

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 16

2015

№ 4

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Редакционный совет:

CHYI-YEU LIN, PhD, prof.
GROUMPOS P. P., prof.
JEN-HWA GUO, PhD, prof.
KATALINIC B., PhD, prof.
SUBUDHI B., PhD, prof.
АЛИЕВ Т. А., акад. НАНА, проф.
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН, проф.
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН, проф.
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН, проф.
КАЛЯЕВ И. А., чл.-корр. РАН, проф.
КРАСНЕВСКИЙ Л. Г., чл.-корр. НАНБ, проф.
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН, проф.
ЛЕОНОВ Г. А., чл.-корр. РАН, проф.
МАТВЕЕНКО А. М., акад. РАН, проф.
МИКРИН Е. А., акад. РАН, проф.
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН, проф.
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН, проф.
СИГОВ А. С., акад. РАН, проф.
СОЙФЕР В. А., чл.-корр. РАН, проф.
СОЛОВЬЕВ В. А., чл.-корр. РАН, проф.
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН, проф.
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН, проф.
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН, проф.
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН, проф.
ЩЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН, проф.
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН, проф.

Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д. т. н., с. н. с.

Заместители гл. редактора:

ПОДУРАЕВ Ю. В., д. т. н., проф.
ПУТОВ В. В., д. т. н., проф.
ЮЩЕНКО А. С., д. т. н., проф.

Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСАНДРОВ В. В., д. ф.-м. н., проф.
АНТОНОВ Б. И.
АРШАНСКИЙ М. М., д. т. н., проф.
БУКОВ В. Н., д. т. н., проф.
ВИТТИХ В. А., д. т. н., проф.
ГРАДЕЦКИЙ В. Г., д. т. н., проф.
ЕРМОЛОВ И. Л., д. т. н., доц.
ИВЧЕНКО В. Д., д. т. н., проф.
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д. т. н., проф.
КОЛОСОВ О. С., д. т. н., проф.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д. т. н., проф.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д. т. н., проф.
ЛОХИН В. М., д. т. н., проф.
ПАВЛОВСКИЙ В. Е., д. ф.-м. н., проф.
ПРОХОРОВ Н. Л., д. т. н., проф.
ПШИХОПОВ В. Х., д. т. н., проф.
РАПОПОРТ Э. Я., д. т. н., проф.
СЕРГЕЕВ С. Ф., д. пс. н., с. н. с.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д. т. н., проф.
ФРАДКОВ А. Л., д. т. н., проф.
ФУРСОВ В. А., д. т. н., проф.
ЮРЕВИЧ Е. И., д. т. н., проф.

Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

- Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю., Крухмалев В. А.** Базовые алгоритмы адаптивного позиционно-траекторного управления подвижными объектами при позиционировании в точке 219
- Козырев В. Г.** Асимптотическое разложение закона терминального управления выходом разнотемповых систем 225

МЕТОДЫ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ

- Ченцов А. Г., Кошелева М. С.** Динамическое программирование в задаче курьера со стоимостями, зависящими от списка заданий 232
- Андронов А. В., Шибанов Г. П.** Современная технология научного выбора наиболее перспективного образца техники из ряда образцов аналогичного назначения . . . 245

КОНТРОЛЬ И ДИАГНОСТИКА МЕХАТРОННЫХ СИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ

- Мусатов В. Ю., Киселев И. В., Варезников А. С., Большаков А. А., Сысоев В. В.** Анализ возможностей применения в газоаналитических приборах вида "электронный нос" на основе однокристалльных чипов переходных электрических процессов в сенсорных сегментах при воздействии различных газов 250
- Колосов О. С., Анисимов Д. Н., Хрипков Д. В.** Исследование многоуровневых нечетких диагностических систем с использованием стохастической модели 254

ЭРГАТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

- Сержантова М. В., Ушаков А. В.** Рекреативный интервал в проблеме управления производительностью деятельности антропокомпонента-оператора в квазистатической функциональной среде 262

Журнал в журнале

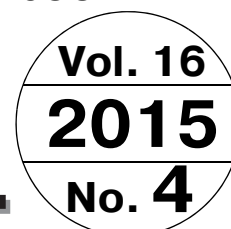
**"УПРАВЛЕНИЕ И ИНФОРМАТИКА
В АВИАКОСМИЧЕСКИХ И МОРСКИХ СИСТЕМАХ"**

- Корсун О. Н., Николаев С. В.** Методика идентификации аэродинамических коэффициентов продольного движения самолета в эксплуатационном диапазоне углов атаки 269
- Лосев С. Н., Макаренко В. И., Подольская Н. Н.** Вероятностно-геометрический метод среднесрочного обнаружения конфликтов между воздушными судами . . . 277
- Филаретов В. Ф., Зуев А. В., Жирабок А. Н., Проценко А. А., Subudhi B.** Метод синтеза систем непрерывной аккомодации к дефектам в навигационно-пилотажных датчиках автономных подводных роботов 282

Журнал входит в Перечень периодических изданий, рекомендованных ВАК РФ для публикации основных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: mech@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



MEHATRONIKA, AVTOMATIZACIA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Editorial Council:

ALIEV T. A., Prof., Azerbaijan
 ANSHAKOV G. P., Russia
 BOLOTNIK N. N., Russia
 CHENTSOV A. G., Russia
 CHERNOUSKO F. L., Russia
 CHYI-YEU LIN, PhD, Prof., Taiwan
 FEDOROV I. B., Russia
 GROUMPOS P. P., Prof., Greece
 JEN-HWA GUO, PhD, Prof., Taiwan
 KALYAEV I. A., Russia
 KATALINIC B., PhD, Prof., Austria
 KRASNEVSKIY L. G., Belarus
 KUZNETSOV N. A., Russia
 LEONOV G. A., Russia
 MATVEENKO A. M., Russia
 MIKRIN E. A., Russia
 PESHEKHONOV V. G., Russia
 REZCHIKOV A. F., Russia
 SCHERBATYUK A. F., Russia
 SEBRYAKOV G. G., Russia
 SIGOV A. S., Russia
 SOJFER V. A., Russia
 SOLOMENTSEV Yu. M., Russia
 SOLOVJEV V. A., Russia
 SUBUDHI B., PhD, Prof., India
 VASILYEV S. N., Russia
 YUSUPOV R. M., Russia

Editor-in-Chief:

FILIMONOV N. B., Russia

Deputy Editor-in-Chief:

PODURAEV Yu. V., Russia
 PUTOV V. V., Russia
 YUSCHENKO A. S., Russia

Responsible Secretary:

BEZMEANOVA M. Yu., Russia

Editorial Board:

ALEXANDROV V. V., Russia
 ANTONOV B. I., Russia
 ARSHANSKY M. M., Russia
 BUKOV V. N., Russia
 ERMOLOV I. L., Russia
 FILARETOV V. F., Russia
 FRADKOV A. L., Russia
 FURSOV V. A., Russia
 GRADETSKY V. G., Russia
 ILYASOV B. G., Russia
 IVCHENKO V. D., Russia
 KOLOSOV O. S., Russia
 KOROSTELEV V. F., Russia
 LEBEDEV G. N., Russia
 LOKHIN V. M., Russia
 PAVLOVSKY V. E., Russia
 PROKHOROV N. L., Russia
 PSYKHOPOV V. Kh., Russia
 RAPOPORT E. Ya., Russia
 SERGEEV S. F., Russia
 VITTIKH V. A., Russia
 YUREVICH E. I., Russia

Editorial Staff:

GRIGORIN-RYABOVA E. V., Russia

CONTENTS

CONTENTS METHODS OF THE THEORY OF AUTOMATIC CONTROL

Pshikhopov V. Kh., Medvedev M. Yu., Krukhmalev V. A. Base Algorithms of the Adaptive Position-Path Control for the Mobile Objects' Positioning 219

Kozyrev V. G. Asymptotic Expansion of the Terminal Control Law of the Output of Two-Tame-Scale Systems 225

METHODS OF COMBINATORIAL OPTIMIZATION AND DECISION-MAKING

Chentsov A. G., Kosheleva M. S. Dynamic Programming in the Precedence Constrained TSP with the Costs Depending on a List of Tasks 232

Andronov A. V., Shibanov G. P. Modern Technology for a Scientific Selection of the Most Promising Samples of Technology out of a Number of Analogs 245

CONTROLLING AND DIAGNOSTICS IN THE MECHATRONIC SYSTEMS AND TECHNOLOGIES

Musatov V. Yu., Kiselev I. V., Varegnikov A. S., Bolshakov A. A., Sysoev V. V. Analysis of Possible Applications in the Gas Analytical Instruments of the "Electronic Nose" Based on the Single-Chip Transient Electrical Processes in the Sensory Segments under Effect of Different Gases 250

Kolosov O. S., Anisimov D. N., Khripkov D. V. Research of the Multilevel Fuzzy Diagnostic Systems with the Use Stochastic Models 254

ERGATIC CONTROL SYSTEMS

Serzhantova M. V., Ushakov A. V. Interval for Rest in the Problem of Management of Productivity of a Human Operator in a Static Functional Environment 262

Journal within journal

"CONTROL AND INFORMATICS IN AEROSPACE AND MARINE SYSTEMS"

Korsun O. N., Nikolaev S. V. Identification of the Aerodynamic Coefficients of Longitudinal Motion of on Aircraft in the Operational Range of the Attack Angles 269

Losev S. N., Makarenko V. I., Podolskaya N. N. Probabilistic-Geometric Method for a Medium Term Conflict Detection in Air Traffic Control 277

Filaretov V. F., Zuev A. V., Zhirabok A. N., Prochenko A. A., Subudhi B. Method of Synthesis of Continuous Systems of Accommodation to the Faults in Navigation Sensors of Autonomous Underwater Robots 282

Information about the journal is available online at:
<http://novtex.ru/mech.html>, e-mail: mech@novtex.ru

УДК 681.513.66

В. Х. Пшихопов, д-р техн. наук, профессор, pshichop@rambler.ru,
М. Ю. Медведев, д-р техн. наук, профессор, medvmihal@sfnedu.ru,
В. А. Крухмалев, аспирант, doc61rus@gmail.com,
Южный федеральный университет, 347928, г. Таганрог, Россия

Базовые алгоритмы адаптивного позиционно-траекторного управления подвижными объектами при позиционировании в точке¹

Рассматривается задача позиционирования подвижного объекта в точке при наличии неизмеряемых возмущений. Предлагается структура адаптивной позиционно-траекторной системы с эталонной моделью и интегральным или пропорционально-интегральным алгоритмом адаптации. Проводится синтез адаптивных регуляторов и анализ устойчивости замкнутых систем. Приводятся результаты моделирования замкнутых систем с синтезированными алгоритмами адаптивного управления при постоянных и переменных возмущениях детерминированного характера.

Ключевые слова: позиционно-траекторное управление, адаптивное управление, подвижный объект, эталонная модель

Введение

Задачи управления подвижными объектами остаются весьма актуальными в современной теории и практике управления. На XII Всероссийском совещании по проблемам управления были отражены актуальные направления развития теории и систем управления подвижными объектами [1]. Согласно итогам конференции большое внимание уделено методам адаптивного и интеллектуального управления подвижными объектами, включая мобильные роботы.

Для управления подвижными объектами успешно применяются системы позиционно-траекторного управления [2], которые вместе с алгоритмами робастного оценивания возмущений [3] позволяют синтезировать эффективные не прямые адаптивные системы для подвижных объектов морского базирования [4, 5], воздухоплавательных комплексов [6–8]. Известно, что в системах непрямого адаптивного управления на качество замкнутой системы существенно влияют алгоритмы оценивания [9, 10]. В данной работе развивается метод прямого адаптивного управления, представленный в работах [11–13]. В работе [11] предложены адаптивные алгоритмы управления приводами, основанные на расширении моделей управляемых объектов уравнениями, генерирующими заданный класс возмущений. Для такой расширенной модели в работе [11] строится система управления, обеспечивающая устойчивость замкнутой системы. В работе [12] данный метод развивается для подвижных объектов, описываемых уравнениями кинематики и динамики твердого тела в трехмерном пространстве. В работе [13] предложен адаптивный алгоритм позиционно-траекторного управления для уравнений динами-

ки подводного аппарата, проведен анализ структуры и устойчивости замкнутой системы. Анализ устойчивости в работе [13] показал, что замкнутая система управления является линейной, что позволяет выбрать матрицу коэффициентов настройки алгоритма адаптации. Недостатком алгоритмов, приведенных в работе [13], представляется тот факт, что входной информацией для алгоритма адаптации является текущее отклонение состояния системы от его значения в установившемся режиме. Иными словами, алгоритм адаптации не имеет информации о требованиях к переходному процессу, задаваемому эталонным уравнением. В частности, в работе [13] заданное эталонным уравнением быстродействие может быть обеспечено только при равенстве матрицы эталонного уравнения и матрицы настроек алгоритма адаптации. Так, эталонное характеристическое уравнение в работе [13] имеет вид

$$s + T_1 = 0, \quad (1)$$

где T_1 — диагональная матрица постоянных коэффициентов.

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$s^2 + (A + T_1)S + T_1A = 0, \quad (2)$$

где A — диагональная матрица постоянных коэффициентов настройки алгоритма адаптации.

Из уравнений (1), (2) следует, что повышение быстродействия алгоритма адаптации в работе [13] приводит к повышению быстродействия замкнутой системы, т. е. к отклонению от заданного эталонного уравнения (1).

В данной работе для устранения этого недостатка используется идеология адаптивных систем с эталонной моделью [14–16]. При этом рассматриваются как уравнения кинематики, так и уравнения динамики подвижного объекта. Такая постановка задачи

¹ Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации № НШ-3437.2014.10 и грантом РФФИ 13-08-00315а.

обусловлена тем, что при решении задач позиционирования часто предъявляются высокие требования к точности, например, при стыковке. В связи с этим дополнительные погрешности, вносимые при решении прямой и обратной задачи кинематики, нежелательны.

Позиционно-траекторный регулятор с эталонной моделью и пропорциональным алгоритмом адаптации

Рассмотрим модель подвижного объекта на базе уравнений кинематики и динамики твердого тела [2]:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= R(y)x; \\ \dot{x} &= M^{-1}(F_u + F_d) + \Delta F_d,\end{aligned}\quad (3)$$

где y — вектор линейных и угловых положений подвижного объекта во внешней системе координат; x — вектор линейных и угловых скоростей подвижного объекта в связанной системе координат; $R(y)$ — матрица кинематики; M — матрица инерционных параметров; F_u — вектор управляющих сил и моментов; F_d — вектор прочих сил и моментов, действующих на подвижный объект; ΔF_d — вектор неучтенных возмущений, который в процессе синтеза алгоритма адаптации принимается нулевым.

Наряду с моделью (3) рассмотрим эталонную модель вида

$$\begin{aligned}\dot{y}_m &= R(y_m)x_m; \\ \dot{x}_m &= M^{-1}(F_{um} + F_{dm}),\end{aligned}\quad (4)$$

где y_m — вектор линейных и угловых положений эталонной модели во внешней системе координат; x_m — вектор линейных и угловых скоростей эталонной модели в связанной системе координат; $R(y_m)$ — матрица кинематики эталонной модели; F_{um} — вектор управляющих сил и моментов эталонной модели; F_{dm} — вектор прочих сил и моментов, действующих на эталонную модель.

Матрица $R(y_m)$ и вектор F_{dm} совпадают по структуре с матрицей $R(y)$ и вектором F_d соответственно.

Синтезируем управление для эталонной модели (4). В соответствии с методом позиционно-траекторного управления [2] введем ошибку позиционирования эталонной модели в виде

$$\Psi_{\text{эт}} = A_1 y_m + A_2, \quad (5)$$

где A_1, A_2 — матрица и вектор постоянных коэффициентов, отражающих требования к точке позиционирования.

Вычислим первую и вторую производные по времени от выражения (5) в силу уравнений эталонной модели (4):

$$\dot{\Psi}_{\text{эт}} = A_1 R(y_m)x_m; \quad (6)$$

$$\ddot{\Psi}_{\text{эт}} = A_1 \dot{R}(y_m)x_m + A_1 R(y_m)M^{-1}(F_{um} + F_{dm}). \quad (7)$$

Потребуем, чтобы вектор (5) удовлетворял следующему эталонному дифференциальному уравнению:

$$\ddot{\Psi}_{\text{эт}} + T_2 \dot{\Psi}_{\text{эт}} + T_1 \Psi_{\text{эт}} = 0, \quad (8)$$

где T_1, T_2 — матрицы постоянных коэффициентов.

Подставим выражения (5)—(7) в уравнение (8) и решим его относительно вектора управляющих сил и моментов F_{um} :

$$\begin{aligned}F_{um} &= -F_{dm} + (A_1 R(y_m)M^{-1})^{-1} \times \\ &\times \{-A_1 \dot{R}(y_m)x_m - T_2 \dot{\Psi}_{\text{эт}} - T_1 \Psi_{\text{эт}}\}.\end{aligned}\quad (9)$$

В соответствии с работами [11—13] расширим модель подвижного объекта (3):

$$\begin{aligned}\dot{y} &= R(y)x; \\ \dot{x} &= M^{-1}(F_u + F_d + Cz); \\ \dot{z} &= \Psi - \Psi_{\text{эт}},\end{aligned}\quad (10)$$

где C — матрица настройки алгоритма адаптации.

Ошибка позиционирования для подвижного объекта (3) задается в том же виде, что и для эталонной модели:

$$\Psi = A_1 y + A_2. \quad (11)$$

Чтобы подчеркнуть отличие от работ [11—13], отметим, что в них последнее уравнение в системе (10) задавалось в виде $\dot{z} = \Psi$, т. е. не использовался выход динамической эталонной модели (4).

Вычислим первую и вторую производные по времени от выражения (11) в силу уравнений расширенной модели подвижного объекта (10):

$$\dot{\Psi} = A_1 R(y)x; \quad (12)$$

$$\ddot{\Psi} = A_1 \dot{R}(y)x + A_1 R(y)M^{-1}(F_u + F_d + Cz). \quad (13)$$

Введем ошибку управления в виде

$$e = \Psi - \Psi_{\text{эт}}. \quad (14)$$

Вычислим первую и вторую производные по времени от ошибки регулирования (14) и подставим их в эталонное уравнение замкнутой системы:

$$\ddot{e} + T_2 \dot{e} + T_1 e = 0. \quad (15)$$

В результате получим следующий алгоритм адаптивного позиционно-траекторного управления с эталонной моделью и пропорциональной адаптацией:

$$\begin{aligned}F_u &= -F_d - Cz + (A_1 R(y)M^{-1})^{-1}\{-A_1 \dot{R}(y)x + \\ &+ A_1 \dot{R}(y_m)x_m + A_1 R(y_m)M^{-1}(F_{um} + F_{dm}) - \\ &- T_2(\dot{\Psi} - \dot{\Psi}_{\text{эт}}) - T_1(\Psi - \Psi_{\text{эт}})\}.\end{aligned}\quad (16)$$

Подставив в (17) выражение для эталонного управления (9), получим управление в виде

$$\begin{aligned}F_u &= -F_d - Cz + \\ &+ (A_1 R(y)M^{-1})^{-1}(-A_1 \dot{R}(y)x - T_2 \dot{\Psi} - T_1 \Psi).\end{aligned}\quad (17)$$

На рис. 1 представлена структура прямой адаптивной позиционно-траекторной системы управления подвижным объектом с эталонной моделью и пропорциональным алгоритмом адаптации. На данной структуре видны две обратные связи, формирующие две составляющие управления. Первая составляющая формируется по ошибке между эталонной ошибкой $\Psi_{\text{эт}}$ и реальной ошибкой Ψ . Вторая составляющая вводится дополнительно и формируется интегралом от величины $\Psi - \Psi_{\text{эт}}$.

Подставим выражение (18) в уравнения объекта (3), эталонное управление (9) — в эталонную модель (4). В результате получим следующие уравнения замкнутой системы:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= R(y)x; \\ \dot{x} &= -M^{-1}Cz + (A_1R(y))^{-1} \times \\ &\times (-A_1\dot{R}(y)x - T_2A_1Rx - T_1(A_1y + A_2)); \\ \dot{z} &= A_1(y - y_m); \\ \dot{y}_m &= R(y_m)x_m; \\ \dot{x}_m &= (A_1R(y_m))^{-1}(-A_1\dot{R}(y_m)x_m - \\ &- T_2A_1R_mx_m - T_1(A_1y_m + A_2)). \end{aligned} \quad (18)$$

Проведем анализ системы (19) при следующих предположениях:

- матрицы кинематики $R(y) = R = \text{const}$ и $R(y_m) = R_m = \text{const}$ являются постоянными, что на практике означает рассмотрение уравнений подвижного объекта при медленно изменяющихся углах ориентации;
- матрицы T_1, T_2 являются диагональными, что допустимо при задании эталонных уравнений по различным каналам управления независимо друг от друга;
- матрица A_1 является диагональной, а вектор $A_2 = 0$, что позволяет решать задачу позиционирования в нулевую точку.

При данных допущениях система (19) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Rx; \\ \dot{x} &= -M^{-1}Cz - T_2x - R^{-1}T_1y; \\ \dot{z} &= A_1(y - y_m); \\ \dot{y}_m &= R_mx_m; \\ \dot{x}_m &= T_2x_m - T_1y_m. \end{aligned} \quad (19)$$

Собственная матрица системы (20) имеет вид

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ -R^{-1}T_1 - T_2 & -M^{-1}C & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 & -A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_m \\ 0 & 0 & 0 & -R_m^{-1}T_1 - T_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид:

$$D(s) = (s^3 + T_2s^2 + T_1s + RM^{-1}CA_1)(s^2 + T_2s + T_1). \quad (21)$$

Анализ уравнения (22) показывает, что матрица настройки пропорционального контура адаптации может быть выбрана из условия

$$C = MR^{-1}C'A_1^{-1}, \quad (22)$$

$$T_1T_2 > C'. \quad (23)$$

Для повышения эффекта адаптации требуется увеличивать матрицу C' . Однако условия устойчивости (24) ограничивают возможности увеличения коэффициента C' . Нетрудно моделированием убедиться, что при нарушении условия (24) система становится неустойчивой.

При $C = 0$ уравнение (22) принимает вид

$$D(s) = s(s^2 + T_2s + T_1)(s^2 + T_2s + T_1), \quad (24)$$

т. е. система распадается на три независимые подсистемы.

На рис. 2 приведены результаты моделирования замкнутой системы (3) — (18) при постоянных возмущениях.

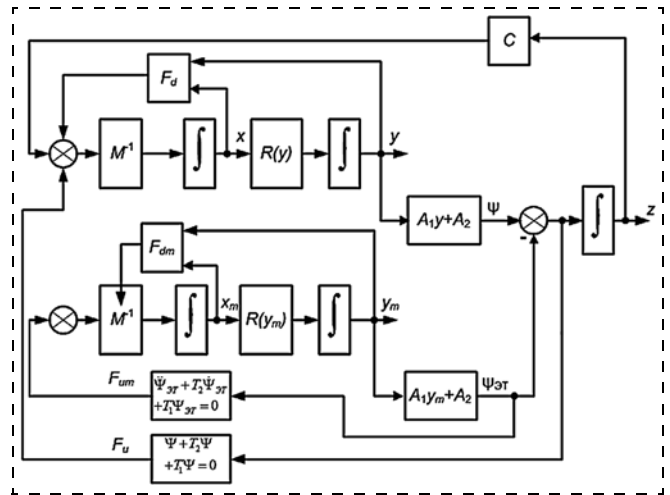


Рис. 1. Структура адаптивной позиционно-траекторной системы с эталонной моделью и пропорциональным алгоритмом адаптации

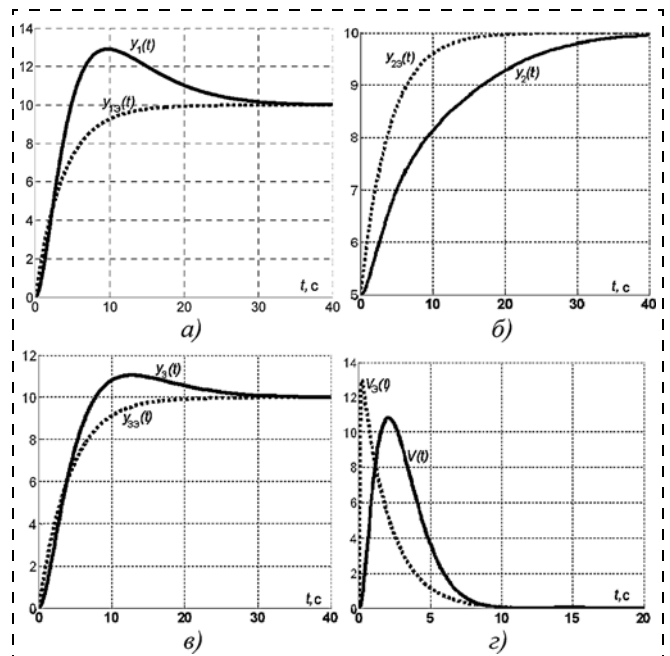


Рис. 2. Результаты моделирования: а — y_1 ; б — y_2 ; в — y_3 ; г — квадрат скорости ПО

Моделирование проводилось для следующих параметров и матриц объекта управления и регулятора:

$$R = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_\omega \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma + \sin\psi\sin\gamma & \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma + \sin\psi\cos\gamma \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\cos\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma \\ -\sin\psi\cos\vartheta & \cos\psi\sin\gamma + \sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma & \cos\psi\cos\gamma - \sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma \end{bmatrix};$$

$$\Delta F_d = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; A_\omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\cos\gamma}{\cos\vartheta} & -\frac{\sin\gamma}{\cos\vartheta} \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \\ 1 & -\operatorname{tg}\vartheta\cos\gamma & \operatorname{tg}\vartheta\sin\gamma \end{bmatrix};$$

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}; F_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$T_1 = 0,25I, T_2 = I, A_1 = I, C' = 0,1I,$$

где I — единичная матрица размерностью 6×6 .

По результатам моделирования видны существенные отклонения переменных подвижного объекта от переменных эталонной модели. Увеличение значений коэффициентов матрицы C' ограничено условиями устойчивости (24) и приводит к появлению колебаний. Данный недостаток не проявляется в установившемся режиме при постоянных возмущениях, однако особенно заметен при переменных возмущениях.

Позиционно-траекторный регулятор с эталонной моделью и пропорционально-интегральным алгоритмом адаптации

Для устранения недостатков, связанных с пропорциональной адаптацией, модифицируем структуру системы управления так, как показано на рис. 3. По сравнению с рис. 1 на ней введена дополнительная связь с матричным коэффициентом передачи B .

Тогда процедура синтеза изменяется следующим образом. Управление для эталонной модели (4) формируется в виде (9). Ошибка позиционирования подвижного объекта и ее первая и вторая производные по времени определяются соответственно выражениями (11), (12) и (13).

Ошибка управления вводится в виде

$$e = \Psi - \Psi_{\Sigma T} + Bz, \quad (25)$$

где B — матрица настройки алгоритма адаптации.

Вычислив первую и вторую производные по времени от ошибки регулирования (25) и подставив их в эталонное уравнение замкнутой системы (16), получим следующий алгоритм адаптивного позици-

онно-траекторного управления с эталонной моделью и пропорционально-интегральной адаптацией:

$$F_u = -F_d - Cz + (A_1 R(y) M^{-1})^{-1} \{ -(A_1 \dot{R}(y) + BA_1 R(y) + T_2 A_1 R(y))x - (T_2 BA_1 + T_1 A_1)y + BA_1 R(y_m)x_m + T_2 BA_1 y_m - T_1 Bz - T_1 A_2 \}. \quad (26)$$

Подставим управление (26) в уравнения подвижного объекта (3), управления (9) — в уравнения эталонной модели (4) и проанализируем полученную замкнутую систему при постоянных матрицах кинематики, диагональных матрицах регулятора T_1, T_2 и A_1 , а также нулевом векторе $A_2 = 0$.

В результате получим линейную модель замкнутой системы управления, собственная матрица которой описывается выражением

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ -R^{-1}(T_1 + T_2 B) & -T_2 - B & -M^{-1}C - (A_1 R)^{-1}T_1 B & R^{-1}T_2 B & R^{-1}B R_m \\ A_1 & 0 & 0 & -A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_m \\ 0 & 0 & 0 & -R_m^{-1}T_1 & -T_2 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$D(s) = (s^3 + (B + T_2)s^2 + (T_1 + T_2 B)s + RA_1 M^{-1}C + T_1 B)(s^2 + T_2 s + T_1). \quad (28)$$

При $C = 0$ из уравнения (28) получаем

$$D(s) = (s^3 + (B + T_2)s^2 + (T_1 + T_2 B)s + T_1 B)(s^2 + T_2 s + T_1) = (s^2 + T_2 s + T_1)(s + B)(s^2 + T_2 s + T_1). \quad (29)$$

Таким образом, введенная дополнительная связь позволила обеспечить асимптотическую устойчивость замкнутой системы. При этом характеристические уравнения системы адаптации, эталонной модели и основного контура регулирования входят в общее характеристическое уравнение в виде произведения, т. е. допускают независимую настройку.

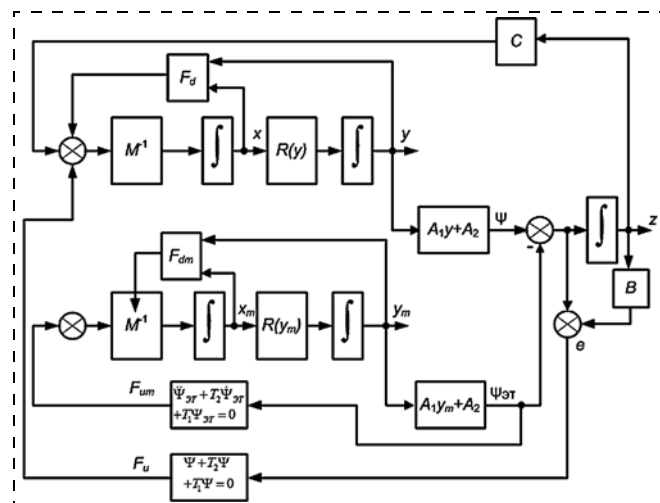


Рис. 3. Структура адаптивной позиционно-траекторной системы с эталонной моделью и пропорционально-интегральным алгоритмом адаптации

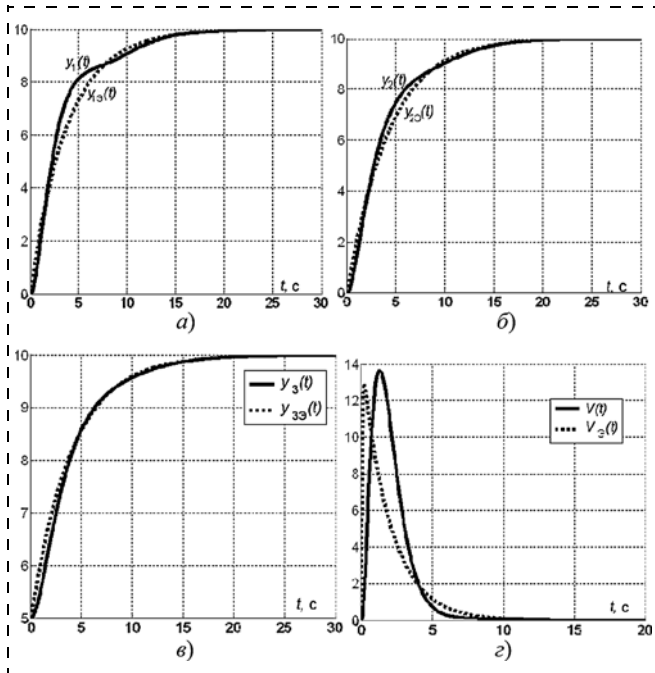


Рис. 4. Результаты моделирования системы с пропорционально-интегральной адаптацией:
а — y_1 ; б — y_2 ; в — y_3 ; г — квадрат скорости ПО

Иными словами, за счет увеличения матрицы B можно повысить быстродействие алгоритма адаптации, не изменяя остальных корней замкнутой системы.

На рис. 4 представлены результаты моделирования при тех же условиях, что и в предыдущем разделе. При этом матрица настройки алгоритма адаптации выбрана единичной $B = I$. Из результатов моделирования, представленных на рис. 4, видно, что пропорционально-интегральный алгоритм адаптации позволяет существенно уменьшить ошибки слежения за выходом эталонной модели. При увеличении коэффициентов матрицы B динамические ошибки уменьшаются. Это позволяет при достаточно больших значениях коэффициентов матрицы использовать данный алгоритм адаптации для компенсации переменных неизмеряемых возмущений.

В частности, на рис. 5 представлены результаты моделирования адаптивной позиционно-траекторной системы управления подвижного объекта (3) с

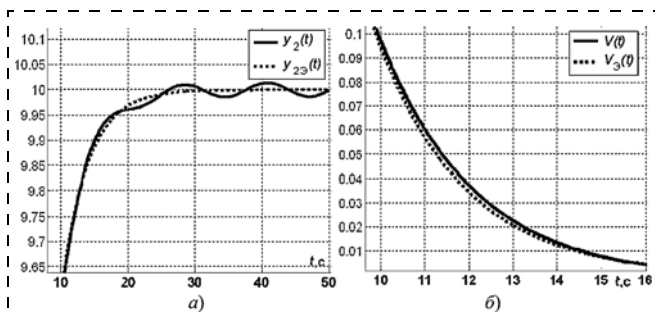


Рис. 5. Результаты моделирования при переменных возмущениях:
а — переменная y_2 ; б — квадрат скорости ПО

управлением (26) при гармонических возмущениях $\Delta F_d = [5 - 3 + 2\sin(0,5t) \ 2 + 3\cos(0,4t) \ 0 \ 0 \ 0]^T$ и при матрице $B = 30I$.

В силу того что при больших коэффициентах матрицы B ошибки становятся малыми, на рис. 5 представлены отдельные участки переходных процессов, на которых можно оценить значение ошибки.

Заключение

В данной работе решается задача позиционирования подвижного объекта при наличии неизмеряемых возмущений. Для решения задачи применяется адаптивная система, базовый закон управления которой синтезируется на основе метода позиционно-траекторного управления, а адаптация осуществляется в рамках беспойсковых систем с эталонными моделями. Использование эталонных моделей обусловлено необходимостью при позиционировании с заданной динамической точностью отслеживать желаемую траекторию движения. Предложены алгоритмы адаптивного управления с пропорциональным и пропорционально-интегральным алгоритмом слежения за сигналом эталонной модели. Проведенный анализ показал, что при использовании пропорционально-интегрального алгоритма слежения осуществляется разделение базового контура и контура адаптации.

Список литературы

1. **Итоги** XII Всероссийского совещания по проблемам управления: аналитический обзор. URL: <http://vspu2014.ipu.ru/>.
2. **Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю.** Управление подвижными объектами в определенных и неопределенных средах. М.: Наука, 2011. 350 с.
3. **Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю.** Алгоритмы оценивания в системе управления автономного роботизированного дирижабля // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. № 2 (139). С. 200—207.
4. **Pshikhov V. Kh., Medvedev M. Y., Gurenko B. V.** Homing and Docking Autopilot Design for Autonomous Underwater Vehicle // Applied Mechanics and Materials. 2014. V. 490—491. P. 700—707. Trans Tech Publications, Switzerland. doi:10.4028/www.scientific.net/AMM.490-491.700.
5. **Пшихопов В. Х., Гуренко Б. В., Медведев М. Ю., Маевский А. М., Голосов С. П.** Оценивание аддитивных возмущений АНПА робастным наблюдателем с нелинейными обратными связями // Известия ЮФУ. Технические науки 2014. № 3 (152). С. 128—137.
6. **Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю., Гайдук А. Р., Нейдорф Р. А., Беляев В. Е., Федоренко Р. В., Костиюков В. А., Крухмалев В. А.** Система позиционно-траекторного управления роботизированной воздухоплавательной платформой: математическая модель // Мехатроника, автоматизация и управление. 2013. № 6. С. 14—21.
7. **Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю., Гайдук А. Р., Нейдорф Р. А., Беляев В. Е., Федоренко Р. В., Костиюков В. А., Крухмалев В. А.** Система позиционно-траекторного управления роботизированной воздухоплавательной платформой: алгоритмы управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 7. С. 13—20.
8. **Пшихопов В. Х.** Дирижабли: перспективы использования в робототехнике // Мехатроника, автоматизация, управление. 2004. № 5. С. 15—20.
9. **Земляков С. Д., Рутковский В. Ю.** О некоторых результатах развития теории и практики применения беспойсковых адаптивных систем // Автоматика и телемеханика. 2001. № 7. С. 103—121.

10. Путов В. В. Прямые и не прямые беспоисковые адаптивные системы с мажорирующими функциями и их приложения к управлению многостепенными нелинейными упругими механическими объектами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 10. С. 4–11.

11. Медведев М. Ю. Алгоритмы адаптивного управления исполнительными приводами // Мехатроника, автоматизация и управление. 2006. № 6. С. 17–22.

12. Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю. Синтез адаптивных систем управления летательными аппаратами // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 3 (104). С. 187–196.

13. Пшихопов В. Х., Федотов А. А., Медведев М. Ю., Медведева Т. Н., Гуренко Б. В. Позиционно-траекторная система прямого адаптивного управления морскими подвижными объектами // Инженерный вестник Дона. 2014. № 3.

14. Рутковский В. Ю., Глузов В. М., Суханов В. М. Физически реализуемый алгоритм адаптивного управления с эталонной моделью // Автоматика и телемеханика. 2011. № 8. С. 96–108.

15. Земляков С. Д., Рутковский В. Ю. Алгоритм функционирования адаптивной системы с эталонной моделью, гарантирующий заданную динамическую точность управления нестационарным динамическим объектом в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. 2009. № 10. С. 35–44.

16. Глузов В. М., Земляков С. Д., Рутковский В. Ю., Суханов В. М. Применение принципа построения адаптивных систем с эталонной моделью к задачам мониторинга текущего состояния трансмиссионных валов // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 131–146.

Base Algorithms of the Adaptive Position-Path Control for the Mobile Objects' Positioning

V. Kh. Pshikhov, pshichop@rambler.ru, M. Yu. Medvedev, medvmihal@sfedu.ru,
V. A. Krukhmalev, doc61rus@gmail.com,
Southern Federal University, Taganrog, 347928, Russian Federation

Received on November 28, 2014

This paper presents a task of a mobile object positioning in the presence of determinate disturbances. A mobile object is described by kinematics and dynamics equations of a solid body in a three dimensional space. The control inputs of the mobile object are forces and torques. Design of the adaptive control is based on the position-path control method for the mobile objects. This article presents two algorithms of the adaptive position-path control. The first algorithm is the adaptive position-path control with an integration component and reference model. The second algorithm is the adaptive position-path control with a reference model and an extended mobile robot model. The authors propose a unit diagram for a direct adaptive position-path control system with a reference model. The article also presents the design procedures for the adaptive position-path control systems and stability analysis of the closed-loop system, as well as the computer simulation results of the designed adaptive closed-loop systems with both constant and variable disturbances. The authors make conclusions on the basis of the analysis and modeling results. The main advantage of the proposed method is separation of the basic position-path regulator and adaptation algorithms. The parameters of the position-path controller are the parameters of the reference model. Therefore, a classical structure of the adaptive control with a reference model requires a change in the parameters of the model. The adaptation algorithms presented in this paper can be applied for the parameters of the additional dynamic units.

Keywords: position-path control, adaptive control, mobile object, reference model

Acknowledgements: This work was supported by a grant from the President of the Russian Federation no. ИШ-3437.2014.10 and the Russian Foundation for Basic Research, projects no. 13-08-00315a.

For citation:

Pshikhov V. Kh., Medvedev M. Yu., Krukhmalev V. A. Base Algorithms of the Adaptive Position-Path Control for the Mobile Objects' Positioning, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 219–225.

DOI: 10.17587/mau.16.219-225

References

1. *Itogi XII Vserossiyskogo soveshhanija po problemam upravlenija: analiticheskij obzor* (Resume of the XII Russian Conference on Control problems: an analytical review). Available at: <http://vspu2014.ipu.ru>

2. Pshikhov V. H., Medvedev M. Ju. *Upravlenie podvizhnymi ob'ektami v opredelennyh i neopredelennyh sredah* (Control of vehicles in certain and uncertain environments), Moscow, Nauka, 2011, 350 p. (in Russian).

3. Pshikhov V. H., Medvedev M. Ju. *Algoritmy ocenivaniya v sisteme upravlenija avtonomnogo robotizirovannogo dirizhablja* (Transactions of Southern Federal University. Engineering Sciences), *Izvestija JuFU. Tehnicheskie Nauki*, 2013, no 2 (139), pp. 200–207. (in Russian)

4. Pshikhov V. Kh., Medvedev M. Y., Gurenko B. V. Homing and Docking Autopilot Design for Autonomous Underwater Vehicle, *Applied Mechanics and Materials*, 2014, vol. 490–491, pp. 700–707. Trans Tech Publications, Switzerland. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.490-491.700.

5. Pshikhov V. H., Gurenko B. V., Medvedev M. Ju., Maevskij A. M., Golosov S. P. *Ocenivanie additivnyh vozmushhenij ANPA robnastnym nabljudatelem s nelinejnymi obratnymi svyazjami* (Estimation of added UAV disturbances by robust estimator with nonlinear

feedbacks), *Izvestija JuFU. Tehnicheskie Nauki*, 2014, no 3 (152), pp. 128–137 (in Russian).

6. Pshikhov V. H., Medvedev M. Ju., Gajduk A. R., Nejdorf R. A., Beljaev V. E., Fedorenko R. V., Kostjukov V. A., Krukhmalev V. A. *Sistema pozicionno-traektornogo upravlenija robotizirovannoj vozduhoplavitel'noj platformoj: matematicheskaja model'* (System of position-trajectory control for robotic airship: mathematical model), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2013, no 6, pp. 14–21 (in Russian).

7. Pshikhov V. H., Medvedev M. Ju., Gajduk A. R., Nejdorf R. A., Beljaev V. E., Fedorenko R. V., Kostjukov V. A., Krukhmalev V. A. *Sistema pozicionno-traektornogo upravlenija robotizirovannoj vozduhoplavitel'noj platformoj: algoritmy upravlenija* (System of position-trajectory control for robotic airship: control algorithms), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2013, no 7, pp. 13–20 (in Russian).

8. Pshikhov V. H. *Dirizhabli: perspektivy ispol'zovanija v robototekhnike* (Airships: perspectives for robotics), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2004, no. 5, pp. 15–20 (in Russian).

9. Zemljakov S. D., Rutkovskij V. Ju. *O nekotoryh rezul'tatah razvitiya teorii i praktiki primeneniya bespoiskovyh adaptivnyh sistem* (About some results of the un-searched adaptive systems theory and applications), *Avtomatika i Telemechanika*, 2001, no 7, pp. 103–121 (in Russian).

10. Putov V. V. *Prjamyje i neprjamyje bespoiskovyje adaptivnye sistemy s mazhorirujushimi funkcijami i ih prilozhenija k upravleniju mnogostepennymi nelinejnymi uprugimi mekhanicheskimi ob'ektami* (Direct and indirect unsearched adaptive systems with majorized functions and applications for control of multidegree nonlinear elastic mechanical objects), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2007, no 10, pp. 4–11 (in Russian).

11. Medvedev M. Ju. *Algoritmy adaptivnogo upravlenija ispolnitel'nymi privodami* (Algorithms of adaptive control for actuators), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2006, no 6, pp. 17–22 (in Russian).

12. Pshikhov V. H., Medvedev M. Ju. *Sintez adaptivnyh sistem upravlenija letatel'nymi apparatami* (Design of adaptive control systems

for aircrafts), *Izvestija JuFU. Tehnicheskie Nauki*, 2010, no 3 (104), pp. 187—196 (in Russian).

13. Pshihopov V. H., Fedotov A. A., Mcdvedcv M. Ju., Medvedeva T. N., Gurenko B. V. *Pozicionno-traektornaja sistema prjamogo adaptivnogo upravlenija morskimi podvizhnymi ob'ektami* (Position-path system of the direct adaptive control for marine vehicles), *Inzhenernyj Vestnik Dona*, 2014, no 3 (in Russian).

14. Rutkovskij V. Ju., Glumov V. M., Suhanov V. M. *Fizicheski realizuemyj algoritm adaptivnogo upravlenija s jetalonnnoj model'ju* (Physically realizable algorithm of the adaptive control with reference model), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2011, no 8, pp. 96—108 (in Russian).

15. Zemljakov S. D., Rutkovskij V. Ju. *Algoritm funkcionirovanij a adaptivnoj sistemy s jetalonnnoj model'ju, garantirujushhij zadannuju dinamicheskiju tochnost' upravlenija nestacionarnym dinamicheskim ob'ektom v uslovijah neo-predelennosti* (Algorithm of the adaptive sys-

tem with reference model, ensuring given dynamic error for non-stationary dynamic object with uncertainty), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2009, no 10, pp. 35—44 (in Russian).

16. Glumov V. M., Zemljakov S. D., Rutkovskij V. Ju., Suhanov V. M. *Primenenie principa postroenija adaptivnyh sistem s jetalonnnoj model'ju k zadacham monitoringa tekushhego sostojanija transmissionnyh valov* (Application of the adaptive systems with reference model theory for monitoring of transmission shafts state), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2003, no 5, pp. 131—146 (in Russian).

Corresponding autor:

Pshihopov Vyatcheslav Kh., Head of Department, Professor, Dr. Sci. Tech., Southern Federal University, 347928, Taganrog, Russian Federation, e-mail: pshichop@rambler.ru

УДК 517.72

В. Г. Козырев, канд. техн. наук, доц., vldr.kzrv@yandex.ru,
Севастопольский государственный университет

Асимптотическое разложение закона терминального управления выходом разнотемповых систем

Получено рациональное по форме асимптотическое разложение закона терминального управления выходом разнотемповых систем в форме синтеза. Использование пограничных функций делает его равномерным на отрезке времени управления. Для разложения доказаны усиленные оценки точности.

Ключевые слова: терминальное управление, разнотемповая динамика, малый параметр, сингулярные возмущения, асимптотическое приближение, метод пограничного слоя

Введение

Многие современные технологии связаны с необходимостью приведения движущихся объектов в заданное положение за конечный промежуток времени. Такая проблема возникает, например, в задачах автоматической посадки самолета, позиционирования исполнительного органа технологической установки, перемещения мобильного робота в заданную точку на местности и т. п. Последовательность физических воздействий, подаваемых на объект для достижения указанной цели, принято называть терминальным управлением.

Разработка законов терминального управления осуществляется в основном с помощью методов оптимального управления. Критерий оптимальности содержит в этом случае специальный, терминальный, член, выражающий штраф за промах, т. е. за отклонение конечного положения объекта от заданного, либо на правый конец траектории накладываются ограничения. При использовании квадратичного критерия и линейной математической модели объекта решение удастся довести до получения замкнутого закона управления — в форме обратной связи. Данному подходу посвящено множество работ, представленных в обзоре [1].

Математическое решение терминальной задачи не означает, однако, успешного завершения разработки закона управления. Одной из причин возможных затруднений может послужить особый характер

динамики, встречающийся у многих движущихся объектов. Он состоит в наличии у них медленных поступательных и быстрых вращательных собственных движений. Такая разнотемповость, разномасштабность процессов по времени усложняет численное решение задачи. Когда постоянные времени движений разнесены, приходится вычислять с малым шагом интегрирования быстропеременные составляющие движений на больших временных интервалах и оперировать при этом плохо обусловленными матрицами. Указанная особенность известна под названием жесткости систем.

Несмотря на принципиальный характер возникающих затруднений, фактор разнотемповости может быть обращен, тем не менее, на пользу исследованиям. Это удастся сделать, если попытаться применить асимптотические методы. Они позволяют составлять приближенные уравнения, которыми описываются быстрые и медленные составляющие по отдельности. Эти уравнения можно считать на компьютере — каждое в своем масштабе времени [1, 2]. В результате не только устраняются трудности моделирования, связанные с жесткостью систем, но и упрощаются сами модели систем. Данное положение относится и к законам управления разнотемповыми объектами: законы становятся проще, если разделить их на быстрые и медленные компоненты.

Свойство разнотемповости математически моделируется путем введения малого множителя при части производных уравнений системы. Те перемен-

ные, при производных которых находится малый параметр, являются "быстрыми", остальные — "медленными". Такой подход носит название теории сингулярных возмущений [2]. Он позволяет строить асимптотические приближения решений при стремлении малого параметра к нулю, являющиеся упрощением точных решений, и осуществлять разбиение (декомпозицию) решения на быстрые и медленные компоненты. В данной работе с помощью рассматриваемого подхода строятся асимптотические приближения процессов терминального управления для линейно-квадратичной задачи.

Постановка задачи

Задача асимптотической декомпозиции решается здесь для управляемой системы с быстрыми и медленными движениями, описываемой с помощью линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= A_1 y + A_2 z + B_1 u, y|_{t=0} = y^0; \\ \lambda \frac{dz}{dt} &= A_3 y + A_4 z + B_2 u, z|_{t=0} = z^0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\lambda > 0$ — малый параметр. В этих уравнениях y — "медленная" переменная, z — "быстрая". В самом деле, при $\lambda \rightarrow 0$ производная функции z будет большой: $dz/dt = (1/\lambda)F(y, z, u, t) = O(1/\lambda)$ (вне λ -окрестности тех точек фазового пространства, в которых $A_3 y + A_4 z + B_2 u = 0$). Значит, переменная z изменяется быстро.

Уравнения (1) заданы на фиксированном отрезке времени $0 \leq t \leq t_f$; $y \in E^n$, $z \in E^m$, $x = \text{col}[y, z] \in E^{n+m}$ — вектор состояния; $u \in E^r$ — вектор управления. Матрицы $A_i = A_i(t)$ ($i = \overline{1, 4}$) и $B_j = B_j(t)$ ($j = \overline{1, 2}$) предполагаются непрерывными на $[0, t_f]$.

Параметр λ в уравнениях вида (1) принято называть сингулярным, а содержащий его член $\lambda dz/dt$ — сингулярным возмущением [2]. Данное определение связано с тем, что, хотя этот член и является малым в определенном смысле, он вызывает существенное изменение решения.

Для сингулярно возмущенной системы (1) рассматривается задача нахождения оптимального управления $u = u(t)$, сводящего к минимуму квадратичный функционал

$$\begin{aligned} I[u(t)] &= (X^T F X)|_{t=t_f} + \\ &+ \int_0^{t_f} x^T \begin{bmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2^T(t) & Q_3(t) \end{bmatrix} x + u^T R(t) u \, dt, \end{aligned} \quad (2)$$

где $X = Hx$ — выход системы; $H = [H_y \ H_z]$ — постоянная матрица с блоками размером $H_y - q \times n$, $H_z - q \times m$; F — постоянная положительно определенная матрица $q \times q$ ($F > 0$); $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3 \end{bmatrix}$ — не-

отрицательно ($Q(t) \geq 0$), R — положительно ($R(t) > 0$) определенные на $[0, t_f]$ матрицы; $Q_1 - (n \times n)$ -мерный, $Q_3 - (m \times m)$ -мерный блоки.

Оптимальное управление $u = u(t)$ для задачи (1), (2) существует и имеет известный вид [3]:

$$u = -R^{-1} B^T K x, \quad (3)$$

где $K = K(t) - (n + m) \times (n + m)$ — матрица, являющаяся решением матричного дифференциального уравнения Риккати с условием на правом конце:

$$\frac{dK}{dt} = -KA - A^T K + KSK - Q, K|_{t=t_f} = \Phi. \quad (4)$$

Здесь $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \lambda^{-1} A_3 & \lambda^{-1} A_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \lambda^{-1} B_2 \end{bmatrix}$, $S = BR^{-1}B^T =$

$$= \begin{bmatrix} S_1 & \lambda^{-1} S_2 \\ \lambda^{-1} S_2^T & \lambda^{-2} S_3 \end{bmatrix}, S_1 = B_1 R^{-1} B_1^T, S_2 = B_1 R^{-1} B_2^T,$$

$$S_3 = B_2 R^{-1} B_2^T, \Phi = H^T F H.$$

При блочной записи

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & \lambda K_2 \\ \lambda K_2^T & \lambda K_3 \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2^T & \Phi_3 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

уравнение (4) преобразуется к трем уравнениям с условиями на правом конце:

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} &= -K_1 A_1 - A_1^T K_1 - K_2 A_3 - A_3^T K_2^T + \\ &+ K_1 S_1 K_1 + K_1 S_2 K_2^T + K_2 S_2^T K_1 + K_2 S_3 K_2^T - Q_1; \\ \lambda \frac{dK_2}{dt} &= -K_1 A_2 - K_2 A_4 - \lambda A_1^T K_2 - A_3^T K_3 + \\ &+ \lambda K_1 S_1 K_2 + K_1 S_2 K_3 + \lambda K_2 S_2^T K_2 + K_2 S_3 K_3 - Q_2; \\ \lambda \frac{dK_3}{dt} &= -\lambda K_2^T A_2 - \lambda A_2^T K_2 - K_3 A_4 - A_4^T K_3 + \\ &+ \lambda^2 K_2^T S_1 K_2 + \lambda K_2^T S_2 K_3 + \lambda K_3 S_2^T K_2 + K_3 S_3 K_3 - Q_3; \end{aligned} \quad (6)$$

$$K_1|_{t=t_f} = \Phi_1, K_2|_{t=t_f} = \frac{1}{\lambda} \Phi_2, K_3|_{t=t_f} = \frac{1}{\lambda} \Phi_3. \quad (7)$$

Система матричных дифференциальных уравнений (6) с условиями (7) является сингулярно возмущенной при малом λ . Ее решение определяет матрицу обратной связи в формуле оптимального регулятора (3). Мы видим, что регулятор обладает тем же свойством разнотемповости, что и объект управления (1). В случае регулятора, однако, разнотемповость становится наиболее проблемным свойством:

1) матричные уравнения (6) имеют порядок, многократно превосходящий порядок исходных векторных уравнений объекта (1);

2) цифровая реализация матричного регулятора с быстро и медленно изменяющимися коэффициентами в реальном времени требует значительных затрат времени и ресурсов бортового компьютера ввиду необходимости частой дискретизации многокомпонентных процессов по времени из-за наличия быстрых составляющих в законе управления;

3) конечные (при $t = t_f$) условия (7) системы (6) неограниченно возрастают при $\lambda \rightarrow 0$. Это создает дополнительные трудности численного интегрирования системы (6).

Особенности задачи (6), (7) затрудняют построение терминального регулятора в форме (3). Поэтому целесообразна его декомпозиция и асимптотическое упрощение. В данной статье строится асимптотическое разложение матрицы Риккати K (5) по степеням малого параметра λ , которое после подстановки в формулу (3) дает асимптотическое приближение всего регулятора и устраняет перечисленные трудности.

Аналогичная задача впервые была рассмотрена в работах [4, 5], но для частного случая матрицы Φ , при котором конечные условия (7) были ограниченными по параметру λ . Мы рассматриваем задачу при произвольных, в том числе неограниченных условиях (7) при $\lambda \rightarrow 0$. Асимптотика решения уравнений (6) с неограниченно большими условиями (7) получена в работе [6]. Однако в этой работе рассмотрен регулятор состояния, соответствующий единичной матрице $H = I$ и, значит, положительно определенной терминальной матрице $\Phi = H^T F H$. Нами рассматривается общий случай регулятора выхода, при котором матрица Φ может быть неотрицательно определенной, а H , соответственно, прямоугольной. Для этого случая выражения из работы [6] для представления регулятора непригодны.

Композиционное представление матрицы Риккати

Как и в работе [6], матрица K не может быть разложена в асимптотический ряд по степеням λ . Для построения ее асимптотики нами используется специальная мультипликативная декомпозиция этой матрицы на три более простые матрицы. Это представление K служит обобщением соответствующего представления из работы [6] на случай регулятора выхода, и оно имеет вид [7]

$$K = P + W^T(M + F^{-1})^{-1}W, \quad (8)$$

где матрицы $P - (n + m) \times (n + m)$, $W - q \times (n + m)$ и $M - q \times q$ определяются из уравнений

$$\frac{dP}{dt} = -PA - A^T P + PSP - Q, \quad P|_{t=t_f} = 0;$$

$$\frac{dW}{dt} = -W(A - SP), \quad W|_{t=t_f} = H;$$

$$\frac{dM}{dt} = -WS(t)W^T, \quad M|_{t=t_f} = 0.$$

$$\text{Блоки матрицы } P: P = \begin{bmatrix} P_1 & \lambda P_2 \\ \lambda P_2^T & \lambda P_3 \end{bmatrix}, \quad P_1 - n \times n,$$

$P_3 - m \times m$, удовлетворяют уравнениям вида (6), но с нулевыми конечными условиями

$$P_1|_{t=t_f} = 0, \quad P_2|_{t=t_f} = 0, \quad P_3|_{t=t_f} = 0,$$

а для блоков $W = [W_y \quad \lambda W_z]$, $W_y - q \times n$, $W_z - q \times m$, и матрицы M имеют место уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dW_y}{dt} &= -W_y(A_1 - S_1 P_1 - S_2 P_2^T) - \\ &- W_z(A_3 - S_2^T P_1 - S_3 P_2^T), \quad W_y|_{t=t_f} = H_y; \\ \lambda \frac{dW_z}{dt} &= -W_y(A_2 - \lambda S_1 P_2 - S_2 P_3) - \\ &- W_z(A_4 - \lambda S_2^T P_2 - S_3 P_3), \quad W_z|_{t=t_f} = \lambda^{-1} H_z; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= -W_y S_1 W_y^T - W_y S_2 W_z^T - \\ &- W_z S_2^T W_y^T - W_z S_3 W_z^T, \quad M|_{t=t_f} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Асимптотика компонент матрицы Риккати

Пусть теперь:

I. Все матрицы $A_i = A_i(t)$ ($i = \overline{1, 4}$), $B_j = B_j(t)$ ($j = 1, 2$), $Q = Q(t)$, $R = R(t)$ $p + 2$ раза непрерывно дифференцируемы на $[0, t_f]$ (p — некоторое натуральное число: $p = 0, 1, 2, \dots$);

II. Пара матриц (A_4, B_2) по терминологии работ [4, 5] управляема в пограничном слое, т. е. $\text{rank}[B_2, A_4 B_2, \dots, A_4^{m-1} B_2] = m$ на $[0, t_f]$;

III. Пара матриц (A_4, C) наблюдаема в пограничном слое [4, 5], т. е. $\text{rank}[C^T, A_4^T C^T, \dots, (A_4^T)^{m-1} C^T] = m$ на $[0, t_f]$, где $C_* = C_*(t)$ — решение уравнения $C_*^T C_* = Q_3$.

Если $Q_3 = Q_3(t) \equiv 0$ или $B_2 = B_2(t) \equiv 0$, то вместо условий II и III нужно потребовать, чтобы матрица $A_4(t)$ была гурвицевой на $[0, t_f]$, т. е. имела собственные числа с отрицательными действительными частями при всех $t \in [0, t_f]$.

Опираясь на условия I—III и результаты работы [7], запишем асимптотику решений уравнений (6) для случая P_i и уравнений (9), (10) для $W_{y,z}$, M . Она имеет вид следующих разложений по степеням λ :

$$\tilde{P}_i(t, \lambda) = \sum_{k=0}^p \lambda^k [P_{ik}(t) + \Pi_k P_i(\tau)] \quad (i = \overline{1, 3}); \quad (11)$$

$$\tilde{W}_y(t, \lambda) = \sum_{k=0}^p \lambda^k [W_{yk}(t) + \Pi_k W_y(\tau)]; \quad (12)$$

$$\tilde{W}_z(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \Pi_{-1} W_z(\tau) + \sum_{k=0}^p \lambda^k [W_{zk}(t) + \Pi_k W_z(\tau)];$$

$$\tilde{M}(t, \lambda) = \sum_{k=-1}^p \lambda^k [M_k(t) + \Pi_k M(\tau)], \quad (13)$$

где $\tau = (t - t_f)/\lambda$ — так называемое растянутое, или "быстрое", время, а функции от t и τ — коэффициенты разложений $P_{ik}(t)$, $\Pi_k P_i(\tau)$, $W_{y,zk}(t)$, $\Pi_k W_{y,z}(\tau)$, $\Pi_{-1} W_z(\tau)$, $M_k(t)$, $\Pi_k M(\tau)$ — определяются ниже как решения соответствующих уравнений.

Выражения (11)–(13) являются асимптотически приближениями матриц P_i , $W_{y,z}$, M . Ошибки приближений составляют величину порядка $\lambda^{p+1} O(1)$, где $\|O(1)\| \leq c$ для всех достаточно малых λ и всех $t \in [0, t_f]$, $c > 0$ — некоторая постоянная [7]. Пограничные функции вида $\Pi_k f(\tau)$ ($i = \overline{1, 3}$; $k = 0, 1, \dots, p$) мажорируются убывающими экспонентами [7]:

$$\|\Pi_k f(\tau)\| \leq c \exp(\kappa \tau), \quad \tau \leq 0,$$

где $\kappa > 0$ — некоторая константа.

Для получения коэффициентов разложений (11)–(13) используется известный алгоритм [2]. Он заключается в подстановке (11) в уравнения (6), записанные для P_i , а (12), (13) — в (9), (10) вместо P_i , $W_{y,z}$, M и в приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях λ в обеих частях уравнений. При этом отдельно приравниваются коэффициенты, зависящие от t , и отдельно — зависящие от τ . Это и дает уравнения для определения коэффициентов. В частности, в нулевом приближении эти уравнения имеют вид [7]

$$\begin{aligned} \frac{dP_{10}}{dt} &= -P_{10}A_1 - A_1^T P_{10} - P_{20}A_3 - \\ &- A_3^T P_{20}^T + P_{10}S_1 P_{10} + P_{10}S_2 P_{20}^T + P_{20}S_2^T P_{10} + \\ &+ P_{20}S_3 P_{20}^T - Q_1, \quad P_{10}(t_f) = 0, \\ 0 &= -P_{10}(A_2 - S_2 P_{30}) - P_{20}(A_4 - S_3 P_{30}) - A_3^T P_{30} - Q_2, \\ 0 &= -P_{30}A_4 - A_4^T P_{30} + P_{30}S_3 P_{30} - Q_3, \\ \frac{d\Pi_0 P_2}{d\tau} &= -\Pi_0 P_2 \cdot \alpha_{40} - \alpha_{30}^T \cdot \Pi_0 P_3 + \\ &+ \Pi_0 P_2 \cdot s_{30} \cdot \Pi_0 P_3, \quad \Pi_0 P_2(0) = -P_{20}(t_f), \\ \frac{d\Pi_0 P_3}{d\tau} &= -\Pi_0 P_3 \cdot \alpha_{40} - \alpha_{40}^T \cdot \Pi_0 P_3 + \\ &+ \Pi_0 P_3 \cdot s_{30} \cdot \Pi_0 P_3, \quad \Pi_0 P_3(0) = -P_{30}(t_f), \\ \frac{d\Pi_1 P_3}{d\tau} &= -\Pi_1 P_3(\alpha_{40} - s_{30} \cdot \Pi_0 P_3) - \\ &- (\alpha_{40} - s_{30} \cdot \Pi_0 P_3)^T \Pi_1 P_3 + \Pi_1 F_{P3}(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 F_{P3}(\tau) &= -\Pi_0 P_2^T \cdot \alpha_{20} - \alpha_{20}^T \cdot \Pi_0 P_2 - \Pi_0 P_3 \cdot \alpha_{41} - \\ &- \alpha_{41}^T \cdot \Pi_0 P_3 + \Pi_0 P_2^T \cdot s_{20} \cdot \Pi_0 P_3 + \Pi_0 P_3 \cdot s_{20}^T \cdot \Pi_0 P_2 + \\ &+ \Pi_0 P_3 \cdot s_{31} \cdot \Pi_0 P_3, \quad \Pi_1 P_3(0) = -P_{31}(t_f), \end{aligned}$$

при этом $P_{31}(t_f)$ определяется из алгебраического уравнения

$$P_{31}(A_4 - S_3 P_{30}) + (A_4^T - P_{30}S_3)P_{31} = F_{P31}(t) - \frac{dP_{30}}{dt},$$

где

$$F_{P31}(t) = -P_{20}^T A_2 - A_2^T P_{20} + P_{20}^T S_2 P_{30} + P_{30}S_2^T P_{20} - q_3;$$

$$\frac{dW_{y0}}{dt} = -W_{y0}(A_1 - S_1 P_{10} - S_2 P_{20}^T) -$$

$$-W_{z0}(A_3 - S_2^T P_{10} - S_3 P_{20}^T);$$

$$W_{y0}(t_f) = H_y - \Pi_0 W_y(0);$$

$$0 = -W_{y0}(A_2 - S_2 P_{30}) - W_{z0}(A_4 - S_3 P_{30});$$

$$\frac{d\Pi_{-1} W_z}{d\tau} = -\Pi_{-1} W_z(\alpha_{40} - s_{30} \cdot \Pi_0 P_3), \quad \Pi_{-1} W_z(0) = H_z;$$

$$\frac{d\Pi_0 W_y}{d\tau} = -\Pi_{-1} W_z(\alpha_{30} - s_{30} \cdot \Pi_0 P_2^T) \equiv \Pi_0 f_{W_y}(\tau),$$

$$\Pi_0 W_y(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi_0 f_{W_y}(\sigma) d\sigma;$$

$$\frac{d\Pi_0 W_z}{d\tau} = -\Pi_0 W_y(\alpha_{20} - s_{20} \cdot \Pi_0 P_3) -$$

$$-\Pi_0 W_z(\alpha_{40} - s_{30} \cdot \Pi_0 P_3) + \Pi_0 F_{W_z}(\tau);$$

$$\begin{aligned} \Pi_0 F_{W_z}(\tau) &= -\Pi_{-1} W_z \cdot [\alpha_{41} - (s_{20}^T \cdot \Pi_0 P_2 + s_{31} \cdot \Pi_0 P_3 + \\ &+ s_{30} \cdot \Pi_1 P_3)] + (\Omega_{y0} + \Omega_{z0}) \cdot \Pi_0 P_3; \end{aligned}$$

$$\Pi_0 W_z(0) = -W_{z0}(t_f);$$

$$M_{-1}(t) \equiv M_{-1}(t_f) = -\Pi_{-1} M(0);$$

$$\frac{dM_0}{dt} = -W_{y0}S_1 W_{y0}^T - W_{y0}S_2 W_{z0}^T -$$

$$-W_{z0}S_2^T W_{y0}^T - W_{z0}S_3 W_{z0}^T,$$

$$M_0(t_f) = -\Pi_0 M(0);$$

$$\frac{d\Pi_{-1} M}{d\tau} = -\Pi_{-1} W_z \cdot s_{30} \cdot \Pi_{-1} W_z^T \equiv \Pi_{-1} f_M(\tau),$$

$$\Pi_{-1} M(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi_{-1} f_M(\sigma) d\sigma,$$

$$\frac{d\Pi_0 M}{d\tau} = -\Pi_{-1} W_z \cdot f_W^T(\tau) - f_W(\tau) \cdot \Pi_{-1} W_z^T -$$

$$-\Pi_{-1} W_z \cdot s_{31}(\tau) \cdot \Pi_{-1} W_z^T \equiv \Pi_0 f_M(\tau),$$

$$f_W(\tau) = [W_{y0}(t_f) + \Pi_0 W_y]s_{20} + [W_{z0}(t_f) + \Pi_0 W_z]s_{30},$$

$$\Pi_0 M(0) = \int_{-\infty}^0 \Pi_0 f_M(\sigma) d\sigma.$$

Здесь

$$s_{i0} = S_i(t_f) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad s_{31} = s_{31}(\tau) = S_3^{(1)}(t_f) \cdot \tau,$$

$$\alpha_{10} = (A_1 - S_1 P_{10} - S_2 P_{20}^T)|_{t=t_f},$$

$$\alpha_{20} = (A_2 - S_2 P_{30})|_{t=t_f},$$

$$\alpha_{30} = (A_3 - S_2^T P_{10} - S_3 P_{20}^T)|_{t=t_f},$$

$$\alpha_{40} = (A_4 - S_3 P_{30})|_{t=t_f},$$

$$\alpha_{41} = \alpha_{41}(\tau) = (A_4^{(1)} - S_3 P_{30}^{(1)} - S_3^{(1)} P_{30})|_{t=t_f} \cdot \tau - \\ - (S_2^T P_{20} + S_3 P_{31})|_{t=t_f},$$

$$\Omega_{y0} = W_{y0}(t_f) \cdot S_2(t_f), \quad \Omega_{z0} = W_{z0}(t_f) \cdot S_3(t_f),$$

а выражения вида $\Theta^{(1)}$ обозначают первую производную функции $\Theta = \Theta(t)$ по времени: $\Theta^{(1)} = d\Theta/dt$.

Теорема об асимптотическом разложении

С помощью композиционной формулы (8) получим асимптотику всей матрицы K и затем асимптотику самого регулятора (3). Воспользуемся для этого блочным представлением (5), где в соответствии с (8)

$$\begin{aligned} K_1 &= P_1 + W_y^T (M + F^{-1})^{-1} W_y; \\ K_2 &= P_2 + W_y^T (M + F^{-1})^{-1} W_z; \\ K_3 &= P_3 + \lambda W_z^T (M + F^{-1})^{-1} W_z. \end{aligned} \quad (14)$$

Составим асимптотически приближенную матрицу Риккати по формуле (8):

$$\tilde{K} = \tilde{P} + \tilde{W}^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}, \quad (15)$$

и примем для нее аналогичную к (5) структуру

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 & \lambda \tilde{K}_2 \\ \lambda \tilde{K}_2^T & \lambda \tilde{K}_3 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= \tilde{P}_1 + \tilde{W}_y^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_y; \\ \tilde{K}_2 &= \tilde{P}_2 + \tilde{W}_y^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_z; \\ \tilde{K}_3 &= \tilde{P}_3 + \lambda \tilde{W}_z^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_z. \end{aligned} \quad (17)$$

Привлекая оценки (11)–(13) и структуры (5) и (16), можно доказать следующую теорему, усиливающую соответствующую теорему из работы [6].

Теорема. При выполнении условий I–III компоненты матрицы $\tilde{K}(t, \lambda)$ являются p -ми асимптотическими приближениями для соответствующих

компонент $K(t, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$, равномерными на отрезке $0 \leq t \leq t_f$, а именно:

$$K_i(t, \lambda) = \tilde{K}_i(t, \lambda) + r_{Ki}(t, \lambda) \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (18)$$

где остатки приближений $r_{Ki}(t, \lambda)$ подчиняются оценкам

$$\|r_{K1}(t, \lambda)\| = \lambda^{p+1} O(1),$$

$$\|r_{Ki}(t, \lambda)\| = \lambda^p e^{-\kappa t} O(1) + \lambda^{p+1} O(1) \quad (i = 2, 3) \quad (19)$$

при $\lambda \rightarrow 0$ равномерно на $[0, t_f]$, т. е. $\|O(1)\| \leq c$ для $\forall t \in [0, t_f]$ и $\forall \lambda \in (0, \lambda_0]$, где $c > 0$ и $\lambda_0 > 0$ — некоторые постоянные.

Доказательство теоремы

Оценим точность асимптотических приближений (18). Для этого воспользуемся представлениями

$$K = P + W^T (M + F^{-1})^{-1} W = P + V;$$

$$\tilde{K} = \tilde{P} + \tilde{W}^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W} = \tilde{P} + \tilde{V},$$

где $V = W^T (M + F^{-1})^{-1} W$; $\tilde{V} = \tilde{W}^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}$.

Для V и $\tilde{V}$ примем блочные разбиения

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & \lambda V_2 \\ \lambda V_2^T & \lambda V_3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 & \lambda \tilde{V}_2 \\ \lambda \tilde{V}_2^T & \lambda \tilde{V}_3 \end{bmatrix},$$

где $V_1 = W_y^T (M + F^{-1})^{-1} W_y$; $V_2 = W_y^T (M + F^{-1})^{-1} W_z$;

$V_3 = \lambda W_z^T (M + F^{-1})^{-1} W_z$; $\tilde{V}_1 = \tilde{W}_y^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_y$;

$\tilde{V}_2 = \tilde{W}_y^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_z$; $\tilde{V}_3 = \lambda \tilde{W}_z^T (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} \tilde{W}_z$.

Введем остатки асимптотических разложений

$$r_P = P - \tilde{P}, \quad r_W = W - \tilde{W}, \quad r_M = M - \tilde{M}$$

и их блочные представления:

$$r_P = \begin{bmatrix} P_1 & \lambda P_2 \\ \lambda P_2^T & \lambda P_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \lambda \tilde{P}_2 \\ \lambda \tilde{P}_2^T & \lambda \tilde{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{P1} & \lambda r_{P2} \\ \lambda r_{P2}^T & \lambda r_{P3} \end{bmatrix},$$

$$r_W = [W_y \quad \lambda W_z] - [\tilde{W}_y \quad \lambda \tilde{W}_z] = [r_{Wy} \quad \lambda r_{Wz}],$$

$$r_M = M - \tilde{M},$$

где согласно (11)–(13)

$$r_{Pi} = \lambda^{p+1} O(1), \quad i = \overline{1, 3};$$

$$r_{Wy,z} = \lambda^{p+1} O(1);$$

$$r_M = \lambda^{p+1} O(1),$$

а $r_V = V - \tilde{V}$ предстоит оценить.

В работе [7] доказано, что матрица $[M(t, \lambda) + F^{-1}]^{-1}$ существует и равномерно ограничена при всех

$t \in [0, t_f]$ и $\lambda > 0$. В отношении матрицы $[\tilde{M}(t, \lambda) + F^{-1}]^{-1}$ то же самое верно при всех $t \in [0, t_f]$ и $\lambda \in (0, \lambda_0]$, где λ_0 достаточно мало.

Далее запишем при достаточно малых λ

$$\begin{aligned}(M + F^{-1})^{-1} &= (\tilde{M} + F^{-1} + r_M)^{-1} = \\ &= [(I + r_M(\tilde{M} + F^{-1})^{-1})(\tilde{M} + F^{-1})]^{-1} = \\ &= (\tilde{M} + F^{-1})^{-1}(I + r_M O(1)) = \\ &= (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} + O(1)r_M O(1)\end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned}(M + F^{-1})^{-1} - (\tilde{M} + F^{-1})^{-1} &= \\ &= O(1)r_M O(1) = \lambda^{p+1} O(1).\end{aligned}$$

Обратимся к остатку r_V . Запишем его в виде

$$\begin{aligned}r_V &= V - \tilde{V} = W^T(M + F^{-1})^{-1}W - \\ &- \tilde{W}^T(\tilde{M} + F^{-1})^{-1}\tilde{W} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_2^T + \rho_3,\end{aligned}$$

где

$$\rho_1 = \tilde{W}^T[(M + F^{-1})^{-1} - (\tilde{M} + F^{-1})^{-1}]\tilde{W};$$

$$\rho_2 = r_W^T(M + F^{-1})^{-1}\tilde{W}; \quad \rho_3 = r_W^T(M + F^{-1})^{-1}r_W.$$

Найдем

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \tilde{W}^T[(M + F^{-1})^{-1} - (\tilde{M} + F^{-1})^{-1}]\tilde{W} = \\ &= \tilde{W}^T \lambda^{p+1} O(1) \tilde{W}.\end{aligned}$$

Здесь $O(1)$ — $q \times q$ симметричная матрица;

$\tilde{W} = [\tilde{W}_y \quad \lambda \tilde{W}_z]$ — $q \times (n + m)$ матрица. Поэтому с учетом (12)

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} \tilde{W}_y^T O(1) \tilde{W}_y & \lambda \tilde{W}_y^T O(1) \tilde{W}_z \\ \lambda \tilde{W}_z^T O(1) \tilde{W}_y & \lambda^2 \tilde{W}_z^T O(1) \tilde{W}_z \end{bmatrix} = \\ &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda O(1) \\ \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^2 O(1) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

(где все матричные блоки симметричны).

Аналогично имеем

$$\begin{aligned}\rho_2 &= r_W^T(M + F^{-1})^{-1}\tilde{W} = \\ &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O(1) \\ \lambda O(1) \end{bmatrix} O(1) [\tilde{W}_y \quad \lambda \tilde{W}_z] = \\ &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O(1) \tilde{W}_y & \lambda O(1) \tilde{W}_z \\ \lambda O(1) \tilde{W}_y & \lambda^2 O(1) \tilde{W}_z \end{bmatrix} = \\ &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda O(1) \\ \lambda O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^2 O(1) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\rho_3 = r_W^T(M + F^{-1})^{-1}r_W =$$

$$\begin{aligned}&= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O^T(1) \\ \lambda O^T(1) \end{bmatrix} O(1) \lambda^{p+1} [O(1) \quad \lambda O(1)] = \\ &= \lambda^{2p+2} \begin{bmatrix} O(1) & \lambda O(1) \\ \lambda O(1) & \lambda^2 O(1) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(Здесь также блоки матрицы ρ_3 симметричны.)

Отсюда находим

$$\begin{aligned}r_V &= \rho_1 + \rho_2 + \rho_2^T + \rho_3 = \\ &= \lambda^{p+1} \begin{bmatrix} O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda O(1) \\ \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda O(1) & \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^2 O(1) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}r_V &= V - \tilde{V} = \\ &= \begin{bmatrix} V_1 & \lambda V_2 \\ \lambda V_2^T & \lambda V_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{V}_1 & \lambda \tilde{V}_2 \\ \lambda \tilde{V}_2^T & \lambda \tilde{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{V1} & \lambda r_{V2} \\ \lambda r_{V2}^T & \lambda r_{V3} \end{bmatrix},\end{aligned}$$

где

$$r_{V1} = \lambda^{p+1} O(1), \quad r_{V2} = \lambda^p \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^{p+1} O(1),$$

$$r_{V3} = \lambda^p \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^{p+2} O(1).$$

Ранее мы получили

$$r_P = P - \tilde{P} = \begin{bmatrix} r_{P1} & \lambda r_{P2} \\ \lambda r_{P2}^T & \lambda r_{P3} \end{bmatrix},$$

$$r_{Pi} = \lambda^{p+1} O(1), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Суммируя, приходим к заключению о равномерности на $[0, t_f]$ при достаточно малых λ остатка для всей матрицы K :

$$\begin{aligned}r_K &= K - \tilde{K} = P - \tilde{P} + V - \tilde{V} = \\ &= r_P + r_V = \begin{bmatrix} r_{K1} & \lambda r_{K2} \\ \lambda r_{K2}^T & \lambda r_{K3} \end{bmatrix}; \\ r_{K1} &= \lambda^{p+1} O(1); \\ r_{K2, 3} &= \lambda^p \mathbf{e}^{k\tau} O(1) + \lambda^{p+1} O(1),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Равномерный асимптотический регулятор

С учетом (3) и (15) приходим к асимптотическому регулятору

$$\tilde{u} = -R^{-1} B^T \tilde{K} x. \quad (20)$$

Следствие. Из теоремы следует, что асимптотический регулятор (20) служит равномерным асимптотическим приближением точного регулятора (3), формируя управляемую траекторию с точностью до $O(\lambda^{p+1})$ для всех t на $[0, t_f]$.

Список литературы

1. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3—51.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

3. Брайсон А. Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-ши. М.: "Мир", 1972. 544 с.
4. Kokotovic P. V., Yackel R. A. Singular perturbations of linear regulators: basic theorems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1972. V. 17, № 1, February. P. 29—37.
5. Yackel R. A., Kokotovic P. V. A boundary layer method for the matrix Riccati equation // IEEE Trans. on Automatic Control. 1973. V. 18, N. 1, February. P. 17—24.
6. Глизер В. Я., Дмитриев М. Г. Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи Коши, возникающей в теории оптимального управления // Дифференц. уравнения. 1978. Т. XIV, № 4. С. 601—612.
7. Козырев В. Г. Оптимальный регулятор выхода сингулярно возмущенных систем // Радиоэлектроника, информатика, управление. Запорожье: изд. ЗГТУ, 2003. № 2 (10). С. 125—131.

Asymptotic Expansion of the Terminal Control Law of the Output of Two-Tame-Scale Systems

V. G. Kozyrev, vldr.kzrv@yandex.ru,

Sevastopol National Technical University, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Received on December 01, 2014

Research objective. The research objective is development of asymptotic methods for synthesis of the terminal control laws for the two-tame-scale plants. A two-tame-scale property is typical for her moving objects — aircraft, ships, etc. All of them are characterized by fast rotational and slow translational motions. In power electric drives the mechanical motions of the armature are slow, and the electric transients in circuits are fast. This circumstance hinders formation of the control laws because of the necessity for a frequent time discretization of the transients and performance operations on the ill-conditioned matrices. It is also known under the name of a system rigidity. In case of a terminal control it manifests itself most dramatically due to the non-stationary nature of the process of bringing an object to a predetermined position within a finite period of time. The paper proposes an asymptotic approach to the development of the terminal control law for the two-tame-scale plants. It allows us to decompose the control process into the fast and slow components, which are calculated separately in two time scales, followed by their arrangement in a holistic solution. This simplifies a dynamic representation of the controller and accelerates the numerical procedure for initiation of the control actions. **Formulation of the problem.** In the article the problem of an asymptotic decomposition for a controlled system is solved with fast and slow motions described by means of the linear differential equations with a small parameter at some derivatives. Terminal control is achieved by minimizing the corresponding quadratic quality functional defined on a finite time interval. Such a statement leads to a singularly perturbed optimal control problem which can be solved in the form of synthesis, and an asymptotic behavior of the control by the method of a boundary layer can be achieved. **Research results.** As a result of the research, the asymptotic behavior of the terminal control law is built within small singular parameters, uniform on the interval of the control time. The problem is solved for the general case of the output control, which distinguishes the obtained results from the well-known works, devoted exclusively to the state control problems. For this purpose, a special multiplicative decomposition of the control feedback loop matrix into three more simple matrices is used. Improved estimates of the asymptotic expansion remainder, more accurate than the existing estimates, are proved. **Conclusion.** Application of the developed asymptotic behavior based on its precision estimates allows us to build effective laws for a terminal control of the two-tame-scale plants. The proposed approach solves the problem of the rigidity, simplifies the terminal control laws, and makes their accuracy close to the optimal laws of the terminal control.

Keywords: terminal control, dynamic object, two-tame scale dynamics, asymptotic approximation, small singular parameter

For citation:

Kozyrev V. G. Asymptotic Expansion of the Terminal Control Law of the Output of Two-Tame-Scale Systems, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 225—331.

DOI: 10.17587/mau.16.225-231

References

1. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singulyarnye vozmushcheniya v zadachakh upravleniya (Singular perturbations in control problems), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2006, no. 1, pp. 3—51 (in Russian).
2. Vasil'eva A. B., Butuzov V. F. *Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii* (Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations), Moscow, Nauka, 1973, 272 p. (in Russian).
3. Bryson A., Yu-Chi Ho. *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya* (Applied optimal control theory), Moscow, Mir, 1972, 272 p.
4. Kokotovic P. V., Yackel R. A. Singular perturbations of linear regulators: basic theorems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1972, vol. 17, no. 1, pp. 29—37.

5. Yackel R. A., Kokotovic P. V. A boundary layer method for the matrix Riccati equation, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1973, vol. 18, no. 1, pp. 17—24.

6. Glizer V. Ja., Dmitriev M. G. Asimptotika resheniya odnoi singulyarno vozmushchennoi zadachi Koshi, vznikayushchei v teorii optimal'nogo upravleniya (Asymptotic behavior of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem arising in optimal control theory), *Differentsial'nye uravneniya*, 1978, vol. XIV, no. 4, pp. 601—612 (in Russian).

7. Kozyrev V. G. Optimal'nyi regulyator vykhoda singulyarno vozmushchennykh sistem (Optimal controller of the output of singularly perturbed systems), *Radioelektronika, informatika, upravlenie*, 2003, no. 2 (10). P. 125—131 (in Russian).

Corresponding author:

Kozyrev Vladimir G., PhD, Associate Professor of Department of Engineering Cybernetics, Sevastopol National Technical University, Sevastopol, 299053, University street, 33, Russian Federation, e-mail: vldr.kzrv@yandex.ru

УДК 519.6

А. Г. Ченцов, чл.-корр. РАН, гл. науч. сотр., проф., chentsov@imm.uran.ru,
М. С. Кошелева, мл. науч. сотр., инженер-исследователь, kosheleva.ms@gmail.com,
Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

Динамическое программирование в задаче курьера со стоимостями, зависящими от списка заданий¹

Построена схема независимых вычислений функции Беллмана для задачи курьера (задача коммивояжера с условиями предшествования), в которой стоимости зависят от списка невыполненных (на текущий момент) заданий. Постановка и методы решения ориентированы на применение в задаче о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации.

Ключевые слова: динамическое программирование, маршрут, условия предшествования, существенные списки (заданий), слои пространства позиций, независимые вычисления, функция Беллмана

Введение

Статья посвящена исследованию одной задачи маршрутизации перемещений с ограничениями и усложненными функциями стоимости упомянутых перемещений. Данное усложнение касается ситуации, когда стоимости перемещений явным образом зависят от списка заданий, не выполненных на текущий момент.

Эта особенность возникает, в частности, в актуальной инженерной задаче о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации. Речь идет о маршрутизации перемещений при радиационном воздействии излучающих элементов, подлежащих демонтажу в той или иной очередности. При этом воздействие на этапе перемещений от одного излучающего элемента к другому определяется совокупностью излучателей, не демонтированных на момент данного перемещения. Кроме того, имеются многочисленные условия предшествования, порожденные требованиями технологического характера, геометрией системы излучателей и другими соображениями. Целью исследования в упомянутой задаче является определение маршрута перемещения работника (бригады работников), оптимального с точки зрения совокупной дозы радиации [1, 2].

С идейной точки зрения рассматриваемая постановка имеет своим прототипом известную трудно-решаемую задачу коммивояжера (ЗК). В связи с последней отметим работы [3–7]. Полезно отметить, что в работе [3], наряду с ЗК, рассматривается целый ряд подобных задач маршрутизации, учитывающих

особенности, связанные с приложениями. Среди модификаций ЗК отметим задачу курьера. Данная постановка имеет непосредственное отношение к последующим построениям, касающимся решения усложненной (но также "точной") в отличие от задач, рассматриваемых в работе [8, 9]) задачи.

Сводка обозначений общего характера. В дальнейшем используется обычная теоретико-множественная символика, включая кванторы, пропорциональные связи; $\triangleq$ — равенство по определению, $\emptyset$ — пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. В дальнейшем $\mathbb{R}$ — вещественная прямая с (неотрицательной) полуосью $[0, \infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$, и для каждого непустого множества S через $\mathcal{R}_+[S]$ обозначается множество всех функций из S в $[0, \infty[$ (в качестве S в дальнейшем будут использоваться различные множества). Ниже широко используется индексная форма записи функций или отображений [10]. В частности, при $m \in \mathbb{N}$ рассматриваем кортежи вида $(x_i)_{i \in \overline{0, m}}$ и $(y_i)_{i \in \overline{1, m}}$ со значениями в заданных априори множествах; строго говоря, данные кортежи являются отображениями на $\overline{0, m}$ и $\overline{1, m}$ соответственно, для записи которых удобна индексная форма. Через $\{x\}$ обозначаем одноэлементное множество, содержащее объект x . Если z — упорядоченная пара (УП) объектов x и y , т. е. $z = (x, y)$, то через $\text{pr}_1(z)$ и $\text{pr}_2(z)$ условимся обозначать соответственно первый и второй элементы z , т. е. $\text{pr}_1(z) = x$ и $\text{pr}_2(z) = y$. Пусть $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ (множество всех натуральных чисел), $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$; $\overline{k, l} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 \mid (k \leq i) \ \& \ (i \leq l)\} \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \ \forall l \in \mathbb{N}_0$. Если

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 13-08-00-643-а, № 14-08-00419).

K — непустое конечное множество, то $|K| \in \mathbb{N}$ есть его мощность (полагаем также $|\emptyset| \triangleq 0$). Наряду с УП рассматриваем триплеты: если a, b и c — объекты, то [11, с. 17] $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$; если A, B и C — множества, то $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$.

Специальные обозначения, используемые в задаче маршрутизации. Всюду в дальнейшем фиксируем число $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, число 0 используем в качестве базы (начального пункта) процесса посещения "городов" с индексами из $\overline{1, N}$. Последующие определения извлекаются из работы [9, ч. 2] для случая, когда рассматриваемые в работе [9, ч. 2] мегаполисы являются одноэлементными (синглетонами). Через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок в $\overline{1, N}$, называемых (полными) маршрутами посещения "городов", определяемых соответствующими индексами из $\overline{1, N}$ (элементы $\mathbb{P}$ суть биекции $\overline{1, N}$ на себя). Таким образом, рассматриваем процессы $0 \rightarrow \alpha(1) \rightarrow \dots \rightarrow \alpha(N)$, где $\alpha \in \mathbb{P}$; на выбор α могут накладываться ограничения. С этой целью фиксируем множество $\mathbf{K}$, $\mathbf{K} \subset \overline{1, N} \times \overline{1, N}$ (случай $\mathbf{K} = \emptyset$ не исключается и отвечает отсутствию ограничений в виде условий предшествования). Элементы $\mathbf{K}$, являющиеся УП, называем адресными парами, для каждой из которых первый элемент имеет смысл отправителя, а второй — получателя (сообщения, груза и т. п.). Постулируем, что для каждого непустого множества $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}$, непременно существует УП $z_0 \in \mathbf{K}_0$, для которой [9, условие 2.2.1] $\text{pr}_1(z_0) \neq \text{pr}_2(z) \forall z \in \mathbf{K}_0$. Требуется, чтобы выбранный маршрут $\alpha \in \mathbb{P}$ обеспечивал более раннее посещение отправителя для каждой адресной пары. Определяем при $\alpha \in \mathbb{P}$ обратную (к α) перестановку $\alpha^{-1} \in \mathbb{P}$ (итак, $\alpha^{-1}(\alpha(k)) = \alpha(\alpha^{-1}(k)) = k \forall k \in \overline{1, N}$). Тогда [9, ч. 2] $\mathbb{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} | \alpha^{-1}(\text{pr}_1(h)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(h)) \forall h \in \mathbf{K}\} \neq \emptyset$ есть множество всех допустимых по предшествованию маршрутов, которые только и могут использоваться.

1. Постановка задачи

Функции стоимости. Введем способы оценивания перемещения и терминального состояния. Для этого фиксируем отображение $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\overline{0, N} \times \overline{0, N} \times \mathfrak{N}]$, где $\mathfrak{N}$ — семейство всех непустых подмножеств $\overline{1, N}$. Кроме того, пусть $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[\overline{0, N}]$. На основе $\mathbf{c}$ и $\mathbf{f}$ формируем аддитивный критерий, полагая при $\alpha \in \mathbb{P}$

$$\mathfrak{C}_\alpha \triangleq \mathbf{c}(0, \alpha(1), \overline{1, N}) + \sum_{t=1}^{N-1} \mathbf{c}(\alpha(t), \alpha(t+1), \{\alpha(j): j \in \overline{t+1, N}\}) + \mathbf{f}(\alpha(N)). \quad (1)$$

При этом $(\mathfrak{C}_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{P}} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{P}]$. Основная задача маршрутизации (ОЗМ) имеет вид

$$\mathfrak{C}_\alpha \rightarrow \min, \alpha \in \mathbb{A}. \quad (2)$$

Через V обозначаем значение (экстремум) задачи (2), т. е. наименьшее из чисел $\mathfrak{C}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{A}$. Маршрут $\alpha_0 \in \mathbb{A}$ называем оптимальным, если $\mathfrak{C}_{\alpha_0} = V$. Наша цель состоит в определении V и построении какого-либо оптимального маршрута.

2. Расширение задачи и метод динамического программирования

Задача (2) содержит ограничение (в виде условий предшествования) на маршрут "в целом", чем затрудняется непосредственное применение аппарата на основе динамического программирования (ДП). В связи с этим подобно тому, как сделано в работе [9, ч. 2], мы сначала осуществляем преобразование системы ограничений, подменяя допустимость (маршрутов) по предшествованию допустимостью по вычеркиванию (заданий из списка). Новые ограничения сводятся к условиям на переход от выполнения одного задания к выполнению другого. Используя данные преобразования, наряду с ОЗМ (2) рассматриваем частичные задачи. Речь идет о случае посещения "городов" из множеств $K \in \mathfrak{N}$ при условии, что начальный пункт есть $s \in \overline{0, N}$ (разумеется, вариант $s = 0$ и $K = \overline{1, N}$ здесь также допускается). Для формирования упомянутых частичных задач мы, следуя работе [9], заменяем, как уже отмечалось, допустимость по предшествованию допустимостью "по вычеркиванию", используя при этом оператор $\mathbf{I}$ [9, (2.2.27), (2.2.28)], действующий в $\mathfrak{N}$.

В связи с построением расширения ОЗМ введем при $K \in \mathfrak{N}$ в рассмотрение множество $(\text{bi})[K]$ всех биекций "отрезка" $\overline{1, |K|}$ на K (итак, элементы $(\text{bi})[K]$ суть взаимно однозначные отображения $\overline{1, |K|}$ на K и только они), а также множество $(\mathbf{I} - \text{bi})[K]$ всех биекций $\alpha \in (\text{bi})[K]$ со свойством $\alpha(k) \in \mathbf{I}(\{\alpha(l): l \in \overline{k, |K|}\}) \forall k \in \overline{1, |K|}$. Биекции из множества $(\mathbf{I} - \text{bi})[K]$ будем называть частичными маршрутами, допустимыми по вычеркиванию. Напомним, что [9, ч. 2] $(\mathbf{I} - \text{bi})[K] \neq \emptyset \forall K \in \mathfrak{N}$. Кроме того, $\mathbb{A} = (\mathbf{I} - \text{bi})[\overline{1, N}]$ [9, (2.2.32), теорема 2.2.1]; легко видеть, что $\mathbb{A} = \{\alpha \in \mathbb{P} | \alpha(k) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(l): l \in \overline{1, k-1}\}) \forall k \in \overline{1, N}\}$. Условимся о соглашении: под расширением ОЗМ понимаем определенную ниже систему частичных задач. Если $s \in \overline{0, N}$, $K \in \mathfrak{N}$ и $|K| \geq 2$, то рассматриваем задачу, которой сопоставляем экстремум (значение)

$$v(s, K) = \min_{\alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[K]} [\mathbf{c}(s, \alpha(1), K) + \sum_{t=1}^{|K|-1} \mathbf{c}(\alpha(t), \alpha(t+1), \{\alpha(j): j \in \overline{t+1, |K|}\}) + \mathbf{f}(\alpha(|K|))]. \quad (3)$$

Если же (при $s \in \overline{0, N}$ и $K \in \mathfrak{N}$) $|K| = 1$, то определяем $v(s, K) \triangleq \mathbf{c}(s, r, \{r\}) + \mathbf{f}(r)$, где $r \in \overline{1, N}$ есть такой единственный индекс, для которого $K = \{r\}$. В этом случае мы рассматриваем $v(s, K)$ как значе-

ние простейшей задачи о переходе из "города" с номером s в "город" с номером r .

Замечание 1. В ситуации $K = \{r\}$, где $r \in \overline{1, N}$, имеем (в силу вышеупомянутого условия), что $\mathbf{I}(K) = \mathbf{I}(\{r\}) = \{r\} = K$ (см. [9, предложение 2.2.1]). Тогда $(\mathbf{I} - \text{bi})[K] = (\text{bi})[K] = \{a_r\}$, где $a_r: \{1\} \rightarrow K$ однозначно определяется правилом $a_r(1) \triangleq r$. Данное свойство позволяет толковать $v(s, K) = v(s, \{r\})$ как экстремум в оптимизационной задаче с единственным допустимым элементом a_r .

Полагаем, наконец, что $v(s, \emptyset) \triangleq \mathbf{f}(s) \forall s \in \overline{0, N}$. Определяя $\mathbf{N} \triangleq \mathfrak{N} \cup \{\emptyset\}$, мы получаем функцию Беллмана $v: \overline{0, N} \times \mathbf{N} \rightarrow [0, \infty]$, определенную вышеупомянутыми условиями. Из результатов [8] вытекает следующее

Предложение 1. Если $s \in \overline{0, N}$ и $K \in \mathfrak{N}$, то справедливо равенство

$$v(s, K) = \min_{j \in \mathbf{I}(K)} [\mathbf{c}(s, j, K) + v(j, K \setminus \{j\})].$$

Напомним, что при $\alpha \in \mathbb{A}$ реализуется включение $\alpha \in (\mathbf{I} - \text{bi})[\overline{1, N}]$, а тогда согласно (1) $\mathfrak{C}_\alpha$ есть критерий задачи (3) в условиях $s = 0, K = \overline{1, N}$. Поэтому $v(0, \overline{1, N}) = V$. Итак, формирование маршрутов $\alpha \in \mathbb{A}$ сводится к организации процедуры: сначала выбирается $\alpha(1) \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$, после чего вычеркивается; далее выбирается $\alpha(2) \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\alpha(1)\})$ и снова вычеркивается и так далее. Конкретный выбор $\alpha(1), \dots, \alpha(N-1)$ можно подчинить соображениям, связанным с оптимизацией в классе маршрутов, допустимых по вычеркиванию, а стало быть, и по предшествованию. Теперь уже вполне очевидным является

Следствие 1. Справедливо равенство $V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} [\mathbf{c}(0, j, \overline{1, N}) + v(j, \overline{1, N} \setminus \{j\})]$.

3. Слои функции Беллмана

Предложение 1 в сочетании с ранее упомянутым крайним условием, формулируемым в терминах $\mathbf{f}$, определяет принципиальную возможность построения "всей" функции Беллмана v , но практически это возможно лишь для задачи очень малой размерности. Можно, однако, ограничиться построением лишь некоторой "части" массива значений упомянутой функции. Для реализации данного подхода в дальнейшем используем конструкцию [9, § 4.9], важную роль в которой играют существенные (по предшествованию) списки заданий: $\mathbf{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K} (\text{pr}_1(z) \in K \Rightarrow (\text{pr}_2(z) \in K))\}$ есть множество всех существенных списков. Элементы $\mathbf{G}$ ранжируем по мощности, полагая $\mathbf{G}_s \triangleq \{K \in \mathbf{G} \mid s = |K|\} \forall s \in \overline{1, N}$. Ясно, что $\mathbf{G}_N = \{\overline{1, N}\}$ (одноэлементное семейство, содержащее $\overline{1, N}$); кроме того,

$$\mathbf{G}_{s-1} = \{K \setminus \{t\} : K \in \mathbf{G}_s, t \in \mathbf{I}(K)\} \forall s \in \overline{2, N}. \quad (4)$$

Тем самым реализуется рекуррентная процедура построения всех семейств $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_N$ (подробнее см. в работе [13]). В связи с (4) отметим очень простое представление $\mathbf{G}_1$, полагая $\mathbb{K}_1 \triangleq \{\text{pr}_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$ и $\mathbf{M} = \overline{1, N} \setminus \mathbb{K}_1$: $\mathbf{G}_1 = \{\{t\} : t \in \mathbf{M}\}$. С каждым семейством $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_N$ связываем соответствующий слой пространства позиций.

Полагаем, что $D_0 \triangleq \{(s, \emptyset) : s \in \mathbf{M}\}$, что согласуется с работой [9, с. 174]. Кроме того, $D_N \triangleq \{(0, \overline{1, N})\}$ (одноэлементное множество, содержащее УП $(0, \overline{1, N})$). Для построения промежуточных слоев $D_1, \dots, D_{N-1}$ напомним следующую конструкцию [9, §4.9]: если $s \in \overline{1, N-1}$, то $\mathfrak{J}_s(K) \triangleq \{i \in \overline{1, N} \setminus K \mid i \cup K \in \mathbf{G}_{s+1}\} \forall K \in \mathbf{G}_s$;

$$D_s \triangleq \bigcup_{K \in \mathbf{G}_s} \{(j, K) : j \in \mathfrak{J}_s(K)\}.$$

Таким образом, определены все слои $D_0, D_1, \dots, D_N$ пространства позиций. При этом [9, предложение 4.9.3] упомянутые слои являются непустыми множествами: $D_s \neq \emptyset \forall s \in \overline{0, N}$. Напомним важное свойство [9, предложение 4.9.4]

$$(l, K \setminus \{l\}) \in D_{s-1} \forall s \in \overline{1, N} \forall (i, K) \in D_s \forall l \in \mathbf{I}(K). \quad (5)$$

В этих терминах определяем слои самой функции Беллмана: если $s \in \overline{0, N}$, то $v_s: D_s \rightarrow [0, \infty]$ определяется правилом

$$v_s(i, K) \triangleq v(i, K) \forall (i, K) \in D_s. \quad (6)$$

С учетом (5) и (6) мы получаем, что при всяком выборе $s \in \overline{1, N}$ и $(i, K) \in D_s$ определено значение $v_{s-1}(l, K \setminus \{l\}) \in [0, \infty]$, где $l \in \mathbf{I}(K)$. Поэтому определена наименьшая из величин $\mathbf{c}(i, l, K) + v_{s-1}(l, K \setminus \{l\})$, $l \in \mathbf{I}(K)$.

Предложение 2. Если $s \in \overline{1, N}$ и $(i, K) \in D_s$, то

$$v_s(i, K) = \min_{l \in \mathbf{I}(K)} [\mathbf{c}(i, l, K) + v_{s-1}(l, K \setminus \{l\})].$$

Доказательство извлекается из работы [12, (3.13), (3.15)]. При этом

$$v_0(t, \emptyset) = \mathbf{f}(t) \forall t \in \mathbf{M}. \quad (7)$$

Далее, согласно предложению 2 при $m \in \overline{0, N-1}$ преобразование $v_m \rightarrow v_{m+1}$ определяется условиями: если $(i, K) \in D_{m+1}$, то

$$v_{m+1}(i, K) = \min_{l \in \mathbf{I}(K)} [\mathbf{c}(i, l, K) + v_m(l, K \setminus \{l\})]. \quad (8)$$

После исполнения N шагов типа (8) будет, в частности, определено значение $v_N(0, \overline{1, N}) \in [0, \infty]$ (см. представление D_N), для которого согласно (6)

$$v_N(0, \overline{1, N}) = v(0, \overline{1, N}) = V. \quad (9)$$

Таким образом, определена рекуррентная процедура $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_N$, где v_N определяет экстремум V основной задачи (см. (9)).

4. Построение оптимального маршрута

Рассмотрим процедуру построения оптимального маршрута, используя только что построенные слои функции Беллмана (см. формулы (8), (9)). Значения этой функции для позиций, не принадлежащих слоям, использоваться не будут и известными не предполагаются. Заметим прежде всего, что согласно (8), (9)

$$V = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} [\mathbf{c}(0, k, \overline{1, N}) + v_{N-1}(k, \overline{1, N} \setminus \{k\})]. \quad (10)$$

С учетом (10) построение начинаем с индекса, доставляющего минимум в правой части (10): выбираем индекс $\mathbb{1}_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ таким, что справедливо равенство

$$V = \mathbf{c}(0, \mathbb{1}_1, \overline{1, N}) + v_{N-1}(\mathbb{1}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1\}). \quad (11)$$

Осуществляем перемещение $0 \rightarrow \mathbb{1}_1$. С учетом (5) получаем свойство $(\mathbb{1}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1\}) \in D_{N-1}$. В этом случае определено значение $v_{N-1}(\mathbb{1}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1\}) \in [0, \infty[$ (см. (6)), для которого

$$v_{N-1}(\mathbb{1}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1\}) = \min_{k \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1\})} [\mathbf{c}(\mathbb{1}_1, k, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1\}) + v_{N-2}(k, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1, k\})]. \quad (12)$$

С учетом (12) выбираем очередной индекс $\mathbb{1}_2 \in \mathbf{I}(\overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1\})$ так, чтобы при этом

$$v_{N-1}(\mathbb{1}_1, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1\}) = \mathbf{c}(\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1\}) + v_{N-2}(\mathbb{1}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2\}). \quad (13)$$

С учетом (13) осуществляем перемещение $\mathbb{1}_1 \rightarrow \mathbb{1}_2$. Получили начальный "отрезок" $(\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2)$ маршрута. При этом $(\mathbb{1}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2\}) \in D_{N-2}$ и (см. (6)) определено значение $v_{N-2}(\mathbb{1}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2\}) \in [0, \infty[$. Из (11) и (13) получаем, что

$$V = \mathbf{c}(0, \mathbb{1}_1, \overline{1, N}) + \mathbf{c}(\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1\}) + v_{N-2}(\mathbb{1}_2, \overline{1, N} \setminus \{\mathbb{1}_1, \mathbb{1}_2\}). \quad (14)$$

В формуле (14) первые два слагаемых отвечают текущим затратам, а последнее — перспективным затратам. Процедуру последовательного выбора индексов следует продолжать вплоть до исчерпывания множества $\overline{1, N}$. В результате будет построен (допустимый) маршрут $\eta = (\mathbb{1}_j)_{j \in \overline{1, N}} \in \mathbb{A}$ со свойством $\mathcal{E}_\eta = V$, являющийся оптимальным решением ОЗМ; $\eta(1) = \mathbb{1}_1$, $\eta(2) = \mathbb{1}_2$, ..., $\eta(N) = \mathbb{1}_N$.

5. Схема независимых вычислений

В настоящем разделе конкретизируются положения [13, 14] для рассматриваемого "точечного" варианта маршрутной задачи. Для этого сначала

отметим простые следствия построений раздела 3. Так, в частности, из формулы (4) вытекает, что

$$\mathbf{G}_{N-1} = \{\overline{1, N} \setminus \{j\} : j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})\}. \quad (15)$$

В соответствии с (15) мы можем занумеровать множества семейства $\mathbf{G}_{N-1}$, нумеруя $\mathbf{I}(\overline{1, N})$ (множество $\mathbf{I}(\overline{1, N})$ непусто и конечно; $|\mathbf{I}(\overline{1, N})| \leq N$). Будем полагать в дальнейшем, что упомянутые множества распределяются между вычислителями; каждому вычислителю соответствует, таким образом, индекс из $\mathbf{I}(\overline{1, N})$.

Имеем $\mathfrak{J}_{N-1}(K) = \{i \in \overline{1, N} \setminus K \mid \{i\} \cup K = \overline{1, N}\} \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}$. Определены множества $\mathfrak{J}_{N-1}(\overline{1, N} \setminus \{j\})$, $j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$. Из [13, предложение 5] вытекает, что

$$\mathfrak{J}_{N-1}(\overline{1, N} \setminus \{j\}) = \{j\} \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1, N}). \quad (16)$$

С учетом (15), (16) множество D_{N-1} принимает следующий вид

$$\begin{aligned} D_{N-1} &= \bigcup_{K \in \mathbf{G}_{N-1}} \{(s, K) : s \in \mathfrak{J}_{N-1}(K)\} = \\ &= \bigcup_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \{(s, \overline{1, N} \setminus \{j\}) : s \in \mathfrak{J}_{N-1}(\overline{1, N} \setminus \{j\})\} = \\ &= \bigcup_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \{(s, \overline{1, N} \setminus \{j\}) : s \in \{j\}\} = \\ &= \bigcup_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \{(j, \overline{1, N} \setminus \{j\})\} = \{(j, \overline{1, N} \setminus \{j\}) : j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})\}; \end{aligned} \quad (17)$$

в силу (17) можно рассматривать позиции $(j, \overline{1, N} \setminus \{j\})$ $j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ как стартовые в схеме построения слоев функции Беллмана в режиме независимых вычислений: каждый вычислитель получит свою стартовую позицию. В связи с этим напомним, что согласно (9) и следствию 1

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} [\mathbf{c}(0, j, \overline{1, N}) + v_{N-1}(j, \overline{1, N} \setminus \{j\})]. \quad (18)$$

Для вычисления V надо, следовательно, определить все значения $v_{N-1}(j, \overline{1, N} \setminus \{j\})$, $j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$.

В дальнейшем полагаем, что $3 \leq N$. Следуя работам [13, 14], введем в рассмотрение траектории в пространстве списков: если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, то через $\mathbf{T}[K]$ обозначаем множество всех кортежей $(K_i)_{i \in \overline{0, N-2}} : \overline{0, N-2} \rightarrow \mathbf{G}$, для каждого из которых

$$\begin{aligned} (K_0 = K) \& (\forall j \in \overline{1, N-2} \exists s \in \\ & \in \mathbf{I}(K_{j-1}) : K_j = K_{j-1} \setminus \{s\}). \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда, в частности, определены (см. (15)) множества $\mathbf{T}[\overline{1, N} \setminus \{j\}]$, $j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$, каждое из которых состоит из траекторий (19).

При этом [13, предложение 6] $K_j \in \mathbf{G}_{N-(j+1)}$ для $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $(K_i)_{i \in \overline{0, N-2}} \in \mathbf{T}[K]$ и $j \in \overline{0, N-2}$. Кроме того, из [13, предложение 7] $\mathbf{T}[K] \neq \emptyset \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}$. С пучками траекторий $\mathbf{T}[K]$, $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, связываются области достижимости (ОД) [13, (50)]: если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $t \in \overline{0, N-2}$, то ОД в момент t есть

$\tilde{T}[K; t] \triangleq \{K_i: (K_i)_i \in \overline{0, N-2} \in T[K]\}$. Легко видеть, что (см. [13, (51)]) $(\tilde{T}[K; 0] = \{K\}) \& (\tilde{T}[K; N-2] \subset \mathbf{G}_1)$ при всяком выборе $K \in \mathbf{G}_{N-1}$. Из [13, предложение 12] вытекает, что справедлива система равенств

$$\mathbf{G}_{N-(t+1)} = \bigcup_{K \in \mathbf{G}_{N-1}} \tilde{T}[K; t] \quad \forall t \in \overline{0, N-2}. \quad (20)$$

С учетом [13, предложение 14] получаем, что

$$\tilde{T}[K; t] \in \mathcal{P}'(\mathbf{G}_{N-(t+1)}) \quad \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}, \quad \forall t \in \overline{0, N-2}. \quad (21)$$

В частности, получаем из (21), что

$$\tilde{T}[K; N-2] \in \mathcal{P}'(\mathbf{G}_1) \quad \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}. \quad (22)$$

Напомним теперь следующее положение [13, предложение 16]:

$$\begin{aligned} \tilde{T}[K; t+1] &= \{M \setminus \{j\}: M \in \tilde{T}[K, t], j \in \mathbf{I}(M)\} \\ &\quad \forall K \in \mathbf{G}_{N-1} \quad \forall t \in \overline{0, N-3}. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом (см. (23)), мы располагаем рекуррентной процедурой построения ОД для каждого фиксированного списка $K \in \mathbf{G}_{N-1}$:

$$(\tilde{T}[K; 0] = \{K\}) \rightarrow \tilde{T}[K; 1] \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{T}[K; N-2].$$

6. Поток значений функции Беллмана

Конструкцию настоящего раздела рассматриваем как естественную конкретизацию положений [13, раздел 6] (см. также [14]). В связи с построением слоев $D_1, \dots, D_{N-1}$ уместно ввести клетки пространства позиций: полагаем, что

$$\mathbb{D}_s[H] \triangleq \{(j, H): j \in \mathcal{J}_s(H)\} \quad \forall s \in \overline{1, N-1} \quad \forall H \in \mathbf{G}_s. \quad (24)$$

Легко видеть [13, (92)], что множества-клетки (24) непусты; кроме того, $\mathbb{D}_s[H] \subset D_s \quad \forall s \in \overline{1, N-1} \quad \forall H \in \mathbf{G}_s$.

В связи с (24) отметим, что при $t \in \overline{0, N-2}$

$$N - (t+1) \in \overline{1, N-1}, \quad (25)$$

а потому определено семейство $\mathbf{G}_{N-(t+1)}$; при этом для $H \in \mathbf{G}_{N-(t+1)}$ определена (см. (24), (25)) клетка $\mathbb{D}_{N-(t+1)}[H]$. В этом построении согласно (20) можно полагать, что $H \in \tilde{T}[K; t]$ при некотором $K \in \mathbf{G}_{N-1}$. Таким образом [13, (93)],

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_{N-(t+1)}[H] &\in \mathcal{P}'(D_{N-(t+1)}) \quad \forall K \in \mathbf{G}_{N-1} \\ &\quad \forall t \in \overline{0, N-2} \quad \forall H \in \tilde{T}[K; t]. \end{aligned} \quad (26)$$

С учетом (23) и (26) определяются следующие множества-объединения

$$\begin{aligned} \bigcup_{H \in \tilde{T}[K; t]} \mathbb{D}_{N-(t+1)}[H] &\in \mathcal{P}'(D_{N-(t+1)}) \\ &\quad \forall K \in \mathbf{G}_{N-1} \quad \forall t \in \overline{0, N-2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Из выражения (27) вытекает "терминальное" включение для $t = N-2$: $\bigcup_{H \in \tilde{T}[K; N-2]} \mathbb{D}_1[H] \in \mathcal{P}'(D_1)$.

Если же $s \in \overline{1, N-1}$, то подобно (25) имеем свойство $t_s \triangleq N - (s+1) \in \overline{0, N-2}$, а потому согласно (21) определена ОД $\tilde{T}[K; N - (s+1)] = \tilde{T}[K; t_s] \in \mathcal{P}'(\mathbf{G}_s)$, где $K \in \mathbf{G}_{N-1}$; в этом случае можно использовать формулу (27), получая при этом:

$$\bigcup_{H \in \tilde{T}[K; N-(s+1)]} \mathbb{D}_s[H] = \bigcup_{H \in \tilde{T}[K; t_s]} \mathbb{D}_{N-(t_s+1)} \in \mathcal{P}'(D_s).$$

Таким образом, корректно определяются множества

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_s[K] &\triangleq \bigcup_{H \in \tilde{T}[K; N-(s+1)]} \mathbb{D}_s[H] \in \mathcal{P}'(D_s) \\ &\quad \forall s \in \overline{1, N-1} \quad \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

В частности, из (22) и (28) получаем, что при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$

$$\begin{aligned} \tilde{T}[K; N-2] &\in \mathcal{P}'(\mathbf{G}_1): \mathcal{D}_1[K] = \\ &= \bigcup_{H \in \tilde{T}[K; N-2]} \mathbb{D}_1[H] \in \mathcal{P}'(D_1). \end{aligned} \quad (29)$$

Из работы [13, предложение 15] вытекает, что $(h, \mathbb{K} \setminus \{h\}) \in \mathcal{D}_s[K] \quad \forall K \in \mathbf{G}_{N-1} \quad \forall s \in \overline{1, N-2} \quad \forall (i, \mathbb{K}) \in \mathcal{D}_{s+1}[K] \quad \forall h \in \mathbf{I}(\mathbb{K})$. Новые слои $\mathcal{D}_1[K], \dots, \mathcal{D}_{N-1}[K]$ образуют при выборе каждого списка $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ поток пространства позиций. Совокупность таких потоков определяет прежние слои $D_1, \dots, D_{N-1}$. Действительно, согласно работе [13, предложение 17] $\forall s \in \overline{1, N-1}$

$$D_s = \bigcup_{K \in \mathbf{G}_{N-1}} \mathcal{D}_s[K] = \bigcup_{j \in \mathbf{I}(\overline{1, N})} \mathcal{D}_s[\overline{1, N} \setminus \{j\}]. \quad (30)$$

С множествами (28) связываем потоки значений функции Беллмана, "привязанные" каждый к своему индексу из $\mathbf{I}(\overline{1, N})$. При $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ $\mathcal{W}_s[K] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_s[K]]$ определяется условиями (см. (8), (28))

$$\mathcal{W}_s[K](i, P) \triangleq v_s(i, P) \quad \forall (i, P) \in \mathcal{D}_s[K]; \quad (31)$$

с учетом (6) и (31) получаем, что $\mathcal{W}_s[K] = (v(i, P))_{(i, P) \in \mathcal{D}_s[K]}$, т. е. $\mathcal{W}_s[K](i, P) = v(i, P)$ при $(i, P) \in \mathcal{D}_s[K]$. В частности, $\mathcal{W}_1[K] = (v(i, P))_{(i, P) \in \mathcal{D}_1[K]} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_1[K]]$ при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$; для $(\mathbb{J}, Q) \in \mathcal{D}_1[K]$ справедливо также равенство

$$\mathcal{W}_1[K](\mathbb{J}, Q) = v_1(\mathbb{J}, Q). \quad (32)$$

Напомним, что $v_1 \in \mathcal{R}_+[D_1]$, и согласно предложению 2 и свойствам (5), (7) для $(j, T) \in D_1$ имеет место $T = \{t\}$, где $t \in \overline{1, N} \setminus \mathbb{K}_1$, что означает (см. замечание 1) $\mathbf{I}(T) = \mathbf{I}(\{t\}) = \{t\} = T$, а тогда при $l \in \mathbf{I}(T)$

имеем равенство $l = t$. Поэтому (см. (6)) $(l, T \setminus \{l\}) = (t, \emptyset) \in D_0$, где $t \in \mathbf{M}$, это доставляет (см. (7)) равенство $v_0(l, T \setminus \{l\}) = \mathbf{f}(t)$. Возвращаясь к $(j, T) \in D_1$, получаем из предложения 2, что

$$v_1(j, T) = \min_{l \in T} [\mathbf{c}(j, l, T) + \mathbf{f}(t)] = \mathbf{c}(j, t, \{t\}) + \mathbf{f}(t), \quad (33)$$

где $t \in \overline{1, N} \setminus \mathbb{K}_1$ таково, что $T = \{t\}$ (такой индекс t обязательно найдется). Это свойство (см. (33)) следует учесть в равенстве (32): если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $(j, Q) \in \mathcal{D}_1[K]$, то с учетом выражения (29) имеем для некоторого $q \in \mathbf{M}$ равенство $Q = \{q\}$, а потому

$$\mathcal{W}_1[K](j, Q) = \mathbf{c}(j, q, \{q\}) + \mathbf{f}(q). \quad (34)$$

В связи с (34) отметим, что согласно (22) и определению $\mathbf{G}_1$ (см. раздел 3)

$$\forall K \in \mathbf{G}_{N-1} \forall H \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] \exists h \in \mathbf{M}: H = \{h\}. \quad (35)$$

Из (22) и (35) вытекает, в частности, что

$$\mathbf{M}_0[K] \triangleq \{h \in \mathbf{M} | \{h\} \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]\} \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}. \quad (36)$$

Из (35), (36) вытекает, что $\forall K \in \mathbf{G}_{N-1} \forall H \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] \exists h \in \mathbf{M}_0[K]: H = \{h\}$. Поскольку при $K \in \mathbf{G}_{N-1} \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$ — непустое множество, то $\mathbf{M}_0[K] \in \mathcal{P}(\mathbf{M})$.

Предложение 6.1. Если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, то справедливо равенство

$$\tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] = \{\{h\} : h \in \mathbf{M}_0[K]\}. \quad (37)$$

Доказательство. Обозначим через Ω семейство в правой части (37). Из (37) вытекает, что при $S \in \Omega$ реализуется при некотором $h \in \mathbf{M}_0[K]$ равенство $S = \{h\}$, и согласно (36) $\{h\} \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$ и потому $S \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$. Следовательно,

$$\Omega \subset \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]. \quad (38)$$

Пусть, напротив, $T \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$. Тогда $T = \{t_0\}$, где $t_0 \in \mathbf{M}_0[K]$; по определению $\Omega \ni \{t_0\} \in \Omega$ и, стало быть, $T \in \Omega$. Установлено вложение $\tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] \subset \Omega$. С учетом (38) получаем равенство $\tilde{\mathbb{T}}[K; N-2] = \Omega$. $\square$

С учетом предложения 6.1 модифицируем определение $\mathcal{D}_1[K]$, $K \in \mathbf{G}_{N-1}$.

Предложение 6.2. Если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, то

$$\mathcal{D}_1[K] = \bigcup_{h \in \mathbf{M}_0[K]} \mathbb{D}_1[\{h\}]. \quad (39)$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{D}$ семейство в правой части (39). Пусть $(i^*, K^*) \in \mathcal{D}_1[K]$. Тогда согласно (29) $(i^*, K^*) \in \mathbb{D}_1[H^*]$ для некоторого $H^* \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$. Тогда согласно (24) $H^* \in \mathbf{G}_1$ и, кроме того, для некоторого $j^* \in \mathfrak{J}_1(H^*)$ имеем равенство $(i^*, K^*) = (j^*, H^*)$. Это означает, что $K^* = H^*$ и, кроме того, $i^* \in \mathfrak{J}_1(K^*)$, где $K^* \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$. Согласно предложению 6.1 $K^* = \{h^*\}$ для некоторого $h^* \in \mathbf{M}_0[K]$. С учетом (24)

$$(i^*, K^*) \in \mathbb{D}_1[\{h^*\}], \quad (40)$$

поскольку $H^* = \{h^*\}$. При этом $\mathbb{D}_1[\{h^*\}] \subset \mathbf{D}$; в силу (40) $(i^*, K^*) \in \mathbf{D}$. Поскольку выбор (i^*, K^*) был произвольным, установлено, что $\mathcal{D}_1[K] \subset \mathbf{D}$. Покажем, что справедливо и противоположное вложение. Пусть

$$(i^*, K^*) \in \mathbf{D}. \quad (41)$$

Тогда согласно условию (41) для некоторого $h^* \in \mathbf{M}_0[K]$ справедливо, что

$$(i^*, K^*) \in \mathbb{D}_1[\{h^*\}]. \quad (42)$$

Согласно (36) получаем, что $h^* \in \mathbf{M}$ и $\{h^*\} \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]$. Из (29) следует, что $\mathbb{D}_1[\{h^*\}] \subset \mathcal{D}_1[K]$, а тогда согласно (42) $(i^*, K^*) \in \mathcal{D}_1[K]$. Итак (см. (41)), установлено, что $\mathbf{D} \subset \mathcal{D}_1[K]$. Получили равенство $\mathcal{D}_1[K] = \mathbf{D}$. $\square$

С учетом (24) $\mathbb{D}_1[H] = \{(j, H) : j \in \mathfrak{J}_1(H)\} \forall H \in \mathbf{G}_1$. Как следствие

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_1[H] &= \{(j, H) : j \in \mathfrak{J}_1(H)\} \\ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1} \forall H \in \tilde{\mathbb{T}}[K; N-2]. \end{aligned} \quad (43)$$

Согласно (36) и (29) при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $h \in \mathbf{M}_0[K]$ имеем $\{h\} \in \mathbf{G}$, а потому (см. раздел 3) определено $\mathfrak{J}_1(\{h\})$. С учетом предложения 6.1 и (43) получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_1[\{h\}] &= \{(j, \{h\}) : j \in \mathfrak{J}_1(\{h\})\} \\ \forall K \in \mathbf{G}_{N-1} \forall h \in \mathbf{M}_0[K]. \end{aligned} \quad (44)$$

Из (44) и предложения 6.2 вытекают равенства

$$\mathcal{D}_1[K] = \bigcup_{h \in \mathbf{M}_0[K]} \{(j, \{h\}) : j \in \mathfrak{J}_1(\{h\})\} \forall K \in \mathbf{G}_{N-1}. \quad (45)$$

Следовательно, при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $(j, Q) \in \mathcal{D}_1[K]$ непременно реализуется равенство $(j, Q) = (j, \{h\})$ для некоторых $h \in \mathbf{M}_0[K]$ и $j \in \mathfrak{J}_1(\{h\})$; иными словами, $Q = \{h\}$, где $h \in \mathbf{M}_0[K]$, а $j \in \mathfrak{J}_1(\{h\})$. При этом h определяется при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ по $(j, Q) \in \mathcal{D}_1[K]$ единственным образом. Согласно (36) и (29) при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $h \in \mathbf{M}_0[K]$ имеем $\{h\} \in \mathbf{G}_1$, а потому (см. раздел 3) определено $\mathfrak{J}_1(\{h\})$. Комбинируя (34) и (45), мы получаем при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $h \in \mathbf{M}_0[K]$ и $j \in \mathfrak{J}_1(\{h\})$, что

$$\mathcal{W}_1[K](j, \{h\}) = \mathbf{c}(j, h, \{h\}) + \mathbf{f}(h). \quad (46)$$

С учетом (45) получаем при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, что (46) определяет функцию $\mathcal{W}_1[K]$.

При $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $l \in \overline{1, N-2}$, $(i, P) \in \mathcal{D}_{l+1}[K]$ и $h \in \mathbf{I}(P)$ определено значение $\mathcal{W}_l[K](h, P \setminus \{h\}) = v_l(h, P \setminus \{h\}) \in [0, \infty[$. Как следствие, при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $l \in \overline{1, N-2}$ и $(i, P) \in \mathcal{D}_{l+1}[K]$

$$\begin{aligned} \min_{h \in \mathbf{I}(P)} [\mathbf{c}(i, h, P) + \mathcal{W}_l[K](h, P \setminus \{h\})] &= \\ = \min_{h \in \mathbf{I}(P)} [\mathbf{c}(i, h, P) + v_l(h, P \setminus \{h\})]. \end{aligned} \quad (47)$$

Предложение 6.3. Если $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, $l \in \overline{1, N-2}$, $(i, P) \in \mathcal{D}_{l+1}[K]$, то

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}_{l+1}[K](i, P) = \\ & = \min_{h \in \mathbf{I}(P)} [\mathbf{c}(i, h, P) + \mathcal{W}_l[K](h, P \setminus \{h\})]. \end{aligned} \quad (48)$$

Доказательство. Учтем, что $l+1 \in \overline{2, N-1}$ и $(h, P \setminus \{h\}) \in \mathcal{D}_l[K] \forall h \in \mathbf{I}(K)$. Вместе с тем $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ и $l+1 \in \overline{2, N-1}$, а потому в силу (31) $\mathcal{W}_{l+1}[K](i, P) = v_{l+1}(i, P)$. Отметим также, что согласно (30) $\mathcal{D}_l[K] \subset D_l$, $\mathcal{D}_{l+1}[K] \subset D_{l+1}$. Тогда $(h, P \setminus \{h\}) \in D_l \forall h \in \mathbf{I}(K)$. По выбору (i, P) имеем также, что $(i, P) \in D_{l+1}$. Тогда (см. [15], предложение 2) $v_{l+1}(i, P) = \min_{h \in \mathbf{I}(P)} [\mathbf{c}(i, h, P) + v_l(h, P \setminus \{h\})]$. С учетом (47) получаем требуемое равенство (48). $\square$

С учетом выражений (44) и (46) можно считать, что функции $\mathcal{W}_1[K]$, $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, известны. Поэтому при $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ предложение 6.3 определяет рекуррентную процедуру

$$\mathcal{W}_1[K] \rightarrow \mathcal{W}_2[K] \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{W}_{N-1}[K], \quad (49)$$

отвечающую работе одного вычислителя. С учетом (15) это означает, что при $j \in \overline{1, N}$ мы можем явным образом (см. (46)) определить $\mathcal{W}_1[\overline{1, N} \setminus \{j\}]$, после чего с учетом предложения 6.3 реализуем рекуррентную процедуру

$$\begin{aligned} & \mathcal{W}_1[\overline{1, N} \setminus \{j\}] \rightarrow \mathcal{W}_2[\overline{1, N} \setminus \{j\}] \rightarrow \dots \rightarrow \\ & \rightarrow \mathcal{W}_{N-1}[\overline{1, N} \setminus \{j\}]. \end{aligned} \quad (50)$$

Теперь, учитывая (31) и (49) (или (50)), мы определяем посредством склеивания все функции $v_1, \dots, v_{N-1}$: если $s \in \overline{1, N-1}$ и $(j, Q) \in D_s$, то, используя (30), выбираем $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ такое, что $(j, Q) \in \mathcal{D}_s[K]$, после чего полагаем, учитывая (31),

$$v_s(j, Q) = \mathcal{W}_s[K](j, Q). \quad (51)$$

Располагая, в частности, функцией v_{N-1} , по формуле (18) определяем V .

7. Алгоритм на функциональном уровне

В настоящем разделе обсуждается гипотетический вариант построения процедур (49), (50). Речь идет о совместной их реализации при введении определенной иерархии для вычислителей, каждый из которых обеспечивает построение соответствующей цепочки вида (49) или (50). Дело в том, что множества $\mathcal{D}_s[K_1]$ и $\mathcal{D}_s[K_2]$, где $s \in \overline{1, N-1}$, могут пересекаться при $K_1 \in \mathbf{G}_{N-1}$, $K_2 \in \mathbf{G}_{N-1}$, $K_1 \neq K_2$. Непосредственное использование процедур (49), (50) может приводить к многократному выполнению одних и тех же вычислений, что, в частности, порождает дефицит памяти, выделяемой вычислителям. Ниже предлагается поход к организации "совместных" вычислений. Учитывается, что се-

мейство $\mathbf{G}_{N-1}$ непусто и конечно (см. (15)). Полагаем, $\mathbf{n} \triangleq |\mathbf{G}_{N-1}| \in \mathbb{N}$, определяя мощность семейства $\mathbf{G}_{N-1}$. Введем биекцию

$$(L_j)_{j \in \overline{1, \mathbf{n}}} : \overline{1, \mathbf{n}} \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{G}_{N-1} \quad (52)$$

"отрезка" $\overline{1, \mathbf{n}}$ на $\mathbf{G}_{N-1}$. Пусть иерархия списков определяется биекцией (52): список L_1 объявляется "самым главным", список L_2 следует за L_1 , L_3 следует за L_2 и т. д. В последующих построениях предполагается, что $N > 6$ и $\mathbf{n} \geq 3$. Кроме того, полагаем, что $\mathbf{n} < N$. В соответствии с этим вычислитель Π_1 , ответственный за реализацию (49) при $K = L_1$, получает для работы множества $\mathcal{D}_s[L_1]$, $s \in \overline{1, N-1}$. Вычислитель Π_2 , ответственный за реализацию цепочки (49) при $K = L_2$, получает множества $\mathcal{D}_s[L_2] \setminus \mathcal{D}_s[L_1]$, $s \in \overline{1, N-1}$, и возможность обращения к Π_1 за недостающей информацией (в силу предложения 6.3 для непосредственного применения (49) при $K = L_2$ требуются позиции из $\mathcal{D}_s[L_1] \cap \mathcal{D}_s[L_2]$, которые мы уже "отдали" вычислителю Π_1). Вычислитель Π_3 , ответственный за реализацию (49) при $K = L_3$, получает множества $\mathcal{D}_s[L_3] \setminus (\mathcal{D}_s[L_1] \cup \mathcal{D}_s[L_2])$, $s \in \overline{1, N-1}$, и возможность обращаться к вычислителям Π_1 и Π_2 . Дальнейшее построение аналогично: вычислителю Π_m , где $m \in \overline{3, \mathbf{n}}$, выделяются множества

$$\mathcal{D}_s[L_m] \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} \mathcal{D}_s[L_j] \right), \quad s \in \overline{1, N-1},$$

и возможность обращаться к $\Pi_1, \dots, \Pi_{m-1}$ за недостающей информацией.

После этого вычислитель Π_1 самостоятельно реализует цепочку (49) при $K = L_1$. Вычислитель Π_2 реализует (49) при $K = L_2$, используя результаты счета от Π_1 . Дальнейшее распределение вычислений аналогично: вычислитель Π_m , где $m \in \overline{2, \mathbf{n}}$, реализует (49) при $K = L_m$, используя результаты счета от $\Pi_1, \dots, \Pi_{m-1}$. После реализации всех цепочек (49), отвечающих случаям $K = L_1, \dots, K = L_{\mathbf{n}}$, на основе (30), (31) и (51) осуществляется построение функций $v_1, \dots, v_{N-1}$.

Случай $\mathbf{n} = 3$, $N > 6$. Итак, пусть на этапе $I_1^{(1)}$ вычислитель Π_1 осуществляет построение функции $\mathcal{W}_1[L_1]: \mathcal{D}_1[L_1] \rightarrow [0, \infty[$, используя (46). После этапа $I_1^{(1)}$ вычислитель Π_1 располагает (дискретной) функцией $\mathcal{W}_1[L_1]$. На этапе $I_2^{(1)}$, непосредственно следующим за $I_1^{(1)}$, вычислитель Π_1 осуществляет построение функции

$$\mathcal{W}_2[L_1]: \mathcal{D}_2[L_1] \rightarrow [0, \infty[, \quad (53)$$

а вычислитель Π_2 осуществляет насчитывание значений $\mathcal{W}_1[L_2](j, K)$, $(j, K) \in \mathcal{D}_1[L_2] \setminus \mathcal{D}_1[L_1]$, используя (46). В результате будет сформирована функция

$$\mathcal{W}_1[L_2]: \mathcal{D}_1[L_2] \rightarrow [0, \infty]. \quad (54)$$

Построением функции (54) завершается этап $I_2^{(1)}$.

На следующем этапе $I_3^{(1)}$ вычислитель Π_1 реализует построение функции

$$\mathcal{W}_3[L_1]: \mathcal{D}_3[L_1] \rightarrow [0, \infty]. \quad (55)$$

На этом же этапе Π_2 насчитывает значения $\mathcal{W}_2[L_2](j, K)$, $(j, K) \in \mathcal{D}_2[L_2] \setminus \mathcal{D}_2[L_1]$. С учетом (53) вычислитель Π_2 располагает к концу этапа $I_3^{(1)}$ функцией

$$\mathcal{W}_2[L_2]: \mathcal{D}_2[L_2] \rightarrow [0, \infty]. \quad (56)$$

Действительно, на множестве $\mathcal{D}_2[L_1] \cap \mathcal{D}_2[L_2]$ значения функций $\mathcal{W}_2[L_1]$ и $\mathcal{W}_2[L_2]$ совпадают, поскольку согласно (51) для $(j, Q) \in \mathcal{D}_2[L_1] \cap \mathcal{D}_2[L_2]$

$$\mathcal{W}_2[L_1](j, Q) = v_2(j, Q) = \mathcal{W}_2[L_2](j, Q).$$

Далее, в начале этапа $I_3^{(1)}$ "включается" Π_3 , который насчитывает значения

$$\mathcal{W}_1[L_3](j, K), (j, K) \in \mathcal{D}_1[L_3] \setminus (\mathcal{D}_1[L_1] \cup \mathcal{D}_1[L_2]); \quad (57)$$

это достаточно для того, чтобы у Π_3 сформировалась функция

$$\mathcal{W}_1[L_3]: \mathcal{D}_1[L_3] \rightarrow [0, \infty]. \quad (58)$$

В самом деле, при $(j, Q) \in \mathcal{D}_1[L_1] \cap \mathcal{D}_1[L_3]$ согласно (51)

$$\mathcal{W}_1[L_1](j, Q) = v_1(j, Q) = \mathcal{W}_1[L_3](j, Q). \quad (59)$$

Кроме того, при $(j, Q) \in \mathcal{D}_1[L_2] \cap \mathcal{D}_1[L_3]$ имеем в силу (51), что

$$\mathcal{W}_1[L_2](j, Q) = \mathcal{W}_1[L_3](j, Q). \quad (60)$$

В силу (59) и (60) получаем, что на множестве $\mathcal{D}_1[L_3] \cap (\mathcal{D}_1[L_1] \cup \mathcal{D}_1[L_2])$ значения $\mathcal{W}_1[L_3](j, Q)$ уже насчитаны вычислителями Π_1 , Π_2 . Таким образом (см. (57), (59), (60)), все значения $\mathcal{W}_1[L_3](j, Q)$, $(j, Q) \in \mathcal{D}_1[L_3]$, определены, а это и означает завершение построения функции (58).

Теперь после трех этапов $I_1^{(1)}$, $I_2^{(1)}$, $I_3^{(1)}$ "коалиция" (Π_1 , Π_2 , Π_3) располагает функциями: 1) $\mathcal{W}_1[L_1]$, $\mathcal{W}_1[L_2]$, $\mathcal{W}_1[L_3]$; 2) $\mathcal{W}_2[L_1]$, $\mathcal{W}_2[L_2]$; 3) $\mathcal{W}_3[L_1]$.

Если $n = 3$, то после этапов $I_1^{(1)}$, $I_2^{(1)}$, и $I_3^{(1)}$ будет построена вся функция v_1 (см. (51) при $s = 1$). Дальнейшие построения при $n = 3$ подобны примеру, приводимому ниже. Если $n > 3$, то наше построение, приводящее к v_1 , следует продолжать. При этом будут конструироваться также фрагменты $v_2, \dots, v_{N-1}$.

Итак, пусть $k \in \overline{3, n-1}$, и реализованы этапы $I_1^{(1)}, \dots, I_k^{(1)}$, после которых построены функции

- (1) $\mathcal{W}_1[L_1], \dots, \mathcal{W}_1[L_k]$,
- (2) $\mathcal{W}_2[L_1], \dots, \mathcal{W}_2[L_{k-1}]; \dots; (k) \mathcal{W}_k[L_1]$.

Приступаем к реализации этапа $I_{k+1}^{(1)}$. Вычислитель Π_1 независимо от остальных насчитывает значения функции $\mathcal{W}_{k+1}[L_1]: \mathcal{D}_{k+1}[L_1] \rightarrow [0, \infty]$. Вычислитель Π_2 достраивает с возможным учетом данных вычислителя Π_1 функцию

$$\mathcal{W}_k[L_2]: \mathcal{D}_k[L_2] \rightarrow [0, \infty]. \quad (61)$$

Для этого Π_2 насчитывает значения $\mathcal{W}_k[L_2](j, Q)$, $(j, Q) \in \mathcal{D}_k[L_2] \setminus \mathcal{D}_k[L_1]$. Кроме того, он получает от вычислителя Π_1 значения

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_k[L_2](j, Q) &= \\ &= \mathcal{W}_k[L_1](j, Q), (j, Q) \in \mathcal{D}_k[L_1] \cap \mathcal{D}_k[L_2], \end{aligned}$$

которые насчитаны Π_1 на этапе $I_k^{(1)}$. В результате определена вся функция (61).

Пусть теперь $m \in \overline{2, k}$ и рассматривается работа вычислителя Π_m на этапе $I_{k+1}^{(1)}$. В процессе этой работы он реализует насчитывание значений

$$\mathcal{W}_{k-(m-2)}[L_m]: \mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_m] \rightarrow [0, \infty]. \quad (62)$$

Для этого построения он независимо насчитывает значения

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{k-(m-2)}[L_m](j, Q), \\ (j, Q) \in \mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_m] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_i] \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Кроме того, Π_m обращается к $\Pi_1, \dots, \Pi_{m-1}$ за получением числовых значений

$$\begin{aligned} (\mathcal{W}_{k-(m-2)}[L_m](j, Q) &= \mathcal{W}_{k-(m-2)}[L_1](j, Q), \\ (j, Q) &\in \mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_m] \cap \mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_1], \dots, \\ (\mathcal{W}_{k-(m-2)}[L_m](j, Q) &= \mathcal{W}_{k-(m-2)}[L_{m-1}](j, Q), \\ (j, Q) &\in \mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_m] \cap \mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_{m-1}]. \end{aligned}$$

Массивы значений (63), (64) определяют функцию (62), поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_m] &= \left(\mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_m] \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} \mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_i] \right) \right) \cup \\ &\cup \left(\bigcup_{i=1}^{m-1} (\mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_m] \cap \mathcal{D}_{k-(m-2)}[L_i]) \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Процедуру построения функций, подобных (62) и реализуемых на основе (63), (64), следует продолжать (учитывая (65)) вплоть до $m = k$. Завершающий фрагмент построения, отвечающий переходу $k \rightarrow k+1$, осуществляется следующим образом: вычислитель Π_{k+1} реализует построение функции $\mathcal{W}_1[L_{k+1}]: \mathcal{D}_1[L_{k+1}] \rightarrow [0, \infty]$ (учитывая, что $k - (m-2) = 1$ при $m = k+1$).

Таким образом, действуя подобно (1)–(к), вычислители после этапа $I_{k+1}^{(1)}$ завершают построение функций

$$(1') \mathcal{W}_1[L_1], \dots, \mathcal{W}_1[L_{k+1}]; \\ (2') \mathcal{W}_2[L_1], \dots, \mathcal{W}_2[L_k]; \dots; ((k+1)') \mathcal{W}_{k+1}[L_1].$$

Продолжая данное построение, мы получим, в частности, ситуацию, когда можно полагать $k = n - 1$ (напомним, что $n < N$), а тогда после очередного этапа $I_n^{(1)}$ мы будем располагать следующими функциями

$$(1'') \mathcal{W}_1[L_1], \dots, \mathcal{W}_1[L_n]; \\ (2'') \mathcal{W}_2[L_1], \dots, \mathcal{W}_2[L_{n-1}]; \dots; (n'') \mathcal{W}_n[L_1]. \quad (66)$$

Набор (66) является результатом вычислений на этапах $I_1^{(1)}, \dots, I_n^{(1)}$. Располагая функциями (66), мы с учетом (30), (31) и (51) осуществляем (посредством склеивания) построение функции v_1 ; при этом используется (1'') в (66).

Теперь "строку" (2'') мы достраиваем на этапе $I_{n+1}^{(1)}$ до массива значений функции v_2 . Для этого на этапе $I_{n+1}^{(1)}$ вычислитель Π_1 независимо от остальных насчитывает значения функции $\mathcal{W}_{n+1}[L_1]$: $\mathfrak{D}_{n+1}[L_1] \rightarrow [0, \infty[$; для этого определяется массив значений $\mathcal{W}_{n+1}[L_1](j, Q)$, $(j, Q) \in \mathfrak{D}_{n+1}[L_1]$. Далее, вычислитель Π_2 на этапе $I_{n+1}^{(1)}$ самостоятельно насчитывает значения $\mathcal{W}_n[L_2](j, Q)$, $(j, Q) \in \mathfrak{D}_n[L_2] \setminus \mathfrak{D}_n[L_1]$. Кроме того, он использует значения $\mathcal{W}_n[L_1](j, Q) = \mathcal{W}_n[L_2](j, Q)$, $(j, Q) \in \mathfrak{D}_n[L_1] \cap \mathfrak{D}_n[L_2]$.

Таким образом, получается вся функция $\mathcal{W}_n[L_2]: \mathfrak{D}_n[L_2] \rightarrow [0, \infty[$, которая "завершает" строку (2'') и позволяет с учетом (30), (31) и (51) построить v_2 .

Далее на этапе $I_{n+2}^{(1)}$ по аналогичной схеме будет построена функция v_3 . Здесь, конечно, мы должны предполагать, что $3 \leq N - 1$, т. е. $4 \leq N$, что, собственно говоря, и представляет практический интерес. Более того, с практической точки зрения естественно полагать, что $n \leq N - 1$ (имеется в виду тот факт, что решается задача достаточно большой размерности в смысле N).

При повторении в основных чертах вышеупомянутой процедуры (связанной с построением v_2) после этапа $I_{2n-1}^{(1)}$ будут построены все функции $v_1, \dots, v_n$. Кроме того, лидер — вычислитель Π_1 — может (при $n < N$) уйти вперед: при $2n \leq N - 1$ этот вычислитель построит новые функции $\mathcal{W}_{n+1}[L_1], \dots, \mathcal{W}_{2n-1}[L_1]$. В противном случае, т. е. при $N < 2n$, вычислитель Π_1 должен остановить вычисления по достижении массива значений функции $\mathcal{W}_{N-1}[L_1]$. Аналогичным образом вычислитель Π_2 при $2n \leq N$ после серии построений упомянутого (в связи с построением v_2) типа определит новые функции $\mathcal{W}_{n+1}[L_2]$,

$\dots, \mathcal{W}_{2n-2}[L_2]$. Если же, напротив, $N < 2n$, то вычислитель Π_2 прекращает вычисления по достижении массива значений функции $\mathcal{W}_{N-1}[L_2]$. Аналогичные построения осуществляют вычислители $\Pi_3, \dots, \Pi_n$ при условии, что завершающим этапом является $I_{2n-1}^{(1)}$. При этом вычислитель Π_n после этого этапа должен иметь функцию $\mathcal{W}_n[L_n]$ (с учетом этого и оказывается возможным построение всей функции v_n).

Дальнейшее построение функций $v_{n+1}, \dots, v_{N-1}$ требует осуществления новых циклов, подобных $(I_1^{(1)}, \dots, I_{2n-1}^{(1)})$. Число и состав этих циклов зависят от конкретных соотношений n и N . Один из новых циклов будет "неполным" и, по сути, завершающим в том смысле, что вычислители $\Pi_1, \dots, \Pi_l$, где $l < n$, закончат свою работу, а вычислители $\Pi_{l+1}, \dots, \Pi_n$ будут продолжать свои вычисления. Между первым и последним (неполным) циклами при больших значениях $(N-1)/n$ возникают промежуточные "полные" циклы, когда работают все вычислители. При этом последовательно строятся функции $v_{n+1}, \dots, v_p$, где $p < N - 1$, после чего в пределах вышеупомянутого "неполного" цикла вычислители $\Pi_{l+1}, \dots, \Pi_n$ достраивают функции $v_{p+1}, \dots, v_{N-1}$.

По соображениям объема ограничиваемся упомянутыми соображениями и приведем конкретизацию для модельного примера при $n = 3$.

8. Модельный пример

Рассматриваем схему независимых вычислений слоев функции Беллмана на примере при числе заданий $N = 5$ и используем для вычисления три вычислителя: $n = 3$. На выполнение заданий накладываются условия предшествования посредством множества $\mathbf{K} = \{(1, 3); (2, 4)\}$.

Для реализации экономичного варианта метода динамического программирования (см. раздел 3) построим существенные списки заданий. Для этого, применяя оператор $\mathbf{I}$ [9, (2.2.27), (2.2.28)] к множеству $\overline{1, 5}$, получаем $\mathbf{I}(\overline{1, 5}) = \overline{1, 5} \setminus \{\text{pr}_2(z): z \in \Sigma[\overline{1, 5}]\}$, где $\Sigma[\overline{1, 5}] = \{z \in \overline{1, 5} | (\text{pr}_1(z) \in \overline{1, 5}) \& (\text{pr}_2(z) \in \overline{1, 5})\}$; среди всех пар индексов только две, (1,3) и (2,4), являющиеся адресными (см. Введение). Итак, $\mathbf{I}(\overline{1, 5}) = \overline{1, 5} \setminus \{3; 4\} = \overline{1, 2} \cup \{5\}$. По формуле (15) имеем списки заданий мощности 4: $\mathbf{G}_4 = \{\overline{2, 5}; \{1\} \cup \overline{3, 5}; \overline{1, 4}\}$. Далее по формуле (4) строим существенные списки заданий мощности 3, при этом $\mathbf{I}(\overline{2, 5}) = \overline{2, 3} \cup \{5\}$; $\mathbf{I}(\{1\} \cup \overline{3, 5}) = \{1\} \cup \overline{4, 5}$; $\mathbf{I}(\overline{1, 4}) = \overline{1, 2}$. Легко видеть, что семейство $\mathbf{G}_3$ состоит (см. (4)) из пяти списков заданий: $\mathbf{G}_3 = \{\overline{3, 5}; \{2\} \cup \overline{4, 5}; \overline{2, 4}; \{1; 3; 5\}; \{1\} \cup \overline{3, 4}\}$.

Вновь используя (4), получаем семейство $\mathbf{G}_2$: $\mathbf{G}_2 = \{4, 5; 3, 4; \{2; 4\}; \{3; 5\}; \{1; 3\}\}$. Для получения

$\tilde{T}[L_1; 0] = \{\overline{2,5}\}$	$\tilde{T}[L_2; 0] = \{\{1\} \cup \overline{3,5}\}$	$\tilde{T}[L_3; 0] = \{\overline{1,4}\}$
$\tilde{T}[L_1; 1] = \{\overline{3,5}; \{2\} \cup \overline{4,5}; \overline{2,4}\}$	$\tilde{T}[L_2; 1] = \{\overline{3,5}; \{1; 3; 5\}; \{1\} \cup \overline{3,4}\}$	$\tilde{T}[L_3; 1] = \{\overline{2,4}; \{1\} \cup \overline{3,4}\}$
$\tilde{T}[L_1; 2] = \{\overline{4,5}; \overline{3,4}; \{2; 4\}\}$	$\tilde{T}[L_2; 2] = \{\overline{4,5}; \overline{3,4}; \{3; 5\}; \{1; 3\}\}$	$\tilde{T}[L_3; 2] = \{\overline{3,4}; \{2; 4\}; \{1; 3\}\}$
$\tilde{T}[L_1; 3] = \{\{5\}; \{4\}; \{3\}\}$	$\tilde{T}[L_2; 3] = \{\{5\}; \{4\}; \{3\}\}$	$\tilde{T}[L_3; 3] = \{\{3\}; \{4\}\}$

семейства $\mathbf{G}_1$ используем следующее представление $\mathbf{G}_1 = \{\{t\}: t \in \mathbf{M}\} = \{\{t\}: t \in \overline{1,5} \setminus \mathbb{K}_1\}$, где $\mathbb{K}_1 = \{1; 2\}$, т. е.

$$\mathbf{G}_1 = \{\{3\}; \{4\}; \{5\}\}.$$

Нумеруем множества из семейства $\mathbf{G}_4$ (см. (52)):

$$L_1 = \overline{2,5}; L_2 = \{1\} \cup \overline{3,5}; L_3 = \overline{1,4}.$$

Для каждого списка L_1 , L_2 и L_3 , используя (23), строим ОД (см. таблицу).

Теперь, выбирая последовательно каждый из списков L_1 , L_2 , L_3 , мы конструируем поток пространства позиций, используя (28):

$$\mathfrak{D}_4[L_1] = \{(1, \overline{2,5})\};$$

$$\mathfrak{D}_3[L_1] = \{(2, \overline{3,5}); (3, \{2\} \cup \overline{4,5}); (5, \overline{2,4})\};$$

$$\mathfrak{D}_2[L_1] = \{(2, \overline{4,5}); (5, \{2; 4\}); (3, \{2; 4\}); (2, \overline{3,5});$$

$$(5, \overline{3,4}); (2, \overline{3,4})\};$$

$$\mathfrak{D}_1[L_1] = \{(4, \{5\}); (5, \{4\}); (4, \{3\}); (3, \{4\})\}.$$

$$\mathfrak{D}_4[L_2] = \{(2, \{1\} \cup \overline{3,5})\};$$

$$\mathfrak{D}_3[L_2] = \{(1, \overline{3,5}); (4, \{1; 3; 5\}); (5, \{1\} \cup \overline{3,4})\};$$

$$\mathfrak{D}_2[L_2] = \{(3, \overline{4,5}); (5, \overline{3,4}); (1, \{3; 5\}); (5, \{1; 3\});$$

$$(1, \overline{3,4}); (4, \{1; 3\})\};$$

$$\mathfrak{D}_1[L_2] = \{(4, \{5\}); (5, \{4\}); (4, \{3\}); (3, \{4\}); (5, \{3\}); (3, \{5\}); (1, \{3\})\}.$$

$$\mathfrak{D}_4[L_3] = \{(5, \overline{1,4})\};$$

$$\mathfrak{D}_3[L_3] = \{(1, \overline{2,4}); (2, \{1\} \cup \overline{3,4})\};$$

$$\mathfrak{D}_2[L_3] = \{(2, \overline{3,4}); (3, \{2; 4\}); (1, \overline{3,4}); (4, \{1; 3\});$$

$$\mathfrak{D}_1[L_3] = \{(4, \{3\}); (3, \{4\}); (2, \{4\}); (1, \{3\})\}.$$

Для получения потоков значений вида (50) на построенных выше слоях нам потребуется матрица затрат $\mathbf{c}(i, j, K)$, где $i \in \overline{0,5}$, $j \in \overline{1,5}$, $K \subset \overline{1,5}$. В своей существенной части матрица $\mathbf{c}$ определяется следующими значениями:

$\mathbf{c}(0,1, \{1\}) = 2$	$\mathbf{c}(0,1, \{2\}) = 1$	$\mathbf{c}(0,1, \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(0,1, \{4\}) = 3$	$\mathbf{c}(0,1, \{5\}) = 3$
$\mathbf{c}(0,2, \{1\}) = 0,5$	$\mathbf{c}(0,2, \{2\}) = 3$	$\mathbf{c}(0,2, \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(0,2, \{4\}) = 4$	$\mathbf{c}(0,2, \{5\}) = 5$
$\mathbf{c}(0,3, \{1\}) = 0,5$	$\mathbf{c}(0,3, \{2\}) = 1$	$\mathbf{c}(0,3, \{3\}) = 5$	$\mathbf{c}(0,3, \{4\}) = 5$	$\mathbf{c}(0,3, \{5\}) = 4$
$\mathbf{c}(0,4, \{1\}) = 0,4$	$\mathbf{c}(0,4, \{2\}) = 0,5$	$\mathbf{c}(0,4, \{3\}) = 4$	$\mathbf{c}(0,4, \{4\}) = 7$	$\mathbf{c}(0,4, \{5\}) = 2$
$\mathbf{c}(0,5, \{1\}) = 0,3$	$\mathbf{c}(0,5, \{2\}) = 0,5$	$\mathbf{c}(0,5, \{3\}) = 2$	$\mathbf{c}(0,5, \{4\}) = 3$	$\mathbf{c}(0,5, \{5\}) = 6$
$\mathbf{c}(1,2, \{1\}) = 0$	$\mathbf{c}(1,2, \{2\}) = 3$	$\mathbf{c}(1,2, \{3\}) = 3,5$	$\mathbf{c}(1,2, \{4\}) = 5$	$\mathbf{c}(1,2, \{5\}) = 5$
$\mathbf{c}(1,3, \{1\}) = 0$	$\mathbf{c}(1,3, \{2\}) = 1,5$	$\mathbf{c}(1,3, \{3\}) = 5$	$\mathbf{c}(1,3, \{4\}) = 6$	$\mathbf{c}(1,3, \{5\}) = 3,5$
$\mathbf{c}(1,4, \{1\}) = 0$	$\mathbf{c}(1,4, \{2\}) = 1$	$\mathbf{c}(1,4, \{3\}) = 4$	$\mathbf{c}(1,4, \{4\}) = 7$	$\mathbf{c}(1,4, \{5\}) = 3$
$\mathbf{c}(1,5, \{1\}) = 0$	$\mathbf{c}(1,5, \{2\}) = 0,5$	$\mathbf{c}(1,5, \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(1,5, \{4\}) = 8$	$\mathbf{c}(1,5, \{5\}) = 6$
$\mathbf{c}(2,1, \{1\}) = 2$	$\mathbf{c}(2,1, \{2\}) = 0$	$\mathbf{c}(2,1, \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(2,1, \{4\}) = 3$	$\mathbf{c}(2,1, \{5\}) = 3$
$\mathbf{c}(2,3, \{1\}) = 4$	$\mathbf{c}(2,3, \{2\}) = 0$	$\mathbf{c}(2,3, \{3\}) = 5$	$\mathbf{c}(2,3, \{4\}) = 5$	$\mathbf{c}(2,3, \{5\}) = 4$
$\mathbf{c}(2,4, \{1\}) = 6$	$\mathbf{c}(2,4, \{2\}) = 0$	$\mathbf{c}(2,4, \{3\}) = 9$	$\mathbf{c}(2,4, \{4\}) = 7$	$\mathbf{c}(2,4, \{5\}) = 5$
$\mathbf{c}(2,5, \{1\}) = 5$	$\mathbf{c}(2,5, \{2\}) = 0$	$\mathbf{c}(2,5, \{3\}) = 8$	$\mathbf{c}(2,5, \{4\}) = 6$	$\mathbf{c}(2,5, \{5\}) = 6$
$\mathbf{c}(3,1, \{1\}) = 2$	$\mathbf{c}(3,1, \{2\}) = 2$	$\mathbf{c}(3,1, \{3\}) = 0$	$\mathbf{c}(3,1, \{4\}) = 4$	$\mathbf{c}(3,1, \{5\}) = 3$
$\mathbf{c}(3,2, \{1\}) = 3$	$\mathbf{c}(3,2, \{2\}) = 3$	$\mathbf{c}(3,2, \{3\}) = 0$	$\mathbf{c}(3,2, \{4\}) = 5$	$\mathbf{c}(3,2, \{5\}) = 5$
$\mathbf{c}(3,4, \{1\}) = 6$	$\mathbf{c}(3,4, \{2\}) = 5$	$\mathbf{c}(3,4, \{3\}) = 0$	$\mathbf{c}(3,4, \{4\}) = 7$	$\mathbf{c}(3,4, \{5\}) = 8$
$\mathbf{c}(3,5, \{1\}) = 4$	$\mathbf{c}(3,5, \{2\}) = 4$	$\mathbf{c}(3,5, \{3\}) = 0$	$\mathbf{c}(3,5, \{4\}) = 8$	$\mathbf{c}(3,5, \{5\}) = 6$
$\mathbf{c}(4,1, \{1\}) = 2$	$\mathbf{c}(4,1, \{2\}) = 2$	$\mathbf{c}(4,1, \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(4,1, \{4\}) = 0$	$\mathbf{c}(4,1, \{5\}) = 4$
$\mathbf{c}(4,2, \{1\}) = 3$	$\mathbf{c}(4,2, \{2\}) = 3$	$\mathbf{c}(4,2, \{3\}) = 4$	$\mathbf{c}(4,2, \{4\}) = 0$	$\mathbf{c}(4,2, \{5\}) = 5$
$\mathbf{c}(4,3, \{1\}) = 4$	$\mathbf{c}(4,3, \{2\}) = 1,5$	$\mathbf{c}(4,3, \{3\}) = 5$	$\mathbf{c}(4,3, \{4\}) = 0$	$\mathbf{c}(4,3, \{5\}) = 3,5$
$\mathbf{c}(4,5, \{1\}) = 5$	$\mathbf{c}(4,5, \{2\}) = 0,5$	$\mathbf{c}(4,5, \{3\}) = 8$	$\mathbf{c}(4,5, \{4\}) = 0$	$\mathbf{c}(4,5, \{5\}) = 6$
$\mathbf{c}(5,1, \{1\}) = 2$	$\mathbf{c}(5,1, \{2\}) = 2$	$\mathbf{c}(5,1, \{3\}) = 3$	$\mathbf{c}(5,1, \{4\}) = 3$	$\mathbf{c}(5,1, \{5\}) = 0$
$\mathbf{c}(5,2, \{1\}) = 3$	$\mathbf{c}(5,2, \{2\}) = 3$	$\mathbf{c}(5,2, \{3\}) = 3,5$	$\mathbf{c}(5,2, \{4\}) = 5$	$\mathbf{c}(5,2, \{5\}) = 0$
$\mathbf{c}(5,3, \{1\}) = 4$	$\mathbf{c}(5,3, \{2\}) = 2,5$	$\mathbf{c}(5,3, \{3\}) = 5$	$\mathbf{c}(5,3, \{4\}) = 6$	$\mathbf{c}(5,3, \{5\}) = 0$
$\mathbf{c}(5,4, \{1\}) = 6$	$\mathbf{c}(5,4, \{2\}) = 4$	$\mathbf{c}(5,4, \{3\}) = 4$	$\mathbf{c}(5,4, \{4\}) = 7$	$\mathbf{c}(5,4, \{5\}) = 0$

Для получения всевозможных значений $\mathbf{c}(i, j, K)$ используем естественное "аддитивное" правило:
 $\mathbf{c}(i, j, K) = \sum_{s \in K} \mathbf{c}(i, j, \{s\})$, при $K \in \mathfrak{N}$, $i \in \overline{0, 5} \setminus K$, $j \in K$.

Итак, вычислитель Π_1 начинает свою работу на первом этапе $I_1^{(1)}$, при $L_1 = \overline{2, 5}$ формирует следующие значения функции (54), используя (48):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1[2, 5](4, \{5\}) &= \mathbf{c}(4, 5, \{5\}) + \mathbf{f}(5) = 6; \\ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](5, \{4\}) &= \mathbf{c}(5, 4, \{4\}) + \mathbf{f}(4) = 7; \\ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](4, \{3\}) &= \mathbf{c}(4, 3, \{3\}) + \mathbf{f}(3) = 5; \\ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](2, \{4\}) &= \mathbf{c}(2, 4, \{4\}) + \mathbf{f}(4) = 7. \end{aligned}$$

Начинается этап $I_2^{(1)}$, на котором Π_1 по предложению 6.3 насчитывает массив значений функции (53):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](2, \overline{4, 5}) &= \min_{h \in \mathbf{I}(\overline{4, 5})} [\mathbf{c}(2, h, \overline{4, 5}) + \\ &+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](2, \overline{4, 5} \setminus \{h\})] = \\ &= \min[\mathbf{c}(2, 4, \overline{4, 5}) + \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](2, \{5\}); \\ &\mathbf{c}(2, 5, \overline{4, 5}) + \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](2, \{4\})] = \\ &= \min[12 + 6; 12 + 7] = 18; \\ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](5, \{2; 4\}) &= \\ &= \mathbf{c}(5, 2, \{2; 4\}) + \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](2, \{4\}) = 8 + 7 = 15; \\ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](3, \{2; 4\}) &= \mathbf{c}(3, 2, \{2; 4\}) + \\ &+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](2, \{4\}) = 8 + 7 = 15; \\ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](3, \overline{4, 5}) &= \min[\mathbf{c}(3, 4, \overline{4, 5}) + \\ &+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](4, \{5\}); \mathbf{c}(3, 5, \overline{4, 5}) + \\ &+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](5, \{4\})] = \min[15 + 6; 14 + 7] = 21; \\ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](5, \overline{3, 4}) &= \min[\mathbf{c}(5, 3, \overline{3, 4}) + \\ &+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](3, \{4\}); \mathbf{c}(5, 4, \overline{3, 4}) + \\ &+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](4, \{3\})] = \min[11 + 7; 11 + 5] = 16; \\ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](2, \overline{3, 4}) &= \min[\mathbf{c}(2, 3, \overline{3, 4}) + \\ &+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](3, \{4\}); \mathbf{c}(2, 4, \overline{3, 4}) + \\ &+ \mathcal{W}_1[\overline{2, 5}](4, \{3\})] = \min[10 + 7; 16 + 5] = 17. \end{aligned}$$

На этом же этапе начинает свою работу вычислитель Π_2 и при $L_2 = \{1\} \cup \overline{3, 5}$ формирует значения функции (54):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](5, \{3\}) &= 5; \mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](3, \{5\}) = 6; \\ \mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](1, \{3\}) &= 5; \mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](3, \{4\}) = 7. \end{aligned}$$

Значения $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](4, \{5\})$, $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](5, \{4\})$, $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](4, \{3\})$, $\mathcal{W}_1[\{1\} \cup \overline{3, 5}](2, \{4\})$, вычислитель Π_2 получает от Π_1 (на самом деле, эти значения фактически считаются в виде коэффициентов матрицы затрат (см. (46))). Начинается этап $I_3^{(1)}$, на котором Π_1 насчитывает массив значений функции (55):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](2, \overline{3, 5}) &= \min[\mathbf{c}(2, 3, \overline{3, 5}) + \\ &+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](3, \overline{4, 5}); \mathbf{c}(2, 5, \overline{3, 5}) + \\ &+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](5, \overline{3, 4})] = \min[14 + 21; 20 + 16] = \\ &= \min[35; 36] = 35; \\ \mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](3, \{2\} \cup \overline{4, 5}) &= \min[\mathbf{c}(3, 2, \{2\} \cup \overline{4, 5}) + \\ &+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](2, \overline{4, 5}); \mathbf{c}(3, 5, \{2\} \cup \overline{4, 5}) + \\ &+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](5, \{2; 4\})] = \min[13 + 17; 18 + 15] = \\ &= \min[30; 33] = 30; \\ \mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](5, \overline{2, 4}) &= \min[\mathbf{c}(5, 2, \overline{2, 4}) + \\ &+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](2, \overline{3, 4}); \mathbf{c}(5, 3, \overline{2, 4}) + \\ &+ \mathcal{W}_2[\overline{2, 5}](3, \{2; 4\})] = \min[11, 5 + 17; 13, 5 + 15] = \\ &= \min[28, 5; 28, 5] = 28, 5. \end{aligned}$$

На этом же этапе вычислитель Π_2 насчитывает значения функции (56):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}](1, \{3; 5\}) &= 14; \\ \mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}](5, \{1; 3\}) &= 10; \\ \mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}](1, \overline{3, 4}) &= 16; \\ \mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}](4, \{1; 3\}) &= 10. \end{aligned}$$

Остальные значения, а именно $\mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}](5, \overline{3, 4})$ и $\mathcal{W}_2[\{1\} \cup \overline{3, 5}](3, \overline{4, 5})$, Π_2 получает от Π_1 . В свою очередь, "включившийся" в работу вычислитель Π_3 к концу этапа $I_3^{(1)}$ располагает функциями (57), значения которых уже были получены ранее Π_1 и Π_2 . Таким образом, к концу этапа $I_3^{(1)}$ мы располагаем значениями всей функции v_1 и частично насчитанными значениями функций v_2 и v_3 .

На этапе $I_4^{(1)}$ вычислитель Π_1 завершает работу подсчетом значения:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_4[\overline{2, 5}](1, \overline{2, 5}) &= \min[\mathbf{c}(1, 2, \overline{2, 5}) + \\ &+ \mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](2, \overline{3, 5}); \mathbf{c}(1, 3, \overline{2, 5}) + \\ &+ \mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](3, \{2\} \cup \overline{4, 5}); \mathbf{c}(1, 5, \overline{2, 5}) + \\ &+ \mathcal{W}_3[\overline{2, 5}](5, \overline{2, 4})] = \\ &= \min[16, 5 + 35; 16 + 30; 17, 5 + 28, 5] = \\ &= \min[51, 5; 46; 46] = 46. \end{aligned}$$

Вычислитель Π_2 к концу этапа $I_4^{(1)}$ располагает значениями:

$$\begin{aligned}w_3[\{1\} \cup \overline{3,5}](1, \overline{3,5}) &= 33; \\w_3[\{1\} \cup \overline{3,5}](4, \{1; 3; 5\}) &= 23; \\w_3[\{1\} \cup \overline{3,5}](5, \{1\} \cup \overline{3,4}) &= 24.\end{aligned}$$

В свою очередь, Π_3 располагает значениями функций $w_2[\overline{1,4}](3, \{2; 4\})$, $w_2[\overline{1,4}](2, \overline{3,4})$, которые были насчитаны ранее Π_1 , и значениями $w_2[\overline{1,4}](1, \overline{3,4})$, $w_2[\overline{1,4}](4, \{1; 3\})$, насчитанными ранее Π_2 . Таким образом, к концу этапа $I_4^{(1)}$ построена функция v_2 .

На этапе $I_5^{(1)}$ вычислитель Π_2 завершает работу расчетом значения $w_4[\{1\} \cup \overline{3,5}](2, \{1\} \cup \overline{3,5}) = 41$. В свою очередь, Π_3 к концу этапа располагает значениями $w_3[\overline{1,4}](1, \overline{2,4}) = 27,5$; $w_3[\overline{1,4}](2, \{1\} \cup \overline{3,4}) = 24$.

Таким образом, к концу этапа $I_5^{(1)}$ построена функция v_3 .

На последнем, завершающем этапе $I_6^{(1)}$ завершает работу вычислитель Π_3 , реализуя $w_4[\overline{1,4}](5, \overline{1,4}) = 37,5$. К концу данного этапа получаем функцию v_4 .

Теперь можно приступить к вычислению глобального экстремума V :

$$\begin{aligned}V(0, \overline{1,5}) &= \min[c(0, 1, \overline{1,5}) + v_4(1, \overline{2,5}); \\&c(0, 2, \overline{1,5}) + v_4(2, \{1\} \cup \overline{3,5}); \\&c(0, 5, \overline{1,5}) + v_4(5, \overline{1,4})] = \min[12 + 46; 15,5 + 41; \\&11,8 + 37,5] = \min[58; 56,5; 49,3] = 49,3.\end{aligned}$$

Соответствующий данному экстремуму маршрут (построение оптимального маршрута приводится в разделе 4) имеет вид: $0 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$.

Для иллюстрации вышеупомянутой процедуры с элементами распараллеливания были проведены вычисления (использовался программный комплекс, разработанный на платформе .Net с использованием языка C#) на основе ДП без распараллеливания [15]. Упомянутый вариант ДП был реализован в виде программного комплекса на компьютере Notebook Lenovo с процессором Core i5-2410M с частотой 2,3 GHz, объемом оперативной памяти 3,0 Гб с установленной 32-разрядной операционной системой Windows 7 Professional, что позволило найти оптимальное решение основной задачи при $N = 30$ с 27 адресными парами. В данном случае (при $N = 5$)

вариант без распараллеливания использован для подтверждения правильности модельного примера: в обоих случаях результаты расчета ($V = 49,3$, маршрут $0 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$) совпадают.

Заключение

Для решения задачи маршрутизации с ограничениями и функциями стоимости, зависящими от списка заданий, построена гипотетическая схема независимых вычислений для реализации параллельной процедуры построения функции Беллмана. Излагаемая схема может применяться при решении инженерной задачи о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации.

Список литературы

1. Ташлыков О. Л. Методы оценки и снижения дозовых нагрузок при ремонте АЭС: учеб. пособие. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. 118 с.
2. Коробкин В. В., Сесекин А. Н., Ташлыков О. Л., Ченцов А. Г. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций / Под общ. ред. член-корр. РАН И. А. Каляева. М.: Новые технологии, 2012. 234 с.
3. Меламед И. И., Сергеев С. И., Сигал И. Х. Задача коммивояжера. I. Вопросы теории; II. Точные алгоритмы; III. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3—34; № 10. С. 3—29; № 11. С. 3—26.
4. Литл Дж., Мурти К., Суини Д., Кэрел К. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере // Экономика и математические методы. 1965. Т. 1 (Вып. 1). С. 94—107.
5. Gutin G., Punnen A.P. The Traveling Salesman Problem and Its Variations. Kluwer, 2002. 830 p.
6. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернет. сборник. Т. 9. М.: Мир, 1964. С. 219—228.
7. Хелд М., Карп Р. М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернет. сборник. Т. 9. М.: Мир, 1964. С. 202—218.
8. Ченцов А. Г. К вопросу о маршрутизации комплекса работ // Вестник Удм. ун-та. Математика. Механика. Комп. науки. 2013. № 1. С. 59—82.
9. Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.: Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008. 240 с.
10. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
11. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
12. Сесекин А. Н., Ченцов А. А., Ченцов А. Г. Обобщенная задача курьера с функцией затрат, зависящей от списка заданий // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. — № 2. С. 68—77.
13. Ченцов А. Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // Вестник ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012. № 18, вып. 12. С. 53—76.
14. Ченцов А. Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами // АиТ. 2012. № 3. С. 134—149.
15. Кошелева М. С., Ченцов А. Г. Одна задача маршрутизации с ограничениями в виде условий предшествования // Проблемы управления и моделирования в сложных системах: Тр. XV Междунар. конф. Самара: Самар. НЦ РАН. 2013. С. 523—532.

Dynamic Programming in the Precedence Constrained TSP with the Costs Depending on a List of Tasks

A. G. Chentsov, chentsov@imm.uran.ru, M. S. Kosheleva, kosheleva.ms@gmail.com,
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, RAS,
Ural Federal University, Yekaterinburg, 620990, Russian Federation

Received on September 04, 2014

A scheme of independent calculations of the Bellman function for the Precedence Constrained TSP, in which the cost depends on the list of pending jobs was constructed. The authors use a version of the dynamic programming method to solve a routing problem with the precedence constraints; this method makes use of an extension for the initial problem, which is based on a transformation of the precedence constraints into a special "deletion" rule (for tasks from the "current" list). At the stage of construction of the Bellman function, the whole array of its values is not used. In order to parallelize the computation procedure of the above mentioned function, they propose to distribute the task lists, which are realized at the penultimate stage of the procedure between different cores. In the construction of individual threads of the computational scheme, the authors use discrete dynamical systems, which build the sets, which may look similar to the reachability sets in the optimal control theory; the latter sets are employed in construction of the layers of space of position. The layers of the Bellman function, which are constructed in threads, are defined as restrictions of the latter onto the respective layers of the space of position. The statement of the problem and the solution methods are focused on a real-life problem of dismantling of a decommissioned nuclear power unit.

Keywords: Dynamic programming, route, precedence constraints, essential list (of tasks), layers of space of position, independent computations, Bellman function

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, projects no. 13-08-00-643-a, no. 14-08-00419.

For citation:

Chentsov A. G., Kosheleva M. S. Dynamic Programming in the Precedence Constrained TSP with the Costs Depending on a List of Tasks, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 232–244.

DOI: 10.17587/mau.16.232-244

References

1. Tashlykov O. L. *Metody otsenki i snizheniya dozovykh nagruzok pri remonte AES* (Methods for Estimating and Reducing Dosimetric Costs during the NPP Repair), Ekaterinburg: Tutorial, USTU, 2009. 118 p. (in Russian).
2. Korobkin V. V., Sesekin A. N., Tashlykov O. L., Chentsov A. G. *Metody marshrutizatsii i ih prilozheniya v zadachah povysheniya bezopasnosti i jeffektivnosti jekspluatatsii atomnyh stancij* (Methods of Routing and Their Applications to Problems of Increasing Safety and Efficiency of Nuclear Power Plants). M.: Novye tehnologii, 2012. 234 p. (in Russian).
3. Melamed I. I., Sergeev S. I., Sigal I. Kh. *Zadacha kommivoyazhnera: I. Voprosy teorii; II. Tochnye metody; III. Priblizhennyye algoritmy* (The traveling salesman problem: I. Problems of the theory; II. Exact algorithms; III. Approximation algorithms). *Avtomatika i Telemekhanika* (Automation and Remote Control), 1989, I: no. 9, pp. 3–34 (in Russian) (50:9, 1147–1173); II: no. 10, pp. 3–29 (in Russian) (50:10, 1303–1324); III: no. 11, pp. 3–26 (in Russian) (50:11, 1459–1479).
4. Little J. D. C., Murty K. G., Sweeney D. W., Karel C. *Algoritim dlya resheniya zadachi o kommivoyazhere* (An algorithm for the traveling salesman problem), *Operations Research*, 1963, vol. 11, pp. 972–989. (*Ekonomika i Matem. Metody*, 1965, vol. 1 (1), pp. 90–107 (in Russian)).
5. Gutin G., Punnen A. P. *Zadacha kommivoyazhora i ee varianty* (The Traveling Salesman Problem and Its Variations), Kluwer, 2002. 830 p.
6. Bellman R. *Primenenie dinamicheskogo programmirovaniya k zadache o kommivoyazhere* (Dynamic Programming Treatment of the Traveling Salesman Problem), *J. ACM*, 1962, vol. 9, pp. 61–63 (*Kibernet. Sborn.*, 1964, vol. 9, pp. 219–228 (in Russian)).
7. Held M., Karp R. M. *Primenenie dinamicheskogo programmirovaniya k zadacham uporyadocheniya* (A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems), *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1962, vol. 10, pp. 196–210 (*Kibernet. Sborn.*, 1964, vol. 9, pp. 202–218 (in Russian)).
8. Chentsov A. G. *K voprosu o marshrutizatsii kompleksov rabot* (To question of routing of works complexes), *Vestn. Udm. Univ., Ser. Matematika. Mekhanika. Komp. Nauki.*, 2013, no 1, pp. 59–82 (in Russian).
9. Chentsov A. G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadaniy: voprosy teorii* (Extremal problems of routing and assignment of tasks: questions of theory), *Izhevsk, Institute of Computer Science*, 2008, 240 p. (in Russian).
10. Warga J. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami* (Optimal control of differential and functional equations), Moscow, Nauka, 1977, 624 p. (in Russian).
11. Dieudonne J. *Osnovy sovremennogo analiza* (Foundations of modern analysis), Moscow, Mir, 1964, 430 p. (in Russian).
12. Sesekin A. N., Chentsov A. A., Chentsov A. G. *Obobshhennaya zadacha kur'era s funkciej zatrat, zavisjashhej ot spiska zadaniy* (Generalized problem with the courier cost function that depends on the job list), *Izv. Ross. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.*, 2010, no 2, pp. 68–77 (in Russian).
13. Chentsov A. G. *Odná parallel'naja procedura, postroeniya funktsii Bellmana v obobshhennoj zadache kur'era s vnutrennimi rabotami* (One parallel procedure for the construction of the Bellman function in the generalized problem of the courier with the inner workings), *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program.*, 2012, no 18 (12), pp. 53–76 (in Russian).
14. Chentsov A. G. *Odná parallel'naja procedura postroeniya funktsii Bellmana v obobshhennoj zadache kur'era s vnutrennimi rabotami* (One parallel procedure for the construction of the Bellman function in the generalized problem of the courier with the inner workings), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2012, no 3, pp. 134–149 (in Russian).
15. Kosheleva M. S., Chentsov A. G. *Odná zadacha marshrutizatsii s ogranichenijami v vide uslovij predshestvovaniya* (A Route Problem Of Displacement Under Constraints In The Form Of Preceding Conditions), *Problemy Upravljeniya i Modelirovaniya v Slozhnyh Sistemah: Tr. XV Mezhdunar. Konf. Samara, Samar. NC RAN*, 2013, P. 523–532 (in Russian).

Corresponding author:

Chentsov Alexandr G., D.Sc., Corresponding Member of RAS, Professor, Senior Researcher Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620990, Russian Federation, e-mail: chentsov@imm.uran.ru, +7 (343) 375-34-57

А. В. Андронов, канд. техн. наук, вед. инженер, andronov.plk@mail.ru,
Г. П. Шибанов, д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр., gpshibanov@mail.ru,
Государственный летно-испытательный центр им. В. П. Чкалова, Ахтубинск

Современная технология научного выбора наиболее перспективного образца техники из ряда образцов аналогичного назначения

Рассмотрено применение технологии сравнительной количественной оценки объектов техники на примере средних (оперативно-тактических) самолетов военно-транспортной авиации. Используется минимаксный подход к оптимизации критериев оценки.
Ключевые слова: современная технология, оценка, оптимизация, критерии, образец, летательный аппарат

Применение технологии научного выбора наиболее перспективного образца техники из ряда образцов аналогичного назначения рассмотрим на примере сравнения конкретных образцов летательных аппаратов, которые находятся на снабжении как российской военно-транспортной авиации (ВТА), так и ВТА других стран. К образцам такого типа также можно отнести и те военно-транспортные самолеты, которые находятся на этапе опытного строительства и показали свои возможности по назначению в процессе проводимых летных испытаний. Рациональность такой апробации определяется тем, что летательные аппараты ВТА являются весьма дорогостоящей техникой и относятся к наиболее сложным объектам оценки перспективности их дальнейшего применения по назначению. Это подтверждает тот факт, что лица, принимающие решения (ЛПР), без опоры на современные технологии научного анализа могут допускать серьезные ошибки при оценке конкретного образца техники, приводящие к колоссальным материальным потерям и снижающие обороноспособность страны. Примером этому может служить затянувшаяся почти на 15 лет история с принятием на снабжение ВТА среднего оперативно-тактического самолета "с коротким взлетом и посадкой" Ан-70.

Данный самолет начал разрабатываться еще в 80-х годах прошлого столетия. Его первый взлет состоялся в декабре 1994 года. Самолет Ан-70 вобрал в себя столько новых конструкторских, инженерных и научно-технических идей и решений, что спустя 20 лет по своим летно-техническим и эксплуатаци-

онным характеристикам, показанным в летных испытаниях, остается лучшим в мире военно-транспортным самолетом в своем классе. В том числе превосходит он и взлетающий почти 15 лет спустя свой западный аналог А.400М.

Данное заключение можно проиллюстрировать, опираясь на решение задачи обоснования развития вооружений [1], которое основывается на многокритериальном выборе и упорядочении объектов методом аддитивного взвешивания [2].

В рассматриваемом случае задача формулируется следующим образом: имеется множество летательных аппаратов, каждый из которых необходимо оценивать совокупностью критериев (показателей) (табл. 1).

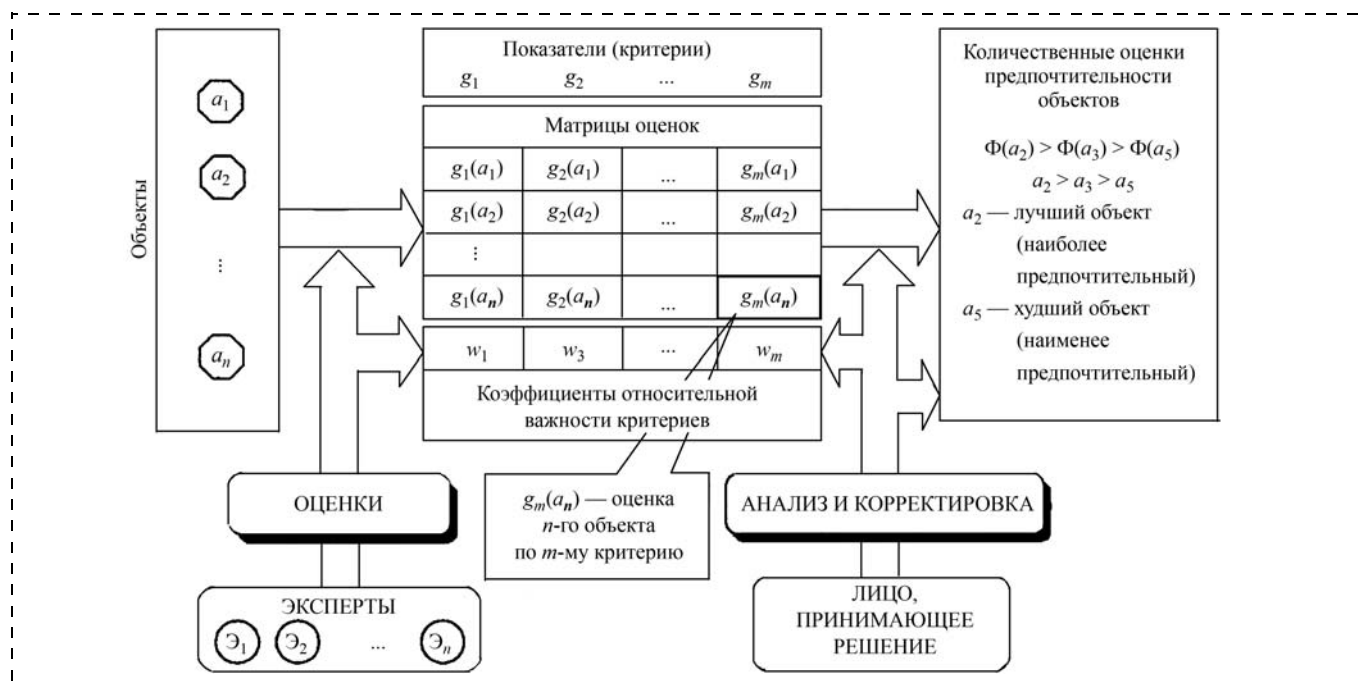
Как видно из табл. 1, в качестве критериев оценки экспертами выбраны: крейсерская скорость полета ($V_{пол}$, км/ч), максимальная дальность полета ($D_{пол}$, км), скорость захода на посадку ($V_{зп}$, км/ч), объем грузовой кабины ($W_{гр.каб}$, м³), максимальная грузоподъемность ($G_{гр.мах}$, т), максимальный взлетный вес ($G_{взл.мах}$, т), цена самолета (C , млн долларов), класс аэродрома (тип взлетно-посадочной полосы: грунт, бетон, длина).

ЛПР, опираясь на оценки этих объектов и его представления об относительной важности критериев, необходимо выбрать наилучший объект (задача выбора) или все рассматриваемые объекты расположить в определенной последовательности — от лучшего к худшему (задача упорядочения) [3] в соответствии с алгоритмом, схематично представленным на рисунке.

Оцениваемые самолеты и выбранные критерии

Таблица 1

Тип самолета	$V_{пол}$, км/ч	$D_{пол}$, км	$V_{зп}$, км/ч	$W_{гр.каб}$, м ³	$G_{гр.мах}$, т	$G_{взл.мах}$, т	C , млн долл.	Класс аэродрома
Ан-70	750	6600	170	420	35	135	67	Грунт 800 м
Ан-12	620	3200	260	110	20	61	27	Бетон 2200 м
А.400М	780	6400	220	360	37	141	145	Бетон 1700 м
С-130j	645	5250	240	130	26	79	65	Бетон 2000 м
Желательное направление изменений	↑/+	↑/+	↓/—	↑/+	↑/+	↓/—	↓/—	↓/—
Коэффициенты относительной важности	0,05	0,15	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05	0,3



Схематическое представление алгоритма многокритериального выбора лучшего военно-транспортного самолета по заданным критериям

Аналитически данный алгоритм выбора наилучшего объекта и упорядочения объектов заданного множества осуществляется по следующим правилам:

а) выбор

$$a^* = \arg_j \max \{ \Phi_i = \left\{ \sum_{j=1}^m \hat{g}_{ij} w_j \right\}; \quad (1)$$

б) упорядочение

$$\begin{aligned} a_i P a_j, & \text{ если } \Phi_i > \Phi_j, \\ a_i I a_j, & \text{ если } \Phi_i = \Phi_j, \end{aligned}$$

где a^* — наилучший объект; P — бинарное отношение предпочтения, т. е. $a_i P a_j$, если объект a_i предпочтительнее объекта a_j ; I — бинарное отношение неразличимости, т. е. $a_i I a_j$, если объект a_i неразличим по предпочтительности с объектом a_j ; Φ_i — обобщенная оценка i -го объекта; w_j — коэффициент относительной важности j -го критерия; g_{ji} — количественная оценка i -го объекта с точки зрения j -го критерия.

Оптимизация и нормирование количественных данных, сведенных в таблицу при реализации алгоритма, приведенного на рис. 1, осуществляется в следующей последовательности:

- на основе обработки результатов экспертного опроса определяются коэффициенты относительной важности выбранных критериев оценки;
- осуществляется приведение взлетного веса $G_{взл}$ и цены C к максимальной массе перевозимого груза;
- для одной группы критериев ($V_{пол}$, $D_{пол}$, $W_{гр.каб}$, $G_{гр}$) оценки максимизируем, а для другой

($V_{зп}$, $G_{взл}$, C , "Класс аэродрома") минимизируем по следующим правилам:

$$\hat{g}_{ji} = \begin{cases} \frac{g_{ji} - g_{j\min}}{g_{j\max} - g_{j\min}} \\ \frac{g_{j\max} - g_{ji}}{g_{j\max} - g_{j\min}} \end{cases}, \quad (2)$$

где $g_{j\min} = \min\{g_{ji}\}$, $g_{j\max} = \max\{g_{ji}\}$, $j = \overline{1, m}$.

Полученные при нормировании данные используем для вычисления обобщенных минимаксных оценок Φ для каждого из рассматриваемых нами объектов (летательных аппаратов).

Все выбранные для сравнения летательные аппараты являются военно-транспортными самолетами (ВТС) среднего класса, наиболее известными в авиационном мире в последние десятилетия.

Решив задачу многокритериального упорядочения, мы получим и решение задачи выбора. Оценки коэффициентов относительной важности критериев, желательное направление изменений выбранных критериев и некоторые оценки объектов по ряду критериев при необходимости могут определяться группой экспертов, сформированной в соответствии с рекомендациями, изложенными в работе [4]. Наиболее надежным и широко используемым методом решения задачи определения коэффициентов относительной важности критериев является метод собственных значений Т. Саати [5].

При использовании этого метода [5] на первом этапе ЛПР осуществляются парные сравнения оцениваемых критериев, так как именно парные срав-

нения — это наиболее удобная для человека форма выражения своих предпочтений.

Выбранный многокритериальный метод аддитивного взвешивания предполагает использование количественных значений оцениваемых критериев в абсолютных величинах, поэтому исходная матрица в соответствии с табл. 1 будет иметь следующий вид:

750	6600	170	420	35	135	67	800
620	3200	260	110	20	61	27	2200
780	6400	230	360	37	141	145	1700
645	5250	240	130	26	79	65	2000

Прежде чем приступить к процессу оптимизации исходной матрицы, определяем коэффициенты относительной важности выбранных нами критериев, выделяя в весовом отношении основные летно-технические характеристики рассматриваемых летательных аппаратов, прежде всего, как военно-транспортных самолетов. Это такие характеристики, как потребные для эксплуатации размеры взлетно-посадочной полосы (ВПП), масса перевозимого груза, скорость захода на посадку и другие. Полученные коэффициенты относительной важности вносятся в ту же табл. 1. Кроме того, учитывая, что рассматриваемые самолеты значительно различаются по максимальной взлетной массе и стоимости, для повышения достоверности получаемых результатов выполняется приведение этих характеристик к максимальным массам перевозимых ими грузов. После данной операции матрица примет следующий вид:

750	6600	170	420	35	3,857	1,914	800
620	3200	260	110	20	3,050	1,350	2200
780	6400	220	360	37	3,810	3,918	1700
645	5250	240	130	26	3,038	2,500	2000

Процесс нормирования полученной матрицы проводим с учетом информации о желательном изменении оценок по каждому из критериев. Поэтому для одной группы критериев ($V_{пол}$, $D_{пол}$, $W_{гр.каб}$, $G_{гр}$) оценки максимизируем, а для другой ($V_{зп}$, $G_{взл}$, C , "Класс аэродрома") — минимизируем в соответствии с выражением (2). Применяв коэффициенты относительной важности критериев, получим

0,0406	0,1500	0,2000	0,1000	0,0882	0,0000	0,0390	0,3000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0492	0,0500	0,0000
0,0500	0,1412	0,0888	0,0806	0,1000	0,0287	0,0000	0,1071
0,0078	0,0904	0,0444	0,0064	0,0353	0,0500	0,0276	0,0428

В соответствии с выражением (1) рассчитываем обобщенные минимаксные оценки Φ для каждого из оцениваемых нами ВТС: Ан-70 — $\Phi = 0,9178$; Ан-12 — $\Phi = 0,0905$; А.400М — $\Phi = 0,5092$; С-130j — $\Phi = 0,2958$.

Таким образом, интегральная оценка выбранных критериев показывает значительный приоритет самолета Ан-70. Указанное преимущество было достигнуто за счет использования новейших технологий

и технических решений, воплощенных при разработке и создании самолета Ан-70 и не потерявших свою актуальность до настоящего времени. Так, в конструкции самолета широко применяются композиционные материалы, из них изготовлены предкрылки, закрылки, элероны, интерцепторы, киль и стабилизатор, различные зализы и обтекатели. Система управления самолетом выполнена по современной электродистанционной схеме (ЭДСУ) по всем каналам управления самолетом. Все бортовое радиоэлектронное оборудование объединено в цифровой интегральный комплекс с мультимплексной системой обмена информацией. Это обеспечивает непрерывный внутренний контроль за оборудованием и системами самолета [6]. Летно-технические характеристики, определенные в испытаниях, подтверждают уникальные несущие способности крыла: достигнут коэффициент подъемной силы, равный 7,2; на режиме торможения в горизонтальном полете достигнут максимальный угол атаки, равный 30°. Режим сваливания сопровождается опусканием носа самолета без тенденции к кренению, что является существенным вкладом в оценку высокой эксплуатационной безопасности летательного аппарата, и что, в свою очередь, стало возможным благодаря успешной реализации системного подхода при решении задачи получения взлетно-посадочных характеристик самолета, обеспечивающих короткий взлет и посадку. В системе "крыло — винтомоторная группа" удалось ожидаемо получить расчетное напорное и безотрывное обтекание верхней поверхности и механизации крыла, выпускаемой до 60°, а также отклоняемый вверх вектор части тяги двигателей за счет поворота воздушного потока по нижней поверхности крыла. Соосные винты двигателей создают высоконапорную струю воздуха, обтекающую крыло со скоростью, превышающей скорость набегающего потока. Это приводит к увеличению подъемной силы крыла, а выпущенные закрылки (на 60° в посадочном положении) создают эффект поворота вектора тяги. Таким образом, при заходе на посадку с полностью выпущенными закрылками большая часть подъемной силы на крыле возникает за счет силовой обдувки, а меньшая — за счет набегающего потока.

Таковыми же уникальными оказались характеристики самого двигателя Д-27 с винтами СВ-27, разработанными специально для самолета Ан-70, не имеющими аналогов в мировом двигателестроении и обеспечивающими крылу самолета столь благоприятные условия "работы". За счет очень высокой степени сжатия воздуха в восьмиступенчатом компрессоре двигателя ($\pi_k = 30$) достигаются высокие показатели топливной эффективности, а высокофорсированная камера сгорания при этом обеспечивает выброс вредных веществ существенно ниже нормируемых значений [7]. В конечном итоге была решена задача получения взлетно-посадочных характеристик, обеспечивающих самолету с грузом до 35 тонн режим "короткого взлета и посадки", т. е.

Таблица 2

**Десантно-транспортные характеристики средних
(оперативно-тактических) военно-транспортных самолетов**

Тип ВТС	Размеры грузового люка				Взлет- ная масса, т	Масса груза, т
	Длина, м	Шири- на, м	Высота, м	Объем, м		
Ан-70	22,40	4,0	4,10	420	135,0	47
Ан-12	13,50	3,10	2,60	110	61,0	20
Ил-76	24,50	3,40	3,46	290	190,0	48
С-130j	12,19	3,12	2,74	130	79,4	26

возможность эксплуатации со взлетно-посадочных полос длиной 800...900 м. При этом, что особенно важно, самолет Ан-70 имеет возможность эксплуатироваться и на грунтовых ВПП, и на полосах с бетонным покрытием.

При рассмотрении десантно-транспортных характеристик очевидна прямая их связь с размерами грузовой кабины и грузоподъемностью самолета [8]. В этом компоненте Ан-70 также шагнул далеко вперед в отношении своих и зарубежных предшественников (табл. 2).

Самолет Ан-70 способен в отличие от остальных самолетов своего класса при посадочном варианте транспортировать практически всю (98 %) номенклатуру вооружения и военной техники, имеющуюся в распоряжении мотострелковых и воздушно-десантных войск и подлежащую мобильному перебазированию. При воздушном же десантировании Ан-70 обеспечивает возможность одновременного раздельного десантирования техники и боевых расчетов, что не позволяют делать ни Ан-12, ни Ил-76, ни их модификации. Возможность массового десантирования боевых расчетов внутри десантируемой боевой техники мы не рассматриваем ввиду ограничений, накладываемых на этот способ рельефом подстилающей земной поверхности площадок десантирования и повышенной опасности применения этого способа для личного состава.

Важность возможности одновременного десантирования с одного самолета людей и боевой техники можно проиллюстрировать на простом сравнительном примере выполнения некой оперативной или тактической задачи силами двух самолетов Ил-76МД и двух самолетов Ан-70. В первом случае боевая техника и боевые расчеты размещены на разных самолетах, и в случае поражения средствами ПВО противника любого из них происходит срыв выполнения боевой задачи. Во втором случае при размещении боевой техники и личного состава на каждом из двух самолетов поражение любого из них ведет лишь к снижению эффективности выполнения боевой задачи.

Принятая в ВВС классификация ВТС по максимальной взлетной массе разделяет их на тяжелые, средние и легкие. В то же время существует и градация ВТС, продиктованная тактикой применения

средств обеспечения войсковых операций, как средств стратегического, оперативного и тактического характера. Такая градация, не подменяя основной классификации, позволяет более глубоко понимать суть боевых возможностей того или иного транспортного средства и в то же время устраняет путаницу в анализах достоинств и недостатков сравниваемых образцов авиационной техники и их боевой эффективности, проводимых разного рода авиаспециалистами. Например, попадание самолета низшего класса по массе по своим отдельным боевым возможностям в более высокий класс будет восприниматься как достоинство, а не как недостаток. Таким образом, и для разработчиков, и для структур, эксплуатирующих авиационную технику ВТА, понятия "стратегический", "оперативный", "оперативно-тактический" и "тактический военно-транспортный самолет" являются более удобными и информативными.

Таким образом, можно утверждать, что летно-технические, десантно-транспортные и эксплуатационные возможности Ан-70 как самолета нового поколения обеспечивают ему лидирующие позиции среди авиационных комплексов оперативно-тактического назначения как в России, так и за рубежом. Само понятие "самолет нового поколения" несет в себе смысл значительной научно-технической и технологической новизны, реализованной в этом изделии, а значит, перспектив научно-технического и технологического прогресса. Применительно к авиационной отрасли как наиболее наукоемкой и глубоко интегрированной с большинством отраслей народного хозяйства страны это означает их дальнейшее развитие, рост и совершенствование.

Сделанный вывод по сравнительной оценке самолета Ан-70 практически соответствует заключению американских и западноевропейских авиационных специалистов, сделанному в 1999 г. по результатам сравнительного тендера со своими аналогичными разработками. Тем не менее, несмотря на очевидную необходимость скорейшего внедрения в серийную эксплуатацию столь перспективного проекта, все последующие события стали происходить с точностью до наоборот. Словно рука невидимого дирижера стала управлять голосами лиц, ответственных за работы по этому самолету, утопивших в потоке порой надуманных причин и обоснований практически все решения по оснащению ВВС Российской Федерации этими перспективными транспортниками. Завершающие работы, предшествующие началу серийного производства данного самолета для военно-транспортной авиации Военно-воздушных сил Российской Федерации, объемом и продолжительностью на 6...8 месяцев не проведенные по сей день, растянувшись более чем на 13 лет.

Список литературы

1. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений. М: Логос, 2002. 301 с.

2. **Андронов А. В.** Научное обоснование путей развития оперативно-тактических самолетов военно-транспортной авиации // Сб. докл. Всеросс. науч.-техн. конф. "XI Научные чтения по авиации, посвященные памяти Н. Е. Жуковского". 2014. С. 64—69.
3. **Буренок В. М., Ляпунов В. М., Мудров В. И.** Теория и практика планирования и управления развитием вооружения. М.: Вооружение, политика, конверсия, 2005. С. 206—224.
4. **Шибанов Г. П.** Порядок формирования экспертных групп и проведения коллективной экспертизы // Информационные технологии. 2003. № 12. С. 19—22.

5. **Саати Т. Л.** Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 1989. 316 с.
6. **Техническое** описание и эксплуатация систем самолета Ан-70. Киев: Изд. АНТК им. О. К. Антонова, 1997. 423 с.
7. **Техническое** описание двигателя Д-27 с винто-вентилятором С-27. Запорожье: Изд. ЗМКБ "Прогресс" им. А. Г. Ивченко. 83 с.
8. **Якубович Н. В.** Все самолеты О. К. Антонова. М.: АСТ "Астрель", 2001. 192 с.

Modern Technology for a Scientific Selection of the Most Promising Samples of Technology out of a Number of Analogs

A. V. Andronov, andronov.plk@mail.ru, **G. P. Shibanov**, gpshibanov@mail.ru,
Government Test-flight Center named after V. P. Chkalov, Akhtubinsk, Russian Federation

Received on December 18, 2014

The authors propose a technology for a quantitative valuation of technology specimens on the example of a middle military-transport plane. The technology employs a min-max optimization criterion of valuation. The scientific selection of the best specimen for its designated purpose was proved in practice. An estimate can be correct, only if a sample is large enough. There is a discrepancy between a theory and an experiment. A multiple-criterion scientific choice is the only possible way. An adoption of the right solution or sound decision without a scientific foundation is impossible, because it can lead to unfortunate results. A vivid example is the decision of the high military command of the air force on closing of all works on An-70 plane. This mistake resulted in huge waste of time, money and control over the air industry. Algorithm of the suggested technology leads to perfection. This algorithm alongside with the use of the multiple-criterion method allows us to prove scientifically that An-70 plane is the best among the middle planes of the military-transport aviation. For the first time the algorithm of multiple-criterion valuation introduced into practice the maximum and minimum ways for optimization of the criteria. The maximal optimization is ensured by one group of criteria, and the minimal optimization is ensured by another group of criteria. Applied to the planes of the military-transport aviation this method allows us to select the best plane-model with account of its take-off weight and cost in relation to the maximum-mass of a payload. The suggested algorithm of the quantitative valuation and selection of the most rational of the specimen can be used conformably to any kind of equipment.

Keywords: modern technology, valuation, optimization, criteria, specimen, flying machine

For citation:

Andronov A. V., Shibanov G. P. Modern Technology for a Scientific Selection of the Most Promising Samples of Technology out of a Number of Analogs, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 245—249.

DOI: 10.17587/mau.16.245-249

References

1. **Larichev O. I.** Teoriya i metody prinyatiya reshenii (Theory and methods of decision-making), Moscow, Logos, 2002, 301 p. (in Russian).
2. **Andronov A. V.** Nauchnoe obosnovanie putei razvitiya operativno-takticheskikh samoletov voenno-transportnoi aviatsii (Scientific basis of tactical and operational plane development progress approaches in military transportation aircraft), *Proceedings of Russian conference for science and technology "XI scientific reading for aviation dedicated to remembrance of N. E. Zhukovsky"*, 2014, pp. 64—69 (in Russian).
3. **Burenok V. M., Lyapunov V. M., Mudrov V. I.** Teoriya i praktika planirovaniya i upravleniya razvitiem vooruzheniya (Theory and practice in planning and managing armament development progress),

Moscow, Vooruzhenie, politika, konversiya, 2005, pp. 206—224 (in Russian).

4. **Shibanov G. P.** Poryadok formirovaniya ekspertnykh grupp i provedeniya kolektivnoi ekspertizy (The process of expert commission set up and group examination), *Informatsionnye Tekhnologii*, 2003, no 12, pp. 19—22 (in Russian).

5. **Saati T. L.** Prinyatie reshenii. Metod analiza ierarkhii (Decision making. Analytic hierarchy process), Moscow, Radio i svyaz', 1989, 316 p. (in Russian).

6. **Tekhnicheskoe** opisanie i ekspluatatsiya sistem samoleta An-70 (Technical specification and maintenance of An-70 airplane systems), Kiev, published by ANTK im. O. K. Antonova, 1997, 423 p. (in Russian).

7. **Tekhnicheskoe** opisanie dvigatelya D-27 s vinto-ventilyatorom S-27. (Technical specification of D-27 engine with S-27 prop-fan, Zaporozhye), Zaporozh'e, published by ZMKB "Progress" im. A. G. Ivchenko, 83 p. (in Russian).

8. **Yakubovich N. V.** Vse samolety O. K. Antonova (All planes from O. K. Antonov), Moscow, AST "Astrel", 2001, 192 p. (in Russian).

Corresponding author.

Andronov Anatoly V., Master of Science, Chief Engineer, Government flight-test center name Chkalov V. P., Akhtubinsk, Russian Federation, e-mail: andronov.plk@mail.ru

УДК 004.272.34

В. Ю. Мусатов, канд. техн. наук, доц., vmusatov@mail.ru,

И. В. Киселев*, канд. физ.-мат. наук, науч. сотр., **А. С. Варезников**, аспирант,

А. А. Большаков, д-р техн. наук, проф., **В. В. Сысоев**, д-р техн. наук, проф., robsii@sstu.ru,
СГТУ, г. Саратов

* Институт микроструктурных технологий, Карлсруэ, Германия

Анализ возможностей применения в газоаналитических приборах вида "электронный нос" на основе однокристалльных чипов переходных электрических процессов в сенсорных сегментах при воздействии различных газов

Рассматривается возможность использования эффектов зарядки/разрядки газочувствительного оксида металла при приложении продольного электрического поля и их различий при воздействии различных газовых сред в целях селективного определения последних. Исследуется возможность применения формы распределения электрического потенциала вдоль оксидного слоя как "образа" газа и ее анализа методами распознавания образов на основе линейно-дискриминантного анализа и метода главных компонент.

Ключевые слова: "электронный нос", газовый сенсор, мультисенсорная микросистема, анализ газов, распознавание образов

Введение

В последнее время большое внимание уделяется развитию газоаналитических устройств, работающих согласно принципам биологической обонятельной системы. Такие устройства, часто называемые в литературе приборами вида "электронный нос", основываются на использовании мультисенсорного набора, который генерирует первичный векторный сигнал под воздействием газовой смеси, и системы распознавания образов на базе алгоритмов, обрабатывающих этот совокупный мультисенсорный сигнал [1, 2]. Так же, как и в случае биологического аналога [3], анализ газовой смеси проводится не путем разложения на составные части, как в традиционных спектрометрах, а распознаванием комплексного образа запаха, сформированного векторным мультисенсорным сигналом. Одним из наиболее часто используемых в этих приборах видов датчиков являются хеморезисторы на основе газочувствительных оксидов металла, у которых электрическое сопротивление изменяется под влиянием адсорбции газов [4].

С точки зрения массового производства наиболее дешевым вариантом реализации мультисенсорного набора является вариант, при котором линейка хеморезисторов формируется на одном чипе [5]. При этом в качестве хеморезистивного материала используется тонкая металлооксидная пленка, сегментированная металлическими электродами на сенсорные элементы [6].

Для измерения сопротивления каждого сенсорного сегмента мультисенсорного чипа к нему прикладывается электрическое поле (разность потенциа-

лов). Возникающие при этом переходные характеристики измерительного тока, как показывают наши ранее выполненные исследования [7], зависят от вида газовой смеси и концентраций входящих в нее компонентов. В данной работе сделана попытка анализа возможности использования этого эффекта для создания новых принципов газоаналитического прибора.

Особенности электрических свойств сенсорных сегментов однокристалльных мультисенсорных чипов

В качестве объекта исследования были изучены характеристики мультисенсорного чипа на основе тонкой пленки $\text{SnO}_2\text{:Pt}$ [4]. В экспериментах измерялись среднесегментные сопротивления чипов и электрическая зарядка/разрядка газочувствительной пленки в составе чипов в атмосфере лабораторного воздуха при рабочей температуре около 300 °С. Для примера на рис. 1 показаны кривые тока зарядки и разрядки сенсорных сегментов мультисенсорного чипа при разных температурах. Из них видно, что кривые разрядки имеют две характерные формы: а) близкую к экспоненциальной и б) содержащую "горб".

Наблюдаемая зарядка/разрядка газочувствительной оксидной пленки, по-видимому, связана с воздействием адсорбированных ионов, пришедших из газовой фазы, умножением собственных носителей и/или умножением центров адсорбции в пленке/электродах в процессе приложения электрического поля. При этом состав окружающей среды оказывает существенное влияние на наблюдаемые зарядовые явления.

Характерные признаки динамических электрических свойств сегментов мультисенсорного чипа

Для исследования возможности использования динамических электрических характеристик сенсорных сегментов мультисенсорного чипа для идентификации примесей газов в смеси с воздухом была составлена газосмесительная установка, схематически представленная на рис. 2. Установка состояла из источника лабораторного воздуха, нагнетаемого компрессором Omron NE-C28-RU, поток которого разделяется на два канала. Один из каналов служит для генерации и доставки тестового газа, второй — для разбавления тестового газа чистым лабораторным воздухом до требуемой концентрации.

При оценке концентрации тестового газа (пара) в смеси с воздухом предполагалось, что температура раствора, помещенного в термостат, находится в диапазоне 5...8 °С. Концентрацию в единицах ppm (particle per million) рассчитывали по следующей формуле:

$$C = \frac{P_{gas} F_{gas}}{P_{gas} F_{gas} + (P_{at} - P_{gas}) F_{gas} + P_{at} F_{air}} \times 1\,000\,000,$$

где P_{gas} — давление насыщенных паров анализатора; F_{gas} — скорость барботируемого потока воздуха, установленная с помощью контроллера FC1 (см³/мин); P_{at} — атмосферное давление; F_{air} — скорость потока воздуха, установленная с помощью контроллера FC2 (см³/мин).

Давление насыщенных паров (в мм рт. ст.) рассчитывали по формуле [8]:

$$P = 10^{\frac{A - \frac{B}{C + T}}{C}},$$

где A , B , C — параметры, характеризующие тестовые растворы; T — температура в градусах Цельсия. В таблице приведены параметры тестовых растворов, использованные при расчетах.

Мультисенсорный чип помещали в камеру газосмесительной установки (рис. 2), в которую подавался тестовый газ заданной концентрации в смеси с воздухом. Газочувствительный слой мультисенсорного чипа нагревали до рабочих температур (250...400 °С), затем между крайними электродами прикладывали разность потенциалов. После этого измеряли и записывали распределение потенциала на участке газочувствительного слоя между крайними электродами.

На рис. 3 приведены типичные результаты исследования кривой переходного потенциала относительно катода V (кривая 1), причем значение потенциала в нулевой момент (первая точка измерения после приложения напряжения) вычтено из всех значений потенциала.

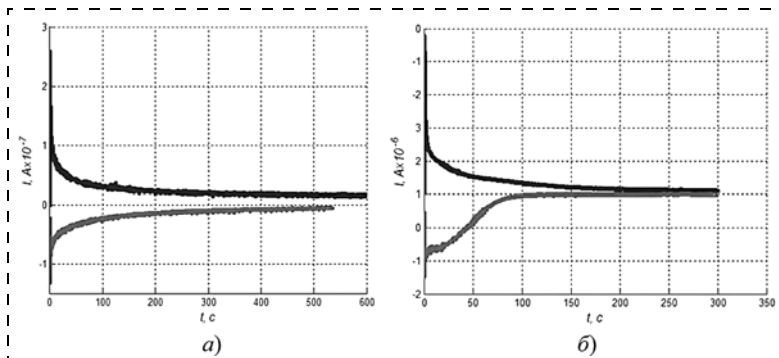


Рис. 1. Характерные кривые тока зарядки (верхняя кривая) и разрядки (нижняя кривая) в сенсорных сегментах мультисенсорного чипа:

a — рабочая температура чипа около 200 °С; b — рабочая температура чипа около 300 °С

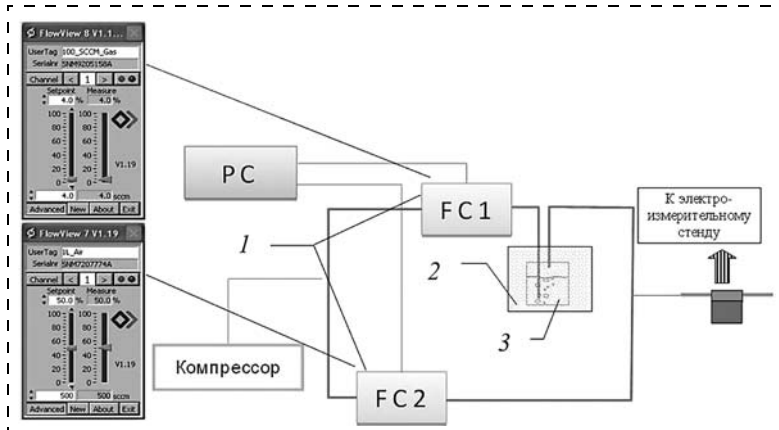


Рис. 2. Схема газосмесительной установки:

1 — контроллеры потока; 2 — термостат; 3 — барботируемый раствор анализатора

В первый момент времени, отстоящий от момента приложения напряжения менее чем на 0,01 с, распределение потенциала сохраняется линейным. Поэтому кривая, представленная на рис. 3, характеризует отклонение распределения от линейного. Предполагая, что вид переходной кривой зависит как от примеси газа в воздухе, окружающем чип, так и от его концентрации, из этих данных можно определить параметры, характеризующие влияние газовых компонентов. В качестве тестовых газов, т. е. примесей к воздуху, использовали пары ацетона,

Параметры, характеризующие тестовые растворы

Аналит	A	B	C	$T_{\min}, ^\circ\text{C}$	$T_{\max}, ^\circ\text{C}$
Ацетон	7,1327	1219,97	230,653	−64	70
	7,6313	1566,69	273,419	57	205
Изопропанол	8,00308	1505,52	211,6	10	90
	7,9584	1519,66	216,829	83	205
Этанол	8,20417	1642,89	230,3	−57	80
	7,68117	1332,04	199,2	77	243
Метанол	8,08097	1582,27	239,7	15	100
	7,9701	1521,23	234	65	214
Вода	8,07131	1730,63	233,426	1	100
	8,14019	1810,94	244,485	99	374

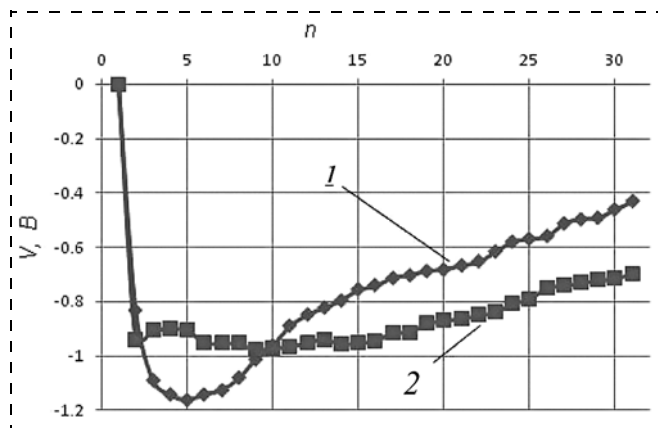


Рис. 3. Типичные кривые переходного потенциала в средней точке сенсорного сегмента слоя оксида металла после приложения к нему напряжения:

1 — в атмосфере лабораторного воздуха; 2 — в воздухе, содержащем примесь ацетона с высокой концентрацией. По абсциссе отложен номер точки измерения n

воды и этанола. Для учета влияния концентрации были сгенерированы паровоздушные смеси, содержащие вышеуказанные концентрации соответствующих веществ. Мультисенсорный чип экспонировался в газовой смеси определенной концентрации пять раз для получения статистически достоверной выборки.

Кривая переходного потенциала, записанного на разных сенсорных сегментах ($n = 1, \dots, 30$), была обработана как векторный 30-мерный сигнал, построенный на основе первых точек измеренного переходного потенциала. Для анализа различий этого векторного отклика в атмосфере различных газов применялся метод линейно-дискриминантного анализа (ЛДА) [9, 10]. Полная совокупность 30 первых точек переходного процесса избыточна для такого числа измерений. Поэтому использовались два метода редукции данных измерений: 1) с помощью метода главных компонент (МГК); используемое число МГК ограничивалось; 2) произвольная выборка данных. При этом все исходные значения потенциалов нормировались на медианное значение по всему набору.

На рис. 4 (см. вторую сторону обложки) приведены результаты распознавания примесей тестовых газов в воздухе с помощью ЛДА. Оси пространства ЛДА упорядочиваются по степени разделения классов в этих направлениях; на рис. 4 и последующих (см. вторую сторону обложки) отображение дано в координатной системе двух первых по этому показателю компонент ЛДА: LDA1 и LDA2. Эллипсы соответствуют уровню вероятности принадлежности к классу 0,90. Показатель "Среднее расстояние между классами" (СРК) характеризует различимость классов в модели и определяется как среднее квадратичное расстояние классов от начала системы координат ЛДА. Как видно из данных, при всех концентрациях тестовых газов их распознавание является вполне удовлетворительным. Характерно, что СРК возрастает с ростом концентрации, а затем вновь уменьшается. Эта закономерность не является

случайным следствием недостаточности набранной статистики измеренных концентраций тестовых газов, а отражает тот факт, что при очень высоких концентрациях динамическая кривая потенциала перестает иметь характерный вид и стремится к форме, определяемой резким начальным падением потенциала и последующим, по крайней мере, в использованной шкале времени, плоским участком — формой, предельной для всех тестовых паров при их большой концентрации. Отметим также, что вид ЛДА-моделей, представленных на рис. 4 (см. вторую сторону обложки), характеризуется большой отдаленностью эллипса, соответствующего одному из паров, от прочих, представляющих группу пересекающихся эллипсов. При этом при переходе от умеренных концентраций к высоким такая "выделенность" переходит от этанола к ацетону, т. е. меняется характер модели.

Следует заметить: несмотря на то, что на рис. 4 ряд тестовых газов выглядит трудноразличимыми, образуя компактную группу, изъятие максимально удаленного класса из модели ("пошаговое ЛДА-распознавание") позволяет получить устойчивое разделение и прочих классов, как можно видеть на рис. 5 (см. вторую сторону обложки).

Отметим, что нормирование значений потенциала на медиану существенно повышает разделение классов, соответствующих тестовым газам. Так, в ситуации, показанной на рис. 4 (см. вторую сторону обложки), разделение классов, соответствующих различным газам, без нормирования значительно меньше, чем после нормирования на медиану (рис. 4, а): значение СРК уменьшается от 8,1 ед. до 3,0 ед. Аналогично для двух других концентраций тестового газа в смеси значение среднего расстояния между классами падает до 5,2 и 4,3 соответственно.

Фактором, ограничивающим распознавание ЛДА-кластеров, соответствующих тестовым газам, являются существенные вариации абсолютных значений кривых распределения потенциала при воздействии газов. При этом вариация абсолютных значений потенциала предположительно связана с эффектом запоминания перераспределенного заряда между экспозициями мультисенсорного чипа в различных газовых средах.

Во всех рассмотренных выше ЛДА-моделях для ограничения размерности исходного пространства данных использовался метод МГК с ограничением числа использованных главных компонент до 12. Возможно, такая редукция размерности не является оптимальной. В некоторых случаях специальный подбор временных точек измерений, использованных для построения векторного сигнала, дает лучший результат разделения кластеров, соответствующих тестовым газам, вне зависимости от концентрации газа. На рис. 6, а (см. вторую сторону обложки), приведены результаты ЛДА-моделирования для различения тестовых газов совокупно для всех трех концентраций, полученные после использования МГК с ограничением размерности до 12.

Для сравнения на рис. 6, б (см. вторую сторону обложки) представлена такая же ЛДА-модель, но построенная с использованием выбранного набора сегментов: 1—5, 7, 9, 12, 16, 20, 24, 30 для формирования образа (векторного сигнала). Видно, что использование такого набора точек обеспечивает лучшее разделение кластеров, соответствующих тестовым газам, чем при применении МГК с аналогичным числом компонентов (12). Таким образом, более тщательное выделение признаков образа распознавания тестовых газов может позволить обеспечить их лучшее распознавание.

Причиной резкого ухудшения распознавания газов при использовании в ЛДА-модели различных концентраций, отличающихся по порядку величины, заключается в том, что признаки, позволяющие разделить газы, присутствующие в меньших концентрациях, радикально отличаются от признаков, позволяющих разделить газы, присутствующие в смеси в высоких концентрациях.

Отметим далее, что полученный результат довольно слабого разделения газов, присутствующих в различных концентрациях (рис. 6, а), не означает, что вид кривой распределения потенциала, т. е. образа распознавания, отражает в большей мере различие в концентрациях газов, оставаясь нечувствительным к их виду. Подтверждением невозможности такого вывода является попытка разделить с использованием ЛДА концентрации газов вне зависимости от их вида (рис. 7, см. вторую сторону обложки). Такое разделение оказывается невозможным. Таким образом, определяющим в формировании отличий переходной характеристики кривой распределения потенциала вдоль мультисенсорного чипа является вид газа, а не его концентрация, несмотря на то что зависимость от последней очевидна.

Заключение

Таким образом, эффекты зарядки/разрядки газо-чувствительного оксида металла при приложении продольного электрического поля и их различия в

разных газовых средах позволяют реализовать селективное определение последних. С этой целью возможны применение формы распределения электрического потенциала вдоль оксидного слоя как "образа" газа и ее анализ известными методами искусственного интеллекта, например методом линейно-дискриминантного анализа и метода главных компонент. Полученные результаты демонстрируют возможность осуществления данного способа селективного определения газов и построения нового газоаналитического прибора на этом принципе.

Авторы благодарят за сотрудничество сотрудников групп д-ра М. Зоммера и д-ра М. Брунса (Технологический Институт Карлсруэ, Германия), а также за частичную поддержку работы в рамках госзадания Минобрнауки РФ, договор № 8.236.2014/К.

Список литературы

1. Gardner J. W., Bartlett P. N. A brief history of electronic noses // *Sensors & Actuators B*. 1994. V. 18. N. 1—3. P. 211—221.
2. Мусатов В. Ю., Сысоев В. В. Газоаналитические приборы вида "электронный нос": примеры применения для различных задач // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2011. № 9. С. 47—52.
3. Shepherd G. M. Smell images and the flavour system in the human brain // *Nature*. 2006. V. 444. P. 316—321.
4. Мясников И. А., Сухарев В. Я., Куприянов Л. Ю., Завьялов С. А. Полупроводниковые сенсоры в физико-химических исследованиях. М.: Наука, 1991. 327 с.
5. Sysoev V. V., Kiselev I., Frietsch M., Goschnick J. The temperature gradient effect on gas discrimination power of metal-oxide thin-film sensor microarray // *Sensors*. 2004. V. 4. C. 37—46.
6. Сысоев В. В., Кучеренко Н. И., Кисин В. В. Текстурированные пленки оксида олова для микросистем распознавания газов // Письма в Журнал технической физики. 2004. Т. 30. Вып. 18. С. 14—20.
7. Kiselev I., Sommer M. Evolution of potential distributions during the charging of nano-structured metal oxide films in air as response to sudden voltage application // *Thin Solid Films*. 2010. V. 518. P. 4533—4536.
8. URL: http://ddbonline.ddbst.de/AntoineCalculation/Antoine_CalculationCGI.exe.
9. Большаков А. А., Каримов Р. Н. Методы обработки многомерных данных и временных рядов. М.: Горячая линия — Телеком, 2007. 522 с.
10. Большаков А. А., Каримов Р. Н. Методы сжатия информации. Саратов: Изд. Сарат. политехн. ин-т, 1991. 88 с.

Analysis of Possible Applications in the Gas Analytical Instruments of the "Electronic Nose" Based on the Single-Chip Transient Electrical Processes in the Sensory Segments under Effect of Different Gases

V. Yu. Musatov¹, vmusatov@mail.ru, I. V. Kiselev², kiselevland@gmail.com, A. S. Varegnikov¹, A. A. Bolshakov¹, V. V. Sysoev¹, robsii@sstu.ru,

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russian Federation,

²Karlsruhe Institute of Technology, Karlsruhe, 76021, Germany

Received on December 22, 2014

The authors investigate feasibility of application of the charging/discharging effects observed in the gas-sensitive metal oxides under the effect of a longitudinal electric field, and their variations at different atmospheres for a selective analyze of the gas of interest. The authors employ a concept of the gas-analytical devices, which operate on the principles of the biological olfactory system. Such devices, often referred to in literature as "electronic noses", are based on the multi-sensor array, which generates a primary vector signal under the influence of the gas mixture, and a pattern recognition technique based on the algorithms, which

process the cumulative multi-sensor array signal. Like in case with a biological analogy, the analysis of the gas mixture is carried out not due to its decomposition into components, as it is done in the traditional spectrometers, but due to an odor "image" recognition complex. For measuring of the resistance of each segment of the multi-sensor array chip, an electric field (potential difference) is applied. The transient response of the measuring current, as it was shown in our previous studies, depends on the kind of a gas and the concentration of its constituent components. Here we employ a chemiresistor array based on the SnO_2/Pt thin film segmented by multiple electrodes into a chip. The authors describe the charging processes in such structures experimentally observed at the operating temperatures of about 300 °C. The longitudinal electrical field applied along the metal oxide film is distorted. This electric potential distortion depends on the gas and may serve as an "image" (or a vector signal) of the gas. We process this "image" with the use of a linear discriminant analysis. The results obtained demonstrate feasibility of this method for a selective identification of the gas of interest and development of new gas-detection instruments based on this principle.

Keywords: "electronic nose", gas sensor, multisensor microsystem, gas analysis, pattern recognition

Acknowledgements: The authors are grateful for the cooperation of groups of employees Dr. M. Sommer and Dr. M. Bruns (Karlsruhe Institute of Technology, Germany), as well as partial support for the work of the Russian Ministry of Education (contract no. 8.236.2014 / K).

For citation:

Musatov V. Yu., Kiselev I. V., Vargenikov A. S., Bolshakov A. A., Sysoev V. V. Analysis of Possible Applications in the Gas Analytical Instruments of the "Electronic Nose" Based on the Single-Chip Transient Electrical Processes in the Sensory Segments under Effect of Different Gases, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 250–254.

DOI: 10.17587/mau.16.250-254

References

1. **Gardner J. W., Bartlett P. N.** A brief history of electronic noses, *Sensors & Actuators B*, 1994, vol. 18, no. 1–3, pp. 211–221.
2. **Musatov V. Yu., Sysoev V. V.** Gazoanaliticheskie pribory vida "elektronnyy nos": primeny ppimeneniya dlya razlichnykh zadach (Gas analysis instruments "electronic nose": application examples for different tasks), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2011, no. 9, pp. 47–52 (in Russian).
3. **Shepherd G. M.** Smell images and the flavour system in the human brain, *Nature*, 2006, vol. 444, pp. 316–321.
4. **Myasnikov I. A., Sukharev V. Ya., Kupriyanov L. Yu., Zav'yalov S. A.** Poluprovodnikovye senzory v fiziko-khimicheskikh issle-

dovaniyakh (Semiconductor sensors in the physico-chemical studies), Moscow, Nauka, 1991, 327 p. (in Russian).

5. **Sysoev V. V., Kiselev I., Frietsch M., Goschnick J.** The temperature gradient effect on gas discrimination power of metal-oxide thin-film sensor microarray, *Sensors*, 2004, vol. 4, pp. 37–46.

6. **Sysoev V. V., Kucherenko N. I., Kisin V. V.** Teksturirovannyye plenki oksida olova dlya mikrosistem raspoznavaniya gazov (Textured film tin oxide gas detection for microsystems), *Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*, 2004, vol. 30, iss. 18, pp. 14–20 (in Russian).

7. **Kiselev I., Sommer M.** Evolution of potential distributions during the charging of nano-structured metal oxide films in air as response to sudden voltage application, *Thin Solid Films*, 2010, vol. 518., pp. 4533–4536.

8. **URL:** <http://ddbonline.ddbst.de/AntoineCalculation/AntoineCalculationCGI.exe>.

9. **Bol'shakov A. A., Karimov R. N.** Metody obrabotki mnogomernykh dannykh i vremennykh ryadov (Multidimensional data and time series processing methods), Moscow, Goryachaya liniya — Telekom, 2007, 522 p. (in Russian).

10. **Bol'shakov A. A., Karimov R. N.** Metody szhatiya informatsii (Data compression methods), Saratov, published by Saratov Polytechnic Institute, 1991. 88s. (in Russian).

Corresponding author:

V. Yu. Musatov, Associate Professor, Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, 410054, Russian Federation, e-mail: vmusatov@mail.ru

УДК 681.511.46

О. С. Колосов, д-р. техн. наук, проф., KolosovOS@mpei.ru, **Д. Н. Анисимов**, канд. техн. наук, доц., **Д. В. Хрипков**, аспирант, Национальный исследовательский университет "МЭИ"

Исследование многоуровневых нечетких диагностических систем с использованием стохастической модели¹

Проводится анализ эффективности работы диагностических систем малых размерностей (2...3 неисправности) при малом числе признаков (1...3). Системы базируются на нечетком логическом выводе. Исследования проводятся с применением стохастической модели объекта. Показывается, что диагностические системы полной размерности во многих случаях не обеспечивают однозначное и качественное решение задачи диагностики.

Ключевые слова: стохастическая модель, нечеткая логика, многоуровневая система

Введение

Диагностика постепенно развивающихся отклонений от штатного режима при функционировании сложных динамических объектов и систем является хорошо известной проблемой. К сложным динамическим объектам могут быть отнесены объ-

екты различной природы (в том числе технические, химические, биологические и т. д.). Сложные динамические объекты характеризуются ограниченным числом контролируемых параметров, высокой размерностью, разветвленной структурой, нелинейными характеристиками, отсутствием адекватного математического описания. Существует целый ряд принципов построения систем диагностики для таких объектов [1, 2]. Все они обладают определен-

¹ Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00082а).

ными достоинствами и недостатками применительно к конкретному диагностируемому объекту и условиям его функционирования. Одним из эффективных направлений построения диагностических систем является использование "мягких вычислений" [3, 4] и, в частности, применение нечеткого логического вывода. В работе [5] на примере построения системы диагностики патологий сетчатки глаза с использованием нечеткого логического вывода показывается целесообразность построения многоуровневых диагностических систем. Особенностью сетчатки глаза как диагностируемого динамического объекта является большое число возможных патологий (для технического объекта — неисправностей), недостаточное число контролируемых признаков и большие области пересечений для разных патологий по самим признакам. Именно эти условия делают диагностическую систему, в которой используются одновременно все признаки, менее эффективной по сравнению с многоуровневой иерархической системой [6]. На нижнем уровне таких диагностических систем формируется целый ряд подсистем малой размерности для диагностики конкретных патологий (неисправностей). Вместе с тем, в работе [5] не раскрывается механизм формирования самих подсистем нижнего уровня, который призван повысить эффективность работы всей многоуровневой диагностической системы.

Постановка задачи

В данной работе проводится анализ эффективности работы диагностических систем малых размерностей (2...3 неисправности) при малом числе признаков (1...3). Системы базируются на нечетком логическом выводе. Исследования проводятся с применением стохастической модели объекта, что подразумевает генерирование случайным образом значений признаков с заданными математическими ожиданиями (МО) и значениями среднеквадратического отклонения (СКО) для соответствующих видов неисправностей (патологий). При этом исследуются различные варианты формируемых функций принадлежности (ФП), виды распределений генерируемых признаков, их МО и СКО. Использование стохастической модели объекта весьма полезно при исследованиях, так как позволяет оценивать эффективность работы системы диагностики при малых объемах обучающих выборок. Понятие "эффективность" в данной работе связывается с превалирующим значением степени соответствия правильного диагноза неисправности по сравнению со степенями соответствия неверных диагнозов.

Диагностика двух видов неисправностей по одному признаку

Рассмотрим вопросы, возникающие при построении простейшей диагностической системы с двумя видами неисправностей N_1 и N_2 и одним регистрируемым признаком A . На рис. 1 показаны воз-

можные схемы взаимного распределения областей значений регистрируемого признака P_A на числовой оси для каждой из неисправностей N_1 и N_2 . Отметим, что на этом и последующих рисунках показаны только области равномерно распределенных значений параметров для соответствующих неисправностей, а дуги над ними даны для наглядности, и никакой количественной меры они не несут.

Для диагностики в случае рис. 1, *a* достаточно разделить область признака P_A на две части. Если при диагностике очередного объекта признак P_A лежит в левой части, то это — неисправность N_1 , иначе — N_2 .

Для случая рис. 1, *б* диагностика происходит аналогично случаю рис. 1, *a*. Однако в малой области пересечения есть вероятность ошибочного диагноза.

В случае рис. 1, *в* вероятность ошибочного диагноза становится большой и простейший подход к диагностированию становится затруднительным.

В случае рис. 1, *г* диагностика по числовым значениям P_A данного признака A невозможна, поскольку любое значение признака одинаково подходит для обеих неисправностей.

В случае рис. 1, *д* есть возможность исключить неисправность N_2 , если области значений признака P_1 для неисправности N_1 оказываются вне диапазона значений признака P_1 для неисправности N_2 . Однако в общей зоне значений признаков этот вариант совпадает со случаями рис. 1, *в* и *г*.

Таким образом, для эффективного диагностирования в случаях рис. 1, *в*, *г* и *д* необходимо иметь больше информации, а именно дополнительные признаки.

При увеличении числа неисправностей N число возможных вариантов взаимных пересечений множеств значений P_A единственного признака A для этих неисправностей также растет. Так, при трех видах неисправностей, помимо описанных ранее случаев, добавляется множество значений признака для третьей неисправности, которое может также пересекать другие два или одно множество значений или не пересекать их вовсе. В ряде случаев три неисправности можно разбить на две группы, состоящие из одной и двух неисправностей, и рассматривать эти группы как систему 1×2 (1 признак и 2 неисправности) с последующим отдельным анализом группы из двух неисправностей согласно системе 1×2 . В системе растет число вариантов,

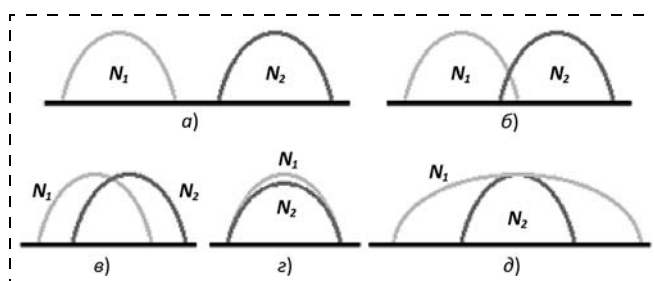


Рис. 1. Варианты взаимного распределения областей значений регистрируемого признака P_A для двух неисправностей N_1 и N_2

когда для повышения эффективности диагностики требуется больше информации в виде новых признаков P .

Для диагностики двух неисправностей дополнительные признаки требуются только в том случае, если имеющийся признак "не работает", как в случаях рис. 1, в, г и д (кроме варианта, когда можно исключить неисправность N_2). При добавлении второго признака необходимо исследовать оба их одновременно.

Диагностика трех видов неисправностей по двум признакам

Для подобной системы можно предложить три возможных варианта распределений множеств значений признаков по неисправностям.

Первый, тривиальный вариант, когда множества значений признаков соответствующих неисправностей взаимно не пересекаются, рассматривать не будем.

Рассмотрим второй вариант, показанный на рис. 2, когда по каждому признаку возможно с очевидностью диагностировать одну неисправность.

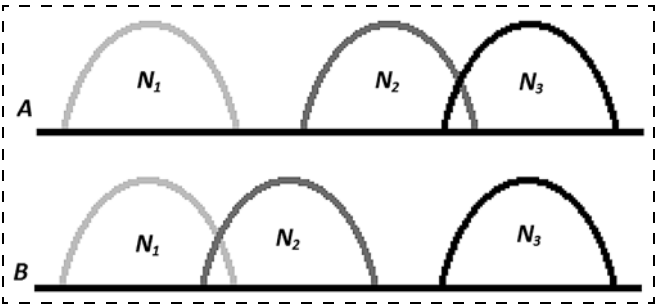


Рис. 2. Вариант распределения множества значений признаков трех неисправностей по двум признакам P_A и P_B

Соответствие признаков и групп неисправностей

P_A	P_B	Неисправность
N_1	$\bar{N}_3$	N_1
$\bar{N}_1$	$\bar{N}_3$	N_2
$\bar{N}_1$	N_3	N_3

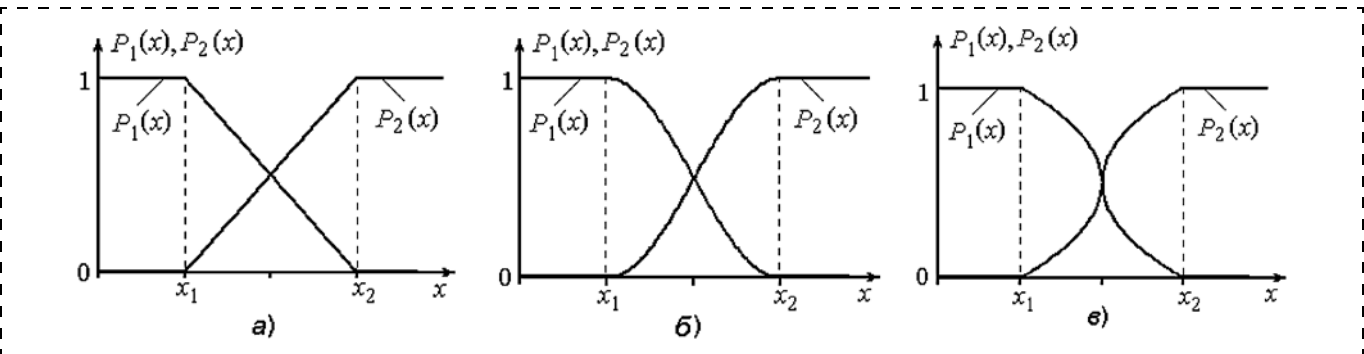


Рис. 3. Виды функций принадлежности (а — линейный, б — синусоидальный, в — корневой)

В данном случае неисправность N_1 выделяется своим очевидным множеством значений по признаку P_A . Однако другие две пересекающиеся неисправности N_2 и N_3 приводят к одному из вариантов, описанных в системе 1×2 . Поскольку рассматриваемая система имеет два признака, то достаточно рассмотреть эти две неисправности как одну группу "не- N_1 " ($\bar{N}_1$), а неисправность N_1 — как группу неисправностей N_1 . Аналогично разделяются неисправности и по признаку P_B на "не- N_3 " ($\bar{N}_3$) и N_3 . Далее анализируются значения признаков и определяется, под какие неисправности они попадают. Диагностика неисправности согласуется с табл. 1.

В более сложном, третьем случае, когда группы неисправностей разделяются одинаково для обоих признаков, однозначно можно определить или отвергнуть лишь одну неисправность. Фактически оба признака дублируют друг друга.

Под данный случай подпадают такие неисправности, множество значений признаков которых не позволяет однозначно определить ни одну из неисправностей объекта. Для того чтобы диагностировать неисправность, необходимо оценить степень ее принадлежности именно к этому виду неисправности объекта. Решить данную задачу возможно, используя аппарат нечеткой логики.

Для примера рассмотрим системы 2×2 и 2×3 . Для составления базы неисправностей (обучающей выборки) и для проверки работы метода используется стохастическая модель объекта. В данном случае была разработана процедура генерации случайных "неисправностей". "Неисправности" создаются за счет случайного отклонения от условного МО и в пределах указанного СКО, при этом используется равномерный закон распределения. Для неисправностей N_1 и N_2 в системе 2×2 выбираются две пары МО признаков (P_{1A}, P_{1B} и P_{2A}, P_{2B} соответственно). Далее подключается процедура оценивания полученных значений параметров методом нечеткой логики. При этом рассматриваются три варианта формирования видов термов функций принадлежности (рис. 3) — линейный, синусоидальный и корневой.

Линейные термы:

$$\begin{cases} P_1(x) = 1, x \leq x_1; \\ P_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, x_1 < x < x_2; \\ P_1(x) = 0, x \geq x_2; \\ P_2(x) = 0, x \leq x_1; \\ P_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, x_1 < x < x_2; \\ P_2(x) = 1, x \geq x_2. \end{cases} \quad (1)$$

Синусоидальные термы:

$$\begin{cases} P_1(x) = 1, x \leq x_1; \\ P_1(x) = 0,5 + \frac{\cos\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\pi\right)}{2}, x_1 < x < x_2; \\ P_1(x) = 0, x \geq x_2; \\ P_2(x) = 0, x \leq x_1; \\ P_2(x) = 0,5 - \frac{\cos\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\pi\right)}{2}, x_1 < x < x_2; \\ P_2(x) = 1, x \geq x_2. \end{cases} \quad (2)$$

Корневые термы:

$$\begin{cases} P_1(x) = 1, x \leq x_1; \\ P_1(x) = 0,5 + \frac{\sqrt{\frac{2x - x_2 - x_1}{x_2 - x_1}}}{2}, x_1 < x \leq \frac{x_2 + x_1}{2}; \\ P_1(x) = 0,5 - \frac{\sqrt{\frac{2x - x_2 - x_1}{x_2 - x_1}}}{2}, \frac{x_2 + x_1}{2} < x < x_2; \\ P_1(x) = 0, x \geq x_2; \\ P_2(x) = 0, x \leq x_1; \\ P_2(x) = 0,5 - \frac{\sqrt{\frac{2x - x_2 - x_1}{x_2 - x_1}}}{2}, x_1 < x \leq \frac{x_2 + x_1}{2}; \\ P_2(x) = 0,5 + \frac{\sqrt{\frac{2x - x_2 - x_1}{x_2 - x_1}}}{2}, \frac{x_2 + x_1}{2} < x < x_2; \\ P_2(x) = 1, x \geq x_2. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь x_1 и x_2 — МО параметра A или B для неисправностей N_1 и N_2 соответственно, x — генерируемые значения параметров A или B .

Для определения того факта, к какой неисправности должен относиться данный параметр, необходимо сформировать нечеткое соответствие между множествами параметров и неисправностей [7–9]. В данном случае это соответствие будет иметь вид, представленный в табл. 2.

Для определения степени принадлежности неисправности используется максиминная композиция:

$$P(N_1) = \max \begin{bmatrix} \min[P_1(A), 1] \\ \min[P_2(A), 0] \\ \min[P_1(B), 1] \\ \min[P_2(B), 0] \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$$P(N_2) = \max \begin{bmatrix} \min[P_1(A), 0] \\ \min[P_2(A), 1] \\ \min[P_1(B), 0] \\ \min[P_2(B), 1] \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Так как функции принадлежности лежат в диапазоне $[0; 1]$, то $\min[P, 0] = 0$, $\min[P, 1] = P$, и соотношения для определения степеней принадлежности (4) и (5) в данном случае принимают следующий вид:

$$P(N_1) = \max[P_1(A), P_1(B)]; \quad (6)$$

$$P(N_1) = \max[P_2(A), P_2(B)]. \quad (7)$$

Для системы 2×3 алгоритм отличается только наличием признака C , для которого выполняются те же самые вычисления. Но, помимо системы диагностики $A-B-C$, где рассматриваются все признаки в совокупности, одновременно рассмотрены системы из двух параметров, а именно $A-B$, $B-C$, $A-C$. Затем эти системы были использованы для второго уровня диагностики в двухуровневой системе $AB-BC-AC$, где рассчитывалось среднее значение степеней принадлежности по всем системам первого уровня. Во всех вариантах выбирается неисправность с максимальным значением степени принадлежности.

Для сравнения эффективности этих систем и видов ФП были исследованы 600 неисправностей. Результаты представлены в табл. 3.

Как видно из табл. 3, эффективность двухуровневой системы $AB-BC-AC$ зависит от вида ФП, что

Таблица 2

Нечеткое соответствие между множествами параметров и неисправностей

Признак	N_1	N_2
P_{1A}	1	0
P_{2A}	0	1
P_{1B}	1	0
P_{2B}	0	1

Таблица 3

Сравнение числа ошибочных диагностик, полученных разными системами и разными видами ФП

Системы параметров	Линейный вид ФП	Синусоидальный вид ФП	Корневой вид ФП
$A-B$	26	26	26
$B-C$	30	31	30
$A-C$	24	25 + 1 неопределенный	24 + 1 неопределенный
$A-B-C$	12	12	12
$AB-BC-AC$	12	17	18

не противоречит известным положениям [10—14] о предпочтительности использования линейных форм ФП. Отметим так же, что линейная форма ФП не выдала неопределенных диагностик, т. е. не было ситуации, в которой две неисправности получили одинаковые значения степени принадлежности.

Вместе с тем, в реальных условиях ограниченность обучающей выборки не позволяет точно определить значение МО. В связи с этим целесообразно границы изменения ФП определять максимальными и минимальными значениями из множества значений признака неисправности:

$$P_1(x) = \frac{x_{\max} - x}{x_{\max} - x_{\min}}; \tag{8}$$

$$P_2(x) = \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \tag{9}$$

где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ — максимальное и минимальное значения параметра A или B .

В качестве эксперимента были сгенерированы 600 "объектов" с СКО признаков, равным 75 % относительно МО соседних признаков. В результате эксперимента число ошибочных результатов диагностирования не превысило 5 %. Данная погрешность связана с недостатком данных, большим пересечением множеств признаков неисправностей и равномерным законом распределения параметров признаков неисправностей внутри этих множеств.

Диагностика трех видов неисправностей по трем признакам

Рассмотрим систему 3×3 , показанную на рис. 4. В данном случае таблица соответствия "неисправность — признак" может составляться для признаков A и C аналогично варианту, рассмотренному выше на рис. 2. Однако очевидно, что для признака B целесообразно увеличить число термов до трех. ФП в этом случае будет оцениваться системой

$$\left\{ \begin{aligned} P_1(x) &= \begin{cases} \frac{x_{\max} - 2x}{x_{\max} - x_{\min}}, & x < \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}; \\ 0, & x \geq \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}; \end{cases} \\ P_2(x) &= \begin{cases} \frac{x_{\max} + 2x}{x_{\max} - x_{\min}}, & x < \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}; \\ 1 - \frac{2x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, & x \geq \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}; \end{cases} \\ P_3(x) &= \begin{cases} 0, & x < \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}; \\ \frac{2x - x_{\max}}{x_{\max} - x_{\min}}, & x \geq \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

и будет иметь вид, показанный на рис. 5. Для данной системы таблица соответствия будет иметь вид, представленный в табл. 4.

Далее все вычисления аналогичны вычислениям для системы 3×3 . Соответственно, при росте числа неисправностей есть смысл повышать число термов у некоторых признаков. При этом желательно, чтобы каждому терму соответствовала хотя бы одна неисправность.

Рассмотренные примеры показывают возможность создания одноуровневой диагностической системы, которая позволяет удовлетворительно диагностировать одновременно все неисправности объекта с одновременным использованием всех имеющихся признаков.

Рассмотрим далее более сложные случаи, когда одноуровневые системы диагностики оказываются менее эффективными по сравнению с двухуровневыми системами.

Одним из распространенных и характерных примеров является случай, когда по одному или более признакам множество значений признаков одной неисправности перекрывает все остальные. На первый взгляд подобные признаки являются

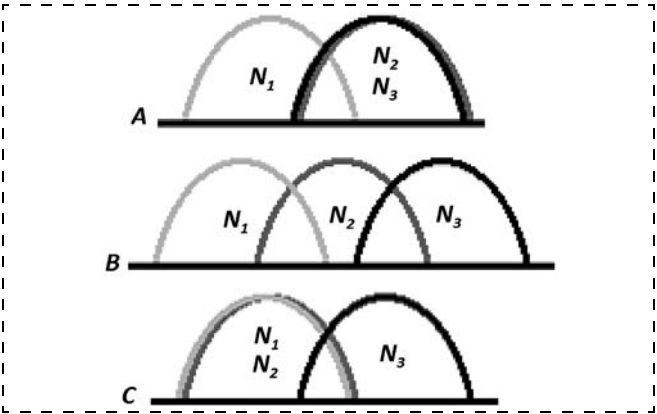


Рис. 4. Распределение множеств значений трех признаков для трех неисправностей

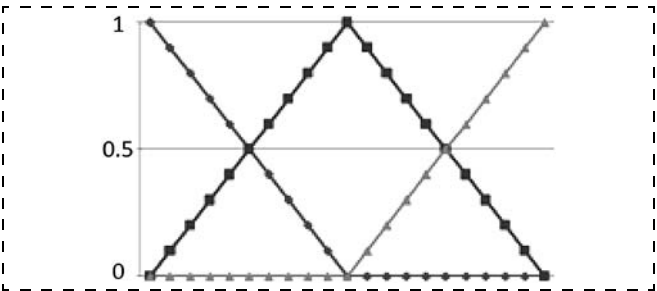


Рис. 5. Вид ФП с тремя термами

Таблица 4
Таблица соответствия системы 3×3

Признак	N_1	N_2	N_3
P_{1A}	1	1	0
P_{2A}	0	0	1
P_{1B}	1	0	0
P_{2B}	0	1	0
P_{3B}	0	0	1
P_{1C}	1	0	0
P_{2C}	0	1	1

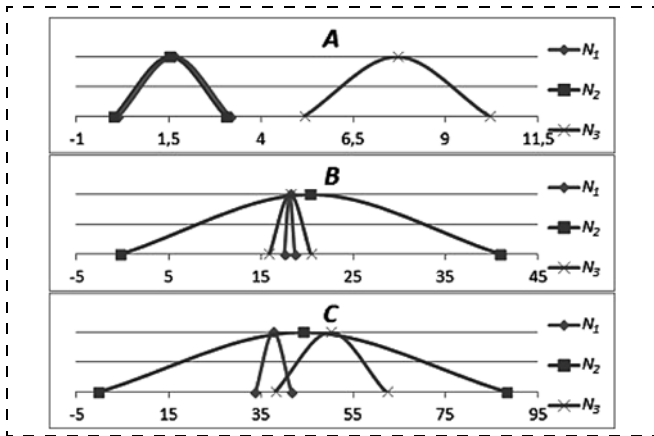


Рис. 6. Области множеств значений признаков неисправностей N_1 , N_2 , N_3 по параметрам A , B , C

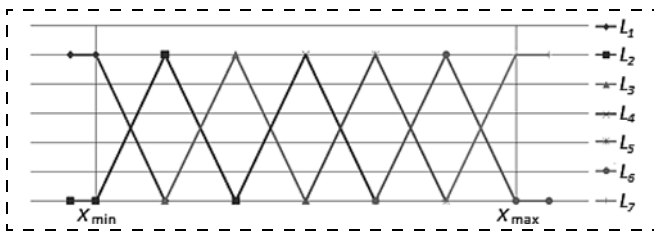


Рис. 7. Вид функции принадлежности: L_1 — L_7 — термы 1—7, $x_{\min}$, $x_{\max}$ — минимальное и максимальное значения параметра соответственно

малоинформативными. Однако это далеко не так. На рис. 6 представлен пример распределения множеств значений признаков трех неисправностей. В реализации такой системы была использована программа, описанная ранее, и данные реальных объектов. При проведении исследований были сгенерированы 600 объектов в системе 3×3 согласно распределениям множеств значений признаков трех неисправностей, показанным на рис. 6.

Для повышения качества диагностирования объекта в рассматриваемом варианте целесообразно увеличивать число термов ФП в целях "усиления" значимости областей значений признаков неисправностей, которые оказываются перекрытыми одной общей неисправностью (признаки B и C на рис. 6).

Для данного случая предлагается функция принадлежности (рис. 7), которая содержит ряд одинаковых треугольных термов, охватывающих интервалы одинаковой длины от минимального значения данного параметра до максимального. Ширина одного терма определяется минимальной зоной, которую может занимать одно из множеств значений определенной неисправности по данному параметру. Такое представление ФП удобно при программировании. В данном числовом примере таких термов получилось семь.

Далее была составлена таблица соответствия из учета, какие термы пересекают распределение параметра данной неисправности (табл. 5).

Далее при генерации случайного состояния объекта вычисляется вектор принадлежности и пере-

множается с таблицей соответствия соответствующего параметра, в результате чего получается вектор соответствия "параметр—неисправность", определяющий результаты работы систем нижнего уровня. При этом не обязательно, чтобы системы нижнего уровня работали только по одному параметру. Переход в диагностировании на более высокий уровень (A — B — C) выполняется за счет вычисления средних значений по всем полученным на нижнем уровне соответствиям "параметр—неисправность" относительно каждой неисправности. При этом неисправность, получившая максимальное значение, признается истинной (в случае, если таких неисправностей несколько, признается возможность наличия обеих неисправностей, но для уточнения результата необходима дополнительная информация).

В результате такого алгоритма при генерации 600 случайных состояний все неисправности были выявлены, однако 216 выявлены неявно, т. е. помимо нее выявлена еще одна неисправность. Это обусловлено тем, что *неисправность 3* во всех трех параметрах полностью перекрывается *неисправностью 1*, поэтому если истинная неисправность — *неисправность 1*, то определяется возможность *неисправности 3*. Однако если по какому-то параметру состояние не подпадает под *неисправность 1* или *2*, то однозначно признается *неисправность 3*. *Неисправность 2* имеет ярко выраженное отличие от *неисправностей 1* и *3* в параметре A , поэтому также достоверно может быть выявлена по признаку A .

В табл. 6 приведены результаты диагностики 600 объектов четырьмя системами: три системы одноуровневые (A , B и C) и одна система двухуров-

Таблица 5

Таблицы соответствия неисправностей, параметров и функции принадлежности

Параметр	Неисправность	Термы						
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
A	N_1	1	1	1	0	0	0	0
	N_2	0	0	0	1	1	1	1
	N_3	1	1	1	0	0	0	0
B	N_1	1	1	1	1	1	1	1
	N_2	0	0	1	1	0	0	0
	N_3	0	0	1	1	0	0	0
C	N_1	1	1	1	1	1	1	1
	N_2	0	0	1	1	0	0	0
	N_3	0	0	1	1	0	0	0

Таблица 6

Таблица результатов исследования

Система	Верно	Однозначно верно	Неверно	Однозначно неверно	Спорно
A	600	203	397	0	397
B	600	203	764	0	299
C	600	186	828	0	459
A - B - C	600	384	216	0	216

невая ($A-B-C$). Все системы распознали истинную неисправность в каждом объекте (столбец "Верно"), однако в некоторых объектах также были диагностированы и неверные неисправности (столбец "Неверно"). По результатам диагностирования с выявлением только верной неисправности (столбец "Однозначно верно") видно, что двухуровневая система является более эффективной, в отличие от одноуровневых систем. В некоторых случаях на один объект приходилось, помимо верного выявления диагноза, два неверных, в связи с этим число неверных диагнозов (столбец "Неверно") может превышать число объектов, и по этим результатам также видно, что двухуровневая система является более эффективной. Случаев, когда не была выяв-

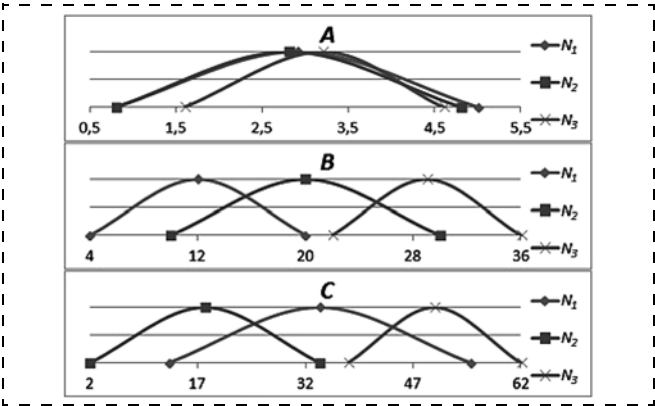


Рис. 8. Распределение множеств значений признаков неисправностей N_1, N_2, N_3 по параметрам A, B, C

Таблицы соответствия неисправностей, параметров и функции принадлежности

Параметр	Неисправность	Термы						
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
A	N_1	1	1	1	1	1	1	1
	N_2	1	1	1	1	1	1	1
	N_3	0	1	1	1	1	1	0
B	N_1	1	1	1	1	0	0	0
	N_2	0	1	1	1	1	1	0
	N_3	0	0	0	0	1	1	1
C	N_1	0	1	1	1	1	1	0
	N_2	1	1	1	1	0	0	0
	N_3	0	0	0	0	1	1	1

Таблица 8

Таблица результатов исследования

Система	Верно	Однозначно верно	Неверно	Однозначно неверно	Спорно
A	600	0	1172	0	600
B	583	137	463	17	446
C	591	183	417	9	408
$A-B$	584	127	473	16	457
$B-C$	600	429	171	0	171
$A-C$	595	169	431	5	326
$A-B-C$	600	416	184	0	184

лена верная неисправность (столбец "Однозначно неверно"), не было. Оценка результатов, когда были выявлены как верные, так и неверные неисправности (столбец "Спорно"), лишь подтверждает вышеописанные результаты.

Другим характерным примером является случай системы 3×3 , когда один параметр является неинформативным (параметр P_A , см. рис. 8, табл. 7, 8).

В данном эксперименте объекты были исследованы одноуровневыми системами A, B, C , а также двухуровневыми системами $A-B, B-C, A-C$ и $A-B-C$. Как видно из табл. 8, наилучшее распознавание неисправностей осуществили системы $C, B-C, A-B-C$ (столбец "Верно"), однако больше всего однозначно верные результаты (без иных вариантов неисправностей) выдавали системы $B-C$ и $A-B-C$. Система A не выявила ни одного однозначного результата, поскольку параметры всех трех неисправностей почти одинаково распределены на данном признаке. Этим же объясняется и тот факт, что система $A-B-C$ показала несколько хуже результат, чем система $B-C$ из-за наличия малоинформативного признака A .

Результат работы двухуровневой системы $A-B-C$ показывает, что для формирования двухуровневой диагностической системы следует использовать информативные признаки для диагностики данного вида неисправности. При этом число признаков в системе может уменьшиться, но качество диагностирования при этом улучшится.

Заключение

Задача разработки системы диагностики неисправностей сложного динамического объекта изначально имеет довольно высокую размерность, что не позволяет эффективно, однозначно и качественно решить задачу путем построения такой системы полной размерности.

Построение многоуровневой диагностической системы с использованием нечеткой логики целесообразно начинать с взаимного сопоставления множеств значений признаков для соответствующих неисправностей в целях определения возможности построения первого, нижнего уровня системы диагностики. На этом уровне могут быть определены очевидные неисправности либо выделены группы неисправностей.

На следующем уровне, с использованием дополнительных признаков, методами нечеткой логики проводится диагностика конкретных неисправностей в предварительной выделенной на нижнем уровне группе неисправностей. При этом признак, который использовался для выделения группы неисправностей на нижнем уровне диагностики, далее на втором уровне использовать не следует из-за малой его информативности на втором уровне.

В разрабатываемой системе диагностики метод нечеткой логики наиболее продуктивен при использовании функций принадлежности термов трехугольного вида. С ростом числа неисправностей и в зависимости от расположения множеств значений

признаков имеет смысл повышать число термов. При этом желательно, чтобы каждому терму соответствовала хотя бы одна неисправность.

Список литературы

1. Мелихов А. Н., Бернштейн Л. С., Коровин С. Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. М.: Наука, 1990. 272 с.
2. Асаи К., Ватада Д., Иваи С. и др. Прикладные нечеткие системы: Пер. с япон. / Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. М.: Мир, 1993. 368 с.
3. Zadeh L. A. Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing // Communications of the ACM. 1994. V. 37, N. 3. P. 77–84.
4. Аверкин А. Н., Батыршин И. З. Мягкие вычисления // Новости искусственного интеллекта. 1996. № 3. С. 161–164.
5. Анисимов Д. Н., Вершинин Д. В., Колосов О. С., Зуева М. В., Цапенко И. В. Диагностика текущего состояния динамических объектов и систем сложной структуры методами нечеткой логики с использованием имитационных моделей // Искусственный интеллект и принятие решений. 2012. № 3. С. 39–50.

6. Анисимов Д. Н. Формализация процедуры исключения транзитивно замыкающих дуг при организации иерархической структуры на множестве нечетких ситуаций // Вестник МЭИ. 2011. № 4. С. 34–40.
7. Pedrycz W. Fuzzy Control and Fuzzy Systems. New York: John Wiley and Sons, 1993.
8. Анисимов Д. Н. Использование нечеткой логики в системах автоматического управления // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2001. № 8. С. 39–42.
9. Заде Л. А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.
10. Норвич А. М., Турскен И. Б. Построение функций принадлежности // Нечеткие множества и теория возможностей. М.: Радио и связь, 1986. С. 64–71.
11. Zimmermann H. J., Zysno P. Quantifying vagueness in decision models // European Journal of Operational Research. 1985. N. 22. P. 148–158.
12. Анисимов Д. Н., Дроздова Е. Д., Новиков В. Н. Исследование свойств нечеткого аппроксимирующего ПД-регулятора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 6–12.

Research of the Multilevel Fuzzy Diagnostic Systems with the Use of Stochastic Models

O. S. Kolosov, KolosovOS@mpei.ru, D. N. Anisimov, D. V. Khripkov
National Research University of MPEI, Moscow, 111250, Russian Federation

Received on October 08, 2014

The article analyzes effectiveness of the diagnostic systems of small dimensions (2–3 faults) with a small number of features (1–3). The systems are based on a fuzzy inference. Research is conducted using a stochastic model of an object, which implies generation of random characteristic values with given expectation (MO) and values of the standard deviation (SD) for the respective types of faults (pathologies). Herewith, various options are generated, membership functions, the types of distributions generated by the signs, their MO and SD are explored. A stochastic model of the object allows us to measure the performance of the diagnostic system with small volumes of training samples. It is shown that in many cases the diagnostic system of full dimension does not provide an unambiguous and quality solution to the problem of diagnostics. It is advisable to start construction of a multi-level diagnostic system using fuzzy logic with a mutual comparison of the sets of attribute values for the relevant problems in order to determine the feasibility of construction of the first, low-level diagnostics. At this level an obvious fault can be determined, or groups of faults can be selected. At the next level, using the additional features, we can diagnose specific faults in the pre-selected lower level group by the methods of fuzzy logic. In the developed system the fuzzy logic diagnostic method is most efficient when used as a part of the terms of triangular membership functions. With the increasing number of faults, and depending on the location of the sets of attribute values it makes sense to increase the number of the terms. In this case, it would be expedient to ensure that each term corresponds to at least one fault.

Keywords: stochastic models, fuzzy logic, multilevel system

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, projects no. 13-01-00082a.

For citation:

Kolosov O. S., Anisimov D. N., Khripkov D. V. Research of the Multilevel Fuzzy Diagnostic Systems with the Use of Stochastic Models, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 254–261.

DOI: 10.17587/mau.16.254-261

References

1. Melikhov A. N., Bernshteyn L. S., Korovin S. Ya. Situatsionnye sovetuyushchie sistemy s nechetkoi logikoi (Situation advising system with fuzzy logic), Moscow, Nauka, 1990, 272 p. (in Russian).
2. Asai K., Vataada D., Iwai S. i dr. Prikladnye nechetkie sistemy (Applied fuzzy systems), Moscow, Mir, 1993. 368 p. (in Russian).
3. Zadeh L. A. Fuzzy Logic, Neural Networks, and Soft Computing, *Communications of the ACM*, 1994, vol. 37, no. 3, pp. 77–84.
4. Averkina A. N., Batyrshin I. Z. Myagkie vychisleniya (News Artificial Intelligence), *Novosti iskusstvennogo intellekta*, 1996, no. 3, pp. 161–164 (in Russian).
5. Anisimov D. N., Vershinin D. V., Kolosov O. S., Zueva M. V., Tsapenko I. V. Diagnostika tekushchego sostoyaniya dinamicheskikh ob'ektov i sistem slozhnoi struktury metodami nechetkoi logiki s ispol'zovaniem imitatsionnykh modelei (Diagnosis of the current state of dynamic objects and the complex structure of fuzzy logic techniques using simulation models), *Iskusstvennyi Intellekt i Prinyatie Reshenii*, 2012, no. 3, pp. 39–50 (in Russian).

6. Anisimov D. N. Formalizatsiya protsedury iskl'yucheniya tranzitivno zamykayushchikh dug pri organizatsii ierarkhicheskoi struktury na mnozhestve nechetkikh situatsii (The formalization of procedures exclude transitive envelopes of arcs in the organization of the hierarchical structure on the set of fuzzy situations), *Vestnik MEI*, 2011, no. 4, pp. 34–40 (in Russian).
7. Pedrycz W. Fuzzy Control and Fuzzy Systems, New York, John Wiley and Sons, 1993.
8. Anisimov D. N. Ispol'zovanie nechetkoi logiki v sistemakh avtomaticheskogo upravleniya (The use of fuzzy logic in automatic control systems), *Pribory i Sistemy. Upravlenie, Kontrol', Diagnostika*, 2001, no. 8, pp. 39–42. (in Russian).
9. Zadeh L. A. Ponyatie lingvisticheskoi peremennoi i ego primeneniye k prinyatiyu priblizhennykh reshenii (The concept of linguistic variable and its application to the adoption of approximate solutions.), Moscow, Mir, 1976, 165 p. (in Russian).
10. Norvich A. M., Tursken I. B. Postroenie funktsii prinadlezhnosti (Construction of membership functions), *Nechetkie mnozhestva i teoriya vozmozhnostei*, Moscow, Radio i Svyaz', 1986, pp. 64–71 (in Russian).
11. Zimmermann H. J., Zysno P. Quantifying vagueness in decision models, *European Journal of Operational Research*, 1985, no. 22, pp. 148–158.
12. Anisimov D. N., Drozdova E. D., Novikov V. N. Issledovanie svoystv nechetkogo approksimiruyushchego PD-regulyatora (Investigation of the properties of the approximating fuzzy PD controller), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 6–12 (in Russian).

Corresponding author:

Kolosov Oleg S., Professor, Dr. Su. Tech, National Research University "Moscow Power Engineering Institute", 111250, Moscow, Russian Federation, e-mail: KolosovOS@mpei.ru

УДК 17.519:62.50:681.306

М. В. Сержантова, канд. техн. наук, доц., 12noch@mail.ru,
А. В. Ушаков, д-р техн. наук, проф., Ushakov_AVG@yandex.ru,
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики

Рекреативный интервал в проблеме управления производительностью деятельности антропокомпонента-оператора в квазистатической функциональной среде

Рассматривается проблема моделирования функциональной деятельности антропокомпонента-оператора (АКО) в классе аддитивных системных представлений, основными показателями которой являются производительность деятельности АКО за время рабочей смены и выработка готовой продукции к ее концу. При моделировании выделяются ключевые моменты деятельности АКО, определяющие его реальную производительность с учетом процессов вработывания, уставания, восстановления его функциональных возможностей в рекреативный интервал. Полученная модель позволяет установить аналитические связи производительности АКО с продолжительностью рекреативного интервала как системного гаранта компенсации усталости. Это позволяет управлять ходом и результатами функциональной деятельности АКО путем использования дополнительного ресурса потенциала форсирования функциональной деятельности АКО.

Ключевые слова: рекреативный интервал, производительность деятельности, антропокомпонент-оператор, квазистатическая функциональная среда, экспоненциальная аппроксимация

Введение

Рассматриваются проблемы модельного представления деятельности антропокомпонента-оператора (АКО) в функциональной квазистатической среде при обслуживании зафиксированных в пространстве производственных мощностей. При решении поставленной задачи учитывался накопленный опыт [1–8] специалистов по управлению системами с АКО в их составе. Отметим, что при любой степени строгости подбора АКО их индивидуальные свойства всегда характеризуются заметным разбросом, к тому же свойства конкретного АКО в зависимости от его текущего состояния также будут различаться. В связи с этим представление функциональной деятельности АКО должно строиться с использованием математических моделей с интервальными параметрами функциональной деятельности в течение рабочей смены, с учетом влияния таких системных факторов, как организация рабочих мест, мотивация к достижению максимальной производительности, процесс уставания, рекреативные мероприятия и т. д. Фактический статистический материал, основанный на хронометраже деятельности и эргономических исследованиях АКО этого типа, достаточно обширный. Однако формализация деятельности АКО на уровне ее описания с помощью передаточных функций, моделей аппарата пространства состояния [9, 10] и временных представлений находится на довольно низком уровне развития.

Мотивационным началом для написания статьи послужило для авторов желание заполнить обнаруженный системный пробел, так как, по их мнению,

наличие математических моделей с интервальными параметрами представления функциональной деятельности АКО в функциональной квазистатической среде даст специалистам по научной организации труда, планированию производства и эргономике мобильный инструмент для решения большого круга практических задач при формировании трудовых коллективов и организации их деятельности с априори заданным разбросом индивидуальных свойств АКО.

Поставленная задача решается в два этапа: на первом этапе строится медианная модель деятельности АКО с использованием экспоненциальной аппроксимации кривой реального изменения производительности этой деятельности, на втором этапе параметры уже аппроксимированной модели интервалируются в соответствии с правилами интервальной математики.

Особое внимание авторы сосредоточили на изучении рекреативного интервала как системного фактора управления производительностью деятельности АКО, неправильная организация которого, возможно, потребует использования дополнительных ресурсов в виде потенциала форсирования деятельности АКО.

Известно, что рекреативный интервал вводится для снятия усталости, возникающей в первой половине рабочей смены. Процесс снятия усталости является динамическим в пределах рекреативного интервала, причем в общем случае полное снятие усталости не достигается. Очевидно, включение модели динамики процесса снятия усталости в общую модель деятельности АКО заметно увеличивает ее размерность, снижая тем самым ее пользовательскую эффективность. В связи с этим предлагается

оценивать влияние на работу во второй полусмене рабочего дня АКО фактора неполного снятия усталости параметрическим способом на основе кривой, связывающей степень снятия усталости и восстановления производительности деятельности АКО с длительностью рекреативного интервала.

Аналитическое решение поставленной задачи ищется в классе временных модельных представлений.

Аддитивная медианная модель деятельности АКО в квазистатической функциональной среде: экспоненциальная аппроксимация

Для построения аддитивной медианной модели деятельности АКО в квазистатической функциональной среде обратимся к экспериментальной кривой $h_{РПА}(t)$ реальной производительности АКО (РПА) за полусмену, типовый вид [4] которой приведен на рис. 1.

На кривой (рис. 1) можно выделить следующие характерные точки и интервалы изменения производительности деятельности АКО: "0" — старт рабочей смены, "РНТД1" — точка реального начала функциональной деятельности, характеризующаяся переводом в рабочее состояние производственных мощностей квазистатической функциональной среды, "ВР" — точка достижения АКО медианной номинальной производительности его деятельности, "ОЭ" — точка начала процесса уставания, характеризующаяся окончанием интервала деятельности с оптимальной эффективностью (ОЭ), "ТКУ" — точка критической усталости, совпадающая с окончанием первой полусмены и началом рекреативного интервала; "0 — РНТД1" — интервал, занятый подготовительными операциями, "РНТД1 — ВР" — интервал вработывания в медианную номинальную производительность k , "ОЭ — ТКУ" — интервал прогрессирующего уставания, характеризующийся падением производительности деятельности, зафиксированным в точке "ТКУ" на уровне 0,7 (70 %) от его медианного значения. Выделенные интервалы кривой (рис. 1), по данным работы [4], в зависимости от индивидуальных свойств АКО могут быть охарактеризованы следующими медианными оценками их продолжительности: "0 — РНТД1" — 12 мин (0,2 ч); "РНТД1 — ВР" — 21 мин (0,35 ч); "ВР — ОЭ" — 147 мин (2,45 ч). Эти значения в дальнейшем используются как базовые при построении медианного модельного представления деятельности АКО.

Для построения кривой производительности труда, аналогичной приведенной на рис. 1, для второй рабочей полусмены необходимо рассмотреть процесс восстановления работоспособности АКО в рекреативный интервал. Для этого воспользуемся информацией, приведенной в работе [4], в соответствии с которой процесс $h_{в}(t)$ восстановления работоспособности в медианном представлении может быть охарактеризован экспоненциальной кривой, приведенной на рис. 2.

Кривая (рис. 2) позволяет оценить ситуации, характеризующиеся парой чисел "степень восста-

новления $(1 - \Delta)k$ — длительность рекреативного интервала (Δt_p)" (табл. 1).

Из табл. 1 видно, что при реальных длительностях рекреативного интервала полного восстановления производительности труда не происходит, таким образом, при формировании кривой производительности для второй полусмены значение медианной номинальной производительности должно составлять величину $(1 - \Delta)$ от медианной производительности k первой полусмены. Таким образом, типовая кривая реальной производительности труда АКО в течение рабочей смены принимает вид, представленный на рис. 3.

На основе данных кривых (рис. 3) можно предложить аналитическое медианное представление производительности труда АКО, основанное на экспоненциальной аппроксимации и концепции аддитивности процессов вработывания и уставания. Тогда для аппроксимированного процесса вработ-

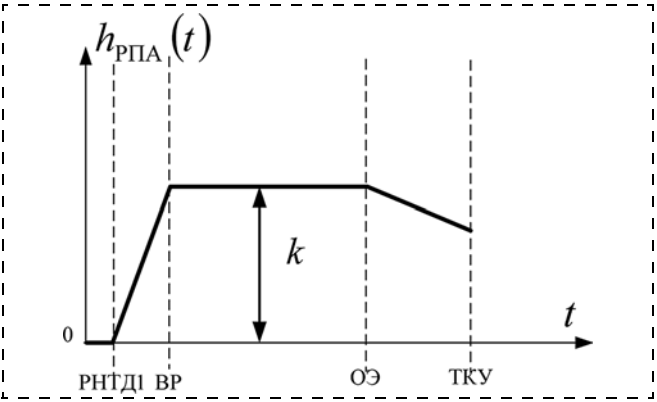


Рис. 1. Типовая кривая производительности деятельности АКО в течение первой рабочей полусмены

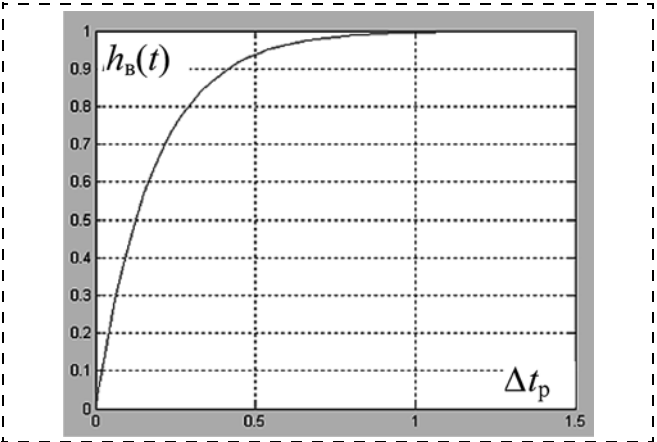


Рис. 2. Кривая восстановления производительности деятельности АКО за рекреативный интервал

Таблица 1

Характеристики	Ситуации				
Длительность рекреативного интервала Δt_p , ч	0,25	0,5	0,75	1,0	∞
Степень восстановления $(1 - \Delta)k$	0,75k	0,9355k	0,9844k	0,9961k	1

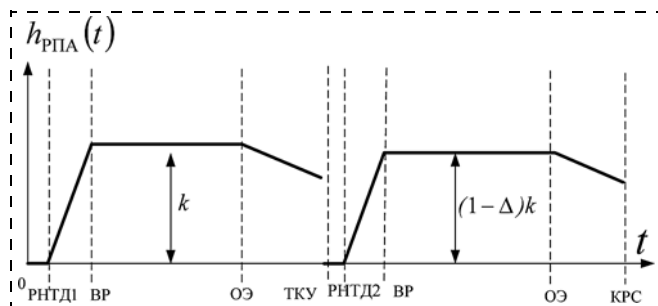


Рис. 3. Типовая кривая изменения производительности деятельности АКО в течение рабочей смены реальным восстановлением ее в рекреативный интервал

тивания $h_{ABP1}(t)$ в первой полусмене в классе временных представлений можно записать:

$$h_{ABP1}(t) = k \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{T_1} \right) \right) (1(t) - 1(t-4)). \quad (1)$$

Здесь и далее $1(t-t_c)$ — сдвинутая на t_c единичная функция.

Аналогично для второй полусмены аппроксимированный процесс вработывания $h_{ABP2}(t)$ имеет вид

$$h_{ABP2}(t) = k(1-\Delta) \left(1 - \exp \left(-\frac{t-4}{T_1} \right) \right) (1(t-4) - 1(t-8)) \quad (2)$$

с медианными значениями параметров

$$k = 0,1673 \text{ ч}^{-1}, T_1 = 0,375 \text{ ч}. \quad (3)$$

Медианные значения (3) параметров моделей (1), (2) определены из условия нулевой интегральной погрешности экспоненциальной аппроксимации кривых (рис. 3) моделями (1) и (2) из условия

$$T_1 = \arg \left\{ \Delta y(t) \Big|_{t=4} = \int_0^4 \{ h_{РПА}(t) - h_{АПА}(t) \} dt = 0 \right\},$$

где $h_{РПА}(t)$ — реальная производительность АКО; $h_{АПА}(t)$ — аддитивная производительность АКО.

Модель процесса уставания АКО строится на гипотезе о том, что процесс уставания возникает с момента начала трудовой деятельности и заметно проявляется на третьем часу полусмены (длительность которой $t = 4$ ч) с выраженным эффектом при ее окончании, который в медианном представлении характеризуется снижением производительности труда в среднем на 30 %. Это позволяет процесс уставания $h_y(t)$ описать с использованием медианной экспоненциальной аппроксимации в обеих полусменах $h_{AY1}(t)$, $h_{AY2}(t)$ следующим образом:

$$h_{AY1}(t) = -k \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{T_2} \right) \right) (1(t) - 1(t-4)); \quad (4)$$

$$h_{AY2}(t) = -k(1-\Delta) \left(1 - \exp \left(-\frac{t-4}{T_2} \right) \right) (1(t-4) - 1(t-8)) \quad (5)$$

с медианными значениями параметров

$$k = 0,1673 \text{ ч}^{-1}, T_2 = 11,2147 \text{ ч}.$$

С учетом аддитивного характера процессов вработывания $h_{ABP}(t)$ и уставания $h_{AY}(t)$ на основании представлений (1), (2) и (4) можно предложить экспоненциальную модель, аппроксимирующую полный процесс $h_{РПА}(t)$ изменения реальной производительности труда:

- за первую полусмену в форме

$$h_{АПА1}(t) = h_{ABP1}(t) + h_{AY1}(t) = \left(k \left(-\exp \left(-\frac{t}{T_1} \right) \right) + \left(\exp \left(-\frac{t}{T_2} \right) \right) \right) (1(t) - 1(t-4)), \quad (6)$$

- за вторую полусмену в форме

$$h_{АПА2}(t) = h_{ABP2}(t) + h_{AY2}(t) = \left(k(1-\Delta) \left(-\exp \left(-\frac{t-4}{T_1} \right) \right) + \left(\exp \left(-\frac{t-4}{T_2} \right) \right) \right) \times (1(t-4) - 1(t-8)). \quad (7)$$

Тогда полная экспоненциальная модель, аппроксимирующая кривую реальной производительности $h_{РПА}(t)$ труда за восьмичасовую рабочую смену, принимает вид

$$h_{АПА}(t) = h_{АПА1}(t) + h_{АПА2}(t) = \left(k \left(-\exp \left(-\frac{t}{T_1} \right) \right) + \left(\exp \left(-\frac{t}{T_2} \right) \right) \right) (1(t) - 1(t-4)) + \left(k(1-\Delta) \left(-\exp \left(-\frac{t-4}{T_1} \right) \right) + \left(\exp \left(-\frac{t-4}{T_2} \right) \right) \right) \times (1(t-4) - 1(t-8)). \quad (8)$$

Использование форсирующих свойств АКО в контексте изучаемой проблемы влияния длительности Δt_p рекреативного интервала на восстановление производительности деятельности АКО может быть реализовано в двух формах:

- 1) форсирование используется как в первой, так и во второй полусменах рабочего дня;
- 2) форсирование используется только во второй полусмене рабочего дня.

Получение сигнала форсирования осуществляется с помощью дополнительного экспоненциального аддитивного члена, начальное значение которого составляет $\frac{T_3}{T_1}$. Авторы в дальнейших исследованиях

ограничились первой формой использования форсирования как обладающей наибольшей полнотой. Таким образом, модифицированное введение форсирующего члена представление (8) принимает вид

$$h(t)_{АПАФ} = h(t)_{АПАФ1} + h(t)_{АПАФ2} = \left(k \left(-\exp \left(-\frac{t}{T_1} \right) \right) + \frac{T_3}{T_1} \exp \left(-\frac{t}{T_1} \right) + \left(\exp \left(-\frac{t}{T_2} \right) \right) \right) (1(t) - 1(t-4)) + \left(k(1-\Delta) \left(-\exp \left(-\frac{t-4}{T_1} \right) \right) + \frac{T_3}{T_1} \exp \left(-\frac{t-4}{T_1} \right) + \left(\exp \left(-\frac{t-4}{T_2} \right) \right) \right) (1(t-4) - 1(t-8)). \quad (9)$$

Очевидно, в силу квазистатической природы технологического оборудования оно выполняет функцию интегрирующего звена, в результате чего выходная продукция $y(t)$ определится интегралом по времени от производительности деятельности АКО, имеющей аналитическое представление (8) или (9). При этом, если организаторов производства интересует выработка на некоторый момент времени $t = t^*$, то при модельном представлении (8) производительности деятельности получим:

- при $0 < t^* \leq 4$

$$y(t)|_{t=t^*} = \int_0^{t^*} h_{\text{АПА1}}(t) dt = k\{-T_1(1 - \exp(-t^*/T_1)) + T_2(1 - \exp(-t^*/T_2))\}; (10)$$

- при $4 < t^* \leq 8$

$$y(t) = \int_0^4 h_{\text{АПА1}}(t) dt + \int_4^{t^*} h_{\text{АПА2}}(t) dt = k\{-T_1(1 - \exp(-4/T_1)) + T_2(1 - \exp(-4/T_2))\} + k(1 - \Delta)\{-T_1(1 - \exp((4 - t^*)/T_1)) + T_2(1 - \exp((4 - t^*)/T_2))\}. (11)$$

С учетом возможного использования форсирующих свойств АКО его выработка на момент времени $t = t^*$ при модельном представлении (9) производительности его деятельности составит:

- при $0 < t^* \leq 4$

$$y(t)|_{t=t^*} = \int_0^{t^*} h_{\text{АПАФ1}}(t) dt = k\{-T_1(1 - \exp(-t^*/T_1)) + T_3(1 - \exp(-t^*/T_1)) + T_2(1 - \exp(-t^*/T_2))\}; (12)$$

- при $4 < t^* \leq 8$

$$y(t) = \int_0^4 h_{\text{АПАФ1}}(t) dt + \int_4^{t^*} h_{\text{АПАФ2}}(t) dt = k\{-T_1(1 - \exp(-4/T_1)) + T_3(1 - \exp(-4/T_1)) + T_2(1 - \exp(-4/T_2))\} + k(1 - \Delta) \times \{-T_1(1 - \exp((4 - t^*)/T_1)) + T_3(1 - \exp((4 - t^*)/T_1)) + T_2(1 - \exp((4 - t^*)/T_2))\}. (13)$$

При этом медианное значение $k = 0,1673 \text{ ч}^{-1}$ получено из условия

$$k = \arg(y(t, k, T_1, T_2, T_3 = 0, \Delta = 0)|_{t=8} = 1\}.$$

Интервализация аддитивной медианной модели функциональной деятельности АКО

Прежде чем решать задачу интервализации аддитивной медианной модели функциональной деятельности АКО, построенной в предыдущем разделе, дадим некоторую информацию об интервальных представлениях числовых параметров. В соответствии с нынешними представлениями интервальное число (ИЧ) $[\alpha]$ — это пара чисел $(\underline{\alpha}, \bar{\alpha})$, задающих соответственно его левую и правую граничные (угловые) реализации так, что интервальное число получает представление

$$[\alpha] = [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]. (14)$$

Следует сказать, что интервальное число $[\alpha]$ может быть также записано в виде тройки чисел

$$[\alpha] = \alpha_0 + [\Delta\alpha] = \alpha_0 + [\underline{\Delta\alpha}, \bar{\Delta\alpha}], (15)$$

где α_0 , $[\Delta\alpha]$ — соответственно медианная и интервальная составляющие интервального числа с равными по модулю левой $\underline{\Delta\alpha}$ со знаком "минус" и правой $\bar{\Delta\alpha}$ со знаком "плюс" угловыми реализациями. Представление (15) интервальных чисел позволяет записать систему равенств

$$\alpha_0 = 0,5(\underline{\alpha} + \bar{\alpha}); \underline{\Delta\alpha} = \underline{\alpha} - \alpha_0; \bar{\Delta\alpha} = \bar{\alpha} - \alpha_0. (16)$$

Соотношения (15) и (16) позволяют ввести такую характеристику интервального числа, как оценка $\delta_I(\alpha)$ относительной интервальности интервального числа $[\alpha]$, которая задается соотношением

$$\delta_I(\alpha) = \bar{\Delta\alpha}/\alpha_0 = -\underline{\Delta\alpha}/\alpha_0. (17)$$

Соотношение (17) позволяет записать интервальное число $[\alpha]$ в формах

$$[\alpha] = \alpha_0 + [-\alpha_0\delta_I(\alpha), \alpha_0\delta_I(\alpha)] = \alpha_0\{1 + (\mp\delta_I(\alpha))\}. (18)$$

Обратимся к проблеме формирования интервальных представлений описания функциональной деятельности АКО в условиях двух полусмен, разделенных рекреативным интервалом, в виде соотношений (8)–(13) с использованием записи интервального числа в форме (18). В результате получим интервальные представления:

- для соотношения (8):

$$[h_{\text{АПА}}(t)] = \left(k(1 \mp (\delta_I(k)))\right) \left(-\exp\left(-\frac{t}{T_1(1 \mp (\delta_I(k)))}\right)\right) + \left(\exp\left(-\frac{t}{T_2(1 \mp (\delta_I(k)))}\right)\right) (1(t) - 1(t - 4)) + \left(k(1 \mp (\delta_I(k)))(1 - \Delta(1 \mp (\delta_I(k)))) \times \left(-\exp\left(-\frac{t - 4}{T_1(1 \mp (\delta_I(k)))}\right)\right) + \left(\exp\left(-\frac{t - 4}{T_2(1 \mp (\delta_I(k)))}\right)\right) (1(t - 4) - 1(t - 8)); (19)$$

- для соотношения (9):

$$[h_{\text{АПАФ}}(t)] = \left(k(1 \mp (\delta_I(k)))\right) \left(-\exp\left(-\frac{t}{T_1(1 \mp (\delta_I(k)))}\right)\right) + \frac{T_3(1 \mp (\delta_I(k)))}{T_1(1 \mp (\delta_I(k)))} \exp\left(-\frac{t}{T_1(1 \mp (\delta_I(k)))}\right) + \left(\exp\left(-\frac{t}{T_2(1 \mp (\delta_I(k)))}\right)\right) (1(t) - 1(t - 4)) + \left(k(1 \mp (\delta_I(k)))(1 - \Delta(1 \mp (\delta_I(k)))) \times \left(-\exp\left(-\frac{(t - 4)}{T_1(1 \mp (\delta_I(k)))}\right)\right) + \frac{T_3(1 \mp (\delta_I(k)))}{T_1(1 \mp (\delta_I(k)))} \times \exp\left(-\frac{(t - 4)}{T_1(1 \mp (\delta_I(k)))}\right) + \left(\exp\left(-\frac{(t - 4)}{T_1(1 \mp (\delta_I(k)))}\right)\right) \times (1(t - 4) - 1(t - 8)); (20)$$

- для соотношения (10):
при $0 < t^* \leq 4$

$$[y(t)]_{t=t^*} = k(1 \mp (\delta_I(k))) \{-T_1(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp(-t^*/T_1(1 \mp (\delta_I(k)))) + T_2(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp(-t^*/T_2(1 \mp (\delta_I(k))))\}; \quad (21)$$

- для соотношения (11):
при $4 < t^* \leq 8$

$$[y(t)] = k(1 \mp (\delta_I(k))) \{-T_1(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp(-4/T_1(1 \mp (\delta_I(k)))) + T_2(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp(-4/T_2(1 \mp (\delta_I(k))))\} + k(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \Delta(1 \mp (\delta_I(k)))) \{-T_1(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp((4 - t^*)/T_1(1 \mp (\delta_I(k)))) + \\ + T_2(1 \mp (\delta_I(k))) (1 - \exp((4 - t^*)/T_2(1 \mp (\delta_I(k))))\}; \quad (22)$$

- для соотношения (12):
при $0 < t^* \leq 4$

$$y(t)|_{t=t^*} = k(1 \mp (\delta_I(k))) \{-T_1(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp(-t^*/T_1(1 \mp (\delta_I(k)))) + T_3(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp(-t^*/T_1(1 \mp (\delta_I(k)))) + T_2(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp(-t^*/T_2(1 \mp (\delta_I(k))))\}; \quad (23)$$

- для соотношения (13):
при $4 < t^* \leq 8$

$$y(t) = k(1 \mp (\delta_I(k))) \{-T_1(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp(-4/T_1(1 \mp (\delta_I(k)))) + T_3(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp(-4/T_1(1 \mp (\delta_I(k)))) + T_2(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp(-4/T_2(1 \mp (\delta_I(k))))\} + k(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \Delta(1 \mp (\delta_I(k)))) \{-T_1(1 \mp (\delta_I(k))) \times \\ \times (1 - \exp((4 - t^*)/T_1(1 \mp (\delta_I(k)))) + \\ + T_3(1 \mp (\delta_I(k))) (1 - \exp((4 - t^*)/T_1(1 \mp (\delta_I(k)))) + \\ + T_2(1 \mp (\delta_I(k))) (1 - \exp((4 - t^*)/T_2(1 \mp (\delta_I(k))))\}. \quad (24)$$

Прикладные примеры использования аддитивной интервальной модели деятельности АКО

В этом разделе рассматриваются четыре ситуации, в которых может оказаться АКО при различных сочетаниях интервальных параметров его модельных представлений. Во всех модельных ситуациях, характеризующихся погружением модели АКО в интервальную параметрическую среду, предполагается, что модуль оценки относительной интервальности для всех параметров модели АКО составляет значение $|\delta_I(\alpha)| = 0,1$ (10 %).

Ситуация 1: модель АКО с медианными значениями параметров:

$$k = \arg\{y\{t, k, T_1, T_2, T_3 = 0, \Delta = 0, \}_{t=8} = 1\} = \\ = 0,1673 \text{ ч}^{-1}, T_1 = 0,375 \text{ ч}, T_2 = 11,2147 \text{ ч}, T_3 = 0.$$

Пример предложенной ситуации предполагает исследование влияния длительности рекреативного интервала на сменную выработку $y(t=8)$ при медианных значениях параметров модели АКО и без использования его форсирующих свойств. Результаты исследования данной ситуации приведены в табл. 2.

Ситуация 2: модель АКО с неблагоприятными угловыми значениями параметров, характеризующими уменьшение производительности его деятель-

Таблица 2

№	$\Delta t_p, \text{ ч}$	Δ	$T_1, \text{ ч}$	$T_2, \text{ ч}$	$T_3, \text{ ч}$	$k(1 - \Delta)$	$y(t=8)$
1	∞	0	0,375	11,2147	0	0,1673	1,0
2	1,0	0,0039	0,375	11,2147	0	0,1666	0,9960
3	0,75	0,0156	0,375	11,2147	0	0,1646	0,9841
4	0,5	0,0645	0,375	11,2147	0	0,1565	0,9357
5	0,25	0,25	0,375	11,2147	0	0,1254	0,7497

Таблица 3

№	$\Delta t_p, \text{ ч}$	Δ	$T_1, \text{ ч}$	$T_2, \text{ ч}$	$T_3, \text{ ч}$	$k(1 - \Delta)$	$y(t=8)$
1	∞	0	0,4125	10,0912	0	0,1506	0,8704
2	1,0	0,0039	0,4125	10,0912	0	0,1500	0,8669
3	0,75	0,0156	0,4125	10,0912	0	0,1483	0,8570
4	0,5	0,0645	0,4125	10,0912	0	0,1409	0,8143
5	0,25	0,25	0,4125	10,0912	0	0,1130	0,6534

Таблица 4

№	$\Delta t_p, \text{ ч}$	Δ	$T_1, \text{ ч}$	$T_2, \text{ ч}$	$T_3, \text{ ч}$	$k(1 - \Delta)$	$y(t=8)$
1	∞	0	0,4125	10,0912	0,4300	0,1506	1,0
2	1,0	0,0039	0,4125	10,0912	0,4435	0,1500	1,0
3	0,75	0,0156	0,4125	10,0912	0,4820	0,1483	1,0
4	0,5	0,0645	0,4125	10,0912	0,6500	0,1409	1,0
5	0,25	0,25	0,4125	10,0912	1,5300	0,1130	1,0

ности, удлинение времени вработывания и ускорение устания:

$$k(1 + (-\delta_I(k) = -0,1)) = 0,1506 \text{ ч}^{-1};$$

$$T_1(1 + (\delta_I(T_1) = -0,1)) = 0,4125 \text{ ч};$$

$$T_2(1 + (-\delta_I(T_2) = -0,1)) = 10,0912 \text{ ч}; T_3 = 0.$$

Ситуация усугубляется влиянием неполного восстановления жизненных сил АКО за рекреативный интервал. *Ситуация 2*, как и выше, характеризуется неиспользованием форсирующих свойств АКО. Результаты исследования данной ситуации приведены в табл. 3.

Ситуация 3: модель АКО с неблагоприятными угловыми значениями параметров, как в предыдущем случае, но в отличие от него ставится задача оценки степени использования форсирующих свойств АКО, обеспечивающих выполнение условия

$$T_3 = \arg\{y(t=8, k, \Delta, T_1, T_2, T_3) = 1\}.$$

Результаты исследования данной ситуации приведены в табл. 4.

Максимальное значение T_3/T_1 интенсивности реализации форсирующих свойств АКО составляет 3,6. Это значение достигается на грани человеческих возможностей АКО.

Заключение

На основе типовой кривой реальной производительности деятельности АКО в течение рабочей смены с помощью аппарата экспоненциальной аппроксимации, дополненной интервальными параметрическими представлениями, построено аналитическое описание этой кривой, позволяющее оценить влияние организации рекреативного интервала на выпуск готовой продукции за рабочую смену и степень интенсивности использования форсирующих свойств АКО для поддержания стопроцентного выпуска готовой продукции в условиях реальных интервальных колебаний его функциональных возможностей.

Статья поддержана Правительством Российской Федерации (Грант 074-U01), Министерством образования и науки Российской Федерации (Проект 14. Z50.31.0031).

Список литературы

1. Ефремов А. В., Оглоблин А. В., Кошелев А. В. Закономерности характеристик действий человека-оператора в задачах непрерывного управления // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2006. № 7. С. 2—10.
2. Шеридан Т. Б., Феррел У. Р. Системы человек — машины. М.: Машиностроение, 1980. 399 с.
3. Зайцев В. С. Системный анализ операторской деятельности. М.: Радио и связь, 1990. 119 с.
4. Шипилов А. И., Шипилова О. А. Высокая работоспособность персонала — забота кадровика // Кадры предприятия. 2003. № 3. С. 7—15.
5. Цибулевский И. Е. Человек как звено следящей системы. М.: Наука, 1981.
6. Себряков Г. Г. Характеристики деятельности человека-оператора в динамических системах слежения и наведения летательных аппаратов // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2007. № 11. С. 2.

7. Пупков К. А., Устюжанин А. Д. Оптимизация взаимосвязи человека и техники при управлении космическими объектами // Матер. 17-й Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. 2010. С. 238—240.
8. Себряков Г. Г. Моделирование деятельности человека-оператора в полуавтоматических системах управления динамическими объектами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 4. С. 17—29.
9. Сержантова М., Ушаков А. Антропокомпоненты в составе сложных динамических систем. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 174 с.
10. Ушаков А., Дударенко Н., Слита О. Современная теория многомерного управления: аппарат пространства состояний. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. 418 с.
11. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 222 с.
12. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
13. Дударенко Н. А., Сержантова (Полякова) М. В., Ушаков А. В. Представление производственной деятельности антропокомпонента — оператора непрерывной динамической моделью с интервальными параметрами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 5. С. 36—43.

Interval for Rest in the Problem of Management of Productivity of a Human Operator in a Static Functional Environment

M. V. Serzhantova, 12noch@mail.ru, A. V. Ushakov, Ushakov_AVG@yandex.ru,
St. Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics,
St. Petersburg, 197101, Russian Federation

Received on September 03, 2014

The article is dedicated to the problem of simulation of the functional activities of a human operator in the class of the additive system of representations, the main indexes of which are operational productivity during a shift and framing of the finished goods to the end. For the simulation the key moments were selected of the activity of a human operator, which determine the real operational productivity taking into account the processes of beginning of operation, getting tired, and restoration of his (her) functional abilities during an interval for rest. The obtained model allows us to establish an analytical relation between the productivity of a human operator and duration of the interval as a system guarantor for compensation for the fatigue. It allows us to control the course and results of the functional activities of a human operator due to the use of an additional potential of the functional activities of a human operator. Representation of the functional activity of a human operator must be considered with the use of the mathematical models with the interval parameters of the functional activity during the work shift, the influence on him (her) of such systemic factors as workplace organization, motivation to achieve the maximum performance, tiring process and recreational activities. The actual statistical data is based on timing of the activities and ergonomic studies.

Keywords: interval for rest, operational productivity, human operator, static functional environment, exponential approximation

Acknowledgements: The work was supported by the Government of the Russian Federation (Grant 074-U01), and by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project 14.Z50.31.0031).

For citation:

Serzhantova M. V., Ushakov A. V. Interval for Rest in the Problem of Management of Productivity of a Human Operator in a Static Functional Environment, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 262—267.

DOI: 10.17587/mau.16.262-267

References

1. Efremov A. V., Ogloblin A. V., Koshelenko A. V. *Zakonomernosti kharakteristik deistvii cheloveka-operatora v zadachakh nepreryvnogo upravleniya* (The patterns of performance of the actions of the human operator in the task of continuous control management), *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologii*, 2006, no. 7, pp. 2—10. (in Russian).
2. Sheridan T. B., Ferrel U. R. *Sistemy chelovek — mashiny* (System man — machine), Moscow, Mashinostroenie, 1980, 399 p. (in Russian).
3. Zajcev V. S. *Sistemnyi analiz operatorskoi deyatel'nosti* (System analysis of operator activity), Moscow, Radio i svyaz', 1990. 119 p. (in Russian).
4. Shipilov A. I., Shipilova O. A. *Vysokaya rabotosposobnost' personala — zabota kadrovika* (High performance staff care personnel officer), *Kadry predpriyatiya*, 2003, no. 3, pp. 7—15 (in Russian).
5. Cibulevskij I. E. *Chelovek kak zveno sledyashchei sistemy* (Science Man as a link tracking system), Moscow, Nauka, 1981 (in Russian).
6. Sebrjakov G. G. *Kharakteris tiki deyatel'nosti cheloveka-operatora v dinamicheskikh sistemakh slezheniya i navedeniya letatel'nykh apparatov* (Characteristics of activity of the human operator in dynamic systems tracking and homing aircraft), *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologii*, 2007, no. 11, p. 2 (in Russian).

7. Pupkov K. A., Ustyuzhanin A. D. *Optimizatsiya vzaimosvyazi cheloveka i tekhniki pri upravlenii kosmicheskimi ob'ektami* (Optimization of the interaction between man and technology in the management of space objects), *Proc. of the 17th St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*, 2010, pp. 238—240 (in Russian).
8. Sebrjakov G. G. *Modelirovanie deyatel'nosti cheloveka-operatora v poluavtomaticheskikh sistemakh upravleniya dinamicheskimi ob'ektami* (Modeling of the activity of the human operator in a semi-automatic control systems of dynamic objects), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2010, no. 4, pp. 17—29 (in Russian).
9. Serzhantova M., Ushakov A. *Antropokomponenty v sostave slozhnykh dinamicheskikh sistem* (Antropocomponents in complex dynamical systems), *LAP LAMBERT Academic Publishing*, 2012. 174 p. (in Russian).
10. Ushakov A., Dudarenko N., Slita O. *Sovremennaya teoriya mnogomernogo upravleniya: apparat prostanstva sostoyanii* (The modern theory of multivariable control: The unit space condition), Saarbrücken, *LAP LAMBERT Academic Publishing*, 2011, 418 p. (in Russian).
11. Kalmykov S. A., Shokin Y. I., Yuldashev Z. K. *Metody interval'nogo analiza* (Methods of interval analysis), Novosibirsk, Nauka, 1986, 222 p. (in Russian).
12. Andreev Y. N. *Upravlenie konechnomernymi lineinymi ob'ektami* (Managing finite linear objects), Moscow, Nauka, 1976, 42 p. (in Russian).
13. Dudarenko N. A., Serzhantova (Polyakova) M. V., Ushakov A. V. *Predstavlenie proizvodstvennoi deyatel'nosti antropokomponenta — operatora nepreryvnoi dinamicheskoi model'yu s interval'nymi parametrami* (Presentation of production activities human-operator continuous dynamic model with interval parameters), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2012, no. 5, pp. 36—43 (in Russian).

Corresponding author:

Serzhantova Mayya V., PhD, Associate Professor, St. Petersburg National Research University Information Technologies, Mechanics and Optics, 197101, Sankt-Peterburg, Russian Federation, e-mail: 12noch@mail.ru



Управление и информатика в авиакосмических и морских системах



Главный редактор:

ЛЕБЕДЕВ Г. Н.

Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционная коллегия:

АЛЕКСЕЕВ В. В.
БАРАНОВ Л. А.
БЕЛОКОНОВ И. В.
БУКОВ В. Н.
ВАСИЛЬЕВ В. И.
ГОДУНОВ В. А.
ГУРЕВИЧ О. С.
ГУРСКИЙ Б. Г.
ЕФИМОВ В. В.
ЗАЙЦЕВ А. В.
КРЫЖАНОВСКИЙ Г. А.
НЕСТЕРОВ В. А.
ОХТИЛЕВ М. Ю.
ПАНКРАТОВ В. М.
РАСПОПОВ В. Я.
САБО Ю. И.
СТЕПАНОВ О. А.
СОЛДАТКИН В. М.
ФИЛИМОНОВ Н. Б.
ХИМЕНКО В. И.
ЧЕБУРАХИН И. Ф.
ШИРЯЕВ В. И.
ШКОЛИН В. П.

Редакция:

ГРИГОРИН-РЯБОВА Е. В.

СОДЕРЖАНИЕ

Корсун О. Н., Николаев С. В.

Методика идентификации аэродинамических коэффициентов продольного движения самолета в эксплуатационном диапазоне углов атаки 269

Лосев С. Н., Макаренко В. И., Подольская Н. Н.

Вероятностно-геометрический метод среднесрочного обнаружения конфликтов между воздушными судами 277

**Филаретов В. Ф., Зуев А. В., Жирабок А. Н.,
Проценко А. А., Subudhi В.**

Метод синтеза систем непрерывной аккомодации к дефектам в навигационно-пилотажных датчиках автономных подводных роботов 282

О. Н. Корсун, д-р техн. наук, проф., marmotto@rambler.ru,

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, г. Москва,
С. В. Николаев, начальник отделения — старший инженер-испытатель, nikozavr@mail.ru,
Государственный летно-испытательный центр им. В. П. Чкалова, г. Ахтубинск

Методика идентификации аэродинамических коэффициентов продольного движения самолета в эксплуатационном диапазоне углов атаки¹

Представлена методика идентификации аэродинамических коэффициентов продольного движения самолета в эксплуатационном диапазоне углов атаки с учетом нелинейностей и изменения работы двигателя. Рассмотрены основные этапы методики идентификации. Показаны результаты апробации методики на примере современного маневренного самолета. Отличительной особенностью методики является ориентация на повышение технологичности процедур идентификации и наглядности отображения результатов, что достигается за счет специально разработанного алгоритмического и программного обеспечения, включающего единый, удобный для пользователей графический интерфейс.

Ключевые слова: идентификация, методика, летные испытания, аэродинамические коэффициенты

Введение

В настоящее время актуальной проблемой является совершенствование методик определения характеристик устойчивости и управляемости (ХУУ) самолетов при проведении летных испытаний (ЛИ), в том числе с использованием методов моделирования и идентификации. Решение этой задачи предполагает разработку методического, алгоритмического и программного обеспечения процесса определения характеристик устойчивости и управляемости самолетов с использованием не только материалов летных экспериментов (ЛЭ), но и результатов математического и полунатурного моделирования [1—12]. Важнейшим компонентом разработанной методики является процедура идентификации аэродинамических коэффициентов с учетом силы тяги двигателей, входящей в математическую модель движения летательного аппарата (ЛА). Идентификация аэродинамических коэффициентов самолетов, по данным ЛЭ, позволяет проверить и уточнить результаты, полученные методами экспериментальной и вычислительной аэродинамики, и обеспечить необходимую точность результатов при наличии нелинейностей и изменении режима работы двигателей. В соответствии с работой [13] методика представляет единую многоэтапную процедуру, включающую следующие основные этапы:

- подготовка исходных данных по самолету;
- выполнение ЛЭ;
- проверка правильности функционирования системы измерений и регистрации полетных данных;
- этап собственно идентификации, на котором выполняется предварительная оценка нелинейных зависимостей, идентификация параметров продольного движения с учетом тяги двигателей, уточнение нелинейностей и сравнение по-

лученных результатов с банком аэродинамических характеристик. При необходимости выполняется коррекция банка.

1. Подготовка исходных данных

Для успешного выполнения идентификации необходимо, в первую очередь, собрать и проанализировать исходные данные по самолету и системе управления. В перечень необходимых исходных данных, представляемых разработчиком самолета, входят (рис. 1) геометрические и инерционно-массовая характеристики самолета, высотные-скоростные характеристики двигателей, координаты и углы установки двигателей, моменты инерции роторов и т. д. Необходимым условием полноты исходной информации является наличие банка аэродинамических характеристик, данных об основных эксплуатационных ограничениях самолета, динамических характеристиках датчиков, регистрирующих параметры движения, координатах установки датчиков, алгоритмах и особенностях работы системы управления.

Для удобства работы с исходными данными авторами разработан пакет программ для идентифика-



Рис. 1. Исходные данные, необходимые для идентификации

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-08-00682-а.

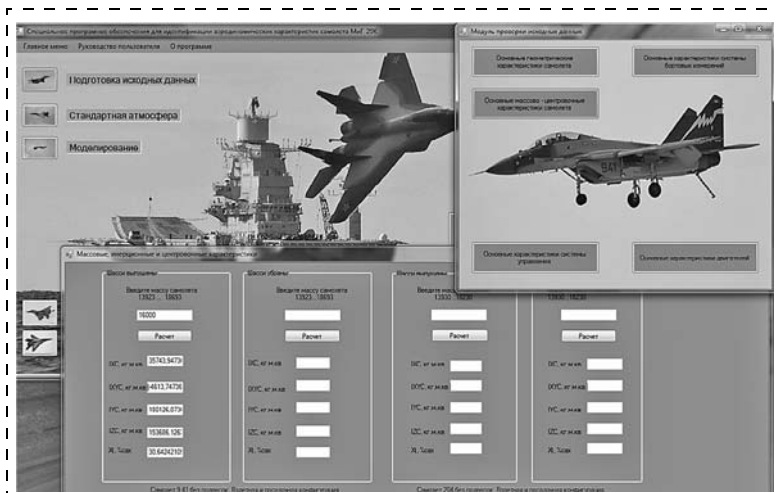


Рис. 2. Интерфейс программы идентификации и модуля расчета массово-центровочных характеристик

ции, один из модулей которого служит для расчета моментов инерции и центровки в зависимости от полетного веса самолета с учетом конфигурации, подвесок. Интерфейс программ показан на рис. 2.

2. Выполнение летного эксперимента в целях получения данных для идентификации

На этом этапе осуществляется выбор режимов полета, форм и амплитуд входных сигналов и получение необходимых материалов в ЛЭ. Вопрос определения наиболее предпочтительного вида тестовых сигналов для выполнения идентификации исследовался ранее [1, 3, 4, 9]. Для уточнения математической модели (ММ) движения ЛА методами идентификации наиболее подходящими признаны режимы полета, по методике выполнения близкие к типовым контрольным маневрам для оценки ХУУ (импульсы, дачи, перекладки, виражи, торможения), и разработанные на их базе специальные режимы:

- гармонические сигналы: гармонические колебания ручкой управления самолета (РУС) с заданными частотой и амплитудой колебаний;
- многоступенчатые сигналы: парные двойные дачи РУС на заданную величину (амплитуду) по определенной временной схеме [3].

Практика подтверждает достаточно высокую эффективность сигналов, форма которых представлена на рис. 3. Такие управляющие воздействия легко реализуются летчиком и имеют спектральный состав, в основном перекрывающий частотный диапазон полезных сигналов самолета. На условия выполнения режимов и амплитуду отклонений РУС влияют ограничения, наложенные на ЛА, и продол-

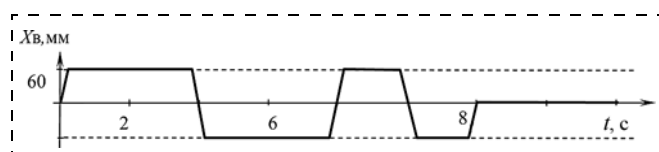


Рис. 3. Один из вариантов тестового входного сигнала

жительность выполнения сигнала. Эти сигналы удобны для реализации в эксплуатационной области полета, однако при выполнении режимов по идентификации в рамках определения ХУУ с их помощью несложно получить исходные данные и вблизи ограничений, например на больших углах атаки.

В процессе апробации методики было реализовано более 100 полетных режимов в целях получения материалов как для идентификации аэродинамических коэффициентов продольного движения, так и для аэродинамических коэффициентов бокового движения. В данной работе ограничимся лишь некоторыми результатами, касающимися продольного движения. В ЛЭ были выполнены серии дач по тангажу в эксплуатационном диапазоне углов атаки самолета в посадочной конфигурации. Регистрация параметров движения самолета выполнялась специальными средствами бортовых измерений (СБИ), обеспечивающими необходимую частоту регистрации и, с одной стороны, включающими параметры, весьма полно характеризующие состояние самолета, с другой стороны, удовлетворяющими общим требованиям, предъявляемым к регистрации при ЛИ.

3. Проверка правильности системы измерений и регистрации

После получения первых результатов ЛЭ в целях идентификации выполняется их обработка для оценивания правильности функционирования системы измерения и регистрации основных параметров движения ЛА, для чего используется алгоритм [10], реализованный в одном из модулей пакета программ для идентификации. Интерфейс модуля представлен на рис. 4 (см. третью сторону обложки).

Алгоритм, реализованный в программе контроля правильности бортовых измерений, основан на соотношениях между параметрами полета, определяемыми уравнениями пространственного движения самолета.

Из общей модели пространственного движения самолета [2] выделяются следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \omega_z - \frac{1}{\cos\beta} \left[\left(\frac{a_x}{V} - \omega_y \sin\beta \right) \sin\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a_y}{V} + \omega_x \sin\beta \right) \cos\alpha \right]; \\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{a_z}{V} \cos\beta - \left(\frac{a_x}{V} \sin\beta - \omega_y \right) \cos\alpha + \\ &\quad + \left(\frac{a_y}{V} \sin\beta + \omega_x \right) \sin\alpha; \\ \frac{dV}{dt} &= a_x \cos\alpha \cos\beta - a_y \sin\alpha \cos\beta + a_z \sin\beta; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_y \sin\gamma + \omega_z \cos\gamma; \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \operatorname{tg}\gamma (\omega_y \cos\gamma - \omega_z \sin\gamma), \end{aligned} \quad (1)$$

где α, β — углы атаки и скольжения, рад; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — угловые скорости относительно связанных осей, рад/с; ν, γ, ψ — углы тангажа, крена, рыскания, рад; V — истинная воздушная скорость, м/с; a_x, a_y, a_z — ускорения вдоль связанных осей, определяемые по формулам

$$\begin{aligned} a_x &= g(n_x - \sin \nu); \\ a_y &= g(n_y - \cos \nu \cos \gamma); \\ a_z &= g(n_z + \cos \nu \sin \gamma), \end{aligned} \quad (2)$$

где n_x, n_y, n_z — перегрузки вдоль связанных осей.

Главная особенность уравнений (1) заключается в том, что они не зависят от аэродинамических коэффициентов самолета, поскольку правые части можно вычислить через измеряемые в полете значения перегрузок и угловых скоростей.

Эти уравнения в векторной форме имеют вид

$$\dot{y}(t) = f(y(t), a, u(t)),$$

где $y(t), u(t)$ — векторы выходных и входных сигналов; a — вектор параметров. В данном случае вектор $y(t)$ состоит из сигналов $\alpha(t), \beta(t), V(t), \nu(t), \gamma(t)$. В вектор входных сигналов входят измеренные в полете значения угловых скоростей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и перегрузок n_x, n_y, n_z . Начальные условия $y(t_0)$ задаются по результатам измерений сигналов $\alpha(t), \beta(t), V(t), \nu(t), \gamma(t)$ в момент начала участка обработки.

Непосредственное численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (1) в общем случае не дает положительных результатов, поскольку постоянные составляющие погрешностей измерений входных сигналов $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и n_x, n_y, n_z создают на выходе интегралов погрешности типа линейного тренда, что не позволяет сравнивать выходные сигналы модели и объекта. Для устранения этого эффекта введем вектор неизвестных параметров a , состоящий из постоянных составляющих погрешностей измерений сигналов $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и n_x, n_y, n_z :

$$a^T = [C_{\omega_x} \ C_{\omega_y} \ C_{\omega_z} \ C_{n_x} \ C_{n_y} \ C_{n_z}].$$

Далее оценки вектора параметров определяются с помощью алгоритма параметрической идентификации, представленного ниже. В данной задаче вектор наблюдения включает величины $\alpha(t_i), \beta(t_i), V(t_i), \nu(t_i), \gamma(t_i)$, измеренные в дискретные моменты времени $t_i, i = 1, 2, \dots, N$, где N — число измерений на обрабатываемом участке.

Данный подход позволяет определять не только постоянные погрешности, входящие в вектор идентифицируемых параметров, но и динамические погрешности типа сдвиг по времени, которые легко выявляются при визуальном анализе результатов. На рис. 5, 6 показаны результаты об-

работки полетных режимов до и после введения компенсации сдвига по времени длительностью 0,19 с. На графике слева сдвиг по времени в каналах тангажа и крена не скомпенсирован, а справа — скомпенсирован. Особенно четко виден сдвиг в том канале, по которому идет основной сигнал.

Видно, как после введения компенсирующих сдвиг поправок улучшается сходимость измеренного и смоделированного сигналов. Наиболее вероятной причиной выявленных временных сдвигов является тот факт, что используемая в данном случае система регистрации при взаимодействии с другими бортовыми системами использует асинхронный интерфейс, вследствие чего сигналы тангажа и крена, поступающие от инерциальной системы, не синхронизированы относительно сигналов перегрузок и угловых скоростей, поступающих от комплексной системы управления (КСУ).

В процессе работы выполнено в ЛЭ и обработано по данному алгоритму порядка 100 участков полетов самолета во взлетной и посадочной конфигурациях, выполнена оценка точности соответствия в продольном и боковом движениях. Ниже представлены результаты обработки совокупности участков, на которых выполнялись дачи и перекладки органов управления в продольном и боковом каналах:

СКО невязки по углу тангажа $\nu, ^\circ$ 0,29
СКО невязки по углу атаки $\alpha, ^\circ$ 0,34
СКО невязки по углу скольжения $\beta, ^\circ$ 0,31
СКО невязки по истинной воздушной скорости, м/с . . . 0,36

Значения СКО говорят о достаточно высокой точности соответствия выходных сигналов в продольном и боковом движениях после коррекции выявленных выше динамических погрешностей в каналах тангажа и крена.

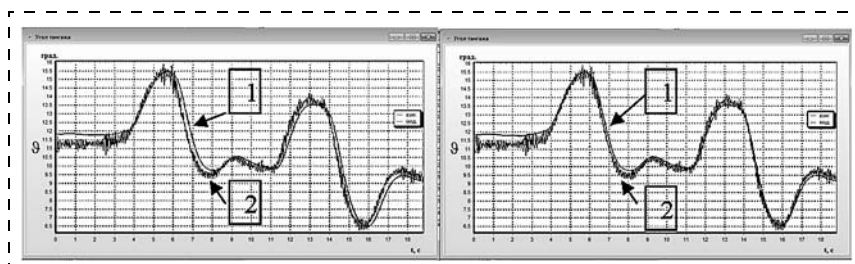


Рис. 5. Исходный и скорректированный сигналы в продольном канале на режиме "дачи РУС по тангажу" (1 — смоделированный, 2 — измеренный сигналы)

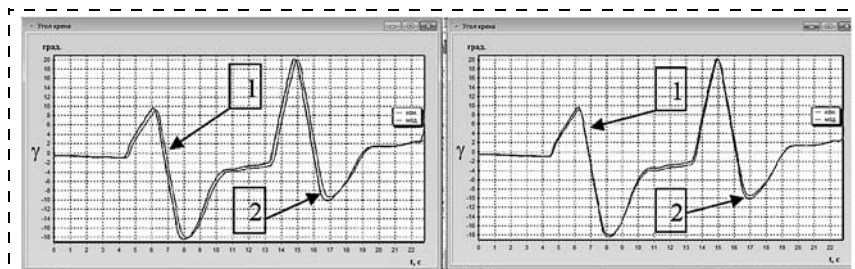


Рис. 6. Исходный и скорректированный сигналы в боковом канале на режиме "перекладки РУС по крену" (1 — смоделированный, 2 — измеренный сигналы)

4. Предварительная оценка нелинейных зависимостей

Обработка алгоритмами идентификации полученных в ЛЭ материалов выполняется с помощью различных модулей пакета программ в следующей последовательности. Выбирается участок с маневром типа "дача по тангажу" (серия дач по тангажу) длительностью 10...30 с и конвертируется в текстовый формат. Определяются точная длительность участка и средняя на участке полетная масса самолета. По значению массы и признаку положения шасси и механизации (для определения текущей конфигурации самолета) с помощью программы вычисления инерционно-массовых характеристик определяются значения моментов инерции и центровки. В управляющие файлы модуля проверки правильности измерений и регистрации полетных данных вводятся имя текстового файла данных, длительность обрабатываемого полетного участка, частота регистрации полетных данных. Далее в файл исходных значений параметров моделирования вводятся значения моментов инерции, априорные оценки аэродинамических коэффициентов согласно банку аэродинамических данных, эффективная тяга двигателей. Особенность предварительного оценивания нелинейностей состоит в том, что оно выполняется с использованием априорных значений коэффициента m_z^0 согласно банку аэродинамических данных (рис. 7, см. третью сторону обложки).

Оценки нелинейностей, т. е. зависимостей коэффициента момента тангажа по углу атаки $m_z(\alpha)$ и коэффициента подъемной силы по углу атаки $c_y(\alpha)$ вычисляются по формулам раздела 6.

Для расчета априорных значений аэродинамических коэффициентов используется банк аэродинамических характеристик, сформированный разработчиком самолета по данным трубного эксперимента до начала ЛИ. Эти же значения используются на завершающем этапе при сравнении оценок идентификации с данными трубного эксперимента.

Результаты предварительной идентификации анализируются по графикам, получаемым с помощью модуля отображения нелинейных зависимостей в функции угла атаки (рис. 8, см. третью сторону обложки).

Необходимыми условиями правильности получаемых результатов являются:

- близкое совпадение полетных и моделируемых сигналов на графиках модуля (рис. 9, см. четвертую сторону обложки);
- близость зависимостей коэффициента момента тангажа по углу атаки $m_z(\alpha)$ и коэффициента подъемной силы по углу атаки $c_y(\alpha)$ к однозначным функциям (линейным или нелинейным), ширина полосы разброса, как правило, не

должна превышать 0,005...0,008 по $m_z(\alpha)$ и 0,05 — по $c_y(\alpha)$ (рис. 8, см. четвертую сторону обложки, и рис. 10);

- следует обратить внимание, не имеют ли зависимости $m_z(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$ изгибов и изломов, и при их наличии следует зафиксировать значения углов атаки в точках изломов для последующих этапов.

По графикам следует также приблизительно определить диапазон изменений и среднее значение угла атаки на участке обработки.

5. Выполнение идентификации параметров продольного движения

Идентификация параметров продольного движения выполняется с помощью соответствующего модуля из пакета программ для идентификации. При этом используется алгоритм, основанный на соотношениях между основными параметрами продольного движения ЛА, значения которых регистрируются системой бортовых измерений. При этом предполагается, что динамические свойства датчиков нормальной перегрузки и угловой скорости описываются звеном второго порядка с передаточной функцией

$$x_{\text{изм}}(p) = \frac{1}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} x(p), \quad (3)$$

где T , ξ — постоянная времени и коэффициент демпфирования датчика; $x(p)$ — значение измеряемого параметра (угловой скорости или нормальной перегрузки); $x_{\text{изм}}(p)$ — выходной сигнал датчика.

Система дифференциальных уравнений, которая описывает продольное движение самолета, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha(t)}{dt} &= \omega_z(t) - c_y^\alpha \frac{qS}{mV(t)} \alpha(t) - c_y^\phi \frac{qS}{mV(t)} \phi_B(t), \\ \frac{d\omega_z(t)}{dt} &= \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_x(t) \omega_y(t) + m_z^\alpha \frac{qSb_A}{J_z} \alpha(t) + \\ &+ m_z^\phi \frac{qSb_A}{J_z} \phi_B(t) + \frac{m_z^{\omega_z} qSb_A}{J_z} \cdot \frac{b_A}{V(t)} \omega_z(t) + \\ &+ \frac{m_z^{\ddot{\alpha}} qSb_A}{J_z} \cdot \frac{b_A}{V(t)} \frac{d\alpha(t)}{dt} - K_{\text{ДВ}} \omega_y(t) - P_{y\text{ДВ}}, \end{aligned} \quad (4)$$

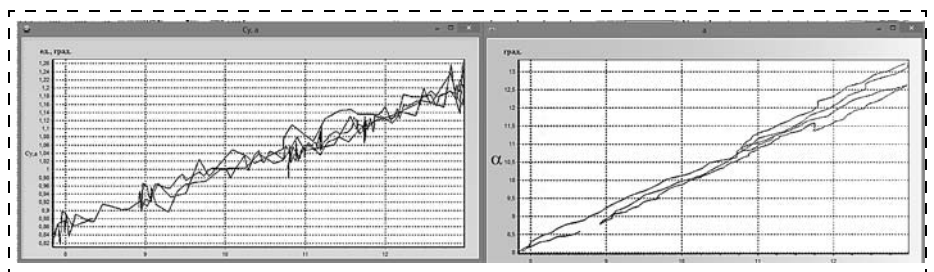


Рис. 10. Полученные в процессе идентификации оценки зависимости $c_y(\alpha)$ (слева) и сравнение измеренных в полете и моделируемых углов атаки (справа) в форме графика "параметр по параметру"

где $\alpha(t)$ — угол атаки; $\varphi_B(t)$ — угол отклонения стабилизатора; J_x, J_y, J_z — моменты инерции; m — масса; S — эквивалентная площадь крыла; $V(t)$ — истинная воздушная скорость; $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ — угловые скорости относительно связанных осей; b_A — средняя аэродинамическая хорда; q — скоростной напор; c_y^α, c_y^φ — производные аэродинамического коэффициента подъемной силы по углу атаки и углу отклонения стабилизатора; $m_z^\alpha, m_z^\varphi, m_z^{\omega_z}, m_z^{\bar{\alpha}}$ — производные аэродинамического коэффициента момента тангажа по углу атаки, углу отклонения стабилизатора, угловой скорости тангажа, угловой скорости угла атаки; $P, u_{дв}$ — сила тяги двигателя и ее плечо относительно центра масс; $K_{дв}$ — момент инерции роторов двигателя.

Система (4) дополняется четырьмя дифференциальными уравнениями, описывающими датчики угловой скорости и нормальной перегрузки. Уравнения датчиков формируются на основе передаточной функции (3) по известной методике [3, 4].

Далее рассматривается задача идентификации. При этом уравнения (4) считаются моделью объекта, а в качестве элементов вектора наблюдений выбираются выходные сигналы датчиков нормальной перегрузки и угловой скорости. Входным сигналом являются измеренные в полете отклонения стабилизатора.

Как следует из представленных уравнений, модель безразмерных коэффициентов подъемной силы и продольного момента задается в виде

$$c_{ye} = c_{y0} + c_y^\alpha \alpha + c_y^\varphi \varphi_B,$$

$$m_z = m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \varphi_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{b_A}{V} \omega_z + m_z^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \frac{d\alpha}{dt},$$

где смысл коэффициентов раскрыт в примечаниях к формуле (4).

Параметры $m_z^{\bar{\alpha}}, c_y^\varphi$, в соответствии с общепринятыми подходами [3, 4, 9], задаются по исходному банку аэродинамических данных. В состав вектора неизвестных параметров включаются аэродинамические коэффициенты $a^T = [c_{y0} \ c_y^\alpha \ m_{z0} \ m_z^\alpha \ m_z^\delta \ m_z^{\bar{\omega}_z}]$. При наличии в зависимостях $c_y(\alpha), m_z(\alpha)$ точек изгиба в идентифицируемый вектор могут включаться значения производных подъемной силы и момента тангажа справа от точки изгиба. Для оценивания вектора неизвестных параметров используется алгоритм идентификации, детальный анализ которого представлен в работе [5].

Пусть в общей форме модели объекта и наблюдений имеют вид

$$y'(t) = f(y(t), a, u(t)), \quad (5)$$

$$z(t_i) = h(y(t_i), a, u(t_i)) + \vartheta(t_i), \quad (6)$$

где $y(t), u(t)$ — векторы состояния и входных сигналов; z — вектор наблюдений; a — вектор идентифицируемых параметров; $\vartheta(t_i)$ — вектор погрешностей наблюдений, по определению являющийся последовательностью случайных нормальных независимых векторов с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсионной матрицей $R(t_i)$; $f(\cdot), h(\cdot)$ — известные векторные функции векторных аргументов.

Оценки вектора параметров $\hat{a}$ находятся из условия минимума функционала

$$J(\hat{a}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [z(t_i) - \hat{z}(\hat{a}, t_i)]^T (R(t_i))^{-1} [z(t_i) - \hat{z}(\hat{a}, t_i)],$$

в котором $\hat{z}(\hat{a}, t_i)$ — оценка прогноза вектора наблюдений при заданном значении вектора параметров $\hat{a}$, которую получают путем численного интегрирования уравнений (5) и (6) при нулевых шумах наблюдений $\vartheta(t_i)$.

Тогда идентификация выполняется по следующей рекуррентной формуле:

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k - [\nabla^2 J(\hat{a}_k)]^{-1} [\nabla^T J(\hat{a}_k)],$$

где оценки первого и второго градиентов минимизируемого функционала имеют вид

$$\nabla J(\hat{a}_k) = - \sum_{i=1}^N [z(t_i) - \hat{z}(\hat{a}_k, t_i)]^T (R(t_i))^{-1} [\nabla^T \hat{z}_{\hat{a}_k}(t_i)];$$

$$\nabla^2 J(\hat{a}_k) = \sum_{i=1}^N [\nabla \hat{z}_{\hat{a}_k}(t_i)]^T (R(t_i))^{-1} [\nabla \hat{z}_{\hat{a}_k}(t_i)].$$

Входящая в формулы для градиентов величина

$$\nabla \hat{z}_{\hat{a}_k}(t_i) = \begin{bmatrix} \frac{\delta \hat{z}_{\hat{a}_k}(t_i)}{\delta a_{k1}} & \frac{\delta \hat{z}_{\hat{a}_k}(t_i)}{\delta a_{k2}} & \dots & \frac{\delta \hat{z}_{\hat{a}_k}(t_i)}{\delta a_{kp}} \end{bmatrix}$$

представляет собой производную оценки прогноза по вектору параметров и определяется, как правило, численно.

Условие окончания идентификации:

$$\|\hat{a}_{k+1} - \hat{a}_k\| < 0,02 \|\hat{a}_k\|,$$

где знак $\|\cdot\|$ означает модуль вектора.

На данном этапе процедуры обработки полетных данных в управляющие файлы модуля идентификации параметров продольного движения вводятся имя текстового файла данных, длительность участка полета в секундах, частота регистрации полетных данных, значения моментов инерции, оценки аэродинамических коэффициентов согласно априорным оценкам по банку аэродинамических данных, эффективная тяга двигателей. Также необходимо указать значение угла атаки в середине участка или в точке самого существенного изгиба зависимостей $c_y(\alpha), m_z(\alpha)$ и задать априорные оценки коэффициен-

тов аэродинамических производных $\frac{dc_y(\alpha)}{d\alpha}$, $\frac{dm_z(\alpha)}{d\alpha}$

для диапазона углов атаки, значения которых больше, чем в точке изгиба. При анализе полученных результатов необходимо обратить внимание на отношение СКО невязок, т. е. разностей измеренных и оцененных в модели сигналов, к СКО сигнала. При хорошей сходимости доля расхождений должна составлять 7...20 %.

Качество соответствия модели объекту можно оценить и по графикам модуля отображения результатов идентификации аэродинамических коэффициентов (рис. 11, см. четвертую сторону обложки). На рис. 11 для одного участка полета показаны графики выходных сигналов объекта (нормальная перегрузка, угловая скорость тангажа, угол атаки) в функции времени. Представлены одноименные сигналы, измеренные в полете и вычисленные в модели после идентификации аэродинамических коэффициентов. Графики подтверждают высокую точность соответствия полученной модели летному эксперименту.

После окончания работы модуля необходимо выписать оценку параметра эффективности стабилизатора и скорректировать исходные данные в файле модуля проверки правильности измерений и регистрации для уточненного определения нелинейностей.

6. Уточненное определение нелинейностей

Пусть в полете выполнены измерения параметров движения в моменты t_i , $i = \overline{1, N}$. На основании уравнений пространственного движения можно получить следующие выражения для аэродинамических коэффициентов подъемной силы и продольного момента:

$$c_y(t_i) = \frac{(n_y(t_i)\cos\alpha(t_i) + n_x(t_i)\sin\alpha(t_i))mg - P\sin(\alpha(t_i) + \varphi_{\text{ДВ}})}{qS},$$

$$m_z(t_i) = \left(\frac{J_z}{qSb_A} \right) \left(\frac{d\omega_z(t_i)}{dt} - \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_x(t_i)\omega_y(t_i) + \frac{(K_{\text{ДВ}}\omega_y(t_i) + P_{y_{\text{ДВ}}})}{J_z} \right),$$

где $\varphi_{\text{ДВ}}$ — угол установки двигателя; $n_y(t_i)$, $n_x(t_i)$ — проекции перегрузки на соответствующие оси свя-

занной системы координат. Остальные обозначения раскрыты в пояснениях к формуле (4). Производная в правой части находится численно, остальные величины заменяются измеренными в полете или априорными значениями.

С точки зрения уменьшения влияния шумов на операцию численного дифференцирования хорошие результаты дает предложенная в работе [1] формула, в которой применяется полиномиальное сглаживание на скользящем интервале:

$$\hat{y}'(t_i) = \sum_{j=-m}^m b_j y(t_i + j), \quad i = \overline{m+1, N-m}. \quad (7)$$

Оценки производной, вычисленные по формуле (7), обладают свойствами несмещенности и минимальной дисперсии.

При использовании сглаживающего полинома четвертого порядка коэффициенты вычисляются по формуле

$$b_j = \frac{5[5(3m^4 + 6m^3 - 3m + 1)j - 7(3m^2 + 3m - 1)j^3]}{h(m^2 - 1)m(m + 2)(4m^2 - 1)(2m + 3)},$$

где $h = t_{i+1} - t_i$ — интервал дискретизации. Как правило, выбирается $m = 5$.

Указанные выше формулы используются для уточненного определения нелинейностей. Формулы реализованы в модуле проверки правильности измерений и регистрации. Модуль запускается повторно, при этом в нем используются полученные на предыдущем этапе оценки эффективности стабилизатора. На рис. 12 показаны оценки $m_z(\alpha)$, $c_y(\alpha)$ продольного момента и коэффициента подъемной силы, представленные в функции от угла атаки, измеренного в полете. Эти оценки вычислены в соответствии с предложенными выше алгоритмами. Отличия зависимостей от строгой однозначной функции характеризуют погрешности, имеющие место в ЛЭ.

7. Учет тяги двигателя при идентификации аэродинамических коэффициентов продольного движения

Разработанная методика предусматривает выполнение идентификации коэффициентов аэродинамических сил и моментов продольного движения самолета с учетом тяги двигателей и создаваемого

двигателями продольного момента. Значения эффективной тяги определяются по газодинамической модели двигателя [12] или по данным ЛА по отдельной методике [11]. В данной работе использовались расчеты по модели двигателя. Важность учета изменения продольного момента, создаваемого двигателями, подтверждается результа-

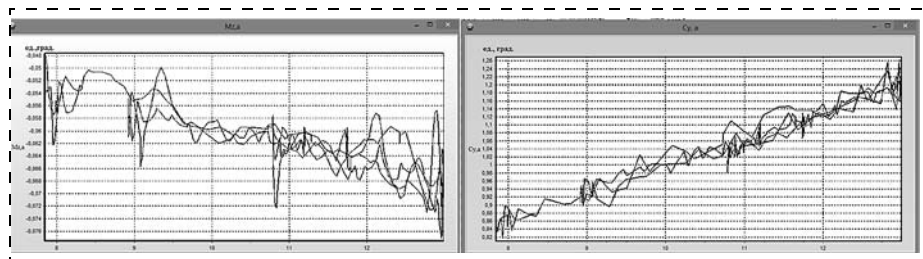


Рис. 12. Примеры полученных зависимостей $m_z(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$

тами идентификации, представленными на рис. 13 (см. четвертую сторону обложки). Участки были выбраны для одной конфигурации самолета (посадочной), на близких высотах и скоростях полета, соответствующих режиму захода на посадку, но для различных углов атаки в диапазоне $2...16^\circ$. Так, на рис. 13, а показаны результаты идентификации коэффициента продольного момента без учета тяги двигателя. Видно, что два полетных участка явно выделяются из общего ряда, в отличие от рис. 13, б, на котором представлены результаты идентификации с учетом момента от двигателей, — результаты по всем обработанным участкам выстраиваются в непротиворечивую картину. Значение тяги двигателей используется также при расчете оценки коэффициента силы сопротивления.

9. Сравнение полученных результатов с банком аэродинамических характеристик

В данном разделе на рис. 14 (см. четвертую сторону обложки) представлены обобщенные оценки аэродинамических коэффициентов продольного движения самолета в сравнении с исходным банком аэродинамических характеристик. Они показывают высокую согласованность оценок идентификации по всем пяти рассматриваемым участкам полета. На этих же рисунках показаны значения коэффициентов, взятые из априорного банка аэродинамических характеристик, составленного по материалам эксперимента в аэродинамических трубах. По коэффициентам подъемной силы и лобового сопротивления результаты идентификации и трубного эксперимента сходятся с высокой точностью. Некоторые отличия по коэффициенту сопротивления вызваны, вероятно, погрешностями имеющейся модели двигателя.

По коэффициенту продольного момента банк существенно отличается от данных идентификации. Однако, поскольку оценки идентификации по всем пяти участкам полета на различных углах атаки складываются в непротиворечивую картину, следует предположить, что ошибки по рассматриваемой полетной конфигурации относятся к материалам трубного эксперимента.

На рис. 14, в (см. четвертую сторону обложки) коэффициент продольного момента взят из банка аэродинамических характеристик с учетом изменений от выпущенных шасси и механизации. Поэтому сравнение его с полученной методами идентификации из ЛИ характеристикой реального самолета вполне корректно.

Заключение

Рассмотренное методическое, алгоритмическое и программное обеспечение позволяет получать дос-

товерные оценки аэродинамических коэффициентов самолетов в пределах эксплуатационного диапазона режимов полета с учетом тяги двигателя, что подтверждено результатами обработки полетных данных. Полученные результаты представляют возможность находить неточности в банке аэродинамических характеристик, выполнять его корректировку и уточнять математическую модель ЛА по результатам ЛИ.

Список литературы

1. **Васильченко К. К., Леонов В. А., Пашковский И. М., Поплавский Б. К.** Летные испытания самолетов. М.: Машиностроение, 1996. 745 с.
2. **Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов** / Под ред. Бюшгенса Г. С. М.: Наука. Физматлит, 1998. 816 с.
3. **Создание и применение математических моделей самолетов** / Белоцерковский С. М. и др. М.: Наука, 1984. 143 с.
4. **Структурная идентификация математической модели движения самолета** / Васильченко К. К. и др. М.: Машиностроение, 1993. 352 с.
5. **Корсун О. Н., Поплавский Б. К.** Метод оценивания систематических погрешностей бортовых измерений углов атаки и скольжения на основе данных спутниковой навигационной системы и идентификации скорости ветра. // Теория и системы управления. 2011. № 1. С. 156—168.
6. **Корсун О. Н., Николаев С. В.** Методика коррекции математической модели палубного самолета на взлетно-посадочных режимах // Труды Седьмого международного аэрокосмического конгресса IAC'2012. М.: Международный Фонд попечителей МГАТУ им. К. Э. Циолковского, 2012, 1 электрон. опт. диск (CD-ROM), гос. рег. № 0321303652.
7. **Корсун О. Н., Николаев С. В., Балык О. А., Разуваев Д. В.** Уточнение аэродинамических характеристик палубного самолета на режимах трамплинного взлета и посадки на корабль // Сб. матер. докл. Всероссийской науч.-практ. конф. "ВВС — 100 лет на страже неба России: история, современное состояние, перспективы развития". Часть 2. Воронеж, Военный авиационный инженерный университет. 2012. С. 51—52.
8. **Корсун О. Н., Пушков С. Г., Горшкова О. Ю.** Математические модели погрешностей бортовых измерений скорости и угла атаки на режимах посадки самолета. // Мехатроника, автоматизация, управление. 2013. № 8. С. 65—70.
9. **Корсун О. Н., Семенов А. В.** Методика определения характеристик устойчивости и управляемости высотного дозвукового самолета М-55 "Геофизика" по результатам летного эксперимента и моделирования // Полет. 2006. № 2. С. 22—29.
10. **Корсун О. Н., Мотлич П. А.** Комплексный контроль бортовых измерений основных параметров полета летательного аппарата // Электронный научно-технический журнал "Наука и образование". 2013. № 1. С. 135—148.
11. **Корсун О. Н., Поплавский Б. К., Леонов В. А.** Оценка силы тяги двигателей воздушных судов по данным летных испытаний на основе оптимальных инвариантных линейных преобразований // Техника воздушного флота. 2011. № 1. С. 25—30.
12. **Корсун О. Н., Лещенко И. В., Немичев М. В.** Математическое моделирование переходных процессов в авиационном газотурбинном двигателе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 11. С. 50—54.
13. **Корсун О. Н.** Принципы параметрической идентификации математических моделей самолетов по данным летных испытаний. // Мехатроника, автоматизация, управление. Приложение. 2008. № 6. С. 2—7.
14. **ГОСТ 20058—80.** Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения. М.: Издательство стандартов, 1981. 54 с.

Identification of the Aerodynamic Coefficients of Longitudinal Motion of an Aircraft in the Operational Range of the Attack Angles

O. N. Korsun, D. Sc., Professor, marmotto@rambler.ru,
State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, 109029, Russian Federation

S. V. Nikolaev, Head of Department, nikozavr@mail.ru,
State Test-flight Center named after V. P. Chkalov, Akhtubinsk

Received on December 13, 2014

This work presents a methodology for identification of aerodynamic coefficients of longitudinal motion of an aircraft in the operational range of the attack angles, taking into account the nonlinearities and changes in the engine operation. A solution to this problem envisages development of methodological, algorithmic and software support for the process of determination of the characteristics of stability and controllability of the aircraft, using flight experiments data and the results of the mathematical and semi-natural simulation. The paper discusses the basic steps of the identification technique and examples of its use. In the test-flights more than 100 test modes were performed with the purpose to obtain materials for identification of the aerodynamic coefficients for longitudinal movement and for the aerodynamic coefficients of the lateral movement. In order to assess the correctness of functioning of the on-board systems for measuring and recording a special algorithm was applied, based on the relationship between the flight parameters defined by the equations of spatial motion of the aircraft. The results of testing and the methodology on the example of a modern maneuverable aircraft are considered. The obtained estimates of the aerodynamic coefficients of the longitudinal motion of the aircraft in comparison with the a-priori wind-tunnel aerodynamic characteristics are presented. The method allows us to obtain reliable estimates of the aerodynamic coefficients of an aircraft within the operating range of the flight conditions, which is proved by the results of the flight data processing. The identification results will make it possible to reveal inaccuracies in the a-priori wind-tunnel aerodynamic characteristics, make adjustments and improve the mathematical model of an aircraft in accordance with the flight test data. A distinctive feature of the technique is the focus on the improvement of the identification procedures and development of a user-friendly graphic interface, which can be achieved due to specially developed algorithms and software.

Keywords: identification, methodology, test-flights, aerodynamic coefficients

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, projects no. 12-08-00682-a.

For citation:

Korsun O. N., Nikolaev S. V. Identification of the Aerodynamic Coefficients of Longitudinal Motion of an Aircraft in the Operational Range of the Attack Angles, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 269–276.

DOI: 10.17587/mau.16.269-276

References

1. **Vasil'chenko K. K., Leonov V. A., Pashkovskij I. M., Poplavskij B. K.** Letnye ispytaniya samoletov (Aircraft Flight tests), Moscow, Mashinostroenie, 1996, 745 p. (in Russian).
2. **Bjushgensa G. S. (ed.)** Aerodinamika, ustojchivost' i upravljajemost' sverhzvukovyh samoletov (Aerodynamics, stability and control of supersonic aircrafts), Moscow, Nauka, Fizmatlit, 1998, 816 p. (in Russian).
3. **Belocerkovskij S. M., Morozov A. M., Kachanov B. O., Kulifeev J. B.** Sozdanie i primenenie matematicheskikh modelej samoletov (Creating and using mathematical models of aircraft), Moscow, Nauka, 1984, 143 p. (in Russian).
4. **Vasil'chenko K. K., Kochetkov Y. A., Leonov V. A., Poplavskij B. K.** Strukturnaja identifikacija matematicheskoy modeli dvizhenija samoleta (Structural identification of mathematical model of the motion of the aircraft), Moscow, Mashinostroenie, 1993, 352 p. (in Russian).
5. **Korsun O. N., Poplavskij B. K.** Metod ocenivaniya sistematicheskikh pogreshnostej bortovyh izmerenij uglov ataki i skol'zhenija na osnove dannyh sputnikovoj navigacionnoj sistemy i identifikacii skorosti vetra (Method of estimation of systematic errors of onboard measurements of angles of attack and slip on the basis of data from the satellite navigation system and identification of wind speed.), *Teorija i Sistemy Upravljenja*, 2011, no. 1, pp. 156–168. (in Russian).
6. **Korsun O. N., Nikolaev S. V.** Metodika korrekcii matematicheskoy modeli palubnogo samoleta navzletno-posadochnyh rezhimov (Method of correction of a mathematical model of the aircraft on take-off and landing modes), Proc. of the Seventh International Aerospace Congress IAC'2012, Moscow, published by International Fund Trustees MGATU n. a. K. E. Tsiolkovsky, 2012. (in Russian).
7. **Korsun O. N., Nikolaev S. V., Balyk O. A., Razuvaev D. V.** Utochnenie ajerodinamicheskikh harakteristik palubnogo samoleta na rezhimah tramplinnogo vzleta i posadki na korabl' (Refinement of the aerodynamic characteristics of the aircraft at take-off and landing on the ship), Proc. of the All-Russian Scientific-Practical Conference "VVS — 100 let nastrazhe neba Rossii: istorija, sovremennoe sostojanie, perspektivy razvitiya", Part 2, Voronezh, published by Military Aviation Engineering University, 2012, pp. 51–52. (in Russian).
8. **Korsun O. N., Pushkov S. G., Gorshkova O. Ju.** Matematicheskie modeli pogreshnostej bortovyh izmerenij skorosti i ugla ataki na rezhimah posadki samoleta (Mathematical model of errors of onboard measurements of speed and angle of attack on the landing.), *Mekhatronika, Avtomatizacija Upravljenja*, 2013, no 8, pp. 65–70. (in Russian).
9. **Korsun O. N., Semenov A. V.** Metodika opredelenija harakteristik ustojchivosti i upravljajemosti vysotnogo dozvukovogo samoleta M-55 "Geofizika" po rezul'tatam letnogo jeksperimenta i modelirovaniya (Method of determining the characteristics of stability and controllability of high-altitude subsonic aircraft M-55 Geofizika on the results of the flight experiment and simulation), *Polet*, 2006, no 2, pp. 22–29. (in Russian).
10. **Korsun O. N., Motlich P. A.** Kompleksnyj kontrol' bortovyh izmerenij osnovnyh parametrov poleta letatel'nogo apparata (Integrated control of onboard measurements of the basic of the aircraft flight), *Nauka i obrazovanie*, 2013, no 1, pp. 135–148. (in Russian).
11. **Korsun O. N., Poplavskij B. K., Leonov V. A.** Ocenka sily tjagi dvigatelej vozdušnyh sudov po dannyh letnyh ispytaniy na osnove optimal'nyh invariantnyh linejnyh preobrazovanij (Evaluation of thrust engines for aircraft flight test data based on the optimal invariant linear transformations), *Tehnika Vozdušnogo Flota*, 2011, no 1, pp. 25–30. (in Russian).
12. **Korsun O. N., Leshhenko I. V., Nemichev M. V.** Matematicheskoe modelirovanie perehodnyh processov v aviacionnom gazoturbinnom dvigatele (Mathematical modeling of transient processes in aircraft gas turbine engine), *Mekhatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2011, no 11, pp. 50–54. (in Russian).
13. **Korsun O. N.** Principy parametricheskoy identifikacii matematicheskikh modelej samoletov po dannyh letnyh ispytaniy (Principles of parametric identification of mathematical models of aircraft flight test data), *Mekhatronika, avtomatizacija, upravlenie*, Application, 2008, no 6, pp. 2–7. (in Russian).
14. **GOST 20058–80.** Dinamika letatel'nyh apparatov v atmosfere. Terminy, opredelenija i oznachenija (The dynamics of the aircraft in the atmosphere. Terms, definitions and notation), Moscow, Izdatel'stvo standartov, 1981, 54 p. (in Russian).

Corresponding author:

O. N. Korsun, Professor, Dr. Sci. Tech., State Research Institute of aviation systems, Moscow, 109029, Russian Federation. e-mail: marmotto@rambler.ru.

С. Н. Лосев, специалист, В. И. Макаренко, специалист,
Н. Н. Подольская, специалист, podolsky47@inbox.ru, ЗАО "ВНИИРА-ОВД", г. Санкт-Петербург

Вероятностно-геометрический метод среднесрочного обнаружения конфликтов между воздушными судами

Представлен метод обнаружения конфликтов между воздушными судами в воздухе на интервале прогнозирования до 20 минут, основанный на сопоставлении текущих планов полета и реализованный в составе системы управления воздушным движением. Метод является комбинированным, сочетающим в себе геометрический и вероятностный алгоритмы.

Ключевые слова: управление воздушным движением, среднесрочное обнаружение конфликтов, безопасность полетов, режим реального времени

Введение

Несмотря на то что полеты воздушных судов (ВС) выполняются в соответствии с расписаниями, столкновения в воздухе все же случаются. Обеспечение безопасных дистанций между ВС усложнено в современных условиях роста интенсивности воздушного движения. Заблаговременное автоматическое выявление опасности нежелательных сближений является весьма актуальным.

Предположение о конфликте или о недопустимом сближении траекторий ВС, возможном в рамках обозреваемого диапазона времени, базируется на конструировании предполагаемых траекторий. Предполагаемые же траектории ВС подвержены влиянию множества факторов и носят вероятностный характер.

Известные методы обнаружения конфликтов различаются между собой способами манипулирования погрешностями прогнозирования значений параметров движения ВС. Как справедливо отмечается, например, в кратком их обзоре, приведенном в работе [1], вычислительная сложность препятствует практическому использованию этих методов.

В данной работе представлен метод среднесрочного обнаружения конфликтов, который, сочетая подходы к решению задачи как детерминированного, так и вероятностного характера, обеспечивает возможность реализации программы реального времени.

Этапы обнаружения конфликтов между ВС

На земле обнаружение конфликтов между ВС выполняется в три этапа, соответствующих различным интервалам прогнозирования [1, 2]. Для каждого этапа наиболее информативным является специфический набор данных, соответственно, специфически являются и методы обработки этих данных.

На этапе обнаружения долгосрочных конфликтов (интервал прогнозирования 20...60 мин), когда системе управления воздушным движением (УВД) известен только стратегический (пассивный) план полета ВС, по этому плану строится номинальная траектория. Совокупность таких траекторий анализируется на бесконфликтность. Реальный полет происходит с отклонениями от стратегического плана, и отклонения настолько велики, что учесть их при обнаружении долгосрочных конфликтов невозможно.

На другом полюсе находится этап обнаружения краткосрочных конфликтов (интервал прогнозирования до 2 мин). Здесь движение ВС предполагается равномерным прямолинейным, и для определения области вероятного местоположения ВС важен только текущий вектор путевой скорости и пределы его возможного изменения за малое время. Область неопределенности прогнозирования местоположения имеет вид веера, тем более узкого, чем больше модуль скорости. Плановая информация при этом бесполезна.

На среднесрочном же интервале прогнозирования (2...20 мин) сведения о плановой траектории не учитывать нельзя. В то время, когда ВС уже находится в зоне управления системы или через несколько минут войдет в нее из смежной зоны на известных условиях, или готово к взлету с аэродрома зоны управления, стратегический план полета является устаревшим. В это время его заменяет тактический (активный), динамически обновляемый план полета.

Траектория ВС представляется, в соответствии с планом, в виде ломаной линии, для точек излома которой рассчитаны пространственно-временные координаты. Метод среднесрочного обнаружения конфликтов, базируясь на этих данных, должен учитывать допуски на пространственно-временные координаты траектории. При этом метод должен обеспечивать возможность программной реализации практически непрерывного мониторинга воздушной обстановки.

Особенности среднесрочного этапа обнаружения конфликтов

Прогнозируемая пространственно-временная траектория ВС постоянно поддерживается в состоянии соответствия новейшей информации об условиях передачи управления ВС от одного субъекта управления к другому, о текущих оценках параметров движения, основанных на обработке радиолокационной информации, и о погоде (о ветре и температуре, влияющих на путевую скорость). Однако ошибки прогнозирования местоположения ВС в наперед заданный момент времени, обусловленные различными физическими процессами, вызывают отклонения от прогнозируемой траектории.

Боковое отклонение от номинальной траектории подчиняется нормальному закону распределения и характеризуется постоянным на всем интервале прогнозирования значением среднеквадратической погрешности, равным примерно 920 м (0,5 морской мили).

Ошибка прогнозируемой путевой скорости также подчиняется нормальному закону распределения и постоянна на всем интервале прогнозирования. Поэтому ошибка прогнозирования продольного местоположения, проистекающая, в основном, из неопределенности оценки путевой скорости и тоже подчиняющаяся нормальному закону распределения, растет с ростом интервала прогнозирования по линейному закону. Если среднеквадратическая погрешность прогнозирования путевой скорости составляет 2,57 м/с (5 узлов), то продольный интервал неопределенности положения ВС $\pm 3\sigma$ через 10 мин составит примерно 9250 м, через 15 мин — 13 880 м, через 20 мин — 18 500 м.

Этим объясняется 20-минутный потолок области решения задачи среднесрочного обнаружения конфликтов. При этом известно [3], что снижение верхней временной границы с 20 до 15 мин может сократить число ложных тревог на величину до 66 % (при нижней временной границе 8 мин), существенно повышая эффективность обнаружения.

Задачу среднесрочного обнаружения конфликтов нельзя решать при игнорировании неопределенности прогнозирования [2]. Предположим, что сопоставление номинальных траекторий показало, что через 20 мин два ВС окажутся на расстоянии 18 км друг от друга. Такая дистанция сближения может считаться безопасной (стандартное эшелонирование на трассах в Европе составляет 5 морских миль, или 9260 м), и метод, основанный только на сопоставлении номинальных траекторий, покажет, что через 20 мин конфликт не ожидается. Однако области возможного местоположения ВС, размер которых вдоль траектории движения составляет $\pm 3\sigma$, могут пересекаться, следовательно, опасное сближение сможет произойти. Поэтому применение такого "метода фиксированных порогов" не корректно, хотя он и используется в некоторых инструментах типа Medium Term Conflict Detection (MTCD) Евроконтроля¹ [4].

Вместе с тем, можно построить горизонтальные области неопределенности позиций ВС, окружающие их номинальные позиции в рассматриваемый момент времени, и найти минимальное расстояние между областями, после чего сопоставить это расстояние с пороговым. Результатом сопоставления будет декларация либо наличия, либо отсутствия конфликта. Несмотря на то что области неопределенности строятся по принципам теории вероятностей, такой подход к решению задачи, тяготеющий к детерминированному, называется *геометрическим* [5]. Можно сказать, что вероятность конфликта в этом случае принимается равной либо 1, либо 0.

¹ Евроконтроль — Европейская организация по безопасности воздушной навигации.

Подход же, называемый *вероятностным* [5], предполагает конструирование функций плотности вероятности местоположений ВС и обработку этих функций для расчета вероятности сближения ВС на дистанцию, меньшую пороговой.

Предлагаемый метод решения задачи включает два алгоритма, названных нами в соответствии с принадлежностью к указанным подходам геометрическим и вероятностным. По своей роли в решении задачи алгоритмы представляют, соответственно, "базис" метода и его "надстройку".

Геометрический алгоритм обнаружения конфликтов позволяет минимизировать число пропусков конфликтов, ведь, рассматривая области вероятного нахождения ВС в горизонтальной проекции как эллипсы [6], окружающие номинальные местоположения и имеющие оси, длина которых как в продольном, так и поперечном направлениях выбрана в соответствии с Правилем трех сигм, мы охватываем рассмотрение практически всех возможных позиций. А ложные тревоги, с точки зрения безопасности воздушного движения, не так вредны, как пропуски конфликтов.

Вероятностный же алгоритм вычисления вероятности сближения на дистанцию, меньшую пороговой, служит для выработки дополнительной информации, характеризующей меру критичности ситуации [2] и предоставляемой диспетчеру.

Таким образом, метод соответствует требованиям Евроконтроля к системе среднесрочного обнаружения конфликтов [7]:

1. Система должна допускать динамическую эволюцию неопределенности, которая добавляется к параметрам эшелонирования для отражения роста неопределенности по каждой размерности фазы полета при увеличении времени прогнозирования.
2. Система может вычислять вероятность нарушения норм эшелонирования на основе неопределенностей траекторий и их геометрии.

Важным достоинством предлагаемого метода является то, что на его основе создана программа, работающая в режиме реального времени.

Геометрический алгоритм среднесрочного обнаружения конфликтов

Мы сознательно, ради упрощения (подразумеваемая повышение быстродействия), применили адаптацию описанного ранее геометрического подхода, сопровождающуюся увеличением ожидаемой доли ложных обнаружений [8]. Во-первых, вместо эллипса мы рассматриваем описанный прямоугольник. Во-вторых, мы "раздвигали" этот прямоугольник, смещая его стороны параллельно самим себе на величину минимально допустимой дистанции. Теперь не надо искать расстояние между прямоугольниками. Достаточно обнаружить их пересечение, что проще.

Базируясь как на вероятностном, так и на геометрическом подходах, можно было бы рассчитывать номинальные позиции ВС, относящиеся к последовательным моментам времени, отстоящим друг от друга, скажем, на 20 с. Такое пошаговое мо-

делирование, однако, требовало бы большого объема вычислений, который неприемлем при высокой плотности воздушного движения. Кроме того, возможен был бы пропуск самой критической ситуации из-за дискретности "шага". Мы для обнаружения конфликтов применили аналитический расчет.

Траектория ВС в горизонтальной плоскости рассматривается как совокупность отрезков прямых — сегментов. Конфликт пары ВС в горизонтальной плоскости считается, в рамках реализованного геометрического алгоритма, предварительно обнаруженным, если выявлена хотя бы одна пара сегментов траекторий, для которой пересекаются специально построенные области.

Для конструирования области, окружающей сегмент, вначале строится прямоугольник, две стороны которого, перпендикулярные сегменту, проходят через его концы, а две другие, параллельные сегменту, отстоят от него на расстояние d . Затем строятся полуокружности с центрами в концах сегментов и радиусами, равными d , дополняющие прямоугольники (рис. 1). При этом d равно утроенной погрешности бокового отклонения плюс минимально допустимая дистанция горизонтального эшелонирования.

Дальнейшему анализу подвергаются лишь те пары сегментов, которые характеризуются пересечением рассмотренных областей.

Что касается вертикальной плоскости, то если на некотором сегменте траектории запланировано изменение высоты, то точно не известно, как оно будет выполнено. Даже учитывая рекомендуемые принципы возможно более позднего снижения и раннего набора высоты, мы не можем построить определенный вертикальный профиль полета, так как значения вертикальной скорости могут варьироваться. Поэтому в предположении, что для любой точки такого сегмента возможно любое значение высоты в границах планового диапазона, мы для дальнейшего анализа выделяем пары сегментов с пересекающимися диапазонами, предварительно расширенными снизу и сверху на полдистанции между эшелонами.

Считаем, что пара сегментов траектории имеет общий временной интервал, если пересекаются диапазоны времени полета вдоль обоих сегментов: *[плановое время пролета начала сегмента минус неопределенность этого времени, плановое время пролета конца сегмента плюс неопределенность этого времени]*.

Для точки маршрута интервалом прогнозирования времени пролета является разность планового времени пролета и текущего времени. Эта разность умножается на утроенную величину погрешности оценки прогнозируемой путевой скорости и делится на расчетную скорость по плану. Полученный результат составляет неопределенность времени пролета точки.

Если общий временной интервал для пары сегментов найден, то в его пределах можно рассчитать горизонтальные координаты и время наибольшего сближения в горизонтальной плоскости (рис. 2).

Среди зафиксированных в рамках отдельных пар сегментов "наибольших сближений" ищется ис-

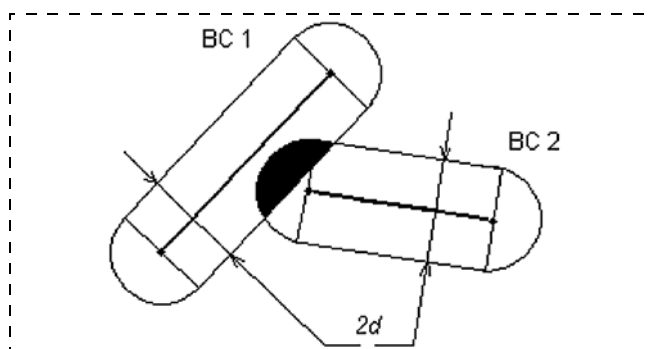


Рис. 1. Обнаружение конфликта в горизонтальной плоскости

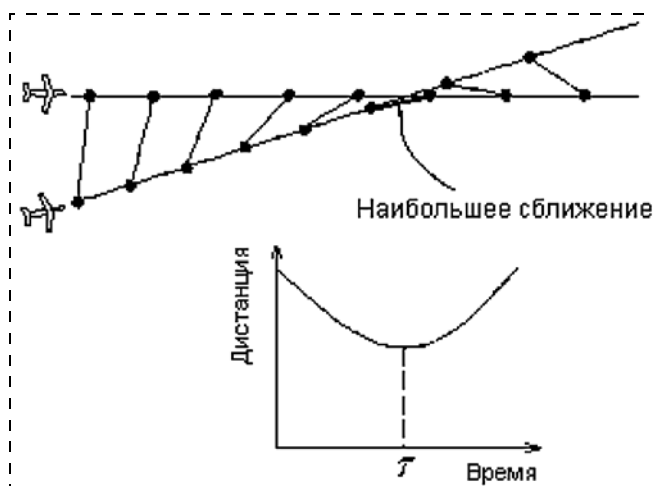


Рис. 2. Определение наибольшего сближения

тинно наибольшее. Его номинальное время считается моментом наибольшего сближения. Такому наибольшему сближению ставится в соответствие положение символа конфликта в окне потенциальных проблем на экране диспетчера.

Для момента наибольшего сближения определяется тип геометрии конфликта. Относительный курс пары ВС в точке наибольшего сближения является базой для классификации взаимодействия как "лобовое сближение" (относительный курс в диапазоне $135...225^\circ$), "догон" ($\pm 45^\circ$) или "пересечение" ($45...135^\circ$ или $225...270^\circ$) [9]. Индикация геометрии в символе конфликта в окне потенциальных проблем помогает диспетчеру как в построении мысленной картины воздушного движения, так и в принятии решения о действиях. Диспетчер может учесть, к примеру, тот факт, что ВС, движущееся "в лоб", приблизится к опасности быстрее, и поэтому такое сближение требует самых срочных действий.

Момент наибольшего сближения, определенный описанным способом, выбирается для дальнейшего анализа ситуации с применением вероятностного алгоритма.

Два алгоритма вычисления вероятности обнаруженного конфликта

Из изложенного ранее следует, что для одного и того же будущего момента времени эллипсы неопределенности местоположения любых ВС в горизон-

тальной плоскости равны по размеру независимо от скоростей.

Следовательно, можно однозначно определить вероятность конфликта (сближения на дистанцию, меньшую пороговой) для

- определенного времени прогноза;
- определенного угла пересечения номинальных траекторий на момент прогноза;
- определенной номинальной дистанции между ВС на момент прогноза.

Эта проблема решена аналитически в работе [10] и развита в работах [11] и [1].

Нашей задачей было построение алгоритма определения вероятности P сближения на дистанцию, меньшую пороговой D , для программы МТСД, встроенной в систему УВД как систему реального времени.

Более или менее строгий алгоритм расчета вероятности сближения двух ВС в момент t на дистанцию, меньшую пороговой дистанции D (*Алгоритм 1*, проиллюстрированный на рис. 3), включает:

1) вычисление параметров нормальных функций плотности вероятности местоположения каждого ВС на момент t (среднеквадратические отклонения обеих функций одинаковы);

2) построение областей возможных позиций ВС (таких областей, где ВС могут находиться с вероятностью, близкой к 1);

3) выделение среди всех пар возможных позиций двух ВС (образующих полную группу событий) таких пар, в которых расстояние между позициями меньше D ;

4) для каждой выделенной пары взвешивание позиции каждого ВС с применением своей функции плотности вероятности и перемножение результатов;

5) суммирование произведений для получения искомой вероятности P .

Погрешность *Алгоритма 1* обусловлена тем, что области возможного местоположения, во-первых, берутся ограниченными и, во-вторых, дискретизируются.

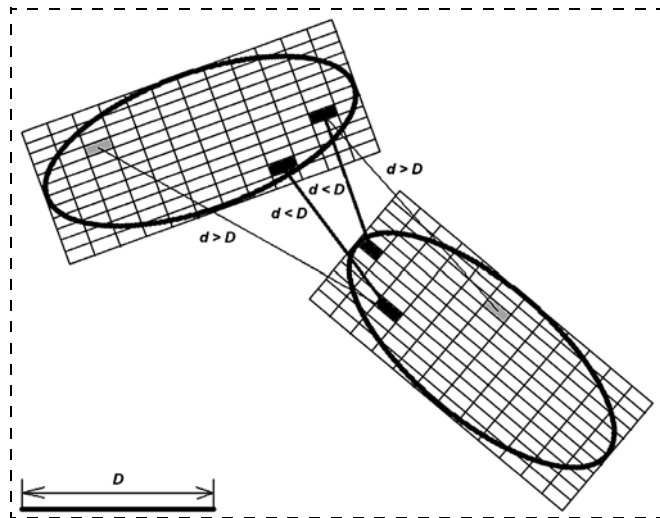


Рис. 3. Пояснение к расчету вероятности конфликта

Что касается размера областей, то если эллипс имеет оси, длина которых в продольном и поперечном направлениях соответствует Правилу трех сигм, то вероятность нахождения объекта в его пределах равна [6]

$$1 - \exp((-3)^2/2) = 0,9889,$$

к тому же, ради простоты вычислений, эллипсы заменены описывающими их прямоугольниками. Шаг дискретизации выбран равным $\sigma/2$ как для продольного, так для поперечного направлений.

Необходимая для расчетов таблица $12 \cdot 12$ "весов", базирующаяся на значениях нормальной функции распределения, готовится программой на этапе, предшествующем режиму реального времени работы системы.

Если значение D задать соизмеримым с размерами ВС, то получим вероятность столкновения.

Другой алгоритм (*Алгоритм 2*) при условии обнаружения конфликта дает завышенное значение вероятности, промежуточное между результатами *Алгоритма 1* и геометрического алгоритма (для последнего $P = 1$, если конфликт обнаружен).

Пункты 3—5 *Алгоритма 2* отличаются от одноименных пунктов *Алгоритма 1*:

3) для каждой области из п. 2 определение наибольшей подобласти, для каждой точки которой найдется точка в области вероятного нахождения другого ВС, отстоящая от первой точки ближе, чем на D ;

4) взвешенное суммирование позиций каждого ВС с применением своей функции плотности вероятности по своей подобласти из п. 3;

5) перемножение сумм для получения искомой вероятности P .

Произведение в п. 5 в этом случае дает вероятность того, что оба ВС одновременно будут находиться в зонах (упоминаемых как подобласти), которые характеризуются тем, что:

а) нахождение хотя бы одного ВС вне соответствующей ему зоны влечет отсутствие прогнозируемого конфликта;

б) иначе (при нахождении обоих ВС в соответствующих им зонах) для каждого местоположения первого ВС существует некоторая часть зоны второго ВС, где при нахождении там этого второго ВС прогнозируется конфликт, и наоборот.

Алгоритм 2 пользуется условиями, достаточными для реализации события, но не обязательно необходимыми. *Алгоритм 1* же опирается на необходимые и достаточные условия.

Выбор алгоритма вычисления вероятности обнаруженного конфликта

Результаты двух разработанных алгоритмов существенно расходятся для "пограничных" конфликтов — таких, где прогнозируемая минимальная дистанция близка к требуемому эшелонированию.

Предположим, что области, где оба ВС могут находиться с вероятностью, близкой к 1, совпадают. Тогда, если параметр D явно превосходит линейный размер такой области (что характерно для рас-

чета вероятности нарушения норм эшелонирования), то оба алгоритма дадут одинаковый результат, близкий к 1. Если же параметр D существенно меньше линейного размера области (что характерно для расчета вероятности столкновения), то условие близости позиций в ходе выполнения *Алгоритма 1* будет выполняться не всегда, и его результат окажется точнее результата *Алгоритма 2*.

Например, при размере диагонали ячейки (каждой из 144) 0,54 км вычислялась вероятность столкновения строго встречных ВС. Параметр D , исходя из здравого смысла, принимался равным не размеру ВС, а превосходящему его размеру диагонали ячейки. Нашлось 938 из 20 736 пар ячеек, которые внесли вклад в результат *Алгоритма 1*. Сама результирующая вероятность оказалась равной 0,13. В то же время *Алгоритм 2* дал вероятность столкновения 0,99.

Мы сочли целесообразным выбрать для практического применения *Алгоритм 2*, чтобы избежать тонкой обработки грубой исходной информации.

В окне потенциальных проблем, по требованию диспетчера, символы потенциальных проблем маркируются в соответствии либо с уровнями вероятности сближения на дистанцию, меньшую пороговой (сама дистанция задается при настройке конфигурации системы), либо с уровнями угрозы столкновения. Каждому виду маркировки соответствуют три уровня.

Заключение

Представленный метод среднесрочного обнаружения конфликтов является комбинированным. Использование геометрического алгоритма практически исключает пропуски конфликтов. Анализ возможных конфликтов с применением вероятностного алгоритма дает дополнительные показатели критичности ситуации.

Соответствующая программа функционирует в составе действующей системы УВД в аэропорту Минска, Республика Беларусь, предоставляя дис-

петчеру посредством окна потенциальных проблем большой набор сведений о прогнозируемой воздушной обстановке.

Список литературы

1. Wang J., Wang B., Zhao Y. A probabilistic algorithm to Medium-Term Conflict Detection with multi-waypoints // *Applied Mechanics and Materials*. 2013. V. 411—414. P. 2763—2769.
2. Prandini M., Watkins O. J. Probabilistic aircraft conflict detection // *Distributed Control and Stochastic Analysis of Hybrid Systems Supporting. Safety Critical Real-Time Systems Design (HYBRIDGE)*. May 2005. URL: <http://web.maths.unsw.edu.au/~peter-del-moral/aircraft-conflict.pdf> (дата обращения 19.01.2015).
3. Alam S., Abbass H. A., Lokan C. J., Ellejmi M., Kirby S. Computational red teaming to investigate failure patterns in Medium Term Conflict Detection // *Proceedings of 8th Eurocontrol Innovative Research Workshop (Brétigny-sur-Orge, France, December 2009)*. URL: http://www.eurocontrol.int/eec/gallery/content/public/documents/Innovative_Studies/grants/Computational%20Red%20Teaming%20to%20Investigate%20Failure%20Patterns%20in%20Medium%20Term%20Conflict%20Detection.pdf (дата обращения 19.01.2015).
4. GRAFFICA eDEP Development Project. DETAILED DESIGN DOCUMENT. 26 March 2010. URL: http://www.eurocontrol.fr/projects/edep/documents/9.1/eDEP_GRD_DDD.pdf (дата обращения 19.01.2015).
5. Bakker G. J., Kremer H. J., Blom H. A. P. Probabilistic Approaches Toward Conflict Prediction // *NLR-TP-2001-634. National Aerospace Laboratory, NLR*. 2001. URL: <http://reports.nlr.nl:8080/xmlui/bitstream/handle/10921/804/TP-2001-634.pdf?sequence=1> (дата обращения 19.01.2015).
6. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
7. EUROCONTROL Specification for Medium-Term Conflict Detection // *EUROCONTROL-SPEC-0139. Edition Number: 1.0. Edition Date: 15.07.2010.* URL: <http://www.eurocontrol.int/sites/default/files/publication/files/20100715-mtcd-spec-v1.0.pdf> (дата обращения 19.01.2015).
8. Подольская Н. Н. Метод обнаружения среднесрочных конфликтов между воздушными судами на основе планов полета // *Проблемы качества, безопасности и диагностики в условиях информационного общества: Матер. Науч.-практ. конф. КБД-Инфо—2004 (Сочи, 1—10 окт. 2004 г.)*. М.: МИЭМ, 2004. С. 114.
9. Pember S. J., Roberts A. L. U. Air traffic control // *EP 2372672 A2. EUROPEAN PATENT APPLICATION*. Date of publication: 05.10.2011. Bulletin 2011/40.
10. Irvine R. A Geometrical approach to conflict probability estimation // *Air Traffic Control Quarterly*. 2002. V. 10, N. 2. P. 85—113.
11. Irvine R. Target miss distance to achieve a required probability of conflict // *ATM 2003 R & D Conference (Budapest, June 2003)*. URL: http://www.atm-seminar.org/past-seminars/5th-seminar-budapest-hungary-iune-2003/papers/paper_075 (дата обращения 19.01.2015).

Probabilistic-Geometric Method for a Medium Term Conflict Detection in Air Traffic Control

S. N. Losev, V. I. Makarenko, N. N. Podolskaya, podolsky47@inbox.ru
VNIIRA-OVD Co., St. Petersburg, 199106, Russian Federation

Received on December 26, 2014

The authors present a method for detection of conflicts in airspace within look-ahead time of 20 minutes, based on analysis of the current flight plans. It combines both geometric and probabilistic approaches, and contains, respectively, geometric and probabilistic algorithms. The geometric conflict detection algorithm is the basis of the method. It views an aircraft trajectory as a series of straight line segments between the route points. In addition, it handles the dynamic evolution of the trajectory uncertainty with increasing look-ahead time. This algorithm ensures minimization of the number of conflicts due to estimation of the distances in almost entire areas of the predicted aircraft positions. The algorithm for calculation of conflict probability forms a superstructure of the method. It estimates the probability level of an event, when the distance between the two conflict aircraft is less than the threshold value of the minimal approach time. This algorithm produces a supplementary indicator of a situation criticality. Two algorithms of probabilistic kind were developed and tested. Their results differ only in case when

the predicted minimal approach distance is approximately equal to the threshold value. The algorithm, which gives greater value to the probability level, is chosen. The method is fully analytical, so it does not need step-by-step simulation. The appropriate computer program is used as a part of the Air Traffic Control system in the airport of Minsk, Belarus, providing to the controllers a considerable amount of information on the predicted air situations.

Keywords: air traffic control, medium term conflict detection (MTCD), flight safety, aircraft conflict probability, real-time mode

For citation:

Losev S. N., Makarenko V. I., Podolskaya N. N. Probabilistic-Geometric Method for a Medium Term Conflict Detection in Air Traffic Control, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 277–282.

DOI: 10.17587/mau.16.277-282

References

1. **Wang J., Wang B., Zhao Y.** A probabilistic algorithm to Medium-Term Conflict Detection with multi-waypoints, *Applied Mechanics and Materials*, 2013, vol. 411–414, pp. 2763–2769.
2. **Prandini M., Watkins O. J.** Probabilistic aircraft conflict detection, *Distributed Control and Stochastic Analysis of Hybrid Systems Supporting. Safety Critical Real-Time Systems Design (HYBRIDGE)*, May 2005, available at: <http://web.maths.unsw.edu.au/~peterdelmoral/aircraft-conflict.pdf> (date of access 19.01.2015).
3. **Alam S., Abbass H. A., Lokan C. J., Ellejmi M., Kirby S.** Computational red teaming to investigate failure patterns in Medium Term Conflict Detection, *Proc. of 8th Eurocontrol Innovative Research Workshop* (Bretigny-sur-Orge, France, December 2009), available at: <http://www.eurocontrol.int/eec/gallery/content/public/documents/InnovativeStudies/grants/Computational%20Red%20Teaming%20to%20Investigate%20Failure%20Patterns%20in%20Medium%20Term%20Conflict%20Detection.pdf> (date of access 19.01.2015).
4. **GRAFFICA eDEP Development Project.** DETAILED DESIGN DOCUMENT. 26 March 2010, available at: http://www.eurocontrol.fr/projects/edep/documents/9.1/eDEP_GRD_DDD.pdf (date of access 19.01.2015).
5. **Bakker G. J., Kremer H. J., Blom H. A. P.** Probabilistic Approaches Toward Conflict Prediction. NLR-TP-2001-634. National

Aerospace Laboratory, NLR. 2001, available at: <http://reports.nlr.nl:8080/xmlui/bitstream/handle/10921/804/TP-2001-634.pdf?sequence=1> (date of access 19.01.2015).

6. **Wentzel E. S.** *Teoriya veroyatnostei* (Probability theory), Moscow, Nauka, 1969 (in Russian).
7. **Eurocontrol** Specification for Medium-Term Conflict Detection, EUROCONTROL-SPEC-0139. Edition Number: 1.0. Edition Date: 15.07.2010, available at: <http://www.eurocontrol.int/sites/default/files/publication/files/20100715-mtcd-spec-v1.0.pdf> (date of access 19.01.2015).
8. **Podolskaya N. N.** Metod obnaruzheniya srednesrochnykh konfliktov mezhdru vozduzhnymi sudami na osnove planov poleta (A medium term conflict detection method using flight plans), *Problems of quality, safety and diagnostics in the of information society environment, materials of sci.-pract. conference KBD-Info—2004* (Sochi, Russia, 1–10 Oct. 2004), Moscow, published by MIEM, 2004, p. 114 (in Russian).
9. **Pember S. J., Roberts A. L. U.** Air traffic control, EP 2372672 A2. EUROPEAN PATENT APPLICATION. Date of publication: 05.10.2011. Bulletin 2011/40.
10. **Irvine R.** A Geometrical approach to conflict probability estimation, *Air Traffic Control Quarterly*, 2002, vol. 10, no. 2, pp. 85–113.
11. **Irvine R.** Target miss distance to achieve a required probability of conflict, *ATM 2003 R & D Conference* (Budapest, June 2003), available at: http://www.atm-seminar.org/past-seminars/5th-seminar-budapest-hungary-june-2003/papers/paper_075 (date of access 19.01.2015).

Corresponding author:

Nonna Podolskaya, specialist, "VNIIRA-OVD" JSC, St. Petersburg, 199106, Russian Federation, e-mail: podolsky47@inbox.ru

УДК 626.02.008

В. Ф. Филаретов^{1, 2}, д-р техн. аук., проф., зав. лаб., filaret@pma.ru,

А. В. Зуев^{1, 2}, канд. техн. наук, мл. науч. сотр., zuev@iacp.dvo.ru,

А. Н. Жирабок^{2, 3}, д-р техн. аук., проф., zhirabok@mail.ru,

А. А. Проценко², инженер, pro293133@gmail.com, **В. Subudhi**⁴, Professor, bidyadharnitrkl@gmail.com

¹ Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041, г. Владивосток

² Дальневосточный федеральный университет, Владивосток,

³ Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток,

⁴ National Institute of Technology Rourkela, India

Метод синтеза систем непрерывной аккомодации к дефектам в навигационно-пилотажных датчиках автономных подводных роботов

Обсуждается метод синтеза высококачественных систем непрерывной аккомодации к дефектам, возникающим в навигационно-пилотажных датчиках движущихся автономных подводных роботов. Предложенный метод основан на использовании кинематических моделей этих роботов и специального комплексирования данных, получаемых от их бортовых датчиков. Достоинством метода является простота реализации и высокая точность компенсации выявляемых дефектов в условиях неопределенности и существенной переменности параметров окружающей среды.

Представлены результаты моделирования, подтверждающие высокую эффективность функционирования синтезированной системы аккомодации.

Ключевые слова: автономный подводный робот, дефект, навигационно-пилотажные датчики, диагностирование, аккомодация

В настоящее время автономные подводные роботы (АПР) являются самым эффективным инструментом исследования и освоения Мирового океана, а также выполнения различных подводно-технических работ. Важными компонентами АПР, во многом определяющими их способность выполнять поставленные задачи, являются навигационно-пилотажные датчики, показания которых используются для формирования траекторий их движения. Отказ или сбой в работе любого датчика приводит к ошибкам в выполнении поставленных задач или даже к потере робота. Поэтому задача своевременного выявления дефектов в этих датчиках является весьма актуальной. Важной задачей, направленной на повышение работоспособности АПР при появлении незначительных дефектов, при которых еще можно выполнить и успешно завершить операции (миссии), является формирование управляющих воздействий, которые позволяют автоматически сохранить важнейшие характеристики АПР в течение всего времени их работы. Решение последней задачи называют *аккомодацией к дефектам* [1].

Известно несколько подходов к решению задач диагностирования и аккомодации датчиков АПР [2–6]. Эти подходы и методы построены на основе диагностических наблюдателей, использующих нелинейные динамические модели АПР. На каждый наблюдатель подаются управляющие сигналы и измеряемые компоненты вектора состояния АПР. При этом диагностирование осуществляется с использованием анализа сигналов рассогласования (невязок), возникающих между выходами датчиков и выходами соответствующих наблюдателей.

Проведенный анализ показал, что большинство известных подходов и методов обеспечивают качественное решение задач диагностирования и аккомодации только при движениях АПР в плоскости с малой скоростью. Это связано с использованием при синтезе диагностических наблюдателей нелинейных динамических моделей АПР, которые имеют неопределенные и существенно переменные параметры. Но это приводит к появлению отличных от нуля невязок, формируемых наблюдателями, даже при отсутствии дефектов.

В целях эффективного устранения указанного недостатка применяются различные методы робастного диагностирования подсистем АПР, основанные на использовании скользящих наблюдателей [7], нейронных сетей [8], нечеткой логики [10] и др. Известны и различные методы решения задач аккомодации, в основе которых лежат методы оптимального управления [11], H_∞ -оптимизации [12], слежения за эталонной моделью [13], адаптивного управления [14]. Но использование этих средств снижает чувствительность синтезированных наблюдателей к неизвестным (в основном медленно меняющимся) параметрам диагностируемых объектов. При этом большой проблемой в практическом применении многих систем диагностирования и

аккомодации остается большая сложность их практической реализации применительно к АПР.

Таким образом, проблема разработки легко реализуемых систем диагностирования и аккомодации к дефектам, часто появляющимся в навигационно-пилотажных датчиках АПР, без использования громоздких нелинейных уравнений их динамики, содержащих переменные и часто вообще неопределенные параметры, по-прежнему остается важной и актуальной.

1. Состав навигационно-пилотажных датчиков АПР и постановка задачи исследования

В процессе разработки метода аккомодации прежде всего необходимо определить состав навигационно-пилотажных датчиков АПР и взаимосвязь между поступающими от них сигналами. Эту взаимосвязь следует использовать для синтеза диагностических наблюдателей, выявляющих и локализуемых возникающие дефекты.

Состав датчиков бортовой навигационной системы АПР зависит от его типа и назначения. Большинство АПР, выполняющих различные подводные миссии, имеют [15]:

1) доплеровский лаг для измерения его линейных скоростей $[v_x, v_y, v_z]$ относительно окружающей среды по всем трем осям жестко связанной с ним системы координат (ССК);

2) акселерометры, измеряющие линейные ускорения $[a_x, a_y, a_z]$ по всем трем осям ССК;

3) датчик ориентации АПР, измеряющий углы крена, дифферента и курса $[\varphi, \theta, \psi]$ в абсолютной системе координат (АСК);

4) гидроакустическую навигационную систему, измеряющую линейные координаты $[x, y]$ АПР в АСК;

5) датчик глубины для измерения координаты z в АСК;

6) датчики угловых скоростей $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ относительно трех осей ССК.

Все эти датчики будут использованы при разработке создаваемого метода аккомодации.

Связь между соответствующими сигналами в ССК и в АСК описывается следующим выражением [15]:

$$\dot{\eta} = J(\eta)v, \quad (1)$$

где $v = [v_x, v_y, v_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ — вектор проекций линейной и угловой скоростей движения АПР на оси ССК; $\eta = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^T$ — вектор положения и ориентации АПР в АСК; $J(\eta)$ — блочная матрица перевода соответствующих величин из ССК в АСК, имеющая вид [15]

$$J(\eta) = \begin{bmatrix} J_1(\eta) & 0 \\ 0 & J_2(\eta) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$J_1(\eta) = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & -\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\theta\sin\varphi & \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\sin\varphi \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\theta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi + \sin\theta\sin\psi\cos\varphi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \end{bmatrix},$$

$$J_2(\eta) = \begin{bmatrix} 1 & \sin\varphi\tan\theta & \cos\varphi\tan\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} & \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \end{bmatrix}.$$

Уравнения (1) и (2) устанавливают связь всех параметров движения АПР и переменных, измеряемых его навигационно-пилотажными датчиками. Эти уравнения не содержат переменных или неопределенных коэффициентов, что удобно для решения задачи аккомодации к возможным дефектам в этих датчиках. Задачу диагностирования можно решить на основе анализа выходных сигналов с рассматриваемых датчиков. При этом требуется не только установить факт возникновения дефекта в конкретном датчике, но и определить значение вносимого им искажения (ошибки), которое должно использоваться системой аккомодации при коррекции программных сигналов управления АПР.

Исходя из сказанного в рассматриваемой работе ставится и решается задача разработки метода синтеза высокоточной, но при этом легко реализуемой системы непрерывной аккомодации к дефектам, обнаруживаемым в реальном времени в навигационно-пилотажных датчиках АПР на основе их кинематических уравнений, описываемых выражениями (1) и (2).

2. Разработка метода синтеза системы точной аккомодации к дефектам в навигационно-пилотажных датчиках АПР

Разрабатываемый метод синтеза системы непрерывной аккомодации к дефектам, возникающим в навигационно-пилотажных датчиках АПР, содержит три основных этапа. На первом с использованием уравнений кинематики АПР и специального комплексирования данных, получаемых от их навигационно-пилотажных датчиков, строится банк диагностических наблюдателей, позволяющий решить задачу обнаружения и локализации дефектов. На втором этапе за счет введения дополнительных наблюдателей с обратной связью по сигналу невязки решается задача идентификации величин возникающих дефектов, а на третьем происходит формирование дополнительных сигналов в соответствующих каналах управления АПР, парирующих возникающие дефекты.

Рассмотрим все три этапа предложенного подхода более детально.

В целях диагностирования и локализации возникающих дефектов в датчиках АПР введем в рассмотрение банк наблюдателей $H_1, \dots, H_9$, оценивающих

показания датчиков, измеряющих величины $x, y, z, \varphi, \theta, \psi, v_x, v_y$ и v_z :

$$\begin{aligned} H_1: \dot{\tilde{x}} &= J_{11}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi})\tilde{v}_x + J_{12}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi})\tilde{v}_y + \\ &+ J_{13}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi})\tilde{v}_z, \\ H_2: \dot{\tilde{y}} &= J_{21}(\tilde{\theta}, \tilde{\psi})\tilde{v}_x + J_{22}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi})\tilde{v}_y + \\ &+ J_{23}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi})\tilde{v}_z, \\ H_3: \dot{\tilde{z}} &= J_{31}(\tilde{\theta})\tilde{v}_x + J_{32}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi})\tilde{v}_y + \\ &+ J_{33}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi})\tilde{v}_z, \\ H_4: \dot{\tilde{\varphi}} &= \tilde{\omega}_x + J_{45}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})\tilde{\omega}_y + J_{46}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})\tilde{\omega}_z, \\ H_5: \dot{\tilde{\theta}} &= J_{55}(\tilde{\varphi})\tilde{\omega}_y + J_{56}(\tilde{\varphi})\tilde{\omega}_z, \\ H_6: \dot{\tilde{\psi}} &= J_{65}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})\tilde{\omega}_y + J_{66}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})\tilde{\omega}_z, \\ H_7: \dot{\tilde{v}}_x &= \tilde{a}_x, \\ H_8: \dot{\tilde{v}}_y &= \tilde{a}_y, \\ H_9: \dot{\tilde{v}}_z &= \tilde{a}_z, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tilde{\eta} = [\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}, \tilde{\psi}, \tilde{v}_x, \tilde{v}_y, \tilde{v}_z]^T$ — вектор состояния введенного банка наблюдателей; J_{ij} — соответствующие элементы матрицы $J(\eta)$ ($i, j = \overline{1, 6}$); символом "tilde" обозначены сигналы, получаемые от датчиков АПР, содержащих дефекты. Отметим, что первые шесть уравнений модели (3) подобны уравнениям модели (1), три последних очевидны.

Используя выражения (3), вектор невязок $r = [r_1, \dots, r_9]^T$ между выходами банка наблюдателей и сигналами, поступающими от соответствующих датчиков, представленных векторами ошибок в этих сигналах $dv = [dv_x, dv_y, dv_z]^T$ и $d\eta = [dx, dy, dz, d\varphi, d\theta, d\psi]^T$, можно задать в следующем виде:

$$r = \tilde{\eta}^* - \tilde{\eta},$$

где $\tilde{\eta}^* = [\eta + d\eta, v + dv]^T$.

При выявлении дефекта в датчике АПР требуется, учитывая банк наблюдателей (3), определить соотношения между значениями полученных невязок r и отклонениями (ошибками), возникающими в сигналах (в показаниях), поступающих от конкретных датчиков. Такие соотношения задаются с помощью матрицы дефектов, значениями которой являются нули и единицы. Если конкретная невязка чувствительна к определенному дефекту, то на пересечении строки, соответствующей этой невязке, и столбца, соответствующего выявленному дефекту, ставится 1, а в противном случае — 0. Для введенного банка наблюдателей (3) матрица дефектов D принимает вид, показанный в табл. 1, где da_x, da_y и da_z — ошибки в сигналах, поступающих от акселерометра АПР.

Таблица 1

Невязка	Ошибки														
	dx	dy	dz	$d\varphi$	$d\theta$	$d\psi$	dv_x	dv_y	dv_z	$d\omega_x$	$d\omega_y$	$d\omega_z$	da_x	da_y	da_z
r_1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
r_2	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
r_3	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
r_4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
r_5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
r_6	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
r_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
r_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
r_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1

Таблица 2

Невязка	Ошибки														
	dx	dy	dz	$d\varphi$	$d\theta$	$d\psi$	dv_x	dv_y	dv_z	$d\omega_x$	$d\omega_y$	$d\omega_z$	da_x	da_y	da_z
r_1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
r_2	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
r_3	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
r_4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
r_5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
r_6	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
r_7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
r_8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
r_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
r_{10}	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0

Анализ элементов матрицы (4) показывает, что по выходным сигналам датчиков, измеряющих переменные ω_y и ω_z , дефекты в них различить не представляется возможным, так как нельзя однозначно определить, какой конкретно сигнал содержит выявленный дефект. В целях устранения этой неоднозначности соотношения банка наблюдателей (3) необходимо скорректировать. Для этого из шестого уравнения системы (3) необходимо выразить переменную $\tilde{\omega}_y$ и подставить полученное выражение в H_4 . В результате удастся получить дополнительный наблюдатель

$$H_{10}: \dot{\tilde{\varphi}} = \frac{J_{45}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})J_{65}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})\tilde{\psi} + (J_{65}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}) - J_{45}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta}))J_{66}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})\tilde{\omega}_z + J_{65}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})\tilde{\omega}_x}{J_{65}(\tilde{\varphi}, \tilde{\theta})},$$

невязка которого уже не будет зависеть от дефекта, определяющего значение $d\omega_y$.

В результате скорректированная матрица дефектов, позволяющая успешно решить поставленную задачу, будет иметь вид, показанный в табл. 2.

Таким образом, новая матрица D_1 , построенная на основе сигналов, получаемых от всех навигационных датчиков АПР, будет позволять однозначно определять наличие дефекта в каждом из диагностируемых датчиков.

В целях дальнейшей локализации выявляемых дефектов введем в рассмотрение вектор I

$$I = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_{10}]^T; \quad I_k = \begin{cases} 1, & \text{если } |r_k| > r_{k0}, \\ 0, & \text{если } |r_k| \leq r_{k0}, \end{cases}$$

где r_{k0} — величина, определяющая порог чувствительности k -го наблюдателя ($k = \overline{1, 10}$).

Иными словами, указанный k -й элемент вектора I будет равен 1, если невязка k -го наблюдателя превысит пороговое значение, и нулю — в противном случае. Сравнивая вектор I со столбцами матрицы D_1 , можно получить вектор L :

$$L = [L_1 \ L_2 \ \dots \ L_{15}]^T; \quad L_l = \begin{cases} 1, & \text{если } I = D_1^l, \\ 0, & \text{если } I \neq D_1^l, \end{cases}$$

где D_1^l — l -й столбец матрицы D_1 ($l = \overline{1, 15}$).

При отсутствии дефектов все элементы вектора L будут равны нулю. При возникновении k -го дефекта l -й элемент вектора L станет равным 1, а остальные останутся нулевыми. Таким образом, задачу диагностирования и локализации дефектов в сигналах, получаемых от навигационных датчиков АПР, можно считать решенной. Однако после обнаружения и локализации дефектов для реализации системы аккомодации необходимо в реальном масштабе времени точно оценить значения ошибок, обусловленных этими дефектами. При этом значения ошибок dx , dy , dz , $d\theta$ и $d\psi$ можно определить сразу путем интегрирования сигналов невязок, получаемых соответственно от наблюдателей H_1 , H_2 , H_3 , H_5 и H_6 системы (3). Для определения дефектов по сигналам, получаемым от остальных датчиков АПР, необходимы дополнительные процедуры, которые будут рассмотрены далее.

Следует отметить, что описание наблюдателя H_4 содержит коэффициенты, зависящие от φ . Поэтому простым интегрированием не удастся определить значение ошибки $d\varphi$, и следует ввести в рассмотрение новый наблюдатель H_1^* , который должен быть построен при совместном решении 5-го и 6-го уравнений системы (3) (при условии действия только одного этого дефекта):

$$\hat{\varphi} = \arcsin \frac{\omega_y \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\theta} \omega_z}{\omega_y^2 + \omega_z^2}, \quad (4)$$

где $\hat{\varphi}$ — переменная состояния наблюдателя H_1^* . Тогда значение этой ошибки будет равно: $d\varphi = \tilde{\varphi} - \hat{\varphi}$.

Для определения величин ошибок dv_x , dv_y , dv_z , $d\omega_x$, $d\omega_y$, $d\omega_z$, da_x , da_y , da_z необходимо ввести в рассмотрение новые наблюдатели H_2^* , ..., H_{10}^* , которые совпадают по виду с наблюдателями H_1 , ..., H_9 , но при этом содержат обратную связь, построенную с использованием сигнала невязки [16]. В частности, при возникновении ошибки dv_x , когда дефекты в остальных датчиках отсутствуют, наблюдатель H_2^* можно описывать уравнением

$$\dot{\hat{x}} = J_{11}(v_x + dv_x) + J_{12}v_y + J_{13}v_z + k_2 \hat{r}_2, \quad (5)$$

где $\dot{\hat{x}}$ — переменная состояния этого наблюдателя, k_2 — коэффициент усиления обратной связи, $\hat{r}_2 = x - \hat{x}$ — невязка наблюдателя H_2^* .

Учитывая выражения (1) и (5), можно записать:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}}_2 = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = J_{11}v_x + J_{12}v_y + J_{13}v_z - J_{11}(v_x + dv_x) - \\ - J_{12}v_y - J_{13}v_z - k_2r_2 = J_{11}dv_x - k_2\hat{r}_2. \end{aligned} \quad (6)$$

В общем виде поведение сигнала $dv_x(t)$ во времени можно описать зависимостью:

$$dv_x(t) = ae^{j\omega t},$$

где a — амплитуда изменения ошибки; ω — частота изменения ошибки; j — мнимая единица. С учетом этого описания решение уравнения (6) имеет вид

$$\hat{r}_2(t) = C_1 e^{-k_2 t} + \frac{-J_{11}a}{\sqrt{k_2^2 + \omega^2}} e^{j\omega t + \phi}, \quad (7)$$

где $\phi = \arctg(\omega/k_2)$, C_1 — некоторая константа.

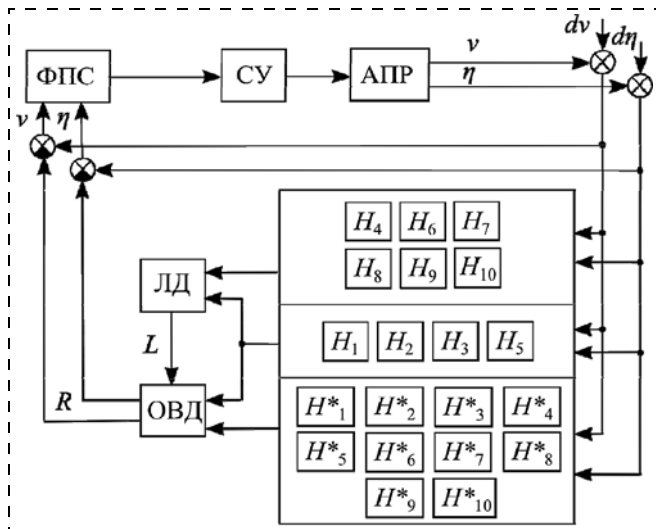


Рис. 1. Обобщенная структурная схема системы адаптации к дефектам в навигационно-пилотажных датчиках АПР: ЛД — блок локализации дефектов; ОВД — блок определения значений ошибок (дефектов); СУ — система управления АПР; ФПС — блок формирования программных сигналов

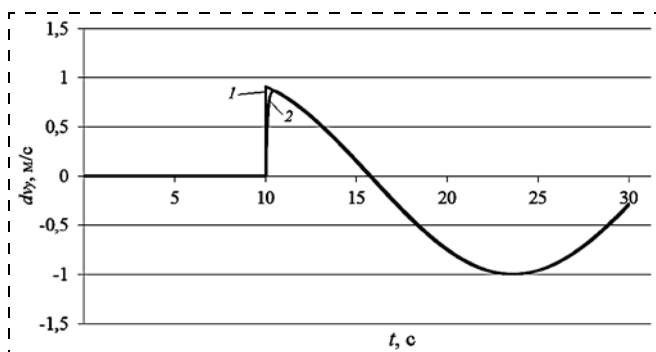


Рис. 2. Значение дефекта dv_y , определенного алгоритмом диагностики, когда $dv_y = 0,75\sin(0,2t)$

Если $k_2 \gg \omega$ (это справедливо в большинстве реальных систем), то выражение (7) можно переписать в виде

$$\hat{r}_2(t) = C_1 e^{-k_2 t} - \frac{J_{11}dv_x}{k_2}.$$

Исследования показали, что при синтезе систем адаптации к дефектам в датчиках АПР желательно выбирать $k = 3/T_C$, где T_C — время, за которое сигналы невязки входят в 5 %-ю зону от искомой величины. В этом случае в установившемся режиме значение возникающей ошибки определяется в виде

$$dv_x = -\frac{\hat{r}_2(t)k_2}{J_{11}}.$$

Подобным же образом определяются остальные ошибки.

Таким образом, после введения новых наблюдателей H_2^* , ..., H_{10}^* удалось полностью решить задачу оценки значений ошибок, возникающих во всех навигационных датчиках АПР.

На третьем этапе синтеза систем адаптации значения возникающих ошибок используются для формирования дополнительных сигналов в системах управления АПР, устраняющих эти дефекты. Для решения этой задачи использован вектор вычисленных ошибок R в виде

$$R = [L_1 dx \dots L_{15} da_z]^T. \quad (8)$$

Если обнаружена ошибка d_k , то на выходе системы наблюдателей формируется вектор R , l -й элемент которого равен значению ошибки, а остальные равны нулю. При отсутствии дефектов все элементы вектора будут нулевыми. Далее исходя из уравнения невязки и выражения (8), отнимая полученные значения ошибок от реальных сигналов датчиков, можно получить корректные значения измеряемых величин, необходимые для формирования программных сигналов управления АПР:

$$\eta = [\tilde{x} - R_1, \tilde{y} - R_2, \tilde{z} - R_3, \tilde{\varphi} - R_4,$$

$$\tilde{\theta} - R_5, \tilde{\psi} - R_6]^T,$$

$$v = [\tilde{v}_x - R_7, \tilde{v}_y - R_8, \tilde{v}_z - R_9, \tilde{\omega}_x - R_{10},$$

$$\tilde{\omega}_y - R_{11}, \tilde{\omega}_z - R_{12}]^T,$$

$$a = [\tilde{a}_x - R_{13}, \tilde{a}_y - R_{14}, \tilde{a}_z - R_{15}]^T.$$

Обобщенная структурная схема синтезированной системы адаптации представлена на рис. 1. Эта система позволяет определить, локализовать и оценить значения ошибок, возникающих в навигационных датчиках АПР.

3. Исследование работы синтезированной системы адаптации

В целях проверки работоспособности и эффективности синтезированной системы адаптации было проведено численное моделирование, в процессе которого использовалась модель реального АПР с адаптивной системой управления [17]. Мо-

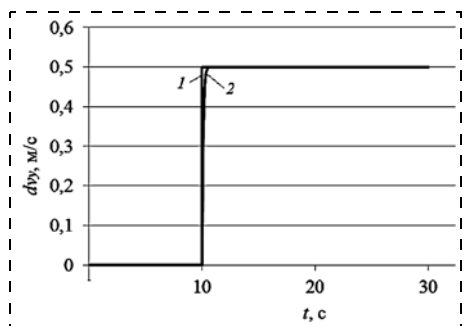


Рис. 3. Значение дефекта dv_y , определенного алгоритмом диагностирования, когда $dv_y = 1(t)$

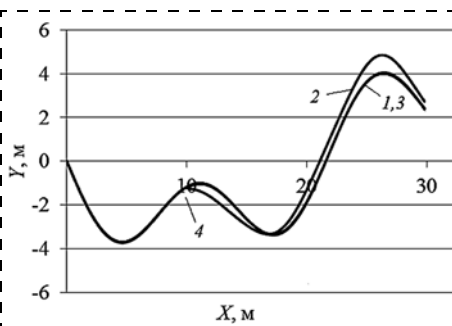
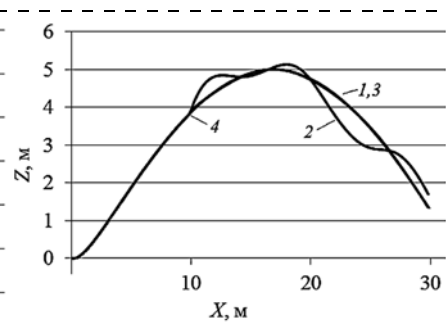


Рис. 4. Траектория движения АПР в плоскостях XY и XZ:

1 — заданная траектория движения АПР; 2 — траектория движения АПР при наличии дефекта; 3 — траектория движения АПР при работе предложенной системы аккомодации; 4 — момент появления дефекта



делирование проводили при нулевых начальных состояниях АПР и наблюдателей. Возникновение дефекта имитировалось изменением величины dv_y по законам $dv_y = 0,75\sin(0,2t)$ и $dv_y = 1(t)$, начиная с момента времени $t = 10$ с.

На рис. 2 и 3 представлены результаты работы системы диагностирования, позволяющей в реальном масштабе времени осуществлять процедуру диагностирования неисправных датчиков АПР, а также точно определять значение возникающих в них ошибок. На этих рисунках кривая 1 обозначает заданную ошибку dv_y , а кривая 2 — значение этой ошибки, полученной с помощью системы диагностирования, рассмотренной в статье.

На рис. 4 представлены траектории движения АПР в вертикальной и горизонтальной плоскостях при отсутствии и наличии дефектов в датчике скорости. На этом рисунке показана эффективность работы системы аккомодации при компенсации дефектов (когда они являются переменными). Из рис. 4 видно, что синтезированная система позволила не только определить и точно оценить появившийся дефект, но и, обнаружив его, сохранить требуемую точность работы АПР. Аналогичные результаты получены и при возникновении различных по величине ошибок в других датчиках.

Полученные результаты математического моделирования полностью подтвердили работоспособность и высокую эффективность предложенного метода синтеза системы аккомодации к типовым дефектам, появляющимся в навигационно-пилотажных датчиках АПР.

Заключение

В данной работе предложен метод синтеза высококачественной системы непрерывной аккомодации к дефектам, возникающим в навигационно-пилотажных датчиках АПР. К достоинствам метода относится тот факт, что он использует не динамическую, а только кинематическую модель робота. Синтезированные с помощью этого метода системы имеют простую практическую реализацию, но при этом обеспечивают высокую точность компенсации выявляемых дефектов. Этот метод, однако, работает при появлении любого, но только одного дефекта.

Работа проводилась при финансовой поддержке Научного фонда ДВФУ (соглашение № 13-06-0112-м а), Минобрнауки РФ (государственное задание 1141), а также РФФИ.

Список литературы

1. Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. *Diagnosis and Fault Tolerant Control*. Springer-Verlag. 2003. P. 571.
2. Жирабок А. Н., Писарец А. М. Диагностирование датчиков подводных роботов // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2004. № 9. С. 15—21.
3. Жирабок А. Н., Писарец А. М. Об одном подходе к диагностированию двигателей подводных аппаратов // *Труды межд. НТК "Технические проблемы освоения мирового океана"*, Владивосток: ИПМТ ДВО РАН. 2005. С. 71—77.
4. Antonelli G., Caccavale F., Sansone C., Villani L. Fault diagnosis for AUVs using support vector machines // *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2004. Vol. 5. P. 4486—4491.
5. Alessandri A., Caccia M., Verruggio G. A Model-Based Approach to Fault Diagnosis in Unmanned Underwater Vehicles // *Proceedings of Oceans*. 1998. Nice, France. P. 825—829.
6. Antonelli G. A Survey of Fault Detection/Tolerance Strategies for AUVs and ROVs // *Springer Tracts in Advanced Robotics*. 2003. Vol. 1. P. 109—127.
7. Alessandri A., Hawkinson T., Healey A. J., Veruggio G. Robust Model-Based Fault Diagnosis for Unmanned Underwater Vehicles Using Sliding Mode Observers // *Proc. Int. Symposium Unmanned Untethered Submersible Technology*, August 1999. P. 1—8.
8. Deuker B., Perrier M., Amy B. Fault-Diagnosis of Subsea Robots Using Neuro-Symbolic Hybrid Systems // *Oceans*. Nice, F. 1998. P. 830—834.
9. Dhahri S., Ben Hmida F., Sellami A. LMI-based sliding-mode observer design method for reconstruction of actuator and sensor faults // *Int. Journal on Sciences and Techniques of Automatic control*. V. 1. N. 1. 2007. P. 91—107.
10. Wang J., Wan L., Jiang C., Sun Y. Wavelet neural network applied to fault diagnosis of underwater vehicle // *Proceedings of Control Conference (CCC)*. 2011. P. 4301—4306.
11. Staroswiecki M., Yang H., Jiang B. Progressive accommodation of aircraft actuator faults // *Proc. IFAC Symp. Safeprocess'2006*. Beijing, China, 2006. P. 877—882.
12. Weng Z., Patton R., Cui P. Active fault-tolerant control of a double inverted pendulum // *Proc. IFAC Symp. Safeprocess'2006*. Beijing, PR China, 2006. P. 1591—1596.
13. Staroswiecki M. Fault tolerant control: the pseudo inverse method revisited // *Proc. 16th IFAC Congr. Prague, Czech. Republic*, 2005.
14. Jang B., Staroswiecki M., Cocquempot V. Active fault tolerant control for a class nonlinear systems // *Proc. IFAC Symp. Safeprocess'03*. Washington, USA, 2003. P. 127—132.
15. Fossen T. I. *Guidance and control of ocean vehicles*. John Wiley & Sons Ltd. 1994. P. 494.
16. Филаретов В. Ф., Жирабок А. Н., Зуев А. В., Проценко А. А. Разработка метода синтеза системы аккомодации к дефектам в электроприводах манипуляционных роботов // *Информационно-измерительные и управляющие системы*. 2013. № 4, т. 11. С. 26—33.
17. Филаретов В. Ф., Лебедев А. В., Юхимец Д. А. *Устройства и системы управления подводных роботов*. М.: Наука. 2005. 270 с.

Method of Synthesis of Continuous Systems of Accommodation to the Faults in Navigation Sensors of Autonomous Underwater Robots

V. F. Filaretov^{a, b}, filaret@pma.ru, A. V. Zuev^{a, b}, zuev@iacp.dvo.ru, A. N. Zhirabok^{b, c}, zhirabok@mail.ru, A. A. Procenko^b, pro293133@gmail.com, B. Subudhi^d, bidyadharnitrkl@gmail.com,
^aInstitute for Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, 690041, Russia
^bFar Eastern Federal University, 8, Sukhanova St., Vladivostok, 690950, Russia
^cInstitute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, 690041, Russia
^dNational Institute of Technology, Rourkela, India

Received on December, 2014

Today, the problem of timely detection and accommodation to the arising faults in navigation sensors of autonomous underwater robots (AUR) is very topical. Analysis shows that the existing approaches and methods provide a qualitative solution to the accommodation problems of faults only in case of a slow speed motion of AUR. In this paper, a new synthesis method of high-quality continuous accommodation systems to faults arising in the navigation sensors of AUR is proposed and investigated. This method consists of three main stages. At the first stage, the problem of detection and localization of faults based on the use of a robot's kinematic model and special data fusion from its sensors is solved. It ensures high quality diagnostics data, because the kinematic model connects all the motion parameters of AUR and variables measured by its navigation sensors. At the second stage, the problem of the faults' size identification is solved due to introduction of special feedback in each observer. At the third stage, the additional control signals for AUR guaranteeing expeditious parrying of the arising faults are formed. The advantage of the proposed method is simplicity of its realization and high precision of compensation of the revealed faults in the conditions of uncertainty and essential variability of the environmental parameters. The modeling results prove high efficiency of operation of the synthesized system of accommodation.

Keywords: underwater robot, diagnosis, faults, accommodation to faults, navigation sensors

Acknowledgements: This work was financially supported by the Science Foundation FEPU (agreement no. 13-06-0112-m a), Ministry of Education of the Russian Federation (public job in 1141), as well as RFBR.

For citation:

Filaretov V. F., Zuev A. V., Zhirabok A. N., Procenko A. A., Subudhi B. Method of Synthesis of Continuous Systems of Accommodation to the Faults in Navigation Sensors of Autonomous Underwater Robots, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 4, pp. 282–288.

DOI: 10.17587/mau.16.282-288

References

1. Blanke M., Kinnaert M., Lunze J., Staroswiecki M. *Diagnosis and Fault Tolerant Control*, Springer-Verlag, 2003, 571 p.
2. Zhirabok A. N., Pisaretc A. M. Diagnostirovanie datchikov podvodnykh robotov (Diagnosing of sensors of underwater robots), *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2004, no. 9, pp. 15–21. (in Russian)
3. Zhirabok A. N., Pisaretc A. M. Ob odnom podkhode k diagnostirovaniyu dvizhitelei podvodnykh apparatov (An approach to the diagnosis of propulsion underwater vehicles), *Proc. of the International Scientific and Technical Conference "Technical problems of the world's oceans"*, Vladivostok, 2005, pp. 71–77. (in Russian)
4. Antonelli G., Caccavale F., Sansone C., Villani L. Fault diagnosis for AUVs using support vector machines, *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2004, vol. 5, pp. 4486–4491.
5. Alessandri A., Caccia M., Verruggio G. A Model-Based Approach to Fault Diagnosis in Unmanned Underwater Vehicles, *Proc. of Oceans, Nice, France*, 1998, pp. 825–829.
6. Antonelli G. A Survey of Fault Detection/Tolerance Strategies for AUVs and ROVs, *Springer Tracts in Advanced Robotics*, 2003, vol. 1, pp. 109–127.
7. Alessandri A., Hawkinson T., Healey A. J., Verruggio G. Robust Model-Based Fault Diagnosis for Unmanned Underwater Vehicles Using Sliding Mode Observers, *Proc. International Symposium Unmanned Untethered Submersible Technology*, 1999, pp. 1–8.
8. Deuker B., Perrier M., Amy B. Fault-Diagnosis of Subsea Robots Using Neuro-Symbolic Hybrid Systems, *Proc. of Oceans, Nice, France*, 1998, pp. 830–834.
9. Dhahri S., Ben Hmida F., Sellami A. LMI-based sliding-mode observer design method for reconstruction of actuator and sensor faults, *International Journal on Sciences and Techniques of Automatic control*, vol. 1, no. 1, 2007, pp. 91–107.
10. Wang J., Wan L., Jiang C., Sun Y. Wavelet neural network applied to fault diagnosis of underwater vehicle, *Proc. of Control Conference (CCC)*, 2011, pp. 4301–4306.
11. Staroswiecki M., Yang H., Jiang B. Progressive accommodation of aircraft actuator faults, *Proc. IFAC Symp. Safeprocess '2006. Beijing, China*, 2006, pp. 877–882.
12. Cheng Z., Patton R., Cui P. Active fault-tolerant control of a double inverted pendulum, *Proc. IFAC Symp. Safeprocess '2006. Beijing, PR China*, 2006, pp. 1591–1596.
13. Staroswiecki M. Fault tolerant control: the pseudo inverse method revisited, *Proc. 16th IFAC Congr. Prague, Czech. Republic*, 2005.
14. Jang B., Staroswiecki M., Cocquemot V. Active fault tolerant control for a class nonlinear systems, *Proc. IFAC Symp. Safeprocess '03. Washington, USA*, 2003, pp. 127–132.
15. Fossen T. I. *Guidance and control of ocean vehicles*, John Wiley & Sons Ltd., 1994, 494 p.
16. Filaretov V. F., Zhirabok A. N., Zuev A. V., Procenko A. A. Razrabotka metoda sinteza sistemy akkomodatsii k defektam v elektroprivodakh manipulyatsionnykh robotov (Development of a method of synthesis of accommodation to defects in electric robotic manipulator), *Informacionno-Izmeritel'nye i Upravljajushhie Sistemy*, 2013, no. 4 (11), pp. 26–33. (in Russian).
17. Filaretov V. F., Lebedev A. V., Yukhimets D. A. *Ustroistva i sistemy upravleniya podvodnykh robotov* (Devices and control systems of underwater robots), Moscow, Nauka, 2005, 270 p. (in Russian).

Corresponding author:

Zuev Aleksandr V., PhD, Junior Researcher, Institute for automation and control processes Far Eastern Branch of RAS, 690041, Vladivostok, Russia, Far Eastern Federal University, Vladivostok, 690950, Russia, e-mail: zuev@iacp.dvo.ru

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5397, тел./факс: (499) 269-5510

Технический редактор Е. В. Конова. Корректор З. В. Наумова.

Сдано в набор 02.02.2015. Подписано в печать 13.03.2015. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН415. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансд солюншнз". Отпечатано в ООО "Авансд солюншнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.