на следующем пассивном промежутке. Проверяется условие (36) для подтверждения, что

после сообщения импульса следует пассивный этап. Если условие (36) не выполняется, то необходимо вернуться к начальному состоянию и выбрать новые значения для компонентов вектора $\mathbf{N}_0$. Далее процесс повторяется.

Как только истинная аномалия достигнет конечного значения, из соотношения (34) определяется значение последнего импульса U_k . По формуле (29) вычисляется значение кватерниона ориентации $\Lambda(\tau_k)$ после сообщения последнего импульса. Затем вычисляются погрешности выполнения четырех условий (32) и (33) в скалярном исчислении. Если погрешности превышают заданную точность решения задачи, то с помощью комбинации модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска уточняются значения $N_{1,0}$, $N_{2,0}$, $N_{3,0}$ трех координат вектора $\mathbf{N}_0$ в начальный момент времени и значение φ_k истинной аномалии в конечный момент времени.

Моменты времени сообщения импульсов определяются по найденным значениям φ_i с помощью интегрирования уравнения

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \frac{1}{(1 + e \cos \varphi)^2} \quad (39)$$

и начального условия $\tau(\varphi_0) = 0$.

Во втором варианте выбираются две компоненты $N_{1,0}$, $N_{3,0}$ или $N_{2,0}$, $N_{3,0}$ вектора $\mathbf{N}_0$, значение начального импульса U_0 и значение φ_k истинной аномалии в конце процесса управления. Значение третьей компоненты $N_{2,0}$ или $N_{1,0}$ вектора $\mathbf{N}_0$ определяется по двум другим компонентам из уравнения

$$N_{1,0} \cos \varphi_0 + N_{2,0} \sin \varphi_0 - 2(1 + e \cos \varphi_0) \text{sign } U_0 = 0. \quad (40)$$

Далее по формулам (29), (30) по известным значениям Λ_0 и $\mathbf{N}_0$ вычисляются кватернион ориентации орбиты Λ_1 и вектор $\mathbf{N}_1$ на следующем пассивном промежутке. Проверяется условие (36) для подтверждения того факта, что после сообщения импульса следует пассивный этап. Если условие (36) не выполняется, то необходимо вернуться к начальному состоянию и выбрать новые значения для компонент вектора $\mathbf{N}_0$ и начального импульса U_0 . Если условие (36) выполняется, то, как и в первом варианте, проводится постепенное увеличение истинной аномалии φ и проверяется условие отсутствия импульса (38). Далее повторяются все действия из первого варианта. В конце процесса вычисляются погрешности выполнения четырех условий (32) и (33) в скалярном исчислении. Если погрешности превышают заданную точность решения задачи, то с помощью комбинации модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска уточняются значения двух координат $N_{1,0}$, $N_{3,0}$ или $N_{2,0}$, $N_{3,0}$ вектора $\mathbf{N}_0$ в начальный момент времени, значение начального импульса U_0 и значение φ_k истинной аномалии в конечный момент времени.

Примеры решения задач оптимальной переориентации орбиты КА с использованием ограниченной или импульсной тяги

Для численного решения задач об оптимальной переориентации орбиты КА с ограниченной или импульсной тягой на ЭВМ разработаны программы, реализующие описанные выше алгоритмы. В случае ограниченной тяги краевая задача для системы дифференциальных уравнений (12), (22), (23), (31) (см. работу [9]) девятого порядка по определению фазовых и сопряженных переменных, сформулированная в первой части статьи, решалась (для нефиксированного числа активных участков) с использованием метода Рунге—Кутты 4-го порядка точности и комбинации модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Так как оптимальное управление согласно (23) (см. работу [9]) содержит разрывы, то для улучшения сходимости итерационного процесса проводилось уточнение момента разрыва управления. Для задачи с двухимпульсным управлением система алгебраических уравнений (21) решалась с использованием комбинации модифицированного метода Ньютона и метода градиентного спуска. Результаты расчетов представлены ниже в безразмерных переменных.

Вариант 1. В этом примере приведено решение двухимпульсной задачи переориентации орбиты, когда первый импульс реактивной тяги сообщается КА в начальный момент времени процесса управления. Решение задачи получено в результате решения системы алгебраических уравнений (21).

Эксцентриситет орбиты $e = 0,1$, минимизируемый функционал и его весовые множители определяются соотношениями

$$J = \alpha_1 \tau_k + \alpha_2 (|U_1| + |U_2|), \quad \alpha_1 = 1,0, \quad \alpha_2 = 0,5. \quad (41)$$

Начальная ориентация орбиты определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0,299626, \quad \Lambda_1 = -0,249688, \\ \Lambda_2 = 0,599251, \quad \Lambda_3 = -0,699127.$$

В классических элементах начальная ориентация орбиты определяется углом наклона орбиты $I = 80,9609^\circ$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 45,8185^\circ$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 180,5787^\circ$.

Положение КА на орбите в начальный момент времени определяется истинной аномалией $\varphi_0 = 0,5$ рад или $28,6479^\circ$.

Заданная ориентация орбиты КА в конце управления определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0,369880, \quad \Lambda_1 = -0,342063, \\ \Lambda_2 = 0,480209, \quad \Lambda_3 = -0,718040.$$

В классических элементах конечная ориентация орбиты определяется углом наклона орбиты $I = 72,2548^\circ$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 62,7172^\circ$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 171,7910^\circ$.

В результате решения двухимпульсной задачи переориентации орбиты КА получено, что началь-

ный импульс $U_1 = 0,549631$, угол поворота орбиты за счет начального импульса $\Delta\psi = 0,505287$ рад или $28,9510^\circ$. Ориентация орбиты после сообщения начального импульса определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0,273073, \quad \Lambda_1 = -0,092251, \\ \Lambda_2 = 0,462771, \quad \Lambda_3 = -0,838310.$$

В классических элементах орбиты ее ориентация после сообщения первого импульса и на пассивном этапе движения КА определяется углом наклона орбиты $I = 56,3122^\circ$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 29,3164^\circ$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 186,7689^\circ$.

Время движения КА между начальным и конечным импульсами равно 0,534173 безразмерных единиц, значение истинной аномалии в конечный момент времени $\varphi_k = 1,109343$ рад или $63,5605^\circ$.

Конечный импульс $U_2 = -0,616812$, угол поворота орбиты за счет конечного импульса $\Delta\psi = -0,590521$ рад или $-33,8343^\circ$. Значение функционала (41), определяющего качество процесса управления, равно 1,117397.

Отметим, что все результаты расчетов кроме классических угловых элементов орбит представлены в безразмерных переменных. Для возвращения к размерным переменным необходимо воспользоваться соотношениями (11) (см. работу [9]).

Вариант 2. При увеличении разности между соответствующими угловыми элементами, определяющими ориентацию начальной и конечной орбит КА, число моментов переключения управления может возрасти. Приведем пример такого решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА с использованием двигателя малой тяги. В этом примере рассмотрен случай, когда критерием оптимальности является алгебраическая величина характеристической скорости, т.е. в функционале (16) (см. работу [9]) весовые множители $a_1 = 0,0$, $a_2 = 1,0$. Максимальное значение безразмерной тяги, ортогональной к плоскости орбиты КА, $u_m = 0,2$, эксцентриситет орбиты $e = 0,1$. Начальная ориентация орбиты в момент времени $t = 0,0$ определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0,299626, \quad \Lambda_1 = -0,249688, \\ \Lambda_2 = 0,599251, \quad \Lambda_3 = -0,699127.$$

В классических элементах начальная ориентация орбиты определяется углом наклона орбиты $I = 80,9609^\circ$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 45,8185^\circ$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 180,5787^\circ$. Начальному положению КА на орбите соответствует значение истинной аномалии $\varphi = 0,5$ рад.

Ориентация орбиты, на которую требуется перевести КА, определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0,376260, \quad \Lambda_1 = -0,390577, \\ \Lambda_2 = 0,570273, \quad \Lambda_3 = -0,616982.$$

В классических элементах конечная ориентация орбиты определяется углом наклона орбиты $I = 87,4508^\circ$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 65,7835^\circ$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 176,9694^\circ$.

Оптимальное управление состоит из пяти этапов, при этом первый, третий и пятый этапы являются активными, а второй и четвертый — пассивными, на которых управление $u = 0$ и ориентация орбиты не изменяются. На первом этапе $0,0 \leq t \leq 0,244511$ управление $u = 0,2$. Ориентация орбиты в конце первого этапа определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0,295958, \Lambda_1 = -0,234733, \\ \Lambda_2 = 0,590542, \Lambda_3 = -0,713141.$$

В классических элементах эта орбита определяется углом наклона орбиты $I = 78,9117^\circ$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 44,2160^\circ$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 180,8116^\circ$. Истинная аномалия КА в этот момент времени $\varphi = 0,780333$ рад.

На втором этапе $0,244511 \leq t \leq 0,759668$ управление $u = 0,0$, орбита не изменяет свою ориентацию, а истинная аномалия КА изменяется в пределах $0,780333 \leq \varphi \leq 1,345307$.

На третьем этапе $0,759668 \leq t \leq 2,131597$ управление $u = -0,2$. Ориентация орбиты в конце третьего этапа определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0,380611, \Lambda_1 = -0,298721, \\ \Lambda_2 = 0,509331, \Lambda_3 = -0,711676.$$

В классических элементах эта орбита определяется углом наклона орбиты $I = 72,3804^\circ$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 58,5297^\circ$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 177,7468^\circ$. Истинная аномалия КА в этот момент времени $\varphi = 2,615769$ рад.

На четвертом этапе $2,131597 \leq t \leq 2,665847$ управление $u = 0,0$, орбита не изменяет свою ориентацию, а истинная аномалия КА изменяется в пределах $2,615769 \leq \varphi \leq 3,050927$.

На пятом этапе $2,665847 \leq t \leq 4,081069$ управление $u = 0,2$, истинная аномалия КА изменяется в пределах $3,050927 \leq \varphi \leq 4,241363$. Ориентация орбиты в конце пятого этапа совпадает с заданной ориентацией конечной орбиты.

Длительности активных этапов $\Delta t_1 = 0,244511$, $\Delta t_3 = 1,371929$, $\Delta t_5 = 1,415222$. Длительности пассивных этапов $\Delta t_2 = 0,515157$, $\Delta t_4 = 0,534250$. Суммарная длительность активных этапов равна 3,031662, а значение функционала (16) (см. работу [9]) равно 0,606332. Общая продолжительность процесса равна 4,081069 безразмерного времени.

Ниже приводятся примеры решения импульсной задачи переориентации орбиты КА по алгоритму, изложенному в данной части статьи, в котором заранее не задается число импульсов. В вариантах 3 и 4 начальная и конечная ориентации орбиты, эксцентриситет орбиты и начальное положение КА на орбите совпадают с соответствующими величинами варианта 2.

Вариант 3. Весовые множители в функционале (3) равны следующим значениям: $\alpha_1 = 0,0$, $\alpha_2 = 1,0$. На промежутке $0 \leq t < 1,438531$ КА совершает пассивный полет, при этом истинная аномалия КА изменяется в пределах $0,5 \leq \varphi \leq 2,007904$. В момент $t = t_1 = 1,438531$ под действием импульса $U_1 = -0,213018$ совершается поворот орбиты вокруг радиуса-вектора КА на угол $\Delta\psi_1 = -0,222435$ рад или $-12,7446^\circ$. После первого импульса ориентация орбиты определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0,369763, \Lambda_1 = -0,304367, \\ \Lambda_2 = 0,532573, \Lambda_3 = -0,697856.$$

В классических элементах ориентация промежуточной орбиты определяется углом наклона орбиты $I = 75,6731^\circ$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 57,6652^\circ$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 178,1690^\circ$.

По этой орбите на промежутке $1,438531 < t < 3,562805$ КА совершает пассивный полет, при этом истинная аномалия КА изменяется в пределах $2,007904 < \varphi < 3,784046$. В момент $t = t_k = 3,562805$ под действием импульса $U_k = 0,228738$ совершается поворот орбиты вокруг радиуса-вектора КА на угол $\Delta\psi_k = 0,248645$ рад или $14,2463^\circ$. После второго импульса ориентация орбиты КА совпала с заданной конечной орбитой.

Значение функционала, определяющего качество процесса переориентации орбиты, $J = 0,441756$. Длительность процесса управления равна 3,562805 безразмерного времени.

Из сравнения результатов вариантов 2 и 3, в которых одни и те же исходные данные по начальной и конечной ориентациям орбит, эксцентриситету орбиты, начальной истинной аномалии и весовым множителям в функционале минимизации, видно, что значение функционала для импульсной задачи меньше, чем для задачи с ограниченной тягой, что и должно было иметь место.

Отметим, что решение двухимпульсной задачи для исходных данных варианта 2 по методу, изложенному в п. 1, когда первый импульс сообщается КА в начальный момент, а второй импульс — в конце движения, дает большее значение функционала $J = 0,793668$ и, следовательно, оказывается неоптимальным.

Вариант 4. Весовые множители в функционале (3) равны следующим значениям: $\alpha_1 = 0,75$, $\alpha_2 = 1,0$. В этом случае оптимальным режимом импульсного управления является режим, когда первый импульс сообщается в начальный момент времени, а второй — в конце процесса управления. Начальный импульс $U_1 = 0,229210$ поворачивает орбиту на угол $\Delta\psi = 12,0732^\circ$. Далее, в течение промежутка $0,0 < t < 0,439623$ КА совершает пассивный полет по орбите, ориентация которой определяется кватернионом с компонентами

$$\Lambda_0 = 0,290795, \Lambda_1 = -0,185402, \\ \Lambda_2 = 0,546512, \Lambda_3 = -0,763144.$$

В классических элементах орбиты ее ориентация определяется углом наклона орбиты $I = 70,4943^\circ$, долготой восходящего узла $\Omega_u = 39,5986^\circ$, угловым расстоянием до перицентра $\omega_\pi = 182,1200^\circ$.

В момент $t = 0,439623$ сообщается второй импульс $U_2 = -0,564458$, который поворачивает орбиту на угол $\Delta\psi = -30,6962^\circ$ вокруг радиуса-вектора КА с истинной аномалией $\varphi_k = 1,005280$ рад или $57,5983^\circ$. В результате сообщения второго импульса ориентация орбиты КА совпадает с заданной конечной орбитой. Значение функционала $J = 1,123386$. В то же время значение функционала для режима управления, рассмотренного в варианте 3, когда первый этап является пассивным и минимизируется характеристическая скорость, $J = 2,462584$ (имеет большее значение).

Рассмотренные примеры показывают, что с помощью принципа максимума Понтрягина, определяющего необходимые условия оптимальности, можно получить несколько режимов управления, претендующих на оптимальность. Из их сравнения между собой можно выбрать оптимальный режим управления.

Отметим, что численное решение задачи оптимальной переориентации орбиты КА с ограниченной тягой (для различных максимальных значений допустимого управления), а также с импульсной тягой показало, что при увеличении максимальной величины допустимого управления решение задачи об оптимальной переориентации орбиты КА с ограниченной тягой приближается к решению задачи с импульсной тягой, что свидетельствует о корректности используемой методологии построения импульсного решения задачи оптимальной переориентации орбиты КА.

Заключение

В настоящей, второй, части статьи в строгой нелинейной постановке построена новая теория решения задачи оптимальной импульсной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты, с использованием кватернионного дифференциального уравнения ориентации орбиты КА для нефиксированного числа импульсов реактивной тяги: формула (4), связывающая импульс реактивной тяги U_i на i -м активном участке траектории с углом $\Delta\psi_i$ поворота орбиты КА вокруг его радиуса-вектора; формула (5), связывающая значение кватерниона Λ_{i-1} , определяющего ориентацию орбиты перед сообщением импульса U_i в момент τ_i , со значением кватерниона ориентации орбиты Λ_i после сообщения импульса; аналогичная формула (6) для кватернионной сопряженной переменной $\mathbf{M}$; формула (13) для приращения $\Delta\chi_i$ скалярной сопряженной переменной χ ; формула (14), связывающая значения переменных N_1, N_2 , описывающих функцию переключения управления, в начальный и конечный моменты времени i -го активного участка, а также дополнитель-

ное условие (15) для внутреннего импульса реактивной тяги.

На основе построенной теории предложены новые алгоритмы оптимальной двухимпульсной и многоимпульсной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости оскулирующей орбиты. Приведены примеры численного решения краевых задач оптимальной переориентации орбиты КА с ограниченной или импульсной реактивной тягой, позволившие установить свойства и закономерности процесса оптимальной переориентации орбиты КА посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты.

Список литературы

1. Челноков Ю. Н. Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. Ч. 2 // Космические исследования. 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
2. Chelnokov Yu. N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II // Cosmic Research. 1993. V. 31, N. 3. P. 409–418.
3. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 512 с.
4. Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 560 с.
5. Челноков Ю. Н. Оптимальная переориентация орбиты космического аппарата посредством реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76, Вып. 6. С. 897–914.
6. Chelnokov Yu. N. Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane, J. Appl. Math. Mech. 76 (6), 646–657 (2012).
7. Челноков Ю. Н. Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // Космические исследования. 2014. Т. 52, № 4. С. 322–336.
8. Chelnokov Yu. N. Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II // Cosmic Research. 2014. V. 52, N. 4. P. 350–361.
9. Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Исследование задачи оптимальной переориентации орбиты космического аппарата посредством ограниченной или импульсной реактивной тяги, ортогональной плоскости орбиты. Часть 1 // Мехатроника, автоматизация, управление. Т. 17, № 8. С. 567–575.
10. Griffin M., French J. Space Vehicle Design. AIAA Education Series, 2004. 665 p.
11. Ильин В. А., Кузмяк Г. Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. М.: Наука, 1976. 741 с.
12. Ненахов С. В., Челноков Ю. Н. Кватернионное решение задачи оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата // Бортовые интегрированные комплексы и современные проблемы управления: Сб. тр. междунар. конф. М.: МАИ, 1998. С. 59–60.
13. Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н. Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 185–188.
14. Сергеев Д. А., Челноков Ю. Н. Оптимальное управление ориентацией орбиты космического аппарата // Проблемы точной механики и управления: Сб. науч. тр. ИПТМУ РАН. Саратов: Изд-во СГТУ, 2002. С. 64–75.
15. Панкратов И. А., Сапунков Я. Г., Челноков Ю. Н. Об одной задаче оптимальной переориентации орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 87–95.
16. Бранец В. Н., Шмыгловский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела М.: Наука, 1973. 320 с.

Investigation of the Task of the Optimal Reorientation of a Spacecraft Orbit through a Limited or Impulse Jet Thrust, Orthogonal to the Plane of the Orbit. Part 2

Ya. G. Sapunkov, Yu. N. Chelnokov, ChelnokovYuN@gmail.com✉,

Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov National Research State University, Saratov, 410028, Russian Federation

Corresponding author: Chelnokov Yuri N., D. Sc.,

Head of the Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com

Received on March 29, 2016

Accepted on April 08, 2016

This paper considers the problem of optimal reorientation of the spacecraft's orbit by a limited or pulse jet thrust which is orthogonal to the plane of the osculating orbit, with the help of quaternion differential equation of the spacecraft (SC) orbit orientation and the Pontryagin maximum principle. This kind of jet thrust changes the orientation of the spacecraft orbits while its shape and size during control process kept unchanged. Functional that defines quality of control process is a weighted convolution of two criteria: time and the total momentum of jet thrust spent on control process (special cases of this functional are fast response problem and the problem of minimizing the characteristic velocity). In the second part of the article we present a new theory of problem of optimal reorientation of the spacecraft orbit in pulse setting (using pulse (large) jet thrust). We provide algorithms for solving boundary value problems of optimal two-pulse and multi-pulse reorientation of the spacecraft orbit (non-fixed number of jet thrust pulses) and examples of numerical solution of boundary value problems of optimal reorientation of the spacecraft orbit with a limited (small) or pulse (large) thrust in which quaternion osculating element is used to describe the orientation of the spacecraft orbit.

Keywords: spacecraft, orbit orientation, limited (small) and impulse (large) jet thrust, optimal control, quaternion

For citation:

Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. Investigation of the Task of the Optimal Reorientation of a Spacecraft Orbit through a Limited or Impulse Jet Thrust, Orthogonal to the Plane of the Orbit. Part 2, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 633–643.

DOI: 10.17587/mau.17.633-643

References

1. Chelnokov Yu. N. *Primenenie kvaternionov v teorii orbital'nogo dvizheniya iskusstvennogo sputnika. Ch. 2* (Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. Part II), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1993, vol. 31, no. 3, pp. 3–15 (in Russian).
2. Chelnokov Yu. N. Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II, *Cosmic Research*, 1993, vol. 31, no. 3, pp. 409–418.
3. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya* (Quaternion and bi-quaternion models and methods of solid state mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion), Moscow, Fizmatlit, 2006, 512 p. (in Russian).
4. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnye modeli i metody dinamiki, navigatsii i upravleniya dvizheniem* (Quaternion models and methods of dynamics, navigation and motion control), Moscow, Fizmatlit, 2011. 560 p. (in Russian).
5. Chelnokov Yu. N. Optimal'naia pereorientatsiya orbity kosmicheskogo apparata posredstvom reaktivnoi tiagi, ortogonal'noi ploskosti orbity (Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane), *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 897–914 (in Russian).
6. Chelnokov Yu. N. Optimal reorientation of a spacecraft's orbit using a jet thrust orthogonal to the orbital plane, *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 6, pp. 646–657.
7. Chelnokov Yu. N. Kvaternionnaia regularizatsiya v nebesnoi mekhanike i astrodinamike i upravlenie traektornym dvizheniem. II (Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 2014. Vol. 52. No 4. P. 322–336 (in Russian).
8. Chelnokov Yu. N. Quaternion Regularization in Celestial Mechanics and Astrodynamics and Trajectory Motion Control. II, *Cosmic Research*, 2014, vol. 52, no. 4, pp. 350–361.
9. Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. *Issledovanie zadachi optimal'noi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata posredstvom ortogonal'noi impulsnoi reaktivnoi tiagi, ortogonal'noi ploskosti orbity. Chast' 1* (Investigation of the Task of the Optimal Reorientation of a Spacecraft Orbit through a Limited or Impulse Jet Thrust, Orthogonal to the Plane of the Orbit. Part 1), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 8, pp. 567–575 (in Russian).
10. Griffin M., French J. *Space Vehicle Design*. AIAA Education Series. 2004, 665 pp.
11. Il'in V. A., Kuzmak G. E. *Optimal'nye perelety kosmicheskikh apparatov s dvigateliami bol'shoi tiagi* (Optimal flights of spacecraft with high-thrust engines), Moscow, Nauka, 1976, 741 p. (in Russian).
12. Nenakhov S. V., Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo upravleniya orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Quaternion solution of a task of an optimal control of spacecraft's orbit orientation), *Proc. of the international conference "Bortovye integrirovannye komplekсы i sovremennye problemy upravleniya"*, Moscow, MAI, 1998, pp. 59–60 (in Russian).
13. Sergeev D. A., Chelnokov Yu. N. *Optimal'noe upravlenie orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Optimal control of spacecraft's orbit's orientation), *Matematika. Mekhanika: Sb. nauch. tr.*, Saratov, Publishing house of SGTU, 2001, no 3, pp. 185–188 (in Russian).
14. Sergeev D. A., Chelnokov Yu. N. *Optimal'noe upravlenie orientatsiei orbity kosmicheskogo apparata* (Optimal control of spacecraft's orbit's orientation), *Problemy tochnoi mekhaniki I upravleniya: Sb. nauch. tr. IPTMU RAN*, Saratov: Publishing house of SGTU, 2002, pp. 64–75 (in Russian).
15. Pankratov I. A., Sapunkov Ya. G., Chelnokov Yu. N. *Ob odnoi zadache optimal'noi pereorientatsii orbity kosmicheskogo apparata* (About a problem of spacecraft's orbit optimal reorientation), *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 12, no. 3, pp. 87–95 (in Russian).
16. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* (Use of quaternions in the problems of orientation of solid bodies), Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).

Г. П. Шибанов, д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр., gpshibanov@mail.ru,
Государственный летно-испытательный центр им. В. П. Чкалова

Автоматизация процесса защиты газотурбинных двигателей от помпажа

Анализируется один из возможных путей автоматизации процесса защиты газотурбинных двигателей от помпажа по текущим и пороговым значениям скорости изменения частоты вращения роторов и температуры газов за турбиной с учетом знаков изменения этих параметров.

Приводится алгоритм, позволяющий своевременно обнаружить признаки возможного появления помпажа, уменьшить подачу топлива и в случае выключения двигателя осуществить его автоматический запуск.

Ключевые слова: автоматизация, алгоритм, помпаж, газотурбинный двигатель

Газотурбинные двигатели (ГТД) широко используются в авиационных, судовых силовых установках, на мощных тягачах и современных танках, на насосных станциях при перекачке газа. Обладая несомненными преимуществами по развиваемой ими мощности при достаточно высоком коэффициенте полезного действия, они, к сожалению, имеют и один серьезный недостаток — высокую чувствительность к нарушению соответствия между расходом воздуха в газозоудшном тракте и частотой вращения компрессора. Вместе с тем такое нарушение приводит, как правило, к неустойчивой работе компрессора и возникновению помпажа, сопровождающегося уменьшением частоты вращения роторов двигателя, сильной вибрацией конструкции (тряской) и возрастанием температуры газов перед турбиной [1].

Для расширения диапазона устойчивой работы компрессора применяют ряд действий: используют поворотные лопатки направляющих аппаратов компрессора, выполняют перепуск воздуха в атмосферу после нескольких ступеней, реализуют двухконтурные схемы двигателей. Однако все эти мероприятия не гарантируют возможности возникновения помпажа двигателя как на переходных режимах его работы, так и при действии значительных внешних возмущений или появлении тех или иных неисправностей. Необходимо отметить, что процесс развития помпажного срыва оказывается настолько скоротечным, что оператор не в состоянии своевременно его обнаружить и принять меры для предотвращения аварийной ситуации, например, обгорания лопаток турбины и вибрационных разрушений отдельных элементов конструкции [2]. Быстротечность протекания помпажа заставляет искать способы автоматической защиты двигателя при возникновении помпажного срыва. На ряде ГТД устанавливают ограничители температуры, которые непрерывно измеряют температуру газов за турбиной и при недопустимо высоком ее значении выдают сигнал на уменьшение подачи топлива.

Для прекращения помпажа двигателя в некоторых случаях недостаточно уменьшения подачи

топлива, а требуется полное выключение двигателя, чего ограничитель максимальной температуры обеспечить не может. Кроме того, ограничитель температуры реагирует на возникновение помпажа не в начальной стадии, а в момент, когда температура газов за турбиной превысит максимально допустимое значение.

Пневматические датчики возникновения помпажа широкого применения не нашли из-за трудностей, связанных с предупреждением их ложного срабатывания при дросселировании двигателя.

Указанные недостатки перечисленных способов обнаружения и прерывания помпажа ГТД в значительной степени могут быть устранены при непрерывном слежении за изменением температуры газов за турбиной и частоты вращения турбины и при последующем воздействии сигналами от датчиков температуры и частоты вращения на систему регулировки подачи топлива. Отметим, что для повышения эффективности контроля состояния газодинамического тракта ГТД целесообразно осуществлять непрерывное слежение не за самой температурой газов за турбиной, а за скоростью изменения температуры. В этом случае процедура контроля может быть сведена к сравнению положительного по знаку текущего значения скорости изменения температуры газов за турбиной с предельно допустимым ее значением и к определению (при их совпадении или при превышении предельного значения) знака приращения частоты вращения турбины. Если знак приращения частоты вращения турбины окажется отрицательным, то формируется сигнал на уменьшение подачи топлива и включаются звуковая и световая сигнализации появления помпажного режима.

В целом контроль состояния газодинамического тракта ГТД сводится, таким образом, к следующему алгоритму:

- 1) проверка условия $dT_4/dt > 0$;
- 2) если условие 1 выполнено, то проверка условия $dT_4/dt \geq (dT_4/dt)_{\max_доп}$;
- 3) если условие 2 выполнено, то проверка условия $dn/dt < 0$;

Операторы и реализуемые ими функции

№	Условное обозначение оператора	Реализуемые оператором функции	Значения, принимаемые оператором	Условия, при которых оператор принимает значения "0" или "1"
1	$P(I_z, I_s)$	Формирование звуковых и световых сигналов оповещения о появлении признаков помпажа	1 0	$\left(\frac{dT_4}{dt}\right) \geq \left(\frac{dT_4}{dt}\right)_{\max_доп}$ и $\text{sign}\left(\frac{dn}{dt}\right) = -1$ $\left(\frac{dT_4}{dt}\right) < \left(\frac{dT_4}{dt}\right)_{\max_доп}$
2	$Y(\Delta G_T)$	Формирование команды на уменьшение подачи топлива	1 0	$\text{sign}\left(\frac{dn}{dt}\right) = -1$ и $\left(\frac{dT_4}{dt}\right) - \left(\frac{dT_4}{dt}\right)_{\max_доп} \leq 0$ $\text{sign}\left(\frac{dT_4}{dt}\right) = \text{sign}\left(\frac{dn}{dt}\right) = -1$ и $\Delta G_T \neq 0$
3	$\pi(G_T)$	Слежение за изменением расхода топлива	1 0	$G_T = 0$ $G_T \neq 0$
4	$\pi(n)$	Слежение за изменением значений частоты вращения турбины	1 0	$\pi(G_T) = 1$ и $n \leq n_{\min_доп}$ $\pi(G_T) = 0$ и $n > n_{\min_доп}$
5	$F(n)$	Формирование команды на запуск двигателя после его самопроизвольного выключения из-за полной отсечки топлива	1 0	$n \leq n_{\text{мг}} - (\Delta n)_{\text{доп}}$; $G_T = 0$ $n > n_{\text{мг}} - (\Delta n)_{\text{доп}}$, $n_{\text{мг}}$ — частота вращения на режиме "малый газ"; $(\Delta n)_{\text{доп}}$ — допустимое уменьшение частоты вращения, при котором еще возможен запуск двигателя

4) если условие 3 выполнено, то формирование сигнала на уменьшение подачи топлива и включение звуковой и световой сигнализаций появления помпажного режима.

Здесь T_4 — температура газов за турбиной (в °C); n — частота вращения турбины (для одновальных ГТД) или ротора низкого давления (для двухконтурных ГТД); $\left(\frac{dT_4}{dt}\right)_{\max_доп}$ — предельно допустимое значение первой производной температуры газов за турбиной.

Указанные особенности процедуры контроля газодинамического тракта ГТД позволяют ускорить процесс обнаружения момента появления помпажного режима, уменьшить время срабатывания системы регулировки подачи топлива и в целом снизить вероятность появления аварийных ситуаций в ГТД.

В рассмотренном выше алгоритме все контрольные операции газодинамического тракта ГТД сводятся к параллельно-последовательному использованию пяти типов дискретных операторов, представляющих собой функции двоичных переменных, основные характеристики которых приведены в таблице.

Оператор $P(I_z, I_s)$ формирования звуковых и световых сигналов оповещения о появлении признаков помпажа и оператор $Y(\Delta G_T)$ формирования команды на уменьшение подачи топлива реализуются практически одновременно. Их реализация осуществляется в следующей последовательности. Сравнивается положительное по знаку текущее значение скорости изменения температуры газов за

турбиной $\left(\frac{dT_4}{dt}\right)$ с предельно допустимым ее значе-

нием $\left(\frac{dT_4}{dt}\right)_{\max_доп}$ и при $\left(\frac{dT_4}{dt}\right) \geq \left(\frac{dT_4}{dt}\right)_{\max_доп}$

определяется знак приращения частоты вращения

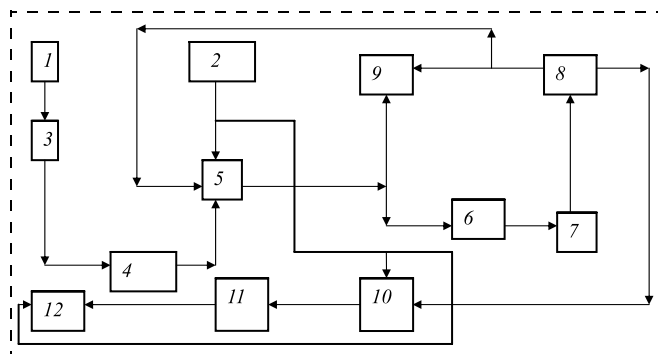
турбины $\text{sign}\left(\frac{dn}{dt}\right)$. При $\text{sign}\left(\frac{dn}{dt}\right) = -1$ операторы

$P(I_z, I_s)$ и $Y(\Delta G_T)$ принимают значения "1", в соответствии с чем уменьшается подача топлива и формируются команды I_z и I_s включения звуковой и световой сигнализации появления признаков помпажного режима.

Если помпажный режим прекращается лишь после полной отсечки топлива ($G_T = 0$) и двигатель выключается, то реализуется оператор $F(n)$, который при уменьшении частоты вращения n ниже $n_{\text{мг}}$ принимает значение "1". В соответствии с этим формируется команда на запуск ГТД. Операторы $\pi(G_T)$ и $\pi(n)$ являются вспомогательными, обеспечивающими запуск схемы реализации оператора $F(n)$.

Контроль газодинамического тракта ГТД по описанному алгоритму технически наиболее просто может быть реализован посредством автономного устройства, блок-схема которого применительно к авиационному двигателю приведена на рисунке.

В процессе работы авиадвигателя блок 3 осуществляет дифференцирование сигнала, снимаемого с выхода датчика I , и формирование сигнала, пропорционального первой производной от входного. Он реагирует на увеличение входного сигнала, что, например, при выполнении данного блока на базе дифференцирующего усилителя постоянного тока



Блок-схема бортового противопомпажного электронного устройства авиационного газотурбинного двигателя:

1 — датчик температуры газов за турбиной; 2 — датчик частоты вращения турбины (для одновальных ГТД) или частоты вращения ротора низкого давления (для двухконтурных ГТД); 3 — дифференцирующий блок; 4 — пороговое устройство; 5 — блок определения знака приращения частоты вращения; 6 — электронный блок управления исполнительного механизма регулятора подачи топлива; 7 — регулятор подачи топлива; 8 — датчик перемещения регулирующего элемента, например, рычага управления двигателем или наклонной шайбы топливного насоса-регулятора; 9 — сигнализатор появления признаков помпажа ГТД; 10 — клапан; 11 — пороговый элемент; 12 — система авиадвигателя "Запуск в воздухе"

достигается за счет соответствующего выбора рабочей точки входного каскада.

При поступлении сигнала от блока 3 устройство 4 обеспечивает проверку условия

$$\left(\frac{dT_4}{dt}\right) \geq \left(\frac{dT_4}{dt}\right)_{\max_доп}.$$

При выполнении указанного условия на выходе порогового устройства 4 появляется импульсный сигнал. При этом если имеет место тенденция уменьшения значений n (о чем свидетельствует отрицательный знак приращения частоты вращения, т. е. выполнение условия $\text{sign} \Delta n = -1$), то блок 5 по данному сигналу устройства 4 на основе анализа приращений частоты вращения Δn за малые дискретные промежутки времени, определяемые выражением $\Delta t = \frac{1}{2f}$, где f — максимальное значение из-

менения частоты вращения, формирует сигнал, по которому проводится включение сигнализатора 9, обеспечивающего срабатывание элементов звуковой и световой сигнализаций появления помпажа.

Одновременно с этим появившийся на выходе блока 5 сигнал поступает на вход блока 6, по которому в последнем формируется сигнал управления электромагнитным исполнительным механизмом регулятора 7 подачи топлива. Под воздействием данного сигнала выполняется перемещение рабочего органа исполнительного механизма в сторону уменьшения подачи топлива, что вызывает, в свою очередь, срабатывание датчика 8 и появление на его выходе сигналов, по которым осуществляется выключение звуковой и световой сигнализаций и прекращается анализ приращений Δn в блоке 5.

В случае если температура газов за турбиной продолжает возрастать, то при $\frac{dn}{dt} < 0$ и $\left(\frac{dT_4}{dt}\right) \geq \left(\frac{dT_4}{dt}\right)_{\max_доп}$ описанный цикл операций повторится, причем повторные циклы прекратятся лишь после устранения признаков помпажа.

Если в процессе повторения указанных циклов регулятор подачи топлива 7 окажется в положении, соответствующем полной отсечке топлива, т. е. в положении, при котором происходит выключение двигателя, датчик 8 сформирует сигнал на открытие клапана 10. Через последний выход датчика 2 будет подключен к пороговому элементу 11, порог срабатывания которого установлен на значение $n = n_{\text{мг}} - (\Delta n)_{\text{доп}}$. Пороговый элемент 11 при $n \leq n_{\text{мг}} - (\Delta n)_{\text{доп}}$ сформирует импульсный сигнал, по которому будет включена система 12 авиадвигателя "Запуск в воздухе", обеспечивающая подачу пускового топлива, кислорода и электрозажигание. При $n = n_{\text{мг}}$ система 12 выключается.

Описанный метод автоматической защиты ГТД от помпажных срывов рационально использовать как при их стендовых испытаниях, так и непосредственно при эксплуатации ГТД на летательных аппаратах, судах и других транспортных средствах. В первом случае алгоритм выявления признаков помпажа может быть реализован посредством ЦВМ, входящей в состав системы стендовых испытаний, а во втором — посредством бортового малогабаритного электронного противопомпажного устройства, аналогичного тому, блок-схема которого была описана выше.

Список литературы

1. Шибанов Г. П., Адгамов Р. И., Дмитриев С. В., Кожевников Ю. В. Автоматизация испытаний и контроля авиационных ГТД / Под ред. Шибанова Г. П. М.: Машиностроение, 1977. 280 с.
2. Шибанов Г. П. Количественная оценка деятельности человека в системах "человек—техника". М.: Машиностроение, 1983. 263 с.
3. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
4. Дунаев В. И. Квазиоптимальные по быстродействию системы автоматического регулирования. М.: Энергия, 1970. 64 с.
5. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.
6. Кузнецов В. И., Шпаковский Д. Д. Оценочный расчет КПД основных узлов газотурбинного двигателя // Полет. 2015. № 10. С. 8—14.
7. Кулагин В. В. Теория, расчет и проектирование авиационных двигателей и энергетических установок. М.: Машиностроение, 2003. 616 с.
8. Кучкин В. Н. Энергетические характеристики насосной системы в режиме кавитационных автоколебаний // Полет. 2015. № 8—9. С. 24—30.
9. Павлов А. А. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. М.: Наука, 1966. 392 с.
10. Петров В. И., Чебаевский В. Ф. Кавитация в высокооборотных лопастных насосах. М.: Машиностроение, 1982. 191 с.
11. Фаворский Е. К. Инженерный подход к реализации систем, оптимальных по быстродействию // Полет. 2015. № 7. С. 53—60.

Process of Automation the Protect Gas-Turbine Engine from the Surge

G. P. Shibanov, gpshibanov@mail.ru✉

Government Test-flight Center named after V. P. Chkalov, Akhtubinsk, Russian Federation

Corresponding author: **Shibanov Georgy P.**, D. Sc., Professor, Leading Science Worker, Government Test-flight Center named after V. P. Chkalov, Akhtubinsk, Russian Federation, e-mail: gpshibanov@mail.ru

Received on March 12, 2016

Accepted on March 24, 2016

Analysis one for possible ways of automation protection of gas-turbine engine from surge that derives all or most of its thrust by reaction to its ejection of combustion products (or heated air) in a jet and that obtains oxygen from the atmosphere for the combustion of its fuel. Parameters of control and operate — quantitative and qualitative change of frequency rotors turn and of gas temperature over the turbine. Analysis of the parameters examination with calculation signs of changes this parameters. Examine algorithm of indications signs surge of gas-turbine engine, reduce the speed feeding of oil fuel, automation start the gas-turbine engine. Algorithm of protect from surge suitable used for two type jet engine: 1) in the jet engine a part of the air bypassed and exhausted to atmosphere after the first (two) stages of LP compressor. About half of the thrust is produced by the fan exhaust; 2) a jet engine incorporating a turbine-driven air compressor to take in and compress the air for the combustion of fuel, the gases of combustion being used both to rotate the turbine and to create a thrust-producing jet.

Keywords: automation, algorithm, gas-turbine engine, engine surge

For citation:

Shibanov G. P. Process of Automation the Protect Gas-Turbine Engine from the Surge, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 644–647.

DOI: 10.17587/mau.17.644-647

References

1. **Shibanov G. P., Adgamov R. I., Dmitriev S. V., Kojevnikov U. V.** *Avtomatizatsiya ispytaniy i kontrolya aviatsionnykh GTD* (Automation of test and control of aircraft gas-turbine engine), Moscow, Mashinostroenie, 1977, 280 p. (in Russian).
2. **Shibanov G. P.** *Kolichestvennaya otsenka deyatelnosti cheloveka v sistemakh "chelovek-tehnika"* (Qualitative estimation of men activity at systems "men — technic"), Moscow, Mashinostroenie, 1983, 263 p. (in Russian).
3. **Boltyanskii V. G.** *Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya* (Mathematical methods of optimal control), Moscow, Nauka, 1969, 408 p. (in Russian).
4. **Dunaev V. I.** *Kvazioptimal'nye po bystrodeistviyu sistemy avtomaticheskogo regulirovaniya* (Quasioptimal on speed automatic control system), Moscow, Energiya, 1970, 64 p. (in Russian).
5. **Koul Dzh.** *Metody vozmushcheniy v prikladnoi matematike* (Perturbation methods in applied mathematics), Moscow, Mir, 1972, 276 p. (in Russian).
6. **Kuznetsov V. I., Shpakovskii D. D.** *Otsenochnyi raschet KPD osnovnykh uzlov gazoturbinnogo dvigatelya* (Estimated calculation of the efficiency of the basic units of the gas turbine engine), *Polet*, 2015, no. 10, pp. 8–14 (in Russian).
7. **Kulagin V. V.** *Teoriya, raschet i projektirovanie aviatsionnykh dvigatelei i energeticheskikh ustanovok* (Theory, calculation and design of aircraft engines and power plants), Moscow, Mashinostroenie, 2003, 616 p. (in Russian).
8. **Kuchkin V. N.** *Energeticheskie kharakteristiki nasosnoi sistemy v rezhime kavitatsionnykh avtokolebaniy* (Energy characteristics of the pump system in the mode of oscillation of cavitation), *Polet*, 2015, no. 8–9, pp. 24–30 (in Russian).
9. **Pavlov A. A.** *Sintez releinykh sistem, optimal'nykh po bystrodeistviyu* (Synthesis of relay systems, time optimal), Moscow, Nauka, 1966, 392 p. (in Russian).
10. **Petrov V. I., Chebaevskii V. F.** *Kavitatsiya v vysokooborotnykh lopastnykh nasosakh* (Cavitation in the high-speed centrifugal pumps), Moscow, Mashinostroenie, 1982, 191 p. (in Russian).
11. **Favorskii E. K.** *Inzhenernyi podkhod k realizatsii sistem, optimal'nykh po bystrodeistviyu* (Engineering approach to the implementation of systems, time optimal), *Polet*, 2015, № 7, pp. 53–60 (in Russian).



24—25 ноября 2016 г. в Санкт-Петербурге состоится 27-я конференция "Экстремальная робототехника (ЭР-2016)", и в этом году ее проведение приурочено к 90-летию юбилею основателя ЦНИИ РТК и бессменного председателя программного комитета конференции — Е. И. Юревича.

Каждый год более двадцати пяти лет конференция "Экстремальная робототехника" собирает на своей площадке ведущих российских специалистов, молодых ученых в области робототехники, аспирантов, студентов крупнейших технических университетов. Вот уже несколько лет подряд конференция проходит в формате международного мероприятия, что позволяет в "открытом поединке" максимально оценить национальные составляющие мирового научно-исследовательского потенциала в области создания средств технической кибернетики и робототехники космического, воздушного, наземного и морского базирования.

В рамках конференции, как всегда, планируется рассмотреть широкий круг вопросов: от концептуальных проблем создания до практического применения уже существующих робототехнических комплексов. Тематика конференции посвящена актуальным вопросам, связанным с созданием робототехнических систем нового поколения для работы в экстремальных условиях и чрезвычайных ситуациях, включая борьбу с терроризмом, пожаротушение, решение оборонных задач, а также с задачами освоения космоса и глубин Мирового океана, медицины, атомной энергетики и опасных производств.

Работа конференции традиционно запланирована в формате пленарных и секционных заседаний, дискуссий, круглых столов, посвященных актуальным проблемам и задачам в сфере робототехнических систем и средств безопасности.

Международная конференция "ЭР-2016" открыта для всех желающих, а их организатор — ЦНИИ робототехники и технической кибернетики — всегда рад новым участникам и гостям.

Подробная информация о конференции на сайте: <http://er.rtc.ru>.

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397**, тел./факс: **(499) 269-5510**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *Е. В. Комиссарова*.

Сдано в набор 22.06.2016. Подписано в печать 10.08.2016. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН916. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.