DOI 10.17587/issn.1684-6427
ISSN 1684-6427

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 19
2018
№ 4

Рисунки к статье М. В. Архипова, М. Ю. Рачкова, В. Ф. Головина, Л. Б. Кочеревской «РОБОТЫ ДЛЯ ВОССТАНОВИТЕЛЬНОЙ МЕДИЦИНЫ: ПРОБЛЕМЫ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ»

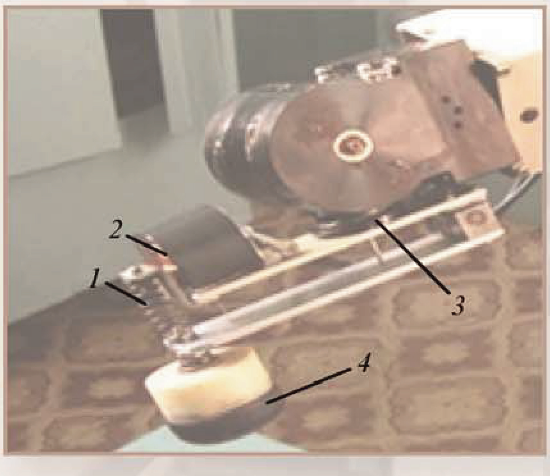


Рис. 2. Биомехатронный модуль робота с пружинным компенсатором и однокомпонентным индукционным датчиком усилия:
1 – пружина; *2* – индукционный датчик; *3* – фланец робота; *4* – инструмент

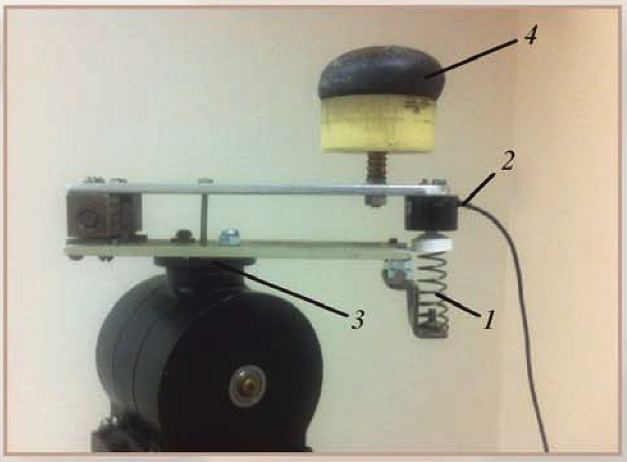


Рис. 3. Биомехатронный модуль робота с пружинным компенсатором и однокомпонентным тензодатчиком усилия:
1 – пружина; *2* – тензодатчик; *3* – фланец робота; *4* – инструмент

Рис. 4. Биомехатронный модуль робота с пружинным компенсатором и трехкомпонентным тензодатчиком усилия:
1 – трехкомпонентный тензодатчик усилия; *2* – фланец робота; *3* – рукоятка

Рис. 10. Пассивный биомехатронный модуль с силовым тензодатчиком:
1 – тензодатчик; *2* – переходник; *3* – фланец робота; *4* – кассета интерфейса

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 19
2018
№ 4

Издается с ноября 2000 года ISSN 1684-6427 DOI 10.17587/issn.1684-6427

СОДЕРЖАНИЕ

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу: http://novtex.ru/mech, e-mail: mech@novtex.ru

THEORETICAL AND APPLIED SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL

Vol. 19
2018
No. 4

MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000 ISSN 1684-6427 DOI 10.17587/issn.1684-6427

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospectives development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

Information about the journal is available online at:
http://novtex.ru/mech.html, e-mail: mech@novtex.ru

УДК 681.5.015.3 DOI: 10.17587/mau.19.219-231

В. И. Краснощеченко, канд. техн. наук, доц., kviip@yandex.ru,
Калужский филиал МГТУ им. Н. Э. Баумана

Синтез робастного динамического H_∞-регулятора низкого порядка с использованием линейных матричных неравенств и проекционных лемм

Рассматривается прямой подход к синтезу робастного регулятора низкого порядка. Для синтеза робастного H_∞-регулятора низкого порядка для объектов с политопической неопределенностью используются лемма об ограниченности H_∞-нормы передаточных функций (так называемая BR-лемма для линейных матричных неравенств) и две процедуры проектирования: 1) проекционная лемма для линейных матричных неравенств; 2) проектирование неотрицательно определенных матриц в редуцированное пространство также неотрицательно определенных матриц. Подробно рассмотрен пример синтеза регулятора для двухмассовой системы четвертого порядка с политопической неопределенностью. Показано, что порядок регулятора можно снизить с первоначального четвертого до второго при незначительном ухудшении показателей качества.

Ключевые слова: *робастность, линейные матричные неравенства, проекционная лемма, политопическая неопределенность, двухмассовая система, регулятор низкого порядка*

Введение

В настоящее время существует множество методов и алгоритмов синтеза динамических регуляторов (регуляторов, для которых входом является вектор измеряемых переменных, но не используется наблюдатель) для объектов с неопределенными параметрами. Предложены алгоритмы робастного модального синтеза динамических H_∞-регуляторов [1]; алгоритмы, использующие проекционную лемму для линейных матричных неравенств [2—5]; синтез с использованием дробно-линейных преобразований [6]; алгоритмы, использующие параметризацию Юлы и взаимно простую факторизацию передаточных функций [7]. Но всегда возникает одна проблема: спроектированные регуляторы, как правило, имеют высокий порядок, равный порядку объекта управления или превышающий его. Достаточно привести пример из работы [6], где для объекта второго порядка с тремя интервально неопределенными параметрами спроектированный регулятор имеет двадцатый порядок. Поэтому проблема синтеза регуляторов низкого порядка имеет как теоретический, так и, что более важно, практический интерес. Данная проблема всегда стояла перед разработчиками, менялись только подходы и объекты управления [8—11].

Следует отметить, что при проектировании регуляторов низкого порядка имеют место три подхода.

1. Для объекта высокого порядка проектируется регулятор высокого порядка, а затем с использованием различных подходов (например, балансного усечения, аппроксимации ганкелевой нормы и др. [6]) синтезируется регулятор низкого порядка. Возможна следующая проблема: редуцированный регулятор может приводить не только к значительной потере качества, но и даже к потере устойчивости.

2. Редуцируется модель высокого порядка объекта управления, и для полученной редуцированной модели объекта строится регулятор пониженного порядка. Возможна следующая проблема: понижение порядка модели объекта ограничено сохранением его существенных свойств.

3. Прямой метод: для модели высокого порядка сразу синтезируется регулятор низкого порядка. Возможна следующая проблема: потеря качества управления для редуцированного регулятора, однако устойчивость обеспечивается.

В данной статье рассматривается третий подход. Для синтеза робастного H_∞-регулятора низкого порядка для объектов с политопической неопределенностью используется лемма об ограниченности H_∞-нормы передаточных функций (так называемая BR-лемма (bounded real lemma) [12, 13]) для линейных матричных неравенств и две процедуры проектирования: 1) проекционная лемма для линейных матричных неравенств [2, 3, 12], далее — просто проекционная лемма (аналог элиминационной леммы П. Финслера [14]); 2) проектирование неотрицательно определенных матриц в редуцированное пространство также неотрицательно определенных матриц. Подробно рассмотрен пример синтеза регулятора для высококолебательного объекта четвертого порядка с политопической неопределенностью. Показано, что порядок регулятора можно снизить с первоначального четвертого до второго при незначительном ухудшении показателей качества.

Постановка задачи

Задан объект управления:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\mathbf{x} \in R^{n_p}$ — вектор состояния; $\mathbf{z} \in R^{n_z}$ — вектор регулируемых переменных (определяет цели управления; чаще всего состоит из ошибок слежения, а также позволяет косвенно ограничить уровень входного управляющего сигнала и др.); $\mathbf{y} \in R^{n_y}$ — вектор измеряемых переменных; $\mathbf{u} \in R^{n_u}$ — вектор управления; $\mathbf{w} \in R^{n_w}$ — вектор возмущений (неконтролируемых воздействий, куда относятся различного рода шумы, командные сигналы). Матрицы объекта управления имеют соответствующие размерности:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} : n_p \times n_p; \mathbf{B}_1 : n_p \times n_w; \mathbf{B}_2 : n_p \times n_u; \\ &\mathbf{C}_1 : n_z \times n_p; \mathbf{D}_{11} : n_z \times n_w; \mathbf{D}_{12} : n_z \times n_u; \\ &\mathbf{C}_2 : n_y \times n_p; \mathbf{D}_{21} : n_y \times n_w. \end{aligned}$$

Требуется для выбранного уровня H_∞-качества $\gamma > 0$ и заданной политопической неопределенности синтезировать робастный динамический регулятор по выходу $\mathbf{U}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{Y}(s)$ (где $\mathbf{K}(s)$ — матричная передаточная функция регулятора) минимально возможного порядка, обеспечивающий выполнение условия

$$\|\mathbf{W}_{w \to z}(s)\|_\infty < \gamma;$$

$\mathbf{W}_{w \to z}(s)$ — передаточная функция системы по каналу "возмущение — регулируемая переменная"; $\|\cdot\|_\infty$ — H_∞-норма передаточной функции.

Процедура синтеза динамического регулятора

В пространстве состояний динамический регулятор имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_K(t) &= \mathbf{A}_K\mathbf{x}_K(t) + \mathbf{B}_K\mathbf{y}(t); \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{C}_K\mathbf{x}_K(t) + \mathbf{D}_K\mathbf{y}(t), \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\mathbf{x}_K \in R^{n_c}, n_c \leqslant n_p$, т.е. размерность вектора состояния регулятора совпадает с размерностью вектора состояния объекта управления (регулятор полного порядка) либо имеет меньший порядок. Матрицы динамического регулятора имеют соответствующие размерности:

$$\mathbf{D}_K : n_u \times n_y;\ \mathbf{C}_K : n_u \times n_c;\ \mathbf{B}_K : n_c \times n_y;\ \mathbf{A}_K : n_c \times n_c.$$

Используя уравнения (1) и (2), найдем передаточную функцию замкнутой системы от возмущения $\mathbf{w}$ к регулируемой переменной $\mathbf{z}$. Получим

$$\mathbf{W}_{w \to z}(s) = \mathbf{C}^*\left(s\mathbf{I} - \mathbf{A}^*\right)^{-1}\mathbf{B}^* + \mathbf{D}^*, \qquad (3)$$

где

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}; \qquad (4)$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_K\mathbf{D}_{21} \end{pmatrix}; \qquad (5)$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_K \end{pmatrix}; \qquad (6)$$

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_{21}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица соответствующей размерности.

Представим матрицу $\mathbf{A}^*$ замкнутой системы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}\bar{\mathbf{C}}, \end{aligned} \qquad (8)$$

где

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{(n_p \times n_p)} & \mathbf{0}_{(n_p \times n_c)} \\ \mathbf{0}_{(n_c \times n_p)} & \mathbf{0}_{(n_c \times n_c)} \end{pmatrix},\ \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{2(n_p \times n_u)} & \mathbf{0}_{(n_p \times n_c)} \\ \mathbf{0}_{(n_c \times n_u)} & \mathbf{I}_{(n_c \times n_c)} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{2(n_y \times n_p)} & \mathbf{0}_{(n_y \times n_c)} \\ \mathbf{0}_{(n_c \times n_p)} & \mathbf{I}_{(n_c \times n_c)} \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}$ — матричные параметры искомого регулятора. Заметим, что матрицы $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{C}}$ связаны только с объектом управления.

Для синтеза стабилизирующего H_∞-регулятора используем BR-лемму [12, 13] и проекционную лемму. В соответствии с BR-леммой замкнутая система устойчива и имеет H_∞-норму не больше γ, $\|\mathbf{W}_{w \to z}(s)\|_\infty < \gamma$, если существует положительно определенная матрица $\mathbf{P} \succ \mathbf{0}$ (в дальнейшем используем символы $\{\prec, \succ\}$ для указания знакоопределенности матрицы или матричного неравенства) размерности $(n_p + n_c)\times(n_p + n_c)$ такая, что выполнено следующее неравенство относительно неизвестной матрицы $\mathbf{P}$, но содержащее матрицы, зависящие от искомых, а значит, тоже неизвестных параметров регулятора (см. формулы (4)—(7)):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{PA}^* + \mathbf{A}^{*\mathrm{T}}\mathbf{P} & \mathbf{PB}^* & \mathbf{C}^{*\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}^{*\mathrm{T}}\mathbf{P} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}^{*\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D}^* & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} +$$
$$+\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \tag{9}$$
$$+\left(\begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{C}^* & \mathbf{D}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \prec \mathbf{0}.$$

Для нахождения параметров регулятора из неравенства (9) сначала преобразуем его. Для этого представим матрицу $\mathbf{P}$ и обратную к ней в блочно-матричной форме, а именно:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}} & \mathbf{V} \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \in R^{n_p\times n_p}, \\ &\mathbf{M} \in R^{n_p\times n_c}, \mathbf{V} = \mathbf{V}^{\mathrm{T}} \in R^{n_c\times n_c}, \\ &\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^{\mathrm{T}} & \mathbf{U} \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}} \in R^{n_p\times n_p}, \\ &\mathbf{N} \in R^{n_p\times n_c}, \mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}} \in R^{n_c\times n_c}. \end{aligned} \tag{10}$$

Подстановка (10) в формулу (9) с учетом соотношений (4)—(8) приводит к следующему неравенству:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{RA} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} & \mathbf{RB}_1 & \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{M} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} +$$
$$+\begin{pmatrix} \mathbf{RB}_2 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2 & \mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \tag{11}$$
$$+\left(\begin{pmatrix} \mathbf{RB}_2 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2 & \mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \prec \mathbf{0}.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{RA} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} & \mathbf{RB}_1 & \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{M} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix}, \\ &\mathbf{\Psi}_L = \begin{pmatrix} \mathbf{RB}_2 & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_2 & \mathbf{V} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{12} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{\Psi}_R = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ &\mathbf{\Theta} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

Тогда неравенство (11) можно записать в следующей компактной форме:

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{P}) + \mathbf{\Psi}_L(\mathbf{P})\mathbf{\Theta}\mathbf{\Psi}_R + (\mathbf{\Psi}_L(\mathbf{P})\mathbf{\Theta}\mathbf{\Psi}_R)^{\mathrm{T}} \prec \mathbf{0}, \tag{13}$$

где аргументы в скобках указывают на зависимость соответствующего слагаемого или множителя от матрицы $\mathbf{P}$, а точнее, от элементов ее блочно-матричного представления (10). Теперь воспользуемся проекционной леммой [2—5], где показано, что для разрешимости неравенства (13) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два неравенства:

$$\begin{aligned} &1)\ \mathbf{\Psi}_L^{\perp^{\mathrm{T}}}(\mathbf{P})\mathbf{\Omega}(\mathbf{P})\mathbf{\Psi}_L^{\perp}(\mathbf{P}) \prec \mathbf{0}; \\ &2)\ (\mathbf{\Psi}_R^{\mathrm{T}^{\perp}})^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega}(\mathbf{P})\mathbf{\Psi}_R^{\mathrm{T}^{\perp}} \prec \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\mathbf{\Psi}_L^{\perp}$, $\mathbf{\Psi}_R^{\mathrm{T}^{\perp}}$ — ортогональные дополнения столбцовых пространств $\Psi_L, \Psi_R^{\mathrm{T}}$. Отметим, что для произвольной матрицы $\mathbf{G}$ ортогональное дополнение $\mathbf{G}^{\perp}$ совпадает с нульпространством $\mathrm{Null}_{\mathbf{G}^{\mathrm{T}}}$ матрицы $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ (линейная оболочка *любого* базиса ядра отображения $\mathrm{Ker}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$) [15], т.е.

$$\mathbf{G}^{\perp} = \mathrm{Null}_{\mathbf{G}^{\mathrm{T}}} = \mathrm{Ker}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

С учетом (15) неравенства (14) представляются в следующем виде:

$$1)\ \left(\mathrm{Ker}\mathbf{\Psi}_L^{\mathrm{T}}(\mathbf{P})\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega}(\mathbf{P})\mathrm{Ker}\mathbf{\Psi}_L^{\mathrm{T}}(\mathbf{P}) \prec \mathbf{0}; \tag{16а}$$

$$2)\ (\mathrm{Ker}\mathbf{\Psi}_R)^{\mathrm{T}}\mathbf{\Omega}(\mathbf{P})\mathrm{Ker}\mathbf{\Psi}_R \prec \mathbf{0}. \tag{16б}$$

Рассмотрим вначале неравенство (16б), так как *его ортогональное дополнение не зависит от неизвестной матрицы* $\mathbf{P}$. Из соотношения (12) имеем

$$\mathrm{Ker}\mathbf{\Psi}_R = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $\mathbf{V}_i$, $i = 1, 2$, — любые матрицы соответствующих размерностей, обеспечивающие выполнение равенства

$$\Psi_R \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Используя выражение (17), преобразуем (16б) с учетом (12). Получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{P}) \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{RA} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} & \mathbf{RB}_1 & \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{M} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{RA} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{RB}_1 & \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \qquad (18)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Ker}(\mathbf{C}_2 \;\; \mathbf{D}_{21}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \boldsymbol{\Omega}_1^{-}(\mathbf{R}) \begin{pmatrix} \mathrm{Ker}(\mathbf{C}_2 \;\; \mathbf{D}_{21}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \prec \mathbf{0},$$

где матрица

$$\boldsymbol{\Omega}_1^{-}(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} \mathbf{RA} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{RB}_1 & \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \qquad (19)$$

теперь зависит только от неизвестной блочной матрицы $\mathbf{R}$ и

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Ker}(\mathbf{C}_2 \;\; \mathbf{D}_{21}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \qquad (20)$$

Переходим к неравенству (16а). Имеем

$$\mathrm{Ker}\boldsymbol{\Psi}_L^{\mathrm{T}}(\mathbf{P}) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{R} & \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}} & \mathbf{V} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}} & \mathbf{V} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{\mathrm{T}} & \mathbf{V} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{-1} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^{\mathrm{T}} & \mathbf{U} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

где использованы соотношения (10) и легко доказываемое равенство $\mathrm{Ker}(\mathbf{QH}) = \mathbf{H}^{-1}\mathrm{Ker}\mathbf{Q}$ для любой невырожденной матрицы $\mathbf{H}$. Подставим (21) в (16а), после преобразований получим

$$\left(\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{SA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{AS} & \mathbf{AN} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{SC}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & \mathbf{C}_1\mathbf{N} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \times \qquad (22)$$

$$\times \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \prec \mathbf{0}.$$

Рассмотрим в формуле (22) составляющую

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Подстановка выражения (23) в соотношение (22) после проведения преобразований приводит к неравенству

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{SA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{AS} & \mathbf{AN} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{SC}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & \mathbf{C}_1\mathbf{N} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times \qquad (24)$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{SA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{AS} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{SC}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \prec \mathbf{0}.$$

Используя матрицу перестановок

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{I} \\ 0 & \mathrm{I} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^{-1} = \mathbf{\Pi}^{\mathrm{T}}$$

для неравенства (24), получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{SA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{AS} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{SC}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Pi\Pi}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{SA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{AS} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{SC}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \mathbf{\Pi\Pi}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{SA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{AS} & \mathbf{SC}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V}_4 & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \qquad (25)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbf{SA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{AS} & \mathbf{SC}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \times$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times$$

$$\times \mathbf{\Omega}_2^{-}(\mathbf{S}) \begin{pmatrix} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \prec \mathbf{0},$$

где матрица

$$\mathbf{\Omega}_2^{-}(\mathbf{S}) = \begin{pmatrix} \mathbf{SA}^{\mathrm{T}} + \mathbf{AS} & \mathbf{SC}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{S} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{11}^{\mathrm{T}} & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} \qquad (26)$$

теперь зависит только от неизвестной блочной матрицы **S**.

Теперь видно, что разрешимость неравенств (16а), (16б) сводится к следующей системе линейных матричных неравенств:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times$$
$$\times \Omega_1^{-}(\mathbf{R}) \begin{pmatrix} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \prec \mathbf{0}, \qquad (27а)$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \times$$
$$\times \mathbf{\Omega}_2^{-}(\mathbf{S}) \begin{pmatrix} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_{12}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \prec \mathbf{0} \qquad (27б)$$

относительно неизвестных матриц $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}, \mathbf{S} \succ \mathbf{0}$, где матрицы $\Omega_1^{-}(\mathbf{R})$, $\mathbf{\Omega}_2^{-}(\mathbf{S})$ определяются формулами (19) и (26) соответственно. Однако неравенств (27) недостаточно, так как матрицы $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}, \mathbf{S} \succ \mathbf{0}$ связаны соотношениями (10).

Для поиска дополнительных условий рассмотрим обращение блочных матриц. Известно [15, 16], что для блочной матрицы

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \det \mathbf{D} \neq 0$$

ее обратная (один из возможных вариантов) определяется как

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}^{-1} & -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{BD}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{CT} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{CT}^{-1}\mathbf{BD}^{-1} \end{pmatrix}, \qquad (28)$$

где $\mathbf{T} = \mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C}, \det \mathbf{T} \neq 0$.

Пусть блочная матрица $\mathbf{V} = \mathbf{I}$ в матрице $\mathbf{P}$ будет единичной. Тогда из соотношения (28) получаем

$$\left(\mathbf{R} - \mathbf{MM}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{MM}^{\mathrm{T}} \succeq \mathbf{0}. \quad (29)$$

Так как $\mathbf{M} \in R^{n_p \times n_c}$ и $n_c \leqslant n_p$, то

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}\right) = \mathrm{rank}\left(\mathbf{MM}^{\mathrm{T}}\right) \leqslant n_c. \qquad (30)$$

Используя дополнение Шура [12] для выражения (29), имеем следующее дополнительное линейное матричное неравенство для нахождения матриц (**R**, **S**):

$$\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1} \succeq \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \succeq \mathbf{0}. \qquad (31)$$

Ивасаки и Скелтон [3] показали, что для данной пары матриц (**R**, **S**) *достигается минимальный порядок* n_c^* *регулятора*, если матрица **M** имеет полный ранг по столбцам, т.е.

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}\right) = \mathrm{rank}\left(\mathbf{MM}^{\mathrm{T}}\right) = n_c^*. \qquad (32)$$

Для регулятора не обязательно минимального порядка $n_c^* \leqslant n_c < n_p$ соотношение (32) имеет вид неравенства

$$\mathrm{rank}\left(\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}\right) = \mathrm{rank}\left(\mathbf{MM}^{\mathrm{T}}\right) \leqslant n_c. \qquad (33)$$

Итак, окончательно имеем следующую теорему о субоптимальном редуцированном H_∞-регуляторе с H_∞-нормой передаточной функции замкнутой системы $\|\mathbf{W}_{w\to z}(s)\|_\infty < \gamma$ и заданным параметром $\gamma > 0$.

Теорема. Следующие утверждения эквивалентны:

1) существует субоптимальный H_∞-регулятор порядка n_c;

2) существуют положительно определенные матрицы $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}, \mathbf{S} \succ \mathbf{0}$ такие, что выполнены неравенства (27), (31), (33). □

Однако возникает одна проблема. Если неравенства (27), (31) являются линейными матричными неравенствами, а значит, определяют выпуклые множества, то неравенство (33) является таковым только для $n_c = n_p$ [3]. При $n_c < n_p$, что является обычной практикой и целью данной работы, условие (33) уже *не является выпуклым*, так как ранговое условие (33) не определяет выпуклого множества в параметрическом пространстве ($\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$). Поэтому решить неравенства (27), (31), (33) с использованием, например, средств пакета MATLAB не представляется возможным.

Для решения данной проблемы используем *проекционный метод и следующую двухэтапную процедуру синтеза*.

1 этап. На первом этапе решим ослабленную задачу (27), (31) без учета условия (33). Для получения регулятора редуцированного порядка необходимо использовать некоторую процедуру оптимизации, а именно: найти матрицы $\mathbf{R} \succ \mathbf{0}, \mathbf{S} \succ \mathbf{0}$, которые минимизируют след матрицы (31) (линейная целевая функция)

$$J = \min_{\mathbf{R}\succ\mathbf{0},\,\mathbf{S}\succ\mathbf{0}} \operatorname{tr}\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{S} \end{pmatrix} = \min_{\mathbf{R}\succ\mathbf{0},\,\mathbf{S}\succ\mathbf{0}} (\operatorname{tr}\mathbf{R} + \operatorname{tr}\mathbf{S}) \quad (34)$$

при выполнении ограничений (неравенств) (27), (31) и заданном параметре $\gamma > 0$.

Такой выбор целевой функции обусловлен следующими соображениями. Рассмотрим предельный случай, когда динамический регулятор ($n_c > 0$) переходит в статический ($n_c = 0$). Для статического регулятора имеем матрицы $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, $\mathbf{N} = \mathbf{0}, \mathbf{U} = \mathbf{0}, \mathbf{V} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{S} = \mathbf{R}^{-1} \succ \mathbf{0}$, $\mathbf{P} = \mathbf{R}, \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{R}^{-1}$, а целевая функция (34) представляется как

$$J_0 = \min_{\mathbf{R}\succ\mathbf{0}} \operatorname{tr}\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{R}^{-1} \end{pmatrix} = \min_{\mathbf{R}\succ\mathbf{0}} \left(\operatorname{tr}\mathbf{R} + \operatorname{tr}\mathbf{R}^{-1}\right). \quad (35)$$

Нетрудно показать, что при отсутствии каких-либо ограничений $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^{*-1} = \mathbf{I}_{n_p}$ и оптимальное значение целевой функции $\tilde{J}_0^* = 2n_p$. При наличии ограничений, как в нашем случае, $J^* > J_0^* > \tilde{J}_0^*$. Поэтому целевая функция вида (34) вполне адекватна решаемой задаче.

2 этап. Для получения редуцированного регулятора и учета рангового условия (33) используем полученные после первого этапа матрицы ($\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$) и процедуру ортогонального проектирования симметричной неотрицательно определенной матрицы $\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}$ на множество редуцированных неотрицательно определенных матриц. Для этого воспользуемся модификацией леммы из работы [17].

Лемма. Пусть $\mathbf{Q}_r = \mathbf{Q}_r^{\mathrm{T}} \succeq \mathbf{0}, \mathbf{Q}_r \in \bar{S}_+^{n|r}$ — некоторая *неотрицательно определенная* матрица размерности $n\times n$, ранга $r < n$ и

$$\mathbf{Q}_r = \mathbf{U\Sigma U}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_r^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{U}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

— ее сингулярное разложение, где $\mathbf{U}$ — ортогональная матрица, $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}(:,1:r)$ — матрица размерности $n\times r$, $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}(:,r+1:n)$ — матрица размерности $n\times(n-r)$, Σ_r^+ — диагональная матрица ее *положительных* собственных значений (сингулярных чисел), $\bar{S}_+^{n|r}$ — множество неотрицательно определенных матриц размерности $n\times n$, ранга r. Тогда ортогональная проекция матрицы $\mathbf{Q}_r$ на множество неотрицательно определенных матриц $\mathbf{Q}_p \in \bar{S}_+^{n|p}$ размерности $n\times n$ и ранга $p < r$ определяется следующей формулой:

$$\mathbf{Q}_p = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1 & \tilde{\mathbf{U}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{\Sigma}_p^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{T}} \\ \tilde{\mathbf{U}}_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{U}}_1 \mathbf{\Sigma}_p^+ \tilde{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{T}}, \quad (36)$$

где $\mathbf{\Sigma}_p^+ = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, .., \sigma_p)$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_p > 0$, $p < r$ — диагональная матрица ненулевых сингулярных чисел матрицы $\mathbf{Q}_r$, полученная приравниванием нулю ($r - p$) самых малых (практически нулевых) сингулярных чисел матрицы $\mathbf{Q}_r$, $\tilde{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}(:,1:p)$.

Доказательство. Скалярное произведение ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$) *неотрицательно определенных* матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \bar{S}_+^{n|p}$, $p < n$, определяется следующим выражением [16]:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{AB}),$$

где $\operatorname{tr}(\mathbf{Y})$ — след матрицы $\mathbf{Y}$. Тогда ортогональная проекция $\mathbf{A}_\perp \in \bar{S}_+^{n|q}$ матрицы $\mathbf{A} \in \bar{S}_+^{n|p}$ на некоторое замкнутое и выпуклое подмножество $\bar{S}_+^{n|q} \subset \bar{S}_+^{n|p}$, $q < p$ находится по формуле

$$(\mathbf{A}_\perp, \mathbf{A} - \mathbf{A}_\perp) = 0.$$

Нетрудно показать, что подстановка представленных выше выражений для спроектированной матрицы дает необходимый результат, т.е.

$$(\mathbf{Q}_p, \mathbf{Q}_r - \mathbf{Q}_p) = 0. \ \blacksquare$$

Воспользовавшись этой леммой, проведем сингулярное разложение матрицы $\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}$ (формула (29)) и рассмотрим ее ортогональную проекцию на множество $\bar{S}_{+}^{n_p|n_c}, n_c \leqslant n_p$. Получим

$$\left(\mathbf{R}-\mathbf{S}^{-1}\right)_{+} = \mathbf{U}_1 \boldsymbol{\Sigma}_{n_c}^{+} \mathbf{U}_1^{\mathrm{T}} = \\ = \mathbf{U}_1 \left(\boldsymbol{\Sigma}_{n_c}^{+}\right)^{1/2} \left(\boldsymbol{\Sigma}_{n_c}^{+}\right)^{1/2} \mathbf{U}_1^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{\mathrm{T}} \in \bar{S}_{+}^{n_p|n_c}, \quad (37)$$

где $\Sigma_{n_c}^{+} = \mathrm{diag}\left(\sigma_1, \sigma_2, .., \sigma_{n_c}\right)$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{n_c} > 0$, $0 < n_c \leqslant n_p$. Такая процедура проектирования показывает, что матрица $\mathbf{M} = \mathbf{U}_1 \left(\boldsymbol{\Sigma}_{n_c}^{+}\right)^{1/2}$ имеет полный ранг, т.е. порядок $n_c = n_c^{*}$, $\mathbf{M} \in R^{n_p \times n_c^{*}}$, равный минимальному порядку регулятора.

Однако после отбрасывания только (практически) нулевых сингулярных чисел в матрице $\boldsymbol{\Sigma}_{n_c^*}^{+}$ могут остаться сингулярные числа очень малых значений, близких к нулю. В этом случае возможна *дальнейшая редукция* порядка регулятора удалением таких сингулярных чисел. Структура регулятора становится проще. Но при этом с каждым отбрасыванием малых сингулярных чисел качество регулирования может ухудшаться. Необходим компромисс и количественные оценки работы полученного редуцированного регулятора. Далее рассматривается решение этой проблемы.

Синтез редуцированного регулятора

Далее мы рассматриваем регуляторы, у которых $n_c^r \leqslant n_c^*$, т.е. регуляторы, где отбрасываются малые ненулевые сингулярные числа матрицы $\Sigma_{n_c^*}^{+}$. Обозначим редуцированную матрицу

$$\left(\mathbf{R}-\mathbf{S}^{-1}\right)_{+}^{r} = \left(\mathbf{U}_1 \Sigma_{n_c^*}^{+} \mathbf{U}_1^{\mathrm{T}}\right)^{r} = \\ = \tilde{\mathbf{U}}_1 \left(\Sigma_{n_c^r}^{+}\right)^{1/2} \left(\Sigma_{n_c^r}^{+}\right)^{1/2} \tilde{\mathbf{U}}_1^{\mathrm{T}} = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{M}}^{\mathrm{T}} \in \bar{S}_{+}^{n_p|n_c^r}, \quad (38)$$

где

$$\Sigma_{n_c^r}^{+} = \mathrm{diag}\left(\sigma_1, \sigma_2, .., \sigma_{n_c^r}\right), \;\; n_c^r \leqslant n_c^*,$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{U}}_1 \left(\Sigma_{n_c^r}^{+}\right)^{1/2}, \;\; \tilde{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}_1\left(:, 1 : n_c^r\right),$$

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{n_c^r} \gg \sigma_{n_c^r+1} \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{n_c^*} > 0,$$

$$\mathrm{rank}(\tilde{\mathbf{M}}) = n_c^r, \;\; n_c^r \leqslant n_c^*.$$

После отбрасывания малых сингулярных чисел необходимо проверить выполнение основного линейного матричного неравенства (13), из которого после подстановки полученных матриц $\mathbf{P}$, $\tilde{\mathbf{M}}$ определяются матрицы регулятора $\mathbf{A}_K$, $\mathbf{B}_K$, $\mathbf{C}_K$, $\mathbf{D}_K$. Ясно, что при редукции порядка регулятора неравенство (13) для некоторого $n_c^r < n_c^*$ может не выполняться. При этом возможны два решения:

1) вернуться к регулятору более высокого порядка, который обеспечивает выполнение этого неравенства;

2) увеличить параметр γ и/или изменить весовые коэффициенты матриц регулируемого выхода (ухудшение качества управления), решить задачу первого этапа и попробовать найти регулятор для выбранного порядка n_c^r.

Представленный алгоритм синтеза редуцированного регулятора рассмотрим на примере синтеза робастного регулятора для объекта управления с политопической неопределенностью. Объектом управления выступает спутник, соединенный нежесткой связью с инструментальным блоком (двухмассовая система) [18]. Необходимо управлять угловым положением инструментального блока, на котором стоят звездный датчик и датчик углового положения самого блока, а привод управляет угловым положением спутника. Ввиду нежесткости связи имеет место несогласованность движений привода и датчика углового положения инструментального блока, в западной литературе этот эффект получил название "noncollocated" [18].

Пример

Рассматривается двухмассовая система (рис. 1), где J_1, J_2 — моменты инерции масс спутника и инструментального блока соответственно, связанных гибкой связью с неопределенными параметрами: $k \in [k_{\min}, k_{\max}]$ — жесткость пружины,

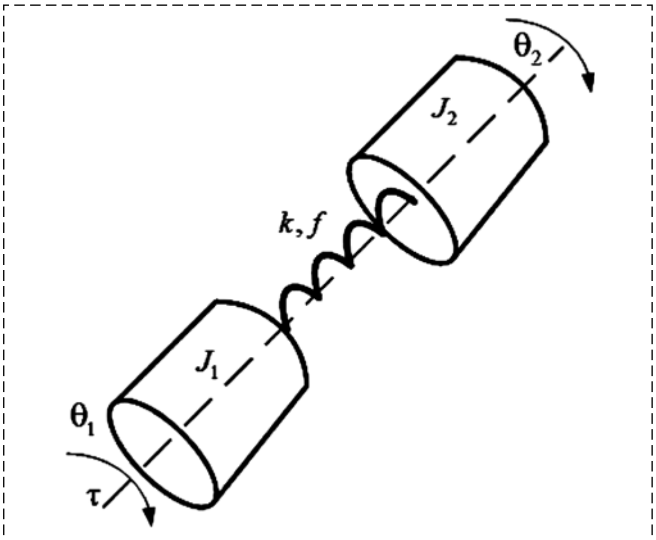


Рис. 1. Схематическое изображение объекта управления

$f \in [f_{\min}, f_{\max}]$ — коэффициент вязкого трения; τ — вращающий момент, приложенный к первой массе.

Фиксированные и интервально неопределенные параметры объекта управления: $k \in [0{,}09...0{,}4]$, $f \in [0{,}0038...0{,}042]$, $J_1 = 1$ кг·м^2, $J_2 = 0{,}1$ кг·м^2.

Требуется синтезировать регулятор низкого порядка, обеспечивающего следующие показатели качества для *любых* параметров объекта управления:

1) время переходного процесса не более 20 с;

2) перерегулирование не более 15 %.

Решение. Синтезируем H_∞-регулятор. Переменные состояния: $x_1 = \theta_1, x_2 = \dot{\theta}_1,\ x_3 = \theta_2, x_4 = \dot{\theta}_2$ (объект четвертого порядка, $n_p = 4$). Управление: $u = \tau$. Матрицы объекта управления (1) имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k}{J_1} & -\dfrac{f}{J_1} & \dfrac{k}{J_1} & \dfrac{f}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k}{J_2} & \dfrac{f}{J_2} & -\dfrac{k}{J_2} & -\dfrac{f}{J_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & -f & k & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10k & 10f & -10k & -10f \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}_{1,0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{B}_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{J_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Дополнительные индексы внизу у матриц приведены для того, чтобы показать, что данные матрицы еще не в полной мере соответствуют уравнениям полного объекта управления (1), имеется еще эталонная модель (ЭМ). Целью использования ЭМ является обеспечение синтезированным регулятором максимально точного отслеживания объектом управления желаемой динамики в переходном процессе. Структурная схема системы управления представлена на рис. 2.

Собственные значения матрицы $\mathbf{A}_0$ изменяются в широких пределах: наряду с наличием двойного нуля (двойного интегратора) имеются комплексные полюса с высоким значением показателя колебательности и малой собственной демпфированной частотой. В табл. 1 приведены собственные значения системной матрицы $\mathbf{A}_0$ для четырех вершин политопа неопределенности.

Измеряется только угол поворота инструментального блока θ_2, т.е. матрица выхода $\mathbf{C}_{2,0} =$ $= (0\ 0\ -1\ 0)$. Знак минус указывает на то, что

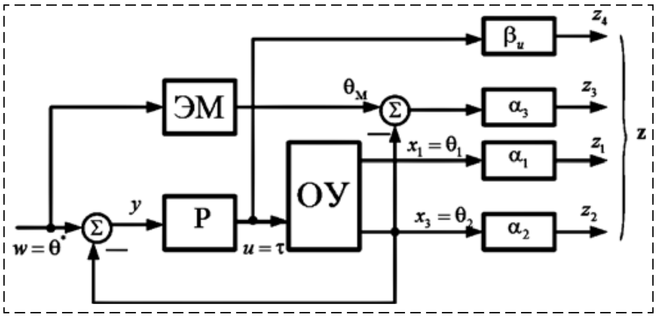


Рис. 2. Структурная схема системы управления:

Р — регулятор; ОУ — объект управления; ЭМ — эталонная модель; α_1, ..., α_3, β_u — весовые коэффициенты регулируемого выхода **z**

Таблица 1

Собственные значения системной матрицы $\mathbf{A}_0$ для угловых вершин политопа

Вершина политопа	Собственные значения
$(k_{\min}, f_{\min})$	$-0{,}0209 \pm j0{,}9948$; 0; 0
$(k_{\min}, f_{\max})$	$-0{,}2310 \pm j0{,}9678$; 0; 0
$(k_{\max}, f_{\min})$	$-0{,}0209 \pm j2{,}0975$; 0; 0
$(k_{\max}, f_{\max})$	$-0{,}2310 \pm j2{,}0849$; 0; 0

на вход регулятора поступает рассогласование $y(t) = \theta^*(t) - \theta_2(t)$, где $\theta^*(t) = w(t)$ — желаемая траектория угловой координаты инструментального блока (внешнее нерегулируемое воздействие). В качестве регулируемого вектора выхода **z** рассматривается вектор взвешенных угловых координат спутника и инструментального блока, управления и рассогласования углового положения инструментального блока с выходом эталонной модели. Матрицы регулируемого выхода объекта управления:

$$\mathbf{C}_{1,0} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_3 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathbf{D}_{11} = \mathbf{0}_{4\times1}, \mathbf{D}_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3\times1} \\ \beta_u \end{pmatrix}, \mathbf{D}_{21} = 1, \qquad (39)$$

где числовые значения весовых коэффициентов α_1, ..., α_3, β_u будут приведены ниже.

Для формирования матрицы **A** *полного объекта управления* к системной матрице $\mathbf{A}_0$ добавим системную матрицу

$$\mathbf{A}_{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}$$

ЭМ, где коэффициенты a, b, c определяют передаточную функцию третьего порядка для желаемой динамики объекта управления. Выход модели $\theta_M = x_5$ сравнивается с измеряемым углом θ_2 для формирования сигнала рассогласования, затем ошибка взвешивается и формирует одну из координат регулируемого выхода. Полная модель объекта управления в этом случае имеет следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0}_{4\times3} \\ \mathbf{0}_{3\times4} & \mathbf{A}_M \end{pmatrix};$$
$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{6\times1} \\ a \end{pmatrix}; \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{2,0} \\ \mathbf{0}_{3\times1} \end{pmatrix}; \qquad (40)$$
$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_{1,0} & 0 & 0 & 0 \\ & \alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{2,0} & \mathbf{0}_{1\times3} \end{pmatrix}.$$

Остальные матрицы определены соотношением (39). Порядок полной модели объекта управления с учетом эталонной модели $n_p = 7$.

Замечания:

1) состояние ЭМ не управляется регулятором, поэтому размерность реально управляемого объекта $n_{p,\,o} = 4$. Относительно этого порядка объекта мы и будем синтезировать регулятор;

2) на первых этапах выбора матриц регулируемого выхода использовался алгоритм слежения за эталонным входом (без ЭМ, в этом случае $n_p = n_{p,\,o} = 4$). Но получить удовлетворительный результат во всем диапазоне политопической неопределенности не удалось. Переход к введению ЭМ и использованию алгоритма слежения за ее выходом позволил решить поставленную задачу.

Синтез робастного регулятора. По представленному выше алгоритму синтезированы три регулятора: четвертого, третьего и второго порядков. Весовые коэффициенты для матриц регулируемого выхода и параметр γ (выражения (39)) для каждого регулятора представлены в табл. 2.

Передаточные функции ЭМ выбраны таким образом, чтобы максимально обеспечить выполнение требуемых показателей качества для всех регуляторов, а именно:

- регулятор четвертого порядка

$$W_{M4}(s) = \frac{0,113}{s^3 + 0,9s^2 + 0,54s + 0,113};$$

- регулятор третьего порядка

$$W_{M3}(s) = \frac{0,022}{s^3 + 0,84s^2 + 0,24s + 0,022};$$

- регулятор второго порядка

$$W_{M2}(s) = \frac{0,078}{s^3 + 0,89s^2 + 0,43s + 0,078}.$$

На первом этапе поиска матриц **R**, **S** для синтеза робастного регулятора в линейных матричных неравенствах использовали либо все вершины политопической неопределенности, либо номинальную усредненную матрицу и пару вершинных матриц (определены моделированием).

Сингулярные числа симметричной матрицы $\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}$, полученные после первого этапа синтеза, отражены в табл. 3 (выделены сингулярные числа, определяющие порядок регулятора).

Практически нулевые сингулярные числа $\sigma_7 \sim 10^{-8} \approx 0$ для всех регуляторов определяют $\mathrm{rank}(\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}) = 6$. Однако малые сингулярные числа σ_5, $\sigma_6 \sim 0,01...0,03$, учитывающие влияние ЭМ и нами отбрасываемые, позволяют начинать с регулятора четвертого порядка.

Из табл. 3 видно, что для регуляторов 4-го и 3-го порядков максимальное отбрасываемое сингулярное число при редукции порядка регулятора *на порядок меньше*, чем оставленное минимальное сингулярное число. Для регулятора второго порядка эта величина равна одной четверти, что, как мы увидим ниже, напрямую отражается на показателях качества в худшую сторону.

Полученные после второго этапа передаточные функции регуляторов — все неминимально фазовые и имеют нуль с малой частотой сопряжения (реальное дифференцирующее звено):

- регулятор четвертого порядка

$$W_{p4}(s) = \\ = \frac{-0,975(s - 0,764)(s + 0,0003)(s^2 + 1,84s + 1,61)}{(s + 10,84)(s + 0,87)(s^2 + 0,85s + 0,60)};$$

Таблица 2

Весовые коэффициенты регулируемого выхода и параметр γ (выделены столбцы, одинаковые для всех регуляторов)

Порядок регулятора	α_1	α_2	α_3	β_u	γ
4	0,014	0,0084	0,0018	0,0021	0,0174
3	0,014	0,0084	0,0018	0,0021	0,0174
2	0,014	0,0084	0,00074	0,0032	0,0174

Таблица 3

Сингулярные числа матрицы $\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}$

Порядок регулятора	Сингулярные числа матрицы $\mathbf{R} - \mathbf{S}^{-1}$
4	**1600000; 9,31; 1,44; 0,50;** 0,036; 0,011; $8,8 \cdot 10^{-10}$
3	**250000; 37,4; 7,05;** 0,81; 0,05; 0,013; $1,6 \cdot 10^{-8}$
2	**20870; 2,66;** 0,72; 0,26; 0,032; 0,0083; $6,4 \cdot 10^{-9}$

- регулятор третьего порядка

$$W_{p3}(s) = \frac{-0,74(s-0,92)(s+0,0003)(s+1,59)}{(s+57,1)(s^2+0,82s+0,19)};$$

- регулятор второго порядка

$$W_{p2}(s) = \frac{-2,84(s-0,89)(s+0,001)}{(s+27,6)(s+0,51)}.$$

Моделирование. Моделирование проводили *во всем диапазоне политопической неопределенности параметров k* и *f* (рис. 3).

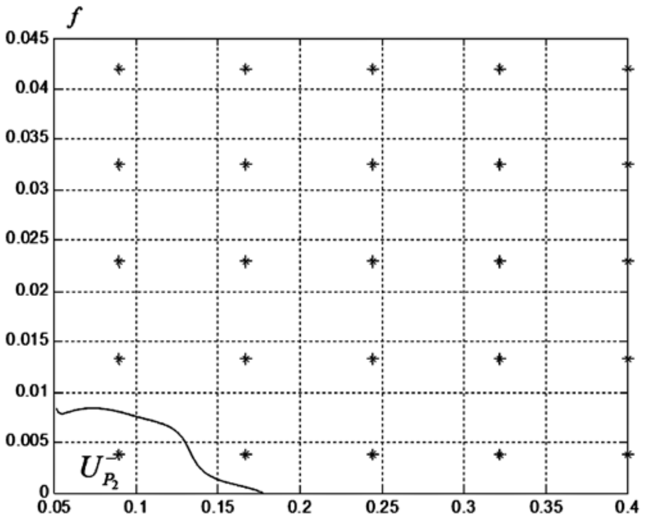


Рис. 3. Отмеченные точки политопической неопределенности параметров, с которыми проводилось моделирование. Выделена область $U_{P_2}^-$, где для регулятора второго порядка получены худшие результаты

Результаты моделирования — переходные процессы по углам $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ для различных регуляторов — представлены на рис. 4—6.

Обсуждение полученных результатов. По результатам моделирования можно сделать следующие выводы:

- наибольшим быстродействием обладает система с регулятором четвертого порядка. При этом по углу $\theta_1(t)$ показатели качества удовлетворяются в полном объеме. По углу $\theta_2(t)$ для некоторых параметров k, f имеется небольшое (5...7 %) превышение допустимого перерегулирования. При этом норма $\|\mathbf{W}_{w\to z}\|_\infty = 0,0182 > \gamma = 0,0174$, что объясняется колебательным, а не апериодическим переходным процессом в объекте управления, как в ЭМ;
- регулятор третьего порядка обеспечивает практически апериодический переходной процесс по обеим угловым координатам, но есть небольшое увеличение (порядка 1...2 с) допустимого времени переходного процесса. Здесь норма $\|\mathbf{W}_{w\to z}\|_\infty = 0,0162 < \gamma = 0,0174$;
- регулятор второго порядка обеспечивает требуемые показатели качества по углу $\theta_1(t)$, но переходные процессы по углу $\theta_2(t)$ имеют больший разброс, а для отдельных траекторий (область $U_{P_2}^-$, см. рис. 3) имеют место колебательность и превышение требуемого времени переходного процесса (около 4 с). При этом норма $\|\mathbf{W}_{w\to z}\|_\infty = 0,0164 < \gamma = 0,0174$.

Заметим, что в монографии [18] требуемый переходной процесс был получен только для двух из четырех рассмотренных регуляторов (для регулятора с полным измерением вектора состояния и регулятора с наблюдателем), причем для случаев: а) номинального (усредненного по параметрам)

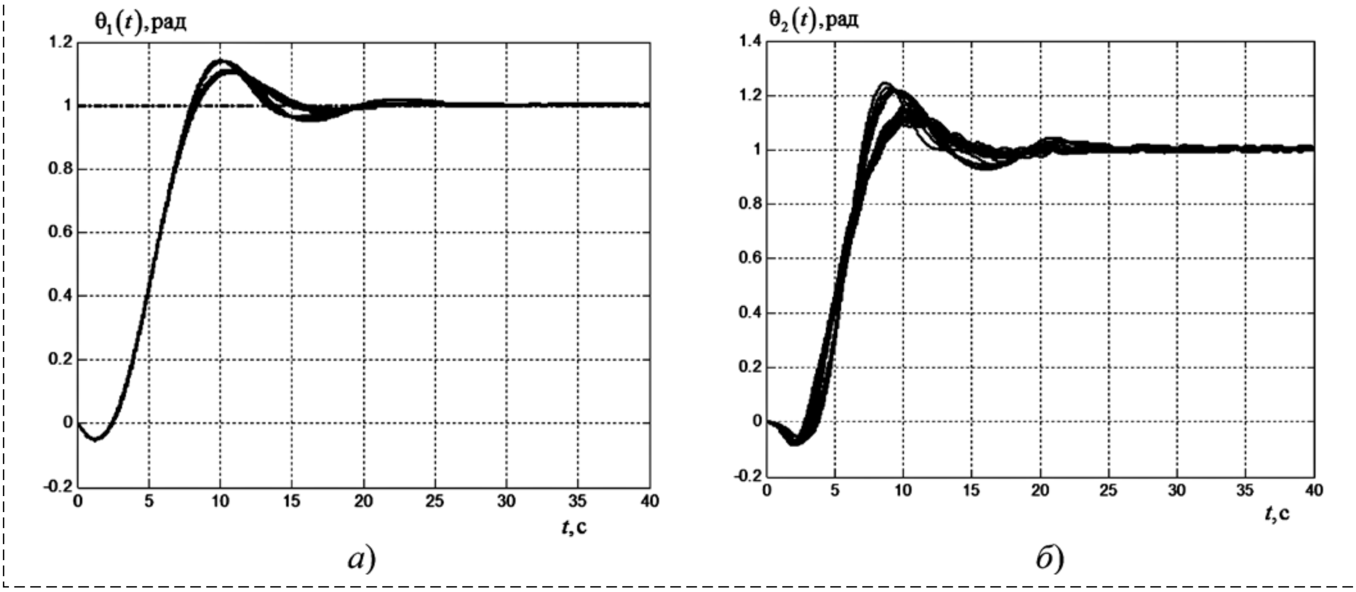


Рис. 4. Переходные характеристики с регулятором четвертого порядка:
а — график углового движения спутника; *б* — график углового движения инструментального блока

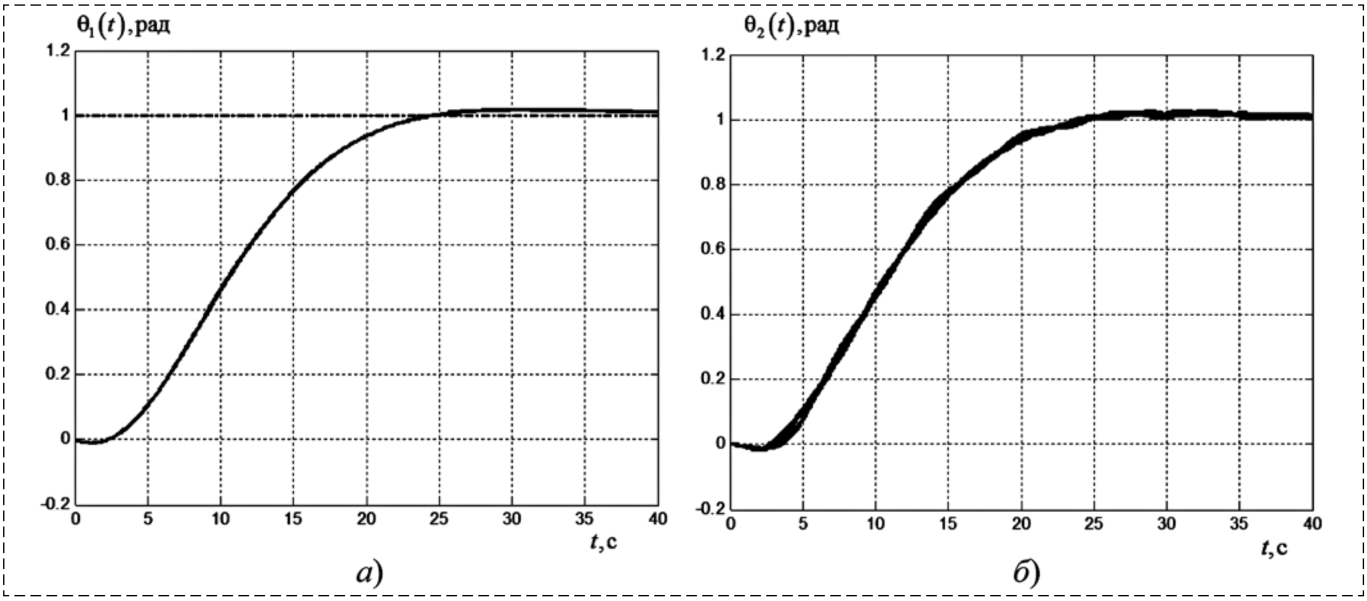


Рис. 5. Переходные характеристики с регулятором третьего порядка:
а — график углового движения спутника; *б* — график углового движения инструментального блока

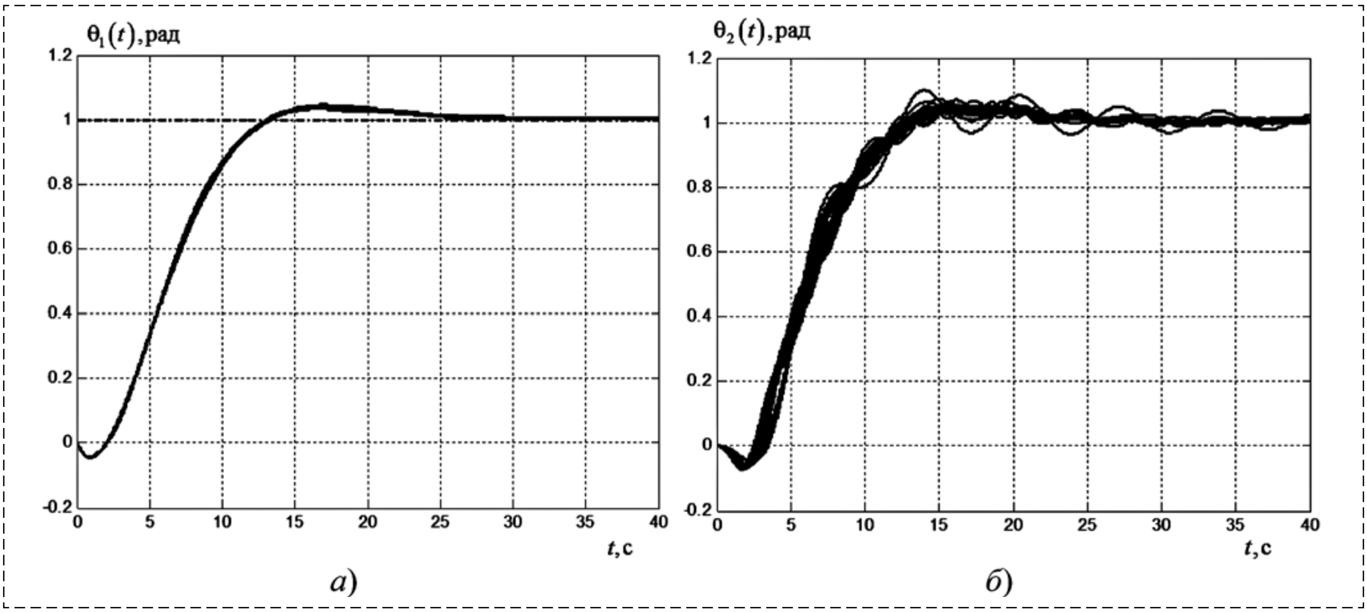


Рис. 6. Переходные характеристики с регулятором второго порядка:
а — график углового движения спутника; *б* — график углового движения инструментального блока

объекта управления и б) абсолютно жесткого соединения спутника и инструментального блока.

Заключение

В работе рассмотрен алгоритм прямого синтеза робастного редуцированного регулятора с использованием линейных матричных неравенств и проекционных лемм. Решение задачи осуществляется в два этапа. На первом этапе проекционная лемма позволяет определить необходимые положительно определенные матрицы, характеризующие робастность проектируемой системы. Этап не включает нахождение матриц динамического регулятора, но гарантирует, что решение задачи синтеза регулятора с заданным уровнем показателя качества $\gamma > 0$ существует. На втором этапе использование процедуры проектирования в пространстве неотрицательно определенных матриц (процедуры редукции порядка регулятора) дает возможность найти параметры регулятора соответствующей размерности. Рассмотренный практический пример показал эффективность и простоту предлагаемого метода.

Список литературы

1. **Chilali M., Gahinet P.** Hinf Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. Vol. 41. P. 358—367.
2. **Gahinet P., Apkarian P.** A Linear Matrix Inequality Approach to Hinf Control // Intern. J. Robust & Nonlinear Control. 1994. Vol. 4, N. 4. P. 421—448.
3. **Iwasaki T., Skelton R. E.** All Controllers for General Hinf Control Problem: DLMI Existence and State Space Formulas // Automatica. 1994. V. 30, N. 8. P. 1307—1317.
4. **Баландин Д. В., Коган М. М.** Применение линейных матричных неравенств в синтезе законов управления. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2010. 93 с.
5. **Баландин Д. В., Коган М. М.** Линейные матричные неравенства в задаче робастного H_∞-управления по выходу // ДАН. 2004. Т. 396. № 6. С. 759—761.
6. **Gu D. W., Petkov P. Hr., Konstantinov M. M.** Robust Control Design with Matlab. London: Springer, 2005. 389 p.
7. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
8. **Grigoriadis K. M., Skelton R. E.** Low-order Control Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods // Automatica. 1996. V. 32, N. 8. P. 1117—1125.
9. **Sun X., Mao J.** Low-order Controller Design Based on LMI Using Projection Method // Proceedings 14th World IFAC Congress. 1999. Paper N. G-2e-12-5.
10. **Gu D. W., Choi B. W., Postlethwaite I.** Low-Order Stabilizing Controllers // IEEE Trans. AC. 1994. V. 38, N. 11. P. 1713—1717.
11. **Brasch F. M., Pearson J. B.** Pole Placement Using Dynamic Compensator // IEEE Trans. AC. 1970. V. 15, N. 1. P. 34—43.
12. **Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V.** Linear Matrix in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.
13. **Hermann G., Turner M. C., Postlethwaite I.** Linear Matrix Inequalities in Control. In: Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control / Eds M. C. Turner et al. Berlin: Springer, 2007. P. 123—142.
14. **Finsler P.** Uber das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen // Comentari mathematici Helvetici. 1937. V. 9. P. 192—199.
15. **Laub A. J.** Matrix Analysis for Scientists and Engineers. Philadelphia: SIAM, 2005. 157 p.
16. **Zhang F.** Matrix Theory. Basic Results and Techniques. NY: Springer, 2011. 399 p.
17. **Higham N. J.** Computing the Nearest Symmetric Positive Semidefinite Matrix // Lin. Algebra Aspplics. 1988. V. 103. P. 103—118.
18. **Franclin G. F., Powell J. D., Emami-Naeini A.** Feedback Control of Dynamic Systems. Fourth Edition. New Jersey: Prentice-Hall, 2002. 887 p.

Synthesis Robust H_∞-Regulator of the Low Order by using of Linear Matrix Inequalities and Projective Lemmas

V. I. Krasnoshchechenko, kviip@yandex.ru,
Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248600, Russian Federation

Corresponding author: **Krasnoshchechenko Vladimir I.,** Ph. D., Senior Lecturer, Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University, Kaluga, 248600, Russian Federation, e-mail: kviip@yandex.ru

Accepted on November 24, 2017

In this article the direct method of synthesis of a robust regulator of the low order is considered. For synthesis robust Hinf-regulator of the low order for plant with polytopic uncertainty are using bounded real lemma for linear matrix inequalities and two procedures of projection: 1) the projective lemma for linear matrix inequalities and 2) projection of nonnegative matrixes to reduced space also nonnegative matrixes. At the first stage of design the weakened problem with a convex linear matrix inequality is solved. For performance of not convex rank condition a procedure of orthogonal projection of singular value decomposition of a matrix and by rejection zero singular values is used. The order reduction a regulator is carried out by rejection small singular values. The submitted algorithm of synthesis of the reduced regulator is considered on an example of synthesis of robust regulator for plant with polytopic uncertainty. The plant is a satellite connected by a flexible boom with the sensor package (two-mass system). It is necessary to control angular position of the sensor package on which there is a star sensor and the sensor of angular position of the package, and the actuator control by angular position of the satellite. In view of no rigid connections inconsistency of movements of the actuator and the sensor of angular position of the sensor package takes place, i.e. there is a noncollocated system. Synthesis of a robust regulator for the weak damping plant of the fourth order with polytopic uncertainty is in detail considered. It is shown, that the order of a regulator it is possible to lower with initial the fourth to the second at insignificant deterioration of performance. specifications.

Keywords: *robust, linear matrix inequalities, a projective lemma, polytopic uncertainty, two-mass system, a regulator of the low order*

For citation:

Krasnoshchechenko V. I. Synthesis Robust H_∞-Regulator of the Low Order by using of Linear Matrix Inequalities and Projective Lemmas, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 4, pp. 219—231.

DOI: 10.17587/mau.19.219-231

References

1. **Chilali M., Gahinet P.** Hinf Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1996, vol. 41, pp. 358—367.
2. **Gahinet P., Apkarian P.** A Linear Matrix Inequality Approach to Hinf Control, *Intern. J. Robust&Nonlinear Control*, 1994, vol. 4, no. 4, pp. 421—448.
3. **Iwasaki T., Skelton R. E.** All Controllers for General Hinf Control Problem: DLMI Existence and State Space Formulas, *Automatica*, 1994, vol. 30, no. 8, pp. 1307—1317.
4. **Balandin D. V., Kogan M. M.** *Primenenie lineynyih matrichnyih neravenstv v sinteze zakonov upravleniya* (Application of linear matrix inequality for control synthesis), Nizhniy Novgorod, Publishing house of Nizhegorodskii gosuniversitet, 2010, 93 p. (in Russian).
5. **Balandin D. V., Kogan M. M.** *Lineynyie matrichnyie neravenstva v zadache robastnogo upravleniya po vyihodu* (Linear matrix inequality for output robust control), *DAN*, 2004, vol. 396, no. 6, pp. 759—761 (in Russian).
6. **Gu D. W., Petkov P. Hr., Konstantinov M. M.** Robust Control Design with Matlab, London, Springer, 2005, 389 p.
7. **Polyak B. T., Scherbakov P. S.** *Robastnaya ustoychivost i upravlenie* (Robust stability and control), Moscow, Nauka, 2002, 303 p. (in Russian).
8. **Grigoriadis K. M., Skelton R. E.** Low-order Control Design for LMI Problems Using Alternating Projection Methods, *Automatica*, vol. 32, no. 8, 1996, pp. 1117—1125.
9. **Sun X., Mao J.** Low-order Controller Design Based on LMI Using Projection Method, *Proceedings 14th World IFAC Congress*, Paper No. G-2e-12-5, 1999.
10. **Gu D. W., Choi B. W., Postlethwaite I.** Low-Order Stabilizing Controllers, *IEEE Trans.* AC, 1994, vol. 38, no. 11, pp. 1713—1717.
11. **Brasch F. M., Pearson J. B.** Pole Placement Using Dynamic Compensator, *IEEE Trans.* AC, 1970, vol. 15, no. 1, pp. 34—43.
12. **Boyd S., Ghaoui E., Feron E., Balakrishnan V.** Linear Matrix in System and Control Theory, Philadelphia, SIAM, 1994, 193 p.
13. **Hermann G., Turner M. C., Postlethwaite I.** Linear Matrix Inequalities in Control. In: *Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control*, Eds M. C. Turner et al, Berlin, Springer, 2007, pp. 123—142.
14. **Finsler P.** Uber das Vorkommen definiter und semidefiniter Formen in Scharen quadratischer Formen, *Comentari Mathematici Helvetici*, 1937, vol. 9, pp. 192—199.
15. **Laub A. J.** Matrix Analysis for Scientists and Engineers, Philadelphia, SIAM, 2005, 157 p.
16. **Zhang F.** Matrix Theory. Basic Results and Techniques, NY, Springer, 2011, 399 p.
17. **Higham N. J.** Computing the Nearest Symmetric Positive Semidefinite Matrix, *Lin. Algebra Aspplics*, 1988, vol. 103, pp. 103—118.
18. **Franclin G. F., Powell J. D., Emami-Naeini A.** Feedback Control of Dynamic Systems, Fourth Edition, New Jersey, Prentice-Hall, 2002, 887 p.

УДК 681.5 DOI: 10.17587/mau.19.232-242

Н. Г. Чикуров, канд. техн. наук, доц.,
Уфимский государственный авиационный технический университет

Синтез микропрограммных дискретно-логических систем управления

Разработана методика построения нового вида дискретно-логических микропрограммных систем управления. Дан пример построения микропрограммной системы управления в инструментальной среде программирования ISaGRAF.

Ключевые слова: *управление, дискретно-логические системы, электроавтоматика, металлорежущие станки*

Микропрограммный автомат Уилкса — Стринджера

Микропрограммирование обычно связывают с именем М. Уилкса (*Maurice Vincent Wilkes*), предложившего совместно с Дж. Стринджером (*John Bentley Stringer*) в 1951 г. микропрограммное управление в качестве упорядоченного и гибкого средства для управления вычислительными машинами [2]. Программа, задаваемая вычислительной машине, представляет собой последовательность команд. Микропрограммное управление означает, что машина с помощью заранее составленной внутренней микропрограммы интерпретирует каждую команду и затем исполняет ее в виде последовательности микроопераций.

Техническая база вычислительной техники долго сдерживала практическое применение микропрограммных автоматов, но в начале 60-х годов интерес к микропрограммному управлению резко возрос, и большинство машин стали микропрограммными.

Исходная схема, предложенная М. Уилксом и Дж. Стринджером, состоит из управляющей матрицы $\tilde{N}$, матрицы *S*, задающей последовательность действий, пирамидального дешифратора, на который подаются импульсы синхронизации, и адресного регистра *R* (рис. 1, *а*).

Информация с выхода адресного регистра *R* поступает на вход пирамидального дешифратора, который декодирует двоичное слово длиной *n* бит и устанавливает в единичное состояние одну из его выходных шин.

Матрица *C* состоит из системы горизонтальных и вертикальных проводников. Показанные на матрице *C* точки представляют собой вентили, связывающие эти две системы проводников. Таким образом, электрический сигнал, распространяющийся вдоль любого горизонтального проводника, в месте, где указана точка, пройдет через эту связь и будет распространяться по вертикальным проводникам.

Каждая вертикальная линия матрицы *C* соединена с одним из исполнительных элемен-

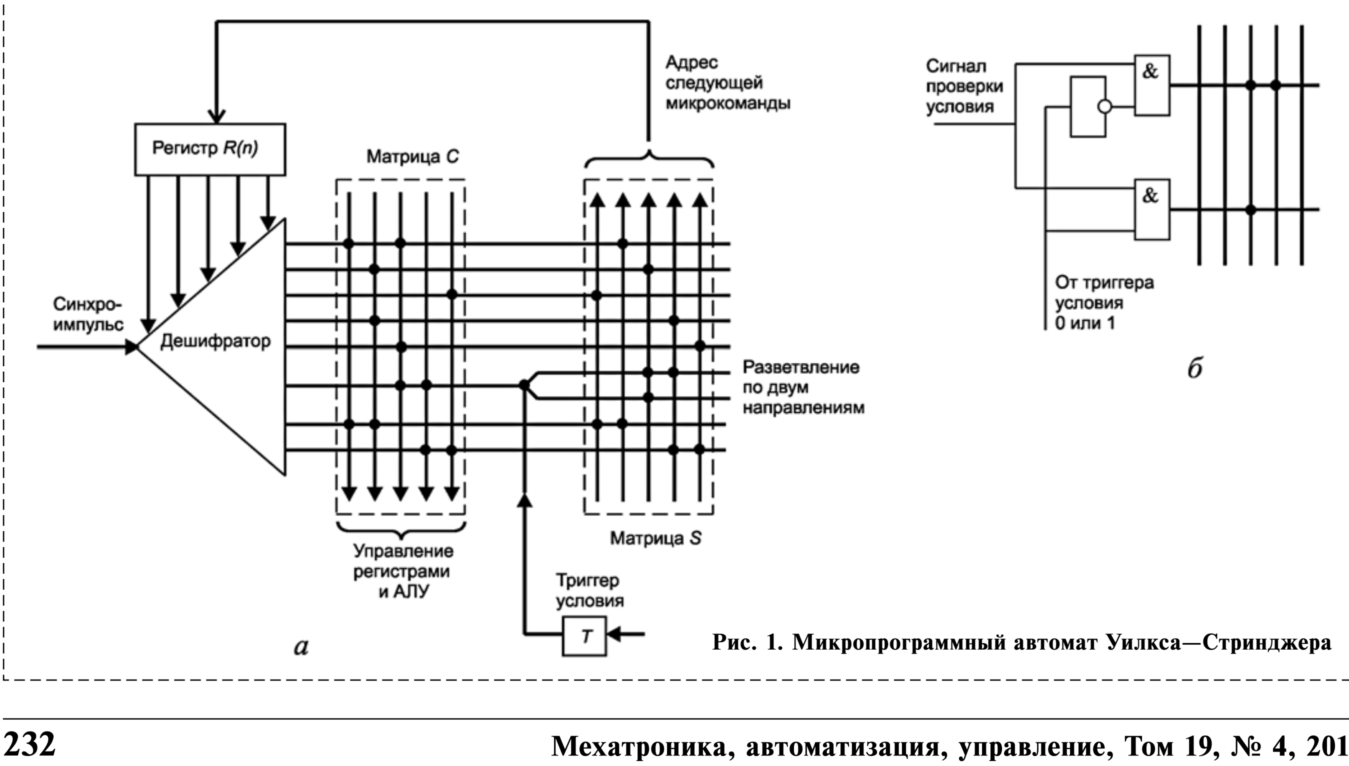


Рис. 1. Микропрограммный автомат Уилкса—Стринджера

тов управляемого устройства. Горизонтальную линию можно условно представить как микрокоманду. Когда эта линия возбуждена, она в свою очередь возбудит через вертикальные шины заранее заданный набор исполнительных элементов.

Импульс от дешифратора проходит также и сквозь матрицу *S*, которая задает последовательность действий. Выходные линии этой матрицы устанавливают соответствующий код в адресном регистре *R*. В соответствии с содержимым регистра *R* выбирается микрокоманда, которая выдает импульсы, управляющие исполнительными элементами в соответствии с программой, хранящейся в матрицах *C* и *S*.

В микропрограммном автомате Уилкса—Стринджера предусмотрена возможность ветвления микропрограмм, необходимая для условной передачи управления (рис. 1, *б*).

Синтез микропрограммных систем управления

Распространим принцип микропрограммного управления на дискретно-логические системы управления технологическими объектами. Назовем такого рода системы микропрограммными системами управления [4].

Микропрограммная система управления — это дискретный автомат, который в процессе функционирования генерирует последовательность микрокоманд, передаваемых в качестве управляющих воздействий на внешний объект управления.

Как и в микропрограммном автомате Уилкса—Стринджера, в микропрограммной системе управления микрокоманды запрограммированы и хранятся в виде двоичных кодов в матрицах *C* и *S* (рис. 2).

Особенности управления технологическими объектами не требуют сложной адресации микрокоманд. Они выбираются из матриц в порядке последовательной очереди. Поэтому в микропрограммной системе не требуется дешифратор адресов, а функции указателя микрокоманд выполняет *регистр микрокоманд*, состоящий из цепочки взаимодействующих триггеров *T*.

Микрокоманды из матрицы *C* передаются на вход объекта управления. Дискретные датчики *A*, *B*, *C*, *D*, *E* на выходе объекта управления формируют сигналы обратной связи, которые поступают на схемы **И** в матрице *S*.

Рассмотрим работу микропрограммной системы управления. Импульс пуска *P* включает первый (сверху) триггер регистра микрокоманд. Сигнал с его выхода возбуждает горизонтальную линию 1 матриц *C* и *S*. В матрице *C* с помощью вентилей или схем **ИЛИ**, присоединенных к этой линии, отбираются сигналы, которые в виде параллельного двоичного кода передаются на объект управления. После этого система переходит в режим ожидания конца исполнения переданной на объект управления микрокоманды.

Окончанием действия, заданного микрокомандой, служит сигнал с датчика *A*. Этот сигнал открывает схему **И**, включенную последовательно в первую линию матрицы *S*. В результате на выходе матрицы *S* формируется единичный сигнал, который по цепи обратной связи поступает в регистр микрокоманд и открывает в нем следующий по порядку (второй) триггер. Этот триггер, включившись, возбуждает горизонтальную линию 2 и одновременно сбрасывает вышестоящий первый триггер *T*. Таким образом, управление микрокомандами передается от первой горизонтальной линии ко второй, и далее процесс повторяется.

После отработки последней микрокоманды выключается конечный триггер регистра микро-

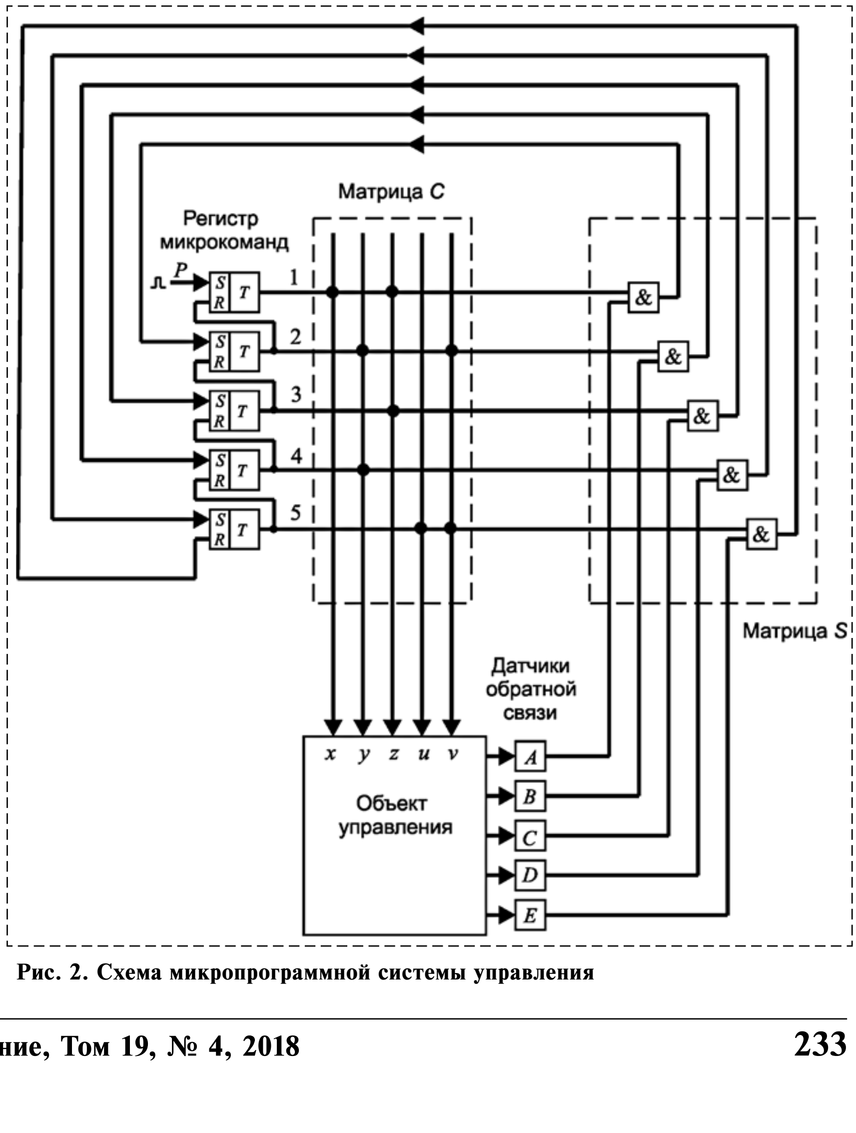


Рис. 2. Схема микропрограммной системы управления

команд, и система управления приходит в исходное состояние.

Главное отличие микропрограммной системы управления от известных многотактных систем [3, 4] состоит в том, что она не отслеживает состояния дискретного автомата. Последовательная выборка микрокоманд, запрограммированных в компьютере, позволяет управлять внешним объектом без применения дополнительных (внутренних) элементов памяти. Поэтому в процессе синтеза микропрограммных систем не требуется строить сложные циклограммы работы механизмов, исключать повторяющиеся состояния дискретного автомата и минимизировать логические функции. В результате проектирование дискретно-логических систем значительно упрощается.

Рассмотренная схема микропрограммной системы управления (рис. 2) — это лишь ее упрощенная модель, которую при реализации на компьютере необходимо преобразовать в рабочую функциональную схему. С этой целью используем язык функциональных блоковых диаграмм *FDB*, отвечающий требованиям международного стандарта *IEC*61131—3 и входящий в состав инструментальных систем программирования *ISaGRAF*, *CodeSys* и др.

С помощью этого графического языка представляем микропрограммную систему управления (рис. 2) в виде функциональной схемы (рис. 3).

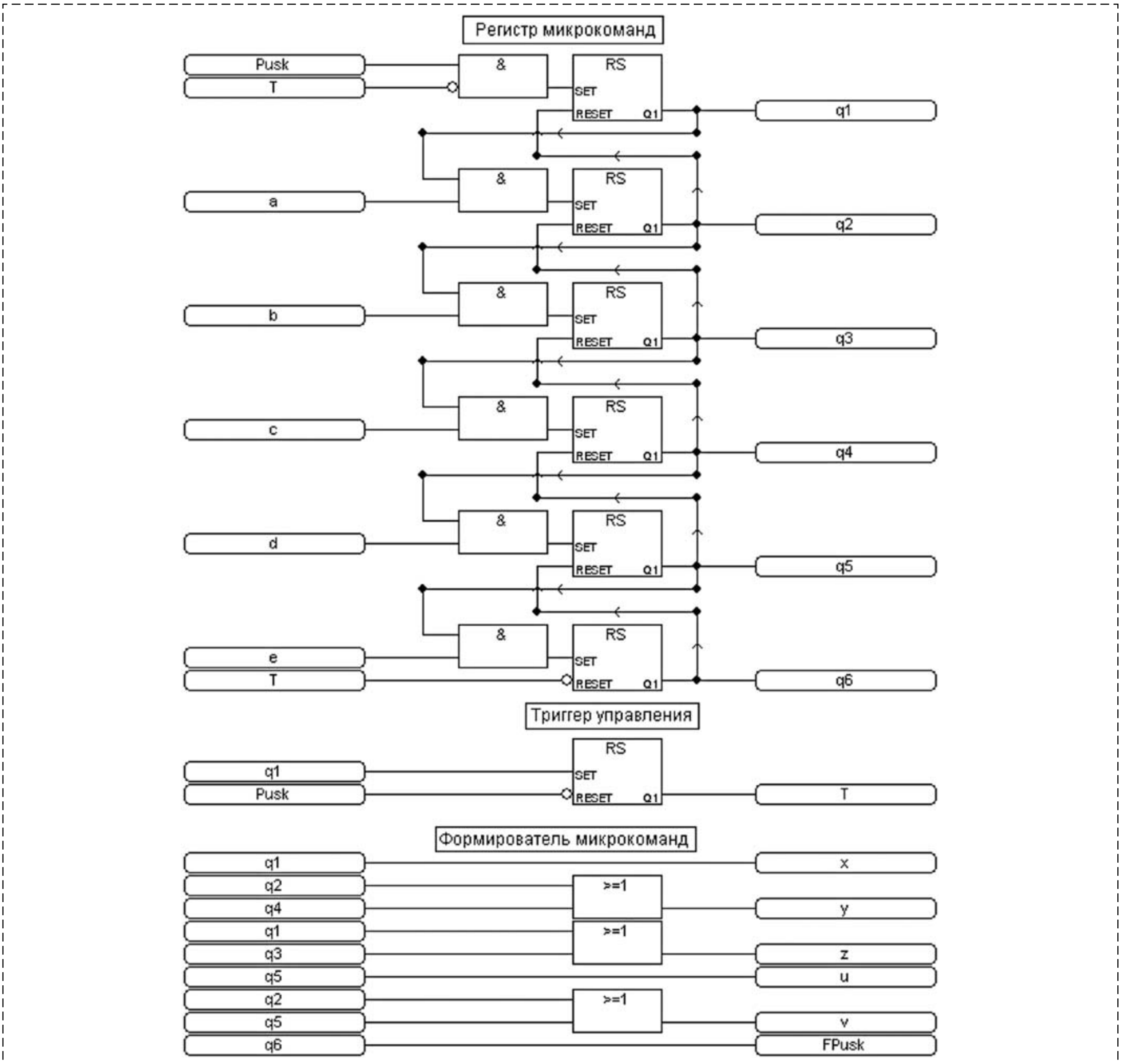


Рис. 3. Функциональная схема микропрограммной системы управления

Ее можно использовать как унифицированный шаблон для построения различных микропрограммных систем, работающих в разнообразных условиях. Логические связи в данной функциональной схеме аналогичны связям, которые рассматривались в прототипе микропрограммной системы управления (см. рис. 2).

Унифицированная программа (рис. 3) включает три компонента: регистр микрокоманд, триггер управления и формирователь микрокоманд.

Регистр микрокоманд для рассматриваемой системы состоит из шести статических *RS*-триггеров. Выходные сигналы этих триггеров *q*1, *q*2, *q*3, *q*4, *q*5, *q*6 объявлены в программе как локальные переменные. При переходе подсистемы из одной позиции в следующую позицию соответственно следующий триггер в регистре микрокоманд включается, а предыдущий выключается.

Триггер управления выполняет функции флага. Сигнал *T* на его выходе показывает, в каком состоянии находится система. Если $T = 0$, то это значит, что система находится в состоянии ожидания. Сигнал $T = 1$ свидетельствует о том, что система находится в работе.

Формирователь микрокоманд представляет собой простую комбинационную схему, состоящую в данном случае из логических элементов **ИЛИ,** которая выбирает микрокоманды с шины *q*1, *q*2, *q*3, *q*4, *q*5, *q*6 для передачи их на объект управления.

Рассмотрим функционирование программы. Сигнал *Pusk* = 1 поступает из подсистемы верхнего уровня и остается включенным во все время работы системы. Через элемент **И** он включает первый триггер регистра микрокоманд. Возбуждается линия *q*1, и включается триггер управления, который своим сигналом *T* блокирует дальнейшее воздействие сигнала *Pusk* на вход регистра микрокоманд. Включение триггера управления свидетельствует о том, что команда на включение системы принята, и система приступила к исполнению этой команды.

Одновременно в формирователе микрокоманд с линии *q*1 отбирается сигнал $x = 1$, который пересылается на объект управления для исполнения. По окончании действия, заданного микрокомандой, срабатывает датчик *A* объекта управления. Сигнал с этого датчика $a = 1$ включает второй триггер регистра микрокоманд. Возбуждается линия *q*2 на выходе этого регистра. Одновременно по цепи обратной связи выключается вышестоящий первый триггер. Подсистема переходит во вторую позицию. Далее работа программы циклически продолжается по рассмотренному алгоритму, пока не включится последний триггер регистра микрокоманд с выходным сигналом *q*6.

Заметим, что включение каждого нового сигнала *qi* предшествует отключению последующего сигнала $q(i - 1)$, что предотвращает прерывание выходных сигналов микропрограммной системы управления в моменты переключений триггеров в регистре микрокоманд.

Сигнал на последней линии *q*6 формирует сигнал *FPusk* = 1, который передается в систему верхнего уровня. Получив этот сигнал, система верхнего уровня гасит сигнал *Pusk* и передает управление некоторой другой подсистеме нижнего уровня.

Как только переменная *Pusk* примет значение *Pusk* = 0, триггер управления выключится. Инверсный сигнал с выхода этого триггера выключает последний триггер регистра микрокоманд, и на этом работа системы завершается.

Микропрограммная система управления механизмом автоматической смены инструмента

Изучим методику синтеза микропрограммных систем управления на примере механизма автоматической смены инструмента (МАСИ) станка с ЧПУ (рис. 4)

МАСИ имеет два автооператора (захватных устройства) ЗУ1 и ЗУ2. Первое захватное устройство ЗУ1, совершая вращательное и поступательное движения, переносит отработавший инструмент из шпинделя (Ш) в промежуточное загрузочное место (ПЗМ), а новый инструмент — из ПЗМ в Ш.

Вращательное движение ЗУ1 происходит с помощью электродвигателя Д, а поступательное — посредством гидравлического цилиндра Ц1. В шпинделе инструмент зажат пружиной. Для ее отжатия и освобождения инструмента служит цилиндр Ц2.

Второе захватное устройство ЗУ2 может совершать два поступательных движения — горизонтальное и вертикальное, причем в горизонтальном направлении положение механизма контролируется в трех точках (1, 2 и 3), а в вертикальном — в двух. Привод ЗУ2 гидравлический (цилиндры Ц3 и Ц4).

Подсистема 2, которая управляет захватным устройством ЗУ2, за время отработки всего цикла смены инструмента запускается дважды.

Последовательность работы МАСИ представим в виде условной записи:

1-я подсистема:
ЗУ1 (+90°); ← И1 → ; ЗУ1 (↓); ЗУ1 (+180°);
ЗУ1 (↑); → И2 ← ; ЗУ1 (−90°);

2-я подсистема:
ЗУ2 (1 → 3); ЗУ2 (↓); ЗУ2 (3 → 2);
ЗУ2 (↑); ЗУ2 (2 → 1);

3-я подсистема:
Работа магазина М (в данном примере подробно не рассматривается);

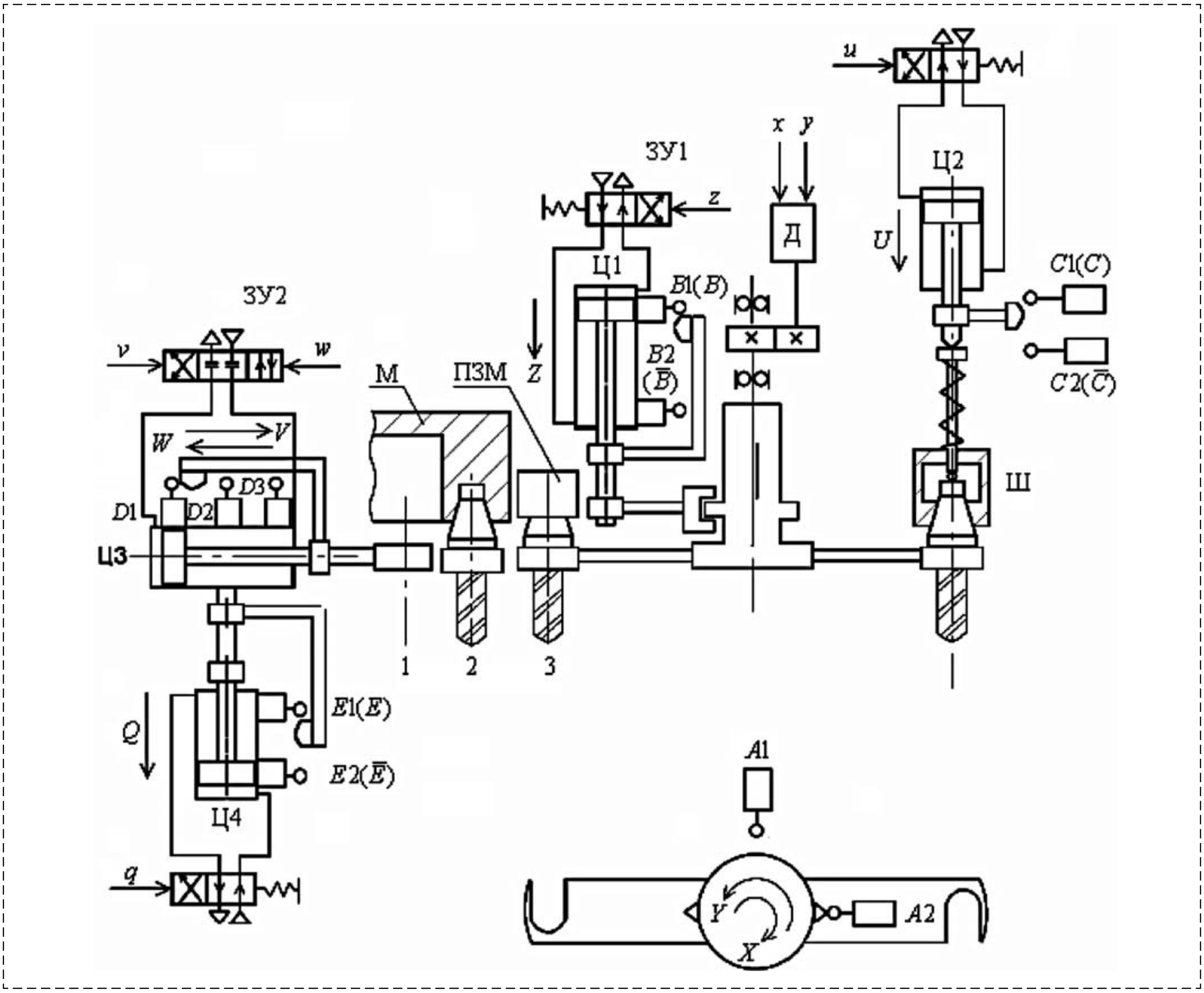


Рис. 4. Структурно-кинематическая схема устройства автоматической смены инструмента:
Д — двигатель; М — магазин; ПЗМ — промежуточное загрузочное место; Ш — шпиндель; (Ц1-Ц4) — гидравлические цилиндры

2-я подсистема:
ЗУ2 ($1 \to 2$); ЗУ2 ($\downarrow$); ЗУ2 ($2 \to 3$);
ЗУ2 ($\uparrow$); ЗУ2 ($3 \to 1$).

Здесь стрелками показаны направления движения рабочих органов станка.

Смена инструмента в металлорежущих станках с ЧПУ программируется в управляющей программе (УП) с помощью технологических функций под именем *T*. Для исполнения этих функций служит система управления электроавтоматикой станка.

Если в очередном кадре УП задана функция *T*, то в системе управления электроавтоматикой специальный модуль технологических функций *TFUNK* пересылает значения технологических функций из массива данных системы ЧПУ в массив технологических команд. Одновременно модуль *TFUNK* заполняет массив управления драйверами *MDR*, в котором запоминаются заявки на включение драйверов для обслуживания периферийных устройств (рис. 5).

Ряд технологических функций требует ответа, подтверждающего исполнение указанных функций на станке. Для этой цели служит команда

MDR

1	*DRT*1	- Драйвер *T*
2	*DRT*2	- Драйвер *S*
3	*DRT*3	- Драйвер *M*
4	*OPROS*	- Драйвер опроса станка
5	*OTVET*	- Ответ со станка

Рис. 5. Массив управления драйверами *MDR*

OPROS, которая включает драйвер опроса станка. При получении утвердительного ответа (сигнал *OTVET*) со станка система ЧПУ гасит сигнал *OPROS*, а система управления электроавтоматикой, соответственно, выключает сигнал *OTVET*.

1. Синтез подпрограммы электроавтоматики S1

Рассмотрим диаграмму микрокоманд подпрограммы электроавтоматики *S*1 (рис. 6). Она содержит ряд условных переходов.

Диаграмма микрокоманд — это графическое изображение *позиций* и *микрокоманд*, соединенных *направленными линиями*. Позиции и микрокоманды чередуются. *Позиции* изображаются маленькими горизонтальными полосками, которые пересекают линии соединения. К каждой позиции присоединяются логические условия перехода к этой позиции. Возле каждой позиции указывается ее порядковый номер.

Микрокоманды изображаются в виде прямоугольников, внутри которых с помощью математических символов записываются действия системы управления во время исполнения данной микрокоманды. В специально отведенном поле можно задать *необязательный комментарий* — словесное описание действия системы управления, предписанное микрокомандой.

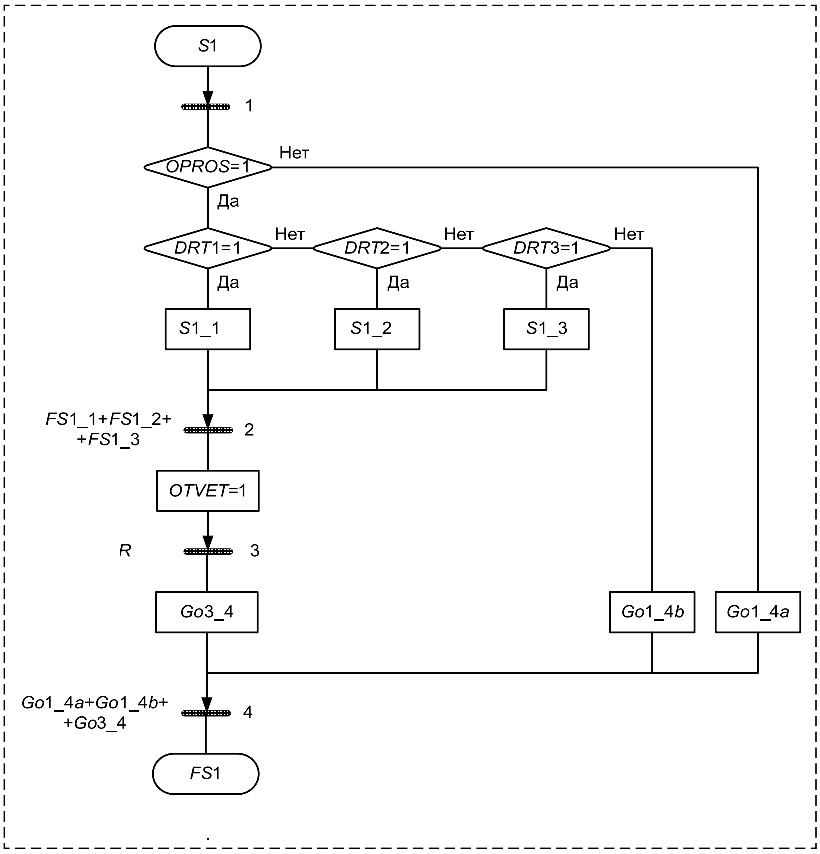


Рис. 6. Диаграмма микрокоманд управления электроавтоматикой

Диаграмма микрокоманд похожа на диаграммы *SFC*, которые в системах *ISaGRAF* или *CodeSys* программируются на языке высокого уровня (языке последовательных функциональных схем) *SFC*. Такая схожесть объясняется тем, что язык *SFC* наследует принцип управления внешними объектами от микропрограммных автоматов, первым из которых был микропрограммный автомат Уилкса — Стринджера.

Этот же принцип управления использован в сетях Петри, которые, в свою очередь, послужили основой для построения языка *SFC* [1].

Во всех указанных устройствах осуществляется заранее запрограммированная последовательная выборка команд, хранящихся в памяти компьютера. Естественно, структура и работа этих устройств разная, но главный принцип управления с помощью последовательного или адресного обращения к командам или микрокомандам их объединяет.

Рассматриваемая диаграмма микрокоманд принципиально отличается от диаграмм *SFC* тем, что может содержать сложные ветвления, условные и безусловные переходы, обращения к подпрограммам и др., а также содержит микрокоманды, которые непосредственно управляют объектом управления. Язык высокого уровня *SFC* такими возможностями не обладает. Программы на этом языке управляют объектом лишь с помощью вызова вспомогательных подпрограмм-посредников, созданных на основе одного из языков нижнего уровня. Чтобы выполнить тот или иной переход по условию, программа *SFC* также вынуждена обращаться к помощи подпрограмм нижнего уровня.

Расшифруем содержимое представленной диаграммы микрокоманд для подпрограммы *S*1. Сигнал *S*1 — это сигнал, разрешающий запуск системы управления в автоматическом цикле работы. Если $S1 = 0$, то подсистема управления находится в исходном состоянии. При поступлении сигнала $S1 = 1$ и при начальном значении сигнала с триггера управления $T = 0$ подсистема переходит в первую позицию, где с помощью условных переходов выбирается нужная ветвь программы.

Если сигнал $OPROS = 0$, то система управления электроавтоматикой никаких действий, связанных с работой драйверов, не выполняет. С помощью команды безусловного перехода $Go1 - 4a = 1$ регистр микрокоманд переводится с позиции 1 в позицию 3, из которой при логическом условии $Go1\_4a + Go1\_4b + Go3\_4 = 1$

Рис. 7. Подпрограммы драйверов

система переходит в последнюю позицию 4, и работа программы заканчивается.

Если задано *OPROS* = 1, то подпрограмма электроавтоматики находит нужное имя драйвера и обращается к одной из подпрограмм *S*1_1, *S*1_2, *S*1_3, обслуживающих требуемое устройство станка (рис. 7).

Чтобы вызвать эти подпрограммы из подпрограммы электроавтоматики *S*1, достаточно установить в единичное состояние соответствующие входные переменные *S*1_1, *S*1_2 или *S*1_3. Во все время работы любой подпрограммы входная переменная обязательно должна находиться в единичном состоянии.

По окончании работы каждая из подпрограмм возвращает в систему электроавтоматики *S*1 единичные значения соответствующих выходных переменных *FS*1_1, *FS*1_2 или *FS*1_3.

По окончании работы выбранной подпрограммы регистр микрокоманд по логическому условию *FS*1_1 + *FS*1_2 + *FS*1_3 = 1 переходит в позицию 2, где инициируется переменная *OTVET* = 1, после чего ожидается гашение системой ЧПУ заявки *OPROS*. Когда эта переменная переходит в состояние *OPROS* = 0, регистр микрокоманд переводится из состояния 2 в состояние 3, где с помощью сигнала *Go*3_4 = 1 он переводится в позицию 4. Работа программы управления электроавтоматикой *S*1 завершается, и переменная *OTVET* становится равной 0.

Подпрограмма управления электроавтоматикой на языке *FBD* представляет собой функциональную схему (рис. 8).

Как и предыдущая функциональная схема (см. рис. 3), данная схема (рис. 8) включает в свой со-

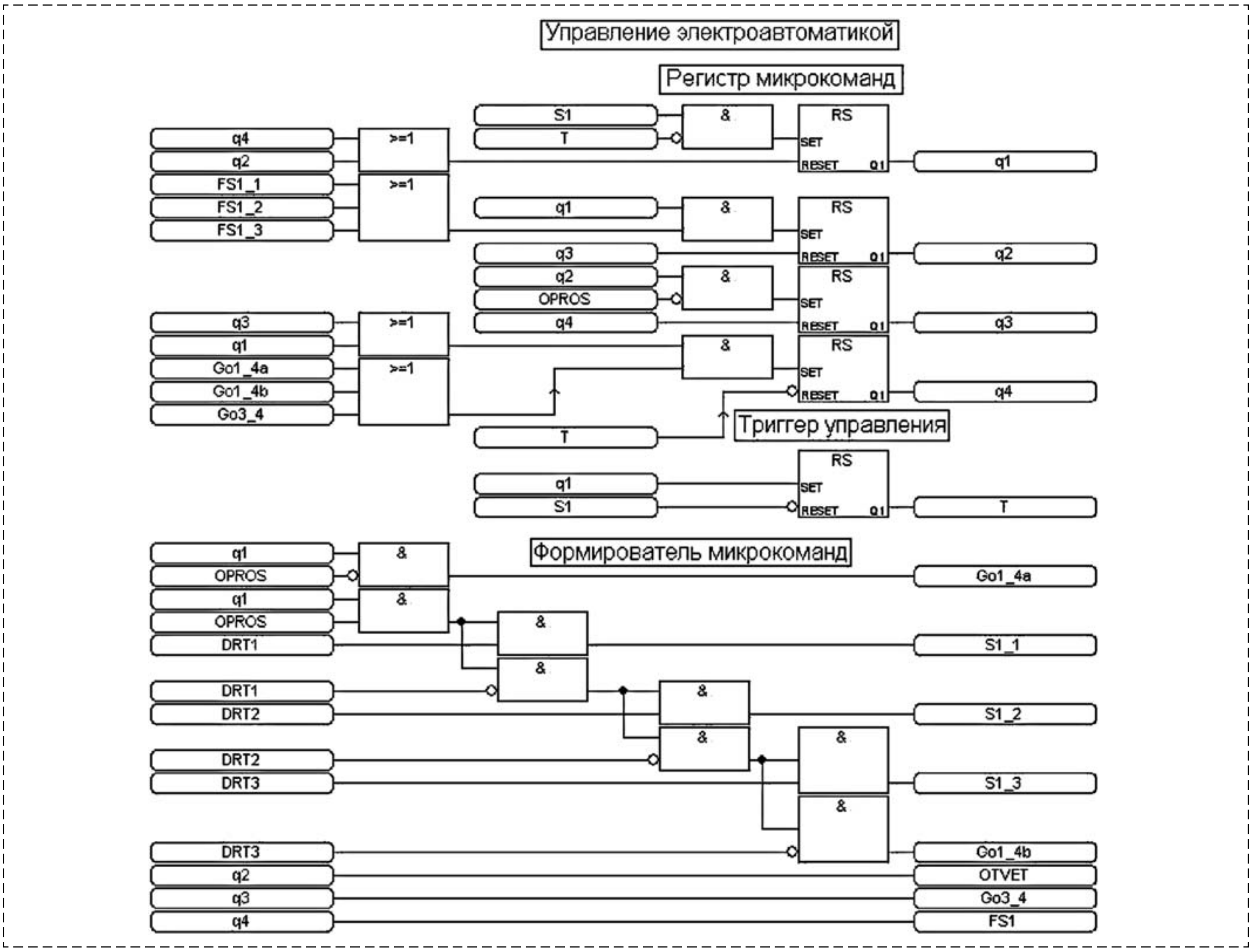


Рис. 8. Программа управления электроавтоматикой *S*1

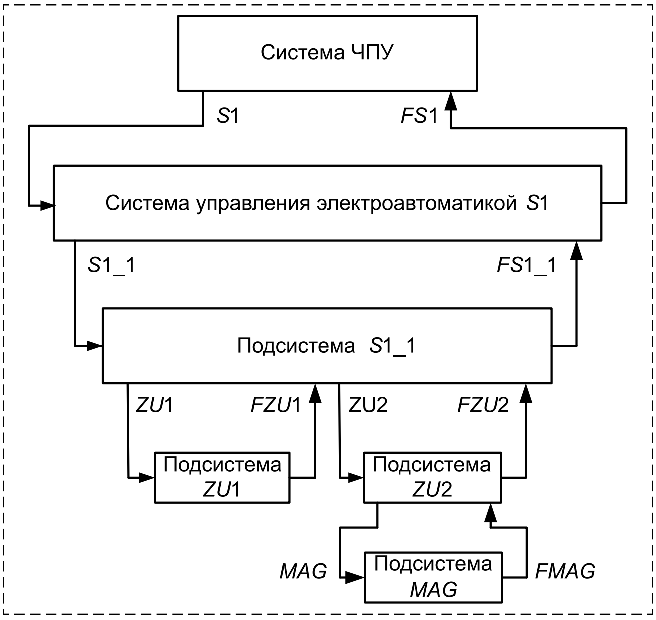


Рис. 9. Подсистема управления механизмом смены инструмента:

*ZU*1 — загрузочное устройство 1; *ZU*2 — загрузочное устройство 2; *MAG* — магазин

став три типовых блока: регистр микрокоманд, триггер управления и формирователь микрокоманд. Чтобы упростить прорисовку функциональной схемы, перекрестные связи в регистре микрокоманд показаны с помощью дополнительных ярлычков с именами переменных. Условные переходы программы реализованы в формирователе микрокоманд с помощью простой комбинационной схемы на элементах **И**.

Если переменные *OPROS* = 1 и *DRT* = 1, то по внешнему сигналу *S*1 = 1 включается первый триггер регистра микрокоманд. Сигнал *q*1 на его выходе принимает значение 1. Соответственно, в формирователе микрокоманд создается микрокоманда, которая запускает в работу дочернюю подпрограмму *S*1_1. По окончании ее работы на вход материнской подсистемы *S*1 поступает сигнал *FS*1_1 = 1, что приводит к переключению регистра микрокоманд с позиции 1 в позицию 2. В этой позиции по сигналу *q*2 = 1 формирователь микрокоманд присваивает переменной *OTVET* значение 1. Система ЧПУ, получив это сообщение, присваивает переменной *OPROS* значение 0. В результате регистр микрокоманд переходит в позицию 3, из которой с помощью микрокоманды безусловного перехода *Go*3_4 далее переходит в последнюю позицию 4, где формируется сигнал окончания работы подсистемы *FS*1 = 1.

Из диаграммы микрокоманд (см. рис. 6) видно, что подпрограмма драйвера *S*1_1 запускается из основной программы электроавтоматики *S*1 (рис. 9).

Подсистема управления механизмом смены инструмента *S*1_1, в свою очередь, включает две подсистемы: подсистему управления первым загрузочным устройством *ZU*1 и подсистему управления вторым загрузочным устройством *ZU*2.

Ставится задача синтезировать подпрограмму драйвера *S*1_1 для управления механизмом смены инструмента.

2. Синтез подсистемы S1_1

Подсистема *S*1_1 простая. Она последовательно вызывает две подпрограммы нижнего уровня: подпрограмму управления первым загрузочным устройством *ZU*1 и подпрограмму управления

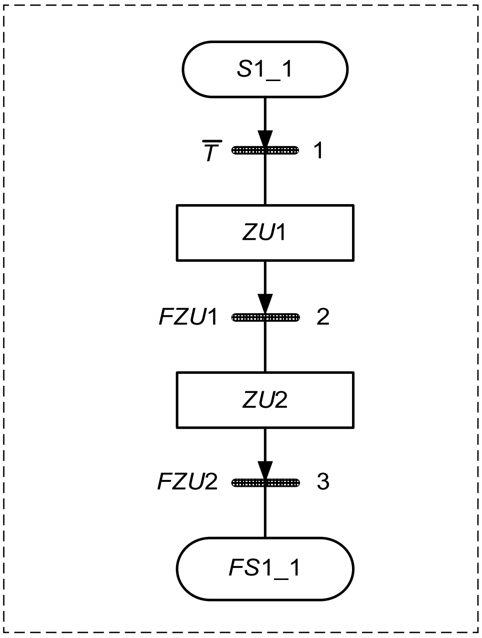


Рис. 10. Диаграмма микрокоманд подсистемы *S*1_1

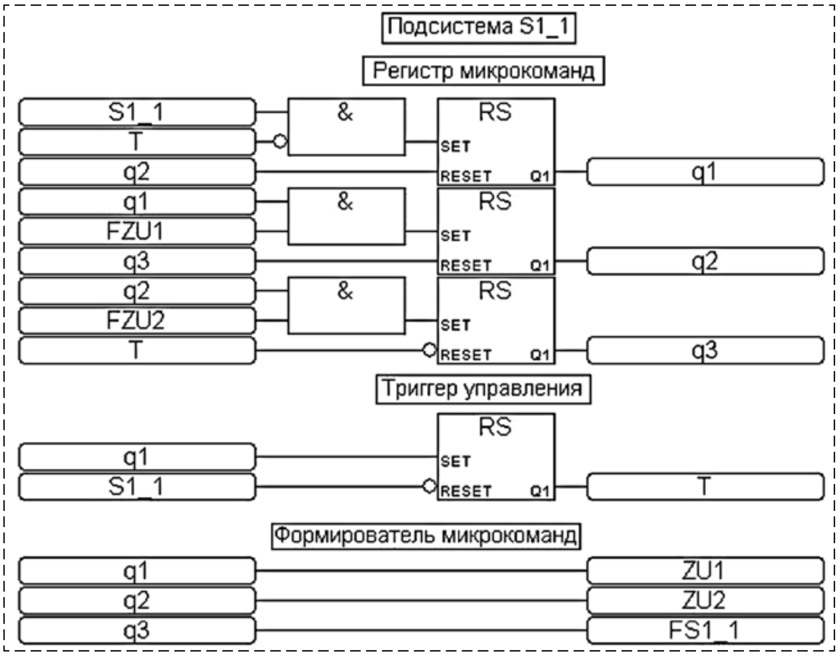


Рис. 11. Программа подсистемы *S*1_1

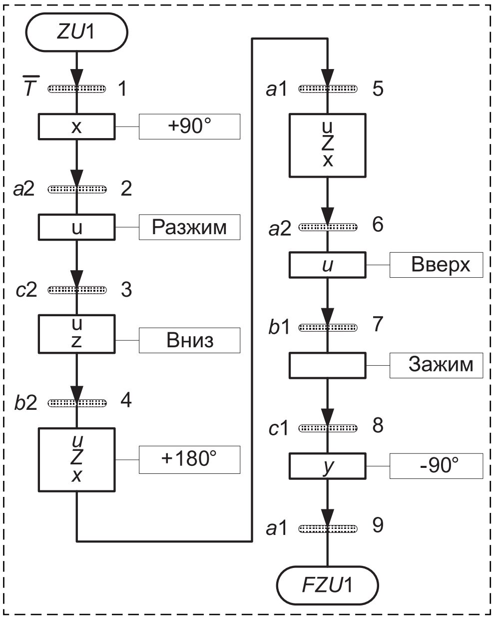


Рис. 12. Диаграмма микрокоманд подсистемы *ZU*1

вторым загрузочным устройством *ZU*2. Диаграмма микрокоманд подсистемы *S*1_1 состоит всего из трех позиций (рис. 10).

Программа подсистемы *S*1_1 также простая (рис. 11).

3. Синтез подсистем ZU1 и ZU2

Рассмотрим процесс проектирования подсистемы *ZU*1. Строим диаграмму микрокоманд подсистемы *ZU*1 (рис. 12).

Программа подсистемы *ZU*1 представлена на рис. 13. Методика построения микропрограммной подсистемы *ZU*2 аналогична.

Программы созданного проекта в *ISaGRAF* удобно представить в виде функциональных блоков [1], связанных в древовидную структуру (рис. 14).

Заключение

Главная отличительная особенность рассматриваемой методики программирования дискретно-логических систем состоит в том, что в программу *FBD* вносится один из основных элементов языка *SFC*, заимствованных из микропрограммных автоматов. Это процедура последовательной выборки микрокоманд из памяти компьютера, позволяющая расширить область решаемых дис-

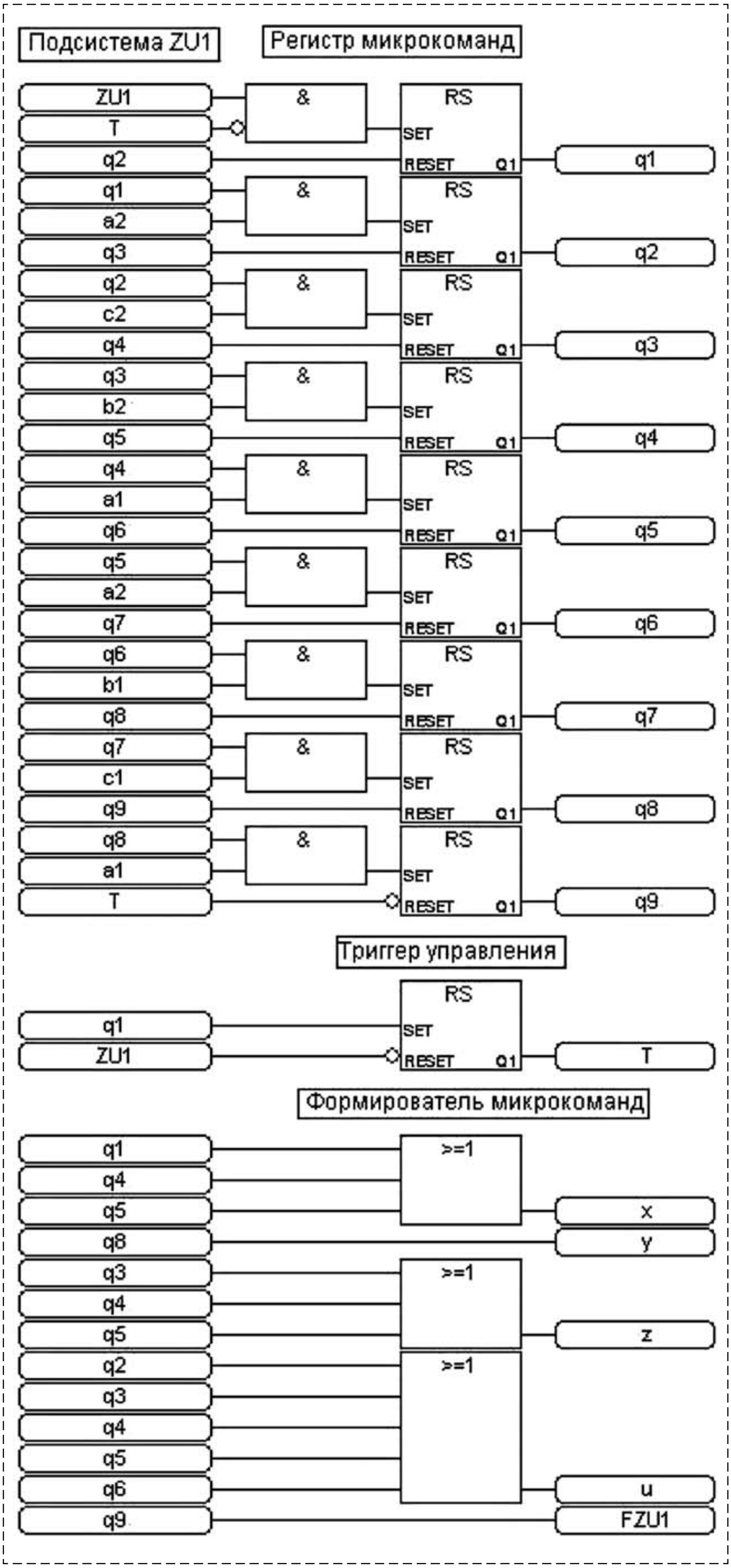


Рис. 13. Программа подсистемы *ZU*1

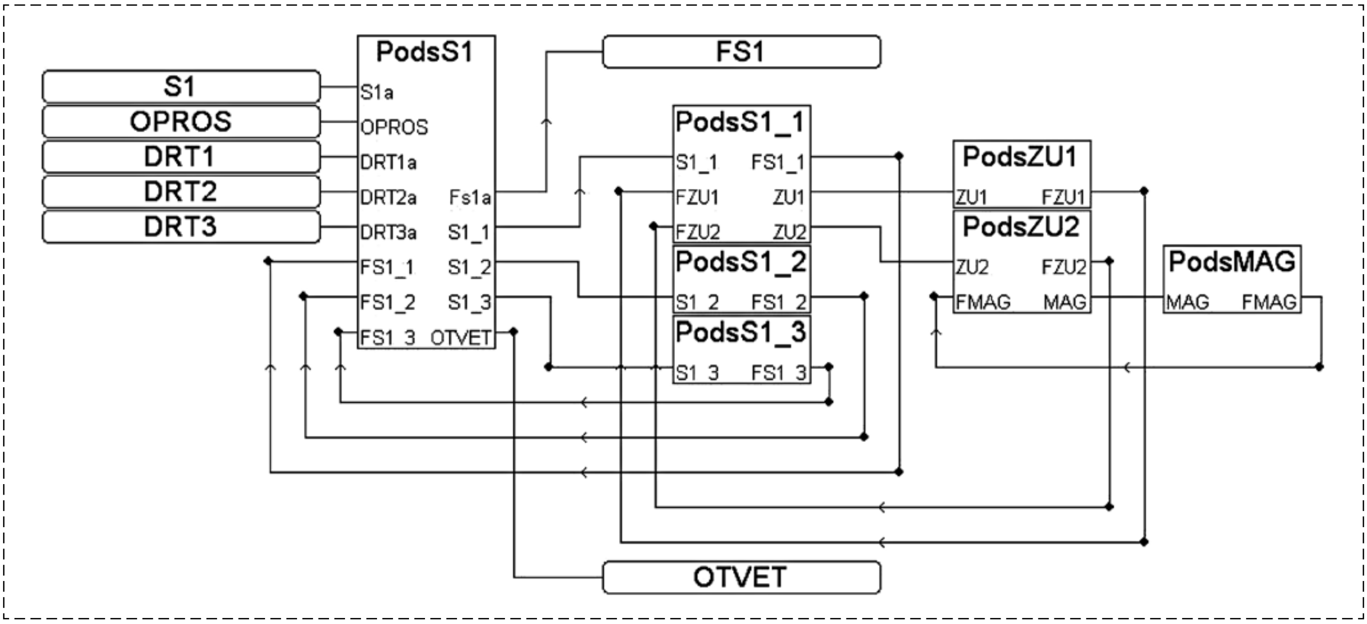


Рис. 14. Микропрограммная система управления электроавтоматикой с использованием функциональных блоков

кретно-логических задач на языке *FBD* и упрощающая их решение. Команды ветвления и обращения к подпрограммам существенно расширяют функциональность микропрограммных систем управления, создаваемых на языке *FBD*.

Практическая реализация микропрограммных систем управления сложными объектами, как и любых других систем управления, требует решения задач частного характера, возникающих в процессе проектирования. Графический язык функциональных диаграмм *FBD* хорошо подходит для решения такого рода вопросов, поскольку создаваемые в проекте *ISaGRAF* функциональные схемы наглядны, они отождествляются с реальными электронными схемами и поэтому сравнительно легко отлаживаются и тестируются с помощью средств инструментальной системы программирования. В конечном итоге в *ISaGRAF* функциональные схемы автоматически транслируются в прикладные программы, которые загружаются в ПЛК либо в промышленные компьютеры.

Созданные средствами *ISaGRAF* функциональные схемы можно также использовать для построения дискретно-логических систем управления на основе интегральных логических микросхем, включая ПЛИС. Кроме того, функциональные схемы могут служить в качестве промежуточных моделей для программирования дискретно-логических систем на языке С++.

Список литературы

1. **Петров И. В.** Программируемые контроллеры. Стандартные языки и приемы прикладного проектирования / Под ред. проф. В. П. Дьяконова. М.: СОЛОН-Пресс, 2004. 256 с.

2. **Хассон С.** Микропрограммное управление. Вып. 1. М.: Изд-во Мир, 1973. 240 с.

3. **Чикуров Н. Г.** Логический синтез дискретных систем управления: учеб. пособ. Уфа: Изд. УГАТУ, 2003. 132 с.

4. **Чикуров Н. Г.** Синтез дискретно-логических систем управления: учеб. пособ. М.: ИНФРА-М, 2018. 229 с.

Synthesis of Microprogram Discrete Logic Control Systems

N. G. Chikurov, tchikurov@yandex.ru,
Ufa State Aviation Technical University, Ufa, 450000, Russian Federation,

Corresponding author: **Chikurov Nikolay G.,** Ph. D., Associate Professor, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, 450000, Russian Federation, E-mail: tchikurov@yandex.ru

Accepted on December 26, 2017

The article discusses the engineering synthesis of discrete-logic control systems for industrial machinery based on the algebra of logic. Given the method of designing new kinds of systems — Firmware discrete logic control systems. Projects of microprogram control systems are created in the instrumental ISaGRAF programming environment using the language of functional blocks FBD. An example of programming of the control system of tool electroautomatics in FBD is given.

The main distinguishing feature of the technique of programming discrete-logical systems is that one of the main elements of the high-level language SFS in included in the FBD program. This language, in turn, is taken from microprogramming machines and provides the procedure of consecutive sample of micro-ops from the memory of the computer that allows you to extend the scope of solvable discrete-logic problems in FBD and simplifies their solution. Branching commands and calls to subroutines greatly extend the functionality of microprogram control systems created in FBD. Practical implementation of microprogram control systems for complex objects, like any other management systems, requires solving problems of a private nature arising in the design process. Graphic language of functional diagrams FBD is well suited to solve this kind of issues because functional diagrams created in the ISaGRAF project are illustrative, they are identified with real electronic circuits and therefore they are relatively easily debugged and tested by means of the tool system programming. Ultimately, in ISaGRAF function diagrams are automatically translated into application programs that are loaded in the PLC or industrial computers. Function diagrams created by means of ISaGRAF, can also be used to build discrete-logic control systems based on integrated logic circuits. In addition, functional diagrams can serve as intermediate models for discrete programming-logical systems in the algorithmic language C++.

Keywords: *control, discrete-logic systems, electric circuits, machine tools*

For citation:

Chikurov N. G. Synthesis of Microprogram Discrete Logic Control Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 4, no 19, pp. 232—242.

DOI: 10.17587/mau.19.232-242

References

1. **Petrov I. V.** *Programmable controllers. Standard languages and receptions of applied design*, Moscow, SOLON-Press, 2004, 256 p. (in Russian).

2. **Husson S.** *Microprogramming control.* Iss. 1, Moscow, Mir, 1973, 240 p. (in Russian).

3. **Chikurov N. G.** *Logicheskii sintez diskretnykh sistem upravleniya* (The logical synthesis of discrete control systems*),* Ufa, Publishing house of USAT University, 2003, 132 p. (in Russian).

4. **Chikurov N. G.** *Sintez diskretno-logicheskikh sistem upravleniya* (Synthesis of discrete-logic control systems), Moscow, INFRA-M, 2018, 229 p. (in Russian).

УДК 681.5 DOI: 10.17587/mau.19.243-250

М. В. Архипов, канд. техн. наук, maksim_av@mail.ru, **М. Ю. Рачков,** д-р техн. наук, проф.,
В. Ф. Головин, канд. техн. наук, доц.,
Московский политехнический университет,
Л. Б. Кочеревская, старш. преп.,
Московский авиационный институт

Роботы для восстановительной медицины: проблемы и технические решения

Рассматривается возможность использования биомехатронных модулей как средства адаптации к робототехническим системам серийно выпускаемых манипуляционных роботов для выполнения разнообразной массажной физиотерапии. Приводится описание структурных моделей управления манипуляционным роботом, взаимодействующим с деформируемой биологической средой. Получено практическое решение для реализации совместной деятельности сервисного манипуляционного робота и человека-оператора, обучающего его методом "демонстрации движений".

Ключевые слова: *биомехатроника, массаж, манипуляционный робот, мягкая ткань, позиционно-силовое управление, податливое управление, обучение демонстрацией, силовая точка, датчик усилия, задающая рукоятка, миотонометр*

В настоящее время наблюдается значительное расширение применений автоматизированных и механизированных устройств в практике социально значимых направлений, таких как реабилитация после травм, терапия, восстановление, массаж [1]. Аппаратные средства массажа (например, массажные кресла) имеют широкое коммерческое применение и постоянно совершенствуются [2]. По сравнению с массажными креслами следует отметить ряд преимуществ роботов для массажной физиотерапии, основными из которых являются дозированное воздействие, возможность проведения манипуляций на любых доступных участках и реализация принципов контроля прогресса процедур по психофизиологическим параметрам пациента [3].

Роботы показали высокую эффективность в различных медицинских задачах [4, 5]. В настоящее время техническим средством, позволяющим заменить труд массажистов, также могут быть роботы [6].

Таким образом, возникают задачи разработки многоцелевых систем или адаптации серийно выпускаемых систем к конкретным задачам, например, использования серийно выпускаемых манипуляционных роботов как основы для разработки робототехнических систем, способных выполнять массаж как неинвазивное, контактное, контролируемое деформирование мягких тканей человека [7].

В данной статье рассматриваются вопросы проектирования робототехнических систем для выполнения массажа с использованием биомехатронных модулей (БММ) и реализации методов обучения и воспроизведения обученных траекторий на основе информации о силомоментном взаимодействии инструмента робота с мягкими тканями пациента. Это взаимодействие существенно отличается от взаимодействия инструментов робота с заготовками, например, при их механообработке [8]. По определению биомехатроника объединяет в себе передовые наработки из механики, теории управления и обработки информации, компьютерного зрения, электроники, биологии и медицины [9]. Функции БММ — не только измерять усилия взаимодействия инструмента робота с мягкими тканями, но и исключить быстрый подход инструмента робота к телу пациента, а также участвовать в задании необходимой траектории [10, 11].

С точки зрения механики задача массажа состоит в контролируемом, повторяющемся деформировании определенных участков мягких тканей (МТ) — кожных, мышечных, сухожильных механорецепторов [12, 13]. Также при массаже деформируются кровеносные и лимфатические сосуды, вызывая дренажный эффект гидронасоса, хотя основной эффект массажа — рефлекторный. Известны исследования свойств МТ [14, 15], связанные с диагностикой опухолей в МТ, и исследования, связанные с разработкой хирургических копирующих манипуляторов [16]. Однако задачи распознавания опухолей и хирургических манипуляций на МТ отличаются от задач управляемого неинвазивного деформирования МТ. В процессе массажа неинвазивно деформируются живые биологические ткани пациента, а потому предъявляются повышенные требования к обеспечению эффективного физиотерапевтического воздействия [17].

Особенности взаимодействия манипуляционного робота с биологическими мягкими тканями

Для организации управления роботом при массажной физиотерапии необходимо разработать модели МТ и учитывать специфику ее взаимодействия с инструментом робота.

Контактное взаимодействие инструмента и МТ происходит под действием усилия F_r, прикладываемого к инструменту со стороны робота, и усилия F_0, прикладываемого рукой оператора к рукоятке, вызывая реакцию МТ F, учитывающую: инерционную силу F_i, силы вязкого и сухого трения F_μ и F_f, силу упругого сопротивления F_s. В общем случае выражение для F будет иметь вид

$$F = F_i + F_\mu + F_f + F_s.$$

Для введения в память системы управления робота усилий для необходимого деформирования МТ и параметров движения инструмента робота можно использовать различные методы обучения расчетом или демонстрацией реальных траекторий. Расчет параметров может проводиться программным способом при предварительном внесении данных о заранее известных характеристиках среды — МТ, что невозможно для разных пациентов и при изменяющихся характеристиках. Методы обучения манипулятора демонстрацией повторяющихся реальных движений опытного массажиста являются наиболее удобным и естественным способом формирования информации о траекториях и усилиях взаимодействия инструмента манипулятора и МТ [10].

Одна из моделей МТ представляется инерционной вязкоупругой средой. Если пассивно сопротивляющуюся МТ пациента считать инерционной вязкоупругой средой, то в аналитической механике динамическая модель такой среды, взаимодействующей с инструментом робота с усилием F в системе координат, связанной с инструментом, закрепленным на конечном звене робота, может быть представлена нелинейным дифференциальным уравнением вида [13]

$$M(q)\ddot{q} + L(q, \dot{q}) = -S^{\mathrm{T}}(q)F,$$

где $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^n$ — векторы обобщенных координат положения, скорости, ускорения соответственно; $M(q) \in R^{n\times m}$ — матрица полного ранга, характеризующая инерционные свойства среды; $L(q, \dot{q}) \in R^{m^n}$ — вектор, характеризующий вязкоупругие свойства среды и ее вес; $S^{\mathrm{T}}(q) \in R^{m\times m}$ — невырожденная матрица; $^{\mathrm{T}}$ — символ транспонирования; $F \in R^m$ — вектор сил, действующих на конечное звено (инструмент) манипулятора со стороны среды.

При этом усилие со стороны среды учитывает: вектор усилий (моментов), создаваемых рукой человека-оператора, F_0; вектор усилий (моментов), создаваемых инструментом робота на мягкие ткани, F_r:

$$F = F_0 + F_r.$$

Деформирование МТ нажатием встречает сопротивление твердой костной ткани (рис. 1, *а*), что вызывает необходимость учета разного вида нелинейностей модели (рис. 1, *в*) [12].

С учетом рассмотренных выше особенностей управление манипуляционным роботом, взаимодействующим с динамической средой, представляется следующей моделью [13]:

$$H(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) = \tau + J^{\mathrm{T}}(q)F,$$

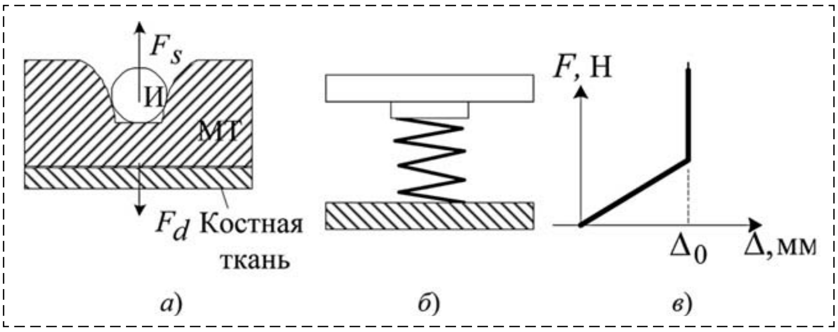


Рис. 1. Модель контактного взаимодействия (*а*), при котором МТ ограничена с одной стороны твердой поверхностью (*б*), обладающая нелинейными свойствами $F(\Delta)$ (*в*), где Δ_0 — толщина МТ

где $H(q) \in R^{n\times n}$ — матрица, характеризующая инерционные свойства манипулятора; $h(q, \dot{q}) \in R^n$ — вектор, характеризующий гравитационные, центробежные, кориолисовы силы в звеньях манипулятора; $\tau \in R^n$ — вектор управляющих моментов, развиваемых приводами манипулятора; $J(q) \in R^{n\times m}$ — матрица Якоби, связанная с преобразованием скоростей обобщенных координат $\dot{q}$.

Целью данного управления в режиме обучения "демонстрацией движений" является формирование таких же усилий и траекторий воздействия инструмента манипуляционного робота, которые прикладывает оператор на рукоятку в направлении к МТ. Фаза отработки реализуется путем воспроизведения роботом, обученным показом, силовой непрерывной траектории. При изменении геометрических или силовых параметров МТ в процессе манипуляций реальные усилия F в процессе управления могут быть вычислены и использованы при формировании вектора управляющих моментов τ.

Биомехатронные модули для обучения силовых точек

Для ввода в систему управления роботом данных о задаваемых и измеряемых перемещениях и усилиях были предложены методы обучения демонстрацией движений от человека-оператора. Сначала рассматривалось программное обучение так называемых силовых точек. Этот метод требовал задания и измерения только одной составляющей усилия, направленной вдоль инструментальной оси робота. Был усовершенствован робот РМ-01 с возможностью программирования усилия и разработан и изготовлен пассивный биомехатронный модуль (БММ), содержащий индукционный датчик усилий, пружину для сглаживания перегрузок и сменный инструмент (рис. 2, см. вторую сторону обложки) [11]. С роботом, содержащим этот модуль, были проведены основные исследования на макете и с пациентами-добровольцами.

Во втором варианте БММ индукционный датчик усилия был заменен высокоточным серийным тензодатчиком (рис. 3, см. вторую сторону обложки).

Дальнейшее развитие метод обучения силовых точек получил при использовании трехкомпонентного тензодатчика усилий (рис. 4, см. вторую сторону обложки).

Процесс управления с многокомпонентным силовым датчиком, расположенным на фланце конечного звена робота (рис. 4), осуществляется методом демонстрации движений человеком-оператором путем формирования непрерывной траектории с учетом деформирования МТ.

Оператор прикладывает усилия F_0 для перемещения рукоятки, размещенной на конечном звене робота, и деформирует МТ пациента. Робот в режиме податливого управления не препятствует движениям оператора.

Предварительные экспериментальные исследования режима управления роботом методом ввода перемещений и усилий путем программного обучения показали работоспособность модулей (см. рис. 2 и 3 на второй стороне обложки), но при обучении на множестве точек требовалось значительное время и напряженная работа человека-оператора, которые необходимо было снижать [10].

Для улучшения сервиса и быстродействия был предложен метод обучения мануальной демонстрацией движений пространственному необходимому перемещению при деформировании МТ пациента.

Обучение манипуляционного робота методом "демонстрации движений" с помощью задающей рукоятки, перемещаемой человеком-оператором

Демонстрация необходимого движения с помощью задающей рукоятки с податливым управлением является наиболее естественной формой обучения и ввода данных. Это бионический подход к организации управления, позволяющий приближать управление роботом к естественным действиям опытного массажиста — человека. Системы с организацией обучения показом необходимого движения относятся к классу систем полуавтоматического биотехнического управления человеко-машинных эргономических систем управления. Особенностью этого класса эргономических систем управления для медицинской техники является объект управления — пациент с психофизиологическими свойствами, которые отсутствуют у технических объектов управления.

Алгоритмы работы системы обучения демонстрацией непрерывной траектории с учетом деформирования МТ с многокомпонентным силовым датчиком аналогичны программным алгоритмам, реализованным для систем на рис. 2 и 3. Отличие состоит в том, что здесь усилие F_0 вводится в робот оператором не программным способом, а рукой человека-оператора, обучающего его методом демонстрации движений [2].

Система с мануальным вводом F_0 реализована с использованием БММ в одном из двух вариантов (рис. 5, *а*, *б*), отличающихся конструктивным вариантом размещения датчиков усилия. Оператор перемещает рукоятку, размещенную на конечном звене робота, и деформирует МТ пациента. Робот не препятствует движениям оператора.

Обозначения на рис. 5 векторов усилий (моментов) следующие: F_r — вектор усилий (моментов), создаваемых двигателями приводов робота; F_0 — вектор усилий (моментов), создаваемых рукой оператора; F — вектор усилий (моментов), создаваемых давлением МТ на инструмент робота; T_1 — вектор усилий (моментов), измеряемых верхним датчиком усилия; T_2 — вектор усилий (моментов), измеряемых нижним датчиком усилия.

Усилие F_0, создаваемое рукой массажиста-оператора, создает траекторию, точки которой содержат не только геометрическую, но и силовую информацию о деформировании МТ.

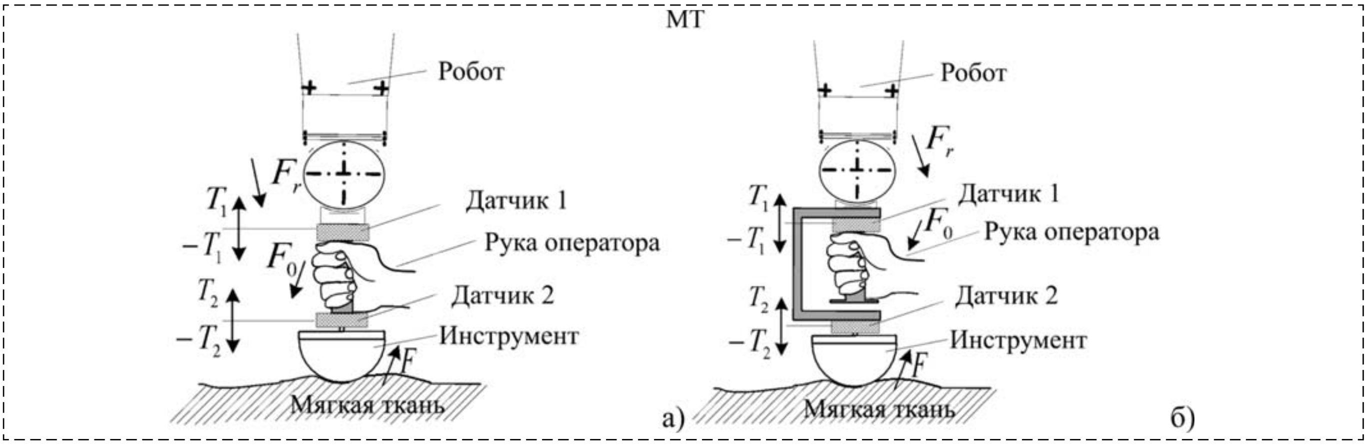


Рис. 5. Усилия, прикладываемые к роботу от оператора и среды:
а — вариант без разделения усилий; *б* — вариант с разделением усилий

Управление манипулятором для массажной физиотерапии рассмотрено в патенте [18], в котором предлагается реализация устройства управления технологическим инструментом манипулятора (рис. 6). Устройство содержит корпус *1*, соединенную с ним рукоятку *2*, датчик контроля управляющего усилия *3*, датчик усилия от объекта манипулирования *4*. Датчики располагаются на упругих диафрагмах *5*, *6*. На диафрагме *6* закреплен массажный инструмен *7*. Корпус устройства прикрепляется к фланцу манипуляционного робота *8*.

Предложенная конструкция отличается от рассмотренных выше вариантов тем, что позволяет, помимо контроля усилия от объекта манипулирования на манипулятор, обеспечивать контроль усилия, создаваемого оператором на объект манипулирования.

При этом, если траектория получена в результате обучения показом, но не непрерывно, то формируется множество точек A_i, где $A_i = (x, y, z, o, a, t, F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)$; x, y, z — координаты точки; o, a, t — углы ориентации; F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z — усилия и моменты по осям, возникающие в точке.

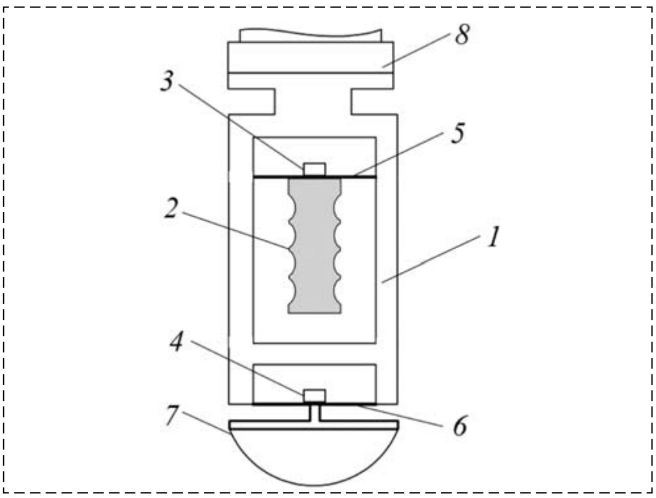


Рис. 6. Устройство управления технологическим инструментом манипулятора

Режим медленных, плавных и глубоких движений в массаже может быть приближен к квазистатическому. Тогда с учетом компенсации сил веса звеньев

$$H(q)\ddot{q} = h(q, \dot{q}) = 0.$$

Окончательно имеем

$$-J^{\mathrm{T}}(q)(F_0 - F) = F_r.$$

Это равенство позволяет сформулировать цель управления в режиме обучения методом "демонстрации движений": оператор-массажист должен задавать и чувствовать своей рукой необходимое усилие деформирования МТ:

$$F \to F_0.$$

Тогда усилие со стороны робота (F_r) должно стремиться к нулю, что и позволит оператору лучше чувствовать усилие F со стороны МТ.

Если масса последнего звена сосредоточена в инструменте, то датчики, расположенные выше и ниже руки оператора, в статике будут измерять различные усилия:

$$T_1 = F_r = F - F_0 - C(q);$$
$$T_2 = -F + C(q) = -F_0 - F_r.$$

Верхний датчик измеряет усилие $T_1 \approx F - F_0$ (датчик F в схемах на рис. 5).

Нижний датчик, измеряющий усилие $T_2 \approx F$, может быть полезным для визуального наблюдения за реакцией МТ или может сообщать звуковым сигналом о перегрузке, а также использоваться для коррекции небольших перемещений МТ пациента, например, при его дыхании.

В процессе обучения перемещения в суставах с энкодеров записываются или в виде отдельных узловых силовых точек, или в виде непрерывной позиционной траектории.

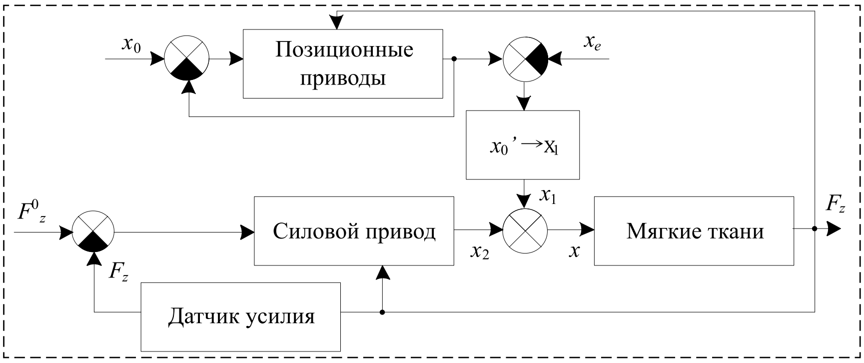


Рис. 7. Блок-схема робота, взаимодействующего с МТ, реализующего при воспроизведении ПСУ

Программное исполнение системы воспроизведения предполагает ПСУ при выполнении условий стабилизации усилий и перемещений.

Применение биомехатронного модуля в качестве миотонометра

Датчик усилия в БММ робота для массажа может использоваться не только для ПСУ и податливого управления роботом, но и для определения упругости МТ. В качестве миотонометра он может быть использован для диагностики состояния пациента по мышечному тонусу, определения болезненных уплотнений мышц для назначения компрессии, биотехнического управления для обеспечения требуемого мышечного тонуса [17].

На рис. 8 приведены экспериментальные характеристики $F_z = f(\Delta_z)$ для мышц предплечья (кривые *1*, *2*) и бедра (кривые *3*, *4*) и видно влияние степени напряженности этих мышц [11]. Измерения проводились с использованием индукционного датчика усилия, размещенного в БММ (см. рис. 2).

Характеристика $F_z = f(\Delta_z)$ нелинейная, и средний участок характеристики с меньшими искажениями определяет упругость МТ, поэтому предлагается сравнивать упругости МТ по приращениям $\Delta F_z/\Delta_z$. Так, характеристика (рис. 8) напряженного предплечья при Δ_z = 14 мм имеет крутизну 2,4 Н/мм, характеристика расслабленного предплечья при Δ_z = 14 мм имеет крутизну 1,7 Н/мм.

Использование БММ для биотехнического управления по мышечному тонусу позволяет повысить эффективность массажной физиотерапии [10].

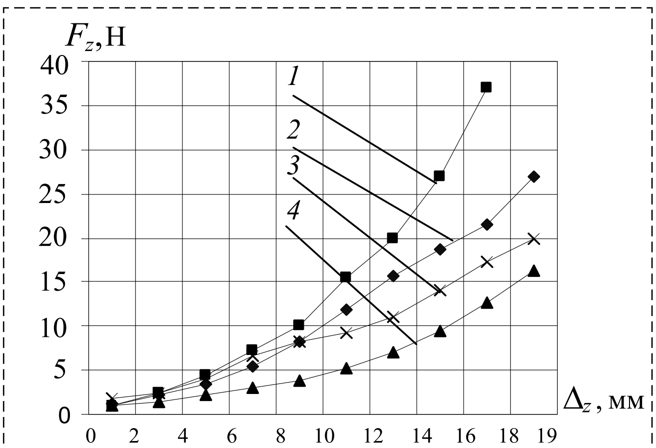


Рис. 8. Влияние степени напряженности мышц предплечья:
1 — напряженное предплечье; *2* — расслабленное предплечье; *3* — напряженное бедро; *4* — расслабленное бедро

Метод обучения силовых точек является частным случаем метода обучения демонстрацией движений для получения необходимой траектории движения с учетом взаимодействия инструмента со средой.

Воспроизведение обученных траекторий

Процедура массажной физиотерапии в робототехническом исполнении имеет две фазы — обучение и воспроизведение обученных траекторий.

Простейшая аппаратная реализации системы воспроизведения записанной траектории представляет собой жесткий позиционный робот, копирующий записанную при обучении траекторию.

При дыхании пациента и взаимодействии с жесткими тканями усилия в записанной в результате обучения траектории могут не соответствовать деформациям МТ пациента. В этих случаях необходимо позиционно силовое управление (ПСУ), при котором компромиссно выполняются условия стабилизации усилия вдоль инструментальной оси F_z и стабилизации записанных в процессе обучения перемещений инструмента x_0 с приоритетом усилия, когда выполняется задача ПСУ:

$$F_z \to F_z^0 \text{ и } x \to x_0,$$

где x_0, F_z^0 — заданные траектория и усилие вдоль инструментальной оси.

Схема системы воспроизведения полученной в результате обучения траектории с БММ приведена на рис. 7. Силовой привод вместе с датчиком усилия вдоль инструментальной оси робота образуют активный БММ [3].

Перемещение инструмента робота x, обеспечивающее необходимое деформирование МТ, складывается из перемещений позиционных приводов x_1 и перемещения силового привода x_2: $x = x_1 + x_2$, при этом $x_1 = x_0' - x_e$, где x_e — вектор рельефа МТ, x_0' — вектор перемещения по рельефу МТ с приложенным усилием F_z.

Интерфейс для биомехатронного модуля

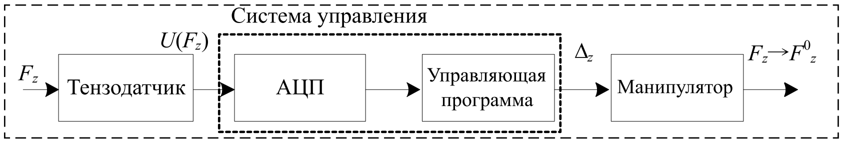


Рис. 9. Блок-схема интерфейса БММ

Схема системы обработки сигнала от тензодатчика БММ приведена на рис. 9. Прикладываемое к тензодатчику усилие F_z после оцифровывания аналогового сигнала в десятичный код является варьируемой переменной в управляющей программе, которая, в свою очередь, задает корректирующие шаги перемещения Δ_z на манипуляторе.

Пассивный биомехатронный модуль с силовым тензодатчиком представлен на рис. 10 (см. вторую страницу обложки). Интерфейс для тензодатчика находится в кассете *4*, включающей аналогово-цифровой преобразователь (АЦП). Чувствительным элементом в модуле является тензодатчик FC2231, измеряющий усилия до 50 Н с точностью ± 1 %.

Экспериментальная оценка параметров силового взаимодействия инструмента манипуляционного робота с мягкими тканями

Серия экспериментальных работ была выполнена с БММ, размещенными на конечном звене робота РМ-01 [10].

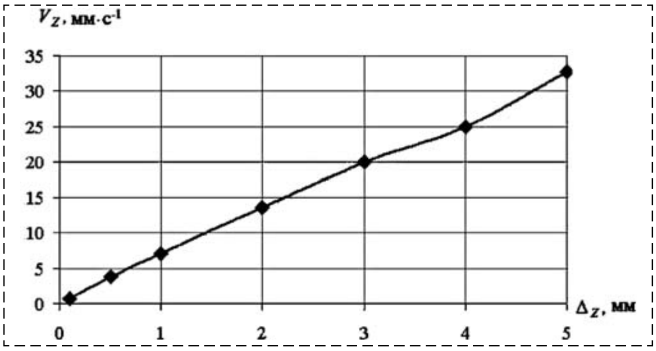


Рис. 11. Функция скорости перемещения робота РМ-01 в зависимости от шага

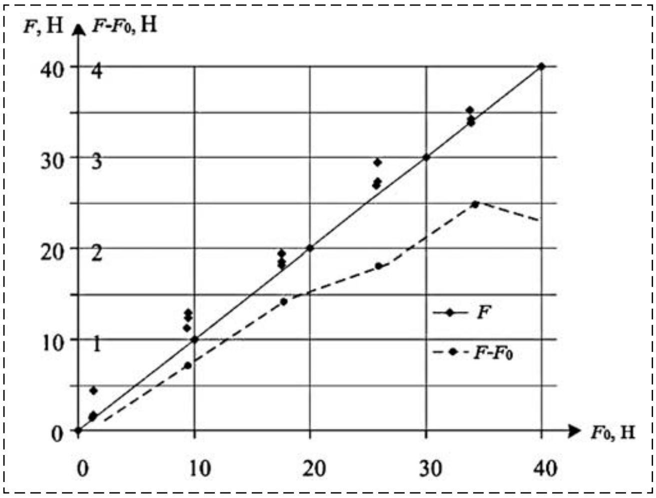


Рис. 12. Характеристики $F = f(F_0)$ и отклонения $F - F_0$

Единственный способ управления приводами робота РМ-01 с использованием его программного обеспечения ARPS состоит в том, чтобы указывать число шагов перемещений, которые робот должен полностью отследить как заданные перемещения. При программном опросе датчика усилия после каждого шага в направлении инструментальной оси реальная скорость перемещения будет зависеть от этого шага и будет меньше усилия, задаваемого в программе. Экспериментальная характеристика зависимости скорости перемещения инструмента робота РМ-01 V_z от шага приведена на рис. 11.

Основной характеристикой режима обучения является отклонение реальной силы F, создаваемой роботизированным инструментом на МТ F от силы F_0, назначенной оператором. На рис. 12 представлены экспериментальные характеристики $F = f(F_0)$ и отклонения $F - F_0$.

Максимальное отклонение реальной силы от заданной не превышает 10 %, что допустимо для выполнения профилактического массажа.

Заключение

Проведенный в статье анализ проблемы показывает возможность расширения применимости роботов для задач восстановительной медицины. Рассмотренные в статье биомехатронные модули позволяют применить ранее неиспользуемые в практике восстановительной медицины возможности податливого управления для создания условий человеку-оператору (врачу) в процессе совместной деятельности с сервисным манипуляционным роботом, которые предусматривают формирование и накопление образцов-эталонов выполнения двигательных актов в практике восстановления и реабилитации населения.

В экспериментальных исследованиях позиционный робот РМ-01 дополнялся БММ для решения задач обучения демонстрацией с деформированием МТ. Было предложено расширение метода обучения силовых точек обучением по непрерывным пространственным траекториям. Режим податливости способствует упрощению сложных механических и программных решений, повышению надежности при обучении робота в режиме демонстрации движений, снижению риска столкновений, защите от опасных реакций приложенных сил. Достигается возможность одновременного получения данных контроля управляющего усилия от оператора и усилия, создаваемого деформируемой средой на инструмент манипулятора, с возможностью выделения управляющего усилия от оператора из совокупности усилий со стороны манипулятора и использования его при обучении манипулятора, необходимом для дальнейшей работы манипулятора в автоматическом режиме.

Результаты исследований позволяют вывести на новый, более эффективный уровень применение роботизированных аппаратных средств для восстановительной медицины.

Список литературы

1. **Головин В. Ф., Саморуков А. Е.** Патент на полезную модель Российской Федерации 2145833 RU МПК A61H7/00. Способ массажа и устройство для его осуществления / заявлено: 08.05.1998 / опубликовано: 27.02.200 Бюл. № 6. С. 1—2.
2. **Вжесневский Е. А., Архипов М. В., Орлов И. А.** Проблемы и задачи осязания в манипуляционной робототехнике при работе с податливыми объектами // Интеллектуальные системы, управление и мехатроника. Материалы Всероссийской научн.-техн. конф. 2017. Под ред. Барабанов А. Т. Севастополь: СевГУ, 2017. С. 184—189.
3. **Головин В. Ф., Разумов А. Н., Саморуков А. Е.** Концепция биомехатроники в медицинской технике // Труды 1-го Международного симпозиума по восстановительной медицине и реабилитации. М.: РНЦ МРиК, 2004. С. 269—270.
4. **Головин В. Ф., Саморуков А. Е., Архипов М. В., Журавлев В. В.** Обзор состояния робототехники в восстановительной медицине // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 8. С. 42—50.
5. **Заблудовский И. В.** Материалы к вопросу о действии массажа на здоровых людей. СПб.: Якова Трея, 1882. 87 с.
6. **Еремушкин М. А.** Способ определения частотных характеристик массажного воздействия // ЛФК и массаж. 2002. № 2. С. 33—35.
7. **Разумов А. Н., Бирюков А. А., Головин В. Ф., Архипов М. В.** Повышение боеспособности военнослужащих применением робототехники для восстановительной медицины // Труды IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием "Лечебная физическая культура: достижения и перспективы развития". М.: ГЦОЛИФК, 2015. С. 664—671.
8. **Садовничий В. А., Горячева И. Г., Акаев А. А., Мартыненко Ю. Г., Окунев Ю. М., Влахова А. В., Богданович И. Ю.** Применение методов механики контактного взаимодействия при диагностике патологических состояний мягких биологических тканей. М.: Изд-во МГУ, 2009. 309 с.
9. **Сковорода А. Р.** Задачи теории упругости в проблеме диагностики патологий мягких биологических тканей. М.: Изд-во физико-математической литературы, 2006. 232 с.
10. **Архипов М. В., Лесков А. Г., Головин В. Ф., Герциг Я. Г., Кочеревская Л. Б.** Перспективы развития робототехники для восстановительной медицины // Труды 25-й конференции по робототехнике в RAAD-16. — Белград: Спрингер. 2017. С. 499—506.
11. **Головин В. Ф., Гриб А. Н.** Мехатронная система для мануальной терапии и массажа // Труды 8-й Международной конференции по мехатронике. Твен, 2002. С. 664—671.
12. **Головин В. Ф., Журавлев В. В., Разумов А. Н., Рачков М. Ю.** Адаптивный силовой модуль для медицинских роботов // Труды конференции по адаптивным и интеллектуальным роботам: настоящее и будущее IARP. М.: 2005. С. 70—82.
13. **Головин В., Журавлев В., Архипов М.** Робототехника в восстановительной медицине, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, GmbH & Co. KG, 2012. 270 с.
14. **Таваколи М., Пател Р. В., Моаллем М., Азиминежад А.** Тактильное очувствление для телеоперационной роботизированных систем // Серия монографий в Мировом научном издании под названием "Новые рубежи в робототехнике". Сингапур, Всемирная научная издательская компания, 2003. 290 с.
15. **Вукобратович М.** Как управлять взаимодействием с динамической средой // Journal of Intelligent and Robotic System. 19: 1997. P. 119—152.
16. **Саврасов Г. В.** Медицинская робототехника: состояние, проблемы и общие принципы проектирования. // Вестник МГТУ им. Баумана Н. Э. Спецвыпуск "Биомедицинская техника и технология. Сер. "Приборостроение", 1998.
17. **Архипов М. В., Головин В. Ф., Журавлев В. В., Вжесневский Е. А., Чернышова А. Ю., Полонский М. Е.** Количественная оценка психофизиологического состояния пациента по динамике электрокожного сопротивления во время массажной физиотерапии с применением робототехники // Труды III Международной научно-практической конференции "Лечебная физическая культура: достижения и перспективы развития". М.: ГЦОЛИФК. С. 23—27.
18. **Архипов М. В., Рачков М. Ю., Головин В. Ф., Орлов И. А.** Патент на полезную модель Российской Федерации 173686 RU МПК B25J13/02. Устройство управления технологическим инструментом манипулятора / заявлено: 18.11.2016 / опубликовано: 05.09.20017.

Robots for Restorative Medicine: Problems and Technical Solutions

M. V. Arkhipov, maksim_av@mail.ru, **M. Yu. Rachkov,** michyur@gmail.com, **V. F. Golovin,** medicalrobot@mail.ru, Moscow Polytechnic University, Moscow, 107023, Russian Federation,
L. B. Kocherevskaya, ladk05@yandex.ru,
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russian Federation

Corresponding author: **Arkhipov Mikhail V.,** Ph. D., Associate Professor Department of Automation and Control, Moscow Polytechnic University, Moscow, 107023, Russian Federation, e-mail: maksim_av@mail.ru

Accepted on December 10, 2017

The article is devoted to the consideration of theoretical and practical solutions of the problems of the cooperative activity of the manipulation robot for restorative medicine and the human-operator teaching it by the "movement demonstration *with soft tissue deforming" method. The possibility of using biomechatronic modules as a means of adapting serially produced manipulation robots to robotic systems for performing a variety of massage physiotherapy is considered. Under the interaction with the environment performed with the manipulation robot, we mean non-invasive, controlled, repeated contact deformation of soft tissue, without changing its shape. To ensure smoothness of efforts in position-force control, the integrator for each link is introduced into the structure of the control system at the stage of computing the joint coordinates. The modified method implements the recording of the parameters of the positional steps from the encoders in the links and the efforts from the two sensors of the assigning handle mounted on the flange of the manipulator. The recording of these parameters is performed in the training mode of the manipulator during movements demonstration. The purpose of modernization consisted in the best quality of position-force control in the mode of reproduction of trained trajectories. Constructive solutions are presented in the form of system structures, methods of processing force information and theoretical justification of problems that are confirmed by experiments. A description of the structural model of control system of the manipulation robot interacting with soft tissue is given. The experimental results were obtained on a real robot based on the six-degree manipulator Puma-560 and they can be transferred to manipulation systems equipped with six-component force sensors.*

Keywords: *bio-mechatronics, massage, manipulation robot, soft tissues, position-force control, admittance control, training by demonstration, reproduction, force point, force sensor, assign handle, myotonometer*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian presidential grant № MK-5826.2016.8.

For citation:

Arkhipov M. V., Rachkov M. Yu., Golovin V. F., Kocherevskaya L. B. Robots for Restorative Medicine: Problems and Technical Solutions, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 4, pp. 243—250.

DOI: 10.17587/mau.19.243-250

References

1. **Golovin V. F., Samorukov A. E.** *Sposob massazha i ustrojstvo dlja ego osushhestvlenija* (Method of massage and device for its implementation), *Patent RF*, no. 2145833, 1998 (in Russian).
2. **Vzhesnevskij E. A., Arhipov M. V., Orlov I. A.** *Problemy i zadachi osjazanija v manipuljacionnoj robototehnike pri rabote s podatlivymi ob'ektami* (Problems and Tasks of touching in Manipulating Robotics when Working with complan Objects), *Intellectual systems, management and mechatronics 2017, Sevastopol*, 2017, pp. 184—189 (in Russian).
3. **Golovin V. F., Razumov A. N., Samorukov A. E.** *Koncepcija biomehatroniki v medicinskoj tehnike* (The concept of biomechatronics in medical technology), *Proceedings of the 1st International Symposium on Restorative Medicine and Rehabilitation, Moscow, rncmrik*, 2004, pp. 269—270 (in Russian).
4. **Golovin V. F., Samorukov A. E., Arkhipov M. V., Zhuravlev V. V.** *Obzor sostojanija robototehniki v vosstanovitel'noj medicine* (A review of the state of robotics in restorative medicine), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 8. pp. 42—50 (in Russian).
5. **Zabludovsky I. V.** *Dissertacija "Materialy k voprosu o dejstvii massazha na zdorovyh ljudej"* (The thesis "Materials to the question of the effect of massage on healthy people"), *St. Petersburg, Yakov Trey*, 1882, 87 p. (in Russian).
6. **Eremushkin M. A.** *Sposob opredelenija chastotnyh harakteristik massazhnogo vozdejstvija* (Method for determining the frequency characteristics of massage effects), *LFK and massage, 2002*, no. 2, pp. 33—35 (in Russian).
7. **Razumov A. N., Biryukov A. A., Golovin V. F., Arkhipov M. V.** *Povyshenie boesposobnosti voennosluzhashhih primeneniem robototehniki dlja vosstanovitel'noj mediciny* (Increase of combat capability of servicemen using robotics for reconstructive medicine), *Proceedings of the IV All-Russian scientific-practical conference with international participation "Medical physical culture: achievements and development prospects", Moscow, GTSOLIFK*, 2015, pp. 664—671 (in Russian).
8. **Sadovnichy V. A., Goryacheva I. G., Akaev A. A., Martynenko Yu. G., Okunev Yu. M., Vlakhova A. V., Bogdanovich I. Yu.** *Primenenie metodov mehaniki kontaktnogo vzaimodejstvija pri diagnostike patologicheskih sostojanij mjagkih biologicheskih tkanej* (Application of methods of contact interaction mechanics in the diagnosis of pathological conditions of soft biological tissues), *Moscow, Publishing house of MGU*, 2009, 309 p. (in Russian).
9. **Skovoroda A. R.** Zadachi teorii uprugosti v *Probleme diagnostiki patologij mjagkih biologicheskih tkanej* (Problems of the theory of elasticity in the diagnosis of pathologies of soft biological tissues), *Moscow, Physical and mathematical literature*, 2006, 232 p. (in Russian).
10. **Arkhipov M., Leskov A., Golovin V., Gercik Y., Kocherevskaya L.** Prospects of Robotics Development for Restorative Medicine, *Proceedings of the 25th Conference on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region (RAAD16), Belgrade, Springer*, 2016, pp. 499—506.
11. **Golovin V. F., Grib A. N.** Mechatronic system for manual therapy and massage, *Proc. 8-th Mehatronics Forum International Conference, University of Twente. Netherlands,* 2002, pp. 664—671.
12. **Golovin V. F., Zhuravlev V. V., Razumov A. N., Rachkov M. U.** Adaptive force module for medical robots, *IARP: Proceedings of The Workshop on Adaptive and Intelligent robots: Present and Future*, *Moscow*, 2005. pp. 70—82.
13. **Golovin V., Zhuravlev V., Arkhipov M.** Robotics in Restorative Medicine, *LAP LAMBERT Academic Publishing, GmbH & Co. KG, Germany,* 2012. 270 p.
14. **Tavakoli M., Patel R. V., Moallem M., Aziminejad A.** Haptics for teleoperated surgical robotic systems. *Monograph series in the World scientific publishing under the title "New frontiers in robotics", World Scientific Publishing Company, Singapore*, 2003, 290 p.
15. **Vukobratovic M.** How to control interacting with dynamic environment, *Journal of Intelligent and Robotic System*, 1997, vol. 19, pp. 119—152.
16. **Savrasov G. V.** *Medical robotics: condition, problems and general design principle,* Bulletin of MSTU, Bauman N. E. Special launch "Biomedical engineering and technology, series" *Instrument-Making "*, 1998 (in Russian).
17. **Arkhipov M. V., Golovin V. F., Zhuravlev V. V., Vyzhnevsky E. A., Chernyshova A. Yu., Polonskiy M. E.** *Kolichestvennaja ocenka psihofiziologicheskogo sostojanija pacienta po dinamike jelektrokozhnogo soprotivlenija vo vremja massazhnoj fizioterapii s primeneniem robototehniki* (Quantitative assessment of the patient's psychophysiological state of the dynamics of electrocutaneous resistance during massage physiotherapy with the use of robotics), *Proceedings of the III International Scientific and Practical Conference "Medical Physical Culture: Achievements and Prospects of Development", Moscow, GTSOLIFK,* pp. 23—27 (in Russian).
18. **Arhipov M. V., Rachkov M. Ju., Golovin V. F., Orlov I. A.** *Ustrojstvo upravlenija tehnologicheskim instrumentom manipuljatora Sposob massazha i ustrojstvo dlja ego osushhestvlenija* (Control device technological tool manipulator), *Patent RF,* no. 173686, 2017 (in Russian).

УДК 681.51 DOI: 10.17587/mau.19.251-258

Б. И. Адамов, канд. физ.-мат. наук, adamoff.b@yandex.ru, **А. И. Кобрин,** д-р физ.-мат. наук, проф.,
ФГБОУ ВО "Национальный исследовательский университет "МЭИ", Москва

Идентификация параметров математической модели мобильной роботизированной платформы всенаправленного движения *KUKA youBot*[1]

Объектом исследования является мобильный робот KUKA youBot, платформа которого оснащена двумя парами роликонесущих колес всенаправленного движения. Построена неголономная модель системы. Решена задача идентификации параметров — коэффициентов в уравнениях движения робота. Найдены калибровочные движения платформы, на которых обеспечивается наблюдаемость искомых параметров и возможно провести декомпозицию задачи идентификации.

Ключевые слова: *платформа всенаправленного движения, меканум-колесо, колесо Илона, youBot, неголономная система*

Введение

Все чаще мобильные робототехнические системы, предназначенные для работы в стесненных условиях складских, производственных и подобных помещений, реализуются на базе платформ всенаправленного движения, оснащенных роликонесущими колесами. Примером такой системы является *KUKA omniMove* — мобильная платформа повышенной грузоподъемности, оснащенная меканум-колесами (*Mecanum wheel*). На периферии меканум-колеса располагаются тела качения — ролики, оси которых скрещиваются с осью колеса под углом 45° [1].

Обзор мобильных устройств с меканум-колесами, предназначенных для применения в различных сферах науки и техники; подробное сравнение меканум-платформ с другими видами платформ всенаправленного движения можно найти статьях [2, 3].

Объектом исследования настоящей работы является *KUKA youBot* (рис. 1, *а*, см. третью сторону обложки) — мобильная платформа всенаправленного движения с меканум-колесами (рис. 1, *б*, см. третью сторону обложки), оснащенная одним или двумя манипуляторами. Для этого робота создано свободное и открытое программное обеспечение, что позволяет использовать *youBot* для широкого класса научно-исследовательских и учебных задач.

Существующий программно-аппаратный комплекс позволяет организовать управление роботом *youBot* на кинематическом и динамическом уровнях. В первом случае на вход системы управления подаются желаемые значения кинематических параметров (проекции вектора скорости центра платформы, ее угловая скорость или угловые скорости вращения колес). Во втором случае на вход системы управления могут подаваться желаемые значения моментов, которые должны развить приводы, или токов в цепях двигателей или параметры широтно-импульсной модуляции.

Эксперименты демонстрируют неудовлетворительную точность кинематического управления на частотах выше 0,5 рад/с. Повысить точность управления и провести его оптимизацию можно, используя алгоритмы динамического уровня, но для их синтеза требуется проработанная математическая модель системы.

Разработке таких моделей посвящено огромное число публикаций (см., например, [4, 5]). Исследование динамики и управляемости систем с произвольным числом и расположением роликонесущих колес проведено в работах [6—8]. В статье [9] выполнено точное интегрирование уравнений управляемого движения трехколесной всенаправленной платформы в частном случае, рассмотрены вопросы оптимизации энергозатрат и счисления пройденного ею пути.

Отметим, что в рассмотренных публикациях при составлении уравнений движения силы трения, действующие на валы и оси механических передач колес, либо игнорируются, либо группируются авторами с управляющими моментами. Учету трения в осях роликов колес в публикациях фактически не уделено никакого внимания.

Предлагаемая статья посвящена построению неголономной математической модели движения мобильной платформы *youBot* с учетом сил линейного вязкого трения в сочленениях тел, а также идентификации параметров такой модели.

Кинематика платформы всенаправлненного движения *youBot*

Исследуем движение мобильного робота *youBot* по горизонтальной плоскости (подстилающей по-

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00429-а.

верхности, полу). Считаем, что манипулятор неподвижен относительно платформы.

Для описания кинематики платформы мобильного робота введем неподвижную систему координат $X'Y'Z'$ с горизонтальной плоскостью $X'Y'$ и связанную с платформой подвижную $OXYZ$ с началом в геометрическом центре платформы (рис. 2, см. третью сторону обложки).

Движение системы описывается 11 обобщенными координатами (рис. 2): декартовыми координатами X'_O и Y'_O ее геометрического центра O; курсовым углом $\psi = \angle(X', X)$; углами поворота колеса относительно корпуса робота φ_i (i = 1, ..., 4); углами поворота роликов, контактирующих с подстилающей поверхностью, относительно дисков колес γ_i (i = 1, ..., 4).

В рамках настоящей работы рассматривается **идеальная** модель движения меканум-колес. Считаем, что в каждый момент времени ролик колеса i движется без проскальзывания и отрыва от подстилающей поверхности, причем центр колеса C_i, центр оси ролика K_i и точка контакта P_i ролика с полом лежат на одной вертикальной прямой (рис. 2).

В соответствии с принятыми допущениями вектор скорости точки контакта $\mathbf{V}_{P_i}$ равен [10]:

$$\mathbf{V}_{P_i} = \mathbf{V}_O + [\mathbf{\Omega}, \overrightarrow{OC_i}] + [\boldsymbol{\omega}_i, \overrightarrow{C_iK_i}] + [\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}, \overrightarrow{K_iP_i}] = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{V}_O = \{V_X, V_Y, 0\}$ — вектор скорости центра платформы; $\mathbf{\Omega}$, $\boldsymbol{\omega}_i$ и $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i}$ — соответственно векторы абсолютных угловых скоростей платформы, колеса i и его ролика, контактирующего с полом; [,] — операция векторного умножения. Перечисленные векторы угловых скоростей равны

$$\begin{gathered} \mathbf{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_Z, \boldsymbol{\omega}_i = \Omega \mathbf{e}_Z + \dot{\varphi}_i \mathbf{e}_Y, \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}i} = \Omega \mathbf{e}_Z + \dot{\varphi}_i \mathbf{e}_Y + \dot{\gamma}_i \mathbf{f}_i, \end{gathered} \quad (2)$$

где $\Omega = \dot{\psi}$ — угловая скорость платформы; $\mathbf{e}_Y$ и $\mathbf{e}_Z$ — орты осей координатных X и Y; $\mathbf{f}_i = \{\cos\delta_i, \sin\delta_i, 0\}$ — единичный вектор оси ролика колеса i (рис. 2), $\delta_2 = \delta_3 = 45°$, $\delta_1 = \delta_4 = -45°$. Здесь координаты векторов указаны в подвижной системе $OXYZ$.

Выполнив необходимые преобразования для каждого из колес (i = 1, ..., 4), из формул (1) и (2) получаем выражения для угловых скоростей вращения колес и роликов:

$$\begin{gathered} \dot{\varphi}_1 = \frac{1}{R}[V_X - V_Y - (l + h)\Omega]; \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{1}{R}[V_X + V_Y + (l + h)\Omega]; \\ \dot{\gamma}_1 = \dot{\gamma}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{r}[V_Y + h\Omega]; \\ \dot{\varphi}_3 = \frac{1}{R}[V_X + V_Y - (l + h)\Omega]; \\ \dot{\varphi}_4 = \frac{1}{R}[V_X - V_Y + (l + h)\Omega]; \\ \dot{\gamma}_3 = \dot{\gamma}_4 = -\frac{\sqrt{2}}{r}[V_Y - h\Omega], \end{gathered} \quad (3)$$

где $R = |C_iP_i|$ — радиус меканум-колеса; $r = |K_iP_i|$ — радиус поперечного сечения ролика; l и h — характерные размеры платформы (рис. 2).

Соотношения (3) обосновывают всенаправленное свойство движения платформы — произвольные законы изменения V_X, V_Y и Ω могут быть реализованы за счет вращения роликонесущих колес. Например, для поступательного движения робота вбок ($V_X = 0$, $\Omega = 0$) вращение колес должно выполняться со скоростями $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_3 = -\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_4 = V_Y/R$, а для вращения вокруг центра платформы ($V_X = 0$, $V_Y = 0$) — со скоростями $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_4 = -\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_3 = (l + h)\Omega/R$.

Модель динамики робота *youBot*

Составим уравнения движения робота, считая, что в сочленениях тел действуют линейные по скорости силы вязкого трения, а ролики и вращающиеся детали механических передач колес невесомы. Каждое колесо рассматриваемой системы оснащено отдельным электроприводом. Моменты, развиваемые этими приводами, обозначим M_i (i = 1, ..., 4) (рис. 2, см. третью сторону обложки).

Соотношения (3) определяют восемь неголономных связей, налагаемых на динамику мобильного робота *youBot*. Из его 11 обобщенных скоростей можно составить лишь три независимые линейные комбинации, например

$$\begin{aligned} V_X &\equiv \dot{X}'_O \cos\psi + \dot{Y}'_O \sin\psi, \\ V_Y &\equiv -\dot{X}'_O \sin\psi + \dot{Y}'_O \cos\psi, \ \Omega \equiv \dot{\psi}, \end{aligned}$$

и с помощью них описать динамику системы.

Для составления уравнений движения робота воспользуемся уравнениями Аппеля [10, 11].

Построение уравнений Аппеля для исследуемой системы подробно изложено в работе [12].

С учетом введенных выше допущений динамика мобильного робота *youBot* описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} m_0(\dot{V}_X - V_Y\Omega) + \frac{4I_1\dot{V}_X}{R^2} - ma_Y\dot{\Omega} - \\ -ma_X\Omega^2 + \frac{4\mu_1 V_X}{R^2} = F_X; \end{gathered} \quad (4а)$$

$$\begin{gathered} m_0(\dot{V}_Y + V_X\Omega) + \frac{4I_1\dot{V}_Y}{R^2} + ma_X\dot{\Omega} - \\ - ma_Y\Omega^2 + \left(\frac{4\mu_1}{R^2} + \frac{8\mu_2}{r^2}\right)V_Y = F_Y; \end{gathered} \quad (4б)$$

$$\left(I_0 + \frac{4I_1(l+h)^2}{R^2}\right)\dot{\Omega} - ma_Y(\dot{V}_X - V_Y\Omega) + \tag{4в}$$

$$+ ma_X(\dot{V}_Y + V_X\Omega) + \left(\frac{4\mu_1(l+h)^2}{R^2} + \frac{8\mu_2 h^2}{r^2}\right)\Omega = M_\Omega,$$

где $m_0 = m + 4m_1$ — общая масса робота; m — масса платформы со всем перевозимым оборудованием и грузом; m_1 — масса колеса; I_0 — момент инерции робота относительно оси OZ; a_X и a_Y — координаты центра масс платформы с оборудованием и грузом C в подвижной системе OXY (рис. 2); I_1 — момент инерции колеса относительно его оси; μ_1 — коэффициент вязкого трения в сочленениях колес и платформы; μ_2 — коэффициент вязкого трения в осях роликов; F_X, F_Y и M_Ω — управляющие обобщенные силы и момент, которые выражаются через моменты приводов колес M_i, $i = 1, ..., 4$, по формулам

$$\begin{aligned} F_X &= \frac{M_2 + M_1 + M_4 + M_3}{R}; \\ F_Y &= \frac{M_2 - M_1 - M_4 + M_3}{R}; \\ M_\Omega &= \frac{l+h}{R}\left[M_2 - M_1 + M_4 - M_3\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Значения некоторых коэффициентов в системе (4) неизвестны и подлежат оцениванию.

Для удобства дальнейшего анализа введем нормализованные скорости и силы:

$$\begin{aligned} \Omega_{V_X} &= \frac{V_X}{l+h}, \quad \Omega_{V_Y} = \frac{V_Y}{l+h}, \\ M_{V_X} &= (l+h)F_X, \quad M_{V_Y} = (l+h)F_Y \end{aligned} \tag{6}$$

и перепишем систему уравнений движения (4) в следующей форме:

$$\mathbf{y} = H\mathbf{x}, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{x} = (x_i) =$$

$$= \left(m_0(l+h)^2 \quad I_0 \quad \frac{4I_1(l+h)^2}{R^2} \quad ma_X(l+h) \quad ma_Y(l+h) \quad \frac{4\mu_1(l+h)^2}{R^2} \quad \frac{8\mu_2 h^2}{r^2}\right)^{\mathrm{T}}$$

— вектор неизвестных постоянных параметров (коэффициентов в уравнениях движения);

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} M_{V_X} \\ M_{V_Y} \\ M_\Omega \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_{V_X} - \Omega_{V_Y}\Omega & 0 & \dot{\Omega}_{V_X} & -\Omega^2 & -\dot{\Omega} & \Omega_{V_X} & 0 \\ \dot{\Omega}_{V_Y} + \Omega_{V_X}\Omega & 0 & \dot{\Omega}_{V_Y} & \dot{\Omega} & -\Omega^2 & \Omega_{V_Y} & \eta^2\Omega_{V_Y} \\ 0 & \dot{\Omega} & \dot{\Omega} & \Omega_{V_X}\Omega + \dot{\Omega}_{V_Y} & \Omega_{V_Y}\Omega - \dot{\Omega}_{V_X} & \Omega & \Omega \end{bmatrix};$$

$\eta = (l+h)/h$ — безразмерная длина.

Калибровочные движения. Анализ наблюдаемости параметров

Рассмотрим задачу синтеза движения мобильной платформы из условия наблюдаемости всех искомых параметров и сходимости их оценок. Поставленная задача сводится к выбору законов изменения скоростей V_X, V_Y и Ω, поскольку для отработки движений может быть использована существующая система управления кинематического уровня.

Известно, что сходимость оценок параметров линейного объекта, вырабатываемых по градиентному алгоритму идентификации, обеспечивается, если на вход исследуемого объекта подать мультисинусоидальный сигнал [13, с. 366]. Экспериментально обнаружено, что при указанном способе формирования закона движения платформы точность системы управления может быть неудовлетворительной (рис. 3). К тому же, во вре-

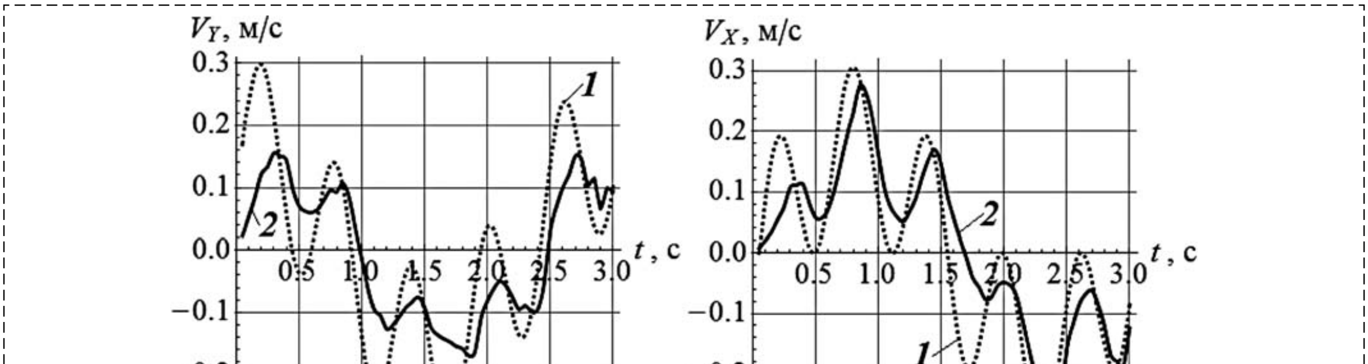


Рис. 3. Точность управления платформой в процессе отработки мультисинусоидальных законов изменения компонент скорости ее центра (*1* — желаемые значения скоростей, *2* — их реализованные величины)

мя выполнения "замысловатых" маневров в течение продолжительного времени могут нарушаться идеальные условия контакта колес с полом.

Рассмотрим несколько "простых" маневров робота (калибровочных движений), на совокупности которых обеспечивается наблюдаемость всех коэффициентов в уравнениях движения.

Калибровочное движение I представляет собой вращение платформы вокруг точки, лежащей на поперечной оси OY на расстоянии $(l + h)$ от точки O. На таком движении $V_X = (l + h)\Omega$, $V_Y = 0$ или, что то же самое, $\Omega_{V_X} = \Omega, \Omega_{V_Y} = 0$. Угловая скорость Ω является T-периодической функцией, причем среднее за период значение ее куба равно нулю. Отметим, что на предложенном калибровочном движении $\dot{\phi}_1 = \dot{\phi}_3 = 0,\ \ \dot{\phi}_2 = \dot{\phi}_4$.

Грамиан наблюдаемости параметров модели мобильного робота на рассматриваемом движении равен

$$W_{\mathrm{I}} \equiv \int_0^T H^{\mathrm{T}} H \,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \begin{bmatrix} d_2 + c_4 & 0 & d_2 & 0 & -d_2 - c_4 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & d_2 & 0 & -d_2 & 0 & 0 \\ d_2 & d_2 & 2d_2 & 0 & -2d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 + 2c_4 & 0 & 0 & 0 \\ -d_2 - c_4 & -d_2 & -2d_2 & 0 & 2d_2 + c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & c_2 \end{bmatrix},$$

где $c_k = \int_0^T \Omega^k \,\mathrm{d}\,t,\ \ d_k = \int_0^T \dot{\Omega}^k \,\mathrm{d}\,t$. При вычислении W_{I} было учтено, что в силу периодичности движения $\int_0^T \dot{\Omega}\Omega^k \,\mathrm{d}\,t = (k+1)\Omega^{k+1} \Big|_0^T = 0$.

Поскольку матрица W_{I} распадается на блоки, то совокупности параметров $\{x_4\}$, $\{x_6, x_7\}$ и $\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$, отвечающие этим блокам, можно оценивать независимо.

Граммиан W_{I} вырожден ($\mathrm{rg}W_{\mathrm{I}} = 6$), линейная комбинация параметров $x_1 + x_2 + x_5$ на рассматриваемом калибровочном движении ненаблюдаема.

Калибровочное движение II представляет собой вращение платформы вокруг точки, лежащей на продольной оси OX на расстоянии $(l + h)$ от точки O. На таком движении $V_X = 0$, $V_Y = (l + h)\Omega$ или, что то же самое, $\Omega_{V_X} = 0, \quad \Omega_{V_Y} = \Omega$. Угловая скорость Ω является T-периодической функцией, причем среднее за период значение ее куба равно нулю. Отметим, что на предложенном калибровочном движении $\dot{\phi}_3 = \dot{\phi}_4 = 0,\ \ \dot{\phi}_1 = -\dot{\phi}_2$.

Найдем грамиан наблюдаемости параметров модели мобильного робота на рассматриваемом движении:

$$W_{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} d_2 + c_4 & 0 & d_2 & d_2 + c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & d_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_2 & 2d_2 & 2d_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 + c_4 & d_2 & 2d_2 & 2d_2 + c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 + 2c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_2 & c_2(\eta^2 + 1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2(\eta^2 + 1) & c_2(\eta^4 + 1) \end{bmatrix}.$$

Анализ структуры матрицы W_{II} позволяет сделать вывод о том, что совокупности параметров $\{x_5\}$, $\{x_6, x_7\}$ и $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ можно оценивать независимо.

Грамиан W_{II} вырожден ($\mathrm{rg}W_{\mathrm{II}} = 6$), линейная комбинация параметров $x_1 + x_3 - x_4$ на рассматриваемом калибровочном движении ненаблюдаема.

Поскольку нуль-пространства положительно полуопределенных матриц W_{I} и W_{II} не пересекаются, то матрица $W_{\mathrm{I}} + W_{\mathrm{II}}$ является положительно определенной. Таким образом, на последовательности калибровочных движений I и II обеспечивается полная наблюдаемость оцениваемых параметров.

Калибровочное движение III представляет собой периодическое поступательное движение платформы ($\Omega = 0$), причем V_X и V_Y являются линейно независимыми функциями. Анализ грамиана наблюдаемости показывает, что на таком движении комбинации параметров $x_1 - x_3$ и x_2 полностью ненаблюдаемы, а совокупности $\{x_1 + x_3\}$, $\{x_4, x_5\}$ и $\{x_6, x_7\}$ могут быть оценены независимо друг от друга.

Калибровочное движение IV представляет собой равномерное прямолинейное движение центра платформы ($\dot{V}_X - V_Y\Omega = 0$ и $\dot{V}_Y + V_X\Omega = 0$), причем ее угловая скорость Ω изменяется по периодическому закону. Анализ грамиана наблюдаемости показывает, что на таком движении параметр x_1 полностью ненаблюдаем. Калибровочное движение IV введено для улучшения наблюдаемости параметра x_3.

Идентификация параметров модели робота

Построим рекуррентный алгоритм идентификации рассматриваемой системы, основываясь на методике решения задачи оперативного (*on-line*) оценивания параметров, примененной в работе [13] для манипуляционного робота.

Исходные данные для решения задачи идентификации параметров робота *youBot* получены в результате экспериментальной реализации последовательности калибровочных движений и измерения скоростей вращения колес $\dot{\phi}_i(t)$, $i = 1...4$, и моментов $M_i(t)$ (рис. 4).

Зависимости продольной и поперечной компонент скорости центра платформы $V_X(t)$ и $V_Y(t)$, полученные в ходе выполнения последователь-

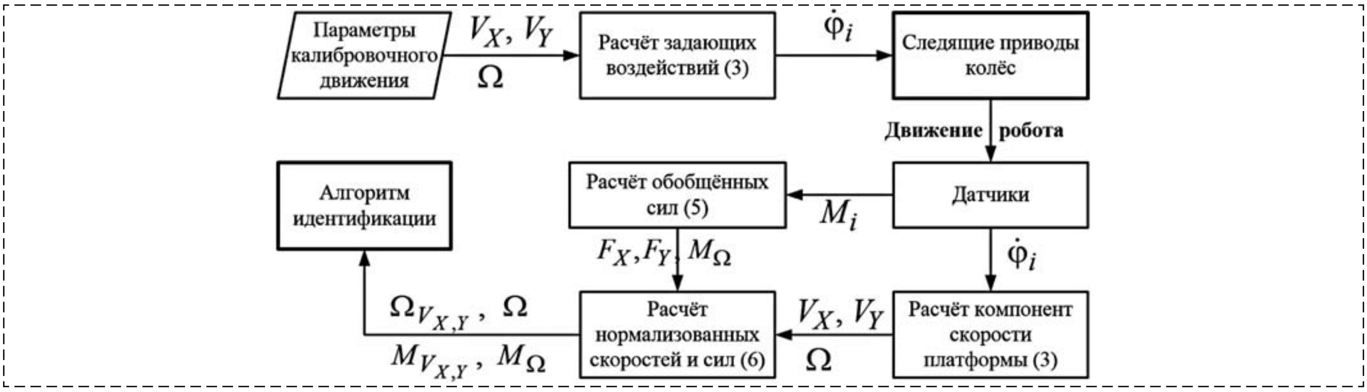


Рис. 4. Схема получения экспериментальных данных для решения задачи идентификации

ности калибровочных движений I, III, II и IV, представлены на рис. 5. Здесь калибровочное движение III представляет собой поступательное движение платформы вдоль окружности.

Матрица $\mathbf{H}$ в соотношении (7) содержит неизмеряемые ускорения. Для их исключения проведем замену функций, линейно входящих в элементы $\mathbf{H}$, по формулам [12, с. 146; 13, 14]

$$\begin{gathered}
\Omega_{V_X} = \frac{\dot\alpha_1}{a_f} + \alpha_1, \quad \Omega_{V_Y} = \frac{\dot\alpha_2}{a_f} + \alpha_2, \\
\Omega = \frac{\dot\alpha_3}{a_f} + \alpha_3, \quad \Omega_{V_X}\Omega = \frac{\dot\alpha_{13}}{a_f} + \alpha_{13}, \\
\Omega_{V_Y}\Omega = \frac{\dot\alpha_{23}}{a_f} + \alpha_{23}, \quad \Omega^2 = \frac{\dot\alpha_{33}}{a_f} + \alpha_{33}, \\
M_{V_X} = \frac{\dot\beta_1}{a_f} + \beta_1, \quad M_{V_Y} = \frac{\dot\beta_2}{a_f} + \beta_2, \quad M_\Omega = \frac{\dot\beta_3}{a_f} + \beta_3,
\end{gathered} \tag{8}$$

где $a_f > 0$ — постоянный коэффициент. Здесь α_k, α_{ij} и β_k являются результатами обработки нормализованных скоростей, их произведений, а также

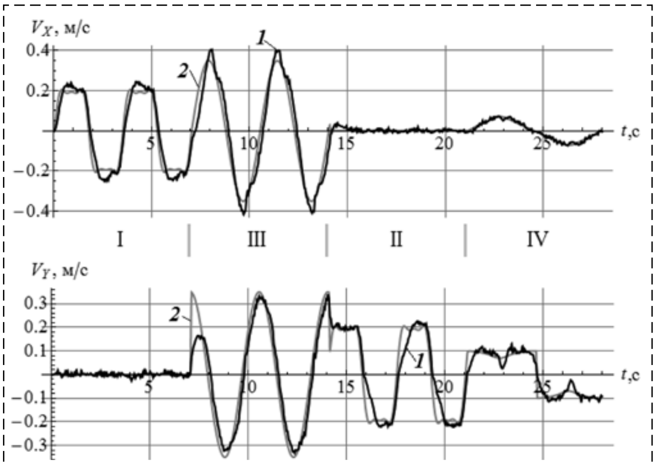


Рис. 5. Зависимости, характеризующие продольные и поперечные компоненты скорости центра платформы на последовательности калибровочных движений I—III—II—IV (*1* — экспериментальные данные, *2* — идеальные параметры калибровочных движений)

нормализованных сил апериодическими фильтрами с передаточными функциями $a_f/(p + a_f)$.

Подставив соотношения (8) в систему (7), после перегруппировки слагаемых и исключения производных новых переменных получаем

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}_z\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}_z = \\
= \begin{bmatrix} \dot\alpha_1 - \alpha_{23} & 0 & \dot\alpha_1 & -\alpha_{33} & -\dot\alpha_3 & \alpha_1 & 0 \\ \dot\alpha_2 + \alpha_{13} & 0 & \dot\alpha_2 & \dot\alpha_3 & -\alpha_{33} & \alpha_2 & \eta^2\alpha_2 \\ 0 & \dot\alpha_3 & \dot\alpha_3 & \alpha_{13} + \dot\alpha_2 & \alpha_{23} - \dot\alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где вектор $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)$ удовлетворяет уравнению $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + a_f\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, а производные $\dot\alpha_i$ вычисляются в соответствии с соотношениями (8), например, $\dot\alpha_3 = a_f[\Omega - \alpha_3]$. Далее экспоненциально затухающими величинами ε_i, $i = 1...3$, будем пренебрегать и примем $\mathbf{z} = \mathbf{H}_z\mathbf{x}$.

Найдем вектор оценок параметров $\hat{\mathbf{x}}$, минимизирующий квадратичный критерий

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = \int_{t_0}^{t} \left\| \mathbf{z}(\tau) - \mathbf{H}_z(\tau)\hat{\mathbf{x}}(t) \right\|^2 d\tau + \\
+ (\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}_0)^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_0^{-1} (\hat{\mathbf{x}}(t) - \hat{\mathbf{x}}_0),$$

где t_0 — время начала оценивания. Вычисления проведем с помощью алгоритма, задаваемого следующими соотношениями [13, с. 371; 14]:

$$\begin{gathered}
\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}\mathbf{H}_z^{\mathrm{T}}(\mathbf{z} - \mathbf{H}_z\hat{\mathbf{x}}), \quad \dot{\mathbf{P}} = -\mathbf{P}\mathbf{H}_z^{\mathrm{T}}\mathbf{H}_z\mathbf{P}, \\
\hat{\mathbf{x}}\big|_{t=t_0} = \hat{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{P}\big|_{t=t_0} = P_0 > 0,
\end{gathered} \tag{10}$$

где $\mathbf{P} > 0$, а время начала оценивания t_0 выбирается из условия пренебрежимой малости величин ε_i, $i = 1...3$, при $t > t_0$. В работах [13, 14] этот алгоритм назван рекуррентным методом наименьших квадратов, а матрица $\mathbf{P}$ — матрицей усиления ал-

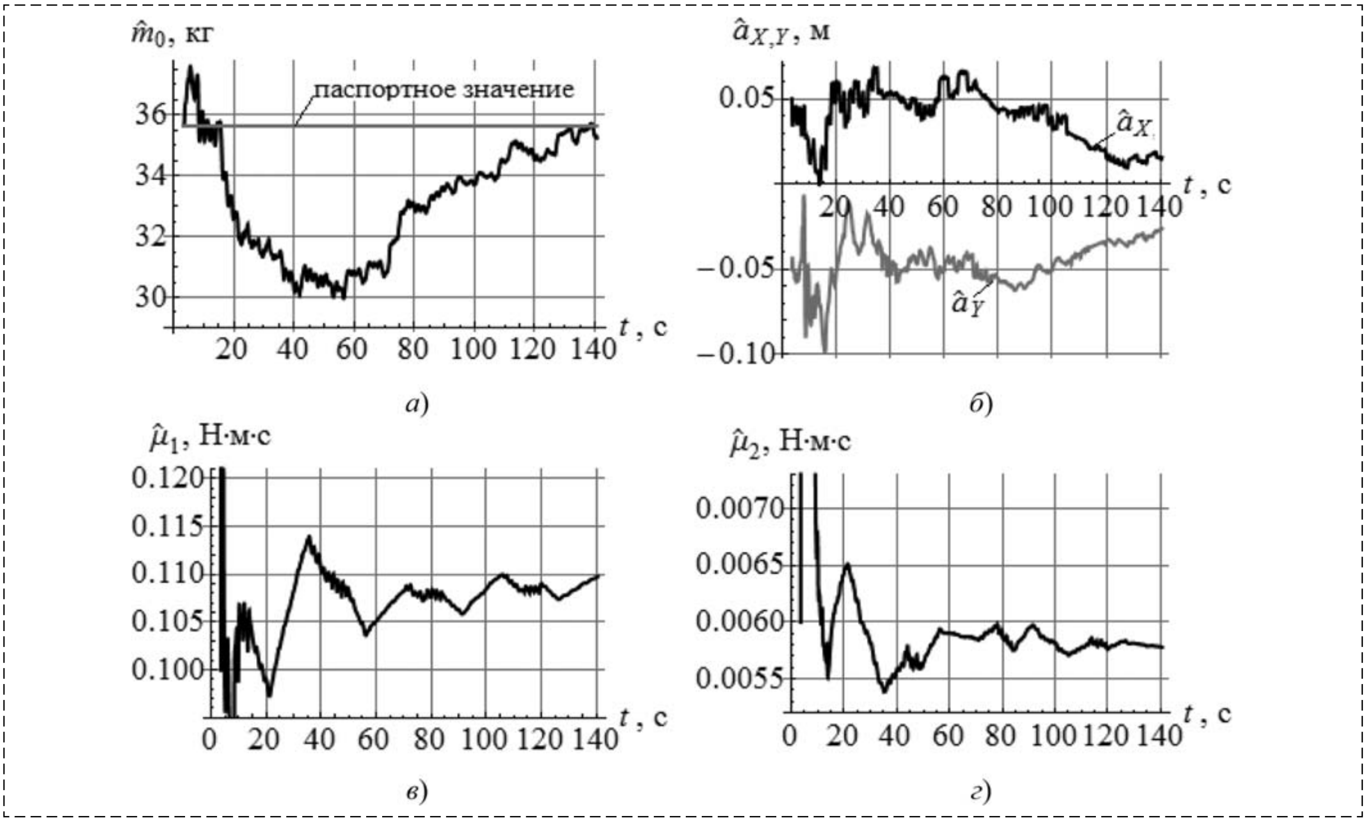


Рис. 6. Графики изменения оценок параметров системы:
а — оценка массы робота; *б* — оценки координат центра масс платформы; *в* — оценка коэффициента вязкого трения в сочленениях платформы и колес; *г* — оценка коэффициента вязкого трения в осях роликов

горитма идентификации. Заметим, что соотношения (10) совпадают с уравнениями фильтра Калмана для случая аддитивных белошумных ошибок измерений единичной интенсивности [15].

Для вычисления оценок массы $\hat{m}_0$, моментов инерции $\hat{I}_0$ и $\hat{I}_1$, координат центра масс платформы $\hat{a}_X$ и $\hat{a}_Y$, коэффициентов трения $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$ использовались построенные оценки $\hat{x}_i$, а также значения l = 0,15 м, h = 0,2355 м, R = 0,0475 м, r = 0,014 м, m_1 = 1,4 кг. Графики изменения некоторых из перечисленных оценок приведены на рис. 6.

По вектору оценок $\hat{\mathbf{x}}(t_e)$ при времени окончания оценивания t_e = = 140 с найдены следующие оценки параметров робота: $\hat{m}_0 = 35{,}3$ кг, $\hat{I}_0 = 4{,}4$ кг·м^2, $\hat{I}_1 = 6{,}0\cdot10^{-3}$ кг·м^2, $\hat{a}_X = 1{,}6$ см, $\hat{a}_Y = -2{,}6$ см, $\hat{\mu}_1$ = = 0,11 Н·м·с и $\hat{\mu}_2 = 5{,}78\cdot10^{-3}$ Н·м·с.

Оценим точность, с которой построенная математическая модель робота с найденными значениями параметров описывает действительное поведение реальной системы. Соотнесем выходной вектор параметрической модели (9) $\mathbf{z}(t)$ = $= (\beta_1(t)\quad \beta_2(t)\quad \beta_3(t))^{\mathrm{T}}$, построенный по измерениям управляющих моментов, с вектором прогноза

$$\hat{\mathbf{z}}(t) = (\hat{\beta}_1(t)\quad \hat{\beta}_2(t)\quad \hat{\beta}_3(t))^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}_z(t)\hat{\mathbf{x}}(t_e).$$

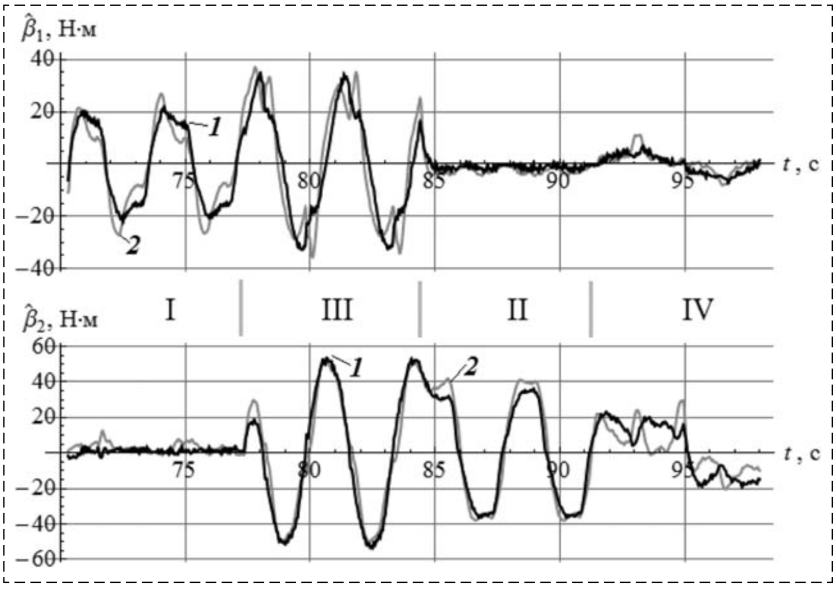


Рис. 7. Точность параметрической модели робота на последовательности калибровочных движений I—III—II—IV (*1* — прогноз выходных переменных параметрической модели робота, *2* — экспериментальные данные)

Графики изменения прогнозируемых выходов параметрической модели (9) $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$, аппроксимирующих экспериментальные зависимости β_1 и β_2, представлены на рис. 7.

Заключение

Построена неголономная математическая модель мобильной роботизированной платформы всенаправленного движения *youBot*. Предложена совокупность калибровочных движений робота, на которых обеспечивается полная наблюдаемость параметров системы (коэффициентов в уравнениях движения) и возможна декомпозиция задачи оценивания параметров. На основе полученной математической модели разработан алгоритм идентификации и получены оценки параметров мобильной платформы *youBot*.

Список литературы

1. **Ilon B. E.** Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some other base (Patent Sweden) B60B 19/12 (20060101); B60b 019/00, REF/3876255, November 13, 1972.
2. **Adascalitei F., Doroftei I.** Practical applications for mobile robots based on Mecanum wheels — a systematic survey // The Romanian Review Precision Mechanics, Optics & Mechatronics. 2011. N. 40. P. 21—29.
3. **Doroftei I., Grosu V., Spinu V.** Omnidirectional Mobile Robot — Design and implementation // Bioinspiration and Robotics Walking and Climbing Robots. Ed. by Maki K. Habib. I-Tech Education and Publishing, 2007. P. 511—528.
4. **Abdelrahman M., Zeidis I., Bondarev O., Adamov B., Becker F., Zimmermann K.** A Description of the Dynamics of a Four-Wheel Mecanum Mobile System as a Basis for a Platform Concept for Special Purpose Vehicles for Disabled Persons // 58-th Ilmenau Scientific Colloquium — Shaping the Future by Engineering. — Ilmenau: 2014. URL: http://www.db-thueringen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-30822/ilm1-2014iwk-041.pdf, свободный. (Дата обращения: 20.05.2017).
5. **Hendzel Z., Rykala L.** Modeling of Dynamics of a Wheeled Mobile Robot with Mecanum Wheels with the Use of Lagrange Equations of the Second Kind / Z. Hendzel // Int. J. of Applied Mechanics and Engineering. 2017. Vol. 22, N. 1. P. 81—99. DOI: 10.1515/ijame-2017-0005
6. **Зобова А. А., Татаринов Я. В.** Динамика экипажа с роликонесущими колесами // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 1. С. 13—22.
7. **Килин А. А., Бобыкин А. Д.** Управление тележкой с омниколесами на плоскости // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 4. С. 473—481.
8. **Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С.** Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4 (Мобильные роботы). С. 785—801.
9. **Martynenko Yu. G., Formal'skii A. M.** On the Motion of a Mobile Robot with Roller-Carrying Wheels // *Journal of Computer and Systems Sciences.* 2007. Vol. 46, N. 6. P. 976—983.
10. **Маркеев А. П.** Теоретическая механика. М., Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 592 с.
11. **Голубев Ю. Ф.** Функция Аппеля в динамике систем твердых тел // Препринты ИПМ им. Келдыша. 2014. № 58. С. 1—16.
12. **Адамов Б. И.** Применение аппарата неголономных связей в задачах идентификации параметров и управления движением: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.01 [Место защиты: Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова], М., 2016. 206 с.
13. **Slotine J. J. E., Li W.** Applied Nonlinear Control. Prentice-Hall, 1991. 461 p.
14. **Ioannou P. A., Sun J.** Robust Adaptive Control. Courier Corporation, 2012. 821 p.
15. **Степанов О. А.** Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Часть 2. Введение в теорию фильтрации. СПб.: Изд. ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ "Электроприбор" 2012. 417 с.

Parametric Identification of the Mathematical Model of the Omnidirectional Mobile Robot KUKA youBot

B. I. Adamov, adamoff.b@yandex.ru, **A. I. Kobrin,** kobrinai@yandex.ru,
National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, 111250, Russian Federation

Corresponding author: **Adamov Boris I.,** Ph. D., Associate Professor,
National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow,
111250, Russian Federation, e-mail: adamoff.b@yandex.ru

Accepted on December 01, 2017

The object of the study is a mobile robot KUKA youBot. Because of two pairs of mecanum—wheels its platform has full omnidirectional motion capabilities. We consider ideal contact of the wheel rollers and the floor. Under this assumption a complete (kinematics and dynamics) non-holonomic model of the system is developed. The dynamical model of the mecanum-wheeled robot consider mass eccentricity of its platform and linear viscous friction in platform-and-wheel and wheel-and-roller joints. The motion equations are derived using Appel's equations in terms of longitudinal and transversal velocities of the robot platform center, and rotational velocity of the platform. Values of the robot parameters (coefficients in the equations of motion) are not available and have to be determined. Calibration motions, such that all parameters are observable on them and it is possible to decompose identification problem, are designed. The physical robot inputs and *outputs are respectively the motor torques and the wheel rotational velocities (for each wheel). Using measurements of them and kinematics and dynamics relations longitudinal, transversal, and rotational velocities of the platform and generalized control forces in the equations of motion are computed. Because of the presence of the unmesaurable accelerations the equations of the robot motion can not be used directly for parameter estimation as a robot estimation model. To avoid the accelerations in the estimation model a filter technique is used. The "inputs" to the estimation model are the filtered versions of longitudinal, transversal, and rotational velocities of the platform. The estimation model "outputs" are filtered generalized control forces. The estimate of the parameters is generated by continuous-time recurrent least squares algorithm (LSM-estimator). Using experimental data measured on series of calibration motions the robot parameters is estimated.*

Keywords: *omnidirectional platform, Mecanum wheel, Ilon wheel, youBot, parameter estimation, non-holonomic system*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 16-01-00429-a.

For citation:

Adamov B. I., Kobrin A. I. Parametric Identification of the Mathematical Model of the Omnidirectional Mobile Robot KUKA youBot, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 4, no. 4, pp. 251—258.

DOI: 10.17587/mau.19.251-258

References

1. **Ilon B. E.** Wheels for a course stable selfpropelling vehicle movable in any desired direction on the ground or some other base. (Patent Sweden) B60B 19/12 (20060101); B60b 019/00, REF/3876255, November 13, 1972.
2. **Adascalitei F., Doroftei I.** Practical applications for mobile robots based on Mecanum wheels — a systematic survey, *The Romanian Review Precision Mechanics, Optics & Mechatronics*, 2011, no. 40, pp. 21—29.
3. **Doroftei I., Grosu V., Spinu V.** Omnidirectional Mobile Robot — Design and implementation, *Bioinspiration and Robotics Walking and Climbing Robots*, Ed. by Maki K. Habib, I-Tech Education and Publishing, 2007, pp. 511—528.
4. **Abdelrahman M., Zeidis I., Bondarev O., Adamov B., Becker F., Zimmermann K.** A Description of the Dynamics of a Four-Wheel Mecanum Mobile System as a Basis for a Platform Concept for Special Purpose Vehicles for Disabled Persons, *58-th Ilmenau Scientific Colloquium — Shaping the Future by Engineering*, Ilmenau, 2014, 10 p., available at: http://www.db-thueringen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-30822/ilm1-2014iwk-041.pdf
5. **Hendzel Z., Rykala L.** Modeling of Dynamics of a Wheeled Mobile Robot with Mecanum Wheels with the Use of Lagrange Equations of the Second Kind, *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*, 2017, vol. 22, no. 1, pp. 81—99, DOI: 10.1515/ijame-2017-0005
6. **Zobova A. A., Tatarinov Ya. V.** The dynamics of an omnimobile vehicle, *J. Appl. Math. Mech*., 2009, vol. 73, no. 1, pp. 13—22 (in Russian).
7. **Kilin A. A., Bobykin A. D.** *Upravlenie telejkoi s omnikoliosami na ploskosti* (Control of a vehile with omniwheels on a plane), *Rus. J. Nonlin. Dyn*., 2014, vol. 10, no. 4, pp. 473—481 (in Russian)
8. **Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.** *Telejka s omnikoliosami na ploskosti i sfere* (An omni-wheel vehile on a plane and a sphere), *Rus. J. Nonlin. Dyn*., 2011, vol. 7, no. 4 (Mobile Robots), pp. 785—801 (in Russian)
9. **Martynenko Yu. G., Formal'skii A. M.** On the Motion of a Mobile Robot with Roller-Carrying Wheels, *Journal of Computer and Systems Sciences*, 2007, vol. 46, no. 6, pp. 976—983.
10. **Mavkeev A. P.** *Teoreticheskaya mehanica* (Theoretical Mechanics), Moscow, Izhevsk, Regular and Chaotic Dynamics, 2007, 592 p. (in Russian)
11. **Golubev Yu. F.** Funktsiya Appelya v dinamike sistem tviordyh tel (Appel's Function in the Dynamics of Rigid Body Systems), *KIAM Peprint*, 2014, no. 58, pp. 1—16. (in Russian), URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-58
12. **Adamov B. I.** *Primenenie apparata negolonomnyh svyazei v zadachah identifikatsii parametrov i upravleniya dvijeniem* (Application of non-holonomic constraints technique in parametric identification and motion control problems), Ph. D. Dissertation, Moscow, Lomonosov Moscow State University, 2016, 206 p. (in Russian)
13. **Slotine J. J. E., Li W.** Applied Nonlinear Control. Prentice-Hall, 1991.
14. **Ioannou P. A., Sun J.** Robust Adaptive Control, Courier Corporation, 2012.
15. **Stepanov O. A.** *Osnovy teorii otsenivania s prilojeniyami k zadacham obrabotki navigatsionnoi informatsii. Chast 2. Vvedenie v teoriyu filtratsii* (Fundamentals of Estimation Theory with Applications to Problems of Navigation Information Processing. Part 2. Introduction to Filtration Theory), Saint Petersburg, Concern Central Scientific and Research Institute Elektropribor, 2012, 417 p. (in Russian)

УДК 681.5.015 DOI: 10.17587/mau.19.259-265

В. М. Иванов, канд. техн. наук, доц., v.ivanov@ulstu.ru,
Ульяновский государственный технический университет

Беспоисковая система адаптивного управления электроприводом для механизмов с переменным моментом инерции

Рассматривается беспоисковая самонастраивающаяся система управления электроприводом для механизмов с переменным моментом инерции. Для обеспечения инвариантности динамических характеристик к вариациям параметров объекта регулирования в систему вводится наблюдатель в виде адаптивной модели исполнительного электродвигателя. Проводится синтез контуров идентификатора и сопоставление структур адаптивной модели. Даны рекомендации по выбору регуляторов основных контуров системы подчиненного регулирования. Определены условия выбора значений идентифицируемых параметров объекта. Приведены результаты моделирования самонастраивающейся системы при вариации моментов нагрузки и инерции.

Ключевые слова: *электропривод, переменный момент инерции, адаптивная модель, функция Ляпунова, форсирование динамических процессов, условия идентификации*

Введение

В электромеханических системах с многокоординатным электроприводом технически оптимальные процессы возможны лишь при соответствии фактических параметров объекта управления их расчетным значениям. В реальных системах параметры объекта могут изменяться в значительных пределах и иметь явно выраженное влияние на один из исполнительных электроприводов. Одним из наиболее существенных параметров является переменный момент инерции $J(t)$, который при фиксированных настройках регулятора скорости определяет динамику и качественные показатели системы регулирования. Неопределенность данного параметра существенным образом влияет на динамическую точность системы и отработку возмущений со стороны нагрузки.

Одно из направлений развития систем регулируемого электропривода связно с использованием методов адаптивного управления. Построение таких систем основано на совмещении функций идентификации текущих параметров объекта и перестройки параметров регуляторов [1]. Необходимость идентификационных подходов особенно очевидна в области частотно-регулируемых электроприводов, где использование моделей (наблюдателей) позволяет получить косвенные оценки недоступных параметров и переменных. Использование бессенсорных подсистем и рекуррентных процедур позволяет более гибко проводить оценку наблюдаемых и вычисляемых координат, а также прогнозировать режим работы привода [2—5]. Однако на полученные оценки момента электродвигателя и его инерции существенно влияет момент нагрузки, характер изменения которого в общем случае непредсказуем. Таким образом, возникает задача определения структуры идентификатора, учитывающего режимы работы привода, связанные с изменением нагрузки и момента инерции.

Известны различные методы, позволяющие осуществить оптимизацию и настройку регуляторов при неизвестных параметрах объекта. В большинстве случаев это достигается за счет пробных воздействий или прогонов, что в ряде случаев недопустимо или неприемлемо по условиям функционирования конкретного механизма. С учетом этого наиболее целесообразно использовать адаптивные модели, которые в процессе функционирования системы позволяют одновременно с определением параметров объекта осуществлять перестройку регуляторов системы управления.

Общие рекомендации по синтезу самонастраивающихся систем даются в ряде работ. Из них в классе беспоисковых самонастраивающихся систем можно выделить подход [1], основанный на редуцированных наблюдателях. Формально этот подход соответствует переходу к вектору наблюдателя пониженного порядка. При структурном представлении системы это связано с разделением задач синтеза основного контура управления и синтеза контура адаптации. Различают эталонную и адаптивную модели, используемые в самонастраивающихся системах [1, 6]. Заметим, что если учитывать задачи идентификации объекта, то настраиваемая модель в отличие от эталонной модели имеет существенные преимущества, так как позволяет косвенным образом оценивать внутренние и внешние возмущения объекта и варьировать настройки регулятора при их изменении.

Необходимо отметить, что идентификация момента инерции возможна лишь в динамических режимах. Это приводит к временным ограничениям определения параметра для всех известных методов идентификации, в том числе использующих подстраиваемую модель. С учетом этого в данной статье представлены анализ наиболее приемлемых вариантов контуров самонастройки для электропривода с подчиненным регулированием параметров, а также поиск дополнительных мер, позволяющих обеспечить приемлемые качественные показатели не только в динамических, но и в статических режимах работы.

Анализ и синтез контуров адаптивной модели

В качестве исходных уравнений для исследования электропривода с переменным моментом инерции примем уравнения двигателя постоянного тока:

$$U = R_я I + L_я \frac{dI}{dt} + E; \tag{1}$$

$$M_д = M - M_с = J(t)\frac{d\omega}{dt}; \tag{2}$$

$$M = c\Phi I;\ E = c\Phi\omega, \tag{3}$$

где U — напряжение на якоре двигателя; $I_я$ — ток якорной цепи; $L_я$, $R_я$ — индуктивность и сопротивление якорной цепи; $M_д$ — динамический момент; M — момент двигателя; $M_с$ — момент нагрузки; $J(t)$ — переменный момент инерции; ω — угловая частота; E — противоЭДС; $L_я$, $R_я$ — индуктивность и сопротивление якорной цепи; c — конструктивная постоянная двигателя; Φ — магнитный поток.

Уравнение, характеризующее динамику двигателя при учете переменного момента инерции, имеет вид

$$T_м(t)T_я\ddot{\omega} + T_м(t)\dot{\omega} + \omega = k_д U - k_м(T_я\dot{M}_с + M_с), \tag{4}$$

где $T_м(t) = J(t)R_я/(c\Phi)^2$ — электромеханическая постоянная времени двигателя; $T_я = L_я/R_я$ — электромагнитная постоянная времени двигателя; $k_д = 1/(c\Phi)$ — коэффициент передачи двигателя; $k_м = R_я/(c\Phi)^2$ — коэффициент передачи по моменту нагрузки.

С точки зрения динамики электропривода управляющее и возмущающее воздействия равноценны друг другу. Для упрощения синтеза адаптивной модели предположим, что момент нагрузки доступен для измерения, тогда с учетом контура самонастройки уравнения объекта и модели можно записать в следующем виде:

$$a_2\ddot{\omega} + a_1\dot{\omega} + a_0(t)\omega = a_0(t)f(U, M_с); \tag{5}$$

$$b_2\ddot{\omega}_м + b_1\dot{\omega}_м + b_0(t)\omega_м = b_0(t)f(U, M_{см}), \tag{6}$$

где $f(U, M_с) = k_д U - k_м(T_я\dot{M}_с + M_с)$; $f(U,\ M_{см}) = k_д U - k_м(T_я\dot{M}_{см} + M_{см})$; $M_с = M_{см}$ — моменты нагрузки двигателя и модели; $a_2 = b_2 = 1$; $a_1 = b_2 = 1/T_я$; $a_0(t) = 1/T_м(t)T_я$; $b_0 = 1/T_{мм}(t)T_я$; $k_{дм} = k_д$; $k_{мм} = k_м$ — коэффициенты объекта и модели.

Представим переменные коэффициенты в виде двух составляющих:

$$a_0(t) = a_0 + \Delta a_0(t);\ b_0(t) = b_0 + \Delta b_0(t),$$

где a_0, b_0 — постоянные величины; $\Delta a_0(t)$, $\Delta b_0(t)$ — приращения коэффициентов.

На основании соотношений (5) и (6) запишем уравнение рассогласования между выходом объекта и модели:

$$\begin{gathered}\ddot{\varepsilon} + b_1\dot{\varepsilon} + b_0\varepsilon = \\ = \Delta b_0(t)\omega_м - \Delta a_0(t)\omega + (\Delta b_0(t) - \Delta a_0(t)f(U, M_с),\end{gathered} \tag{7}$$

где $\varepsilon = \omega - \omega_м$.

Предположим, что коэффициент объекта $\Delta a_0(t)$ изменяется квазистационарно на интервалах времени T_k настройки модели. Тогда, с учетом равенства начальных значений координат объекта и модели, уравнение (7) можно записать следующим образом:

$$\ddot{\varepsilon} + b_1\dot{\varepsilon} + b_0\varepsilon = \gamma_0(\omega_м + f(U, M)), \tag{8}$$

где $\gamma_0 = \Delta b_0(t) - \Delta a_0[T_k]$.

Задачу синтеза регулятора будем решать на основе второго метода Ляпунова. Для этого введем функцию Ляпунова в виде квадратичной положительно определенной формы от координатных и параметрических ошибок:

$$V = p_1\dot{\varepsilon}^2 + p_0\varepsilon^2 + \lambda_0\gamma_0^2, \tag{9}$$

где p_0, p_1, λ_0 — положительные величины.

Полная производная функции Ляпунова в соответствии с выражением (9) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = 2p_1\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} + 2p_0\varepsilon\dot{\varepsilon} + 2\lambda_0\gamma_0\dot{\gamma}. \qquad (10)$$

Определяя из уравнения (8) вторую производную от ошибки и подставляя ее в формулу (10), получим

$$\frac{dV}{dt} = 2p_1\gamma_0\dot{\varepsilon}(\omega_{\text{м}} + f(U, M_{\text{с}})) -$$
$$- 2p_1 b_1\dot{\varepsilon}^2 - 2p_1 b_0\varepsilon\dot{\varepsilon} + 2p_0\varepsilon\dot{\varepsilon} + 2\lambda_0\gamma_0\dot{\gamma}_0 .$$

Принимаем $p_1 = 1$, $p_0 = b_0/2$, тогда в силу определения устойчивости по Ляпунову для достижения устойчивости процесса настройки производная должна быть знакоопределенной и иметь знак, противоположный V, т. е.

$$2p_1\gamma_0\dot{\varepsilon}(\omega_{\text{м}} + f(U, M_c)) + 2\lambda_0\gamma_0\dot{\gamma}_0 \leqslant 0$$

или

$$\dot{\gamma}_0 = -\frac{1}{\lambda}\dot{\varepsilon}(\omega_{\text{м}} + f(U, M_{\text{с}}).$$

Учитывая квазистационарный характер изменения коэффициента $a_0(T_k)$, получим уравнение, характеризующее закон изменения настраиваемого параметра:

$$\Delta\dot{b}_0 = -\frac{1}{\lambda}\dot{\varepsilon}(\omega_{\text{м}} + k_{\text{д}}U - k_{\text{м}}(T_{\text{я}}\dot{M}_{\text{с}} + M_{\text{с}})).$$

Один из возможных вариантов структуры подстраиваемой модели двигателя, реализованной в соответствии с методом понижения порядка производной, представлен на рис. 1.

Подстраиваемые коэффициенты показаны обобщенно без их конкретной реализации. Момент нагрузки, как правило, не поддается непосредственному измерению. С учетом этого использован дополнительный контур формирования статического момента по разности момента, развиваемого двигателем, и динамического момента модели. Основной настроечный параметр $\Delta b_0(t)$ формируется с помощью интегратора, а скорректированный $\Delta b_{0\text{ск}}(t)$ — путем устранения составляющей $T_{\text{я}}$.

Используемый формализованный подход позволяет определить в общих чертах структуру подстраиваемой модели.

Заметим, что реальные координаты двигателя в представленной структуре непосредственно не определены, а для формирования устойчивых переходных процессов необходимо дифференцирование сигналов. В реальных системах опера-

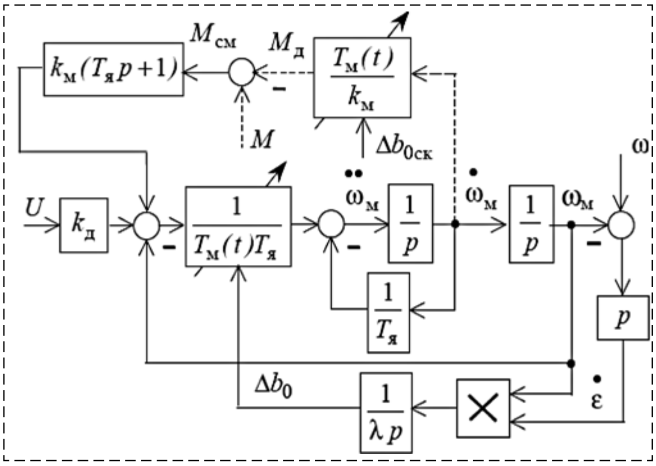


Рис. 1. Структурная схема подстраиваемой модели, реализованной в соответствии с методом понижения порядка производной

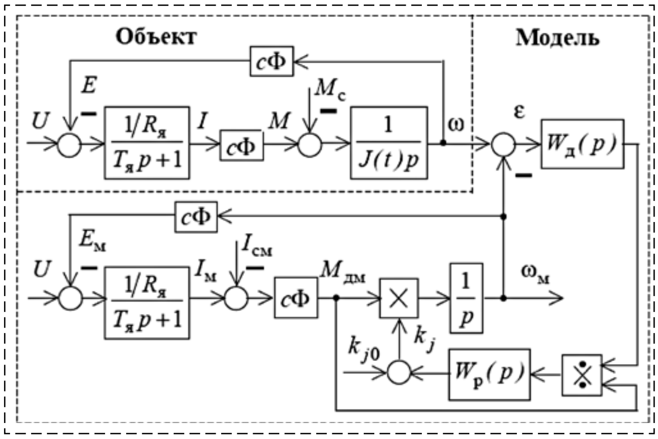


Рис. 2. Структурные схемы объекта и модели

ция взятия производной нереализуема, и, следовательно, необходимо искать более приемлемые решения. С этой целью рассмотрим структурную схему двигателя и его модель с учетом контуров самонастройки.

Структурная схема двигателя и модели, соответствующей описанию дифференциальными уравнениями (1)—(3), показана на рис. 2.

Здесь в явном виде представлена якорная цепь

$$W_{\text{я}}(p) = \frac{1/R_{\text{я}}}{T_{\text{я}}p + 1}$$

и механическая часть привода

$$W(p, t) = \frac{1}{J(t)p},$$

где $T_{\text{я}} = \frac{L_{\text{я}}}{R_{\text{я}}}$ — электромагнитная постоянная времени.

В качестве одного из основных условий близости поведения объекта и модели примем равенство их динамических моментов $M_{\text{д}} = M_{\text{дм}}$.

Примем также во внимание, что реализация данного условия возможна, если настройка переменного коэффициента $k_{j\text{м}}(t) = 1/J_\text{м}(t)$ будет выполняться с быстродействием большим, чем быстродействие основного контура модели и объекта. С учетом этого уравнения механики могут быть записаны следующим образом:

$$\dot{\omega} = k_j(t)M_\text{д};\ \dot{\omega}_\text{м} = k_{j\text{м}}(t)M_\text{дм},$$

а уравнение рассогласования будет иметь вид

$$\dot{\varepsilon} = \gamma M_\text{дм}, \qquad (11)$$

где $\gamma = \Delta k_{j\text{м}}(t) - \Delta k_j(T_k)$ — разность между приращениями коэффициентов.

При выборе функции Ляпунова в виде

$$V = p\varepsilon^2 + \lambda\gamma^2$$

полная производная будет иметь вид

$$dV/dt = 2p\varepsilon\dot{\varepsilon} + 2\lambda\gamma\dot{\gamma}.$$

После подстановки выражения (11) получим

$$dV/dt = 2p\varepsilon\gamma M_\text{дм} + 2\lambda\gamma\dot{\gamma},$$

откуда с учетом знака производной и $p_0 = 1$

$$\dot{\gamma} = -\frac{1}{\lambda}\varepsilon M_\text{дм}$$

или

$$\Delta\dot{k}_{j\text{м}} = -\frac{1}{\lambda}\varepsilon M_\text{дм}.$$

Для восстановления γ используется звено перемножения и интегрирующий регулятор

$$W_\text{и}(p) = \frac{1}{\lambda p}.$$

Квадратичная форма функций Ляпунова задает знакоопределенность переходных процессов, но не гарантирует их качественные показатели [7]. В рассматриваемом случае контур самонастройки будет иметь комплексно сопряженные корни и, следовательно, незатухающие переходные процессы.

Для обеспечения устойчивости и оптимизации переходных процессов контура дополнительно введем реальное дифференцирующее звено

$$W_\text{дф}(p) = \frac{T_1 p}{T_2 p + 1}$$

и проведем замену закона изменения настраиваемого параметра

$$\Delta\dot{k}_j = -\frac{\varepsilon}{\mu M_\text{дм}},$$

где $\mu = \lambda\tau = 2\tau T_2$ — выбирается из условия настройки контура на модульный оптимум; $\tau = |T_1|$ — безразмерный нормирующий коэффициент.

При анализе переходных процессов в контуре самонастройки можно использовать закон коммутативности для входов множительного звена и представить его в виде переменного коэффициента $k(M_\text{дм})$. Обратное звено (делитель) тогда будет представлено коэффициентом $1/k(M_\text{дм})$. С учетом этого уравнение настройки регулятора можно записать в виде

$$k_j = p\omega\frac{1/k(M_\text{дм})}{2T_2 p(T_2 p + 1) + 1}.$$

Отсюда следует, что изменение коэффициента будет происходить лишь на участках ускорения или замедления скорости, а на участках установившегося движения его значение равно нулю. Необходимо отметить, что это соответствует условиям работы реального двигателя, когда момент двигателя уравновешивает момент нагрузки.

Разработка структуры системы управления

Предварительные исследования электропривода, где модель использовалась только в качестве идентификатора, приведены на рис. 3.

Анализ процессов позволяет сделать следующие выводы: изменения момента инерции и момента нагрузки оказывают равноценное влияние на характер изменения скорости привода; использование дополнительных контуров типа алгебраической петли для определения момента нагрузки неэффективно; компенсация измене-

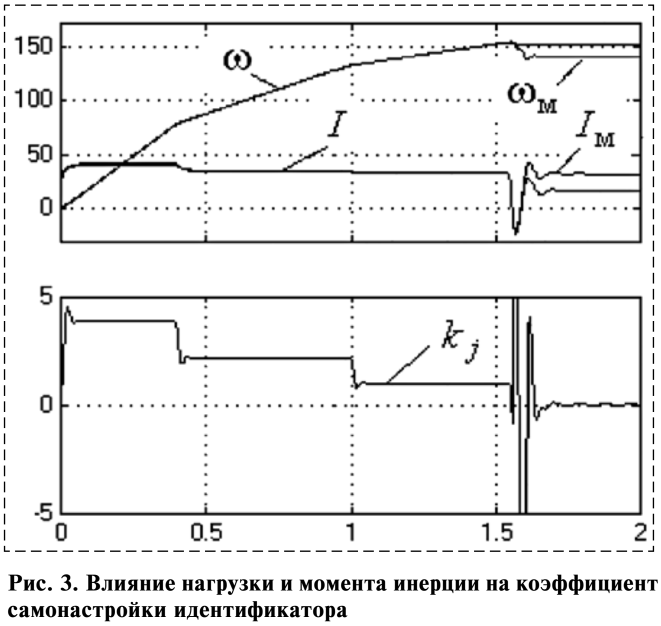


Рис. 3. Влияние нагрузки и момента инерции на коэффициент самонастройки идентификатора

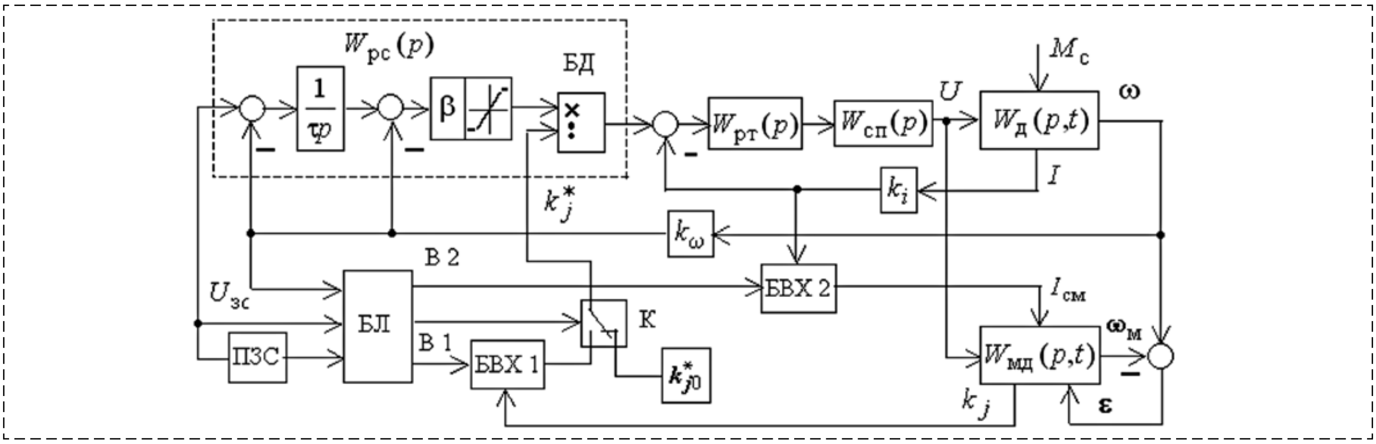


Рис. 4. Структурная схема самонастраивающейся системы управления электроприводом:
БД — блок деления; БВХ — блок выборки хранения; БЛ — блок логической обработки; ПЗС — программный задатчик скорости

ний момента инерции и момента нагрузки может осуществляться за счет коэффициента форсировки динамических процессов.

С учетом этого разработана структурная схема системы подчиненного регулирования скорости двигателя (рис. 4). Выбор регуляторов каждого из трех контуров осуществляется из условия настройки на модульный оптимум.

Передаточная функция регулятора тока имеет вид

$$W(p) = \frac{R_{\text{я}}(T_{\text{я}}p+1)}{k_\mu k_i 2T_{\Sigma I}p},$$

где k_μ, k_i — коэффициенты передачи усилителя мощности и датчика тока; $T_{\Sigma I} \approx T_\mu$ — сумма малых постоянных времени контура тока; T_μ — постоянная времени усилителя мощности.

Передаточная функция регулятора скорости первого контура имеет вид

$$W_\omega^1(p,t) = \beta = \frac{k_i}{c\Phi k_\omega 2T_{\Sigma_\omega^1}} k(J(t)),$$

где $T_{\Sigma_\omega^1} = 2T_{\Sigma I} = 2T_\mu$ — сумма малых постоянных времени первого контура скорости.

Токоограничение контура тока реализуется за счет введения звена насыщения на выходе регулятора, а форсировка тока — блоком деления (БД), коэффициент передачи которого $k(J(t)) \equiv J(t)$.

Передаточная функция регулятора скорости второго контура имеет вид

$$W_\omega^2(p) = \frac{1}{\tau p} = \frac{1}{2T_{\Sigma_\omega^2}p},$$

где $T_{\Sigma_\omega^2} = 2T_{\Sigma_\omega^1} = 4T_\mu$ — сумма малых постоянных времени второго контура скорости.

Заметим, что со стороны нагрузки передаточная функция двухконтурного регулятора скорости соответствует пропорционально-интегральному регулятору

$$W(p) = \beta\frac{\tau p+1}{\tau p},$$

а со стороны управляющего воздействия условия настройки контура скорости соответствуют симметричному оптимуму.

С учетом предварительных исследований структура системы управления дополнена блоком обработки входной информации, с помощью которого определяются участки движения, соответствующие участкам разгона, торможения и движения с постоянной скоростью. Для этих целей используется блок логической обработки (БЛ), анализирующий приращения скорости двигателя и условия выхода на заданные значения. На участках разгона и торможения, которые формируются программным задатчиком скорости (ПЗС), изменения момента инерции и момента нагрузки двигателя оказывают одинаковое влияние на динамический момент. Учитывая это, на данных интервалах с помощью БЛ формируют сигналы выборки (В 1), по которым проводят фиксацию текущих значений настроечного сигнала k_j в блоке выборки хранения (БВХ 1). На начальном участке движения ввиду неопределенности пуск осуществляется с фиксированным значением управляющего параметра $k_{j0}^* = 1/J_0$. Переключение на сигнал k_j^* с выхода БВХ 1 осуществляется ключом (К) с задержкой, формируемой БЛ в момент пуска привода. Время задержки определяется переходными процессами контура самонастройки.

На участках движения с постоянной скоростью БЛ формирует сигналы выборки (В 2), по которым фиксируется ток двигателя I в блоке БВХ 2. Значение тока с выхода блока $I_{\text{см}}$ определяет эквивалентный момент нагрузки и поступает на вход модели двигателя.

Результаты моделирования

Как показали исследования, основной контроль изменения скорости целесообразно осуществлять со стороны программного задатчика скорости, регламентирующего темп ее изменения. В этом случае реакция системы управления не зависит от провалов скорости, связанных с запаздыванием отработки линейными регуляторами скачкообразных возмущений со стороны нагрузки и изменения момента инерции привода (рис. 5).

На участке разгона выделены три промежутка, соответствующие пуску без нагрузки с неопределенным моментом инерции и скачку приведенного момента инерции, скачку момента нагрузки. На каждом из этих промежутков происходит изменение коэффициента передачи регулятора скорости в функции сигнала k_i^* с выхода БВХ 1. При этом за счет блока деления БД происходит рост токоограничения и форсирование моментов двигателя и модели. Фиксация момента нагрузки (тока) проводится с помощью БВХ 2 на участках движения с установившейся скоростью. На данных участках момент двигателя уравновешивает момент нагрузки $M = M_c$. Это позволяет обеспечить полное соответствие поведения объекта и модели по динамическому моменту и, как следствие, более близкое приближение настроечного параметра его расчетному значению. На первом участке торможения показана реакция системы на вторичное изменение момента инерции.

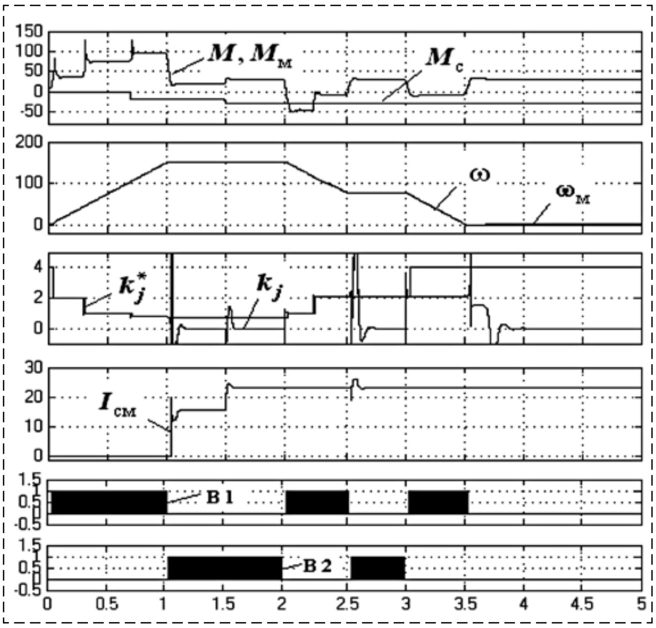


Рис. 5. Переходные процессы адаптивной системы регулирования при скачках нагрузки и момента инерции

Заключение

Таким образом, специфические особенности настраиваемой модели и блока определения режимов работы придают основному контуру системы управления электроприводом новые качества, свойственные как линейным, так и релейным системам, дают возможность форсирования динамического момента двигателя. Это обусловлено характером изменения возмущающих воздействий со стороны как нагрузки, так и приведенного момента инерции механизма. Для компенсации данных возмущений система должна иметь запас по мощности и перегрузочной способности двигателя. Алгоритмы работы задатчика скорости и блока логики практически уже заложены в программное обеспечение систем числового программного управления (ЧПУ) и могут использоваться для расширения функций ЧПУ в части реализации адаптивных систем управления приводами металлорежущих станков и роботов.

Список литературы

1. **Борцов Ю. А., Поляхов Н. Д., Путов В. В.** Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 216 с.

2. **Yujie Guo, Lipei Huang, Yang Qiu, Masaharu Muramatsu.** Inertia identification and auto-tuning of induction motor using MRAS // Power Electronics and Motion Control Conference. Proc. IPEMC 2000. The Third International (15—18/08/2000). 2000. vol. 2. P. 1006—1011.

3. **Andreescu G. D., Rabinovici R.** Torque-speed adaptive observer and inertia identification without current transducers for control of electric drives // International conference on electrical machines, Espoo, FINLANDE (28/08/2000). 2000. P. 1428—1432.

4. **Yuden Huang, Guohui.** Inertia identification based on adaptive interconnected Observer of Permanent Magnet Synchronous Motor // Iternational Journal of Research in Engineering and Science (IJRES). September 2015. Iss. 9. P. 35—40.

5. **Патент № 2317632 (РФ).** Система векторного управления скоростью асинхронного электропривода / В. М. Иванов. Опубл. Бюл. № 5, 2008.

6. **Куропаткин П. В.** Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высш. школа, 1980. 287 с.

7. **Методы** классической и современной теории автоматического управления. Т. 5. Методы современной теории автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 784 с.

The Searchless Adaptive Control System of Electric Drive for Mechanisms with the Inertia Variable Moment

V. M. Ivanov, v.ivanov@ulstu.ru,
Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 432027, Russian Federation

Corresponding author: **Ivanov Vladimir M.,** Ph. D., Associate Professor
Faculty of Power, of Ulyanovsk State Technical University,
Ulyanovsk, 432027, Russian Federation, e-mail: v.ivanov@ulstu.ru

Accepted on November 29, 2017

The electric drive control system for the mechanisms with the variable moment of inertia is considered. Uncertainty of the moment of inertia significantly influences the dynamic accuracy of the system and loading disturbance attack. In this connection it is necessary to perform in the electric drives the parametrical adjustment of regulators according to the current resulted moment of inertia to provide invariance of dynamic characteristics of the system to variations of parameters of the regulation object. To maintain invariance of dynamic characteristics to variations of parameters of the regulation object the observer in the form of adaptive model of the actuating electric motor is included in the system. There is performed the synthesis and the analysis of the most acceptable variants of self-adjustment contours as well as search of the additional measures allowing to provide acceptable quality indicators not only in dynamic, but also in static operating modes. Recommendations on the choice of regulators of the basic system contours of the subordinated regulation and the additional devices defining conditions of parameters identification and their definition are given. The researches have shown the expediency of introduction of the unit of processing the input information in the structure of a control system by means of which the sites of movement corresponding to acceleration, braking and movement with constant speed are defined. The results of modeling of the self-adjusted system with variation of the moments of loading and inertia are given. The results of development of the system of control from the self-adjusted model made it possible to give to the basic contour of a control system of the electric drive the new qualities peculiar both to linear and relay systems. The research of dynamics has shown that reaction of the system does not depend on the failures of speed connected with delay of working off by linear regulators of step disturbance from loading and change of the drive inertia moment. To compensate the given disturbances, the system should have power margin and overload capacity of the engine.

Keywords: *the self-adjusted electric drive, the variable moment of inertia, adaptive model, Lyapunov's function, speeding up of dynamic processes, conditions of identification*

For citation:

Ivanov V. M. The Searchless Adaptive Control System of Electric Drive for Mechanisms with the Inertia Variable Moment, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 4, pp. 259—265.

DOI: 10.17587/mau.19.259-264

References

1. **Borcov Ju. A., Poljahov N. D., Putov V. V.** *Elektromehanicheskie sistemy s adaptivnym i modal'nym upravleniem* (Electromechanical systems with adaptive and modal control), Leningrad, Energoatomizdat, 1984, 216 p. (in Russian).

2. **Yujie Guo, Lipei Huang, Yang Qiu, Masaharu Muramatsu.** Inertia identification and auto-tuning of induction motor using MRAS, *Power Electronics and Motion Control Conference*, Proc. IPEMC 2000, The Third International (15—18/08/2000), 2000, vol. 2, pp. 1006—1011.

3. **Andreescu G. D., Rabinovici R**. Torque-speed adaptive observer and inertia identification without current transducers for control of electric drives, *International conference on electrical machines*, Espoo, FINLANDE (28/08/2000), 2000, pp. 1428—1432.

4. **Yuden Huang, Guohui.** Inertia identification based on adaptive interconnected Observer of Permanent Magnet Synchronous Motor, *Iternational Journal of Research in Engineering and Science (IJRES),* September 2015, iss. 9, pp. 35—40.

5. **Patent** № 2317632 (RF). Sistema vektornogo upravlenija skorost'ju asinhronnogo elektroprivoda, V. M. Ivanov, Opubl. Bjul. no. 5, 2008 (in Russian).

6. **Kuropatkin P. V.** *Optimal'nye i adaptivnye sistemy* (Optimum and adaptive systems), Moscow, Vyssh. shkola, 1980, 287 p. (in Russian).

7. **Pupkov K. A., Egupov N. D.** Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija, T. 5: Metody sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravlenija (Methods of the classical and modern theory of automatic control: vol.5: Methods of the modern theory of automatic control), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. Ie. Baumana, 2004, 784 p. (in Russian).

УДК 004.942 DOI: 10.17587/mau.19.266-272

Ю. И. Буряк, канд. техн. наук, нач. подразделения, buryak@gosniias.ru,
А. А. Скрынников, канд. техн. наук, нач. сектора, a1260@mail.ru,
Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, Москва

Алгоритмы расчета зоны покрытия антенны радиочастотного ридера при определении местоположения высокоскоростного объекта[1]

Предложен подход к решению задачи определения местоположения высокоскоростного объекта на основе использования комплекса средств радиочастотной идентификации, в котором ряд пассивных радиочастотных меток размещается по пути следования объекта, а радиочастотный ридер (считывающее устройство) устанавливается на самом объекте. Разработан алгоритм расчета такой зоны покрытия антенны ридера, которая в заданном диапазоне скоростей движения объекта гарантирует требуемое значение вероятности формирования ответного импульса от радиочастотной метки. Проведена оценка вероятности формирования ответного импульса с использованием математического аппарата статистического анализа. Приведены результаты расчетов зоны покрытия антенны в диапазоне допустимых скоростей движения объекта, а также сформированы рекомендации по выбору оптимального варианта, доказывающие применимость предложенного подхода.

Ключевые слова: *радиочастотная идентификация, высокоскоростные транспортные средства, точность определения местоположения*

Введение

Прослеживание состояния сложной технической продукции в процессах жизненного цикла сегодня является одной из самых актуальных задач повышения ее качественных характеристик (например, путем выявления контрафактной, фальсифицированной продукции, неаутентичных компонентов и пр.) и безопасности использования (например, движения). Наиболее эффективный метод получения элементов, характеризующих техническое состояние продукции, основанный на применении современных средств идентификации материальных объектов и их характеристик, в частности радиочастотной идентификации (ридеры, радиочастотные метки (РЧМ)), находит широкое применение в самых различных областях: в производственных процессах, логистике и на транспорте [1—5].

В основу метода положена стандартная организационно-технологическая схема применения средств радиочастотной идентификации, предполагающая установку радиочастотных ридеров на штатных позициях производственной линии, а РЧМ — непосредственно на объектах. Таким образом, при перемещении маркированного объекта по траектории сложно-разветвленного процесса осуществляется определение как его технических характеристик, так и его местоположения.

Известная система автоматической идентификации (САИ) состояния подвижного состава "Пальма" [6] включает кодовый бортовой датчик и считывающую аппаратуру. Датчик хранит полную информацию о вагоне или локомотиве в закодированном виде: идентификационный номер, направление следования, дату последнего деповского ремонта, пробег, число единиц в составе. Объем памяти датчика — 128 бит. Аппаратура в масштабе реального времени регистрирует в АСУ железнодорожным транспортом факты прохождения оборудованного специальными метками подвижного состава через пикеты, установленные вдоль железнодорожных путей и оборудованные специальной аппаратурой считывания. Эффективность работы новой системы достигается за счет того, что человеческий фактор почти не задействован — информация передается автоматически из разных пунктов нахождения поезда. В рамках пилотного проекта финское транспортное агентство Liikennevirasto и компания Vilant [7] установили четыре ридера Vilant Railroad Reader в нескольких местах вдоль железнодорожных путей в районе городов Оулу и Мантсала. Ридеры были смонтированы на мачтах, размещенных на расстоянии приблизительно 2,5 м (8,2 фута) от железнодорожного

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 15-08-04342а.

пути, чтобы они могли считывать уникальные идентификационные номера, закодированные в каждой РЧМ Ironside, прикрепленной к стенкам кузова проходящих вагонов. С помощью разработанного Vilant программного обеспечения Train Analyzer, хранящегося на резидентном сервере компании, каждый уникальный идентификационный номер увязывается с серийным номером вагона, а также с информацией об операторе, которому принадлежит вагон, и другими подробными данными. Посредством соотнесения идентификационного номера с временами считывания РЧМ предыдущим и текущим ридерами программный комплекс Vilant Train Analyzer рассчитывает скорость движения поездов. Таким образом, агентство может решать любые проблемы путем контакта с оператором.

Присущие данной схеме недостатки, прежде всего, необходимость обеспечения электропитания, средств передачи данных на перемещаемый объект, защиты от случайных/намеренных повреждений и восстановления работоспособности в случае его нарушения существенно ограничивают применимость такой схемы при построении больших территориально-распределенных транспортных систем, в частности железнодорожных.

В связи с этим рядом исследователей [8—10] предлагается модифицированная схема, включающая установку как минимум двух пассивных РЧМ на пути следования железнодорожного транспортного средства, а ридера — на самом транспортном средстве. При считывании РЧМ ридером определяется местоположение средства с последующей выработкой необходимых управленческих команд (например, торможение). В ряде случаев для повышения точности управления и безопасности движения радиочастотный ридер объединяется с дополнительными датчиками, например, измерения скорости перемещения, приема навигационных сигналов со спутников и пр.

В условиях наблюдаемых тенденций [11] по проработке концептов поездов, движущихся на скоростных и высокоскоростных магистралях и в замкнутом пространстве (туннелях), традиционное использование спутниковых радионавигационных технологий [12] становится проблематичным.

Поэтому решение задачи использования технологий радиочастотной идентификации для определения местоположения высокоскоростного поезда является актуальным.

Особенности применения технологии радиочастотной идентификации для определения местоположения высокоскоростного поезда

Технология радиочастотной идентификации предполагает следующую схему взаимодействия ридера и РЧМ: антенна ридера излучает в окружающее пространство электромагнитный сигнал определенной мощности на установленной частоте в течение некоторого диапазона времени. РЧМ воспринимает энергию излучения, проводит необходимые преобразования и выдает ответный сигнал, который принимает антенна ридера. По результатам его обработки ридер идентифицирует РЧМ и сохраняет в своей памяти записанную в ней информацию. Если ридер перемещается относительно РЧМ, может возникнуть ситуация, при которой отсутствует возможность идентификации РЧМ, а именно: время нахождения РЧМ в поле действия ридера не позволяет собрать достаточное количество энергии его излучения для формирования ответного сигнала, и РЧМ формирует ответный сигнал уже после выхода из поля действия ридера.

В силу того что время попадания РЧМ в поле действия антенны ридера носит случайный характер, а время ее нахождения переменно, зона покрытия ридера должна иметь размер, гарантирующий формирование ответного импульса от РЧМ во всем диапазоне скоростей движения объекта и с заданным значением вероятности.

Таким образом, формулируется задача определения размера зоны покрытия ридера, гарантирующего формирование ответного импульса от РЧМ с заданным значением вероятности во всем диапазоне скоростей движения объекта.

Для решения данной задачи необходимо реализовать следующую последовательность действий:

- сформировать различные варианты нахождения РЧМ в поле действия антенны ридера;
- рассчитать вероятность формирования отклика РЧМ в интервале скоростей движения объекта.

Алгоритм расчета зоны покрытия антенны радиочастотного ридера, гарантирующей формирование ответного импульса от РЧМ с заданным значением вероятности

Рассмотрим объект, движущийся со скоростью v. На объекте установлена антенна, образующая на поверхности Земли зону покрытия длиной D. По пути следования установлена РЧМ (рис. 1).

Для обнаружения метки антенна периодически в течение времени t_r излучает серию из n импульсов, а затем в течение t_p ($t_p < t_r$) ожидает отклик РЧМ, после чего цикл длительностью $t_c = t_r + t_p$ повторяется (рис. 2).

РЧМ при попадании в зону покрытия антенны принимает зондирующие импульсы. Число принятых импульсов зависит от времени нахождения РЧМ в зоне покрытия, которое определяется скоростью v и длиной D зоны покрытия.

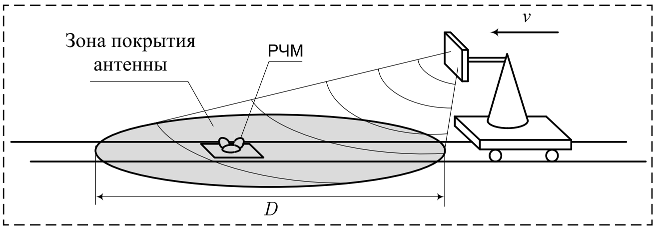


Рис. 1

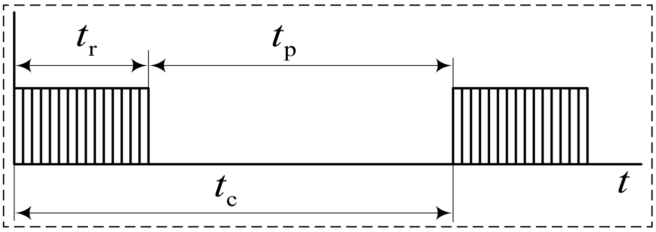


Рис. 2

При этом в силу влияния сложного переотражения радиоволн, изменения ориентации РЧМ при движении объекта каждый из импульсов серии принимается РЧМ с некоторой вероятностью. После приема зондирующих импульсов РЧМ формирует ответный импульс.

Время τ, в течение которого объект проходит путь, равный длине зоны покрытия, находится из соотношения

$$\tau = D/v. \tag{1}$$

Совместим начало временного интервала τ с моментом T_0 попадания РЧМ в зону покрытия антенны. Поскольку зондирование проводится с постоянной длительностью цикла t_c независимо от движения объекта, то момент времени T_0 будет величиной случайной, распределенной равномерно в интервале от 0 до t_c (рис. 3). Функция распределения случайной величины T_0 имеет вид

$$F_0(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t_0 < 0; \\ t_0/t_c & \text{при } t_0 \in (0, t_c); \\ 1 & \text{при } t_0 > t_c. \end{cases}$$

Чувствительность РЧМ определяется экспериментально. Так как длина перекрытия T_c временных интервалов t_r и τ будет случайной величиной, изменяющейся в пределах от 0 до t_r, то чувствительность представляется зависимостью вероятности появления отклика от длины перекрытия T_c.

Отклик — бинарная случайная величина Y, принимающая значения 0 и 1:

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{при отсутствии отклика от РЧМ;} \\ 1 & \text{при наличии отклика от РЧМ.} \end{cases}$$

Характеристика чувствительности представляется функцией $P(Y = 1) = F(\beta^{\mathrm{T}} t_c)$, где $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ — вектор параметров. Наиболее часто используют функцию стандартного нормального распределения, в этом случае модель принято называть пробит моделью, и функцию логистического распределения, тогда модель принято называть логит моделью [13].

В случае, когда скорость движения объекта относительно небольшая, интервал τ может накрыть (полностью или частично) несколько периодов зондирования, тогда вероятность получения отклика от РЧМ будет определяться как вероятность получения отклика от хотя бы одной серии зондирующих импульсов, а вероятность получения отклика от конкретной серии определяется по зависимости $P(Y = 1)$. Например, если интервал τ накрывает две серии зондирующих импульсов с интервалами перекрытия $T_c^{(1)}$ и $T_c^{(2)}$ соответственно (рис. 4), то вероятность получения отклика от первой серии равна $p_1 = P(T_c^{(1)})$, а от второй — $p_2 = P(T_c^{(2)})$. Тогда вероятность получения хотя бы одного отклика будет равна $p_s = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)$.

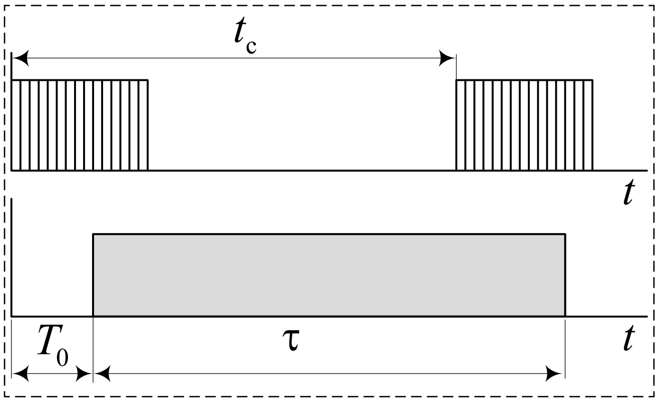


Рис. 3

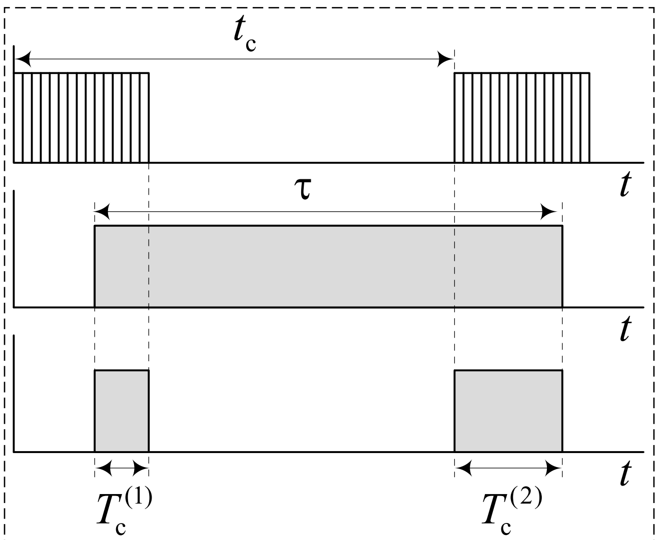


Рис. 4

При увеличении скорости v уменьшается длительность интервала τ. При $\tau \leqslant t_р$ перекрытой может быть не более одной серии зондирующих импульсов. Поэтому с увеличением скорости снижается вероятность формирования РЧМ ответного импульса.

В связи с этим возникает задача обоснования требуемой длины покрытия D, при которой в заданном диапазоне скоростей движения $v < v_{max}$ вероятность формирования РЧМ ответного импульса не была бы меньше заданной величины.

Рассмотрим решение этой задачи при достаточно высокой скорости движения, определяемой из условия $\tau \leqslant t_с + t_r$. В этом случае возможно получение отклика не более чем от двух серий зондирующих импульсов.

Найдем закон распределения случайных величин $T_с^{(1)}$ и $T_с^{(2)}$ — длин перекрытия первой и второй серий импульсов соответственно.

Случайная величина $T_с^{(1)}$ принимает значения

$$T_с^{(1)} = \begin{cases} t_r - T_0 & \text{при } T_0 < t_r; \\ 0 & \text{при } T_0 > t_r. \end{cases}$$

Таким образом, случайная величина $T_с^{(1)}$ — смешанная. При $T_с^{(1)} = 0$ функция распределения $F(t_с^{(1)})$ имеет разрыв на величину $P(T_с^{(1)} = 0)$, а на участке $(0, t_r)$ функция распределения $F(t_с^{(1)})$ непрерывна.

Вероятность того, что ширина первого интервала перекрытия равна нулю, определяется выражением

$$P(T_с^{(1)} = 0) = P(T_0 > t_r) = \frac{t_р}{t_с}.$$

Случайные величины $T_с^{(1)}$ и $T_с^{(2)}$ — функционально связанные, так как

$$T_с^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{при } T_0 + \tau < t_с; \\ T_0 + \tau - t_с & \text{при } t_с < T_0 + \tau < t_с + t_r; \\ t_r & \text{при } T_0 + \tau > t_с + t_r. \end{cases} \quad (2)$$

Случайная величина $T_с^{(2)}$ также смешанная. Вероятности $P(T_с^{(2)} = 0)$ и $P(T_с^{(2)} = t_r)$ равны

$$P(T_с^{(2)} = 0) = 1 - \frac{\tau}{t_с} \text{ при } \tau < t_с;$$

$$P(T_с^{(2)} = t_r) = \frac{\tau - t_r}{t_с} \text{ при } \tau < t_r.$$

Расчет вероятности получения отклика РЧМ с заданным уровнем надежности в интервале движения поезда

Рассмотрим в качестве примера решение задачи при следующих условиях: t_r = 30 мс, $t_р$ = 100 мс; зависимость $P(t_с)$ вероятности получения отклика РЧМ от длины перекрытия серии импульсов имеет вид логистической функции

$$P(t_с) = \frac{1}{1 + \mathbf{e}^{-(t_с - a)/k}},$$

где a = 23,0 мс, k = 1,81 мс. Зависимость $P(t_с)$ приведена на рис. 5.

Пусть длина зоны покрытия D = 10 м. Зададимся требуемым уровнем надежности, например, при скорости движения до 125 м/с с вероятностью не ниже 0,95 частота появления хотя бы одного отклика должна быть не менее 0,9. При любом $\tau > t_r$ функция распределения $F(t_с^{(1)})$ будет иметь вид (рис. 6)

$$F(t_с^{(1)}) = \begin{cases} 0 & \text{при } t_с^{(1)} < 0; \\ 0,7 & \text{при } t_с^{(1)} = 0; \\ 0,7 + t_с^{(1)}/30 & \text{при } 0 < t_с^{(1)} \leqslant 30; \\ 1 & \text{при } t_с^{(1)} > 30. \end{cases}$$

Функция распределения $F(t_с^{(2)})$ зависит от τ (так как $T_с^{(2)}$ в соответствии с (2) зависит от τ), а время τ, в свою очередь, определяется скоростью v (см. (1)). Рис. 7 иллюстрирует зависимость поведения функции распределения $F(t_с^{(2)})$ при различных значениях скорости v.

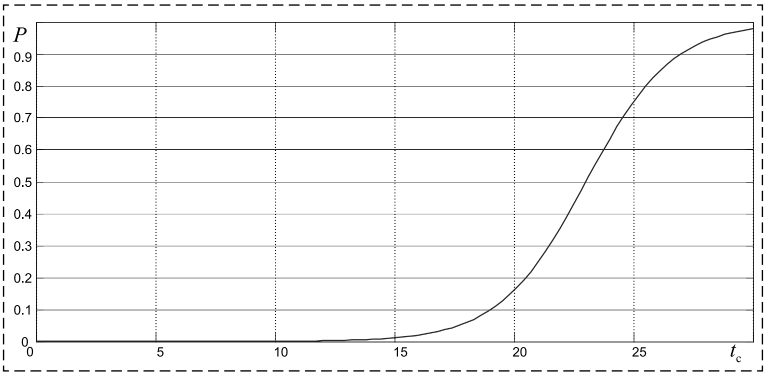


Рис. 5

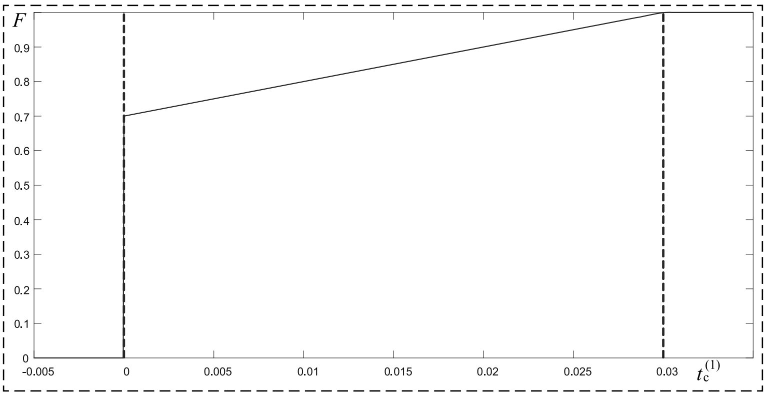


Рис. 6

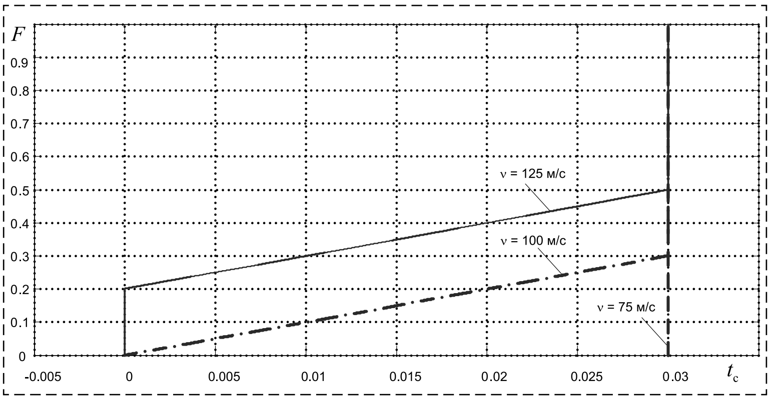


Рис. 7

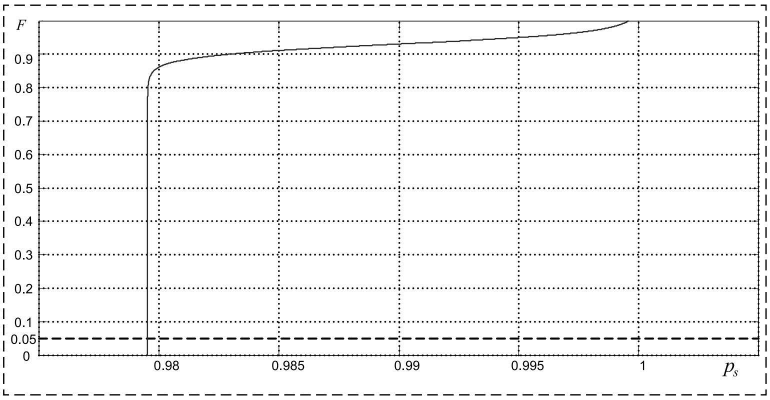


Рис. 8

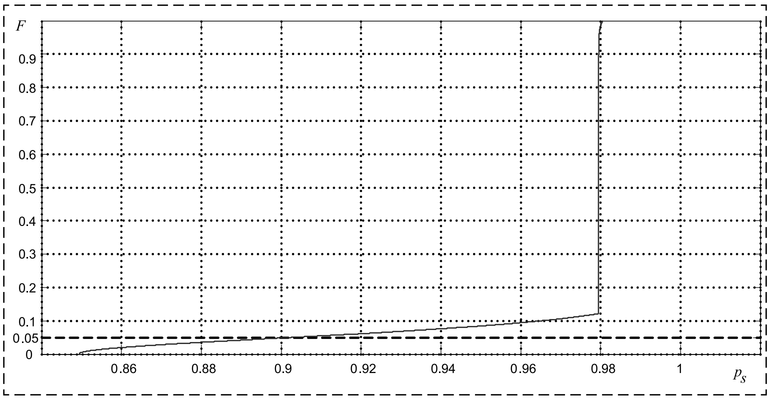


Рис. 9

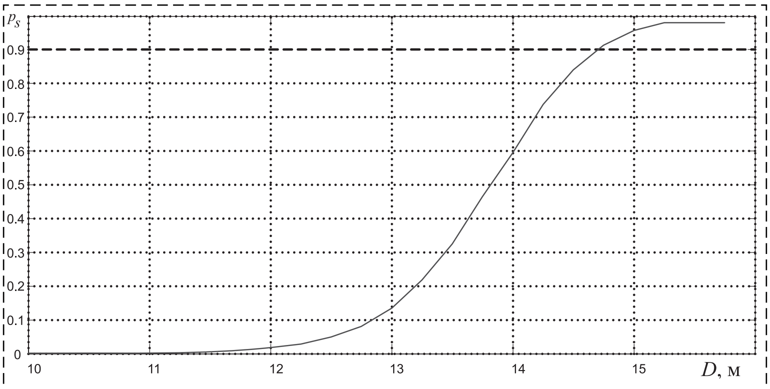


Рис. 10

Зная $F(t_c^{(1)})$ и $F(t_c^{(2)})$, можно найти законы распределения частоты получения отклика на соответствующую серию импульсов и, следовательно, закон распределения частоты получения хотя бы одного отклика.

Так, при $\tau = t_c + t_r = 130$ мс возможно перекрытие не более двух серий зондирующих импульсов. Это соответствует скорости 76,92 м/с (276,92 км/ч). В этом случае закон распределения частоты $F(p_s)$ будет иметь вид, представленный на рис. 8. Как видно из рис. 8, с надежностью 0,95 (см. квантиль уровня 0,05) частота получения хотя бы одного отклика будет равна 0,9795.

При увеличении скорости объекта v до 85 м/с значение частоты получения хотя бы одного отклика с надежностью 0,95 снижается до 0,9012 (рис. 9). Таким образом, длина зоны покрытия $D = 10$ м не обеспечивает требуемую надежность при скоростях более 85 м/с.

Аналогичным образом можно построить зависимость квантили уровня 0,05 частоты получения хотя бы одного отклика при различных значениях скорости v от длины зоны покрытия D.

Для максимальной заданной скорости $v = 125$ м/с эта зависимость будет иметь вид, представленный на рис. 10. Как видно из рис. 10, для обеспечения длина зоны покрытия D при заданных значениях t_r, t_c должна быть не меньше 14,7 м.

Очевидно, что с изменением значения максимальной скорости движения изменится и требуемое значение длины D зоны покрытия. На рис. 11 представлены результаты расчетов при варьировании значения максимальной скорости от 80 до 150 м/с.

Таким образом, разработанные алгоритмы позволяют рассчитать требуемое значение длины D зоны покрытия антенны ридера при задании максимальной скорости движения объекта и уровня надежности получения отклика антенны.

Заключение

Предложен подход к решению одной из задач повышения эффективности управления движением высокоскоростного транспорта за счет комплексного использования средств радиочастотной идентификации для определения его

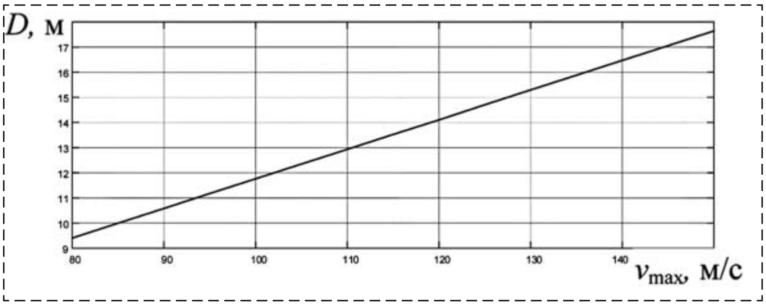


Рис. 11

местоположения. Разработан алгоритм расчета зоны покрытия антенны ридера, размер которой в установленном диапазоне скоростей движения объекта гарантирует получение ответного отклика от каждой РИМ, расположенной на пути его следования. Проведена оценка вероятности формирования ответного отклика от РИМ с использованием математического аппарата статистического анализа. Приведены результаты расчетов зоны покрытия антенны в диапазоне допустимых скоростей движения объекта и при заданном уровне надежности получения ответного отклика, а также сформированы рекомендации по выбору заданного варианта, доказывающие применимость предложенного подхода.

Список литературы

1. **Буряк Ю. И.** Обеспечение безопасности поставок и эксплуатации промышленной продукции за счет организации непрерывного мониторинга их технических характеристик // Автоматизация в промышленности. 2009. № 12. С. 7—11.

2. **Легкий Н. М.** Активная радиочастотная идентификация в системах позиционирования подвижных объектов // Наука и техника транспорта. 2010. № 2. С. 41—45.

3. **Легкий Н. М.** Управление перевозочным процессом на основе информации о местоположении транспортного средства // Наука и техника транспорта. 2009. № 3. С. 38—40.

4. **Буряк Ю. И., Амирханян В. Г., Калинин В. Л.** Разработка программно-технологической платформы для обеспечения контроля за состоянием сложных объектов при построении территориально-распределенных автоматизированных информационных систем производственного назначения // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2012. № 8. С. 23—28.

5. **Буряк Ю. И., Скрынников А. А.** Разработка модели классификатора движущихся в составе группы объектов на базе использования средств радиочастотной идентификации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 3. С. 42—48.

6. **Федоров В. Г.** Система радиочастотной идентификации САИД "Пальма" на железнодорожном транспорте // Автоматизация в промышленности. 2006. № 3. С. 53—54.

7. **Финское** транспортное агентство использует RFID для отслеживания состояния транспортных вагонов. URL: http://www.idexpert.ru/reviews/4318/ (дата обращения 06.06.2017).

8. **Способ** и система прицельной остановки железнодорожных транспортных средств: пат. 2397094 Рос. Федерация: МПК[51] B62L 25/00 / Н. М. Легкий — № 2009109737/11; заявл. 18.03.2009; опубл. 20.08.2010. Бюл. № 23.

9. **Система** для определения местонахождения поездов с проверкой в режиме реального времени достоверности оценки положения: пат. 2584957 Рос. Федерация: МПК[51] B62L 25/02 / А. Сайтто, П. Беллофьоре, А. Болле. — № 2013105692/11; заявл. 12.07.2011; опубл. 20.05.2016. Бюл. № 14.

10. **Способ** и система радиочастотной идентификации железнодорожного транспорта: пат. 2499714 Рос. Федерация: МПК[51] B62L 25/02 / М. Д. Рабинович и др. — № 2012107106/11; заявл. 27.02.2012; опубл. 27.11.2013. Бюл. № 33.

11. URL: https://hyperloop-one.com/#our-story/ (дата обращения 06.06.2017).

12. **Легкий Н. М., Линьков В. И., Охинченко А. П.** Использование спутниковых радионавигационных технологий для повышения безопасности движения поездов на скоростных и высокоскоростных магистралях // Наукоемкие технологии. 2010. № 8. С. 20—24.

13. **Буре В. М., Парилина Е. М.** Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник. СПб.: Издательство "Лань", 2013. 416 с.

Algorithms for Calculating the Coverage Area of the Radio Frequency Reader Antenna in Determining the Location of a High-Speed Object

Yu. I. Buryak, buryak@gosniias.ru**, A. A. Skrynnikov,** a1260@mail.ru,
The State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, 125319, Russian Federation

Corresponding author: **Buryak Yury I.,** Ph. D., Head of Unit,
The State Research Institute of Aviation Systems, Moscow,
125319, Russian Federation, e-mail: buryak@gosniias.ru

Accepted on August 16, 2017

The analysis of modern systems of automatic identification of a moving objects condition with use of means of radiofrequency identification is carried out. The requirements to the system for automatic identification of high-speed objects are formulated. An approach to solving the problem of locating a high-speed object based on the use of a complex of radio frequency identification means is proposed, in which a number of passive radio frequency tags are placed along the path of the object, and a radio frequency reader is installed on the object itself. The probabilistic model of the response formation is considered. Based on the analysis of the relative location of the time interval during which the RF tag is in the *coverage zone of the antenna and the radiation intervals of the antenna bundles of the probing pulses, the distribution law of the random variables corresponding to the overlapping time of the first and second bursts of pulses is constructed. The sensitivity of the RF tag (the probability of forming a response of RF tag from one bundle of probing pulses depending on the width of the packet) is given in the form of a logistic function with parameters determined experimentally. It is shown that at high speeds of the object with a small width of the coverage zone of the antenna, the appearance of the response of the RF tag is unlikely. The problem of justifying the required width of the antenna coverage zone is formulated, which ensures the formation of a response of the RF tag with a probability not less than a given value. The solution of the problem is illustrated for a complex of radio frequency identification means with known sensitivity parameters of the RF tag and with a required duration of probing and a radiation cycle. For a given values of maximum speed of motion and the required probability of occurrence of at least one response, laws of distribution of mixed random variables — the time of overlapping of the first and second bursts of impulses for different speeds of the object's motion are constructed, which allows us, through statistical modeling, to find the empirical distribution function of the frequency of occurrence of at least one RF tag response.For a given level of reliability, it is possible to construct a quantiles dependence of the required level of the random frequency of obtaining at least one response for different values of speed and the length of the coverage zone, which in turn makes it possible to justify the required width of the coverage zone of the transmitting antenna of the automatic identification system.*

Keywords: *radio frequency identification, high-speed vehicles, positioning accuracy*

Acknowledgements: This work was supported by RFBR, project number 15-08-04342a.

For citation:

Buryak Yu. I., Buryak Yu. I. Algorithms for Calculating the Coverage Area of the Radio Frequency Reader Antenna in Determining the Location of a High-Speed Object, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 4, pp. 266—272.

DOI: 10.17587/mau.19.266-272

References

1. **Buryak Yu. I.** *Obespechenie bezopasnosti postavok i ekspluatatsii promyshlennoi produktsii za schet organizatsii nepreryvnogo monitoringa ikh tekhnicheskikh kharakteristik* (Ensuring security of supply and exploitation of industrial products through the organization of continuous monitoring of their technical performances), *Avtomatizatsiya v Promyshlennosti*, 2009, no. 12, pp. 7—11 (in Russian).

2. **Legkii N. M.** *Aktivnaya radiochastotnaya identifikatsiya v sistemakh pozitsionirovaniya podvizhnykh ob"ektov* (Active radio-frequency identification in movable object positioning systems/ Science and technology of transport), *Nauka i Tekhnika Transporta*, 2010, no. 2, pp. 41—45 (in Russian).

3. **Legkii N. M.** *Aktivnaya radiochastotnaya identifikatsiya v sistemakh pozitsionirovaniya podvizhnykh ob"ektov* (Control of the transportation process on the basis of information on the location of the vehicle), *Nauka i Tekhnika Transporta*, 2010, no. 2, pp. 41—45 (in Russian).

4. **Buryak Yu. I., Amirkhanyan V. G., Kalinin V. L.** *Razrabotka programmno-tekhnologicheskoi platformy dlya obespecheniya kontrolya za sostoyaniem slozhnykh ob"ektov pri postroenii territorial'no-raspredelennykh avtomatizirovannykh informatsionnykh sistem proizvodstvennogo naznacheniya* (Development of a software and technology platform for monitoring the status of complex objects in the construction of geographically distributed automated information systems for industrial purposes), *Vestnik Komp'yuternykh I Informatsionnykh Tekhnologii*, 2012, no. 8, pp. 23—28 (in Russian).

5. **Buryak Yu. I., Skrynnikov A. A.** *Razrabotka modeli klassifikatora dvizhushchikhsya v sostave gruppy ob"ektov na baze ispol'zovaniya sredstv radiochastotnoi identifikatsii* (Development of the model of the classifier moving in the group of objects based on the use of radio frequency identification), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 3, pp. 42—48 (in Russian).

6. **Fedorov V. G.** *Sistema radiochastotnoi identifikatsii SAID "Pal'ma" na zheleznodorozhnom transporte* (Radio-frequency identification system SAID "Palma" in railway transport), *Avtomatizatsiya v Promyshlennosti*, 2006, no. 3, pp. 53—54 (in Russian).

7. **Finskoe** *transportnoe agentstvo ispol'zuet RFID dlya otslezhivaniya sostoyaniya transportnykh vagonov* (The Finnish transport agency uses RFID to track the state of transport wagons), available at: http://www.idexpert.ru/reviews/4318/ (date of access 06.06.2017).

8. **Sposob** *i sistema pritsel'noi ostanovki zheleznodorozhnykh transportnykh sredstv:* pat. 2397094 Ros. Federatsiya: MPK51 B62L 25/00 / N. M. Legkii — № 2009109737/11; zayavl. 18.03.2009; opubl. 20.08.2010 Byul. № 23 (Method and system of sighting of railway vehicles: Pat. 2397094 Russian Federation: IPC[51] B62L 25/00 / N. M. Legkii — № 2009109737 / 11; Claimed. 18.03.2009; publ. 08/20/2010 Bul. № 23) (in Russian).

9. **Sistema** *dlya opredeleniya mestonakhozhdeniya poezdov s proverkoi v rezhime real'nogo vremeni dostovernosti otsenki polozheniya:* pat. 2584957 Ros. Federatsiya: MPK51 B62L 25/02 / A. Saitto, P. Bellof'ore, A. Bolle — № 2013105692/11; zayavl. 12.07.2011; opubl. 20.05.2016 Byul. № 14. (The system for locating trains with a real-time check of the reliability of the position estimate: Pat. 2584957 Russian Federation: IPC[51] B62L 25/02 / A. Siteo, P. Bellofiore, A. Bolle — No. 2013105692/11; Claimed. 12/07/2011; publ. 05/20/2016 Bul. 14) (in Russian).

10. **Sposob** *i sistema radiochastotnoi identifikatsii zheleznodorozhnogo transporta:* pat. 2499714 Ros. Federatsiya: MPK51 B62L 25/02 / M. D. Rabinovich i dr. — № 2012107106/11; zayavl. 27.02.2012; opubl. 27.11.2013 Byul. № 33. (Method and system of radio frequency identification of railway transport: Pat. 2499714 Russian Federation: IPC[51] B62L 25/02 / M. D. Rabinovich and others — № 2012107106/11; Claimed. 27.02.2012; publ. 11/27/2013 Bul. 33) (in Russian).

11. **Available** at: https://hyperloop-one.com/#our-story/ (date of access 06.06.2017).

12. **Legkii N. M., Lin'kov V. I., Okhinchenko A. P.** *Ispol'zovanie sputnikovykh radionavigatsionnykh tekhnologii dlya povysheniya bezopasnosti dvizheniya poezdov na skorostnykh i vysokoskorostnykh magistralyakh* (The use of satellite radio navigation technology to improve the safety of train traffic on high-speed and super high-speed highways), *Naukoemkie Tekhnologii*, 2010, no. 8, pp. 20—24 (in Russian).

13. **Bure V. M., Parilina E. M.** *Teoriya veroyatnostei i matematicheskaya statistika* (Theory of Probability and Mathematical Statistics), SPb., Lan', 2013, 416 p. (in Russian).

DOI: 10.17587/mau.19.273-281

Synthesis of Stabilization Laws of a Single-Airscrew Helicopter's Lateral Motion for Lack of Information about its Lateral Speed: Analytical Solution

N. E. Zubov, Professor, Nikolay.Zubov@rsce.ru, **V. N. Ryabchenko,** Professor, **I. V. Sorokin,** Professor, Moscow State Technical University after N. E. Bauman, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: **Zubov Nikolai E.**, D. Sc., Professor, Moscow State Technical University after N. E. Bauman, Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: Nikolay.Zubov@rsce.ru

Accepted on Desember 15, 2017

The problem of stabilization law synthesis of a single-airscrew helicopter's lateral motion for lack of information about the lateral speed of its motion is analytically solved. The solution is based on the method of output vector control synthesis, which provides a specified spectrum of a dynamic system motion to be used as the basis of an especially designed multilevel decomposition of the system model in state space. Numerical simulation data that confirm the results are presented.

Keywords: *linear MIMO-system, output vector control synthesis, modal synthesis*

Acknowledgments: This work was supported financially by the Russian Science Foundation (Project № 18-19-00004).

For citation:

Zubov N. E., Ryabchenko V. N., Sorokin I. V. Synthesis of Stabilization Laws of a Single-Airscrew Helicopter's Lateral Motion for Lack of Information about its Lateral Speed: Analytical Solution, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie, 2018,* vol. 19, no. 4, pp. 273—281.

DOI: 10.17587/mau.19.273-281

1. Introduction and problem statement

In practice, the synthesis of a single-airscrew helicopter (SH) control laws the approach of division of SH spatial motion onto isolated longitudinal and transversal motions is accepted [1]. In this case, in accordance with [1], the control object in the side channel can be considered as an interrelated (i.e. roll-yawing) motion of SH, which in the "input-state" form, is:

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = \boldsymbol{A}\mathrm{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathrm{u}(t), \tag{1}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Delta V_z \\ \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y \\ \Delta\gamma \end{pmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta u_z \\ \Delta u_{\text{рв}} \end{pmatrix},$$

having the following matrices of coefficients:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{V_z}^{V_z} & a_{V_z}^{\omega_x} & a_{V_z}^{\omega_y} & a_{V_z}^{\gamma} \\ a_{\omega_x}^{V_z} & a_{\omega_x}^{\omega_x} & a_{\omega_x}^{\omega_y} & 0 \\ a_{\omega_y}^{V_z} & a_{\omega_y}^{\omega_x} & a_{\omega_y}^{\omega_y} & 0 \\ 0 & 1 & a_{\gamma}^{\omega_y} & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{V_z}^{u_z} & b_{V_z}^{u_{\text{рв}}} \\ b_{\omega_x}^{u_z} & b_{\omega_x}^{u_{\text{рв}}} \\ b_{\omega_y}^{u_z} & b_{\omega_y}^{u_{\text{рв}}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Here, the elements of the matrices

$$a_{V_z}^{V_z},\ a_{V_z}^{\omega_x},\ a_{V_z}^{\omega_y},\ a_{V_z}^{\gamma},\ a_{\omega_x}^{V_z},\ a_{\omega_x}^{\omega_x},\ a_{\omega_x}^{\omega_y},\ a_{\omega_y}^{V_z},$$

$$a_{\omega_y}^{\omega_x},\ a_{\omega_y}^{\omega_y},\ a_{\gamma}^{\omega_y},\ b_{V_z}^{u_z},\ b_{V_z}^{u_{\text{рв}}},\ b_{\omega_x}^{u_z},\ b_{\omega_x}^{u_{\text{рв}}},\ b_{\omega_y}^{u_z},\ b_{\omega_y}^{u_{\text{рв}}}$$

are piecewise constant values (i.e. linearization coefficients: [1]). The variables that correspond to the vectors of state and entry (of control) have the following meanings: ΔV_z — deviation from specified value of the lateral speed; $\Delta\omega_x$ — deviation from specified value of the roll angular velocity; $\Delta\omega_y$ — deviation from specified value of the yawing angular velocity; $\Delta\gamma$ — deviation from specified value of the angle of roll; Δu_z — deviation angle of a main rotor's cone in the transverse direction; and $\Delta u_{\text{рв}}$ — pitch of a steering propeller.

We use the following notation:

$$a_{11} = a_{V_z}^{V_z}, a_{12} = a_{V_z}^{\omega_x}, a_{13} = a_{V_z}^{\omega_y}, a_{14} = a_{V_z}^{\gamma},$$

$$a_{21} = a_{\omega_x}^{V_z}, a_{22} = a_{\omega_x}^{\omega_x}, a_{23} = a_{\omega_x}^{\omega_y},$$

$$a_{31} = a_{\omega_y}^{V_z}, a_{32} = a_{\omega_y}^{\omega_x}, a_{33} = a_{\omega_y}^{\omega_y}, a_{43} = a_{\gamma}^{\omega_y},$$

$$b_{11} = b_{V_z}^{u_z}, b_{12} = b_{V_z}^{u_{\text{рв}}}, b_{21} = b_{\omega_x}^{u_z}, b_{22} = b_{\omega_x}^{u_{\text{рв}}},$$

$$b_{31} = b_{\omega_y}^{u_z}, b_{32} = b_{\omega_y}^{u_{\text{рв}}},$$

then the control object (1) as a Multi Inputs Multi Outputs (MIMO) system of the "input-state" type can be written in more detail in the following way:

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{V}_z \\ \Delta\dot{\omega}_x \\ \Delta\dot{\omega}_y \\ \Delta\dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_z \\ \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_y \\ \Delta\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_z \\ \Delta u_{\text{рв}} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Hereafter it will be considered that information about change of speed ΔV_z as a result of direct or indirect measurements is not available.

Taking into consideration the assumptions made, the vector differential equation (2) can be written in the form of a dynamic MIMO-system of the "input — state — output" type:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{y}(t) = \boldsymbol{C}\mathbf{x}(t), \tag{3}$$

where the matrices with real elements (i.e. those specified over the field of real numbers $\mathbb{R}$) are equal to:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 1 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},\ n = 4, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r},\ n = 4,\ r = 2, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ n = 4,\ m = 3. \tag{6}$$

If, as a control law (3), to suggest the expression of the following form:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{F}\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{FC}\mathbf{x}(t), \tag{7}$$

where $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ is a matrix of the output controller, then, in accordance with [2] for the system under consideration (3)—(7), a case of the dynamic MIMO-system output vector control (i.e. output control) will take place.

It is required (with the help of the control law (7)) to provide the specified motion spectrum for the controlled system (3).

It should be noted that the output control of the spectrum of a dynamic system is a classical problem in control theory; however, judging by multiple published works, in which different mathematical approaches are used (e.g. [3—7]), no complete solution of this problem is presently available.

Hereafter we assume that matrix $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}$ (5) has a full rank (rank$\boldsymbol{B}$ = 2 in this case), or that its equivalent matrix $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ is invertible (i.e. det($\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$) $\neq$ 0). From a physical standpoint, this easily performed requirement means a linear independence of input control signals.

Let us now specify a notion of the spectrum considered here. It will be understood as a set of matrix $\boldsymbol{A}$ eigenvalues. In this case $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ (4) and a set of eigenvalues can be presented in the following way:

$$\operatorname{eig}(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_i \in \mathbb{C}:\ \det(\lambda_i \boldsymbol{I}_4 - \boldsymbol{A}) = 0,\ i = 1, \ldots, 4\}.$$

Here, $\boldsymbol{I}_4$ — identity matrix of size 4×4, $\mathbb{C}$ — the set of complex numbers (complex plane).

Let Λ be the given spectrum of matrix of system (3) with a close-loop control (7), then it is possible to determine a spectrum of the close-loop system as a set of the matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BFC}$ eigenvalues, that is

$$\Lambda = \{\hat{\lambda}_1,\ \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3,\ \hat{\lambda}_4\}. \tag{8}$$

Thus, it is required to determine (i.e. synthesize) explicitly the controller matrix $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ (7), such that the equality

$$\Lambda = \operatorname{eig}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BFC})$$

should be satisfied exactly.

The additional (methodological) complexity of this problem is a necessity for obtaining a solution in explicit analytical form, since $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ matrices, at best, as per [1], have a piecewise constant form. We emphasize that we know nothing about any alternative approach that allows the analytical solution of this problem to be obtained.

2. Decomposition of a dynamic system. As a first step of the given problem solution we will consider the multilevel decomposition of the SH model suggested in [8—10].

Since in this case the inequality $m \geqslant r$ (i.e. the number of system's outputs is greater than the number of its inputs) is implemented, then, in general, not taking into consideration specific numerical values for m and r, we consider the multilevel decomposition of system (3) of the following form:

— zero (initial) decomposition level

$$\boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{C}, \tag{9}$$

— first decomposition level

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{B}_0^{\perp}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0^{\perp\mathrm{T}},\ \boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_0^{\perp}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{C}_0\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0^{\perp\mathrm{T}}, \tag{10}$$

— kth decomposition level ($1 < k < M$)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_k = \boldsymbol{B}_{k-1}^{\perp}\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{\perp\mathrm{T}},\ \boldsymbol{B}_k = \boldsymbol{B}_{k-1}^{\perp}\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k-1}, \\ &\boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{C}_{k-1}\boldsymbol{A}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k-1}^{\perp\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{11}$$

— Mth (final) decomposition level (here: M = = ceil(n/r), where ceil(*) — is the operation of rounding the number "*" upwards)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_M = \boldsymbol{B}_{M-1}^{\perp}\boldsymbol{A}_{M-1}\boldsymbol{B}_{M-1}^{\perp+},\ \boldsymbol{B}_M = \boldsymbol{B}_{M-1}^{\perp}\boldsymbol{A}_{M-1}\boldsymbol{B}_{M-1}, \\ &\boldsymbol{C}_M = \boldsymbol{C}_{M-1}\boldsymbol{A}_{M-1}\boldsymbol{B}_{M-1}^{\perp+}. \end{aligned} \tag{12}$$

Equations (9)—(12) for a set of indices $k = \overline{0, M}$ involve the matrices with the following properties:

$$\left(\boldsymbol{B}_k \;\vdots\; \boldsymbol{B}_k^{\perp\mathrm{T}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_k^{+} \\ \cdots \\ \boldsymbol{B}_k^{\perp} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_k^{\perp}\boldsymbol{B}_k = 0,\ \boldsymbol{B}_k^{+}\boldsymbol{B}_k = \boldsymbol{I}_r, \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_k \\ \cdots \\ \boldsymbol{C}_k^{\perp} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\boldsymbol{C}_k^{+} \;\vdots\; \boldsymbol{C}_k^{\perp\mathrm{T}}\right),\ \boldsymbol{C}_k^{\perp}\boldsymbol{C}_k^{\mathrm{T}} = 0,\ \boldsymbol{C}_k\boldsymbol{C}_k^{+} = \boldsymbol{I}_m, \tag{14}$$

where the superscript "T" denotes the transposition operation, the superscript " $\perp$" denotes semi-orthogonal annihilators (divisors of zero), and the superscript "+" denotes the Moore-Penrose pseudoinverse matrices [8—10].

Also, we consider the recurrence formulae to obtain the required controller in (7), written down in reverse order:

— M-th (final) decomposition level

$$F_M = \left(\Phi_M B_M^+ - B_M^+ A_M\right) C_M^+, \tag{15}$$

— k-th decomposition level ($1 < k < M$)

$$F_k = \left(\Phi_k B_k^- - B_k^- A_k\right) C_k^+, \quad B_k^- = B_k^+ - F_{k-1} B_k^\perp, \tag{16}$$

— first decomposition level

$$F_1 = \left(\Phi_1 B_1^- - B_1^- A_1\right) C_1^+, \quad B_1^- = B_1^+ - F_2 B_1^\perp, \tag{17}$$

— zero (initial) decomposition level

$$F_0 = \left(\Phi_0 B_0^- - B_0^- A_0\right) C_0^+, \quad B_0^- = B_0^+ - F_1 B_0^\perp. \tag{18}$$

Here Φ_i ($i = \overline{0,\ M}$) are certain specified matrices, which will be determined in the next section.

The multilevel decomposition procedure considered is then implemented.

3. Algorithm for synthesis of the MIMO-system output control

The following statement that has been proven in [11] is true

Theorem 1. *Let $m \geqslant r$, and the following matrices exist and are pairwise completely controllable:*

$$G_M^{\mathrm{T}} = B_M^+ A_M C_M^\perp \left(B_M^+ C_M^\perp\right)^+, \ H_M^{\mathrm{T}} = \left(B_M^+ C_M^\perp\right)^\perp, \tag{19}$$

$$G_k^{\mathrm{T}} = B_k^- A_k C_k^\perp \left(B_k^- C_k^\perp\right)^+, \ H_k^{\mathrm{T}} = \left(B_k^- C_k^\perp\right)^\perp, \tag{20}$$

$$G_1^{\mathrm{T}} = B_1^- A_1 C_1^\perp \left(B_1^- C_1^\perp\right)^+, \ H_1^{\mathrm{T}} = \left(B_1^- C_1^\perp\right)^\perp, \tag{21}$$

$$G_0^{\mathrm{T}} = B_0^- A_0 C_0^\perp \left(B_0^- C_0^\perp\right)^+, \ H_0^{\mathrm{T}} = \left(B_0^- C_0^\perp\right)^\perp. \tag{22}$$

Then, there exists a nonempty set of matrices K_i, $i = \overline{0,\ M}$, such that

$$\begin{aligned} \Phi_i &= G_i + K_i^{\mathrm{T}} H_i = \\ &= \left(B_i^- A_i C_i^\perp\right)\left(B_i^- C_i^\perp\right)^+ + K_i^{\mathrm{T}} \left(B_i^- C_i^\perp\right)^\perp, \end{aligned} \tag{23}$$

and (19)— (22) *satisfy the equalities of spectra*

$$\operatorname{eig}\left(A_M + B_M F_M C_M\right) = \operatorname{eig}(\Phi_M), \tag{24}$$

$$\operatorname{eig}\left(A_k + B_k F_k C_k\right) = \bigcup_{i=k-1}^{M} \operatorname{eig}(\Phi_i), \tag{25}$$

$$\operatorname{eig}\left(A_1 + B_1 F_1 C_1\right) = \bigcup_{i=1}^{M} \operatorname{eig}(\Phi_i), \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{eig}\left(A_0 + B_0 F_0 C_0\right) &= \operatorname{eig}\left(A + BFC\right) = \\ &= \bigcup_{i=1}^{M+1} \operatorname{eig}(\Phi_i) = \Lambda. \end{aligned} \tag{27}$$

The condition $m \geqslant r$ in Theorem 1 is not restrictive; it is introduced to indicate that, in the present case, F matrix from (7) is conventionally considered as a matrix of controller (i.e. the number of inputs is less than the number of outputs), and not as a matrix of state observer (i.e. the number of inputs is greater than the number of outputs).

For the case $m \leqslant r$. Theorem 1 has a dual formulation, and matrix F is replaced with the observer matrix L.

Theorem 2. *Let $m \leqslant r$, N =* ceil(n/m), *and the following decomposition of system (3) hold* ($1 < k < N$):

$$A_0 = A, \quad B_0 = B, \quad C_0 = C,$$

$$A_1 = C_0^\perp A_0 C_0^{\perp\mathrm{T}}, \quad B_1 = C_0^\perp A_0 C_0, \quad C_1 = C_0 A_0 C_0^{\perp\mathrm{T}},$$

$$A_k = C_{k-1}^\perp A_{k-1} C_{k-1}^{\perp\mathrm{T}}, \quad B_k = C_{k-1}^\perp A_{k-1} C_{k-1},$$
$$C_k = C_{k-1} A_{k-1} C_{k-1}^{\perp\mathrm{T}},$$

$$A_N = C_{N-1}^\perp A_{N-1} C_{N-1}^{\perp\mathrm{T}}, \quad B_N = C_{N-1}^\perp A_{N-1} C_{N-1},$$
$$C_N = C_{N-1} A_{N-1} C_{N-1}^{\perp\mathrm{T}},$$

moreover, the following matrices exist and are pairwise completely controllable:

$$G_N = \left(B_N^\perp C_N^+\right)^+ B_N^\perp A_N C_N^+, \ H_N = \left(B_N^\perp C_N^+\right)^\perp,$$

$$G_k = \left(B_k^\perp C_k^+\right)^+ B_k^\perp A_k C_k^+, \ H_k = \left(B_k^\perp C_k^+\right)^\perp,$$

$$G_1 = \left(B_1^\perp C_1^+\right)^+ B_1^\perp A_1 C_1^+, \ H_1 = \left(B_1^\perp C_1^+\right)^\perp,$$

$$G_0 = \left(B_0^\perp C_0^+\right)^+ B_0^\perp A_0 C_0^+, \ H_0 = \left(B_0^\perp C_0^+\right)^\perp.$$

Then, there exists a nonempty set of matrices L_i, $i = \overline{0,\ N}$, such that

$$\Psi_i = G_i + H_i L_i^{\mathrm{T}} = \left(B_i^\perp C_i^+\right)^+ B_i^\perp A_i C_i^+ + \left(B_i^\perp C_i^+\right)^\perp L_i^{\mathrm{T}},$$

and, for

$$F_N = B_M^+\left(C_M^+\Psi_M - A_M C_M^+\right),$$

$$F_k = B_k^+\left(C_k^-\Psi_k - A_k C_k^-\right),\quad C_k^- = C_k^+ - C_k^{\perp T}F_{k-1},$$

$$F_1 = B_1^+\left(C_1^-\Psi_1 - A_1 C_1^-\right),\quad C_1^- = C_1^+ - C_1^{\perp T}F_2,$$

$$F_0 = B_0^+\left(C_0^-\Psi_0 - A_0 C_0^-\right),\quad C_0^- = C_0^+ - C_0^{\perp T}F_1,$$

it holds that

$$\operatorname{eig}\left(A_N + B_N F_N C_N\right) = \operatorname{eig}(\Psi_N),$$

$$\operatorname{eig}\left(A_k + B_k F_k C_k\right) = \bigcup_{i=k-1}^{N}\operatorname{eig}(\Psi_i),$$

$$\operatorname{eig}\left(A_1 + B_1 F_1 C_1\right) = \bigcup_{i=1}^{N}\operatorname{eig}(\Psi_i),$$

$$\operatorname{eig}\left(A_0 + B_0 F_0 C_0\right) = \operatorname{eig}\left(A + BFC\right) = \bigcup_{i=1}^{N+1}\operatorname{eig}(\Psi_i) = \Lambda.$$

As in the algorithms described in [8—10], only semiorthogonal and pseudoinverse matrices are used in the transformations, which at least do not reduce the condition number of the equations.

This approach does not impose restrictions in the form of the differentiation between the algebraic and geometric multiplicities of the elements of the spectrum to be assigned; there are also no restrictions on the size of the problem [8—10]. This is confirmed by extensive simulation, which shows a high relative accuracy of spectrum control and the practical absence of restrictions on the size of system (3).

4. Analytical synthesis of aircraft's lateral motion control

In accordance with the problem statement, it is required to find explicitly a formula of controller F in the control law that can be expressed in this case as:

$$\begin{pmatrix}\Delta u_z(t)\\ \Delta u_{\text{рв}}(t)\end{pmatrix} = FC\begin{pmatrix}\Delta V_z\\ \Delta\omega_x\\ \Delta\omega_y\\ \Delta\gamma\end{pmatrix} = F\begin{pmatrix}\Delta\omega_x\\ \Delta\omega_y\\ \Delta\gamma\end{pmatrix}, \qquad (28)$$

and provides for the close-loop system "HS + control system" of a specified spectrum (8).

We perform for the system (3) with matrices (4)—(6) the multilevel decomposition described in Section 2, which has in this case two decomposition levels ($M = 1$): zero level (9) and first level (10). Therefore, we will have

$$B_0^{\perp} = \begin{pmatrix}\dfrac{b_{21}b_{32}-b_{22}b_{31}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & -\dfrac{b_{11}b_{32}-b_{12}b_{31}}{b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$B_0^{\perp+} = \begin{pmatrix}b_{11}^+ & 0\\ b_{21}^+ & 0\\ b_{31}^+ & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix}a_{*11} & a_{*12}\\ a_{*21} & 0\end{pmatrix},\quad B_1 = \begin{pmatrix}b_{*11} & b_{*12}\\ b_{*21} & b_{*22}\end{pmatrix},\quad C_1 = \begin{pmatrix}c_{*11} & 0\\ c_{*21} & 0\\ c_{*31} & 0\end{pmatrix},$$

where for the compactness of a record we use the following symbols:

$$b_{11}^+ = (b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})(b_{21}b_{32}-b_{22}b_{31})/b^{+*},$$
$$b_{21}^+ = -(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})(b_{11}b_{32}-b_{12}b_{31})/b^{+*},$$
$$b_{31}^+ = (b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})^2/b^{+*},$$
$$b^{+*} = b_{11}^2b_{22}^2 + b_{11}^2b_{32}^2 - 2b_{11}b_{12}b_{21}b_{22} -$$
$$-2b_{11}b_{12}b_{31}b_{32} + b_{12}^2b_{21}^2 + b_{12}^2b_{31}^2 +$$
$$+b_{21}^2b_{32}^2 - 2b_{21}b_{22}b_{31}b_{32} + b_{22}^2b_{31}^2,$$
$$a_{*11} = (b_{21}b_{32}-b_{22}b_{31})(a_{11}b_{22}b_{11}^+ - a_{21}b_{12}b_{11}^+ +$$
$$+ a_{12}b_{22}b_{21}^+ - a_{22}b_{12}b_{21}^+ + a_{13}b_{22}b_{31}^+ -$$
$$-a_{23}b_{12}b_{31}^+)/(b_{22}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})) -$$
$$-(a_{21}b_{32}b_{11}^+ - a_{31}b_{22}b_{11}^+ + a_{22}b_{32}b_{21}^+ - a_{32}b_{22}b_{21}^+ +$$
$$+a_{23}b_{32}b_{31}^+ - a_{33}b_{22}b_{31}^+)/b_{22}, a_{*12} =$$
$$= a_{14}(b_{21}b_{32}-b_{22}b_{31})/(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}),$$
$$a_{*21} = b_{21}^+ + a_{43}b_{31}^+, b_{*11} = (a_{31}b_{11}^2 - a_{13}b_{31}^2 -$$
$$-a_{11}b_{11}b_{31} - a_{12}b_{21}b_{31} + a_{32}b_{11}b_{21} + a_{33}b_{11}b_{31})/b_{11} -$$
$$-(b_{11}b_{32}-b_{12}b_{31})(a_{21}b_{11}^2 - a_{12}b_{21}^2 - a_{11}b_{11}b_{21} +$$
$$+ a_{22}b_{11}b_{21} - a_{13}b_{21}b_{31} + a_{23}b_{11}b_{31})/(b_{11}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})),$$
$$b_{*12} = (a_{32}b_{22}^2 - a_{23}b_{32}^2 - a_{21}b_{12}b_{32} + a_{31}b_{12}b_{22} -$$
$$-a_{22}b_{22}b_{32} + a_{33}b_{22}b_{32})/b_{22} - (a_{21}b_{12}^2 - a_{12}b_{22}^2 -$$
$$-a_{11}b_{12}b_{22} + a_{22}b_{12}b_{22} - a_{13}b_{32}b_{22} + a_{23}b_{12}b_{32})\times$$
$$\times (b_{21}b_{32}-b_{22}b_{31})/(b_{22}(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})),$$
$$b_{*21} = b_{21} + a_{43}b_{31}, b_{*22} = b_{22} + a_{43}b_{32},$$
$$c_{*11} = a_{21}b_{11}^+ + a_{22}b_{21}^+ + a_{23}b_{31}^+,$$
$$c_{*21} = a_{31}b_{11}^+ + a_{32}b_{21}^+ + a_{33}b_{31}^+,$$
$$c_{*31} = b_{21}^+ + a_{43}b_{31}^+.$$

To check the controllability conditions in Theorem 1, we calculate the matrices:

$$C_0^{\perp T} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad B_0^+ = \begin{pmatrix}b_{11}^{0+} & b_{12}^{0+} & b_{13}^{0+} & 0\\ b_{21}^{0+} & b_{22}^{0+} & b_{23}^{0+} & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_0 = \left(\boldsymbol{B}_0^+ \boldsymbol{C}_0^\perp\right)^{\perp\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \dfrac{-b_{21}^{0+}}{b_{11}^{0+}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_0 = \begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 \\ a_{21}^0 & a_{22}^0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}_1^{\perp\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_1^+ = \begin{pmatrix} b_{11}^{1+} & b_{12}^{1+} \\ b_{21}^{1+} & b_{22}^{1+} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_1 = \left(\boldsymbol{B}_1^+ \boldsymbol{C}_1^{\perp\mathrm{T}}\right)^{\perp\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{22}^{1+}}{b_{12}^{1+}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_1^+ = \begin{pmatrix} b_{11}^{p1} & b_{12}^{p1} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_1 = \left(\boldsymbol{B}_1^+ \boldsymbol{C}_1^{\perp\mathrm{T}}\right)^{+\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{B}_1^+ \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{C}_1^{\perp\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11}^{a1} & a_{12}^{a1} \\ a_{21}^{a1} & a_{22}^{a1} \end{pmatrix},$$

where, as before, the following notation is used:

$$b_{11}^{0+} = -\frac{b_{12}(b_{21}b_{22} + b_{31}b_{32}) - b_{11}(b_{22}^2 + b_{32}^2)}{b^{+*}},$$

$$b_{12}^{0+} = -\frac{b_{22}(b_{11}b_{12} + b_{31}b_{32}) - b_{21}(b_{12}^2 + b_{32}^2)}{b^{+*}},$$

$$b_{13}^{0+} = -\frac{b_{32}(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}) - b_{31}(b_{12}^2 + b_{22}^2)}{b^{+*}},$$

$$b_{21}^{0+} = -\frac{b_{11}(b_{21}b_{22} + b_{31}b_{32}) - b_{12}(b_{21}^2 + b_{31}^2)}{b^{+*}},$$

$$b_{22}^{0+} = -\frac{b_{21}(b_{11}b_{12} + b_{31}b_{32}) - b_{22}(b_{11}^2 + b_{31}^2)}{b^{+*}},$$

$$b_{23}^{0+} = -\frac{b_{31}(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}) - b_{32}(b_{11}^2 + b_{21}^2)}{b^{+*}},$$

$$a_{11}^0 = b_{11}^{0+} b_{*1}^{0+}, a_{12}^0 = b_{11}^{0+} b_{*2}^{0+}, a_{21}^0 = b_{12}^{0+} b_{*1}^{0+}, a_{22}^0 = b_{12}^{0+} b_{*2}^{0+},$$

$$b_{*1}^{0+} = a_{11} b_{11}^{0+} + a_{21} b_{12}^{0+} + a_{31} b_{13}^{0+},$$

$$b_{*2}^{0+} = a_{11} b_{21}^{0+} + a_{21} b_{22}^{0+} + a_{31} b_{23}^{0+},$$

$$b_{11}^{1+} = b_{*22}/(b_{*11}b_{*22} - b_{*12}b_{*21}),$$

$$b_{12}^{1+} = -b_{*12}/(b_{*11}b_{*22} - b_{*12}b_{*21}),$$

$$b_{21}^{1+} = -b_{*21}/(b_{*11}b_{*22} - b_{*12}b_{*21}),$$

$$b_{22}^{1+} = b_{*11}/(b_{*11}b_{*22} - b_{*12}b_{*21}),$$

$$b_{11}^{p1} = \frac{b_{12}^{1+}}{\left(b_{12}^{1+}\right)^2 + \left(b_{22}^{1+}\right)^2}, b_{12}^{p1} = \frac{b_{22}^{1+}}{\left(b_{12}^{1+}\right)^2 + \left(b_{22}^{1+}\right)^2},$$

$$a_{11}^{a1} = a_{*12} b_{11}^{1+} b_{11}^{p1}, a_{12}^{a1} = a_{*12} b_{21}^{1+} b_{11}^{p1},$$

$$a_{21}^{a1} = a_{*12} b_{11}^{1+} b_{12}^{p1}, a_{22}^{a1} = a_{*12} b_{21}^{1+} b_{12}^{p1}.$$

For the zero and first decomposition levels, we calculate the ranks of the following block matrices:

$$\left(\boldsymbol{H}_0, \quad \boldsymbol{G}_0 \boldsymbol{H}_0\right), \ \left(\boldsymbol{H}_1, \quad \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{H}_1\right),$$

as a result we will obtain:

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{H}_0 \quad \boldsymbol{G}_0 \boldsymbol{H}_0\right) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{H}_1 \quad \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{H}_1\right) = 2;$$

this corresponds to the number of "independent" inputs $r = 2$. Therefore, each level of decomposition satisfies the control-lability condition in Theorem 1.

According to the form of controllers — we define a matrix whose eigenvalues will be assigned to the first decomposition level. With this purpose for matrices $\boldsymbol{H}_1$, $\boldsymbol{G}_1$ of the first decomposition level we will consider an additional sublevel, and calculate beforehand for this matrix $\boldsymbol{H}_1^\perp$, which in this case is equal to

$$\boldsymbol{H}_1^\perp = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{12}^{1+}}{b_{22}^{1+}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Next, using the expressions

$$\left(\boldsymbol{G}_1\right)_1 = \boldsymbol{H}_1^\perp \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{H}_1^{\perp\mathrm{T}}, \ \left(\boldsymbol{H}_1\right)_1 = \boldsymbol{H}_1^\perp \boldsymbol{G}_1 \boldsymbol{H}_1,$$

we obtain

$$\left(\boldsymbol{H}_1\right)_1 =$$
$$= a_{22}^{a1} - (b_{12}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1} b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{12}^{1+} + a_{12}^{a1} b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+},$$

$$\left(\boldsymbol{G}_1\right)_1 = a_1^{aa} =$$
$$= a_{22}^{a1} + (b_{12}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1} b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{22}^{1+} + a_{12}^{a1} b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}.$$

Whereupon the scalar value $\left(\boldsymbol{H}_1\right)_1^+$ will be equal to

$$\left(\boldsymbol{H}_1\right)_1^+ = \frac{1}{\left(\boldsymbol{H}_1\right)_1}.$$

Let us now assign one of the eigenvalues as a scalar matrix

$$\left(\Phi_1\right)_1 = \hat{\lambda}_1 = s_{12}$$

and calculate the matrix of feedback coefficients for the additional sublevel of the first decomposition level. We obtain

$$k_1 = s_{11}/(a_{22}^{a1} - (b_{22}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1} b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{12}^{1+} +$$
$$+ a_{12}^{a1} b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}) - (a_{22}^{a1} + (b_{12}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1} b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{22}^{1+} +$$
$$+ a_{12}^{a1} b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+})/(a_{22}^{a1} - (b_{22}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1} b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{12}^{1+} +$$
$$+ a_{12}^{a1} b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}).$$

Next, according to equations — from Theorem 1 we calculate the matrix

$$\left(\boldsymbol{H}_1\right)_0^- = \left(\boldsymbol{H}_1\right)_0^+ - k_1 \left(\boldsymbol{H}_1\right)_0^\perp = \begin{pmatrix} b_{11}^{1m} & b_{12}^{1m} \end{pmatrix},$$

where

$$b_{11}^{1m} = -(b_{12}^{1+}(s_{11}/(a_{22}^{a1} - (b_{22}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{12}^{1+} + a_{12}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}) - (a_{22}^{a1} + (b_{12}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{22}^{1+} + a_{12}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+})/(a_{22}^{a1} - (b_{22}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{12}^{1+} + a_{12}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+})))/b_{22}^{1+} - b_{12}^{1+}b_{22}^{1+}/((b_{12}^{1+})^2 + (b_{22}^{1+})^2),$$

$$b_{12}^{1m} = (a_{22}^{a1} + (b_{12}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{22}^{1+} + a_{12}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+})/(a_{22}^{a1} - (b_{22}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{12}^{1+} + a_{12}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}) - s_{11}/(a_{22}^{a1} - (b_{22}^{1+}(a_{21}^{a1} + a_{11}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}))/b_{22}^{1+}))/b_{12}^{1+} + a_{12}^{a1}b_{12}^{1+}/b_{22}^{1+}) + (b_{12}^{1+})^2/((b_{12}^{1+})^2 + (b_{22}^{1+})^2).$$

We then specify the matrix of eigenvalues of the zero sublevel of the first decomposition level by

$$(\Phi_1)_0 = \hat{\lambda}_2 = s_{12}.$$

Finally, we find matrix $\boldsymbol{k}_0$ by the rule

$$\boldsymbol{k}_0 = (\Phi_1)_0 (\boldsymbol{H}_1)_0^- - (\boldsymbol{H}_1)_0^- \boldsymbol{G}_1 = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \end{pmatrix},$$

where

$$k_{11} = b_{11}^{1m}s_{12} - a_{21}^{a1}b_{21}^{1m} - a_{11}^{a1}b_{11}^{1m},$$
$$k_{11} = b_{21}^{1m}s_{12} - a_{22}^{a1}b_{21}^{1m} - a_{12}^{a1}b_{11}^{1m}.$$

As a result, we obtain, using equation (18), the matrix Φ_1, whose eigenvalues s_{12}, s_{12}, are ensured by the output controller for the model on the first decomposition level:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} f_{11}^{i1} & f_{12}^{i1} \\ f_{21}^{i1} & f_{22}^{i1} \end{pmatrix}.$$

Here

$$f_{11}^{i1} = a_{11}^{a1} + (b_{22}^{1+}(a_{11}^{a1}b_{11}^{1m} + a_{21}^{a1}b_{21}^{1m} - b_{11}^{1m}s_{12}))/b_{12}^{1+},$$
$$f_{12}^{i1} = a_{21}^{a1} - a_{11}^{a1}b_{11}^{1m} - a_{21}^{a1}b_{21}^{1m} + b_{11}^{1m}s_{12},$$
$$f_{21}^{i1} = a_{12}^{a1} + (b_{22}^{1+}(a_{12}^{a1}b_{11}^{1m} + a_{22}^{a1}b_{21}^{1m} - b_{21}^{1m}s_{12}))/b_{12}^{1+},$$
$$f_{12}^{i1} = a_{22}^{a1} - a_{12}^{a1}b_{11}^{1m} - a_{22}^{a1}b_{21}^{1m} + b_{21}^{1m}s_{12}.$$

Based on equation (15), the first decomposition level yields the following formula for the controller

$$\boldsymbol{F}_1 = \left(\Phi_1\boldsymbol{B}_1^+ - \boldsymbol{B}_1^+\boldsymbol{A}_1\right)\boldsymbol{C}_1^+ = \begin{pmatrix} f_{11}^1 & f_{12}^1 & f_{13}^1 \\ f_{21}^1 & f_{22}^1 & f_{23}^1 \end{pmatrix},$$

where the elements are:

$$f_{11}^1 = -c_{11}^{1+}(a_{11}^{a1}b_{11}^{1+} + a_{21}^{a1}b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+}f_{11}^{i1} - b_{21}^{1+}f_{12}^{i1}),$$
$$f_{12}^1 = -c_{12}^{1+}(a_{11}^{a1}b_{11}^{1+} + a_{21}^{a1}b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+}f_{11}^{i1} - b_{21}^{1+}f_{12}^{i1}),$$
$$f_{13}^1 = -c_{13}^{1+}(a_{11}^{a1}b_{11}^{1+} + a_{21}^{a1}b_{12}^{1+} - b_{11}^{1+}f_{11}^{i1} - b_{21}^{1+}f_{12}^{i1}),$$
$$f_{21}^1 = -c_{11}^{1+}(a_{11}^{a1}b_{21}^{1+} + a_{21}^{a1}b_{22}^{1+} - b_{11}^{1+}f_{21}^{i1} - b_{21}^{1+}f_{22}^{i1}),$$
$$f_{22}^1 = -c_{12}^{1+}(a_{11}^{a1}b_{21}^{1+} + a_{21}^{a1}b_{22}^{1+} - b_{11}^{1+}f_{21}^{i1} - b_{21}^{1+}f_{22}^{i1}),$$
$$f_{23}^1 = -c_{13}^{1+}(a_{11}^{a1}b_{21}^{1+} + a_{21}^{a1}b_{22}^{1+} - b_{11}^{1+}f_{21}^{i1} - b_{21}^{1+}f_{22}^{i1}).$$

To calculate matrix $\boldsymbol{B}_0^-$ that is needed for determining the zero level controller, we use the second formula in . As a result, we obtain the expression

$$\boldsymbol{B}_0^- = \boldsymbol{B}_0^+ - \boldsymbol{F}_1\boldsymbol{B}_0^\perp = \begin{pmatrix} b_{11}^m & b_{12}^m & b_{13}^m & 0 \\ b_{21}^m & b_{22}^m & b_{23}^m & 0 \end{pmatrix}.$$

Here

$$b_{11}^m = b_{11}^+ - ((b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(c_{11}^1f_{11}^1 + c_{21}^1f_{12}^1 + c_{31}^1f_{13}^1))/(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}),$$
$$b_{12}^m = b_{12}^+ + ((b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31})(c_{11}^1f_{11}^1 + c_{21}^1f_{12}^1 + c_{31}^1f_{13}^1))/(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}),$$
$$b_{13}^m = b_{13}^+ - c_{11}^1f_{11}^1 - c_{21}^1f_{12}^1 - c_{31}^1f_{13}^1,$$
$$b_{21}^m = b_{21}^+ - ((b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31})(c_{11}^1f_{21}^1 + c_{21}^1f_{22}^1 + c_{31}^1f_{23}^1))/(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}),$$
$$b_{22}^m = b_{22}^+ + ((b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31})(c_{11}^1f_{21}^1 + c_{21}^1f_{22}^1 + c_{31}^1f_{23}^1))/(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}),$$
$$b_{23}^m = b_{23}^+ - c_{11}^1f_{21}^1 - c_{21}^1f_{22}^1 - c_{31}^1f_{23}^1.$$

According to Theorem 1, we complete the system of the zero decomposition level using . This yields

$$\boldsymbol{G}_0 = \left(\boldsymbol{B}_0^-\boldsymbol{C}_0^\perp\right)^{+\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{B}_0^-\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{C}_0^\perp\right)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11}^a & a_{12}^a \\ a_{21}^a & a_{22}^a \end{pmatrix},$$

where

$$a_{11}^a = -b_{11}^{0+}(a_{11}b_{11}^m + a_{21}b_{12}^m + a_{31}b_{13}^m),$$
$$a_{12}^a = -b_{11}^{0+}(a_{11}b_{21}^m + a_{21}b_{22}^m + a_{31}b_{23}^m),$$
$$a_{21}^a = -b_{12}^{0+}(a_{11}b_{11}^m + a_{21}b_{12}^m + a_{31}b_{13}^m),$$
$$a_{22}^a = -b_{12}^{0+}(a_{11}b_{21}^m + a_{21}b_{22}^m + a_{31}b_{23}^m).$$

Now, we should determine Φ_0 for the zero decomposition level. For this purpose, we decompose the matrices $\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{G}_0$ of the zero level into two sublevels and calculate the corresponding matrices. We obtain

$$(\boldsymbol{H}_0)_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{-b_{21}^m}{b_{11}^m} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{H}_0)_0^\perp = \begin{pmatrix} \dfrac{b_{11}^m}{b_{21}^m} & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{H}_0)_0^+ = \begin{pmatrix} \dfrac{-b_{11}^m b_{21}^m}{(b_{11}^m)^2 + (b_{21}^m)^2} \\ \dfrac{(b_{11}^m)^2}{(b_{11}^m)^2 + (b_{21}^m)^2} \end{pmatrix},$$

$$\left(\boldsymbol{G}_0\right)_1=\left(\boldsymbol{H}_0\right)_0\boldsymbol{G}_0\left(\boldsymbol{H}_0\right)_0^{\perp}=a_1^{aa}=$$
$$=-((b_{21}^m)^2(b_{12}^{0+}(a_{11}b_{21}^m+a_{21}b_{22}^m+a_{31}b_{23}^m)+$$
$$+(b_{11}^m b_{11}^{0+}(a_{11}b_{21}^m+a_{21}b_{22}^m+a_{31}b_{23}^m))/b_{21}^m))/((b_{21}^m)^2+$$
$$+(b_{21}^m)^2)-(b_{11}^m b_{21}^m(b_{12}^{0+}(a_{11}b_{11}^m+a_{21}b_{12}^m+a_{31}b_{13}^m)+$$
$$+(b_{11}^m b_{11}^{0+}(a_{11}b_{11}^m+a_{21}b_{12}^m+a_{31}b_{13}^m))/b_{21}^m))/((b_{21}^m)^2+(b_{21}^m)^2),$$

$$\left(\boldsymbol{H}_0\right)_1=\left(\boldsymbol{H}_0\right)_0^{\perp}\boldsymbol{G}_0\boldsymbol{H}_0=b_1^{bb}=$$
$$=-b_{12}^{0+}(a_{11}b_{21}^m+a_{21}b_{22}^m+a_{31}b_{23}^m)+(b_{21}^m(b_{12}^{0+}(a_{11}b_{11}^m+$$
$$+a_{21}b_{12}^m+a_{31}b_{13}^m)+(b_{11}^m b_{11}^{0+}(a_{11}b_{11}^m+a_{21}b_{12}^m+$$
$$+a_{31}b_{13}^m))/b_{21}^m))/b_{11}^m-(b_{11}^m b_{11}^{0+}(a_{11}b_{21}^m+$$
$$+a_{21}b_{22}^m+a_{31}b_{23}^m))/b_{21}^m.$$

Using the values of $b_1{}^{bb}$, we then find the matrix (scalar, in this case)

$$\left(\boldsymbol{H}_0\right)_1^+=\frac{1}{b_1^{bb}}=b_1^{bb+}.$$

Let us now assign the eigenvalue as a scalar matrix $\left(\Phi_0\right)_1=\hat{\lambda}_3=s_{03}$ and calculate the matrix of feedback coefficients for the first sublevel of the zero decomposition level. We obtain

$$k_1=-b_1^{bb+}(a_1^{aa}-s_{03}).$$

Next, we calculate the matrix

$$\left(\boldsymbol{H}_0\right)_0^-=\left(\boldsymbol{H}_0\right)_0^+-k_1\left(\boldsymbol{H}_0\right)_0^{\perp}=$$
$$=\begin{pmatrix}\dfrac{b_1^{bb+}b_{11}^m(a_1^{aa}-s_{03})}{b_{21}^m}-\dfrac{b_{11}^m b_{21}^m}{(b_{11}^m)^2+(b_{21}^m)^2} & b_1^{bb+}(a_1^{aa}-s_{03})+\dfrac{b_{11}^m}{(b_{11}^m)^2+(b_{21}^m)^2}\end{pmatrix}.$$

We specify again the matrix of eigenvalues of the zero sublevel of the zero decomposition level by

$$\left(\Phi_0\right)_0=\hat{\lambda}_4=s_{02}.$$

Finally, we find matrix $\boldsymbol{K}_0$ by the rule

$$\boldsymbol{K}_0=\left(\Phi_0\right)_0\left(\boldsymbol{H}_0\right)_0^- -\left(\boldsymbol{H}_0\right)_0^-\boldsymbol{G}_0=\begin{pmatrix}K_{11} & K_{12}\end{pmatrix},$$

where in the case under examination

$$K_{11}=-b_{11}^{0+}\left(\frac{b_{11}^m b_{21}^m}{(b_{11}^m)^2+(b_{21}^m)^2}-\frac{b_1^{bb+}b_{11}^m(a_1^{aa}-s_{03})}{b_{21}^m}\right)\times$$
$$\times(a_{11}b_{11}^m+a_{21}b_{12}^m+a_{31}b_{13}^m)+$$
$$+b_{12}^{0+}\left(b_1^{bb+}(a_1^{aa}-s_{03})+\frac{(b_{11}^m)^2}{(b_{11}^m)^2+(b_{21}^m)^2}\right)\times$$
$$\times(a_{11}b_{11}^m+a_{21}b_{12}^m+a_{31}b_{13}^m)-$$
$$-s_{02}\left(\frac{b_{11}^m b_{21}^m}{(b_{11}^m)^2+(b_{21}^m)^2}-\frac{b_1^{bb+}b_{11}^m(a_1^{aa}-s_{03})}{b_{21}^m}\right),$$

$$K_{12}=s_{02}\left(b_1^{bb+}(a_1^{aa}-s_{03})+\frac{(b_{11}^m)^2}{(b_{11}^m)^2+(b_{21}^m)^2}\right)+$$
$$+b_{12}^{0+}\left(b_1^{bb+}(a_1^{aa}-s_{03})+\frac{(b_{11}^m)^2}{(b_{11}^m)^2+(b_{21}^m)^2}\right)\times$$
$$\times(a_{11}b_{11}^m+a_{21}b_{12}^m+a_{31}b_{13}^m)-$$
$$-b_{11}^{0+}\left(\frac{b_{11}^m b_{21}^m}{(b_{11}^m)^2+(b_{21}^m)^2}-\frac{b_1^{bb+}b_{11}^m(a_1^{aa}-s_{03})}{b_{21}^m}\right)\times$$
$$\times(a_{11}b_{21}^m+a_{21}b_{22}^m+a_{31}b_{23}^m).$$

As a result, we obtain using equation , the matrix Φ_0, whose eigenvalues s_{02}, s_{03}, are ensured by the output controller,

$$\Phi_0=\begin{pmatrix}f_{11}^{i0} & f_{12}^{i0}\\ f_{21}^{i0} & f_{22}^{i0}\end{pmatrix}.$$

Here

$$f_{11}^{i0}=-b_{11}^{0+}(a_{11}b_{11}^m+a_{21}b_{12}^m+a_{31}b_{13}^m)-\frac{b_{21}^m K_{11}}{b_{11}^m},$$
$$f_{12}^{i0}=K_{11}-b_{12}^{0+}(a_{11}b_{11}^m+a_{21}b_{12}^m+a_{31}b_{13}^m),$$
$$f_{21}^{i0}=-b_{11}^{0+}(a_{11}b_{21}^m+a_{21}b_{22}^m+a_{31}b_{23}^m)-\frac{b_{21}^m K_{12}}{b_{11}^m},$$
$$f_{12}^{i0}=K_{12}-b_{12}^{0+}(a_{11}b_{21}^m+a_{21}b_{22}^m+a_{31}b_{23}^m).$$

Further calculations, which were described, for instance, in [9, 10], finally yield the following formula for the output controller vector (28):

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}f_{11} & f_{12} & f_{13}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\end{pmatrix}. \tag{29}$$

Elements of the matrix can be expressed as

$$f_{11}=b_{12}^m f_{11}^{i0}-a_{22}b_{12}^m-a_{32}b_{13}^m-a_{12}b_{11}^m+b_{22}^m f_{12}^{i0},$$
$$f_{12}=b_{13}^m f_{11}^{i0}-a_{23}b_{12}^m-a_{33}b_{13}^m-a_{13}b_{11}^m+b_{23}^m f_{12}^{i0},$$
$$f_{13}=-a_{14}b_{11}^m,$$
$$f_{21}=b_{12}^m f_{21}^{i0}-a_{22}b_{22}^m-a_{32}b_{23}^m-a_{12}b_{21}^m+b_{22}^m f_{22}^{i0},$$
$$f_{22}=b_{13}^m f_{21}^{i0}-a_{23}b_{22}^m-a_{33}b_{23}^m-a_{13}b_{21}^m+b_{23}^m f_{22}^{i0},$$
$$f_{13}=-a_{14}b_{21}^m.$$

The synthesized controller (and the control system based on it) ensures exactly the specified spectrum (8) for controlled lateral motion of the SH. This assertion can be directly checked with the help of appropriate analytical calculations. For this purpose it is sufficient to make use of the package Symbolic Toolbox MATLAB; namely, one can use the *eig* instruction to calculate the eigenvalues of the $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BFC}$ matrix.

5. Numerical analysis

Let use for simulation of the lateral motion of the hypothetical SH the following numerical values of the coefficient matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -0,1900 & -6,2000 & 68,9161 & -9,7932 \\ -0,1200 & -6,2519 & -0,1900 & 0 \\ -0,0500 & 0,1000 & -0,8720 & 0 \\ 0 & 1 & 0,1000 & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -16,1744 & -6,0409 \\ -135,4887 & -2,3329 \\ 3,5087 & -13,0006 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Suppose that we want the closed-loop system "SH + + control system" with matrices (30), (31) to have the following specified spectrum (8):

$$\Lambda = \{-1,5;\ -1,5;\ -1,5;\ -1,5\}. \quad (32)$$

The set (32), as we can see, consists of identical numbers, i. e., we want the closed-loop system "SH + + control system" to have the spectrum with a multiplication factor of 4.

It should be noted that, even under much simpler conditions of the closed-loop control synthesis, when all the elements of the state vector are accessible for measurement, known methods do not allow this problem to be solved.

For instance, a well-known function *place* from the MATLAB software package will deliver an error in this case, since it is required to ensure that the multiplicity of the spectrum elements are greater than the number of inputs.

For the numerical values of the matrices (30), (31), and the desired spectrum (32) with use of equation (29), we obtain the controller matrix:

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} -0,0299 & -0,0272 & 0,0168 \\ -0,0125 & 0,2060 & -0,0128 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

The matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BFC}$ of the close-loop system "SH + + control system" will take the form of

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BFC} = \begin{pmatrix} -0,1990 & -5,6402 & 68,1118 & -9,9879 \\ -0,1200 & -2,1649 & 3,0143 & -2,2500 \\ -0,0500 & 0,1572 & -3,6451 & 0,2267 \\ 0 & 1 & -0,4663 & 0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

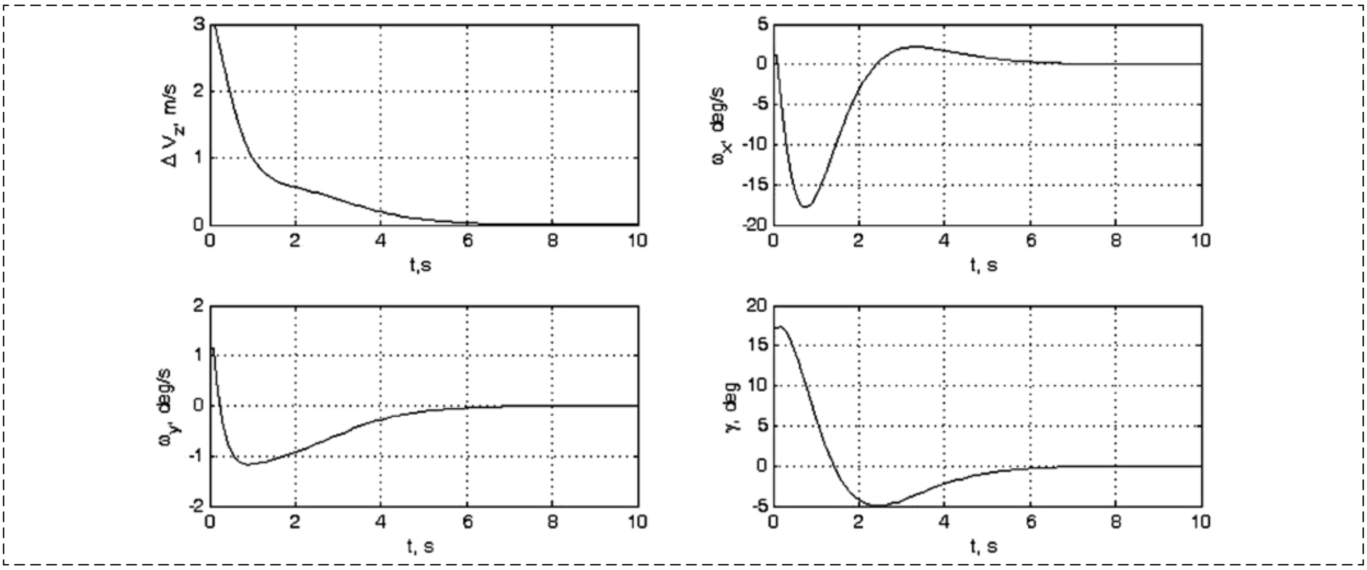


Fig. 1. The diagrams of transition functions for the state vector components of the close-loop "SH + control system"

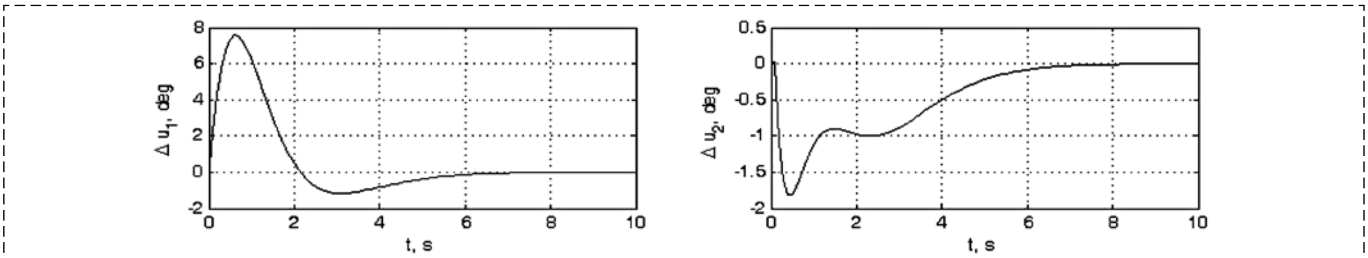


Fig. 2. The values of control actions of the close-loop "SH + control system"

The computation of eigenvalues of the matrix $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{BFC}$ yields

$$\operatorname{eig}\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BFC}\right)=\{-1,5;\ \ -1,5;\ \ -1,5;\ \ -1,5\},$$

which coincides with the set (32), which we wanted to obtain.

For the initial values of the SH state vector in the system of SI units that are

$$\begin{aligned}&\left(\Delta V_z \quad \Delta\omega_x \quad \Delta\omega_y \quad \Delta\gamma\right)^{\mathrm{T}} = \\ &=\left(3,00 \quad 0,02 \quad 0,02 \quad 0,30\right)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

the diagrams of transition functions for the state vector components of the close-loop "SH + control system" are provided in Fig. 1. Correspondingly, the values of control actions are shown in Fig. 2. We can see that the transition processes are fast-decaying ones and have a close-to-aperiodic (low-oscillatory) type, which ensures good handling qualities of the vehicle.

6. Conclusions

The problem of a stabilization law synthesis of single-airscrew helicopter's lateral motion for lack of information about the lateral speed of its motion has been analytically solved. The solution is based on the method of the output signal control synthesis that provides a specified spectrum of the MIMO-system's motion, presented earlier in [11]. The method is based on a decomposition of the system using orthogonal transformations. The method has no restrictions on the algebraic and geometric multiplicities of the spectrum elements, and also makes it possible to obtain analytical solutions and a parameterization (construction) of a set of controllers. Numerical simulation data that confirm the analytical expressions are also presented.

References

1. **Krasovskiy A. A., Vavilov Yu. A., Suchkov A. I.** Automatic control systems of the aircrafts, Moscow, The Air Force Engineering Academy after Prof. N. E. Zhukovskiy Publishing House, Moscow, 1986, 480 p. (in Russian).
2. **Leonov G. A., Shumafov M. M.** Methods of the linear controlled systems stabilization, Saint-Petersburg, Saint-Petersburg State University Publishing House, 2005 (in Russian).
3. **Bhattachrya S.** Sparsity based feedback design: A new paradigm in opportunistic sensing, *Proc. American Control Conf.,* 2011, pp. 3704—3709.
4. **Blumthaler I. and Oberst U.** Design, parameterization, and pole placement of stabilizing output feedback compensators via injective cogenerator quotient signal modules, *Linear Algebra Appl.,* 2012, vol. 436 (5—2), pp. 963—1000.
5. **Bosche J., Bachelier O., Mehdi D.** Robust pole placement by static output feedback, *Proc. 43rd IEEE Conf. Decision & Control*, Paradise Island, Bahamas, 2004, pp. 869—874.
6. **Eremenko A. and Gabrielov A.** Pole placement by static output feedback for generic linear systems, *SIAM J. Contr. Opt.*, 2002, vol. 41 (1), pp. 303—312.
7. **Franke M.** Eigenvalue assignment by static output feedback — on a new solvability condition and the computation of low gain feedback matrices, *Int. J. Contr.*, 2014, vol. 87 (1), pp. 64—75.
8. **Misriknanov M. Sh. and Ryabchenko V. N.** Pole placement in large dynamical systems with many inputs and outputs, *Dokl. Math.*, 2011, vol. 84, pp. 591—593.
9. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Oleinik A. S., Ryabchenko V. N.** Terminal bang-bang impulsive control of linear time invariant dynamic systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2014, vol. 53, pp. 480—490.
10. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N.** Modification of the exact pole placement method and its application for the control of spacecraft motion, *J. Comput. Syst. Sci. Int.,* 2013, vol. 52, pp. 279—292.
11. **Zubov N. E., Zybin E. Yu., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Proletarkiy A. V., Ryabchenko V. N.** Output control of a spacecraft motion spectrum, *J. Comput. Syst. Sci. Int.,* 2014, vol. 53, pp. 576—586.

УДК 681.518.3 DOI: 10.17587/mau.19.282-288

А. В. Голубкина, аспирант, annatutta@gmail.com, **Н. В. Павлова,** д-р техн. наук, проф.,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Выбор направления движения ЛА для доставки грузов группе движущихся объектов. Часть 1. Выход в точку запуска БПЛА

Показана возможность синтезирования алгоритмов управления многофункционального летательного аппарата (ЛА) при выведении его в заданную точку пуска беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) для доставки грузов группе движущихся объектов.

Формирование оптимальной траектории для выхода в заданные условия включает два этапа: этап выбора направления движения ЛА на маршруте (выход ЛА в заданную точку пуска БПЛА); этап траекторного управления (синтезирование команд на сокращение отклонения от заданного направления на маршруте).

Разработан алгоритм первого этапа, учитывающий ограничения, накладываемые техническими возможностями многофункциональных ЛА и условиями движения группы объектов. Приведены результаты моделирования, подтверждающие работоспособность разработанного алгоритма.

Ключевые слова: *многофункциональный ЛА, БПЛА, алгоритм, оптимальная траектория, полетное задание, целочисленное математическое программирование*

Введение

Одной из актуальных задач, возлагаемых на летательные аппараты (ЛА), является доставка грузов группе движущихся в труднодоступной местности объектов, в том числе в условиях отсутствия взлетно-посадочной полосы. В описанном случае при доставке дорогостоящего груза (например, высокотехнологичного оборудования) одним из эффективных способов является использование многофункциональных ЛА, несущих на борту группу БПЛА, каждый из которых на конечном этапе доставляет груз одному из объектов [1]. Задача осложняется, если объекты движутся.

Созданию алгоритмов управления ЛА при выборе оптимального направления полета в рассматриваемых условиях посвящен ряд работ [2, 3]. В статье предлагается алгоритм, расширяющий учитываемые в ходе выбора направления полета ограничения [4, 5].

Решение задачи доставки грузов группе движущихся объектов с использованием многофункциональных ЛА и группы БПЛА включает два этапа:

- этап выбора маршрута движения ЛА, на котором формируется оптимальная (в смысле цели управления) траектория движения;
- этап траекторного управления, на котором определяется отклонение ЛА от направления движения по оптимальной траектории и синтезируются команды на сокращение этого отклонения.

В соответствии с таким подходом система управления включает алгоритмы:

- оптимизации направления траектории движения (выход в заданную точку пуска БПЛА);
- текущей оптимизации траектории полета.

Задачи обоих этапов должны решаться с учетом целого ряда ограничений, вытекающих из возможностей самого многофункционального ЛА и текущей обстановки в ходе полета [6—8].

Совместная формализация этих задач приводит к сложным моделям, поиск решения которых затруднен. В данной статье рассмотрим алгоритм, позволяющий решить задачу первого этапа [8].

Алгоритм оптимизации выбора направления движения ЛА разработан для обеспечения максимального числа обслуженных получателей грузов. В качестве исходной информации алгоритм использует снимаемую с датчиков многофункционального ЛА информацию и гипотезу о траектории движения объектов в группе, для которых доставляется груз.

Представляемый алгоритм определяет номер оптимального маршрута, выбирая в результате оптимизации маршрут, обеспечивающий максимальное число обслуженных объектов, которым доставляется груз. Поставленная задача решается при условии, что на число объектов, которым доставляется груз, и на характер их движения накладывается ряд ограничений [9, 10]. Пусть объекты движутся равномерно и прямолинейно, а выпущенные БПЛА выполняют свой полет им навстречу. Предполагаем, что направление движения комплекса (ЛА и группа БПЛА на его борту) должно быть выбрано так, что многофункциональный ЛА не может отклоняться более чем на 90° от направления движения объектов. Рассмотрим решение задачи при условии, что генерируется не более трех отрезков (заканчивающихся соответствующим узлом) по направлению на группу объектов, а их длина и угол излома относительно текущего курса определяются маневренными возможностями многофункционального ЛА. Требуется из сгенерированных узлов, характеризующих возможное положение многофункционального ЛА, выбрать тот, для которого значение сформированного штрафного функционала минимально.

Выбранный номер оптимального маршрута поступает в алгоритм текущей оптимизации полета в качестве исходных данных.

Постановка задачи

Требуется разработать алгоритм, позволяющий рассчитать направление траектории движения многофункционального ЛА, доставляющего с помощью БПЛА грузы для группы движущихся объектов с учетом выдерживания ограничений.

Считаем, что существует исходное множество маршрутов, отличающихся друг от друга значениями x, z, ψ, где x, z, ψ — координаты и курс ЛА. Из этого счетного множества требуется выбрать единственный оптимальный маршрут, максимизирующий число обслуживаемых на нем движущихся объектов группы получателей. Маршрут формируется итерационно и состоит из частей траектории, выбираемых в дискретных точках (узлах). Из каждого такого узла генерируется определенное число направлений движения, заканчивающихся новым узлом, который и подлежит выбору в данный момент. В статье рассматривается частый случай использования метода ветвей и границ, и выбор узлов осуществляется из трех возможных вариантов.

Введем искомую переменную n — номер выбираемого направления из трех возможных:

$$n \in N,\ N = \{1, 2, 3\}. \tag{1}$$

Это номер генерируемой ветви при выполнении в ходе оптимизации одной итерации. Выбор на каждом шаге осуществляется из трех ветвей.

Требуется выбрать такое значение этой целочисленной переменной n, для которого значение веса $V_у$ узла будет минимальным:

$$V_у \to \min. \tag{2}$$

Значение $V_у$ ищется при следующих ограничениях на движущиеся объекты группы, число которых равно l (далее i — номер объекта, $i = \overline{1, l}$):

- объекты не должны выходить за ограничения, наложенные на курсовой угол φ_i:

$$\cos\varphi_i > 0°; \tag{3}$$

- направление движения ЛА и БПЛА на группу объектов должно осуществляться во встречном направлении, т. е. должно выполняться ограничение относительно ракурса q_i:

$$\cos q_i > 0; \tag{4}$$

- формирование маршрута должно выполняться с возможно малой разностью курсовых углов между крайними объектами:

$$|\varphi_{max} - \varphi_{min}| < 30°, \tag{5}$$

где φ_{max}, φ_{min} — курсовые углы объектов с максимальными и минимальными значениями;

- минимальная радиальная составляющая скорости каждого i-го объекта группы должна удовлетворять условию:

$$|V_{оi} \cos q_i| > 60 \text{ м/с}; \tag{6}$$

- объекты, для которых доставляется груз, проранжированы; определен объект, получающий груз первым.

Формализуем описанную задачу как задачу математического программирования. Вес каждого узла $V_у$ в итерациях определяется по формуле

$$V_у = \sum_{m=1}^{3} Q_{шт_m} + Q_{кач}, \tag{7}$$

где $Q_{кач}$ — отражает требования к траектории ЛА и служит для формирования маршрута с возможной малой разностью курсовых углов между крайними объектами группы получателей; $Q_{штm}$ — функция штрафа, назначаемая в том случае, если значения параметров, вычисленных в узле, выходят за ограничения (3)—(6), которая рассчитывается по формулам

$$Q_{шт1} = \sum_{i=1}^{l} Q_{шт1_i}; \tag{8}$$

$$Q_{шт1_i} = \begin{cases} 0, \text{если ЛА совершает полет} \\ \text{навстречу объектам;} \\ \beta_1 \ \text{иначе;} \end{cases} \tag{9}$$

$$Q_{шт2} = \sum_{i=1}^{l} Q_{шт2_i}; \tag{10}$$

$$Q_{шт_{2i}} = \begin{cases} 0, \text{если } \varphi_i < 90°; \\ \beta_2, \text{если } \varphi_i \geqslant 90°; \end{cases} \tag{11}$$

$$Q_{шт3} = \begin{cases} 0, \ \text{если } |\varphi_{max} - \varphi_{min}| < 30°; \\ \beta_3, \ \text{если } |\varphi_{max} - \varphi_{min}| \geqslant 30°; \end{cases} \tag{12}$$

$$Q_{кач} = \beta_4 \left| 0,52 - |\varphi_{max} - \varphi_{min}| \right|, \tag{13}$$

где β_1, ..., β_4 — коэффициенты, значения которых выбираются в зависимости от типа многофункционального ЛА.

Таким образом, сформируем критерий для задачи оптимизации направления траектории движения как наименьшее значение функционала в одном из трех сгенерированных узлов:

$$I_k = I_{k-1} + V_n \to \min, \tag{14}$$

где I_{k-1} — значение функционала в узле, из которого происходит генерация (для первой итерации $I_0 = 0$), k — номер итерации.

В результате циклической генерации отрезков получается постоянно возрастающее число вариантов маршрута, имеющих одну общую точку. Из образовавшихся трех узлов выбирается узел с наименьшим значением функционала, и генерация группы направлений повторяется.

Полученная модель относится к классу целочисленных линейных моделей математического программирования. Решать такие задачи легче при замене целочисленных переменных булевыми. Введем булевую переменную y_n:

$$y_n = \begin{cases} 1, \text{ если используется} \\ n\text{-я ветвь из трех}; \\ 0 \text{ в противном случае}. \end{cases} \quad (15)$$

Тогда на каждом шаге выбора направления движения решается задача

$$\sum_{n=1}^{3} V_{\text{у}} y_n \to \min \quad (16)$$

при условии, что на каждой итерации всегда выбирается единственная ветвь:

$$\sum_{n=1}^{3} y_n = 1. \quad (17)$$

При этом на каждом шаге работы алгоритма формируется показатель (16), а вес $V_{\text{у}}$ сгенерированной ветви рассчитывается с использованием выражений (8)—(13).

Задача (16)—(17) представляет собой линейную модель целочисленного математического программирования с булевыми переменными.

Особенностью полученной математической модели (16)—(17) по сравнению с общей линейной моделью дискретного математического программирования с булевыми переменными является наличие ограничения, указывающего на то, что из всего множества переменных y_n выбирается лишь одна переменная, принимающая значение, равное единице.

В технической задаче ограничения такого типа возникают, так как в рассматриваемой постановке задачи необходимо выбрать лишь одну сгенерированную ветвь.

Для полученного класса целочисленных моделей разработано два общих метода генерирования специальных ограничений: метод ветвей и границ и метод отсекающих плоскостей. Опыт вычислений свидетельствует, что для моделей типа (16)—(17) метод ветвей и границ более успешно решает задачу, чем метод отсекающих плоскостей [11, 12].

Алгоритм оптимизации направления траектории движения ЛА

Алгоритм оптимизации траектории движениям многофункционального ЛА создан на базе метода ветвей и границ. Этот метод позволяет, не осуществляя полный перебор вариантов решения задачи целочисленного линейного программирования, найти оптимальное решение. Он гарантированно эффективен, когда размерность полученной модели не превышает десятка переменных и ограничений.

Суть метода ветвей и границ основывается на последовательном исключении из рассмотрения областей, не содержащих целочисленных решений, путем введения надлежащих ограничений. Данный метод изменяет пространство решений задачи линейного программирования так, что в конечном счете получается оптимальное решение задачи целочисленного программирования.

Разработанный алгоритм имеет пошаговую структуру. Его блок-схема приведена на рис. 1.

Шаг 1. Вычисление исходного состояния центра группы объектов

$$X_{\text{гр}} = \frac{\sum_{i=1}^{l} X_{\text{O}i}}{l}; Z_{\text{гр}} = \frac{\sum_{i=1}^{l} Z_{\text{O}i}}{l}; \psi_{\text{гр}} = \frac{\sum_{i=1}^{l} \psi_{\text{O}i}}{l}, \quad (18)$$

где $X_{\text{гр}}$, $Z_{\text{гр}}$ — координаты группы, $\psi_{\text{гр}}$ — курс группы; l — число объектов в группе; $X_{\text{O}i}$, $Z_{\text{O}i}$ — координаты объектов для текущей итерации; $\psi_{\text{O}i}$ — курс необслуженных объектов.

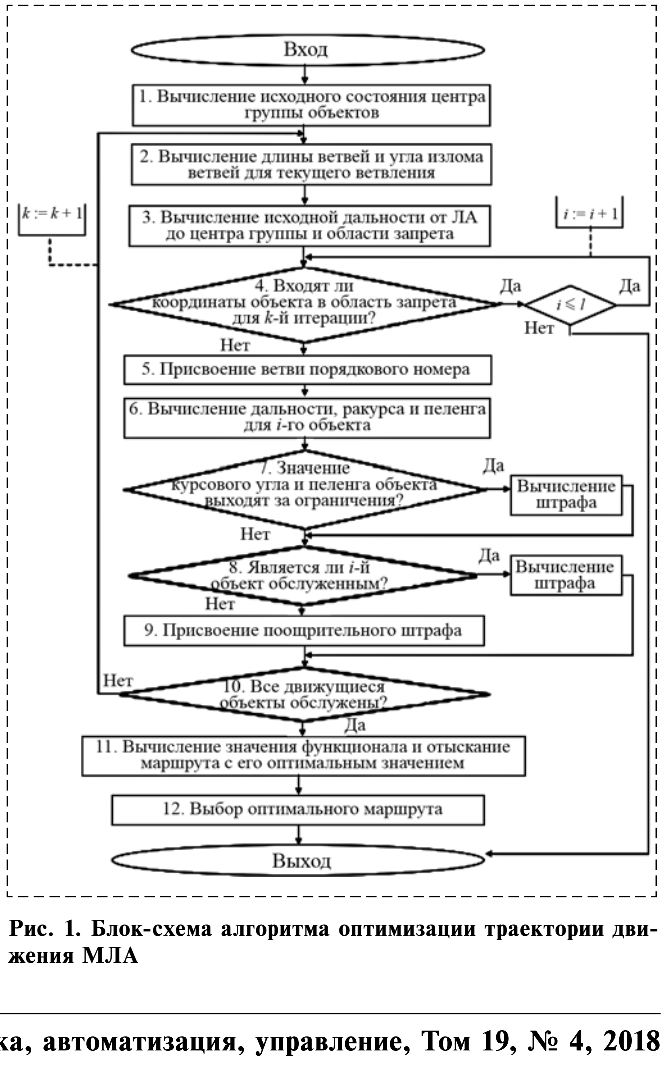


Рис. 1. Блок-схема алгоритма оптимизации траектории движения МЛА

Шаг 2. Вычисление длины ветвей для текущего ветвления T_n и угла излома ветвей относительно текущего курса ЛА ρ_n:

$$T_n = \frac{(D_б - D_в)}{K_1},$$
$$T_n = \begin{cases} 30, \text{ если } T > 30; \\ T_n, \text{ если } 30 \geqslant T \geqslant 6; \\ 6, \text{ если } T < 6, \end{cases} \quad (19)$$

где T_n — длина ветви для текущего ветвления; $D_б$ — расстояние от ЛА до ближайшего объекта группы; $D_в$ — дальность выпуска БПЛА до ближайшего объекта; K_1 — коэффициент усиления;

$$\rho_n = \sum_{n=1}^{3} j(-1)^n \rho;$$
$$\rho = \frac{g \operatorname{tg} \gamma_{\max} t}{V_{ЛА}}, \quad (20)$$

где $V_{ЛА}$ — скорость ЛА; $\gamma_{\max}$ — максимально допустимый крен ЛА; t — текущее время полета ЛА. Формулы (19) и (20) были получены в ходе моделирования.

Шаг 3. Вычисление исходной дальности от центра группы до многофункционального ЛА:

$$D = \sqrt{(X_{ЛА} - X_{гр})^2 + (Z_{ЛА} - Z_{гр})^2}, \quad (21)$$

где D — исходная дальность от центра группы до маневренного ЛА; $X_{ЛА}$, $Z_{ЛА}$ — координаты ЛА в момент входа в алгоритм.

На данном шаге также проводится расчет области запрета Δx, Δz, $\Delta\psi$ и координат объектов группы для текущего ветвления $X'_{оi}$, $Z'_{оi}$ и координаты ЛА для конца n-й генерируемой в алгоритме ветви в каждой итерации $x_{ЛАn}$, $z_{ЛАn}$:

$$\Delta x = \Delta z = K_2 V_{ЛА} T_n,$$
$$\Delta\psi = K_3, \quad (22)$$

где $V_{ЛА}$ — скорость полета ЛА; T_n — длина ветвей для текущего ветвления; K_2 и K_3 — коэффициенты усиления;

$$X'_{оi} = X_{оi} + \left(\sum_{k=1}^{n} t_{пр}\right) V_{оXi};$$
$$Z'_{оi} = Z_{оi} + \left(\sum_{k=1}^{n} t_{пр}\right) V_{оZi}, \quad (23)$$

где $V_{оXi}$, $V_{оZi}$ — проекции скоростей объектов для текущей итерации; $\psi_{обi}$ — курс необслуженных объектов; $\sum_{k=1}^{n} t_{Пр}$ – время прохождения ЛА одного из сгенерированных маршрутов;

$$x_{ЛАn} = x_{ЛА\,\min} + V_{ЛА}\cos(\psi_{ЛА\,\min} + \Delta\psi_n);$$
$$z_{ЛАn} = z_{ЛА\,\min} + V_{ЛА}\sin(\psi_{ЛА\,\min} + \Delta\psi_n), \quad (24)$$

где $x_{ЛА\,\min}$, $z_{ЛА\,\min}$, $\psi_{ЛА\,\min}$ — координаты и курс ЛА, в которых значение функционала минимально; $\Delta\psi_j$ — приращение курса относительно $\psi_{ЛА\,\min}$ для n-й ветви из генерируемого числа в каждой итерации.

Шаг 4. Исключение из рассмотрения объектов, выходящих за области запрета, что проверяется выполнением условий:

$$\begin{cases} \left|x_{ЛАn} - x_{ЛА_0}\right| < \Delta x; \\ \left|z_{ЛАn} - z_{ЛА_0}\right| < \Delta z; \\ \left|\psi_{ЛАn} - \psi_{ЛА_0}\right| < \Delta\psi, \end{cases} \quad (25)$$

где $x_{ЛА_0}, z_{ЛА_0}, \psi_{ЛА_0}$ — координаты и курс ЛА в начальный момент входа в алгоритм.

Шаг 5. Присвоение ветви порядкового номера.

Шаг 6. Вычисление дальности D_i, курсового угла φ_i и ракурса q_i на i-й объект по формулам

$$D_i = \sqrt{\left(X_{ЛА} - X'_{оi}\right)^2 + \left(Z_{ЛА} - Z'_{оi}\right)^2};$$
$$\cos q_i = \frac{\left(V_{оXi}\left(X_{ЛА} - X_{оi}\right) + V_{оZi}\left(Z_{ЛА} - Z_{оi}\right)\right)}{V_{ЛА}};$$
$$\cos\varphi_i = \frac{\left(V_{оXi}\left(X_{ЛА} - X_{оi}\right) + V_{оZi}\left(Z_{ЛА} - Z_{оi}\right)\right)}{\left(V_{ЛА}, D_i\right)}.$$

Шаг 7. Проведение проверки выхода курсового угла и ракурса объекта за наложенные ограничения, а также дополнительная проверка факта обслуживания объекта.

В случае, если объект исключается из рассмотрения, назначаются штрафы (8)—(12).

Шаг 8. Проверка, проводимая в целях определения факта доставки груза движущемуся объекту (вылета БПЛА к данному объекту).

Шаг 9. Присваивается "поощряющий" штраф со знаком минус, вычисляемый по формуле (13), в случае, если объект является обслуженным.

Шаг 10. Проверяется факт обслуживания всех движущихся объектов. В том случае, если не все объекты обслужены, проводятся новые итерации (число k ограничено 300 итерациями ввиду вычислительных возможностей и выполнения поставленной задачи).

Шаг 11. Значение функционала n-й ветви складывается из значения функционала ветви, из которой она была сгенерирована, и суммы функций качества и штрафа, вычисленных для данной ветви (14).

Шаг 12. Условием окончания работы алгоритма является факт обслуживания всех объектов группы получателей при минимуме (14). Сумма значений функционала во всех узлах маршрута составляет цену маршрута. Выбор оптимального маршрута. Оптимальным будет маршрут, обеспечивающий максимальное число обслуженных объектов (минимум цены).

Результаты экспериментов по выбору направления движения маневренного ЛА при доставке грузов группе движущихся объектов

№ эксперимента	Начальные координаты многофункционального ЛА ($X_{ЛА}$, $Z_{ЛА}$), км	Начальные координаты движущихся объектов ($X_о$, $Z_о$), км	Длина ветви T_j, м	Угол излома ветвей, °	Значение функционала I_n	Номер оптимального маршрута
1	(0,0)	(130,10) (120,20) (100,30) (100,40)	23,3	16,8	27,8	3
2	(0,0)	(100,10) (110,20) (120,30) (90,40)	15	13,5	48,6	1
3	(0,0)	(70,10) (60,20) (50,30) (40,40)	11	18,3	32,5	2

Компьютерная апробация алгоритма

Для тестирования и отработки разработанного алгоритма выбора оптимального направления движения многофункционального ЛА использована его упрощенная имитационная модель в виде дифференциальных уравнений [13]. Программная реализация модели реализована в среде Visual Studio 2012.

На первом этапе (для разработанного алгоритма оптимизации направления движения ЛА) при моделировании учитываются следующие требования:

- в качестве доставляющего ЛА рассматривается современный многофункциональный ЛА;
- в качестве получателей груза рассматриваются движущиеся в группе объекты;
- очередность доставки БПЛА грузов определяется критерием обслуживания максимального числа объектов группы получателей;
- под приоритетом доставки грузов будем рассматривать заданную степень их значимости, определяемую путем задания первого объекта из группы (ограничение на ранжирование объектов);
- число движущихся объектов не может превышать четырех:
- объекты движутся параллельно вектору средней скорости с неизменными по времени модулями собственных скоростей:
- в качестве БПЛА рассматриваются БПЛА среднего класса;
- дальность пусков БПЛА ограничивается энергетикой БПЛА;
- при проведении моделирования прията гипотеза о прямолинейном движении объектов, для которых доставляется груз;
- объекты не эшелонированы по высоте;
- объекты не маневрируют;
- в продольном канале многофункциональный ЛА работает в режиме стабилизации высоты; скорости всех объектов составляют 50 км/ч;
- скорость многофункционального ЛА составляет 500 км/ч.

Характерные результаты моделирования для четырех экспериментов приведены в таблице.

Для движущихся объектов и при различных координатах многофункционального ЛА осуществлялось моделирование доставки груза четырем получателям. В зависимости от координат многофункционального ЛА получены различные варианты выбора направления его движения.

Отличительной особенностью описанного эксперимента 1 является приоритет доставки, которым обладает движущийся объект под номером 1. Для экспериментов 2 и 3 таблицы приоритетными будут является объекты под номерами 2.

На рис. 2 представлен результат работы алгоритма оптимизации направления траектории движения многофункционального ЛА. Многофункциональный ЛА стартует из точки 1. Навстречу ему из точек А, Б, В, Г прямолинейно движутся четыре объекта, которым доставляется груз. В точках 1—5 сгенерированы направления траекторий движения многофункционального ЛА. В этих точках алгоритм осуществляет выбор оптимального направления полета ЛА, которое заканчивается точкой 6, где выбор направления повторяется.

Условием окончания расчета направления траектории движения многофункционального ЛА является (для варианта № 1) обеспечение доставки грузов всем четырем объектам. В точке 6 осуществляется выпуск БПЛА с грузом для каждого объекта.

Для второго и третьего экспериментов получены аналогичные результаты. Успешно построены траектории многофункционального ЛА, обеспечивающие доставку грузов всем четырем объектам.

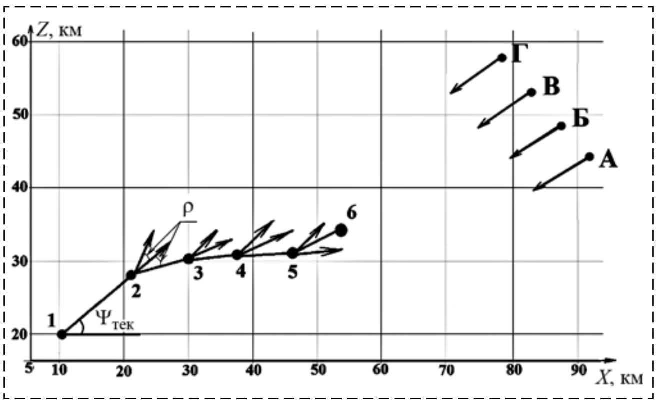


Рис. 2. Схематичное представление построения ветвей для эксперимента 1

Заключение

Разработан алгоритм выбора оптимального направления движения многофункционального ЛА. Его особенностью является учет ограничений технических возможностей ЛА и условий движения группы объектов и приоритетов обслуживания объектов в группе с точки зрения важности доставки грузов. Алгоритм осуществляет выбор направления траектории полета многофункционального ЛА, предусматривающий выход в точку маршрута, где выпущенные БПЛА доставят груз максимальному числу объектов, движущихся навстречу ЛА.

Компьютерное моделирование подтвердило работоспособность алгоритма оптимизации направления траектории движения многофункционального ЛА. Полученные данные могут быть использованы в качестве исходной информации для алгоритма текущей оптимизации траектории полета многофункционального ЛА. Описанию этого алгоритма будет посвящена отдельная статья (ввиду значительного объема соответствующих алгоритмов).

Совместная работа двух алгоритмов позволит решать задачи в полном объеме: вывести многофункциональный ЛА в точку, где грузы будут доставлены группе движущихся объектов.

Список литературы

1. **Авиация** ПВО России и научно-технический прогресс: боевые комплексы и системы, вчера, сегодня, завтра. М.: Дрофа, 2004. 816 с.

2. **Yanbin Liu, Dibo Xiao, Yuping Lu.** Comparative study on a solving model and algorithm for a flush air data sensing system // Sensors. 2014. Vol. 14. P. 9210—9226.

3. **Tsung-Ying Sun, Shang-Jeng Tsai.** Intelligent maneuvering decision system for computer generated forces using predictive fuzzy inference system // Journal of computers. November 2008. Vol. 3, N. 11. P. 58—66.

4. **Нейрокомпьютеры** в авиации (самолеты) / Под ред. В. И. Васильева, Б. Г. Ильясова, С. Т. Кусимова. Кн. 14. М.: Радиотехника, 2003. 496 с.

5. **Лунев Е. М., Павлова Н. В.** Программно-алгоритмическое обеспечение для определения навигационных параметров беспилотного летательного аппарата на базе фотоизображения // Вестник МАИ. 2009. Т. 16, № 6. С. 111—119.

6. **Веремеенко К. К., Пронькин А. Н., Репников А. В.** Алгоритмы структурной перестройки бортовых подсистем интегрированной системы посадки беспилотного летательного аппарата // Электронный журнал "Труды МАИ". 2011. № 49.

7. **Лунев Е. М.** Повышение точности определения навигационных параметров беспилотного летательного аппарата на базе фотографических измерений на этапе посадки // Вестник МАИ. 2011. Т. 18, № 2. С. 150—159.

8. **Раскин Л. Г.** Анализ сложных систем и элементы теории оптимального управления. М.: Сов. радио, 1976. 344 с.

9. **Andrzej Majka.** Trajectory Management of the Unmanned Aircraft System (UAS) in Emergency Situation // Aerospace. 4 May 2015. С. 222—234.

10. **Павлова Н. В., Видов К. С., Гусев Д. Н., Харченко Д. Н.** Обработка измерений и исходной информации для обеспечения безопасности движения летательных аппаратов в группе // Вестник МАИ. 2013. Т. 20, № 2. С. 140—148.

11. **Таха Хэмди А.** Введение в исследование операций. М.: Издательский дом "Вильямс", 2001. 912 с.

12. **Агеев В. М., Павлова Н. В.** Приборные комплексы летательных аппаратов и их проектирование: Учебник для студентов вызов по специальности "Авиационные приборы и измерительно-вычислительные комплексы". М.: Машиностроение, 1990. 432 с.

13. **Красовский А. А., Буков В. Н., Шендрик В. С.** Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. М.: Наука, 1977. 272 с.

Choice of the Direction of the Movement Aircraft for Cargo Delivery to Group of Moving Objects. Part 1. An Exit in a Point of Start of the UAV

A. V. Golubkina, annatutta@gmail.com, **N. V. Pavlova**,
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russian Federation

Corresponding author: **Golubkina Anna V.,** Graduate Student,
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow,
125993, Russian Federation, e-mail: annatutta@gmail.com

Accepted on December 01, 2017

At present, special attention is paid to the joint use of modern multifunctional aircraft (MA) and unmanned aircraft (UAV). One of the possible scenarios for interaction between aircraft and UAV is the delivery of goods to a group of moving objects. Effective implementation of the mission assigned to the complex (the aircraft and the UAV group on its board) requires the development of appropriate software and algorithmic support (AS). The article is devoted to the development of a AS, which allows to select the optimal trajectory of a multifunctional aircraft that delivers the UAV and which, in its turn, delivers the goods to a group of moving objects. One of the actual tasks assigned to the aircraft is the delivery of goods to a group of objects moving in difficult-to-reach terrain, also when there is no runway. In described case, when delivering an expensive cargo (for example, high-tech equipment), one of the effective methods is the use of MA carrying a UAV group on board, each at the final stage delivers the cargo to one of the objects. The task is complicated if objects are moving. One *of the ways to improve the efficiency of solving this problem is to form an optimal control trajectory for a multifunctional aircraft to bring it to a certain point from which the UAV is launched. The algorithm of the first stage, considering the restrictions imposed by technical capabilities of MLA and traffic conditions of group of objects is developed. The results of modeling confirming operability of the developed algorithm are presented.*

Keywords: *modern multifunctional aircraft, unmanned aircraft, algorithmic support, optimal control trajectory*

For citation:

Golubkina A. V., Pavlova N. V. Choice of the Direction of the Movement Aircraft for Cargo Delivery to Group of Moving Objects. Part 1. An Exit in a Point of Start of the UAV, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 4, pp. 282—288.

DOI: 10.17587/mau.19.282-288

References

1. ***Aviacija*** *PVO Rossii I nauchno-tehnicheskij progress: boevye kompleksy I sistemy, vchera, segodnja, zavtra* (Aircraft of air defense of Russia and научно-технический progress: fighting complexes and systems, yesterday, today, tomorrow), Moscow, Drofa, 2004, 816 p. (in Russian).

2. **Yanbin Liu, Dibo Xiao, Yuping Lu.** Comparative study on a solving model and algorithm for a flush air data sensing system, *Sensors*, 2014, vol. 14, pp. 9210—9226.

3. **Tsung-Ying Sun, Shang-Jeng Tsai.** Intelligent maneuvering decision system for computer generated forces using predictive fuzzy inference system, *Journal of Computers*, November 2008, vol. 3, no. 11, pp. 58—66.

4. **Vasil`ev V. I., Il`jasov B. G., Kusimov S. T.** ed. Nejrokomp`jutery v aviacii (samolety) (Neurocomputers in aircraft (planes)), Moscow, Radiotehnika, 2003, 496 p. (in Russian).

5. **Lunev E. M., Pavlova N. V.** *Programmno-algoritmicheskoe obespechenie dlja opredelenija navigacionnyh parametrov bespilotnogo letatel`nogo apparata nabaze fotoizobrazhenija* (Program and algorithmic providing for determination of navigation parameters of the unmanned aerial vehicle based of the facsimile), *Vestnik MAI*, 2009, vol. 16, no. 6, pp. 111—119 (in Russian).

6. **Veremeenko K. K., Pron`kin A. N., Repnikом A. V.** *Algoritm struktunoj perestojki bortovyh porsistem integrirovannoj sistemy posadki bespilotnogo apparata* (Algorithms of restructuring of onboard subsystems of the integrated system of landing of the unmanned aerial vehicle), *Jelektronnyj zhurnal "Trudy MAI"*, 2011, no. 49 (in Russian).

7. **Lunev E. M.** *Povyshenie tosnosti opredelenija navigacionnyh parametrov bespilotnogo letatel`nogo apparata na baze fotograficheskih izmerenij na jetape posadki* (Increase in accuracy of determination of navigation parameters of the unmanned aerial vehicle on the basis of photographic measurements at a landing stage), *Vestnik MAI*, 2011, vol. 18, no. 2, pp. 150—159 (in Russian).

8. **Raskin L. G.** Analiz slozhnyh system i jelementy teorii optimal`nogo upravlenija (Analysis of difficult systems and elements of the theory of optimum control), Moscow, Sov. radio, 1976, 344 p. (in Russian).

9. **Majka A.** Trajectory Management of the Unmanned Aircraft System (UAS) in Emergency Situation, *Aerospace*, 4 May 2015, pp. 222—234.

10. **Pavlova N. V., Vidov K. S., Gusev D. N., Harchenko D. N.** *Obrabotka izmerenij I ishodnoj informacii dlja obespechenija bezopasnosti dvizhenija letatel`nyh apparatov v gruppe* (Processing of measurements and initial information for safety of the movement of aircraft in group), *Vestnik MAI*, 2013, vol. 20, no. 2, pp. 140—148 (in Russian).

11. **Taha Hjemdi A.** *Vvedenie v issledovanie operacij* (Introduction to a research operation), Moscow, Izdatel`skij dom "Vil`jzms", 2001, 912 p. (in Russian).

12. **Ageev V. M., Pavlova N. V.** *Pribornye kompleksy letatel`nyh apparatov i ih proektirovanie uchebnik dlja studentov VUZov po special`nosti "Aviacionnye pribory I izmeritel`no-vychislitel`nye kompleksy"* (Instrument complexes of aircraft and their design: The textbook for students a call in "Aviation devices and measuring computer systems"), Moscow, Mashinostroenie, 1990, 432 p. (in Russian).

13. **Krasovskij A. A., Bukov V. N., Shendrik V. S.** Universaln`nye algoritmy optimal`nogo upravlenija nepreryvnymi processami (Universal algorithms of optimum control of continuous processes), Moscow, Nauka, 1977, 272 p. (in Russian).

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5510, (499) 269-5397**

Технический редактор *Е. В. Конова.* Корректор *З. В. Наумова.*

Сдано в набор 22.01.2018. Подписано в печать 14.03.2018. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН418. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.

Рисунки к статье Б. И. Адамова, А. И. Кобрина «ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МОБИЛЬНОЙ РОБОТИЗИРОВАННОЙ ПЛАТФОРМЫ ВСЕНАПРАВЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ *KUKA youBot*»

Рис. 1. Мобильный робот всенаправленного движения *youBot*:
а – общий вид робота с одним манипулятором с устройством захвата;
б – роликонесущее меканум-колесо (*1* – диск колеса; *2* – ролики)

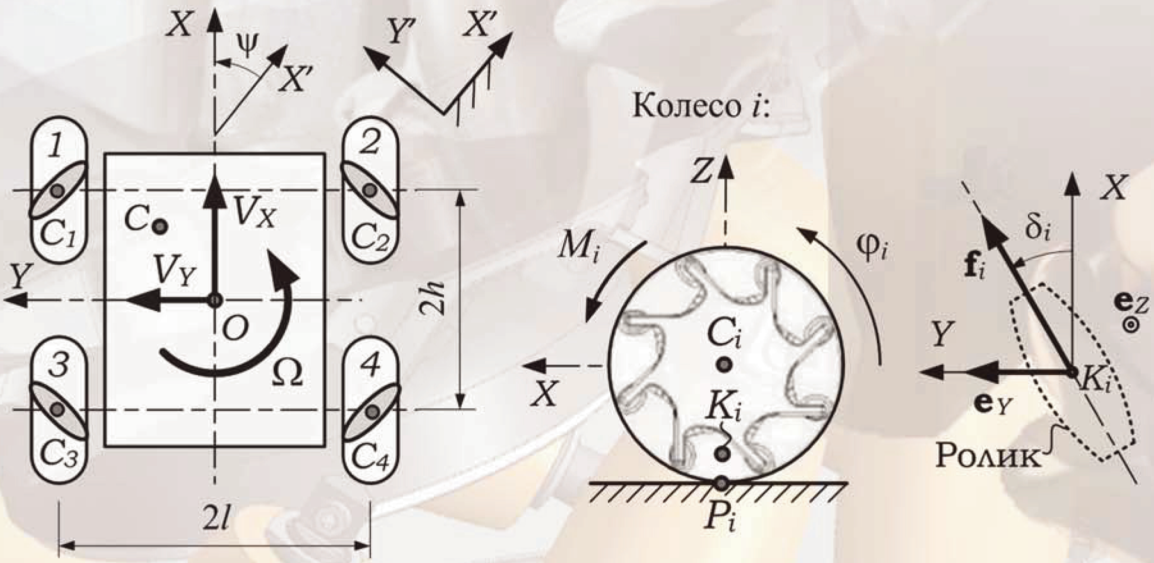


Рис. 2. Схема мобильного робота (указаны положения роликов, контактирующих с подстилающей поверхностью)

Издательство “НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ” выпускает *научно-технические журналы*

Теоретический и прикладной научно-технический журнал

ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ

В журнале освещаются состояние и тенденции развития основных направлений индустрии программного обеспечения, связанных с проектированием, конструированием, архитектурой, обеспечением качества и сопровождением жизненного цикла программного обеспечения, а также рассматриваются достижения в области создания и эксплуатации прикладных программно-информационных систем во всех областях человеческой деятельности.

Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 22765; «Пресса России» – 39795

Ежемесячный теоретический и прикладной научно-технический журнал

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития основных направлений в области разработки, производства и применения информационных технологий.

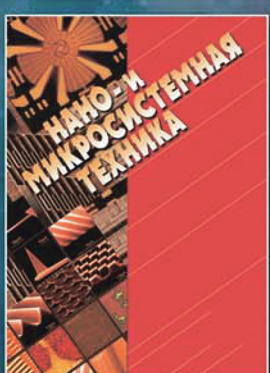
Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 72656; «Пресса России» – 94033

Научно-практический и учебно-методический журнал

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В журнале освещаются достижения и перспективы в области исследований, обеспечения и совершенствования защиты человека от всех видов опасностей производственной и природной среды, их контроля, мониторинга, предотвращения, ликвидации последствий аварий и катастроф, образования в сфере безопасности жизнедеятельности.

Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 79963; «Пресса России» – 94032



Ежемесячный междисциплинарный теоретический и прикладной научно-технический журнал

НАНО- и МИКРОСИСТЕМНАЯ ТЕХНИКА

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития нано- и микросистемной техники, рассматриваются вопросы разработки и внедрения нано- и микросистем в различные области науки, технологии и производства.

Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 79493; «Пресса России» – 27849

Все журналы распространяются только по подписке.

Оформить подписку можно через подписные агентства либо непосредственно в редакции журналов.

Адрес редакции журналов для авторов и подписчиков:
107076, Москва, Стромынский пер., 4. Издательство “НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ”
Тел.: (499) 269-55-10, 269-53-97. Факс: (499) 269-55-10.
E-mail: antonov@novtex.ru

ISSN 1684-6427. МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ. 2018. Том 19. № 4. 217–288. Индексы: 79492 (“Роспечать”), 27848 (“Пресса России”)