DOI 10.17587/issn.1684-6427 ISSN 1684-6427

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 19
2018
№ 3

Рисунок к статье С. В. Харузина, О. А. Шмакова

«ВИЗУАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЛОКОМОЦИОННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕКОНФИГУРИРУЕМОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА»

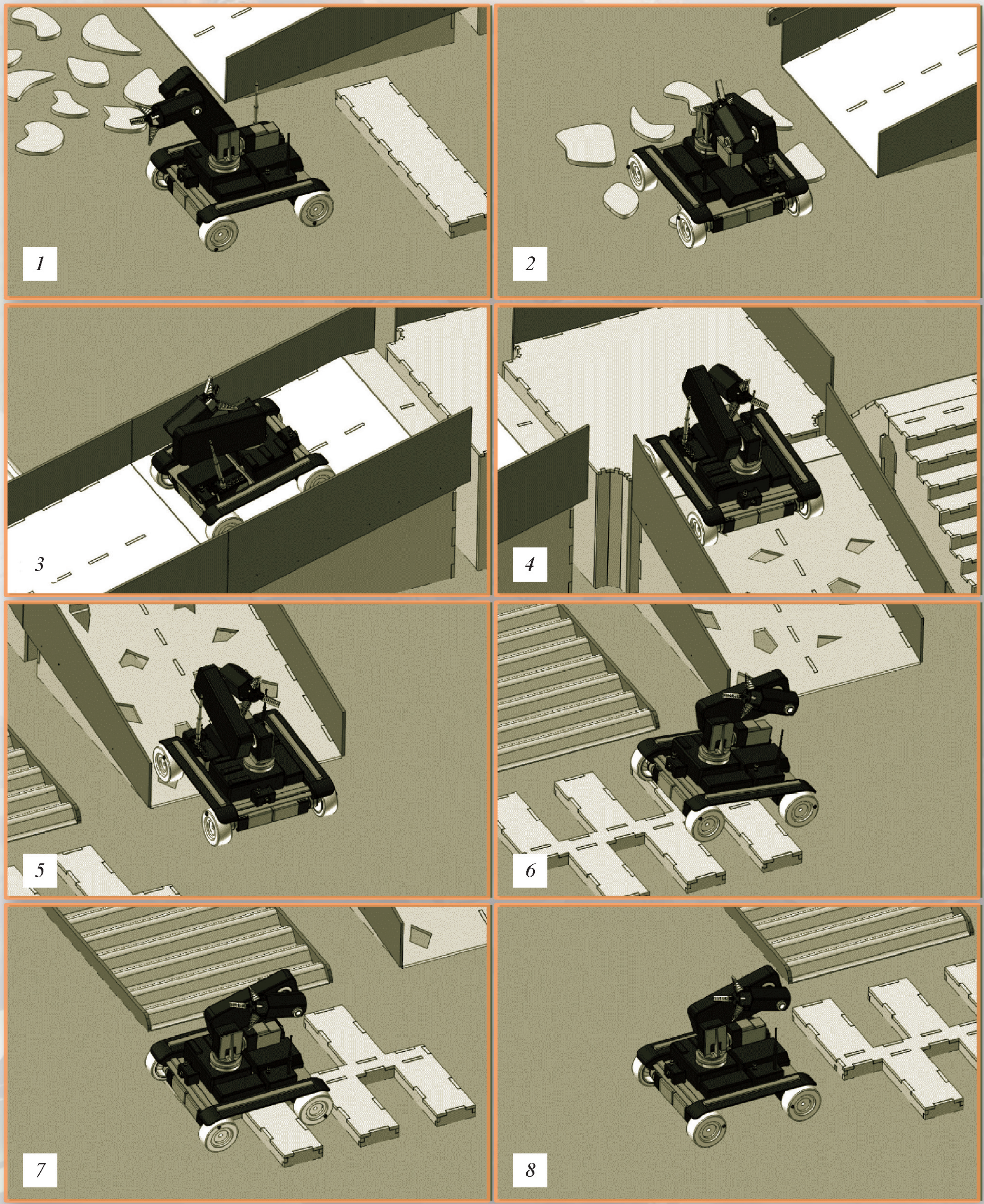


Рис. 6. Кинограмма анимации результатов виртуального моделирования движения колесного мобильного робота по полигону

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 19
2018
№ 3

Издается с ноября 2000 года ISSN 1684-6427 DOI 10/17587/issn.1684-6427

СОДЕРЖАНИЕ

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в БД RSCI на платформе Web of Science.

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу: http://novtex.ru/mech, e-mail: mech@novtex.ru

THEORETICAL AND APPLIED SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL

Vol. 19
2018
No. 3

MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000 ISSN 1684-6427 DOI 10/17587/issn.1684-6427

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospectives development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

Information about the journal is available online at:
http://novtex.ru/mech.html, e-mail: mech@novtex.ru

УДК 531.36; 62-50 DOI: 10.17587/mau.19.147-152

В. И. Воротников, д-р физ.-мат. наук, проф., vorotnikov-vi@rambler.ru,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург,
Ю. Г. Мартышенко, канд. физ.-мат. наук, доц., j-mart@mail.ru,
Российский государственный университет нефти и газа, г. Москва

К задаче устойчивости по вероятности "частичных" положений равновесия нелинейных стохастических систем

Рассматривается общий класс нелинейных стохастических систем дифференциальных уравнений в форме Ито, допускающих "частичное" (по части переменных) нулевое положение равновесия. В контексте метода функций Ляпунова получены условия устойчивости по вероятности данного положения равновесия по отношению не ко всем определяющим его переменным, а к их заданной части. Наряду с основной функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова. Обсуждается вопрос унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных стохастических систем.

Ключевые слова: *стохастическая система в форме Ито, частичная устойчивость по вероятности, метод функций Ляпунова*

Введение

Начиная с работ французского физика П. Ланжевена, стохастические системы дифференциальных уравнений широко применяются при моделировании процессов (в том числе и управляемых), подверженных воздействию случайных факторов [1—3].

Сначала в основном исследовались системы дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x})\xi(t) \qquad (1)$$

в конечномерном евклидовом пространстве с минимальными требованиями к случайному процессу $\xi(t)$. Однако если предположить, что система (1) сохраняет такое фундаментальное свойство "укороченной" системы дифференциальных уравнений $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$, как отсутствие последействия, то случайный процесс $\xi(t)$ необходимо считать белым шумом. Поскольку указанное предположение достаточно реалистично, то модели с белыми шумами относятся к часто используемым. Если $\xi(t)$ — "физический" белый шум, когда компоненты вектора $\xi(t)$ являются нормальными случайными процессами с конечным временем корреляции, пренебрежимо малым в масштабе времени, принятом для "укороченной" системы, то такая нестрогая модель получила название системы уравнений Ланжевена.

Модель Ланжевена приобретает строгий математический смысл при замене физического белого шума абстрактным. Такая замена не является однозначной. Наибольшее распространение получили стохастические системы дифференциальных уравнений К. Ито и Р. Л. Стратоновича. Стохастические уравнения Стратоновича более адекватно описывают физические явления, в то время как уравнения Ито более удобны с точки зрения математического анализа. Связь между данными формами стохастических уравнений, позволяющая перейти от одной формы уравнений к другой, дает конструктивную схему анализа динамических моделей, содержащих случайные процессы: построение моделей Ланжевена и, на их базе, стохастических моделей Стратоновича, с последующим переходом к более удобным для математических исследований моделям стохастических систем дифференциальных уравнений Ито.

Разработка подходов к исследованию устойчивости стохастических систем началась во второй половине XX столетия. Как и в случае детерминированных систем, при этом использовался метод функций Ляпунова в соответствующей модификации. Первоначально результаты выражались либо в терминах существования функций Ляпунова, для которых математические ожидания производных в силу системы дифференциальных уравнений являются неотрицательными, либо в терминах существования функций Ляпунова для "укороченной" системы. Однако для вычисления математических ожиданий производных требуется знание оценок решений исходной системы, а получаемые результаты на основе анализа "укороченной" системы являются слишком грубыми [1]. Более конструктивной оказалась идея И. Я. Каца и Н. Н. Красовского [4] использования усредненной производной V-функции, предложенная для изучения стохастических систем дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \eta(t)), \tag{2}$$

где $\eta(t)$ — однородная марковская цепь с конечным числом состояний. В этом случае для вычисления производной V-функции достаточно знать лишь правую часть системы (2) и вероятностные характеристики случайного процесса. Данный подход в значительной степени предопределил последующие исследования устойчивости стохастических систем дифференциальных уравнений Ито [1, 2], решения которых являются непрерывными марковскими процессами. Более того, оказалось возможным исследование устойчивости и более общих стохастических систем, совмещающих свойства систем указанных типов, включая системы, где в момент скачкообразного изменения марковской цепи $\eta(t)$ решение также может меняться скачком (случайным или неслучайным образом) [3, 5].

В данной статье рассматривается общий класс нелинейных стохастических систем дифференциальных уравнений в форме Ито, допускающих "частичное" (по некоторой части переменных) нулевое положение равновесия. Устойчивость данного положения равновесия, в свою очередь, анализируется также по отношению не ко всем определяющим его переменным, а только к их заданной части. При этом делается допущение о том, что начальные возмущения переменных, не определяющих "частичное" положение равновесия, могут быть большими (принадлежащими произвольному компактному множеству) по одной части и произвольными по оставшейся части этих переменных. Ранее такая задача рассматривалась для детерминированных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью [6—8], функционально-дифференциальных систем с последействием [9], а также для дискретных (конечно-разностных) систем [10].

Для решения поставленной задачи частичной устойчивости применяется стохастический вариант метода функций Ляпунова в соответствующей модификации. Получены условия частичной устойчивости указанного вида, обобщающие известные результаты. На основе предложенной в статье постановки задачи частичной устойчивости также обсуждается вопрос унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных стохастических систем.

Обзор проблемы частичной устойчивости динамических систем можно найти в работе [11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное действительное конечномерное пространство векторов $\mathbf{x}$ со стандартной евклидовой нормой $\|\mathbf{x}\|$. Введем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ ($^{\mathrm{T}}$ обозначает транспонирование).

Пусть дана нелинейная система стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито [1—3]

$$d\mathbf{x} = \mathbf{X}(t,\mathbf{x})dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_k(t,\mathbf{x})dw_k(t),$$

которую с учетом сделанного разбиения $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ представим в виде двух групп дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d\mathbf{y} &= \mathbf{Y}(t,\mathbf{y},\mathbf{z})dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}(t,\mathbf{y},\mathbf{z})dw_k(t); \\ d\mathbf{z} &= \mathbf{Z}(t,\mathbf{y},\mathbf{z})dt + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}k}(t,\mathbf{y},\mathbf{z})dw_k(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Вектор-функции $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}, \mathbf{Z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\sigma}_k = (\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}{}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{z}k}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, определяющие правые части системы (3), непрерывны по t, $\mathbf{x}$ в области $t \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| < \infty$; w_k — независимые одномерные винеровские процессы.

Если имеют место условия $\mathbf{Y}(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{y}k}(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv \mathbf{0}$, то множество $M = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ является "частичным" положением равновесия системы (3). Имея в виду анализ устойчивости положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ по отношению не ко всем определяющим его переменным, а только к их некоторой части, предположим также, что $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$. Будем считать, что вектор-функции $\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\sigma}_k$ равномерно по t удовлетворяют локальным условиям Коши—Липшица: для всякого числа $h > 0$ существует постоянная $K(h) > 0$ такая, что при $t \geqslant t_0$, $\|\mathbf{x}\| \leqslant h$ имеют место неравенства

$$\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}') - \mathbf{X}(t, \mathbf{x}'')\| \leqslant K\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|,$$
$$\|\boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x}') - \boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x}'')\| \leqslant K\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|.$$

Тогда для любых $t_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0$ существует единственный непрерывный почти наверное марковский процесс $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)$, являющийся решением (сильным) стохастической системы (3), а "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ является инвариантным множеством этой системы. Продолжимость при всех $t \geqslant t_0$ указанных решений гарантируют условия "линейного роста": существует постоянная $M > 0$ такая, что $\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\| \leqslant M(1 + \|\mathbf{x}\|)$, $\|\boldsymbol{\sigma}_k(t, \mathbf{x})\| \leqslant M(1 + \|\mathbf{x}\|)$ при $t \geqslant t_0$, $\|\mathbf{x}\| < \infty$.

Представим компоненту $\mathbf{z}$ вектора $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_2^{\mathrm{T}})$ и обозначим D_δ область значений $\mathbf{x}_0$

таких, что $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_{10}\| \leqslant L$, $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$. Случайный процесс $\mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ будем рассматривать на вероятностном пространстве [1—3], с вероятностной мерой $\mathbf{P}$.

Определения. "Частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (3) *при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$:

1) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво по вероятности* (устойчиво по вероятности по отношению к $\mathbf{y}_1$), если для каждого $t_0 \geqslant 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, t_0) > 0$ такое, что

$$\mathbf{P}\{\sup_{t\ \geqslant\ t_0} \|\mathbf{y}_1(t;\ t_0,\mathbf{x}_0)\| > \varepsilon\} < \gamma \tag{4}$$

для всех $t \geqslant t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$;

2) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво*, если $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$.

2. Условия частичной устойчивости по вероятности

Введем V-функции, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, являющиеся в области $G = \{t \geqslant 0, \|\mathbf{y}_1\| < h, \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty\}$ дважды непрерывно дифференцируемыми по $\mathbf{x}$ и один раз по t. Обозначим $\mathbf{L}V$ — дифференциальный производящий оператор V-функции в силу системы дифференциальных уравнений (3) ($\langle\cdot\rangle$ — знак скалярного произведения векторов) [1—3]:

$$\mathbf{L}V = \frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{X}(t,\mathbf{x}) \right\rangle + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\left(\left\langle \boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{T}}(t,\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle\right)^2 V,$$

являющийся стохастическим аналогом производной V-функции в силу детерминированной системы дифференциальных уравнений.

Для нахождения условий частичной устойчивости также рассмотрим: 1) вспомогательные скалярные функции $V^*(t,\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}_1)$, $V^*(\mathbf{y},\ \mathbf{z}_1)$ и вектор-функцию $\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{x})$, непрерывные в области G; 2) непрерывную монотонно возрастающую по $r > 0$ скалярную функцию $a(r)$, $a(0) = 0$.

Теорема 1. *Допустим, что для системы* (3), *наряду со скалярной V-функцией, можно указать векторную функцию* $\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{x})$, $\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, *причем для данных функций в области*

$$t \geqslant 0,\ \|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{x})\| < h_1 < h,\ \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{5}$$

выполняются условия:

$$V(t,\ \mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}_1\| + \|\boldsymbol{\mu}(t,\ \mathbf{x})\|), \tag{6}$$

$$V(t,\ \mathbf{x}) \leqslant V^*(t,\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}_1),\ V^*(t,\ \mathbf{0},\ \mathbf{z}_1) \equiv 0; \tag{7}$$

$$\mathbf{L}V(t,\ \mathbf{x}) \leqslant 0. \tag{8}$$

Тогда "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (3) $\mathbf{y}_1$*-устойчиво по вероятности при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство. Возьмем произвольное ε $(0 < \varepsilon < h_1)$, произвольный момент времени t_0, а также начальную точку $\mathbf{x}_0$ из области $D_\varepsilon = \{\|\mathbf{y}_0\| < \varepsilon,\ \|\mathbf{z}_{10}\| \leqslant L,\ \|\mathbf{z}_{20}\| < \infty\}$. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ $(t \geqslant t_0)$ системы дифференциальных уравнений (3) и обозначим τ_ε момент первого достижения процессом $\mathbf{x}(t;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)$ поверхности $\|\mathbf{y}_1\| = \varepsilon$. Если некоторые траектории этого процесса ни за какое конечное время не достигают поверхности $\|\mathbf{y}_1\| = \varepsilon$, то для них τ_ε считаем равным ∞. Положим $\tau_\varepsilon(t) = \min(\tau_\varepsilon,\ t)$.

На основании теории марковских процессов [1] имеем равенство ($\mathbf{E}$ — знак математического ожидания)

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t),\ \mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t);\ t_0,\mathbf{x}_0)) - V(t_0,\mathbf{x}_0)] = \\ &= \mathbf{E}\int_{t_0}^{\tau_\varepsilon(t)} \mathbf{L}V(s,\ \mathbf{x}(s;\ t_0,\mathbf{x}_0))ds. \end{aligned} \tag{9}$$

Поэтому из равенства (9) на основании условия (8) следует, что

$$\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t),\ \mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t);\ t_0,\mathbf{x}_0))] \leqslant V(t_0,\mathbf{x}_0). \tag{10}$$

Если правильно неравенство $t > \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon(t) = \tau_\varepsilon$), то выполняются соотношения $\|\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon(t);\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\| = \|\mathbf{y}_1(\tau_\varepsilon;\ t_0,\ \mathbf{x}_0)\| = \varepsilon$. Если же справедливо неравенство $t < \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau_\varepsilon(t) = t$), то на основании неравенства Чебышева и оценки (10) находим

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}[\|\ \mathbf{y}_1(t;\ t_0,\mathbf{x}_0)\ \| > \varepsilon] \leqslant \\ &\leqslant a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[a(\|\ \mathbf{y}_1(t;\ t_0,\mathbf{x}_0)\ \|)] \leqslant \\ &\leqslant a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[a(\|\ \mathbf{y}_1(t;\ t_0,\mathbf{x}_0)\ \| + \|\ \boldsymbol{\mu}(t;\ t_0,\mathbf{x}_0)\ \|)] \leqslant \\ &\leqslant a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[V(t,\ \mathbf{x}(t;\ t_0,\mathbf{x}_0))] = \\ &= a^{-1}(\varepsilon)\mathbf{E}[V(\tau_\varepsilon(t),\ \mathbf{x}(\tau_\varepsilon(t);\ t_0,\mathbf{x}_0))] \leqslant \\ &\leqslant a^{-1}(\varepsilon)V(t_0,\mathbf{x}_0). \end{aligned} \tag{11}$$

Поскольку функция $V(t,\ \mathbf{x})$ непрерывна, $V(t,\ \mathbf{0}) \equiv 0$, а также выполняются условия (7), то для всех $t_0 \geqslant 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение

$$\lim_{\mathbf{y}_0\ \to\ 0} V(t_0,\mathbf{x}_0) = 0 \tag{12}$$

выполняется при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leqslant L$ равномерно по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$.

Поэтому для всех $t_0 \geqslant 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ на основании неравенств (11), (12) имеем предельное соотношение

$$\lim_{\mathbf{y}_0\ \to\ 0} \mathbf{P}[\lim_{t\ >\ t_0} \|\ \mathbf{y}_1(t;\ t_0,\mathbf{x}_0)\ | > \varepsilon] = 0,$$

выполняющееся при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leqslant L$ равномерно по $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$.

В результате для каждого $t_0 \geqslant 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon,\ \gamma,\ L,\ t_0) > 0$ такое, что неравенство (4) имеет место для всех $t \geqslant t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (3) $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если условия* (7) *теоремы* 1 *заменить условиями*

$$V(t, \mathbf{x}) \leqslant V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1),\ V^*(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0, \tag{13}$$

то "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ *системы* (3) *равномерно* $\mathbf{y}_1$*-устойчиво по вероятности при больших значениях* $\mathbf{z}_{10}$ *в целом по* $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство. При выполнении условий (13) для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение (12) выполняется при $\|\mathbf{z}_{10}\| \leqslant L$ равномерно не только $\|\mathbf{z}_{20}\| < \infty$, но и по $t_0 \geqslant 0$.

В результате для каждого $t_0 \geqslant 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$ такое, что неравенство (4) имеет место для всех $t \geqslant t_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ "частичное" положение равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (3) равномерно $\mathbf{y}_1$-устойчиво по вероятности. Теорема доказана.

Замечания. 1. Вспомогательная V-функция и ее дифференциальный производящий оператор $\mathbf{L}V$ в силу системы (3) в теоремах 1, 2 являются, вообще говоря, *знакопеременными* в области

$$t \geqslant 0,\ \|\mathbf{y}_1\| < h_1 < h,\ \|\mathbf{y}_2\| + \|\mathbf{z}\| < \infty. \tag{14}$$

2. С использованием одной V-функции Ляпунова устойчивость по всем переменным ($\mathbf{y}$-устойчивость) "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ системы (3) рассмотрена [12, 13] при предположении $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, где δ может зависеть не только от ε, γ, t_0, но и от $\mathbf{z}_0$ (это условие эквивалентно условиям $\|\mathbf{y}_0\| < \delta$, $\|\mathbf{z}_0\| \leqslant L$, где δ зависит не только от ε, γ, t_0, но и от L). Поскольку вспомогательная V-функция и ее дифференциальный производящий оператор в силу системы (3) в теоремах 1, 2 могут быть знакопеременными в области (14), то полученные результаты являются более общими. Они основаны на использовании двух вспомогательных функций Ляпунова: наряду с основной V-функцией для наиболее рациональной замены области (14) областью (5) вводится дополнительная векторная $\boldsymbol{\mu}$-функция. Кроме того, условия (7) и (13) являются "промежуточными" по отношению к условиям $V(t, 0, \mathbf{z}) \equiv 0$ и $V \leqslant V^*(\mathbf{y})$ в работах [12, 13], что можно использовать для поиска компромисса между содержательным смыслом понятия частичной устойчивости и соответствующими требованиями к функциям Ляпунова.

3. Устойчивость по части переменных положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (3) также изучалась ранее в работах [14—20] с использованием одной V-функции Ляпунова.

Пример. Пусть система (3) состоит из уравнений

$$\begin{aligned} dy_1 &= (-y_1 + y_2 z_1 \sin z_2)dt + 0{,}1 y_1 dw_1;\\ dy_2 &= (y_2^2 z_1 \sin z_2)dt + 0{,}2 y_2 dw_2;\\ dz_1 &= -z_1[1 + \sin(ty_1)\cos z_2]dt + 0{,}1 z_1 dw_3;\\ dz_2 &= [\sin(ty_1)\sin z_2]dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим вспомогательные функции

$$V = 1/2(y_1^2 + y_2^2 z_1^2 \sin^2 z_2),\ \mu_1 = y_2 z_1 \sin z_2,$$

$$V = 1/2(y_1^2 + \mu_1^2) \leqslant$$
$$\leqslant V^*(y_1, y_2, z_1),\ V^*(0, 0, z_1) \equiv 0.$$

В данном случае имеют место соотношения

$$\boldsymbol{\sigma}_k = (\sigma_{k1}, \sigma_{k2}, \sigma_{k3}, \sigma_{k4})^{\mathrm{T}};$$

$$\sigma_{11} = 0{,}1y_1;\ \sigma_{22} = 0{,}2y_2;$$
$$\sigma_{33} = 0{,}1z_1;\ \sigma_{44} = 0;\ \sigma_{ij} = 0\ (i \neq j);$$

$$\sum_{k=1}^{r}\left(\left\langle \boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{T}}(t,\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right\rangle\right)^2 V =$$
$$= \sigma_{11}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2} + \sigma_{22}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} + \sigma_{33}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial z_1^2} = 0{,}01 y_1^2 + 0{,}05 \mu_1^2.$$

Для дифференциального производящего оператора $\mathbf{L}V$ вдоль траекторий системы (15) в области (5) имеет место следующая оценка:

$$\mathbf{L}V = -y_1^2 + y_1\mu_1 - \mu_1^2 + \mu_1^3 +$$
$$+ 0{,}005 y_1^2 + 0{,}025 \mu_1^2 \leqslant -l(y_1^2 + \mu_1^2) \leqslant 0,$$
$$l = \mathrm{const} > 0.$$

На основании теоремы 2 "частичное" положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ системы (15) равномерно y_1-устойчиво по вероятности при большом z_{10} в целом по z_{20}.

Отметим, что дифференциальный производящий оператор введенной V-функции является знакопеременным в области (14).

3. К унификации исследований частичной устойчивости

Вводя обозначения $u = t$, $\tau = t - t_0$, нестационарную систему (3) представим в виде стационарной стохастической системы [12, 13]

$$\begin{aligned} d\mathbf{x}(\tau) &= \mathbf{X}(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))d\tau + \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}(\tau), u(\tau))dw_k(\tau);\\ du(\tau) &= d\tau. \end{aligned} \tag{16}$$

Заметим, что решение $\mathbf{x}(t;\ t_0, \mathbf{x}_0)$, $t \geqslant t_0$ нестационарной стохастической системы (3) эквивалентно определяется решением $\mathbf{x}(\tau;\ 0, \mathbf{x}_0)$, $\tau \geqslant 0$ стационарной стохастической системы (16).

Если система (3) допускает положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, то система (16) допускает "частичное" положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. В результате как задача устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия, так и задача устойчивости "частичных" положений равновесия нестационарной системы (3) сводятся к задаче устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия стационарной системы (16). А именно, задача $\mathbf{y}$-устойчивости положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ нестационарной системы (3) сводится к задаче $\mathbf{y}$-устойчивости "частичного" положение равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ стационарной системы (16), а задача устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ нестационарной системы (3) сводится к задаче устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ стационарной системы (16).

Особенность такого сведения состоит в том, что в случае равномерной (или неравномерной) по t_0 частичной устойчивости исходной системы (3) постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (16) должны отвечать требованию "в целом по u_0" (или "при большом u_0"). Поскольку при этом постановки обеих задач частичной устойчивости для системы (16) допускают как требование "в целом по $\mathbf{z}_0$", так и требование "при большом $\mathbf{z}_0$", то в результате приходим к необходимости анализа задач устойчивости по части переменных "частичного" положения равновесия, рассмотренных в разделе 1. Кроме того, задача $\mathbf{y}_1$-устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ нестационарной системы (3) также сводится к задаче $\mathbf{y}_1$-устойчивости "частичного" положения равновесия $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ стационарной системы (16).

Отметим, что ранее обсуждались вопросы: 1) унификации исследований в задачах устойчивости по всем переменным нестационарных стохастических систем и в задачах частичной устойчивости стационарных стохастических систем [12, 13]; 2) унификации исследований частичной устойчивости стационарных и нестационарных детерминированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (непрерывных и дискретных) [8, 10].

Заключение

В работе получены условия устойчивости по части переменных по вероятности "частичного" положения равновесия нелинейной стохастической системы Ито в контексте метода функций Ляпунова. В отличие от ранее выполненных работ по частичной устойчивости стохастических систем, наряду с основной функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для наиболее рациональной корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова. Рассмотрен пример, иллюстрирующий особенности предложенного подхода.

Показано, что предложенная в статье постановка задач частичной устойчивости позволяет унифицировать исследования частичной устойчивости стационарных и нестационарных стохастических систем.

Список литературы

1. **Хасьминский Р. З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
2. **Кушнер Г. Дж.** Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969.
3. **Mao X. R.** Stochastic Differential Equations, 2 ed., Oxford: Woodhead Publ., 2008.
4. **Кац И. Я., Красовский Н. Н.** Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 809—823.
5. **Kats I. Ya., Martynyuk A. A.** Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structure. London: Taylor & Francis, 2002.
6. **Воротников В. И.** Об устойчивости и устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия нелинейных динамических систем // Доклады РАН. 2003. Т. 389. № 3. С. 332—337.
7. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче частичной детектируемости нелинейных динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2009. № 1. С. 25—38.
8. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51. Вып. 5. С. 23—31.
9. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** Об устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия систем с последействием // Математические заметки. 2014. Т. 96. Вып. 4. С. 496—503.
10. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2017. Т. 18. № 6. С. 371—375.
11. **Воротников В. И.** Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3—59.
12. **Rajpurohit T., Haddad W. M.** Stochastic finite-time partial stability, partial-state stabilization, and finite-time optimal feedback control // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2017. Vol. 29. № 2. art. 10. 37 p.
13. **Rajpurohit T., Haddad W. M.** Partial-state stabilization and optimal feedback control for stochastic dynamical systems // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2017. Vol. 139. № 9. Paper DS-15-1602.
14. **Шаров В. Ф.** Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 63—71.
15. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998.
16. **Potcovaru G.** On the partial stability of a dynamical systems with random parameters // An. Univ. Bucur., Mat. 1999. Vol. 48. № 2. P. 163—168.
17. **Ignatyev O.** Partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations // Statistics & Probability Letters. 2009. Vol. 79. № 5. P. 597—601.
18. **Ignatyev O.** New criterion of partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations // Applied Mathematics and Computation. 2013. Vol. 219. № 23. P. 10961—10966.
19. **Зуев А. Л., Игнатьев А. О., Ковалев А. М.** Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. Киев: Наукова Думка, 2013.
20. **Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H.** Stability in mean of partial variables for stochastic reaction — diffusion systems with Markovian switching // J. of the Franklin Institute. 2014. Vol. 351. № 1. P. 500—512.

On Problem of Stability in Probability for "Partial" Equilibrium Positions of Nonlinear Stochastic Systems

V. I. Vorotnikov, vorotnikov-vi@rambler.ru,
Ural federal university, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,
Yu. G. Martyshenko, j-mart@mail.ru, Russian state university of oil and gas,
Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: **Vorotnikov Vladimir I.,** D. Sc. (Phys. & Math.), Professor,
Ural federal university, Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,
e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru

Accepted on November 23, 2017

The partial stability problems naturally arise in applications either from the requirement of proper performance of a system or in assessing system capability. In addition, a lot of actual (or desired) phenomena can be formulated in terms of these problems and be analyzed with these problems taken as the basis. The following multiaspect phenomena and problems can be indicated: adaptive stabilization; spacecraft stabilization (especially stabilization by rotors); drift of the gyroscope axis; Lotka-Volterra ecological principle, e.t.c. Also very effective is the approach to the problem of stability with respect to all variables based on preliminary analysis of partial stability. The article studies the problem of partial stability for nonlinear stochastic systems of differential equations Ito: stability with respect to a part of the variables in probability of "partial" zero equilibrium position. Initial perturbations of variables that do not define the given equilibrium position can be large (belonging to an arbitrary compact set) with respect to one part of the variables and arbitrary with respect to their other part. A conditions of stability of this type are obtained in the context of a stochastic analog of the Lyapunov functions method, which generalize a number of existing results. Example is given. The problem of unification of process of studying partial stability problems of stationary and non-stationary nonlinear stochastic systems of differential equations is also discussed.

Keywords: *Ito stochastic systems, partial stability in probability, Lyapunov functions*

For citation:

Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G. On Problem of Stability in Probability for "Partial" Equilibrium Positions of Nonlinear Stochastic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 3, pp. 147—152.

DOI: 10.17587/mau.19.147-152

References

1. **Khasminskii R. Z.** Stochastic Stability of Differential Equations, 2 ed., Berlin: Springer-Verlag, 2012.
2. **Kushner H. J.** Stochastic Stability and Control, New York: Acad. Press, 1967.
3. **Mao X. R.** Stochastic Differential Equations, 2 ed., Oxford: Woodhead Publ., 2008.
4. **Kats I. Ya., Krasovskii N. N.** On the stability of systems with random parameters, *J. Appl. Math. Mech.,* 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1225—1246.
5. **Kats I. Ya., Martynyuk A. A.** Stability and Stabilization of Nonlinear Systems with Random Structure, London: Taylor & Francis, 2002.
6. **Vorotnikov V. I.** Partial-equilibrium position of nonlinear dynamical systems: their stability and stability with respect to some of variables, *Doklady Physics*, 2003, vol. 48, no. 3, pp. 151—155.
7. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On partial detectability of the nonlinear dynamic systems, *Automation and Remote Control,* 2009, vol. 70, no. 1, pp. 20—32.
8. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** On the partial stability of nonlinear dynamical systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.,* 2010, vol. 49, no. 5, pp. 702—709.
9. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** Stability in a part of variables of "partial" equilibria of systems with aftereffect, *Mathematical Notes*. 2014, vol. 96, no. 3, pp. 477—483.
10. **Vorotnikov V. I., Martyshenko Yu. G.** *K zadache chastichnoy ustoychivosti nelineynykh diskretnykh sistem* (To problem of partial stability of nonlinear discrete-time systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2017. vol. 18, no. 6, pp. 371—375 (in Russian).
11. **Vorotnikov V. I.** Partial stability and control: the state of the art and developing prospects, *Automation and Remote Control,* 2005, vol. 66, no. 4, pp. 511—561.
12. **Rajpurohit T., Haddad W. M.** Stochastic finite-time partial stability, partial-state stabilization, and finite-time optimal feedback control, *Mathematics of Control, Signals, and Systems,* 2017, vol. 29, no. 2, art. 10, 37 p.
13. **Rajpurohit T., Haddad W. M.** Partial-state stabilization and optimal feedback control for stochastic dynamical systems, *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control,* 2017, vol. 139, no. 9, Paper DS-15-1602.
14. **Sharov V. F.** Stability and stabilization of stochastic systems vis-a-vis some of the variables, *Automation and Remote Control*, 1978, vol. 39, no. 11, pp. 1629—1636.
15. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control, Boston, Birkhauser, 1998.
16. **Potcovaru G.** On the partial stability of a dynamical systems with random parameters, *An. Univ. Bucur., Mat.*, 1999, vol. 48, no. 2, pp. 163—168.
17. **Ignatyev O.** Partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations, *Statistics & Probability Letters,* 2009, vol. 79, no. 5, pp. 597—601.
18. **Ignatyev O.** New criterion of partial asymptotic stability in probability of stochastic differential equations, *Applied Mathematics and Computation,* 2013, vol. 219, no. 23, pp. 10961—10966.
19. **Zuyev A. L., Ignatyev A. O., Kovalev A. M.** *Ustoychivost' i stabilizatsiya nelineynykh sistem* (Stability and Stabilization of Nonlinear Systems). Kiev, Naukova dumka, 2013 (in Russian).
20. **Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H.** Stability in mean of partial variables for stochastic reaction—diffusion systems with Markovian switching, *J. of the Franklin Institute*, 2014, vol. 351, no. 1, pp. 500—512.

УДК 681.511.4 DOI: 10.17587/mau.19.153-159

В. Н. Афанасьев, д-р техн. наук, проф., afanval@mail.ru,
А. П. Преснова, аспирант, anechkar1@yandex.ru,
Московский институт электроники и математики НИУ ВШЭ, Москва

Формирование алгоритмов оптимизации нестационарных систем управления на основе необходимых условий оптимальности*

Рассматриваются алгоритмы оптимизации нестационарных систем управления, основанные на применении уравнения Гамильтона — Якоби. Построенные алгоритмы могут использоваться как для оптимизации самих нестационарных объектов, если для этой цели выделены соответствующие параметры, так и для оптимизации всей управляемой системы с помощью соответствующей параметрической настройки регуляторов. Эффективность разработанных алгоритмов продемонстрирована на примере управления подачей антиретровирусных препаратов в организм человека при наличии ВИЧ.

Ключевые слова: *уравнение Гамильтона — Якоби, принцип минимума Понтрягина, моделирование ВИЧ, решение нелинейных нестационарных уравнений, оптимальное управление*

Введение

Развитие науки и техники сопровождается созданием управляемых объектов различного назначения, повышением требований к надежности и качеству выполняемой работы, усложнением целей, поставленных перед ними. Значительно расширился класс объектов, работающих в условиях неполной априорной и текущей информации об их состоянии, параметрах, взаимодействии со средой. В большинстве практических приложений достоверная априорная информация о модели исследуемого объекта вообще отсутствует, или ее построение связано с большими трудностями, а потому задачу построения управления приходится решать при неполном знании модели, а также в условиях стохастической неопределенности [1, 2].

В связи с этим задача конструирования нестационарных динамических систем, работающих в условиях неполной информации (иными словами, в условиях неопределенности), приобрела исключительное значение в современной теории автоматического управления. Это подтверждается большим числом публикаций и докладов на международных конференциях, посвященных как разработке научных основ конструирования нестационарных систем, так и результатам реализации разработанных методов для управления конкретными физическими объектами.

Значительное число методов конструирования и организации систем было разработано для управления подвижными объектами с неконтролируемо меняющимися в процессе функционирования параметрами, в том числе авиационно-космическими объектами [3, 4], а также для управления нестационарными технологическими объектами [5]. В последние годы большое внимание уделяется медицинской и биологической сферам приложения идей теории управления. В них нестационарными объектами являются биомедицинские процессы с их сложными динамическими моделями, зависящими от многих биологических факторов. На сегодняшний день синтезированные математические модели, использующие параметры, полученные из обработки реальных данных, позволяют, например, описывать процессы, происходящие в организме человека при таких заболеваниях, как сахарный диабет, рак или при наличии ВИЧ в организме [6—8].

Бурное развитие микроэлектроники и, в первую очередь, средств вычислительной техники, позволило реализовать сложные алгоритмы управления нестационарными объектами, что, несомненно, повышает их эффективность, надежность, снижает потребление энергоресурсов.

В статье развивается метод алгоритмического конструирования систем управления с неполной информацией о состоянии объекта, его параметрах и взаимодействии со средой, основанный на применении основных результатов аналитического конструирования [9], а именно, на применении в основе конструкций алгоритмов оптимизации необходимых (достаточных) условий минимума функционалов качества. Выработанный подход построения алгоритмов оптимизации может использоваться для построения систем идентификации, управления разнообразными нестационарными объектами.

При реализации данного метода нередко используются квадратичные функционалы, что существенно упрощает применение алгоритмов.

*Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (Проект 16-8-00522).

В настоящей статье в рамках алгоритмического конструирования [10] предложен алгоритм оптимизации нестационарных систем управления с неполной информацией о параметрах, основанный на применении принципа минимума Понтрягина и необходимых условий оптимальности (уравнение Гамильтона — Якоби). При выполнении сформулированных условий гарантируется успешное "отслеживание" изменений параметров объекта с выбранными алгоритмами изменения параметров модели. При этом обеспечивается "перевод" функционала качества из периферийных значений к его минимальному значению асимптотически.

В качестве примера использования разработанного алгоритма исследована задача управления подачей антиретровирусных препаратов ВААРТ в организм человека при наличии ВИЧ [11].

Постановка задачи управления нелинейным объектом с использованием SDC-линеаризации

Пусть нелинейный управляемый и наблюдаемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + B(x)u(t); \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — состояние системы; $x_0 \in X_0$, X_0 — область возможных начальных состояний системы; $x(t) \in \Omega_x$, где Ω_x — область (открытое связное множество) R^n, содержащая начало x_0; $u \in R^r$ — управление, подлежащее нахождению. Матрицы $f(x)$, $B(x)$ действительны и непрерывны, пара матриц $\langle f(x), B(x)\rangle$ является управляемой, кроме того, будем предполагать матрицы достаточно гладкими, чтобы через любые (t_0, x_0) проходило одно и только одно решение $x(t, t_0, x_0)$.

Предположение 1. Вектор-функция $f(x)$ — непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т. е. $f(\cdot) \in C^1(\Omega_x)$ и $B(\cdot) \in C^0(\Omega_x)$.

Предположение 2. Без потери общности положим, что условие $x = 0 \in \Omega_x$ есть точка равновесия системы при $u = 0$ так, что $f(0) = 0$ и $B(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega_x$.

При выполнении Предположений (используя SDC-линеаризацию [12]) исходная нелинейная система (1) может быть представлена в виде модели системы

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t); \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned} \tag{2}$$

которая имеет линейную структуру с параметрами, зависящими от состояния $A(x)x(t) = f(x)$.

Для синтеза управления $u(t)$ введем функционал качества

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left\{x^{\mathrm{T}}(t)Q\,x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)\right\}dt, \tag{3}$$

где "т" — знак транспонирования; t_0 и t_f — начальное и конечное время соответственно; матрицы Q и R — симметрические, положительно определенные.

Оптимальное управление определяется соотношением [9, 10]

$$u(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}(x)S(x)x(t), \tag{4}$$

где матрица $S(x)$ — решение уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния,

$$\begin{aligned} &S(x)A(x) + A^{\mathrm{T}}(x)S(x) - \\ &-S(x)B(x)R^{-1}B^{\mathrm{T}}(x)S(x) + Q = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Основная проблема реализации управления вида (4) заключается в сложности нахождения матрицы $S(x)$ как решения уравнения (5) в темпе функционирования объекта. В данной работе будет предложен метод алгоритмического конструирования с использованием поведения гамильтониана на оптимальной траектории.

Метод синтеза алгоритма управления нестационарным объектом с использованием необходимых условий оптимальности

Пусть нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением вида

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u,\eta,\alpha); \\ &x(t_0) = x_0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния объекта; $u \in R^r$ — вектор управляющих воздействий; $\eta \in R^k$ — вектор возмущаемых параметров; $\alpha \in R^p$ — вектор параметров, выделенных для оптимизации функционирования объекта. В общем случае $k \geqslant p$.

Оптимизация системы управления осуществляется соответствующей перестройкой как параметров объекта, так и параметров регулятора. Этот класс нестационарных систем управления с оптимизацией относят к системам координатно-параметрического управления.

Предполагается, что:

- вектор-функция $f(x, u, \eta, \alpha)$ гладкая и допускает необходимое число раз дифференцирования по совокупности переменных;
- параметрическая неопределенность имеет интервальный характер $\underline{\eta}_i \leqslant \eta_i(t) \leqslant \overline{\eta}_i$, $i = 1,\ldots,k$, где $\underline{\eta}_i$ и $\overline{\eta}_i$ — соответственно минимальное и

максимальное значение i-го параметра, причем известна также максимальная скорость изменения каждого из возмущенных параметров: $d\eta_i^*(t)/dt$. Таким образом, $(\eta(t), d\eta(t)/dt) \in \Lambda$, где Λ — область возможных значений параметров и скоростей их изменений;

- область параметров, предназначенных для оптимизации системы управления при соответствующем $u^0(t) \in U$, содержит те значения, при которых достигается поставленная цель, т. е. $\alpha^0(t) \in \Lambda$, где Λ — область изменения параметров оптимизации.

Синтез оптимального управления проведем в предположении о существовании оптимального управления и об отсутствии параметрических возмущений, т. е. для $\forall t \in [t_0, t_f]$ $\eta(t) = 0$ и $\alpha(t) = 0$ [2, 11].

Для системы управления с объектом (6) в предположении об отсутствии параметрических возмущений образуем гамильтониан

$$H(x,u,\lambda) = L(x,u) + \lambda^{\mathrm{T}}(t) f(x,u), \qquad (7)$$

где $\lambda(t)$ — вспомогательная переменная, являющаяся решением дифференциального уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\lambda(t) = -\left\{\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial x(t)}\right\}^{\mathrm{T}}; \\ &\lambda(t_f) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Оптимальное управление отыскивается следующим образом:

- в случае, когда ограничения на управление не эффективны, т. е. оптимальное управление достигается внутри области допустимых управлений (не находится на границах замыкания заданного множества допустимых управлений U), то

$$\frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial u(t)} = 0; \qquad (9)$$

- в случае, когда ограничения на управление эффективны, т. е. оптимальное управление достигается на границах области допустимых управлений U, то

$$H(x^0, u^0, \lambda) = \min_{u(t) \in U} H(x^0, u, \lambda), \;\; t \in [t_0, t_f]. \qquad (10)$$

Таким образом, оптимальное управление выбирается из условия

$$u^0(t) = \arg\min_{u \in U} H(x^0, u, \lambda). \qquad (11)$$

Следует отметить, что краевые условия на правом конце для переменной $\lambda(t)$ и поведение гамильтониана зависят от объекта, вида задаваемой области конечных значений состояния системы и задания (или не задания) времени переходного процесса.

Условия оптимальности, сформулированные в виде двухточечной краевой задачи (6), (8) и условий выбора управления (9), (10), являются необходимыми условиями минимума функционала (3).

Продифференцировав $H(x, u, \lambda)$ (7) по времени, с учетом возможности перехода к открытой области управляющих воздействий, получим

$$\frac{d}{dt}H(x,u,\lambda) = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt}.$$

Учитывая, что дифференциальные уравнения (6) и (10) образуют каноническую форму, а также тот факт, что $\frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt} = 0$ (либо $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, либо $\frac{du}{dt} = 0$, либо $\frac{\partial H}{\partial u}$ и $\frac{du}{dt}$ — ортогональны), последнее выражение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}H(x,u,\lambda) = \frac{\partial H(x,u,\lambda)}{\partial t}. \qquad (12)$$

Краевые условия для уравнения (12) задаются на правом конце и зависят от области конечных значений состояния системы управления.

Очевидно, что поведение гамильтониана при оптимальном управлении принимает вполне определенную траекторию, определяемую решением дифференциального уравнения с краевым условием на правом конце (за исключением стационарного случая, когда гамильтониан не зависит от времени). Это поведение положим в основу конструкции алгоритмов оптимизации системы управления.

Алгоритмы оптимизации

Запишем необходимые условия минимума функционала качества, выраженные в поведении гамильтониана на оптимальной траектории, в виде

$$\Re^0(t) = H^0(t) + \varphi(t) = 0, \qquad (13)$$

здесь $\varphi(t)$ — поведение гамильтониана на оптимальной траектории.

Рассмотрим вначале случай, когда в соотношении (6) $p = k$ и с помощью параметров $\alpha(t)$ предполагается парировать соответствующие параметрические возмущения, т. е. предполагается, что возможно достижение следующего соотношения:

$$\alpha(t) = \eta(t). \qquad (14)$$

При выполнении условия (14) уравнение объекта (6) будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x,u); \\ &x(t_0) = x_0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Очевидно, что если $\alpha(t) \neq \eta(t)$, то равенство (13) выполняться не будет, т. е. $\Re(t) = H(t) + \varphi(t) \neq 0$. Это обстоятельство положим в основу алгоритмов оптимизации. Введем в рассмотрение функцию Ляпунова в таком виде:

$$V(\eta(\cdot), \alpha(\cdot)) = \frac{1}{2}\left\{\Re(t) - \Re^0(t)\right\}^2 = \frac{1}{2}\left\{\Re(t)\right\}^2. \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}V(\eta(\cdot), \alpha(\cdot)) = \\ = \Re\left\{\frac{\partial H}{\partial \eta(t)}\frac{d}{dt}\eta(t) + \frac{\partial H}{\partial \alpha(t)}\frac{d}{dt}\alpha(t)\right\} \leqslant 0,\end{gathered} \quad (17)$$

так как $\dfrac{\partial H}{\partial t} = \dfrac{\partial H^0}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \varphi(t)}{\partial \eta(t)} = 0$ и $\dfrac{\partial \varphi(t)}{\partial \alpha(t)} = 0$.

Пусть алгоритм параметрической оптимизации имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\alpha(t) = -\left\{\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \alpha(t)}\right\}^{\mathrm{T}} \Re(t); \\ \alpha(t_0) = \alpha_0.\end{gathered} \quad (18)$$

Тогда неравенство (17) примет вид

$$\begin{gathered}\Re(t)\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \eta(t)}\frac{d}{dt}\eta(t) - \\ -\Re^2(t)\left\|\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \alpha(t)}\right\|^2 \leqslant 0.\end{gathered} \quad (19)$$

Из последнего неравенства следует, что параметрическая оптимизация будет успешной, если будет выполняться следующее неравенство:

$$\begin{gathered}\Re(t)\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \eta(t)}\frac{d}{dt}\eta^*(t) - \\ -\Re^2(t)\left\|\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \alpha(t)}\right\|^2 < 0,\end{gathered}$$

здесь $\dfrac{d}{dt}\eta^*(t)$ — наибольшая скорость изменения возмущающих параметров.

Назначение алгоритма параметрической оптимизации в виде (18) позволит получить условие успешной параметрической оптимизации:

$$\begin{gathered}\left\|\Re(t)\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \alpha(t)}\right\|^2 > \\ > \left|\Re(t)\frac{\partial H(x, u, \lambda, \alpha, \eta)}{\partial \eta(t)}\frac{d}{dt}\eta^*(t)\right|, \quad t \in [t_0, T].\end{gathered} \quad (20)$$

Сформулируем следующее утверждение.

Утверждение. Пусть нестационарный управляемый объект описывается векторным дифференциальным уравнением вида (6). Тогда алгоритм градиентного типа (18), "парирующий" параметрические возмущения $\eta(t)$, обеспечит асимптотические свойства процессу параметрической оптимизации, если выполняется неравенство (20).

Пример синтеза алгоритма управления подачей препаратов при антиретровирусной терапии

Рассмотрим пример применения вышеописанного метода для синтеза управления нелинейным объектом. В качестве такого объекта была выбрана математическая модель, описывающая поведение иммунной системы человека при наличии ВИЧ. Синтезом и анализом этих математических моделей уже много лет занимаются не только биологи, но и математики. За последние 20 лет модель была усовершенствована от простой системы из двух дифференциальных уравнений, предложенной еще в 1993 г. [7], до современных моделей, учитывающих гораздо больше тонкостей иммунного ответа на вирус.

Математическая модель ВИЧ-инфекции. В данной статье используется следующая достаточно подробная модель, предложенная американскими учеными [11], которая отлично согласуется с клиническими данными:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}i(t) = \lambda - di(t) - \beta\eta(t)i(t)y(t); \\ &\frac{d}{dt}y(t) = \beta\eta(t)i(t)y(t) - \alpha y(t) - \\ &-\left[\rho_1 z_1(t) + \rho_2 z_2(t)\right]y(t); \\ &\frac{d}{dt}z_1(t) = \left[c_1 y(t) - b_1\right]z_1(t); \\ &\frac{d}{dt}w(t) = \left[c_2 i(t)y(t) - c_2 q y(t) - b_2\right]w(t); \\ &\frac{d}{dt}z_2(t) = c_2 q y(t)w(t) - h z_2(t).\end{aligned} \quad (21)$$

Здесь i — концентрация неинфицированных клеток иммунной системы (Т-хелперы), λ — скорость производства Т-хелперов в организме, d — скорость естественной смерти Т-хелперов. При попадании вируса в кровь Т-хелперы со скоростью β заражаются и становятся инфицированными клетками (y), т. е. ВИЧ. Инфицированные клетки естественным образом умирают со скоростью α, кроме того, Т-киллеры (z_1) убивают их со скоростью ρ_1, а иммуноглобулины (z_2) убивают зараженные клетки со скоростью ρ_2 (подробнее см. работы [6, 11]). В-лимфоциты (w) активируются в организме со скоростью c_2, и со скоростью q они превращаются в иммуноглобулины. Функция лечения η описывает воздействие на систему лекарственных препаратов $\eta(t) = 1 - \eta^* u(t)$, где η^* — максимальное действие препарата, $u(t)$ — доза вводимого препарата, т. е. наше воздействие. Значения параметров взяты из работы [8].

Синтез алгоритма. Представим нашу систему (21) в виде

$$\frac{d}{dt}x = A(x)x(t) + B(x)u, \qquad (22)$$

здесь $x^{\mathrm{T}} = [i, y, z_1, w, z_2]$, при этом матрицы примут вид:

$$A = \begin{pmatrix} -d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta\eta^* iy \\ -\beta\eta^* iy \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a^* = \alpha + \rho_1 z_1 + \rho_2 z_2, \quad b^* = b_2 - c_2 iy.$$

Для синтеза управления $u(t)$ используем функционал качества (3). Оптимальное управление будет определяться соотношением (4).

Как уже говорилось выше, матрицу $S(x)$, входящую в соотношение (4) как решение уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния объекта, отыскать в общем случае чрезвычайно сложно. Для поиска матрицы $S(x)$ был привлечен алгоритмический метод. Представим эту матрицу в виде

$$S(x) = S_0 + s(t), \qquad (23)$$

здесь матрица S_0 находится из решения уравнения Риккати с постоянными параметрами (при $x(t_0) = x_0$) с использованием оператора lqr в MATLAB:

$$S(x_0)A(x_0) + A^{\mathrm{T}}(x_0)S(x_0) - \\ -S(x_0)B(x_0)R^{-1}B^{\mathrm{T}}(x_0)S(x_0) + C^{\mathrm{T}}QC = 0.$$

В соответствии с изложенным выше способом формирования алгоритма параметрической оптимизации (18) запишем для нахождения $s(t)$:

$$\frac{d}{dt}s(t) = -\left\{\frac{\partial H\left\{x, u, \left[S_0 + s\right]\right\}}{\partial s(t)}\right\}^{\mathrm{T}} \Re(t), \qquad (24)$$
$$s(t_0) = 0.$$

Здесь

$$\Re(t) = H\left\{x^0, u^0, S(x^0)\right\} - H\left\{x, u, \left[S_0 + s(t)\right]\right\}.$$

В данной задаче $H\left\{x^0, u^0, S(x^0)\right\} = 0$. Поскольку при $S_0 + s(t) \neq S(x)$ гамильтониан имеет вид

$$H\left\{x, u, \left[S_0 + s(t)\right]\right\} = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + \\ + \frac{1}{2}u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) + x^{\mathrm{T}}(t)\left[S_0 + s(t)\right]\frac{d}{dt}x(t)$$

или

$$H\{x, u, [S_0 + s(t)]\} = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)\{Q - [S_0 + s(t)]\times \\ \times BR^{-1}B^{\mathrm{T}}[S_0 + s(t)] + [S_0 + s(t)]A(x) + \\ + A^{\mathrm{T}}(x)[S_0 + s(t)]\}x(t), \qquad (25)$$

функция чувствительности

$$\left\{\partial H\{x, u, [S_0 + s(t)]\}/\partial s(t)\right\}^{\mathrm{T}}$$

определяется выражением

$$\left\{\frac{\partial H\{x, u, [S_0 + s(t)]\}}{\partial s(t)}\right\}^{\mathrm{T}} = \\ = [-BR^{-1}B^{\mathrm{T}}(S_0 + s(t)) + A^{\mathrm{T}}(x)]x(t)x(t)^{\mathrm{T}}. \qquad (26)$$

Таким образом, алгоритм принимает вид

$$\frac{d}{dt}s(t) = -\left\{\frac{\partial H\{x, u, [S_0 + s(t)]\}}{\partial s(t)}\right\}^{\mathrm{T}} \times \\ \times H\{x, u, [S_0 + s(t)]\}, \quad s(t_0) = 0, \qquad (27)$$

где функция чувствительности

$$\left\{\partial H\{x, u, [S_0 + s(t)]\}/\partial s(t)\right\}^{\mathrm{T}}$$

определяется выражением (26), а гамильтониан — выражением (25).

Управление с параметрической оптимизацией принимает вид

$$u(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}(x)[S_0 + s(t)]x(t). \qquad (28)$$

Таким образом, из соотношения (27) получим выражение для $s(t)$. Используя этот результат, а также матрицу S_0, можем организовать управление в виде (28), подаваемое на нашу систему (21) для ее оптимизации.

Компьютерная реализация алгоритма. Пусть начальные условия соответствуют очень слабому пациенту, имеющему вирус ВИЧ (концентрация клеток иммунной системы у здорового человека обычно в интервале от 0,8 до 1 мл$^{-1}$), $i_0 = 0{,}2$ мл$^{-1}$, $y_0 = 0{,}8$ мл$^{-1}$.

На рис. 1 показана динамика здоровых клеток при построенном нами лечении и при его отсутствии. Для случая, когда начальное состояние пациента критическое, синтезированное управление справляется с задачей и выводит концентрацию здоровых клеток иммунной системы человека на приемлемый уровень. На рис. 2 видно, что при наличии лечения концентрация ВИЧ в организме достаточно быстро снижается до минимально возможного. На рис. 3 представлены значения матрицы переходных процессов $s(t)$, рассчитываемой по алгоритму (27), предложен-

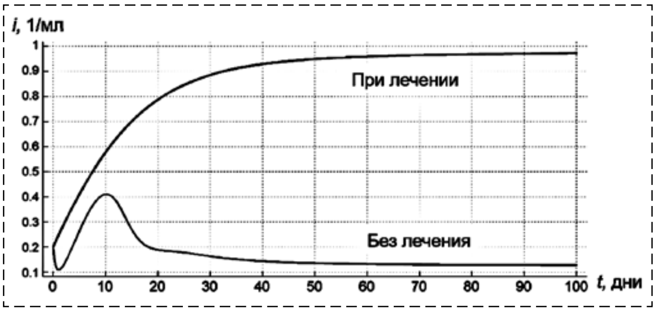


Рис. 1. Поведение здоровых клеток иммунной системы человека при наличии ВИЧ в организме

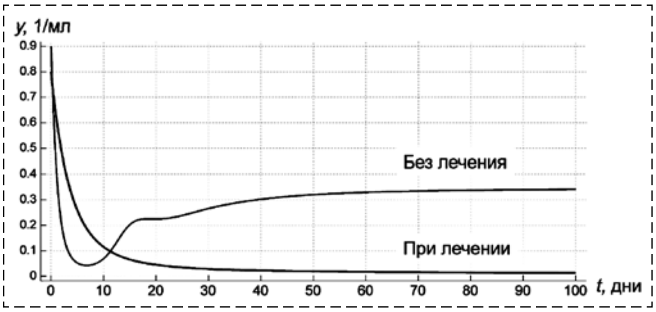


Рис. 2. Концентрация ВИЧ в организме человека

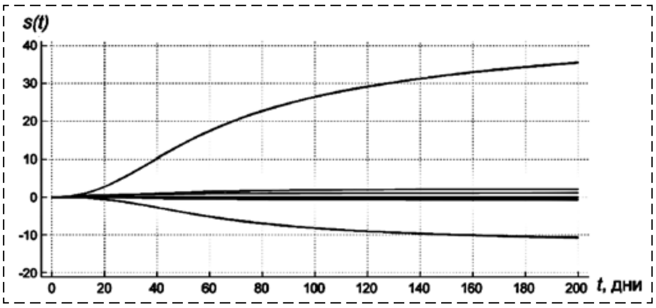


Рис. 3. Матрица переходных процессов *s*(*t*)

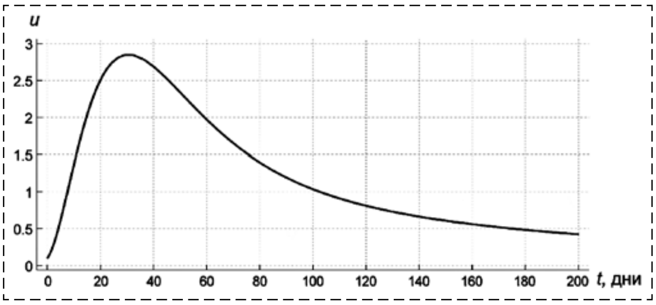


Рис. 4. Управление, синтезированное алгоритмическим методом

ному в данной работе. На рис. 1 и рис. 2 видно, что в отсутствие лечения, т. е. без применения каких-либо воздействий на организм концентрация вируса увеличивается, а здоровые клетки иммунной системы погибают, и, таким образом, организм не справляется с ситуацией самостоятельно. На рис. 4 представлен график синтезированного субоптимального управления. Видно, что в начальный период лекарственная нагрузка резко возрастает, но после того как число здоровых клеток становится в пределах нормы, лечение лишь поддерживает их необходимый уровень. При реальном медицинском применении данной модели можно с помощью регулировки матрицы R снизить суточную дозу лекарства до допустимого уровня.

Результаты математического моделирования в пакете MATLAB подтверждают правильность выбранного нами метода синтеза управления и соответствующего алгоритмического поиска матрицы $s(t)$. Наше воздействие на иммунную систему помогает стабилизировать уровень клеток иммунной системы и контролировать концентрацию вируса.

Заключение

В данной работе, основываясь на методе алгоритмического конструирования, были представлены и исследованы алгоритмы оптимизации нестационарных систем управления с квадратичным функционалом качества в условиях неполной априорной информации. В основу всех полученных алгоритмов положены уравнение Гамильтона — Якоби и свойство поведения гамильтониана на соответствующей траектории.

Результаты математического моделирования для выбранной системы нелинейных уравнений подтверждают правильность построенного субоптимального управления и возможность его применения в отдельных задачах. Таким образом, предложенный алгоритм SDC-параметризации, позволяющий переходить от решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана к уравнению Риккати с параметрами, зависящими от состояния, и предложенный алгоритм нахождения матрицы $S(x)$ могут быть использованы при необходимости построения нелинейных регуляторов.

Список литературы

1. **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.
2. **Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. 615 с.
3. **Буков В. Н.** Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. М.: Наука, 1987. 230 с.
4. **Мирошник И. В., Никифоров В. О.** Адаптивное управление пространственным движением объектов // Автоматика и телемеханика. 1991. № 9. С. 78—87.
5. **Тимофеев А. В.** Построение адаптивных систем управления программным движением. Л.: Энергия, 1980. 88 с.
6. **Chang H., Astrofi F.** Control of HIV Infection Dynamics by the Enhancement of the Immune System // Proc. 17th World Conf. IFAC, Seoul, Korea, 2012. P. 12217—12222.

7. **Perelson A. S.** Dynamics of hiv infection of CD4 + T cells // Math. Biosciences, 1993. Vol. 114. P. 81—125.

8. **Zurakowski R., Teel A.** A model predictive control based scheduling method for HIV therapy // Journal of Theoretical Biology, 2006. Vol. 238. P. 368—382.

9. **Афанасьев В. Н.** Аналитическое конструирование детерминированных конечномерных систем управления. М.: МИЭМ, 2003. 160 с.

10. **Афанасьев В. Н.** Алгоритмическое конструирование систем управления с неполной информацией. М.: МИЭМ, 2004. 148 с.

11. **Wodarz D., Nowak M. A.** Specific therapy regimes could lead to long-term immunological control of HIV // Proceedings of the National Academy of Sciences, 1999. Vol. 96. № 6. P. 14464—14469.

12. **Афанасьев В. Н.** Управление нелинейными неопределенными динамическими объектами. М.: URSS, 2015. 224 с.

Minimum's Principe in Tasks of Optimization Design Algorithms

V. N. Afanasyev, afanval@mail.ru, **A. P. Presnova,** anechkar1@yandex.ru,
National Research University Higher School of Economics, Moscow, 123458, Russian Federation

Corresponding author: **Presnova Anna P.,** Postgraduate,
National Research University Higher School of Economics, Moscow,
123458, Russian Federation, e-mail: anechkar1@yandex.ru

Accepted on August 27, 2017

The method of forming optimization algorithms for non-stationary control systems is developed in the article, based on the application of the Hamilton-Jacobi equation and the Pontryagin minimum principle. In this article, the original nonlinear differential equation that describes the original control system is transformed into a system with a linear structure, but with State Dependent Coefficient (SDC) parameters. The use of the quadratic quality criterion in problems with unlimited time of the transient process makes it possible, in the synthesis of control for the transformed system, to move from the need to search for the solution of a scalar partial differential equation (the Hamilton-Jacobi-Bellman equation) to a Riccati-type equation with state-dependent parameters. However, solving the resulting equation in the rate of the object's operation is no less difficult. For its solution, an algorithmic method for the synthesis of controls is proposed. The behavior of the Hamiltonian under optimal control changes during the transient process along a well-defined trajectory. This property of the Hamiltonian was used as the basis for the design of algorithms for optimizing the control system. When the formulated conditions are met, a "transfer" of the quality functional from peripheral values to its minimum value is guaranteed asymptotically. The effectiveness of the developed algorithms is demonstrated by the example of the synthesis of control controlling the supply of antiretroviral drugs HAART to the human body in the presence of HIV. The simulation was carried out in the MATLAB package.

Keywords: *Hamilton-Jacobi equation, the Pontryagin minimum principle, Riccati equation with parameters depending on the state, algorithmic construction, mathematical model of HIV*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 16-8-00522.

For citation:

Afanasyev V. N., **Presnova A. P.** Minimum's Principe in Tasks of Optimization Design Algorithms, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 3, pp. 153—159.

DOI: 10.17587/mau.19.153-159

References

1. **Alekseev V. M., Tihomirov V. M., Fomin S. V.** *Optimalnoe upravlenie* (Optimal control), Moscow, Nauka, 1979, 430 p. (in Russian).

2. **Afanasyev V. N., Kolmanovskij V. B., Nosov V. R.** *Matematicheskaj teoriya konsruirovaniya system upravleniya* (Mathematical theory of control system design), Moscow, Vysshaya Shkola, 2003, 615 p. (in Russian).

3. **Bukov V. N.** *Adaptivnie prognoziruyushhie sistemy upravleniya poletom* (Adaptive Predictive Flight Control Systems), Moscow, Nauka, 1987, 230 p. (in Russian).

4. **Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.** *Adaptivnoe upravlenie prostranstvennim dvizheniem objectov* (Adaptive control of spatial motion of objects), *Avtomatika i Telemechanika*, 1991, no. 9, pp. 78—87 (in Russian).

5. **Timofeev A. V.** *Postroenie adaptivnih system upravleniya programmnim dvizheniem* (Construction of adaptive control systems by software movement), St. Petersburg, Energiya, 1980, 88 p. (in Russian).

6. **Chang H., Astrofi F.** Control of HIV Infection Dynamics by the Enhancement of the Immune System, *IFAC 2012 — 17th World Conf. IFAC.* Seoul, 2012, pp. 12217—12222.

7. **Perelson A. S., Kirschner D. E., Boer B.** Dynamics of hiv infection of CD4 + T cells, *Math.Biosciences*, 1993, vol. 114, pp. 81—125.

8. **Zurakowski R., Teel A.** A model predictive control based scheduling method for HIV therapy, *Journal of Theoretical Biology*, 2006, vol. 238, pp. 368—382.

9. **Afanasyev V. N.** *Analiticheskoe konstruirovanie determinirovannih konechnomernih system upravleniya* (Analytical construction of deterministic finite-dimensional control systems), Moscow, MIEM, 2004, 148 p. (in Russian).

10. **Afanasyev V. N.** *Algoritmicheskoe konstruirovanie system upravleniya s nepolnoj informaciei* (Algorithmic design of control systems with incomplete information), Moscow, MIEM, 2004, 148 p. (in Russian).

11. **Wodarz D., Nowak M. A.** Specific therapy regimes could lead to long-term immunological control of HIV, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1999, vol. 96, no. 6, pp. 14464—14469.

12. **Afanasyev V. N.** *Upravleniye nelineynymi neopredelennymi dinamicheskimi ob"yektami* (Control of nonlinear undefined dynamic objects), Moscow, URSS, 2015, 224 p. (in Russian).

УДК 521.1, 681.51.011 DOI:10.17587/mau.19.160-168

Э. К. Лавровский, канд. физ.-мат. наук, **Е. В. Письменная,** канд. техн. наук,
НИИ механики МГУ

Об управлении процессом регулярной ходьбы экзоскелета нижних конечностей с помощью электроприводов[1]

Рассмотрены динамические модели движения в сагиттальной плоскости экзоскелета нижних конечностей с одним или двумя управляемыми приводами в каждой ноге, интегрированного с помощью лямок с аналогичной моделью человека-оператора. Представлены модели экзоскелета, несущего точечный груз, которые описывают вязко-упругое и жесткое крепления экзоскелета к человеку и динамику электроприводов.

В работе изучаются возможности построения систем управления для различных вариантов размещения приводов в шарнирах экзоскелета (коленных или одновременно в коленных и тазобедренных), учитываются также возможности разной степени силового воздействия человека-оператора на процесс движения. Закон управления экзоскелетом строится в аналитическом виде, в основу его построения положено соответствие движения коленей и таза механизма заданным желаемым траекториям. Синтез и моделирование выполняются на примере комфортабельного одноопорного движения, наилучшие по энергетике результаты при хорошей точности реализации траекторий удается получить в случае абсолютно жесткой модели, когда конструкция экзоскелета и тело человека составляют одно целое.

Ключевые слова: *экзоскелет, мобильные роботы, нелинейное управление, движение по траектории, энергетика ходьбы*

Введение

В настоящее время в мире активно разрабатываются устройства, предназначенные для снятия нагрузки с опорно-мышечного аппарата человека при переноске тяжестей. Другим направлением, развиваемым во многих странах, является роботизированная медицина, предназначенная для создания высокотехнологических реабилитационных методов восстановления здоровья человека. Эти задачи могут быть успешно решены с помощью различных вариантов экзоскелетов. Общими для данных направлений являются задачи, связанные с математическим описанием процесса движения оператора в экзоскелете, построением законов управления паттерном его ходьбы, близким к реальной ходьбе здорового человека, созданием конструкций, удобных для использования человеком-оператором и разработкой приводных систем, позволяющих выполнить перемещение экзоскелета совместно с оператором.

Управление позицией или траекторией — это широко внедренная роботизированная стратегия [1—5]. В этом режиме система управления направляет конечность оператора по фиксированному эталонному пути, одновременно получая углы шарниров для построения законов управления в виде обратной связи. Для нижних конечностей эталонная траектория — это обычная картина походки, ранее записанная у здорового субъекта. Однако построенные алгоритмы часто не учитывают полные уравнения динамики, а также качество управления движением вдоль этих траекторий.

При решении задач, связанных с перемещением грузов, необходимо учитывать также и воздействие оператора на экзоскелет в целях коррекции моментов, развиваемых приводами. Эта коррекция позволяет оператору двигаться самому с небольшой долей помощи от экзоскелета, экономя при этом энергию аккумуляторов, или наоборот, перекладывая основную часть нагрузки на приводную систему экзоскелета, — такая ситуация, например, имеет место при реабилитации пациентов с нарушением опорно-двигательного аппарата. Для решения подобных задач необходимо, чтобы система управления экзоскелетом обеспечивала движение по заданной траектории, для чего она должна изменить значение управляющего момента на величину, равную измеренному моменту, возникшему от воздействия оператора.

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-01-04503.

Такого рода задача обсуждалась, например, в работах [6, 7], однако закон управления движением экзоскелета нижних конечностей был рассмотрен на примере движения одного коленного сустава без учета взаимовлияния опорной ноги и других звеньев экзоскелета. Более детальный подход предложен в работе [8], однако объектом рассмотрения здесь является управление манипулятором одной руки. Отметим также работу [9], в которой построены полные уравнения динамической системы и определяются моменты в суставах человека, а также мышечные усилия, их реализующие. Однако приведенные уравнения описывают движение только опорной ноги, а не всего тела человека.

В данной статье рассматривается процесс управления экзоскелетом нижних конечностей, надетым на оператора, в режиме плоской одноопорной регулярной ходьбы. Экзоскелет может нести на себе дополнительный груз и связан с человеком-оператором с помощью некоторой системы упруго-вязких лямок. Помимо этого он управляется только в коленных суставах (или еще и в тазобедренных суставах) системой электродвигателей с редукторами. Для управления ими строятся определенные алгоритмы, основанные на обработке сенсорной информации и учете математической модели. Сенсорная система, размещенная на экзоскелете (и, может быть, на теле человека), обеспечивает измерение углов элементов конструкции с вертикалью в шарнирах, а также их первых производных. Математическая модель учитывает не только полные динамические уравнения объекта, но и полные уравнения движения электроприводов постоянного тока. Задающим воздействием на систему управления экзоскелетом являются программные моменты в шарнирах, которые соответствуют желаемым движениям по траекториям. При этом учитываются реальные конструктивные ограничения по напряжениям в приводах, вычисляются энергетические затраты человека-оператора на процесс ходьбы.

В статье приводятся результаты моделирования движения человека в экзоскелете при ряде компоновок экзоскелета в режиме одноопорной, комфортабельной ходьбы [10]. Ставится задача не только обеспечить в конце изучаемого одноопорного этапа удовлетворительную точность исполнения краевых условий, но и по возможности оптимизировать энергетические затраты самого человека.

Уравнения движения аппарата

На рис. 1 показана абсолютная система координат XYZ, обобщенные переменные, а также схема оператора вместе с аппаратом. Введены обозначения углов аппарата с вертикалью ψ, α_1, β_1, α_2, β_2, управляющих моментов q_i, u_i (i = 1, 2)

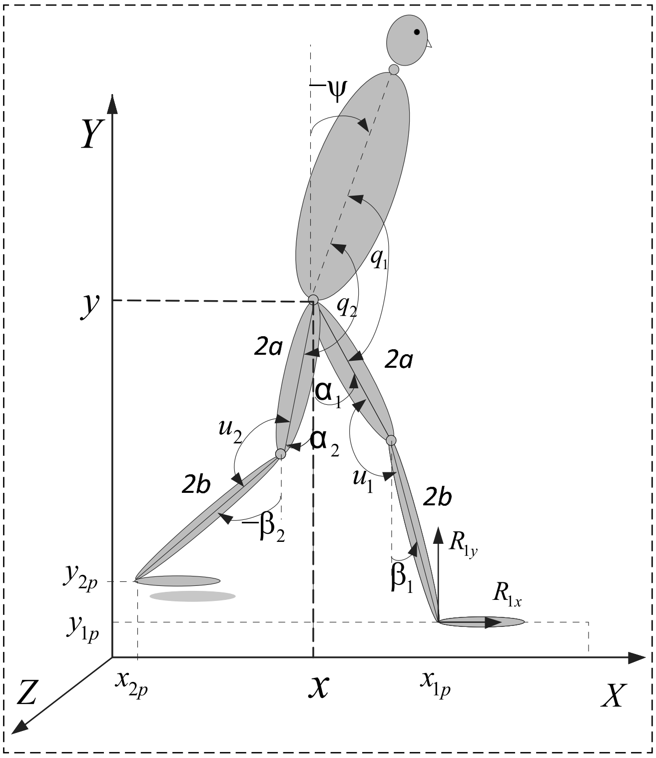


Рис. 1. Схема экзоскелета вместе с человеком в движении. Экзоскелет обозначен линиями вдоль ног человека

в тазобедренных и коленных шарнирах, соответственно; в точечных стопах ног — в точке (x_{1p}, y_{1p}) опорной ноги — приложены силы реакции R_{1x}, R_{1y}; в стопе переносимой ноги (x_{2p}, y_{2p}) силы реакции естественно отсутствуют. Управляющие моменты развиваются за счет работы электродвигателей постоянного тока с редукторами. Определяющими координатами "тела" экзоскелета являются (x, y) — координаты тазобедренного шарнира, а также углы звеньев аппарата (ψ, α_1, β_1, α_2, β_2). Одноименные координаты, но со своими значениями относятся и к телу человека-оператора.

Предположим, что желаемым движением человека-оператора является режим одноопорной комфортабельной ходьбы [10]

$$\begin{aligned} &x = Vt - \sigma,\ y = h,\ V = L/T,\ \sigma = L/2; \\ &x_{1p} = y_{1p} = 0;\ \ t \in [0, T], \end{aligned} \qquad (1)$$

где V — скорость перемещения; T — время переноса ноги в течение одного шага длиной L; h — высота перемещения точки таза над горизонтальной поверхностью (все эти величины постоянны). Пусть движение переносной ноги подчиняется закону

$$x_{2p} = -L\cos(\Omega t);\ y_{2p} = \delta^2 \sin^2(\Omega t);\ \Omega = \pi/T, \qquad (2)$$

где δ — некоторая константа, задающая высоту траектории переносимой ноги (обычно δ^2 = 0,02 м), и пусть, наконец, угол корпуса ψ^* [10] изменяется по периодическому закону

$$\psi^*(t) = -\frac{\tilde{M}L}{2K_r}\left[\text{ch}\omega t - \frac{1+\text{ch}\omega T}{\text{sh}\omega T}\text{sh}\omega t\right] - \frac{\tilde{M}x^*}{K_r};$$
$$\sigma = \frac{L}{2};\ \omega^2 = \frac{K_r g}{J + K_r h}. \qquad (3)$$

Здесь $\tilde{M}$ — масса корпуса оператора; K_r, J — масс-инерционные характеристики человеческого тела, смысл которых будет пояснен ниже; g — ускорение свободного падения. Экзоскелет должен повторять желаемое движение человека, причем на перемещение экзоскелета влияют, помимо управляющих моментов, дополнительный вес груза и упругие силы, развиваемые лямками в точках контакта с телом оператора.

Ниже приведена динамическая часть системы, описывающей движение экзоскелета, не имеющего стоп, и пригодная для рассмотрения обеих фаз — одноопорной и двуопорной — ходьбы [10, 11]:

$$\begin{aligned} &M_\Sigma \ddot{x} - K_r\left(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi\right) + \\ &+\sum_{i=1}^{2}\Big\{K_a\left(\ddot{\alpha}_i\cos\alpha_i - \dot{\alpha}_i^2\sin\alpha_i\right) + \\ &+ K_b\left(\ddot{\beta}_i\cos\beta_i - \dot{\beta}_i^2\sin\beta_i\right)\Big\} = Q_x; \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} &M_\Sigma \ddot{y} - K_r\left(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi\right) + \\ &+\sum_{i=1}^{2}\Big\{K_a\left(\ddot{\alpha}_i\sin\alpha_i + \dot{\alpha}_i^2\cos\alpha_i\right) + \\ &+ K_b\left(\ddot{\beta}_i\sin\beta_i + \dot{\beta}_i^2\cos\beta_i\right)\Big\} = Q_y - M_\Sigma g; \end{aligned} \qquad (5)$$

$$J\ddot{\psi} - K_r\left(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi\right) - gK_r\sin\psi = Q_\psi; \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} &J_a^*\ddot{\alpha}_i + J_{ab}\ddot{\beta}_i\cos(\alpha_i - \beta_i) + \\ &+K_a\left(\ddot{x}\cos\alpha_i + \ddot{y}\sin\alpha_i\right) + J_{ab}\dot{\beta}_i^2\sin(\alpha_i - \beta_i) + \\ &+gK_a\sin\alpha_i = Q_{\alpha i}, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} &J_b\ddot{\beta}_i + J_{ab}\ddot{\alpha}_i\cos(\alpha_i - \beta_i) + \\ &+K_b\left(\ddot{x}\cos\beta_i + \ddot{y}\sin\beta_i\right) - J_{ab}\dot{\alpha}_i^2\sin(\alpha_i - \beta_i) + \\ &+ gK_b\sin\beta_i = Q_{\beta i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \qquad (8)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} &Q_\psi = \chi\sum_{i=1}^{2} q_i + \tilde{Q}_\psi; \\ &Q_{\alpha_i} = -\chi q_i - u_i + 2a\left(R_{ix}\cos\alpha_i + R_{iy}\sin\alpha_i\right) + \tilde{Q}_{\alpha_i}; \\ &Q_x = \sum_{i=1}^{2} R_{ix},\ Q_y = \sum_{i=1}^{2} R_{iy}, \\ &Q_{\beta_i} = u_i + 2b\left(R_{ix}\cos\beta_i + R_{iy}\sin\beta_i\right) + \tilde{Q}_{\beta_i}, i = 1, 2, \end{aligned} \qquad (9)$$

где g — ускорение свободного падения; R_{ix}, R_{iy} — силы реакций опоры; $2a$ и $2b$ соответственно длины бедер и голеней; r — расстояние центра масс корпуса от таза; J и J_a — моменты инерции соответственно корпуса и бедра относительно точки таза; J_b — момент инерции голени относительно колена; $\tilde{Q}_\psi, \tilde{Q}_{\alpha_i}, \tilde{Q}_{\beta_i}$ — виртуальные работы упругих сил за счет крепления экзоскелета с помощью лямок в восьми точках на теле человека.

Обозначим также

$$M_\Sigma = m_t + 2m_a + 2m_b;\ J_a^* = J_a + 4m_b a^2;$$
$$K_a = m_a a_* + 2m_b a;\ K_b = m_b b_*;$$
$$J_{ab} = 2m_b a b_*;\ K_r = m_t r,$$

где m_a, m_b — их массы; m_t — масса корпуса; a_*, b_* — соответственно расстояния центров масс бедра и голени от таза и коленей ног.

Система крепления и жесткости лямок подробно описаны в статье авторов [11]. Наконец, коэффициент χ равен либо нулю, если экзоскелет управляется только электроприводами в коленных шарнирах, либо единице, если приводы установлены также и в обоих тазобедренных шарнирах. Уравнения (4)—(9) в дальнейшем использовались для анализа только одноопорной фазы, когда $R_{2x} = R_{2y} = 0$. Естественно поэтому, что число введенных переменных здесь переопределено, и координаты таза могут быть выражены через углы опорной ноги:

$$\begin{aligned} &x_{1p} - x = 2a\sin\alpha_1 + 2b\sin\beta_1, \\ &y - y_{1p} = 2a\cos\alpha_1 + 2b\cos\beta_1, \end{aligned} \qquad (10)$$

причем считается, что $x_{1p} = y_{1p} = 0$. Дважды продифференцированные соотношения (10) отражают этот факт:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + 2a\ddot{\alpha}_1\cos\alpha_1 + 2b\ddot{\beta}_1\cos\beta_1 = \\ &= 2a\dot{\alpha}_1^2\sin\alpha_1 + 2b\dot{\beta}_1^2\sin\beta_1; \\ &\ddot{y} + 2a\ddot{\alpha}_1\sin\alpha_1 + 2b\ddot{\beta}_1\sin\beta_1 = \\ &= -2a\dot{\alpha}_1^2\cos\alpha_1 - 2b\dot{\beta}_1^2\cos\beta_1. \end{aligned} \qquad (11)$$

Избежать переопределенности системы можно и с помощью рассмотрения динамических уравнений в угловых переменных [12].

Для того чтобы замкнуть систему уравнений, добавим еще четыре соотношения, связанных с уравнением моментов на валу электродвигателей:

$$\begin{aligned} &nJ_{eng}(\ddot{\psi} - \ddot{\alpha}_i) + (1/n)q_i = C_m I_{qi}; \\ &nJ_{eng}(\ddot{\beta}_i - \ddot{\alpha}_i) + (1/n)u_i = C_m I_{ui},\ i = 1, 2. \end{aligned} \qquad (12)$$

Здесь n — коэффициент редукции электродвигателей, все управляющие электродвигатели идентичны; J_{eng} — момент инерции электродвигателей; C_m — некоторый коэффициент; I_{qi}, I_{ui} — силы тока в соответствующих тазобедренных и коленных (если в последних электроприводы установлены) шарнирах.

Соотношения (4)—(8), (11), (12) связывают при $\chi = 1$ 13 связями 17 неизвестных величин: семь вторых производных определяющих координат (x, y, ψ, α_1, β_1, α_2, β_2), реакции R_{x1}, R_{y1}, моменты q_i, u_i, $i = 1, 2$, приложенные к экзоскелету, а также токи I_{qi}, I_{ui}, $i = 1, 2$. Для замыкания системы нужны еще четыре соотношения, которые определяются алгоритмом управления данной системой. Аналогичный вид имеет в одноименных переменных и система уравнений, отвечающая человеку-оператору. Заметим, что необходимость ее использования определяется в дальнейшем постановкой задачи. Кроме того, обе эти системы уравнений содержат внутренние силы $\tilde{Q}$, которые являются функцией определяющих координат экзоскелета и тела человека и их первых производных.

Алгоритмы управления электроприводами и результаты их численных исследований

Численное моделирование проводилось в случае среднестатистической [13] модели тела человека: рост 1,747 м, масса 73,4 кг; длины бедер, голеней и корпуса соответственно равны 0,514, 0,402 и 0,741 м; их массы соответственно 9, 2,9 и 47,6 кг (масса стоп — каждая по 1 кг, высота голеностопного сустава над поверхностью 9 см); $a_* = 0{,}245$ и $b_* = 0{,}161$ м. Корпус человека рассматривался как тело равномерной плотности, исходя из этого подсчитывались величины K_r и J. Значения других моментов инерции принимались следующими: центральный момент инерции бедра 0,1662 кг·м^2, центральный момент инерции голени 0,0357 кг·м^2. Масса экзоскелета была принята равной 20 кг: 5 кг — масса корпуса, по 3,75 кг — масса каждого из бедер и голеней, причем масса всюду считалась распределенной равномерно. Как правило принималось, что экзоскелет нагружен дополнительным (сосредоточенным грузом) массой в 50 кг, который укреплен на корпусе на расстоянии 0,45 м выше таза.

Параметры походки: $L = 50{,}0$ см, $h = 84{,}5$ см, $T = 1$ с, $\delta = 2$ см. Параметры электродвигателей: за основу приняты характеристики мотора AXI 4130:

$$J_{eng} = 1{,}12\ \text{кг·см}^2,\ C_m = 350\ \text{кг·см}^2/(\text{А·с}^2),$$
$$C_e = 0{,}0375\ \text{В·с},\ R = 2\ \text{Ом},\ L_i = 0{,}03\ \text{В·с/А},\ n = 100.$$

Был рассмотрен ряд постановок задач управления. В первой из них (будем называть ее постановкой **1**) предполагалось, что оператор силой своих мышц (с помощью моментов, развиваемых во всех пяти суставах ног — двух коленных, двух тазобедренных и голеностопном опорной ноги) реализует комфортабельную походку, а экзоскелет с помощью приводов, установленных в коленных (и/или тазобедренных) шарнирах, стремится оказать ему в этом содействие, обеспечивая "желаемый" момент M^* в этих шарнирах на основе следующего алгоритма:

$$\dot{M} = \lambda_1[M - M^*] + \dot{M}^*,\ \lambda_1 < 0, \tag{13}$$

где $M = [q_i, u_i],\ i = 1, 2$ — реальный момент, действующий на экзоскелет; λ_1 — некоторый задаваемый коэффициент. В свою очередь, желаемый момент строится в результате решения в каждый момент времени линейной алгебраической системы уравнений относительно семи вторых производных определяющих координат экзоскелета $(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{\psi}, \ddot{\alpha}_1, \ddot{\beta}_1, \ddot{\alpha}_2, \ddot{\beta}_2)$, сил реакции в опорной ноге R_{x1}, R_{y1} и двух подлежащих определению неизвестных желаемых коленных моментов. Эта система уравнений образуется из семи соотношений (4)—(9), двух условий непроскальзывания в точке контакта опорной ноги (11) и двух соотношений, обеспечивающих устойчивое движение по заданной траектории при наличии возмущений [14], поскольку желаемый момент M^* соответствует желаемому ускорению $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = \lambda_2(\dot{\varphi} - \dot{\varphi}^*) + \lambda_3(\varphi - \varphi^*) + \ddot{\varphi}^*, \tag{14}$$

где φ^* — значение межзвенного угла в колене, отвечающее заданному комфортабельному движению человека, а λ_2, $\lambda_3 < 0$ — задаваемые коэффициенты. Ставится задача с помощью математического моделирования определить точность синтезированного закона управления и возникающие при этом энергетические затраты человека.

Преобразуем соотношение (13). Воспользуемся уравнением моментов на валу одного из приводов в коленях:

$$nJ_{eng}\ddot{\varphi} + (1/n)M = C_m I. \tag{15}$$

Подставляя это выражение в соотношение (13), имеем

$$nC_m\dot{I} - n^2 J_{eng}\dddot{\varphi} = \lambda_1[nC_m I - n^2 J_{eng}\ddot{\varphi} - M^*] + \dot{M}^*.$$

Поскольку угол φ и его производные, так же как и желаемый момент M^*, относятся к разряду относительно медленных в сравнении с токами переменных, полученную формулу можно упростить, заменив на приближенную:

$$nC_m\dot{I} \approx \lambda_1[nC_m I - n^2 J_{eng}\ddot{\varphi} - M^*]. \tag{16}$$

Член с $\ddot{\varphi}$, а также M^* в правой части полученного соотношения умножаются на могущий быть большим по модулю коэффициент λ_1. Поэтому эти члены сохранены. Подобные преобразования удобно проводить и в случае установки электроприводов одновременно в коленных и тазобедренных шарнирах. Тогда в результате получаем следующие четыре недостающих системе (4)—(12) соотношения:

$$\dot{I}_{qi} = \lambda_1[I_{qi} - (nJ_{eng}/C_m)(\ddot{\psi} - \ddot{\alpha}_i) - q_i^*/nC_m];$$
$$\dot{I}_{ui} = \lambda_1[I_{ui} - (nJ_{eng}/C_m)(\ddot{\beta}_i - \ddot{\alpha}_i) - u_i^*/nC_m]; \quad (17)$$
$$M^* = (q_i^*, u_i^*), \ \ i = 1, 2.$$

Следует заметить, что управлением электродвигателей постоянного тока является напряжение V, которое определяется соотношением

$$V = nC_e\dot{\varphi} + RI + L\dot{I},$$

где C_e — коэффициент противоЭДС; R — сопротивление цепи электродвигателя; L — ее индуктивность. Если значение напряжения ограничено по модулю некоторым значением $V_{\lim}$, то этот факт можно рассматривать как ограничение на скорость изменения токов.

Опишем результаты численного исследования данного алгоритма в случае **1** постановки задачи. Степень точности исполнения требуемой позы аппарата в конечный момент времени $t = T$ определим как невязку Δ, которая является суммой двух модулей: уклонения тазобедренного сустава от требуемого положения в декартовых координатах и модуля отклонения пятки переносимой ноги от требуемого положения на поверхности перемещения. Энергетические затраты человека W в процессе шага будем оценивать биомеханическим функционалом

$$W = \int_0^T \sum_i \left| M_{hi}\dot{\varphi}_{hi} \right| dt, \quad (18)$$

где φ_{hi}, M_{hi} — соответственно межзвенные углы человека в суставах и развиваемые в них оператором моменты. При численном исследовании задачи были получены результаты, представленные в таблице (переменная Δ измеряется в см, W — в Дж, $V_{\lim}$ — В).

При всех приведенных значениях редукции n электроприводов получаются примерно одинаковые результаты: энергетика чуть лучше при $n = 90$, а невязки чуть меньше при $n = 110$. В качестве опорного значения редукции для дальнейших рассуждений выберем $n = 100$.

Из рассмотрения таблицы вытекает, что точность алгоритма на практике вполне достаточная. Представленную в таблице энергетику интересно сравнить с энергетикой человека, перемещающегося без помощи активного экзоскелета: человек без груза и экзоскелета затрачивает на такой же шаг 85,30 Дж, на шаг с грузом (в легком рюкзаке) без экзоскелета 133,14 Дж; на шаг без груза, но в экзоскелете, жестко связанном с телом человека, с учетом суммарных масс-инерционных характеристик экзоскелета — 116,48 Дж; наконец, на шаг в экзоскелете, характеристики которого учитываются, и с грузом — 163,45 Дж. Сравнение этих цифр с представленными в таблице говорит о том, что движение с грузом в управляемом экзоскелете, быть может, и более удобно, но требует от человека несколько больших энергетических затрат даже в том случае, когда ограничения по напряжению двигателей велики. Этот факт заставляет вернуться к постановке задачи **1** и пересмотреть ее в сторону более реальной, которая не требует от человека строгого выполнения заданной кинематики движения.

Будем считать, что человек выполняет свое перемещение в коленных, тазобедренных, стопных (опорной ноги) суставах и стремится, чтобы эти перемещения соответствовали заданным по кинематике — это ближе к реальности, чем возможность человеку двигаться строго по задаваемой, теоретической кинематике. В определяющих координатах тела человека данное движение соответствует ранее приведенной формуле (14). Экзоскелет же продолжает выполнять движение в своих коленных шарнирах посредством приводов согласно соотношению (16). Иными словами, согласно такой идеологии мы имеем два разных тела, управляемых соответствующим образом, связь которых осуществляется только через вязко-упругие лямки. Расчеты по данному алгоритму выявили необходимость рассматривать только вариант с $V_{\lim} = 150$ В, поскольку только в этом случае экзоскелету удается относительно точно отслеживать свои коленные углы. Построенный алгоритм приводит к достаточно большим значениям невязки $\Delta \sim 6...7$ см ввиду отсутствия синхронности при отслеживании межзвенных углов каждого тела, хотя и отвечает режиму с низкой

n	$V_{\lim}$	W	Δ	n	$V_{\lim}$	W	Δ	n	$V_{\lim}$	W	Δ
90	24	185,93	0,22	100	24	187,36	0,21	110	24	189,81	0,20
	75	150,12	0,07		75	148,63	0,07		75	148,79	0,06
	150	145,25	0,09		150	147,19	0,08		150	149,02	0,08

энергетикой порядка 90 Дж. Более удачным представляется модифицированный алгоритм **2**, при котором в управлении экзоскелетом учитываются соответствующие рассогласования в коленях человека, т. е. в правой части соотношения (14) добавляется член $\lambda_4(\dot{\varphi}_h - \dot{\varphi}_h^*) + \lambda_5(\varphi_h - \varphi_h^*)$ с задаваемыми коэффициентами λ_4, λ_5. В свою очередь, в формулах межсуставных углов человека (в их правых частях) добавляются с дополнительными коэффициентами соответствующие члены с моментами от сил натяжения лямок: человеку-оператору невозможно в электронном или каком угодно другом виде быстро передать информацию о межзвенных углах экзоскелета в данный момент времени в то время, как тактильной информацией о натяжении лямок он в той или иной мере располагает. При соответствующем подборе дополнительных коэффициентов здесь удалось добиться невязки порядка 0,2 см для человека и 1,5 см по экзоскелету при энергетических затратах человека на шаг 88,5 Дж, что существенно ниже значений из приведенной выше таблицы.

Заметим, что реализация алгоритма **2** аналогично алгоритму **1** требует достаточно высоких значений управляющих напряжений на опорной ноге, что свидетельствует о недостаточном вырабатываемом моменте на приводе. Поэтому был рассмотрен в нескольких вариантах алгоритм **3**, где предполагалось, что экзоскелет управляется системой четырех электроприводов (к коленным приводам добавляются два тазобедренных привода). Схема формирования управляющих сигналов остается в основном прежней — с единственной поправкой, что вводится ограничение сверху $M_h^{\max}$ на уровень всех развиваемых человеком суставных моментов. Наличие такого ограничения естественно сказывается на общем уровне энергозатрат W человека из формулы (18). Численные расчеты по данному алгоритму показывают, что определенного успеха здесь удается добиться уже при уровне в $V_{\lim}$ = 75 В. Так, например, при $M_h^{\max} = 90$ Н·м невязка реализации исходного комфортабельного режима составляет для оператора около 0,6 см и 0,3 см для экзоскелета при энергетических затратах человека на шаг 120,3 Дж. При этом отмечается та же характерная черта всех этих решений, при которой нетрудно еще понизить энергозатраты за счет роста невязок, и наоборот. Однако при $V_{\lim}$ = 24 В низкий уровень невязок сопровождается значительными энергозатратами порядка 160...190 Дж за шаг.

Из анализа представленных выше результатов был сделан вывод о том, что при условии недостаточной мощности применяемых двигателей наличие деформируемых лямок является, по-видимому, дестабилизирующим фактором, вызывающим нежелательные колебания в конструкции. Поэтому рассмотренный далее алгоритм **4** предполагал абсолютно жесткую связь экзоскелета, несущего груз, с телом человека-оператора. Эта объединенная, жесткая конструкция рассматривалась в предположении учета и суммарных масс-инерционных характеристик. Поскольку конструкция теперь одна, то при учете показаний датчиков, установленных на экзоскелете, система управления способна определить желаемые моменты, единые для всей конструкции. Это обстоятельство позволяет разделить желаемые моменты, прилагаемые в том или ином шарнире, на доли, реализуемые отдельно за счет электродвигателей экзоскелета или же за счет мышц оператора. Разумеется, на практике более или менее точная реализация человеком своих долей может быть достигнута за счет тренировок. Однако на приводимые ниже результаты численного исследования по данному алгоритму можно смотреть еще и с другой точки зрения — как на определенный идеал по энергозатратам, поскольку ошибка при реализации желаемого движения объединенной конструкции здесь практически равна нулю.

Приведем полученные при исследовании данного алгоритма результаты. В случае, если оператор управляет всеми суставами, а собственно экзоскелет — всеми, кроме стопы опорной ноги (в стопе переносимой ноги момент нулевой), то в диапазоне $V_{\lim}$ = (75, 150) В энергозатраты человека составляют 19,3 Дж (полученные только за счет работы в голеностопном суставе). При $V_{\lim}$ = 48 В энерготраты составляют уже около 91 Дж (приводимые ниже графики относятся именно к этому случаю); при $V_{\lim}$ = 24 В они приблизительно равны 131 Дж. Иными словами, в этом последнем случае они только чуть меньше, чем у человека без экзоскелета с тем же грузом (50 кг) в рюкзаке. Впрочем, заметим, что критерий энерготрат не может рассматриваться как единственный при оценке эффективности использования экзоскелета для транспортировки значительных грузов — есть еще критерии разгрузки позвоночника оператора и удобства ношения экзоскелета с грузом, которые невозможно формализовать.

Наряду со случаем четырех электродвигателей можно рассмотреть и аналогичный случай только двух коленных электродвигателей. При $V_{\lim}$ = 48 В энерготраты составляют около 127,5 Дж; при $V_{\lim}$ = 24 В они приблизительно равны 150,5 Дж. Для реализации другой схемы управления, когда электродвигатели управляют только коленями, а оператор — всеми остальными суставами, требуется, чтобы $V_{\lim} \gg 130$ В, при этом энергозатраты человека составляют около 75 Дж. Заметим, что при наличии шести подобных двигателей станет возможным осуществить требуемое перемещение аппарата без силового участия со стороны человека. Все вышеприведенные цифры говорят, по-

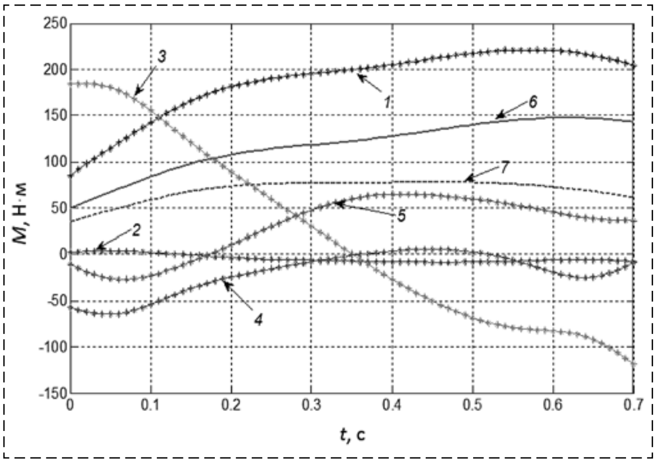


Рис. 2. Графики со звездочками — желаемые моменты обеих ног:
1 — коленный момент опорной ноги; *2* — коленный момент переносимой ноги; *3* — тазобедренный момент опорной ноги; *4* — тазобедренный момент переносимой ноги; *5* — голеностопный момент опорной ноги, развиваемый человеком; *6* — коленный момент опорной ноги, развиваемый человеком; *7* — коленный момент опорной ноги, создаваемый приводом

видимому, о том, что принятые здесь в качестве примера электродвигатели находятся на пределе возможного и требуют замены на более мощные.

Результаты, полученные при моделировании человека в экзоскелете при управлении по алгоритму **4**, когда движение происходит за счет четырех двигателей, представлены на рис. 2—7. На рис. 2 представлены графики желаемых моментов, откуда видно, что наиболее нагруженным является колено опорной ноги. Кривые *6*, *7* характеризуют доли этого коленного момента, приходящиеся на человека-оператора и привод, т. е. сумма координат этих кривых равна координате, обозначенной номером *1*. Второй по загруженности является тазобедренный шарнир опорной ноги.

Аналогичная картина получается при анализе управляющих напряжений и токов в приводах (рис. 3, 4).

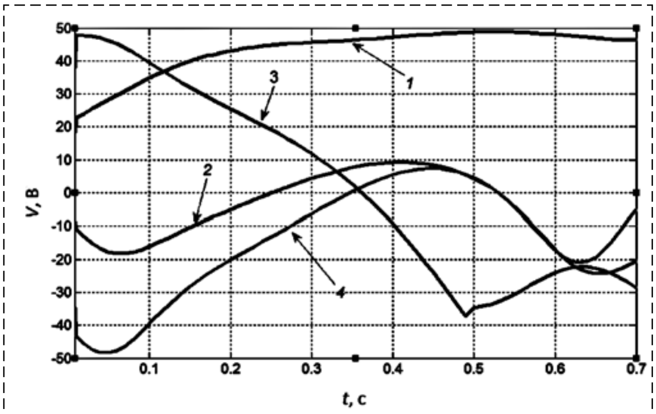


Рис. 3. Графики напряжений на приводах опорной и переносной ног:
1 — напряжение в коленном приводе опорной ноги; *2* — напряжение в коленном приводе переносимой ноги; *3* — напряжение в тазобедренном приводе опорной ноги; *4* — напряжение в тазобедренном приводе переносимой ноги

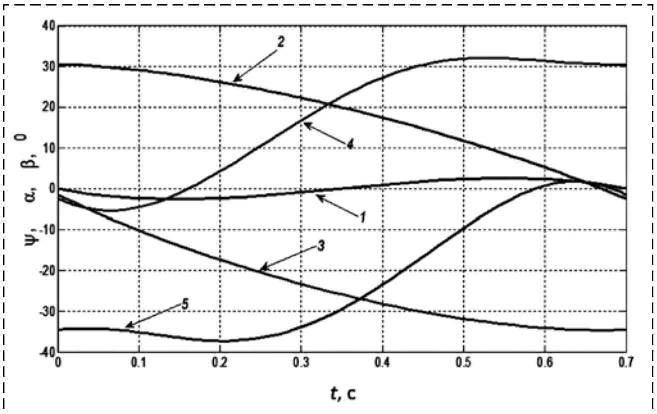


Рис. 5. График углов в шарнирах экзоскелета:
1 — угол корпуса с вертикалью; *2* — угол бедра опорной ноги; *3* — угол голени опорной ноги; *4* — угол бедра переносимой ноги; *5* — угол голени переносимой ноги

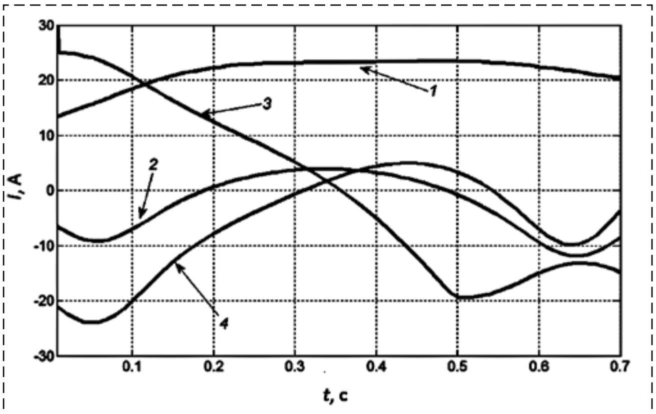


Рис. 4. Графики токов в приводах:
1 — сила тока в коленном приводе опорной ноги; *2* — сила тока в коленном приводе переносимой ноги; *3* — сила тока в тазобедренном приводе опорной ноги; *4* — сила тока в тазобедренном приводе переносимой ноги

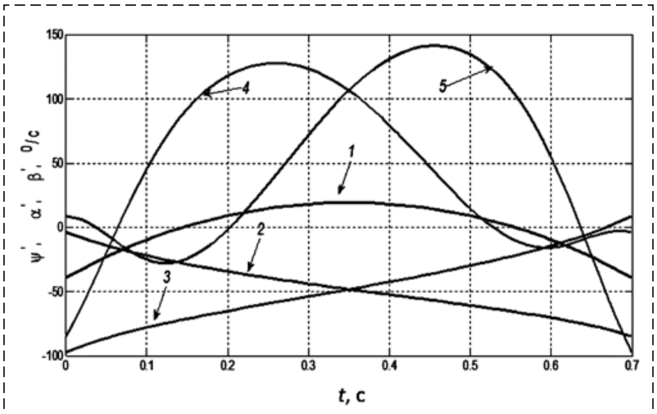


Рис. 6. Графики угловых скоростей в шарнирах экзоскелета:
1 — угловая скорость корпуса с вертикалью; *2* — угловая скорость бедра опорной ноги; *3* — угловая скорость голени опорной ноги; *4* — угловая скорость бедра переносимой ноги; *5* — угловая скорость голени переносимой ноги

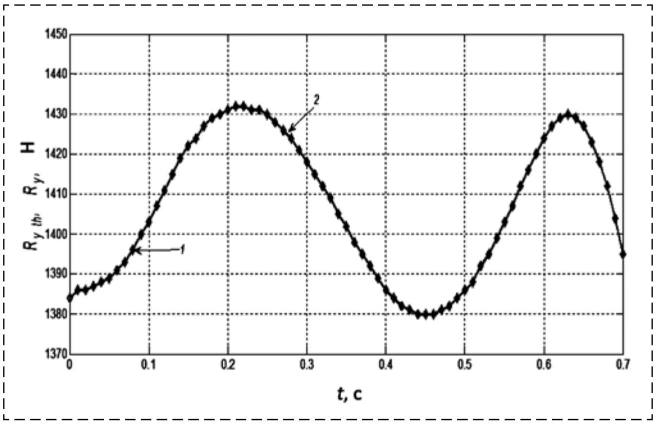


Рис. 7. Силы вертикальной реакции в стопе опорной ноги:
1 — график R_y — текущая сила реакции; *2* — график со звездочками R_{yth} — теоретическая сила реакции, Н. Эти графики практически совпадают

На рис. 5, 6 представлены графики углов и угловых скоростей реализации комфортабельного движения. Их отклонения от теоретических значений практически равны нулю.

На рис. 7 представлены графики реальных и теоретических реакций в опорной ноге. Эти графики практически не различимы. Отметим, что теоретические значения реакции опоры, полученные с учетом формулы (3), имеют отчетливый двугорбый вид, характерный для ходьбы человека в норме. Однако минимум между горбами смещен по времени немного вправо, что, по-видимому, объясняется эмпирическим характером используемой формулы угла наклона корпуса (3).

Заключение

1. Построена динамическая модель движения в сагиттальной плоскости экзоскелета нижних конечностей, интегрированного с человеком-оператором с помощью лямок с одним или двумя управляемыми приводами в каждой ноге. Экзоскелет дополнительно нагружен сосредоточенной нагрузкой. Рассматривались модели вязко-упругого и жесткого крепления экзоскелета к человеку. Модели учитывают также динамику электроприводов.

2. Построены несколько алгоритмов управления этими объектами, которые формируются исходя из требования устойчивости движения по траектории и реализации моментов, отвечающих этому режиму.

3. Исследуется точность работы этих алгоритмов и соответствующие им энергозатраты человека-оператора при задании настроечных коэффициентов алгоритмов в случае регулярной, одноопорной ходьбы. В результате моделирования была получена приемлемая точность по каждому алгоритму управления при условии обеспечения приводной системой требуемых номинальных моментов. Наиболее полные результаты с хорошей точностью реализации удалось получить в случае абсолютно жесткой модели, при которой конструкция экзоскелета и тело человека составляют одно целое. При необходимом значении номинального момента на приводах экзоскелет способен оказать существенную помощь человеку, переносящему груз, что видно из анализа его энергозатрат.

Список литературы

1. **Colombo G., Joerg M., Schreier R., Dietz V.** Treadmill training of paraplegic patients using a robotic orthosis. J. Rehabil. Res. Dev. 2000; 37 (6), p. 693—700.

2. **Hussain S., Xie S. Q., Liu G.** Robot assisted treadmill training: mechanisms and training strategies. Med. Eng. Phys. 2011; 33 (5), p. 527—533.

3. **Aoyagi D., Ichinose W. E., Harkema S. J., Reinkensmeyer D. J., Bobrow J. E.** A robot and control algorithm that can synchronously assist in naturalistic motion during body-weight-supported gait training following neurologic injury. IEEE Trans. Neural. Syst. Rehabil. Eng. 2007; 15 (3), p. 387—400.

4. **Wisneski K. J., Johnson M. J.** Quantifying kinematics of purposeful movements to real, imagined, or absent functional objects: implications for modelling trajectories for robot-assisted adl tasks. J. Neuro Engineering Rehabil., 2007.

5. **Montagner A., Frisoli A., Borelli L., Procopio C., Bergamasco M., Carboncini M. C., et al.** A pilot clinical study on robotic assisted rehabilitation in vr with an arm exoskeleton device. In: Proceedings of Virtual Rehabilitation: 27—29 September 2007. Venice, 2007, p. 57—64.

6. **Antonio J. del-Ama, Ángel Gil-Agudol, José L. Pons and Juan C. Moreno del-Ama et al.** Hybrid FES-robot cooperative control of ambulatory gait rehabilitation exoskeleton. J. of Neuro Engineering and Rehabilitation, 2015. http://www.jneuroengrehab.com/content/11/1/27.

7. **Magdo Bortolel, Anusha Venkatakrishnan, Fangshi Zhu, Juan C. Morenol, Gerard E. Francisco, Jose L. Pons and Jose L. Contreras-Vidal.** The H2 robotic exoskeleton for gait rehabilitation after stroke: early findings from a clinical study. // J. of Neuro Engineering and Rehabilitation. https://doi.org/10.1186/s12984-015-0048-y.

8. **Yali Liu, Chong Li, Linhong Ji, Sheng Bi, Xuemin Zhang, Jianfei Huo, and Run Ji.** Development and Implementation of an End-Effector Upper Limb Rehabilitation Robot for Hemiplegic Patients with Line and Circle Tracking Training // J. of Healthcare Engineering. 2017, June.

9. **Suin Kim, Kyoungkwan Ro and Joonbum Bae.** Estimation of Individual Muscular Forces of the Lower Limb during Walking using a Wearable Sensor System. J. of Sensors Volume 2017 (2017), Article ID 6747921, 14 p. https://doi.org/10.1155/2017/6747921.

10. **Белецкий В. В.** Двуногая ходьба. М.: Наука, 1984, 286 с.

11. **Лавровский Э. К., Письменная Е. В., Комаров П. А.** Управление ходьбой экзоскелетона нижних конечностей при вязко-упругой связи его с телом человека-оператора // МАУ. 2015. № 2. С. 96—101.

12. **Формальский А. М.** Перемещение антропоморфных механизмов. М.: Наука, 1984, 368 с.

13. **Лавровский Э. К., Воронов А. В.** Определение масс-инерциальных характеристик ноги человека // Физиология человека. 1998. № 2. С. 91—101.

14. **Лавровский Э. К., Письменная Е. В.** Алгоритмы управления экзоскелетоном нижних конечностей в режиме одноопорной ходьбы по ровной и ступенчатой поверхностям // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1. С. 44—51.

Control of Regular Walking for an Exoskeleton with the Electric Drive

E. K. Lavrovsky, lavrov@imec.msu.ru, **E. V. Pismennaya**, epismen@yandex.ru,
Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding authors: **Pismennaya Elena V.,** Ph. D., Senior Researcher, Institute of Mechanics of Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation, e-mail: epismen@yandex.ru

Accepted on November 16, 2017

We consider dynamic model of the motion in the sagittal plane of the exoskeleton of lower limbs, integrated with the similar model of the human operator by means of straps with one or two controllable actuators in each leg. The exoskeleton is additionally loaded with heavy point weight. Considered models of visco-elastic and the rigid attachment of the exoskeleton to the person. The model also takes into account the dynamics of the electric actuators. We study the possibility of designing control systems for various options of the actuators in the joints of the exoskeleton (knee or both in the knee and hip), which also take into account the different degrees of force action of the human operator on the process of movement. The synthesis is based on the method of solving the inverse tasks of the dynamics. The analytical motion control for exoskeleton was designed, which provided locomotion to the hip and knee joints in accordance with the selected desired mode. Synthesis of the control system was carried out on the example of a flat, single support for comfortable walking. The algorithms provide a good quality performance of a given motion and an acceptable cost of energy from the human operator. With sufficient size nominal torque for actuators, the exoskeleton is able to provide substantial assistance to the person carrying the heavy weight, as is evident from the analysis of energy costs. The best energy results with good precision implementation can be obtained in the case of a perfectly rigid model, in which the design of the exoskeleton and the human body are one.

Keywords: *exoskeleton, mobile robots, nonlinear control, motion on trajectory, energy walk*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 15-01-0453.

For citation:

Lavrovsky E. K., Pismennaya E. V. Control of Regular Walking for an Exoskeleton with the Electric Drive, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 3, pp. 160—168.

DOI: 10.17587/mau.19.160-168

References

1. **Colombo G., Joerg M., Schreier R., Dietz V.** Treadmill training of paraplegic patients using a robotic orthosis, *J. Rehabil. Res. Dev.*, 2000: 37 (6), pp. 693—700.
2. **Hussain S., Xie S. Q., Liu G.** Robot assisted treadmill training: mechanisms and training strategies, *Med. Eng. Phys.*, 2011: 33 (5), pp. 527—533.
3. **Aoyagi D., Ichinose W. E., Harkema S. J., Reinkensmeyer D. J., Bobrow J. E.** A robot and control algorithm that can synchronously assist in naturalistic motion during body-weight-supported gait training following neurologic injury, *IEEE Trans. Neural. Syst. Rehabil. Eng.*, 2007: 15 (3), pp. 387—400.
4. **Wisneski K. J., Johnson M. J.** Quantifying kinematics of purposeful movements to real, imagined, or absent functional objects: implications for modelling trajectories for robot-assisted adl tasks, *J. NeuroEngineering Rehabil.*, 2007.
5. **Montagner A., Frisoli A., Borelli L., Procopio C., Bergamasco M., Carboncini M. C., et al.** A pilot clinical study on robotic assisted rehabilitation in vr with an arm exoskeleton device, *Proceedings of Virtual Rehabilitation*, 27—29 September 2007, Venice, 2007, pp. 57—64.
6. **Antonio J. del-Ama, Ángel Gil-Agudol, José L. Pons and Juan C. Moreno del-Ama et al.** Hybrid FES-robot cooperative control of ambulatory gait rehabilitation exoskeleton, *J. of Neuro-Engineering and Rehabilitation*, 2015, available at: http://www.jneuroengrehab.com/content/11/1/27.
7. **Magdo Bortolel, Anusha Venkatakrishnan, Fangshi Zhu, Juan C. Morenol, Gerard E. Francisco, Jose L. Pons and Jose L. Contreras-Vidal.** The H2 robotic exoskeleton for gait rehabilitation after stroke: early findings from a clinical study, *J. of NeuroEngineering and Rehabilitation*, available at: https://doi.org/10.1186/s12984-015-0048-y.
8. **Yali Liu, Chong Li, Linhong Ji, Sheng Bi, Xuemin Zhang, Jianfei Huo, and Run Ji.** Development and Implementation of an End-Effector Upper Limb Rehabilitation Robot for Hemiplegic Patients with Line and Circle Tracking Training, *J. of Healthcare Engineering,* 2017, June.
9. **Suin Kim, Kyoungkwan Ro and Joonbum Bae.** Estimation of Individual Muscular Forces of the Lower Limb during Walking using a Wearable Sensor System, *J. of Sensors Volume,* 2017, Article ID 6747921, 14 p., available at: https://doi.org/10.1155/2017/6747921.
10. **Beletsky V. V.** *Dvunogaia khodba (*Biped walking*),* Moscow, Nauka, 1984, 286 p. (in Russian).
11. **Lavrovsky E. K., Pismennaia E. V., Komarov P. A.** *Upravlenie khodboji ekzoskeletona nizhnikx konechnosteji pri viazko-uprugoji sviazi ego s telom cheloveka-operatora* (About control of walking lower extremities exoskeleton at condition of its elastic-viscous connection with human operator), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2015, no. 2, pp. 96—101 (in Russian).
12. **Formalsky A. M.** *Peremechshenie antropomopfnykx mekxanizmov.* (About displacement of antropomophic mechanismes), Moscow, Nauka, 1984, 368 p. (in Russian).
13. **Lavrovsky E. K., Voronov A. V.** *Opredelenie mass-inertsialnykx kxarakteristik nogi cheloveka* (Finding of mass-inertia parameters for human legs), *Physiology of Human*, 1998, no. 2, pp. 91—101 (in Russian).
14. **Lavrovsky E. K., Pismennaia E. V.** *Algoritmy upravleniai ekzoskeletom nizhnix konechnosteji v regime odnoopornoji fazy khodby po rovnym i stupenchatym poverkhnostiam.* (Control algorithm for lower extremities exoskeleton in the walking regime by flat and step surfaces), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2014, no. 1, pp. 44—51 (in Russian).

УДК 621.865.8 DOI: 10.17587/mau.19.169-174

С. В. Харузин, инженер, s.haruzin@rtc.ru, **О. А. Шмаков,** начальник отдела, shmakov@rtc.ru,
Центральный научно-исследовательский и опытно-конструкторский институт робототехники и технической кибернетики, Санкт-Петербург

Визуальная оценка локомоционной эффективности реконфигурируемого мобильного робота[1]

Проведена визуальная оценка локомоционной эффективности виртуальной модели реконфигурируемого мобильного робота при движении по полигону, составленному из типовых препятствий. Рассмотрены два варианта комплектации устройства: с гусеничной и колесной ходовыми частями. Предложена система управления и алгоритм, обеспечивающие движение устройства в пространственных интервалах между предварительно определяемыми путевыми точками. Приведены результаты виртуального моделирования.

Ключевые слова: *мобильный робот, модульная сборка, мехатронный модуль, система управления, визуальный анализ, преодоление препятствий*

Введение

Быстрое развитие прикладных технологий способствует внедрению робототехнических решений во многие сферы человеческой деятельности. Часть практических и исследовательских задач решается с помощью мобильных роботов (МР). Такие устройства используются при проведении инспекций объектов промышленного и гражданского значения, в строительстве, при транспортировке, при проведении спасательных операций и т. д. Определяющим фактором при их построении является возможность адаптации механической структуры МР к перспективным условиям применения. Поэтому разработка реконфигурируемого МР, подготовленного к выполнению рабочих операций в широком диапазоне условий, является одной из актуальных задач мобильной робототехники.

Оценка и прогнозирование локомоционной эффективности реконфигурируемого МР на ранних стадиях разработки позволяет составить рекомендации и требования к параметрам его исполнительных и пассивных систем, определить характер перемещений робота, составить требования к его системе управления. Одним из наиболее эффективных методов оценки локомоционных параметров МР является виртуальное моделирование кинематики и динамики с последующей визуальной оценкой полученных результатов. Авторы работы [1] моделировали динамику шестиколесного робота с трансформируемой подвеской при движении по ступеням. В докладах [2—3] представлен визуальный анализ эффективности нечеткого алгоритма оценки текущего состояния колесно-шагающей платформы при преодолении уступа. В работе [4] проводилась визуальная оценка эффективности алгоритма преодоления препятствия с прямоугольным сечением четырехколесным роботом, передняя и задняя оси колес которого соединены активным шарниром, вращающимся относительно продольной оси устройства. Предварительная оценка эффективности алгоритмов преодоления уступов и рвов шестиногими колесно-шагающими роботами рассмотрена в статьях [5—6]. Визуализация движений виртуальных моделей змееподобных роботов выполнена в работах [7—9]. Моделирование динамики и визуализация движений шагающего робота с четырьмя ногами описаны в докладе [10].

В данной статье проведена визуальная оценка локомоционной эффективности виртуальной модели реконфигурируемого мобильного робота при движении по полигону, составленному из типовых препятствий. Рассмотрены два варианта комплектации устройства: с гусеничной и колесной ходовыми частями. Предложены система управления и алгоритм, обеспечивающие движение устройства в пространственных интервалах между предварительно определяемыми путевыми точками. Приведены результаты виртуального моделирования.

Виртуальные модели МР и полигона

Изображения 3D-CAD моделей реконфигурируемых МР в гусеничной и колесной комплектациях приведены на рис. 1. Каждое мобильное устройство составлено из набора типовых модулей, комбинирование которых позволяет

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках соглашения № 14.578.21.0124 о предоставлении субсидии на выполнение прикладных научных исследований и экспериментальных разработок. Уникальный идентификатор ПНИЭР — RFMEFI57815X0124.

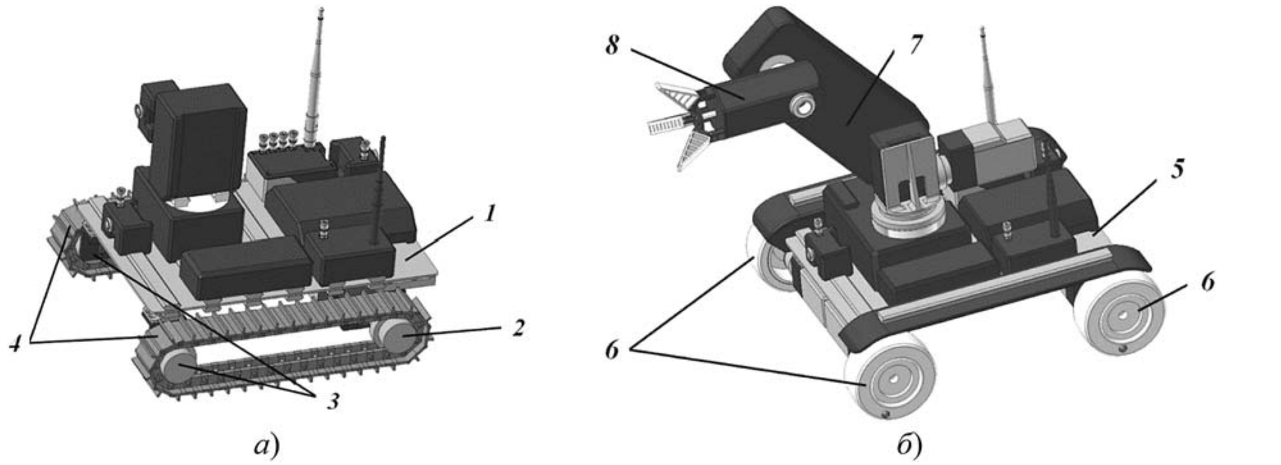


Рис. 1. Изображение 3D-CAD модели мобильной платформы в гусеничной (*а*) и в колесной (*б*) конфигурациях:
1, *5* — несущие элементы МР; *2*, *6* — ведущие колеса; *3* — ведомые колеса; *4* — гусеничные траки; *7*, *8* — звенья манипулятора

собирать ходовые части и полезные нагрузки различных конфигураций. Несущие элементы проектируемых МР представлены каркасными конструкциями, выполненными в виде алюминиевых пластин *1* и *5* (рис. 1). К пластинам с двух сторон крепится массив из съемных планок Пикаттини. Планки предназначены для установки на них различных модулей и крепежных элементов. Крепление модулей осуществляется с помощью специальных фиксаторов, расположенных непосредственно на корпусах модулей. Сборка представленных в настоящей работе платформ осуществлялась из упрощенных 3D-CAD моделей типовых модулей приводов, датчиков, механических передач и модулей передачи данных. Все виртуальные представления модулей обладают массогабаритными и инерционными характеристиками перспективных физических аналогов. Полезная нагрузка гусеничного МР представлена камерой, установленной на поворотном основании. Полезная нагрузка колесного МР представлена сборным манипулятором. Среди основных компонентов, из которых составлены платформы, можно выделить ведущие колеса *2* и *6*, ведомые колеса *3*, гусеничные траки *4* и два звена манипулятора *7*, *8*, одно из которых конструктивно совмещено со схватом. Массы обеих платформ составляют 7,5 кг.

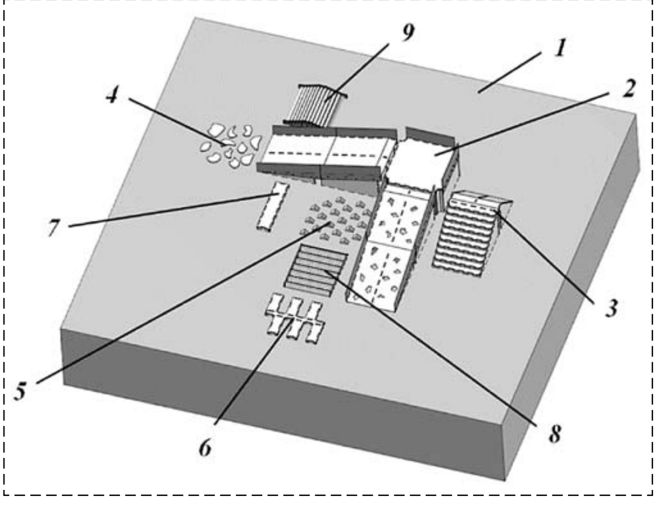


Рис. 2. Изображение 3D-CAD модели полигона для испытаний локомоционной эффективности МР:
1 — подложка; *2* — уклон и площадка; *3* — крутой уклон и ступени; *4*, *5* — препятствия типа камни; *6*, *7* — препятствия типа планки; *8* — препятствие с волнистым сечением подстилающей поверхности; *9* — уголок из трубок

Оценку локомоционной эффективности мобильных устройств проводили на полигоне, изображение которого приведено на рис. 2. Основным элементом полигона является подложка (*1*), на которой закреплены препятствия. В состав полигона входят препятствия: уклон и площадка (*2*, угол наклона составляет 15°), крутой уклон и ступени (*3*, угол наклона составляет 45°, высота ступени — 5 см), два набора препятствий типа камни (*4* и *5*), два препятствия типа планки (*6* и *7*, высота препятствий составляет 5 см), препятствие с волнистым сечением подстилающей поверхности (*8*) и уголок, составленный из трубок (*9*, диаметр трубки составляет 5 см).

Структура системы управления

Обеспечивающая движение мобильных платформ в пространственных интервалах между путевыми точками система управления содержит блоки в соответствии со схемами на рис. 3, 4.

С виртуальной модели мобильного робота и рабочей среды в систему формирования управляющих сигналов поступают показания экстерорецептивных и проприорецептивных датчиков. В случае с гусеничной платформой проприоре-

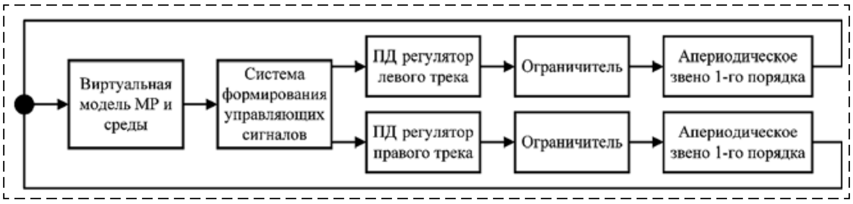


Рис. 3. Схема системы управления движением гусеничной платформы

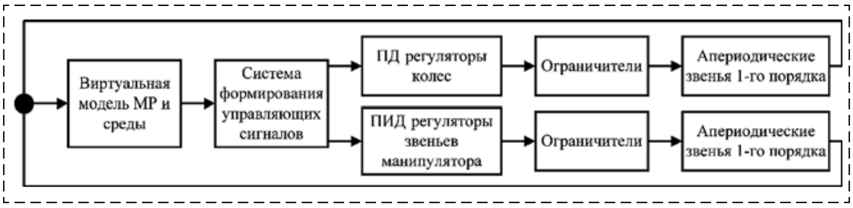


Рис. 4. Схема системы управления движением колесной платформы

цептивная информация представлена показаниями энкодеров, расположенных в двух ведущих колесах левой и правой гусеничных систем. Аналогичная информация для колесной платформы представлена показаниями энкодеров каждого из колес, а также показаниями абсолютных датчиков угла, установленных в сочленениях манипулятора. Экстерорецептивная информация представлена данными об абсолютном положении МР в глобальной системе координат и его ориентации в ней. Эта информация поступает на блок системы формирования управляющих сигналов, который с заданной частотой (во время виртуальных экспериментов частота составляла 100 Гц) сравнивает ее с текущим задаваемым положением МР (путевая точка) и используется при формировании заданий на вращение ведущих колес. Информация с энкодеров и угломеров используется для формирования рассогласований, которые затем подаются на входы ПД и ПИД регуляторов, играющих в этой системе стандартную роль по формированию значений вращающих моментов. Значение сформированного вращающего момента затем проходит через ограничитель, который имитирует физически максимально достижимое приводом значение вращающего момента, определяемое на основе характеристик реальных двигателей, предложенных к использованию в составе модульной платформы. Затем полученный сигнал проходит через передаточные функции апериодических звеньев первого порядка, сглаживающих скачки вращающих моментов и функционирующих в соответствии с выражением

$$\frac{a}{bs+1},$$

где $a = 1$, а значение коэффициента b выбиралось от 0,001 до 0,01.

Предложенный алгоритм движения МР в пространственных интервалах между путевыми точками реализуется системой формирования управляющих сигналов. Под путевой точкой понимается плоская координата, через малую окрестность которой (во время виртуальных экспериментов окрестность была ограничена окружностью диаметром 3 см) должен пройти маркер, жестко связанный с каркасом МР. По достижении координаты происходит ее переключение на следующую из предварительно определенного списка. Если же достигнута последняя координата, то происходит формирование команды остановки МР.

На вход системы формирования управляющих сигналов поступает информация о текущих скоростях вращения ведущих колес, текущее время моделирования, временной интервал, через который происходит расчет параметров (имитирует время отклика бортового вычислителя), абсолютные углы поворота звеньев манипулятора (если он включен в комплектацию), координаты устройства в глобальной системе координат, углы ориентации устройства в глобальной системе координат (имитация показаний компаса и инклинометров), массив координат путевых точек. Выходами системы являются рассогласования задаваемых и текущих скоростей вращения колес и положений звеньев манипулятора.

Алгоритм формирования рассогласований по скоростям вращения колес реализуется в три этапа. На первом этапе происходит определение направления на следующую путевую точку (относительно системы координат, связанной с каркасом МР). Затем происходит оценка полученного угла. Если абсолютное значение угла превышает 10°, то на выход системы поступают величины, приводящие к развороту платформы на месте (по кратчайшему направлению к путевой точке). Если абсолютное значение угла лежит в диапазоне от 1 до 10°, то блок формирует рассогласования, соответствующие движению МР в сторону путевой точки с одновременным разворотом. Если абсолютное значение полученного угла лежит в диапазоне от 0 до 1°, то формируемые сигналы способствуют движению МР вперед. На третьем этапе происходит оценка расстояния до путевой точки. Если оно становится меньше порогового значения (в рассматриваемом случае — 10 см), то задаваемая скорость вращения колес уменьшается (т. е. происходит торможение).

Виртуальный эксперимент

Во время виртуального эксперимента платформы осуществляли последовательный обход

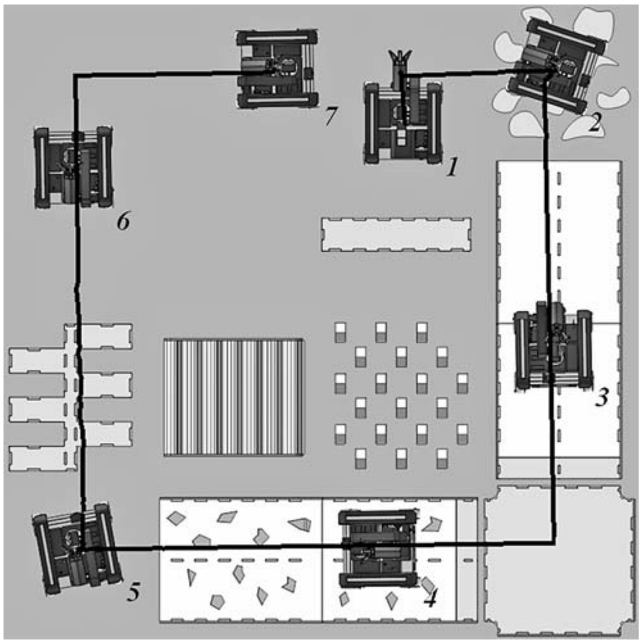


Рис. 5. Схема движения колесного МР по полигону

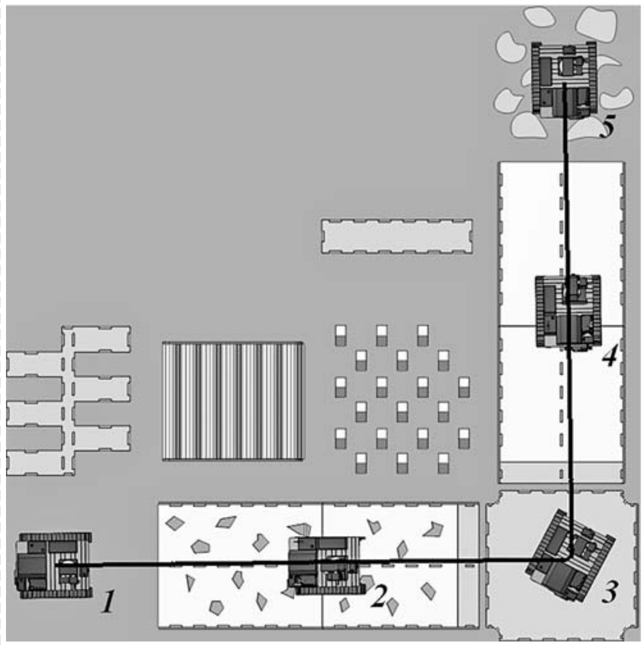


Рис. 7. Схема движения гусеничного МР по полигону

препятствий в соответствии с предварительно определенным набором путевых точек. При этом параметры контактного взаимодействия между исполнительными системами МР и средой выбирались следующим образом: динамический коэффициент трения составлял 0,4; статический коэффициент трения составлял 0,5.

Схема движения колесного МР по полигону в одном из сценариев моделирования приведена на рис. 5. Движение начинается из позиции *1*, в которой МР предварительно складывает манипулятор в целях смещения центра масс устройства ближе к подстилающей поверхности (что положительно сказывается на маневренности устройства и снижает риск его опрокидывания при преодолении препятствий). Затем МР осуществляет обход препятствий в следующей последовательности: камни (*2*), уклон и площадка (*3* и *4*), планки (*6* и *7*).

Соответствующая рассмотренной схеме движения кинограмма анимации результатов виртуального моделирования с изометрическим расположением камеры приведена на рис. 6 (см. вторую сторону обложки).

МР с колесной ходовой частью успешно преодолевает препятствия типа камни, взбирается на пологий уклон и безостановочно совершает перемещение по планкам и волнистой поверхности. Движение без опрокидывания при спуске со ступеней, движение по крутому уклону и препятствию, составленному из трубок, возможно только при сложенном манипуляторе. Наибольшее затруднение при преодолении вызывают такие препятствия, как крутой уклон и лестница. Ввиду малой площади контакта колес и поверхности преодоление препятствий возможно только при увеличении коэффициентов динамического/статического трения до 0,7/0,8 соответственно.

Схема движения гусеничного МР по полигону в одном из сценариев моделирования приведена на рис. 7. Движение начинается из позиции *1*. МР осуществляет обход препятствий в следующей последовательности: уклон/площадка (*2—4*) и камни (*5*).

Соответствующая рассмотренной схеме движения кинограмма анимации результатов виртуального моделирования с изометрическим расположением камеры приведена на рис. 8.

МР с гусеничной ходовой частью успешно преодолевает все представленные препятствия, за исключением камней, исполненных в виде массива призматических компонентов (в ряде экспериментов платформа цеплялась каркасом и/или корпусами исполнительных модулей). Низкое расположение центра масс МР обеспечивает движение без опрокидывания при подъеме и спуске со ступеней, преодолении крутого уклона.

Заключение

В целях оценки локомоционной эффективности колесной и гусеничной компоновочных схем в перспективных сценариях применения реконфигурируемого МР данные схемы апробированы на виртуальных динамических моделях. Визуальная оценка анимации результатов моде-

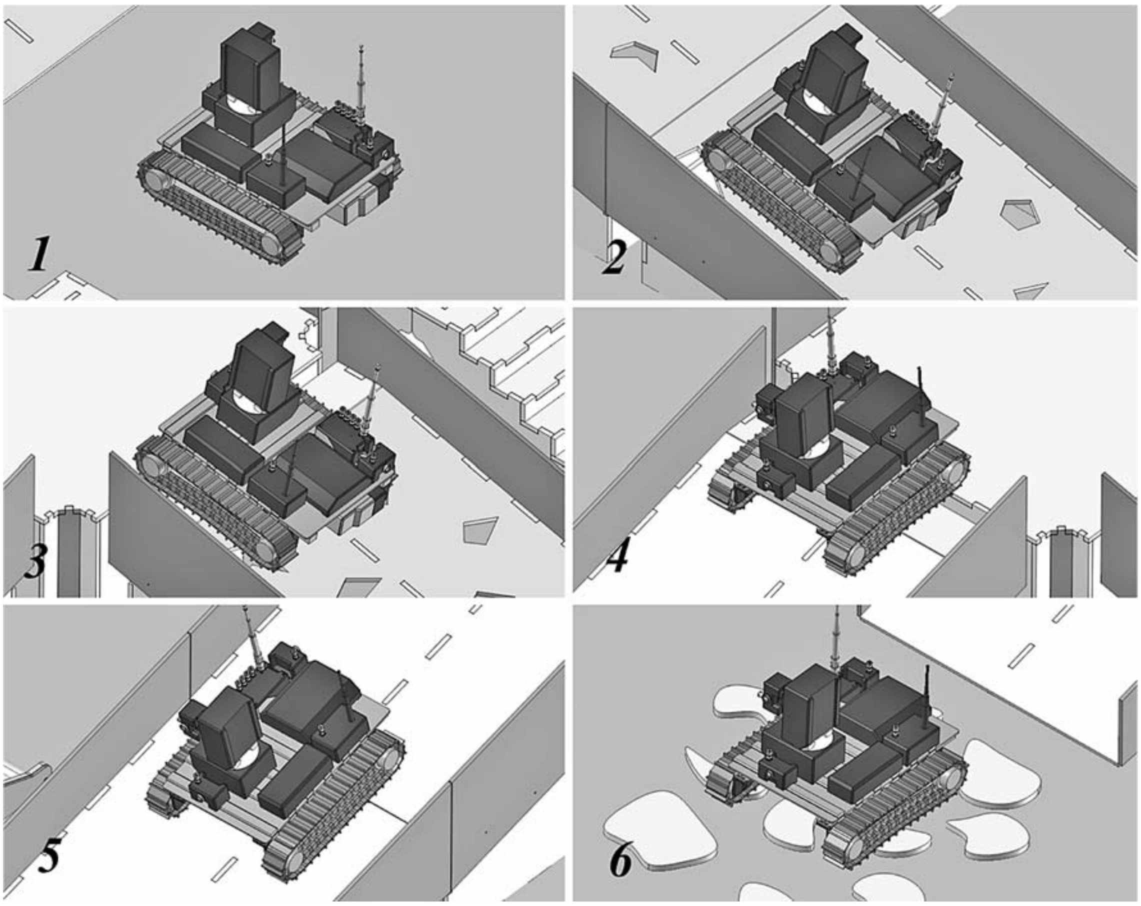


Рис. 8. Кинограмма анимации результатов виртуального моделирования движения гусеничного МР по полигону

лирования позволяет сделать вывод о том, что устройства способны осуществлять движение по пересеченной местности с небольшими препятствиями, осуществлять подъем на уклоны различной крутизны. Дальнейшими направлениями работы являются разработка компоновочных схем, обеспечивающих непрерывное движение по более широкому классу препятствий, оценка силомоментных характеристик исполнительных систем устройств, исследование влияния различных компоновок полезной нагрузки на локомоционную эффективность МР.

Список литературы

1. **Min X., Runhuai Y., Yong C., Hongcheng X.** Kinematics Modeling and Step Climbing Study of an All-Terrain Wheeled Mobile Robot on Uneven Terrains // Proc. of the 2011 IEEE International Conference on Electronic & Mechanical Engineering and Information Technology. 2011. P. 2725—2728.

2. **Kyeong B. L., Jeong-Hoon K., Yong-San Y., Sang H. L., Shincheon K.** Obstacle-Overcoming Algorithm for Unmanned Ground Vehicle with Actively Articulated Suspensions on Unstructured Terrain // Proc. of the 2008 IEEE International Conference on Control, Automation and Systems. 2008. P. 324—328.

3. **Kyeong B. L., Jeong-Hoon K., Yong-San Y., Sang H. L., Shincheon K.** Behavior planning of an unmanned ground vehicle with actively articulated suspension to negotiate geometric obstacles // Proc. of the 2009 International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2009. P. 821—826.

4. **Shuro N.** Concept of Adaptive Gait for Leg-wheel Robot, RT-Mover // Proc. of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. 2012. P. 293—300.

5. **Kyeong B. L., Sun J. K., Yong-San Y.** Deliberative Planner for UGV with Actively Articulated Suspension to Negotiate Geometric Obstacles by Using Centipede Locomotion Pattern // Proc. of the 2010 IEEE International Conference on Control, Automation and Systems. 2010. P. 1482—1486.

6. **Weidong W., Dongmei W., Wei D., Chun X., Pengfei S.** The Optimization of Obstacle-Crossing and the Simulation in ADAMS of the Composite Six-wheeled-legged Robot // Proc. of the 2012 IEEE International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. 2012. P. 2422—2426.

7. **Motoyasu T., Fumitoshi M.** Modeling and Control of a Snake Robot with Switching Constraints // Proc. of the 2008 SICE Annual Conference. 2008. P. 3076—3079.

8. **Wei S. C., Jason T.** Simultaneous Evolutionary-Based Optimization of Controller and Morphology of Snake-like Modular Robots // Proc. of the 2014 IEEE International Conference on Artificial Intelligence with Applications in Engineering and Technology. 2014. P. 38—42.

9. **Pal L., Oyvind S., Kristin Y. P.** Modular Pneumatic Snake Robot: 3D Modelling, Implementation and Control // Modeling, Identification and Control. 2008. Vol. 29. P. 21—28.

10. **Manuel S., Ramiro B., Tomas C.** Multi-Legged Walking Robot Modelling in MATLAB/SimMechanics and its Simulation // Proc. of the 2013 IEEE EUROSIM Congress on Modelling and Simulation. 2013. P. 226—231.

Visual Estimation of the Reconfigurable Mobile Robot Locomotion Effectiveness

S. V. Kharuzin, s.haruzin@rtc.ru, **O. A. Shmakov**, shmakov@rtc.ru,
Russian State Scientific Center for Robotics and Technical Cybernetics,
Saint-Petersburg, 194064, Russian Federation

Corresponding author: **Kharuzin S. V.**, engineer,
Russian State Scientific Center for Robotics and Technical Cybernetics,
Saint-Petersburg, 194064, Russian Federation, e-mail: s.haruzin@rtc.ru

Accepted on November 17, 2017

In this paper we suggest estimation results for the reconfigurable mobile robot locomotion effectiveness. All estimations are performed via visual analysis of the virtual modelling results. In virtual modelling scenarios mobile robot were traversing through a space with consequently assembled obstacles of five main types: slope, ledge, step, stones, and tube array. Further we describe two robotic platform configurations: tracked and wheeled. Each mobile device is assembled from a set of specialized modules. Combining of these modules allows building different mobile (wheeled, tracked, leg-wheeled and etc.) and payload systems (sensor, manipulative). All modular subsystems have virtual representations with identical to their physical analogues mass and inertial properties. We propose two different payload types: payload for wheeled vehicle (represented with modular manipulation system) and payload for tracked vehicle (represented with video camera mounted on rotation module). Furthermore we describe control system that allows virtual model of mobile robot to move between preliminary defined waypoints. As a final result we provide sequences and following descriptions of the virtual modelling animation results. Research conclusions are made as follows: based on performed visual analysis we submit that both devices are able to traverse through rough terrain with relatively small obstacles or to climb slopes with different incline angles; our further work is focused on developing more effective mobile robot configurations and expanding the class of traversable obstacles.

Keywords: *mobile robot, reconfigurable robot, modular design, mechatronic unit, control system, visual analysis, obstacle negotiation*

Acknowledgements: This research is supported by the Ministry of Education and Science of Russia (an agreement № 14.578.21.0124 on granting for the implementation of applied scientific research and experimental development). Unique identificator of ASRED — RFMEFI57815X0124.

For citation:

Kharuzin S. V., Shmakov O. A. Visual Estimation of the Reconfigurable Mobile Robot Locomotion Effectiveness, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie*. 2018, vol. 19, no. 3, pp. 169—174.

DOI: 10.17587/mau.19.169-174

References

1. **Min X., Runhuai Y., Yong C., Hongcheng X.** Kinematics Modeling and Step Climbing Study of an All-Terrain Wheeled Mobile Robot on Uneven Terrains, *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Electronic & Mechanical Engineering and Information Technology*, 2011, pp. 2725—2728.
2. **Kyeong B. L., Jeong-Hoon K., Yong-San Y., Sang H. L., Shincheon K.** Obstacle-Overcoming Algorithm for Unmanned Ground Vehicle with Actively Articulated Suspensions on Unstructured Terrain, *Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Control, Automation and Systems*, 2008, pp. 324—328.
3. **Kyeong B. L., Jeong-Hoon K., Yong-San Y., Sang H. L., Shincheon K.** Behavior planning of an unmanned ground vehicle with actively articulated suspension to negotiate geometric obstacles, *Proceedings of the 2009 International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2009, pp. 821—826.
4. **Shuro N.** Concept of Adaptive Gait for Leg-wheel Robot, RT-Mover, *Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, 2012, pp. 293—300.
5. **Kyeong B. L., Sun J. K., Yong-San Y.** Deliberative Planner for UGV with Actively Articulated Suspension to Negotiate Geometric Obstacles by Using Centipede Locomotion Pattern, *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Control, Automation and Systems*, 2010, pp. 1482—1486.
6. **Weidong W., Dongmei W., Wei D., Chun X., Pengfei S.** The Optimization of Obstacle-Crossing and the Simulation in ADAMS of the Composite Six-wheeled-legged Robot, *Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*, 2012, pp. 2422—2426.
7. **Motoyasu T., Fumitoshi M.** Modeling and Control of a Snake Robot with Switching Constraints, *Proceedings of the 2008 SICE Annual Conference*, 2008, pp. 3076—3079.
8. **Wei S. C., Jason T.** Simultaneous Evolutionary-Based Optimization of Controller and Morphology of Snake-like Modular Robots, *Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Artificial Intelligence with Applications in Engineering and Technology*, 2014, pp. 38—42.
9. **Pal L., Oyvind S., Kristin Y. P.** Modular Pneumatic Snake Robot: 3D Modelling, Implementation and Control, Modeling, Identification and Control, 2008, vol. 29, pp. 21—28.
10. **Manuel S., Ramiro B., Tomas C.** Multi-Legged Walking Robot Modelling in MATLAB/SimMechanics and its Simulation, *Proceedings of the 2013 IEEE EUROSIM Congress on Modelling and Simulation,* 2013, pp. 226—231.

УДК 004.896:007.52 DOI: 10.17587/mau.19.175-182

А. Л. Коротков, начальник лаборатории, a.korotkov@rtc.ru,
Д. М. Королев, начальник сектора, d.korolev@rtc.ru, **Н. А. Китаев,** конструктор, n.kitaev@rtc.ru,
Центральный научно-исследовательский и опытно-конструкторский институт робототехники и технической кибернетики, Санкт-Петербург

Комплект модулей мобильной робототехники для макетирования и отладки алгоритмов управления[1]

Предложен и описан комплект модулей мобильной робототехники, который позволяет сократить время макетирования робототехнических систем за счет крупной модульной сборки. Помимо конструктивно-компоновочных решений, авторы уделяют особое внимание схемотехнике комплекта. Показаны возможные варианты компоновки систем на основе предложенных модулей: колесной и гусеничной платформ и четырехстепенного манипулятора.

Ключевые слова: *мехатронный модуль, быстросъемное соединение, мобильный робот, модульная сборка, гусеничная платформа, манипулятор, макетирование, отладка алгоритмов*

Введение

Робототехника — передовое направление науки и техники, включающее в себя множество различных областей (конструирование, макетирование, программирование и др.). Одной из важнейших проблем современной робототехники является развитие образовательных программ [1] и создание качественных и надежных инструментов для обучения, которые предоставляли бы необходимое аппаратное и программное обеспечение для решения робототехнических задач [2].

Существующие на рынке предложения робототехнических комплектов (LEGO Mindstorms, Fischertechnik, Makeblock и т. д. [3—7]), несмотря на свою популярность, нередко обладают элементной базой, недостаточной для реализации сложных алгоритмов, а их общий конструктив, основанный на мелкой сборке, приводит к тому, что большая часть учебного процесса уделяется макетированию, а не изучению задач управления. Для решения существующих проблем авторы статьи предлагают комплект модулей мобильной робототехники (ММР). Простая и быстрая сборка из готовых модулей позволит сократить время, необходимое для создания роботов и, тем самым, сконцентрироваться на реализации алгоритмов управления.

Состав и описание комплекта ММР

Для физической реализации комплекта модулей используется концепция крупной сборки. Такая концепция определяется разработкой модулей в узкой линейке габаритных размеров [8] и наличием универсальных быстросъемных креплений между модулями. С учетом последнего при проектировании конструкций модулей выбраны два основных типа соединений:

- быстроразъемное резьбовое соединение, при котором поворот модулей относительно друг друга предотвращается простым и удобным в изготовлении способом — парой шип—паз;
- соединение с помощью планок Пикатинни — системы рельсового интерфейса. Конструктив планок такого типа позволяет перемещать модули вдоль рельса и жестко фиксировать их посредством винтов. Также надежную фиксацию модулей в процессе эксплуатации обеспечивают прорези на планке.

Комбинирование предложенных соединений друг с другом с помощью специальных переходников позволяет стыковать модули комплекта ММР в различных конфигурациях. Кроме того, для стыковки с крепежными элементами и каркасными конструкциями на каждом модуле имеются крепежные отверстия.

В силу предложенной архитектуры комплекта каждый модуль выполнен как полностью замкнутая система. С учетом необходимого для отработки различных алгоритмов управления функционала, которым должна обладать модель, собранная на базе комплекта ММР, разработаны следующие модули:

- *модуль системы управления* (МСУ, рис. 1) является центральным функциональным узлом в архитектуре макетируемых систем и предназначен для подключения модулей, обеспечения информационного обмена между ними, а также записи, хранения и исполнения основной программы управления;
- *модуль питания* (рис. 2) предназначен для обеспечения электропитанием всех модулей и

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках соглашения № 14.578.21.0124 о предоставлении субсидии на выполнение прикладных научных исследований и экспериментальных разработок. Уникальный идентификатор ПНИЭР — RFMEFI57815X0124.

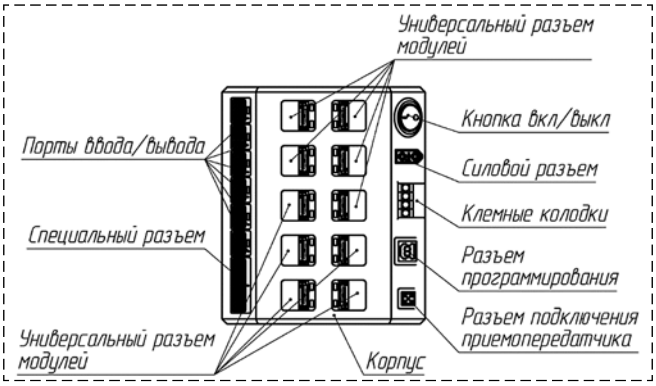


Рис. 1. Модуль системы управления (вид сверху)

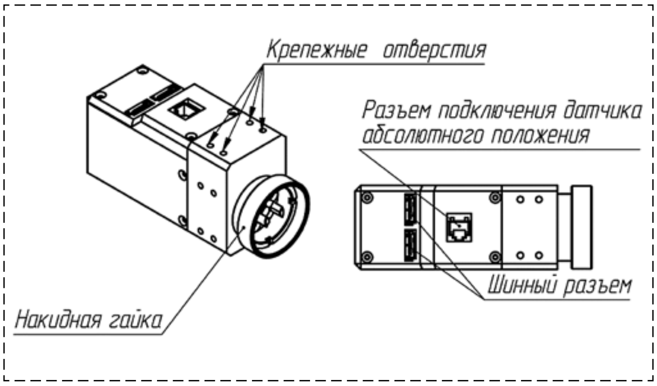


Рис. 3. Модуль приводной общего назначения

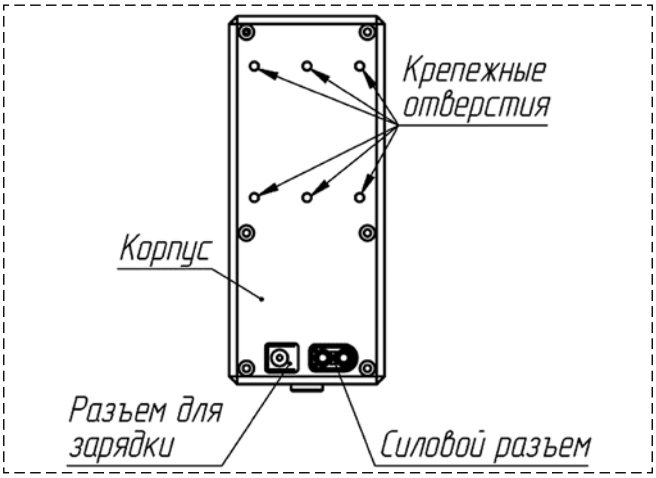


Рис. 2. Модуль питания (вид сверху)

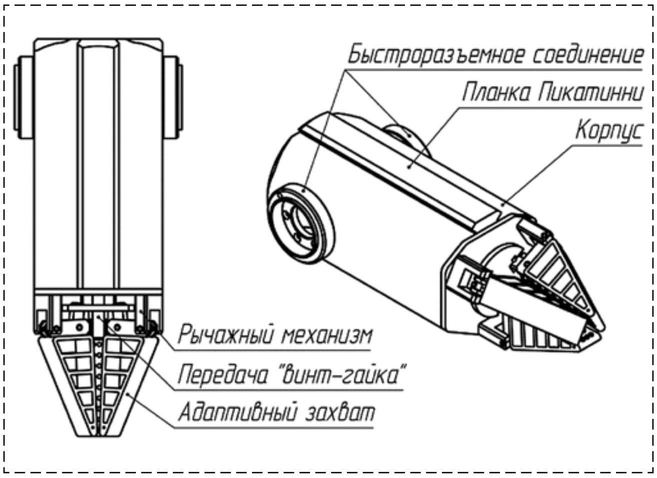


Рис. 4. Модуль захватного устройства трехпальцевый

подключается специальным силовым кабелем к МСУ, который, в свою очередь, обеспечивает распределение электропитания по подключенным модулям-потребителям;

- *модули приводные* делятся на два типа: предназначенные для передачи вращательного момента на модули системы (рис. 3) и захватные устройства (рис. 4) для манипулирования объектами в пространстве;
- *модуль датчиков внешней среды* (рис. 5) предназначен для измерения, преобразования и передачи на МСУ параметров окружающей среды, в состав модуля входят: датчик температуры, датчик освещенности и микрофон;
- *модуль дальномеров* (рис. 5) предназначен для определения расстояния до поверхности в широком диапазоне расстояний, добиться которого позволяет использование датчиков двух типов — ультразвукового для определения препятствий на дальних расстояниях и инфракрасного для определения препятствий на коротких дистанциях;
- *модуль датчика касания и датчика линии* (рис. 6) предназначен для определения момента касания твердой поверхности и для решения

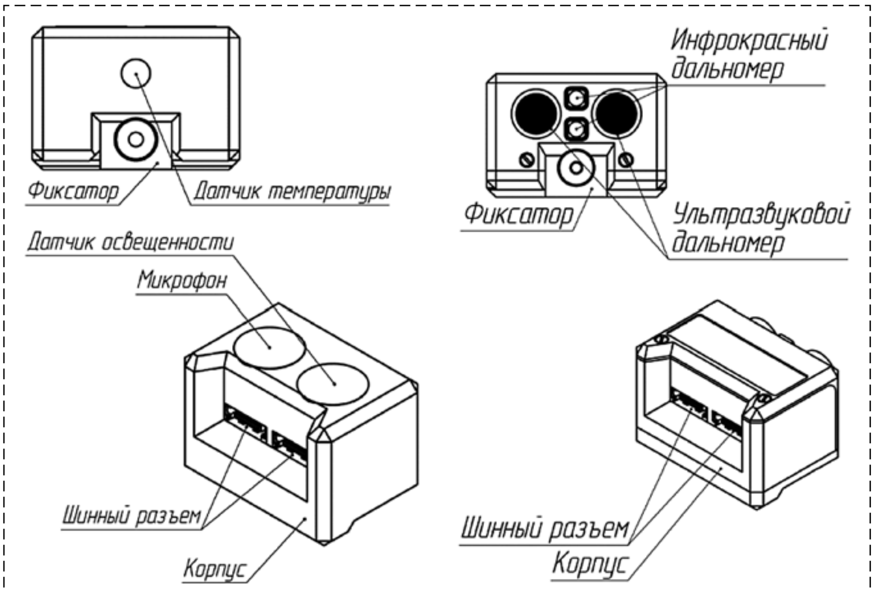


Рис. 5. Модули датчиков внешней среды (слева) и дальномеров (справа)

классической задачи робототехники — движения вдоль линии на поверхности движения;
- *модуль индикации* (рис. 7) предназначен для световой и акустической индикации запрограммированных пользователем в МСУ событий;

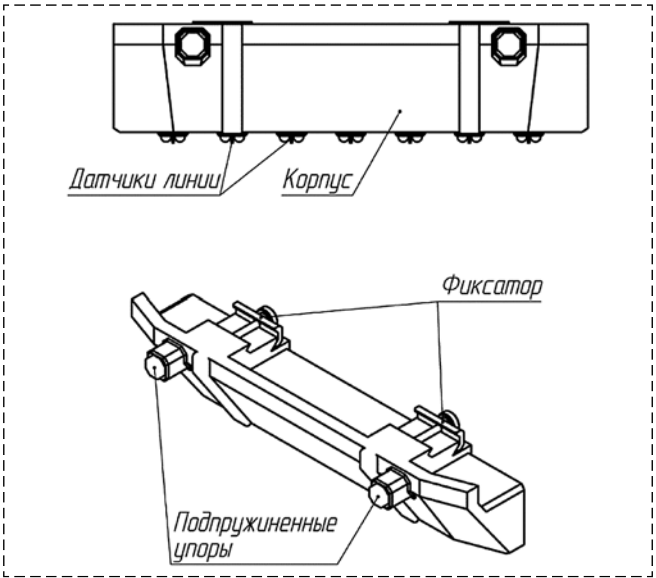


Рис. 6. Модуль датчика касания и датчика линии

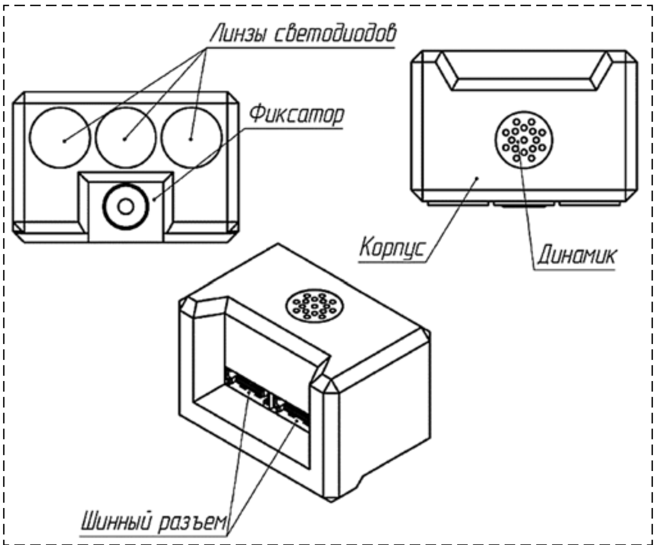


Рис. 7. Модуль индикации

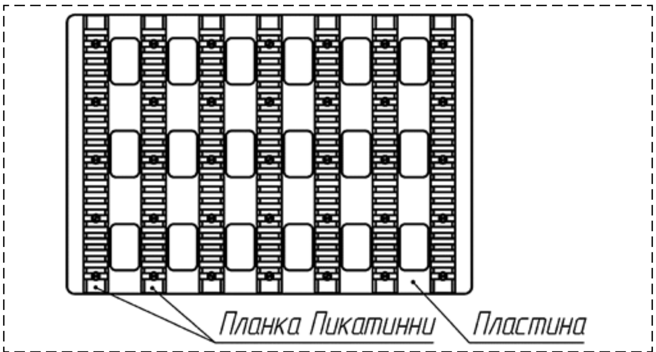


Рис. 8. Каркас мобильных робототехнических систем (вид сверху)

- *модули передачи данных* предназначены для передачи различных сигналов между МСУ и пультом управления. Для удобства пользователю предоставляется возможность выбора способа дистанционного управления макетируемой системой — для этого он может использовать либо входящий в состав комплекта ММР стационарный пульт управления, либо ПК с беспроводным адаптером. Во втором случае применяется беспроводной протокол высокого уровня Wi-Fi с использованием соответствующего встроенного модуля в компьютере. Первый способ обеспечивает более высокую надежность и дальность дистанционного управления; второй способ позволяет проще и быстрее организовать управление на малых дистанциях, без использования дополнительного радиомодуля на пульте управления и без дополнительной программной настройки взаимодействия МСУ с внешним радиомодулем;
- *модуль видеокамеры* предназначен для преобразования оптического изображения в аналоговый видеосигнал и для построения на базе этого видеосигнала системы технического зрения.

Также в состав комплекта ММР вошли модули механических передач (червячной, цилиндрической и подшипникового узла), наборы крепежных элементов и каркасных конструкций (рис. 8) и набор исполнительных элементов (модуль колеса, модуль катка и гусеничная лента) для преобразования вращательного движения приводных модулей в линейное перемещение.

Основной функциональный модуль — МСУ, в нем хранится и исполняется программа управления, и через него проходит большинство информационных потоков. Модуль питания осуществляет электропитание МСУ и всех бортовых устройств макетируемой системы. Большая часть комплекта ММР вместе с МСУ объединена в общую шину питания и данных. На МСУ расположены 10 разъемов подключения к шине, к каждому из которых может быть подключена ветвь из нескольких модулей. Все 10 ветвей включены параллельно. У каждого ММР имеется два электрически соединенных разъема подключения к шине, один из которых может быть использован как вход, а другой — как выход; за счет этого внутри каждой ветви модули соединяются электрически параллельно, но при этом физически представляют собой последовательную цепь "модуль — кабель — модуль — кабель". Таким образом, всего в одну ветвь на один разъем может быть подключено до десяти ММР включительно.

Отдельный от общей шины поток информации образует канал видеоданных: сигналы с видеокамер поступают на коммутатор, где один из них селектируется и подается на видеопередатчик, после чего транслируется на пульт управления.

Робототехнические системы на основе комплекта ММР

Среди наиболее распространенных задач управления робототехническими системами (РС) [9—11] можно выделить следующие:

- управление передвигающимися на высокой скорости РС, ориентирующимися на различные внешние маркеры (вдоль сплошной и прерывистой линии) или же на препятствия (неподвижные и подвижные), которые в автоматическом режиме должны корректировать свою траекторию в зависимости от поставленной задачи (объезд, прямое столкновение, остановка при фиксировании препятствия и т. д.);
- групповое централизованное и децентрализованное управление РС: распределение группы роботов на местности, изменение поведения группы и приоритетов индивидуальных задач в случае выявления неполадок в одном из роботов, рекогносцировка на заданном участке территории — во всех этих ситуациях (а также в случае задач первого типа) наиболее подходящими являются колесные роботы ввиду их возможностей к изменению ходовых качеств платформы;
- управление РС в условиях пересеченной местности: преодоление различных препятствий, носящих как природный, так и техногенный характер, с использованием ходовых преимуществ конкретного устройства — для таких задач подходят гусеничные роботы в силу их повышенной проходимости;
- управление РС, связанное с детектированием и доставкой конкретного объекта: определение положения заданного объекта в пространстве, его выбор из множества других объектов на основе входных данных, захват объекта наиболее удачным из доступных способов или же определение невозможности захвата, доставка в определенную зону на основе заданных ориентиров. Для решения таких задач, как правило, необходим манипулятор.

С учетом вышеперечисленных задач управления и всех функциональных возможностей комплекта ММР (при установке соответствующих датчиков и другого приборного навесного оборудования) на его основе доступно макетирование трех базовых РС: колесной, гусеничной и четырехстепенного манипулятора.

Общий вид колесной РС с четырьмя приводными колесами показан на рис. 9. Конструктивно приводная часть РС состоит из четырех модулей привода общего назначения *14*, закрепленных на каркасе мобильной РС *1*. Крепление исполнительных модулей колеса *10* к модулю привода общего назначения осуществляется через модули подшипникового узла *15*. Для защиты модулей привода общего назначения от случайных столкновений с препятствиями и для движения вдоль линии на нижнюю часть каркаса мобильных РС установлены два модуля датчика касания и датчика линии *11*. Для защиты модулей на каркасе мобильной РС от песка, гравия и т. д. над колесами установлены крылья *2*. Планка Пикатинни на крыле позволяет установить модули индикации *3*, модули видеокамеры *4* и модули дальномеров *5* перпендикулярно направлению движения робота (перечисленные модули установлены на передней и задней частях РС). Для осуществления кругового обзора модуль камеры *4* на передней части установлен через планку Пикатинни *16* на сервопривод *13*. Сервопривод устанавливается на кронштейн усиленный *12*. Передача видеоинформации на пульт управления осуществляется через модуль

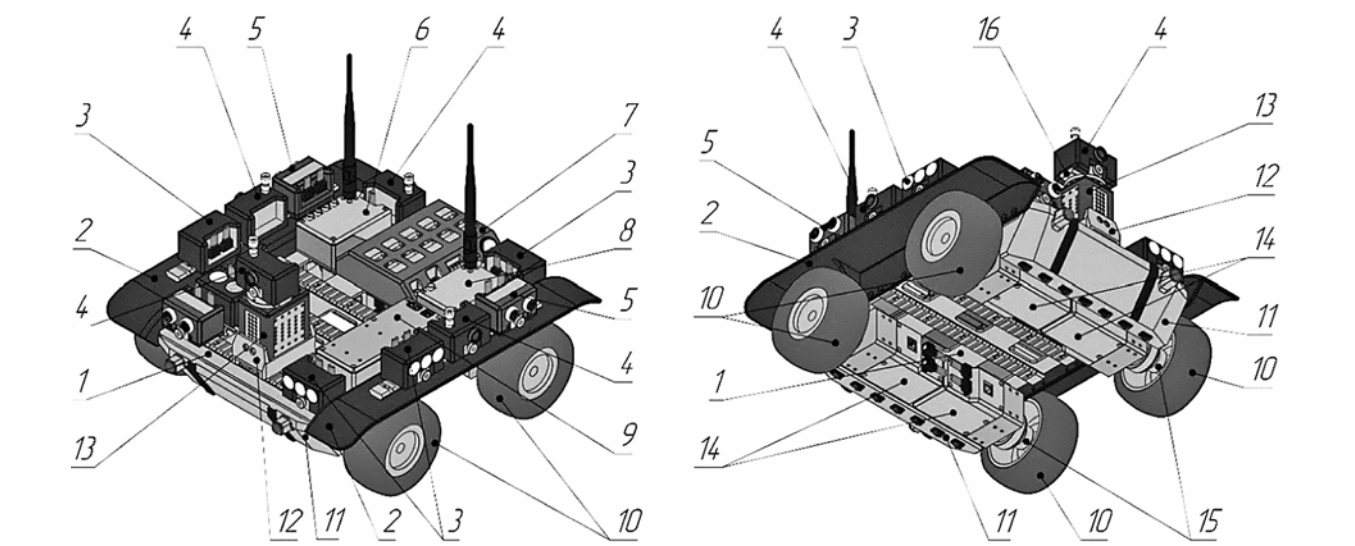


Рис. 9. Колесная РС с четырьмя приводными колесами

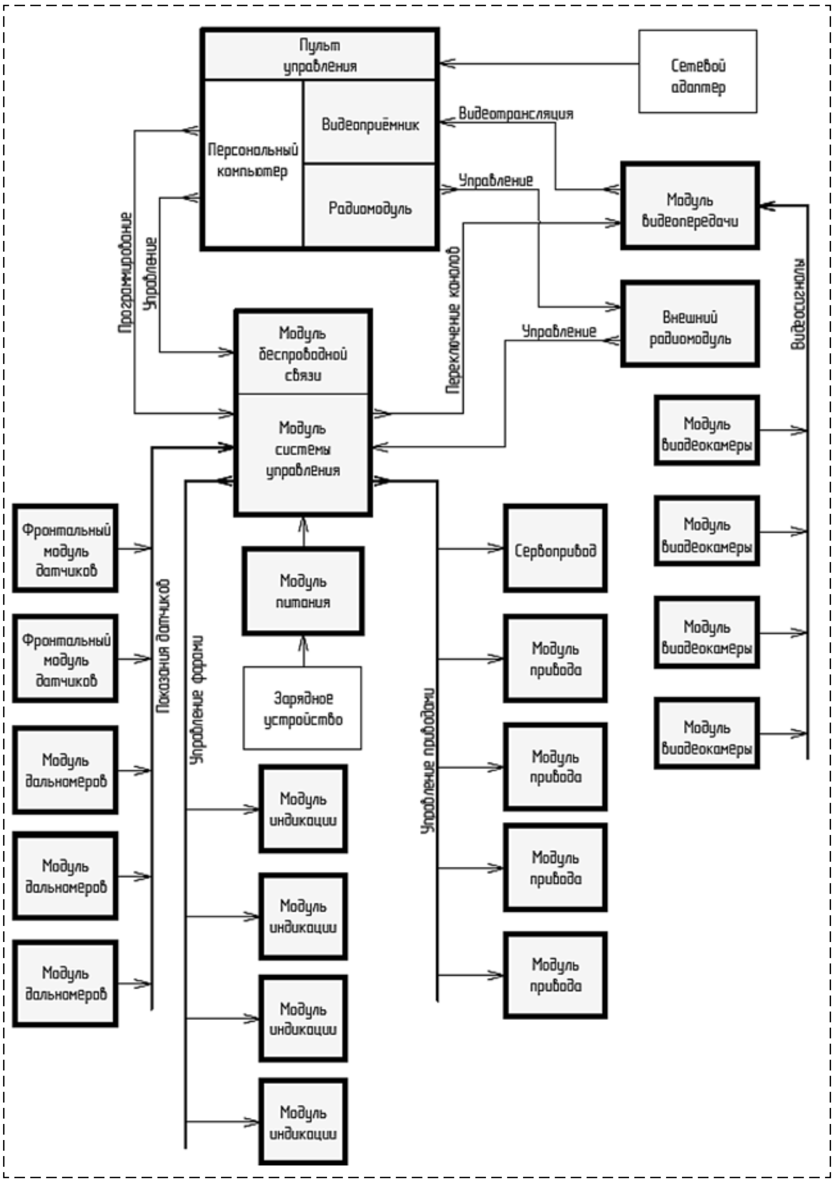


Рис. 10. Структурная схема колесной РС с четырьмя приводными колесами

видеопередатчика *6*, обмен управляющими данными происходит по радиоканалу через модуль приемопередатчика *8*. Управление и программирование РС реализуется через МСУ *7*. Электропитание РС осуществляется модулем питания *9*.

Структурная схема колесной РС с четырьмя приводными колесами представлена на рис. 10. Связь между пультом управления и МСУ может осуществляться по двум каналам: первый использует модуль приемопередатчика пульта управления и МСУ, второй — встроенные в МСУ и ПК пульта управления модули беспроводной связи по протоколу Wi-Fi.

Общий вид гусеничной РС с двумя приводными катками показан на рис. 11. Конструктивно приводная часть состоит из двух приводных и двух пассивных модулей катков. Гусеничные ленты *5* приводятся в движение приводными модулями катков *16* через впадины на внутренней поверхности гусеничной ленты. Приводные модули катков закреплены на модулях подшипникового узла *3* и приводятся в движение модулями приводными общего назначения *20*, установленными на каркасе мобильной РС *1*, через модули цилиндрической передачи *19*. Пассивные модули катков закреплены на модулях подшипникового узла и устанавливаются на кронштейны угловые *2*, которые фиксируются на каркасе фиксаторами

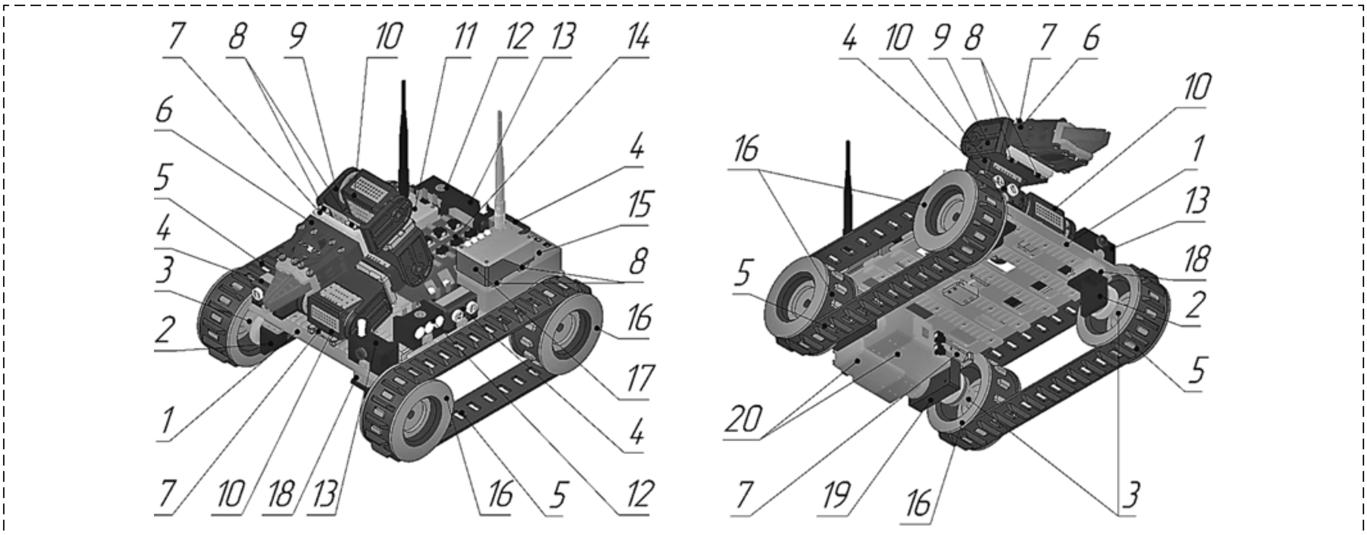


Рис. 11. Гусеничная РС с двумя приводными катками

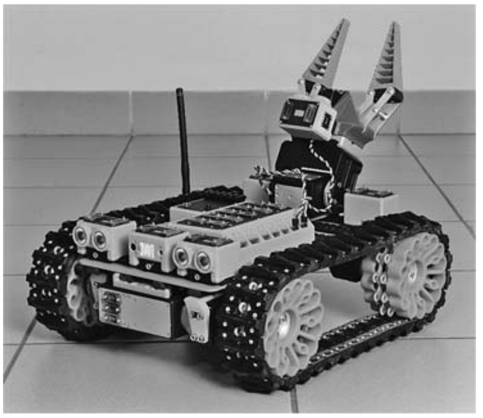


Рис. 12. Макет гусеничной РС на базе комплекта ММР

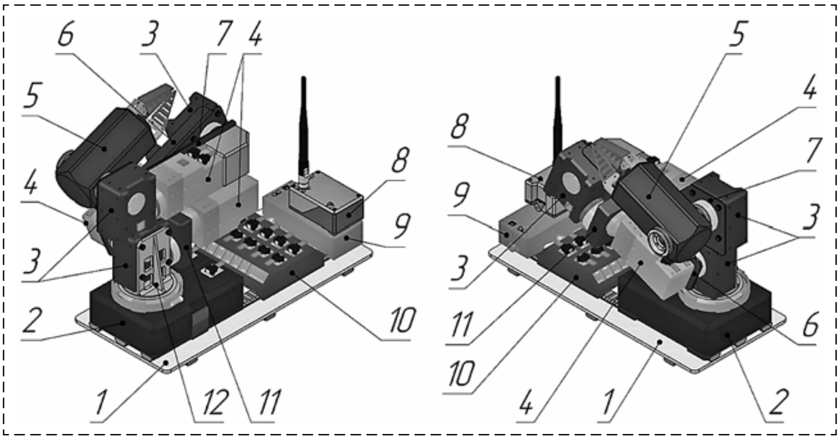


Рис. 13. Четырехстепенная манипуляционная РС

одинарными *18*. На задней части платформы установлены: модуль видеокамеры *13*, модуль индикации *12* и модуль дальномеров *4*; в передней части — модуль дальномера и модуль видеокамеры.

В центральной части платформы установлена манипуляционная система, которая обладает тремя степенями подвижности и модулем захватного устройства двухпальцевым *6*. Конструктивно манипуляционная система состоит из модулей сервопривода *10*, на которые установлены фиксаторы двойные *7* для возможной жесткой фиксации следующего исполнительного звена. На пассивные и приводные фланцы модулей сервопривода закреплены кронштейны сервопривода *9* с установленными на них планками Пикатинни *8*. Также на платформе установлены необходимые для работоспособности РС модули: МСУ *14*, модуль приемопередатчика *11*, модуль питания *15*, с закрепленными планками Пикатинни для установки модуля видеопередатчика *17*. Организация управления и электропитания гусеничной РС осуществляется аналогичным колесной РС образом.

Макет гусеничной РС на базе изготовленного в ЦНИИ РТК комплекта ММР представлен на рис. 12. Масса макета составляет 7,5 кг, общая грузоподъемность — 0,7 кг (из них грузоподъемность манипулятора — 0,2 кг). Робот способен перемещаться со скоростью до 0,26 м/с и преодолевать препятствия высотой до 40 мм и углом наклона до 30°.

Общий вид четырехстепенной манипуляционной РС показан на рис. 13. На каркасе манипуляционной РС *1* закреплены МСУ *11* и модуль питания *10*, на который установлен модуль приемопередатчика *9*. В качестве первого вращательного шарнира используется модуль основания манипулятора *2* с зафиксированным на нем кронштейном манипуляционной РС *12* для фиксации выходного звена второй вращательной степени манипулятора, в роли которой выступает модуль червячной передачи *3*.

Модуль червячной передачи второго звена манипулятора приводится в движение модулем приводным общего назначения *4* через модуль цилиндрической передачи *11*. На выходном валу модуля червячной передачи закреплен каркас первого звена манипуляционной РС *7*. Выход-

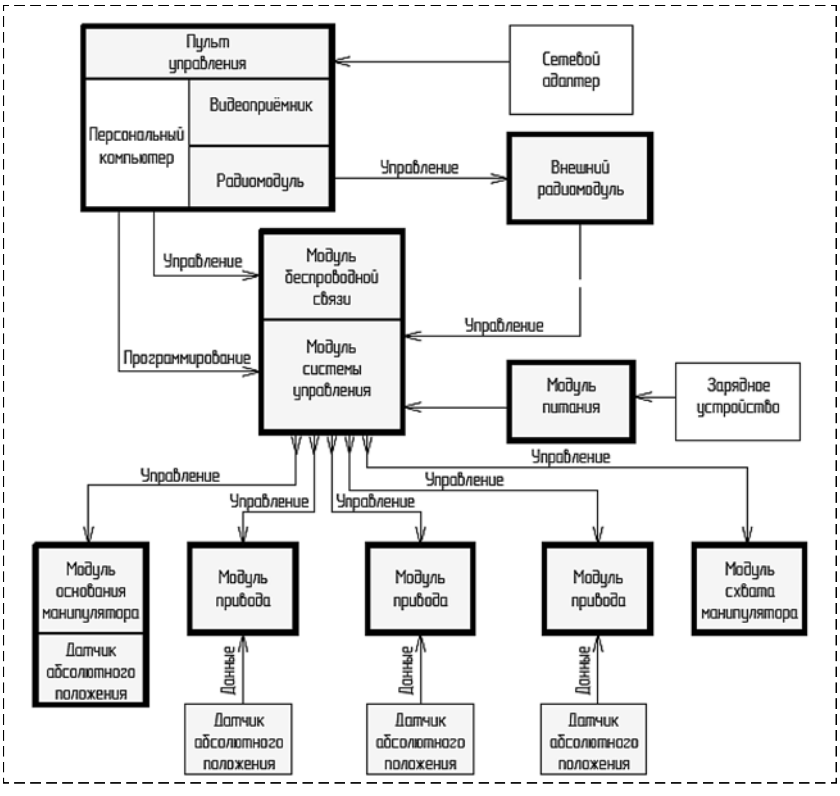


Рис. 14. Структурная схема четырехстепенной манипуляционной РС

ным шарниром третьей вращательной степени по аналогии со вторым звеном является модуль червячной передачи, приводящийся в движение модулями *4* и *11*. На выходном валу третьего звена закреплен каркас второго звена манипуляционной РС *6*, выходным модулем которого служит также модуль червячной передачи. Конечным модулем является модуль захватного устройства трехпальцевый *5*.

Структурная схема четырехстепенной манипуляционной РС представлена на рис. 14. Манипуляционная РС собрана по схеме В-В-В-В (четыре вращательных степени) и имеет сферическую рабочую зону.

Заключение

Главный принцип, которым руководствовались авторы при разработке комплекта ММР, состоял в следующем: сочетание достоинств крупной модульной сборки (скорость и простота макетирования) с необходимой для отработки современных алгоритмов электронной оснасткой в виде мощного контроллера и различных качественно исполненных датчиков. В результате оснащение макетируемых робототехнических систем соответствующими модулями датчиков позволяет решать задачи робототехники, связанные с движением в ограниченных пространствах и в условиях недостаточной видимости, а наличие модулей видеокамеры способствует отработке алгоритмов движения с использованием технического зрения.

Дальнейшие исследования будут направлены на доработку программных решений комплекта и его апробацию. Комплект ММР будет полезен как в начальных образовательных учреждениях для обучения детей основам конструирования и робототехники, так и среди старшеклассников и студентов для реализации и отладки различных алгоритмов управления. Более того, предлагаемое решение может стать эффективным инструментом в разработке и прототипировании мобильных робототехнических платформ и промышленных робототехнических комплексов квалифицированными специалистами в исследовательских институтах и на производственных предприятиях.

Список литературы

1. **Alvarez I.** VEX Robotics: STEM Program and Robotics Competition Expansion into Europe // Research and Education in Robotics — EUROBOT 2011. Springer, 2011. P. 10—16.
2. **Филиппов С. А.** Робототехника для детей и родителей. СПб.: Наука, 2013. 319 с.
3. **Baichtal J.** Hacking Your LEGO Mindstorms EV3 Kit. Que Publishing, 2015. 320 p.
4. **Ferrari M., Ferrari G.** Building Robots with LEGO Mindstorms NXT. Syngress, 2011. 480 p.
5. **Cuéllar M. P., Pegalajar M. C.** Design and implementation of intelligent systems with LEGO Mindstorms for undergraduate computer engineers // Computer Applications in Engineering Education. 2014. № 22. P. 153—166.
6. **Белиовская Л. Г., Белиовский А. Е.** Программируем микрокомпьютер NXT в LabVIEW. ДМК Пресс, 2013. 280 с.
7. **Bagnall B.** Maximum LEGO NXT: Building Robots with Java Brains 3rd. Variant Press, 2012. 528 p.
8. **Thai C. N., Paulishen M.** Using robotis bioloid systems for instructional robotics // Proc. of IEEE Southeastcon. IEEE, 2011. P. 300—306.
9. **Kee D.** Educational Robotics Primary and Secondary Education // IEEE Robotics & Automation Magazine. 2011. № 18 (4). P. 16—19.
10. **Халамов В. Н., Сагритдинова Н. А.** Fischertechnik — основы образовательной робототехники: учеб.-метод. пособие. Челябинск, 2012. 40 с.
11. **Correll N., Wailes C., Slaby S.** A One-Hour Curriculum to Engage Middle School Students in Robotics and Computer Science Using Cubelets // Distributed Autonomous Robotic Systems. Springer, 2014. P. 165—176.

Modular Mobile Robotic Kit for Prototyping and Debugging of Control Algorithms

A. L. Korotkov, a.korotkov@rtc.ru, **D. M. Korolev,** d.korolev@rtc.ru, **N. A. Kitaev,** n.kitaev@rtc.ru,
Russian State Scientific Center for Robotics and Technical Cybernetics,
Saint-Petersburg, 194064, Russian Federation

Corresponding author: **Korotkov A. L.**, head of laboratory,
Russian State Scientific Center for Robotics and Technical Cybernetics,
Saint-Petersburg, 194064, Russian Federation, e-mail: a.korotkov@rtc.ru

Accepted on November 17, 2017

Rising popularity of robotics in education leads to necessity for high-quality tool for modern training programs — robotic kit. Most of the existing solutions do not have sufficient element base for the correct execution of complex algorithms. Moreover, due to a large number of components and tiny connectors a large part of the learning process is spent on prototyping, not on the study of control problems. The authors propose a new kit for mobile robotics, which key feature is modularity. The kit includes control system module, autonomous power supply, power drive modules, communication module, and different mechanical transmission modules such as bearing unit, cylindrical gear, worm gear and angular bracket. Implementation of the most common control tasks (collision avoidance, path planning, etc.) is possible due to special instrumentation modules, which include light, temperature and microphone sensors; a touch sensor and a line sensor; an ultrasonic and infrared distance sensor. In addition to constructive configuration solutions, authors focus special attention on the circuit design of the future kit. On base of the proposed kit it is possible to prototype such robotic systems as wheeled and tracked platforms and robotic arm, which models and structural diagrams are shown in the article. The effectiveness of the developed kit is proved by powerful functional modules and modular construction in general that will reduce the time needed for prototyping robotic systems, and will allow focusing directly on the debugging of control algorithms.*

Keywords: *mobile robotic, modular kit, mechatronic module, quick coupling, tracked platform, wheeled platform, robotic arm, prototyping; algorithmic debugging*

Acknowledgements: This research is supported by the Ministry of Education and Science of Russia (an agreement № 14.578.21.0124 on granting for the implementation of applied scientific research and experimental development). Unique identificator of ASRED — RFMEFI57815X0124.

For citation:

Korotkov A. L., **Korolev D. M.**, **Kitaev N. A.** Modular Mobile Robotic Kit for Prototyping and Debugging of Control Algorithms, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie*. 2018, vol. 19, no. 3, pp. 175—182.

DOI: 10.17587/mau.19.175-182

References

1. **Alvarez I.** VEX Robotics: STEM Program and Robotics Competition Expansion into Europe, *Research and Education in Robotics — EUROBOT 2011*, Springer, 2011, pp. 10—16.
2. **Filippov S. A.** *Robototehnika dlja detej i roditelej* (Robotics for children and parents), SPb., Nauka, 2013, 319 p. (in Russian).
3. **Baichtal J.** Hacking Your LEGO Mindstorms EV3 Kit, Que Publishing, 2015, 320 p.
4. **Ferrari M., Ferrari G.** Building Robots with LEGO Mindstorms NXT, Syngress, 2011, 480 p.
5. **Cuéllar M. P., Pegalajar M. C.** Design and implementation of intelligent systems with LEGO Mindstorms for undergraduate computer engineers, *Computer Applications in Engineering Education*, 2014, no. 22, pp. 153—166.
6. **Beliovskaja L. G., Beliovskij A. E.** *Programmiruem mikrokompjuter NXT v LabVIEW* (Programming microcomputer NXT with LabVIEW), DMK Press, 2013, 280 p. (in Russian).
7. **Bagnall B.** Maximum LEGO NXT: Building Robots with Java Brains 3rd, Variant Press, 2012, 528 p.
8. **Thai C. N., Paulishen M.** Using robotis bioloid systems for instructional robotics, *Proceedings of IEEE Southeastcon*, IEEE, 2011, pp. 300—306.
9. **Kee D.** Educational Robotics Primary and Secondary Education, *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2011, no. 18 (4), pp. 16—19.
10. **Halamov V. N., Sagritdinova N. A.** *Fischertechnik — osnovy obrazovatelnoj robototehniki: ucheb.-metod. posobie* (Fischertechnik — basics of educational robotics: training manual), Chelyabinsk, 2012, 40 p. (in Russian).
11. **Correll N., Wailes C., Slaby S.** A One-Hour Curriculum to Engage Middle School Students in Robotics and Computer Science Using Cubelets, *Distributed Autonomous Robotic Systems*, Springer, 2014, pp. 165—176.

28—30 мая 2018 г. в Санкт-Петербурге
на базе АО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор" состоится

Юбилейная XXV Санкт-Петербургская

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ИНТЕГРИРОВАННЫМ НАВИГАЦИОННЫМ СИСТЕМАМ (МКИНС 2018)

Председатель программного комитета —
Академик РАН, проф. **В. Г. Пешехонов**

Тематика конференции

- Инерциальные датчики, системы навигации и ориентации
- Интегрированные системы навигации и управления движением
- Глобальные навигационные спутниковые системы
- Средства гравиметрической поддержки навигации

На конференции не рассматриваются вопросы, затрагивающие военно-техническое сотрудничество, разработки военных технологий и образцов вооружений и военной техники. Программный комитет считает полезным представление обзорных докладов и докладов молодых ученых (до 33 лет).

Подробную информацию о конференции см. сайте:
http://www.elektropribor.spb.ru/icins2018/rindex

УДК 519.216 DOI: 10.17587/mau.19.183-193

Т. А. Алиев, д-р техн. наук, проф., академик, директор института, director@cyber.az,
Институт систем управления НАН Азербайджана, Баку, Азербайджан
Н. Э. Рзаева, нач. отдела, nikanel1@gmail.com,
Азербайджанский университет архитектуры и строительства, Баку, Азербайджан

Алгоритмы спектрального и корреляционного анализа помехи случайных сигналов в скрытом периоде аварийного состояния объектов контроля

Предлагаются алгоритмы и технологии замены не поддающихся измерению отсчетов помехи их приближенными величинами, и показана возможность их применения как для определения оценок спектральных и корреляционных характеристик помехи зашумленных сигналов, так и для обеспечения робастности результатов корреляционного и спектрального анализа в скрытом периоде аварийного состояния объектов контроля.

Ключевые слова: *помеха, спектральный анализ, корреляционный анализ, зашумленный сигнал, мониторинг, диагностика, объект контроля*

Введение

Известно [1—6], что в нормальном, штатном техническом состоянии объектов контроля и диагностики для центрированных зашумленных сигналов $g(t) = X(t) + \varepsilon(t)$, получаемых на выходах соответствующих датчиков и представляющих собой аддитивную смесь полезного сигнала $X(t)$ и помехи $\varepsilon(t)$, выполняются такие условия, как нормальность закона распределения, стационарность, и имеет место равенство

$$R_{gg}(t) = M[g(t)g(t)] = M[(X(t) + \varepsilon(t))(X(t) + \varepsilon(t))] = \\ = M[X(t)X(t) + \varepsilon(t)X(t) + X(t)\varepsilon(t) + \varepsilon(t)\varepsilon(t)], \quad (1)$$

где $R_{gg}(t)$ — автокорреляционная функция сигнала $g(t)$; $M[\cdot]$ — математическое ожидание.

При этом из-за отсутствия корреляции между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\varepsilon(t)$ выполняются условия

$$\begin{cases} M[X(t)X(t)] \neq 0; M[\varepsilon(t)X(t)] = 0; \\ M[X(t)\varepsilon(t)] = 0; M[\varepsilon(t)\varepsilon(t)] = 0; \\ R_{gg}(t) = M[X(t)X(t)] + \varepsilon(t)\varepsilon(t)], \end{cases} \quad (2)$$

и оценки корреляционной функции $R_{gg}(t)$ и дисперсии $D_{\varepsilon\varepsilon}$ зашумленного сигнала определяются по формулам

$$R_{gg}(t) = M[X(t)X(t) + \varepsilon(t)\varepsilon(t)] = R_{XX}(t) + D_{\varepsilon\varepsilon}; \quad (3)$$

$$D_{\varepsilon\varepsilon} = M[\varepsilon(t)\varepsilon(t)], \quad (4)$$

где R_{XX} — автокорреляционная функция полезного сигнала $X(t)$.

В процессе эксплуатации для реальных объектов характерен переход в скрытый период аварийного состояния из-за зарождения различных дефектов, таких как износ, микротрещина, деформация от усталости, коррозии и т. д. [7, 8]. Обычно все это отражается на сигналах, получаемых от соответствующих датчиков в виде шума, который в большинстве случаев имеет корреляцию с полезным сигналом $X(t)$ [1—8]. Вследствие этого в подобных случаях суммарная помеха $\varepsilon(t)$ формируется из шума $\varepsilon_1(t)$, который возникает от влияния внешних факторов, и шума $\varepsilon_2(t)$, который возникает в результате зарождения различных дефектов. При этом нормальное состояние функционирования объекта заканчивается, выполнение условий (2)—(4) нарушается, и наступает скрытый период его аварийного состояния [7—10]. В этом случае из-за наличия корреляции между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$ имеют место неравенства

$$\begin{cases} M[X(t)X(t)] \neq 0; M[\varepsilon(t)X(t)] \neq 0; \\ M[X(t)\varepsilon(t)] \neq 0; M[\varepsilon(t)\varepsilon(t)] \neq 0, \end{cases} \quad (5)$$

и оценка $R_{gg}(0)$ определяется по выражению

$$R_{gg}(0) = M[X(t)X(t) + \varepsilon(t)X(t) + \\ + X(t)\varepsilon(t) + \varepsilon(t)\varepsilon(t)] = R_{XX}(0) + 2R_{X\varepsilon}(0) + D_{\varepsilon\varepsilon}. \quad (6)$$

Суммарная дисперсия помехи вычисляется по формуле

$$D_\varepsilon = M[\varepsilon(t)X(t) + X(t)\varepsilon(t) + \varepsilon(t)\varepsilon(t)] = \\ = R_{X\varepsilon}(t) + D_{\varepsilon\varepsilon}. \quad (7)$$

Из-за этого в скрытый период аварийного состояния объектов оценки спектральных и корреляционных характеристик сигналов $g(t)$ при применении традиционных технологий определяются с некоторой погрешностью. По этой причине индикация начальной стадии зарождения неисправностей, приводящих к переходу объектов в скрытый период аварийного состояния, в некоторых случаях оказывается запоздалой.

Учитывая сказанное, создание алгоритмов определения робастных оценок спектральных и корреляционных характеристик зашумленных сигналов $g(t)$, а также разработка технологий анализа помехи $\varepsilon(t)$ в период нарушения равенств (1)—(4) имеют большое практическое значение.

Постановка задачи

Сначала рассмотрим вопрос обеспечения робастности вычисления оценок спектральных характеристик в скрытом периоде аварийного состояния объектов контроля. Допустим, что время наблюдения T реализации зашумленного сигнала $g(t) = X(t) + \varepsilon(t)$ выбрано достаточно большим. При этом предполагая, что функции $X(t)$ и $\varepsilon(t)$ представляют собой стационарные дискретизированные центрированные случайные сигналы с математическими ожиданиями, равными нулю, а формулы определения спектральных характеристик помехи, т. е. коэффициентов a_n, b_n можно представить в виде

$$a_n = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}[X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)]\cos(n\omega(i\Delta t)) = \\ = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}[X(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t))] - \\ - \left[\frac{2}{N}\left[\sum_{i=1}^{N^+}\varepsilon(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t)) - \right.\right. \\ \left.\left. - \sum_{i=1}^{N^-}\varepsilon(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t))\right]\right]; \quad (8)$$

$$b_n = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}[X + \varepsilon(i\Delta t)]\sin(n\omega(i\Delta t))] = \\ = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}[X(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t))] - \\ - \left[\frac{2}{N}\left[\sum_{i=1}^{N^+}\varepsilon(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t)) - \right.\right. \\ \left.\left. - \sum_{i=1}^{N^-}\varepsilon(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t))\right]\right], \quad (9)$$

где $X(t)$ представляет собой центрированный сигнал с математическим ожиданием, равным нулю; a_n, b_n — амплитуды соответственно синусоиды и косинусоиды с частотой $n\omega$; $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ — отсчеты сигнала $X(t)$ и помехи $\varepsilon(t)$ в момент дискретизации t_0, t_1, ..., t_i, ..., t_N с шагом Δt.

Ясно, что в случае выполнения условий (1)—(4) сумма погрешности положительных N^+ и отрицательных N^- парных произведений $\varepsilon(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t))$, $\varepsilon(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t))$ будут уравновешиваться. Однако в тех случаях, когда объект переходит в аварийное состояние с возникновением корреляции между полезным сигналом $X(i\Delta t)$ и помехой $\varepsilon(i\Delta t)$, появляются погрешности λ_{a_n} и λ_{b_n}, которые могут быть определены по выражениям

$$\lambda_{a_n} = \left[\frac{2}{N}\left[\sum_{i=1}^{N^+}\varepsilon(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t)) - \right.\right. \\ \left.\left. - \sum_{i=1}^{N^-}\varepsilon(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t))\right]\right], \quad (10)$$

$$\lambda_{b_n} = \left[\frac{2}{N}\left[\sum_{i=1}^{N^+}\varepsilon(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t)) - \right.\right. \\ \left.\left. - \sum_{i=1}^{N^-}\varepsilon(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t))\right]\right]. \quad (11)$$

Отметим, что с увеличением степени корреляции между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ значения погрешностей также увеличиваются. Вследствие этого, в некоторых случаях оценки погрешностей λ_{a_n}, λ_{b_n}, возникающих от влияния помехи $\varepsilon(i\Delta t)$, оказываются соизмеримыми с искомыми коэффициентами a_n, b_n, что нередко является причиной ошибок результатов мониторинга начала скрытого периода перехода объектов контроля в аварийное состояние.

Теперь рассмотрим специфику корреляционного анализа зашумленных сигналов в скрытом периоде аварийного состояния объекта. Согласно равенствам (5)—(7), в это время искомые оценки корреляционных функций определяются по выражению

$$R_{gg}(\mu\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(i\Delta t)g((i+\mu)\Delta t) = \\ = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t))(X((i+\mu)\Delta t) + \\ + \varepsilon((i+\mu)\Delta t)). \quad (12)$$

Очевидно, что при применении на практике этих оценок погрешности от влияния помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ можно определить по выражению

$$\lambda_{gg}(\mu\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[X(i\Delta t)\varepsilon((i+\mu)\Delta t) + \\ + \varepsilon(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon((i+\mu)\Delta t)] = \\ = R_{X\varepsilon}(\mu\Delta t) + R_{\varepsilon X}(\mu\Delta t) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu\Delta t) = \\ = R_{X\varepsilon}(\mu\Delta t) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu\Delta t). \quad (13)$$

Таким образом, в силу появления погрешностей $\lambda_{a_n}, \lambda_{b_n}$ и λ_{gg} в скрытый период перехода объектов контроля в аварийное состояние на практике во многих случаях при применении традиционных алгоритмов спектрального и корреляционного анализа не удается обеспечить адекватность результатов решения задач контроля и диагностики. В настоящей работе ставится задача разработки алгоритмов определения оценок спектральных и корреляционных характеристик помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ и взаимно корреляционной функции между полезным сигналом и помехой, а также задача разработки технологий обеспечения робастности оценок a_n, b_n и $R_{gg}(\mu\Delta t)$ в указанный период.

Алгоритмы определения робастных оценок спектральных характеристик зашумленных сигналов в скрытом периоде аварийного состояния объекта

Для обеспечения робастности оценок a_n, b_n спектральных характеристик зашумленных сигналов $g(i\Delta t)$ рассмотрим возможный вариант уравновешивания положительных и отрицательных погрешностей соответствующих парных произведений. Полагая, что отсчеты помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ суммарного сигнала $g(i\Delta t)$ известны, абсолютные величины погрешности $\lambda(i\Delta t)$ каждого парного произведения $g(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t))$, $g(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t))$ можно определить по формулам

$$\lambda_a(i\Delta t) = |\varepsilon(i\Delta t)||\cos(n\omega(i\Delta t))|; \tag{14}$$

$$\lambda_b(i\Delta t) = |\varepsilon(i\Delta t)||\sin(n\omega(i\Delta t))|. \tag{15}$$

При этом средние величины абсолютной погрешности $\lambda(i\Delta t)$ можно оценить по формулам

$$\overline{\lambda_a(i\Delta t)} = \overline{|\varepsilon(i\Delta t)||\cos(n\omega(i\Delta t))|}, \tag{16}$$

$$\overline{\lambda_b(i\Delta t)} = \overline{|\varepsilon(i\Delta t)||\sin(n\omega(i\Delta t))|}. \tag{17}$$

Однако согласно выражениям (14), (15) для вычисления погрешностей $\lambda_{a_n}, \lambda_{b_n}$ необходимо определение отсчетов помехи $\varepsilon(i\Delta t)$, что практически невозможно. Проведенные исследования показали [8], что имеется возможность замены не поддающихся измерению отсчетов помехи их приближенными величинами, и для этой цели возможно и целесообразно использование технологии определения оценки дисперсии помехи D_ε по выражению

$$D_\varepsilon \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(i\Delta t)g(i\Delta t) + g(i+2)\Delta t)g(i\Delta t) - \\ -2g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t), \tag{18}$$

которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(i\Delta t)g(i\Delta t) - \sum_{i=1}^{N} 2g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t) + \\ &+\sum_{i=1}^{N} g(i\Delta t)g((i+2)\Delta t) = \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[X(i\Delta t)+\varepsilon(i\Delta t)][X(i\Delta t)+\varepsilon(i\Delta t)] - \\ &-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2[X(i\Delta t)+\varepsilon(i\Delta t)][X((i+1)\Delta t)\varepsilon((i+1)\Delta t)] + \\ &+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[X(i\Delta t)+\varepsilon(i\Delta t)][X((i+2)\Delta t)+\varepsilon((i+2)\Delta t)] = \\ &= R_{XX}(0)+R_{X\varepsilon}(0)+R_{\varepsilon X}(0)+R_{\varepsilon\varepsilon}(0)-2R_{XX}(\Delta t) - \\ &-2R_{X\varepsilon}(\Delta t)-2R_{\varepsilon X}(\Delta t)-2R_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t) + \\ &+R_{XX}(2\Delta t)+R_{X\varepsilon}(2\Delta t)+R_{\varepsilon X}(2\Delta t)+R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta t). \end{aligned} \tag{19}$$

Если для сигнала $g(i\Delta t) = X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)$ выполняются условия стационарности и нормальности закона распределения, то справедливы следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} R_{X\varepsilon}(0) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\varepsilon(i\Delta t) \neq 0; \\ R_{\varepsilon X}(0) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)X(i\Delta t) \neq 0; \\ R_{\varepsilon\varepsilon}(0) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon(i\Delta t) \neq 0; \\ R_{XX}(0) &+ R_{XX}(2\Delta t) - 2R_{XX}(\Delta t) \approx 0; \\ R_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon((i+1)\Delta t) \approx 0; \\ R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon((i+2)\Delta t) \approx 0; \\ R_{X\varepsilon}(\Delta t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\varepsilon((i+1)\Delta t) \approx 0; \\ R_{X\varepsilon}(2\Delta t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\varepsilon((i+2)\Delta t) \approx 0; \\ R_{\varepsilon X}(\Delta t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)X((i+1)\Delta t) \approx 0; \\ R_{\varepsilon X}(2\Delta t) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)X((i+2)\Delta t) \approx 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

В результате в правой части выражения (18) получим

$$D_\varepsilon \approx R_{X\varepsilon}(0)+R_{\varepsilon X}(0)+R_{\varepsilon\varepsilon}(0) \approx R_{X\varepsilon}(0)+D_{\varepsilon\varepsilon} = \\ = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^2(i\Delta t), \tag{21}$$

что показывает возможность на основании выражения (18) определения оценки дисперсии помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ зашумленного сигнала $g(i\Delta t)$.

Вводя обозначения

$$\varepsilon'(i\Delta t) = |g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t]|; \tag{22}$$

$$\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t) = \sqrt{\varepsilon'(i\Delta t)} \qquad (23)$$

и допуская справедливость выражения

$$D_\varepsilon = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^2(i\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon^{\mathbf{e}})^2(i\Delta t) \qquad (24)$$

формулу определения средней величины $\varepsilon(i\Delta t)$ можно свести к определению средней величины $\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)$, т. е.

$$\overline{\varepsilon(i\Delta t)} \approx \overline{\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t).$$

При этом выражения (16), (17) можно представить в виде

$$\left|\overline{\lambda_a(i\Delta t)}\right| = \overline{\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t))}; \qquad (25)$$

$$\left|\overline{\lambda_b(i\Delta t)}\right| = \overline{\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t))} \qquad (26)$$

и использовать для определения приближенных значений искомых погрешностей оценок a_n, b_n по формулам

$$\lambda_{a_n} = \left[\left(\frac{N^+_{a_n} - N^-_{a_n}}{N}\right)\overline{\lambda_a(i\Delta t)}\right]; \qquad (27)$$

$$\lambda_{b_n} = \left[\left(\frac{N^+_{b_n} - N^-_{b_n}}{N}\right)\overline{\lambda_b(i\Delta t)}\right], \qquad (28)$$

где N^+ и N^- — число положительных и отрицательных погрешностей парных произведений $g(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t))$, $g(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t))$.

Очевидно, что определение оценок $\lambda_{a_n}, \lambda_{b_n}$ открывает возможность путем уравновешивания положительных и отрицательных погрешностей обеспечить робастность, т. е. получить робастные оценки

$$a_n^R = \frac{2}{N}\left\{\sum_{i=1}^{N}[g(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t)) - \lambda_a]\right\}; \qquad (29)$$

$$b_n^R = \frac{2}{N}\left\{\sum_{i=1}^{N}[g(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t)) - \lambda_b]\right\}, \qquad (30)$$

которые позволяют повысить достоверность результатов мониторинга начала зарождения дефектов, предшествующих началу скрытого периода появления неисправностей в объектах контроля.

Технология спектрального анализа помехи в скрытом периоде аварийного состояния объекта

Проведенные исследования показали, что начало зарождения неисправности в объектах контроля, в первую очередь, отражается на спектре помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ зашумленного сигнала $g(i\Delta t)$ [7, 8, 11, 12]. В связи с этим при решении задачи контроля и диагностики в качестве информативных признаков целесообразно использование оценок спектральных характеристик помехи $\varepsilon(i\Delta t)$. Принимая во внимание выражения (22)—(26), алгоритмы определения оценок коэффициентов $a_{n\varepsilon}$, $b_{n\varepsilon}$ помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{n\varepsilon} &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t)) \approx \\ &\approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t)); \end{aligned} \qquad (31)$$

$$\begin{aligned} b_{n\varepsilon} &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t)) \approx \\ &\approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t)), \end{aligned} \qquad (32)$$

который, принимая обозначения

$$\operatorname{sgn} g(i\Delta t) = \operatorname{sgn} X(i\Delta t) = \begin{cases} +1 \text{ при } g(i\Delta t) > 0; \\ 0 \quad \text{при } g(i\Delta t) = 0; \\ -1 \text{ при } g(i\Delta t) < 0 \end{cases} \qquad (33)$$

и учитывая формулы (22), (23), можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} a_{n\varepsilon} &\approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t) \times \\ &\times \sqrt{|g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t]|} \times \\ &\times \cos(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\sqrt{\varepsilon'(i\Delta t)}\cos(n\omega(i\Delta t)), \end{aligned} \qquad (34)$$

$$\begin{aligned} b_{n\varepsilon} &\approx \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t) \times \\ &\times \sqrt{|g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t]|} \times \\ &\times \sin(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\sqrt{\varepsilon'(i\Delta t)}\sin(n\omega(i\Delta t)). \end{aligned} \qquad (35)$$

Таким образом, вычисления, полученные по выражениям (29), (30), обеспечивают получение робастных оценок a_n^R, b_n^R, что повышает степень достоверности контроля в скрытый период перехода объекта в аварийное состояние. Однако применение выражений (34), (35) открывает возможность регистрировать начало возникновения неисправностей значительно раньше робастных оценок a_n^R, b_n^R, вычисляя оценки $a_{n\varepsilon}$, $b_{n\varepsilon}$ спектральных характеристик помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ зашумленного сигнала $g(i\Delta t)$. Для анализа возможностей применения предложенной технологии проводились многочисленные вычислительные эксперименты, выполненные в среде компьютерной математики MATLAB.

С помощью генератора случайных величин формируется массив из отсчетов помехи $\varepsilon(i\Delta t)$, а из отсчетов $g(i\Delta t) = X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)$ по формуле (22) формируется массив отсчетов $\varepsilon'(i\Delta t)$. Затем по формулам (8), (9) вычисляются традиционные оценки спектральных характеристик a_n, b_n зашумленного сигнала $g(i\Delta t)$, а по формуле (23) формируется массив отсчетов $\varepsilon^{e}(i\Delta t)$. Затем по формулам (25)—(28) вычисляются оценки $\overline{\lambda_a(i\Delta t)}, \overline{\lambda_b(i\Delta t)}$ и оценки погрешностей $\lambda_{a_n}, \lambda_{b_n}$. Далее по формулам (29), (30) вычисляются робастные оценки a_n^R и b_n^R. Наконец, по формулам (34), (35) определяются значения оценок спектральных характеристик помехи $a_{n\varepsilon}$, $b_{n\varepsilon}$. Результат одного из многочисленных экспериментов по определению a_n^R, b_n^R и $a_{n\varepsilon}$, $b_{n\varepsilon}$ представлен в табл. 1, где приведены только оценки, полученные при $n = 5$, так как оценки остальных гармоник были близки нулю.

Таблица 1

a_5	b_5	$\overline{\lambda_a(i\Delta t)}$	$\overline{\lambda_b(i\Delta t)}$	λ_{a_5}	λ_{b_5}
0,002	9,968	0,143	0,067	0,014	0,056
a_5^R	b_5^R	$a_{5_\varepsilon}^T$	$b_{5_\varepsilon}^T$	a_{5_ε}	b_{5_ε}
0,005	9,857	0,02	0,33	0,002	0,37

Анализ других возможных вариантов определения оценок спектральных характеристик помехи показал, что принимая во внимание выражения (31)—(35), алгоритмы определения оценок $a_{n\varepsilon}^*, b_{n\varepsilon}^*$ релейных спектральных характеристик помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ зашумленного сигнала $g(i\Delta t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{n\varepsilon}^* &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\varepsilon(i\Delta t)\cos(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\sqrt{g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t]} \times \\ &\times \cos(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\sqrt{\varepsilon'(i\Delta t)}\cos(n\omega(i\Delta t)); \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} b_{n\varepsilon}^* &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\varepsilon(i\Delta t)\sin(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\sqrt{g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t]} \times \\ &\times \sin(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\sqrt{\varepsilon'(i\Delta t)}\sin(n\omega(i\Delta t)). \end{aligned} \tag{37}$$

Исследования также показали, что при решении задач мониторинга, контроля и диагностики также могут быть использованы оценки знакового спектрального анализа помехи, которые можно определить с помощью выражений

$$\begin{aligned} a'_{n\varepsilon} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\varepsilon(i\Delta t)\operatorname{sgn}\cos(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\sqrt{g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t]} \times \\ &\times \operatorname{sgn}\cos(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\sqrt{\varepsilon'(i\Delta t)}\operatorname{sgn}\cos(n\omega(i\Delta t)); \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} b'_{n\varepsilon} &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\varepsilon(i\Delta t)\operatorname{sgn}\sin(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\sqrt{g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t]} \times \\ &\times \operatorname{sgn}\sin(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \operatorname{sgn}\sqrt{\varepsilon'(i\Delta t)}\operatorname{sgn}\sin(n\omega(i\Delta t)). \end{aligned} \tag{39}$$

Легко можно убедиться в том, что выражения (36)—(39) определения оценок $a_{n\varepsilon}^*$, $b_{n\varepsilon}^*$, $a'_{n\varepsilon}$, $b'_{n\varepsilon}$, отличаются тем, что они аппаратурно легко реализуются и могут быть использованы для сигнализации начала возникновения неисправности в объекте.

Технология корреляционного анализа помехи зашумленных сигналов в скрытом периоде аварийного состояния объекта

Как было указано выше, реальные контролируемые объекты в процессе эксплуатации при зарождении различных дефектов, таких как износ, микротрещина, усталостная деформация и т. д. [8, 9, 11, 13], переходят в скрытый период аварийного состояния. Это отражается на соответствующих сигналах в виде шума $\varepsilon_2(i\Delta t)$, которые в большинстве случаев коррелируют с полезным сигналом $X(i\Delta t)$. Тогда суммарная помеха складывается из помехи $\varepsilon_1(i\Delta t)$ от влияния внешних факторов и шума $\varepsilon_2(i\Delta t)$ вследствие зарождения различных дефектов. При этом, принимая во внимание формулу (12), оценку $R_{gg}(\mu)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_{gg}(\mu) &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(i\Delta t)g((i+\mu)\Delta t) \approx \\ &\approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t))(X(i+\mu)\Delta t) + \varepsilon((i+\mu)\Delta t)) \approx \\ &\approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} [X(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t) + \\ &+ X(i\Delta t)\varepsilon((i+\mu)\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon((i+\mu)\Delta t)] \approx \\ &\approx R_{XX}(\mu) + R_{\varepsilon X}(\mu) + R_{X\varepsilon}(\mu) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu) \approx \\ &\approx \begin{cases} R_{XX}(0) + 2R_{X\varepsilon}(0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(0) & \text{при } \mu = 0; \\ R_{XX}(\mu) + 2R_{X\varepsilon}(\mu) & \text{при } \mu \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{40}$$

Из выражений (12)—(17) и (40) следует, что без учета корреляционных характеристик помехи, т. е. оценок $R_{X\varepsilon}(0)$ и $R_{\varepsilon\varepsilon}(0)$, обеспечить адекватность решения задач контроля и идентификации технического состояния объектов в период их перехода в аварийное состояние будет трудно. Экспериментальные исследования показали, что для реальных объектов контроля достаточно часто существует корреляция между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ даже в течение нескольких шагов дискретизации, т. е. при $\mu = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, ...$ [11, 12]. Поэтому для исключения погрешности $\lambda_{gg}(\mu)$ оценок $R_{gg}(\mu)$ кроме вычисления $R_{\varepsilon\varepsilon}(0)$, $R_{X\varepsilon}(0)$ также требуется разработать технологию определения оценок $R_{X\varepsilon}(\Delta t)$, $R_{X\varepsilon}(2\Delta t)$, $R_{X\varepsilon}(3\Delta t)$, т. е. при $\mu = \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, ...$. Результаты проводимых исследований показали, что для указанных целей также можно использовать выражения (18) [11, 12]. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Очевидно, что при наличии корреляции между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ при $\mu = 0$ правую часть выражения (18) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&R'_{X\varepsilon}(\mu = 0) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[g(i\Delta t)g(i\Delta t) - 2g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t) + \\
&+g(i\Delta t)\, g((i+2)\Delta t)] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)][X(i\Delta t) + \\
&+\varepsilon(i\Delta t)] - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}2[X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)][X((i+1)\Delta t)\varepsilon((i+1\Delta t)] + \\
&+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)][X((i+2)\Delta t) + \varepsilon((i+2)\Delta t)] \approx \\
&\approx R_{XX}(0) + R_{X\varepsilon}(0) + R_{\varepsilon X}(0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(0) - 2R_{XX}(\Delta t) - \\
&-R_{X\varepsilon}(\Delta t) - 2R_{\varepsilon X}(\Delta t) - 2R_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t) + \\
&+R_{XX}(2\Delta t) + R_{X\varepsilon}(2\Delta t) + R_{\varepsilon X}(2\Delta t) + R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta t).
\end{aligned} \tag{41}$$

При этом, если выполняются условия стационарности и нормальности закона распределения зашумленных сигналов, то для контролируемых объектов будут справедливы следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&R_{X\varepsilon}(0) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\varepsilon(i\Delta t) \neq 0; \\
&R_{\varepsilon X}(0) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)X(i\Delta t) \neq 0; \\
&R_{\varepsilon\varepsilon}(0) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon(i\Delta t) \neq 0; \\
&R_{XX}(0) + R_{XX}(2\Delta t) - 2R_{XX}(\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon((i+1)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon((i+2)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{X\varepsilon}(\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\varepsilon((i+1)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{X\varepsilon}(2\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\varepsilon((i+2)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon X}(\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)X((i+1)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon X}(2\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)X((i+2)\Delta t) \approx 0.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

В этом случае правая часть выражения (18) примет вид

$$\begin{aligned}
R'_{X\varepsilon}(\mu = 0) &\approx R_{X\varepsilon}(0) + R_{\varepsilon X}(0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(0) \approx \\
&\approx 2R_{X\varepsilon}(0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(0).
\end{aligned} \tag{43}$$

Из соотношения (43) следует, что при наличии корреляции между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ при $\mu = 0$ результат, полученный по выражению (41), представляет собой сумму $2R_{X\varepsilon}(0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(0)$. Можно показать, что при наличии корреляции между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ при $\mu = \Delta t$ оценки $R_{X\varepsilon}(\Delta t)$ можно вычислить по выражению

$$\begin{aligned}
&R'_{X\varepsilon}(\mu = \Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[g(i\Delta t)g(i\Delta t) - \\
&-2g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t) + g(i\Delta t)g((i+2)\Delta t)] \approx \\
&\approx R_{XX}(\Delta t) + R_{X\varepsilon}(\Delta t) + R_{\varepsilon X}(\Delta t) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t) - \\
&-2R_{XX}(2\Delta t) - R_{X\varepsilon}(2\Delta t) - 2R_{\varepsilon X}(2\Delta t) - 2R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta t) + \\
&+R_{XX}(3\Delta t) + R_{X\varepsilon}(3\Delta t) + R_{\varepsilon X}(3\Delta t) + R_{\varepsilon\varepsilon}(3\Delta t).
\end{aligned} \tag{44}$$

При выполнении условий стационарности и нормальности закона распределения зашумленных сигналов при наличии корреляции между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ в случае $\mu = \Delta t$ можно считать справедливыми следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&R_{X\varepsilon}(\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\varepsilon((i+1)\Delta t) \neq 0; \\
&R_{\varepsilon X}(\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)X((i+1)\Delta t) \neq 0; \\
&R_{XX}(\Delta t) + R_{XX}(3\Delta t) - 2R_{XX}(2\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t) \approx 0;\ R_{\varepsilon\varepsilon}(3\Delta t) \approx 0;\ R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon\varepsilon}(\Delta t) + R_{\varepsilon\varepsilon}(3\Delta t) - 2R_{\varepsilon\varepsilon}(2\Delta t) \approx 0; \\
&R_{X\varepsilon}(2\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\varepsilon((i+2)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{X\varepsilon}(3\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\varepsilon((i+3)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon X}(2\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)X((i+2)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon X}(3\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)X((i+3)\Delta t) \approx 0.
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Формулу для определения $R_{X\varepsilon}(\Delta t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&R'_{X\varepsilon}(\Delta t) \approx R_{X\varepsilon}(\Delta t) + R_{\varepsilon X}(\Delta t) \approx 2R_{X\varepsilon}(\Delta t), \\
&R_{X\varepsilon}(\Delta t) \approx \frac{1}{2}R'_{X\varepsilon}(\Delta t) \approx \\
&\approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[g(i\Delta t)g(i\Delta t) - 2g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t) + \\
&+g(i\Delta t)g((i+2)\Delta t)] \approx \\
&\approx \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}[g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t) - 2g(i\Delta t)g((i+2)\Delta t) + \\
&+g(i\Delta t)g((i+3)\Delta t)].
\end{aligned} \tag{46}$$

Аналогично, при корреляции между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ при $\mu = 2\Delta t$ можно найти оценку $R_{X\varepsilon}(2\Delta t)$. Очевидно, что в случае корреляции между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ при m различных временных сдвигах $m = m\Delta t$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ по аналогии с вышеприведенными будет справедливо выражение

$$\begin{aligned}
&R'_{X\varepsilon}(\mu\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[g(i\Delta t)g((i+m-1)\Delta t) - \\
&-2g(i\Delta t)g((i+m)\Delta t) + g(i\Delta t)g((i+m+1)\Delta t)] \approx \\
&\approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[g(i\Delta t)g((i+m)\Delta t)] - \\
&-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}2[g(i\Delta t)g((i+m+1)\Delta t)] + \\
&+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[g(i\Delta t)g((i+m+2)\Delta t)] \approx \\
&\approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[X(i\Delta t)+\varepsilon(i\Delta t)][X((i+m)\Delta t)+\varepsilon(i+m)\Delta t)] - \\
&-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}2[X(i\Delta t)+\varepsilon(i\Delta t)][X((i+m+1)\Delta t) + \\
&+\varepsilon(i+m+1)\Delta t)] + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[X(i\Delta t)+\varepsilon(i\Delta t)] \times \\
&\times[X((i+m+2)\Delta t)+\varepsilon(i+m+2)\Delta t)] \approx \\
&\approx R_{XX}(m\Delta t) + R_{X\varepsilon}(m\Delta t) + R_{\varepsilon X}(m\Delta t) + R_{\varepsilon\varepsilon}(m\Delta t) - \\
&-2R_{XX}((m+1)\Delta t) - 2R_{X\varepsilon}((m+1)\Delta t) - \\
&-2R_{\varepsilon X}((m+1)\Delta t) - 2R_{\varepsilon\varepsilon}((m+1)\Delta t) + \\
&+R_{XX}((m+2)\Delta t) + R_{X\varepsilon}((m+2)\Delta t) + \\
&+R_{\varepsilon X}((m+2)\Delta t) + R_{\varepsilon\varepsilon}((m+2)\Delta t),
\end{aligned} \tag{47}$$

для элементов которого справедливы следующие оценки:

$$\left.\begin{aligned}
&R_{X\varepsilon}(m\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X(i\Delta t)\varepsilon((i+m)\Delta t) \neq 0; \\
&R_{\varepsilon X}(m\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon(i\Delta t)X((i+m)\Delta t) \neq 0; \\
&R_{XX}(m\Delta t) + R_{XX}((m+2)\Delta t) - 2R_{XX}((m+1)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon\varepsilon}(m\Delta t) \approx 0;\ R_{\varepsilon\varepsilon}((m+1)\Delta t) \approx 0;\ R_{\varepsilon\varepsilon}((m+2)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon\varepsilon}(m\Delta t) + R_{\varepsilon\varepsilon}((m+2)\Delta t) - 2R_{\varepsilon\varepsilon}((m+1)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{X\varepsilon}((m+1)\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X(i\Delta t)\varepsilon((i+m+1)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{X\varepsilon}((m+2)\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X(i\Delta t)\varepsilon((i+m+2)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon X}((m+1)\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon(i\Delta t)X((i+m+1)\Delta t) \approx 0; \\
&R_{\varepsilon X}((m+2)\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon(i\Delta t)X((i+m+2)\Delta t) \approx 0.
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Следовательно, для определения оценки $R_{X\varepsilon}(\mu)$ можно использовать обобщенное выражение

$$\begin{aligned}
&R_{X\varepsilon}(m\Delta t) \approx \frac{1}{2}R'_{X\varepsilon}(m\Delta t) \approx \\
&\approx \frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}[g(i\Delta t)g((i+m)\Delta t) - \\
&-2g(i\Delta t)g((i+(m+1))\Delta t) + \\
&+g(i\Delta t)g((i+(m+2))\Delta t)].
\end{aligned} \tag{49}$$

Из-за чрезвычайной важности обеспечения надежности и достоверности результатов решения задач контроля в скрытый период аварийного состояния объекта на современных системах контроля целесообразно дублирование индикации начала возникновения неисправностей на объекте с помощью всевозможных оценок спектральных и корреляционных характеристик помехи $\varepsilon(i\Delta t)$. Анализ создания других возможных вариантов этой технологии показал, что для этой цели целесообразно также использование алгоритма вычисления оценки релейной взаимно корреляционной функции $R^*_{X\varepsilon}(\mu)$ между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ зашумленного сигнала $g(i\Delta t)$. Из литературы [9, 10, 14] известно, что при наличии корреляции между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ для определения оценки релейной взаимно корреляционной функции $R^*_{X\varepsilon}(0)$ между $\varepsilon(i\Delta t)$ и $X(i\Delta t)$ можно использовать формулу

$$\begin{aligned}
&D^*_{\varepsilon} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\operatorname{sgn} g(i\Delta t)g(i\Delta t) - \\
&-2\operatorname{sgn} g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t) + \\
&+\operatorname{sgn} g(i\Delta t)g((i+2)\Delta t)].
\end{aligned} \tag{50}$$

Раскрывая правую часть этой формулы и принимая во внимание, что

$$\operatorname{sgn} g(i\Delta t) = \operatorname{sgn} X(i\Delta t), \tag{51}$$

выражение (50) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&R^*_{X\varepsilon}(0) = \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[[\operatorname{sgn} X(i\Delta t)X(i\Delta t) + \\
&+\operatorname{sgn} X(i\Delta t)\varepsilon(i\Delta t)] - \\
&-2\operatorname{sgn} X(i\Delta t)X((i+1)\Delta t) + \\
&+\operatorname{sgn} X(i\Delta t)\varepsilon((i+1)\Delta t)] + \\
&+[\operatorname{sgn} X(i\Delta t)X((i+2)\Delta t) + \\
&+\operatorname{sgn} X(i\Delta t)\varepsilon((i+2)\Delta t)]].
\end{aligned} \tag{52}$$

Если при этом выполняются условия стационарности и нормальности закона распределения, то можно считать справедливым равенства

$$\left.\begin{aligned}
&R^*_{X\varepsilon}(0) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} X(i\Delta t)\varepsilon(i\Delta t) \neq 0,\\
&\text{где } R^*_{X\varepsilon}(\Delta t) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} X(i\Delta t)\varepsilon((i+1)\Delta t) = 0;\\
&R^*_{X\varepsilon}(2\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} X(i\Delta t)\varepsilon((i+2)\Delta t) = 0;\\
&\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} X(i\Delta t)X(i\Delta t) +\\
&+\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} X(i\Delta t)X((i+2)\Delta t) -\\
&-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}2\operatorname{sgn} X(i\Delta t)X((i+1)\Delta t) \approx 0;\\
&R^*_{X\varepsilon}(\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} X(i\Delta t)\varepsilon((i+1)\Delta t) \approx 0;\\
&R^*_{X\varepsilon}(2\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} X(i\Delta t)\varepsilon((i+2)\Delta t) \approx 0.
\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

В результате получается

$$D^*_{\varepsilon}(0) = R^*_{X\varepsilon}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} X(i\Delta t)\varepsilon(i\Delta t) =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} g(i\Delta t)\varepsilon(i\Delta t), \quad (54)$$

что показывает, что результат, полученный по формуле (50), представляет собой оценку релейной взаимно корреляционной функции $R^*_{X\varepsilon}(0)$ между полезным сигналом $X(i\Delta t)$ и помехой $\varepsilon(i\Delta t)$, т. е.

$$R^*_{X\varepsilon}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) -$$
$$-2g((i+1)\Delta t]. \quad (55)$$

Аналогичную формулу определения $R^*_{X\varepsilon}(\Delta t)$ можно представить в виде

$$R^*_{X\varepsilon}(\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn} g(i\Delta t)[g(i+1)\Delta t + g(i+3)\Delta t) -$$
$$-2g(i+2)\Delta t].$$

По аналогии с выражениями (41)—(49) можно написать обобщенное выражение определения оценки релейной взаимно корреляционной функций $R^*_{X\varepsilon}(\mu)$ между $X(t)$, $\varepsilon(t)$ при $\mu = 1\Delta t$, $\mu = 2\Delta t$, $\mu = 3\Delta t$:

$$R^*_{X\varepsilon}(m\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\operatorname{sgn} g(i\Delta t)g(i+m\Delta t) -$$
$$-2\operatorname{sgn} g(i\Delta t)g(i+(m+1)\Delta t) + \quad (56)$$
$$+\operatorname{sgn} g((i\Delta t)g(i+(m+2)\Delta t)].$$

Отличительная особенность этих алгоритмов связана с тем, что при нормальном состоянии функционирования объекта оценка $R_{X\varepsilon}(0)$ будет равна нулю. Однако при зарождении различных неисправностей, когда между $X(i\Delta t)$ и $\varepsilon(i\Delta t)$ возникает корреляция, оценка $R^*_{X\varepsilon}(0)$ отличается от нуля, и это позволяет надежно сигнализировать о начале неисправности объекта.

Теперь рассмотрим возможность корреляционного анализа помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ зашумленных сигналов $g(i\Delta t)$ в скрытом периоде аварийного состояния объектов контроля. Сначала допустим, что задана помеха $\varepsilon(t)$ и требуется определить оценку ее корреляционной функции по формуле

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu) = M[\varepsilon(t)\varepsilon(t+\mu\Delta t)] =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon(i\Delta t)\varepsilon(i+\mu)\Delta t, \quad (57)$$

которую, допуская справедливость равенства $\varepsilon(i\Delta t) \approx \varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)$, можно представить в виде

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t + \mu\Delta t) =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\sqrt{|\varepsilon'(i\Delta t)|}\times \quad (58)$$
$$\times\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t + \mu\Delta t)\sqrt{\varepsilon'(i\Delta t + \mu\Delta t)}.$$

Очевидно, что принимая во внимание выражения (22), (23), формулу определения оценки корреляционной функции помехи $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)$ в скрытом периоде аварийного состояния объекта можно также представить в виде

$$R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\times$$
$$\times\sqrt{|g(i\Delta t)|[g(i\Delta t) + g(i+\varepsilon)\Delta t - 2g(i+1)\Delta t]}\times \quad (59)$$
$$\times\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\times$$
$$\times\sqrt{|g(i+1)\Delta t|[g(i+1)\Delta t + g(i+3)\Delta t - 2g(i+2)\Delta t]}.$$

Отметим, что несмотря на кажущуюся громоздкость этой формулы, на современных средствах информатики она легко реализуема.

Таким образом, имеется возможность по выражениям (58), (59) осуществить корреляционный анализ помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ зашумленных сигналов $g(i\Delta t)$.

При этом оценка $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)$ корреляционной функции помехи может быть использована в качестве информативного признака для контроля начала скрытого периода перехода объекта в аварийное состояние.

Кроме того, оценки $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)$ и $R_{X\varepsilon}(\mu)$ также необходимы для определения робастных оценок зашумленных сигналов $g(i\Delta t)$.

Как следует из выражения (6), при определении оценок корреляционных функций $R_{gg}(\mu)$ в скрытом периоде аварийного состояния объекта в результате влияния помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ возникает погрешность, состоящая из суммы оценок $R_{X\varepsilon}(\mu)$ и $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)$. Очевидно, что для обеспечения робастности искомых оценок целесообразно использование оценок $R_{X\varepsilon}(\mu)$, $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)$, которые определяются по выражениям (49), (58). Следовательно, формулу определения робастных оценок корреляционных функций зашумленных сигналов можно представить в виде

$$R_{gg}^{R}(\mu)=\begin{cases}R_{gg}(\mu)-[R_{X\varepsilon}(\mu)+R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)] & \text{при } \mu=0;\\ R_{gg}(\mu)-R_{X\varepsilon}(\mu) & \text{при } \mu=0.\end{cases} \qquad (60)$$

Проводимые экспериментальные исследования показали, что для повышения степени надежности и достоверности результатов идентификации скрытого периода аварийного состояния целесообразно использование оценок спектрально-корреляционных характеристик зашумленных сигналов, которые можно определить по следующим выражениям:

$$a_n(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(i\Delta t)\cos(n\omega(i+\mu)\Delta t);$$

$$b_n(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(i\Delta t)\sin(n\omega(i+\mu)\Delta t);$$

$$a_{n\varepsilon}(\mu)=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)\cos(n\omega(i+\mu)\Delta t);$$

$$b_{n\varepsilon}(\mu)=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon(i\Delta t)\sin(n\omega(i+\mu)\Delta t).$$

Эксперименты показали, что при нормальном техническом состоянии объекта как оценки $a_n(\mu)$, $b_n(\mu)$, так и оценки $a_{n\varepsilon}(\mu)$, $b_{n\varepsilon}(\mu)$ остаются стабильными при различных величинах μ. Однако в начале скрытого периода аварийного состояния объекта при $\mu = 0$, $\mu = 1\Delta t$, $\mu = 2\Delta t$, $\mu = 3\Delta t$, ... эти оценки меняются и становятся информативными признаками. Благодаря этому данные оценки также могут быть использованы в качестве информативных признаков при идентификации технического состояния объектов контроля.

Проведенный экспериментальный анализ зашумленных сигналов, полученных на компрессорных и сейсмоакустических станциях и глубинных морских платформах, объектах нефтегазодобычи и нефтепереработки [7—10, 14], показал, что на начальном этапе отклонения объектов от нормального состояния между сигналом $X(i\Delta t)$ и помехой $\varepsilon(i\Delta t)$ возникает корреляция при различных временных сдвигах. При этом максимальный временной сдвиг не превышает $\mu = 6\Delta t$, т. е. при $\mu = 6\Delta t$ корреляция исчезает.

Для подтверждения достоверности предложенных выше технологий ниже приводятся результаты вычислительного эксперимента, выполненного в среде компьютерной математики MATLAB, представленные на рисунке (см. третью сторону обложки).

В ходе эксперимента был сформирован зашумленный сигнал $g(i\Delta t)$, состоящий из смеси полезного сигнала $X(i\Delta t)$ и помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ в виде случайных функций с нормальными законами распределения с числом отсчетов $N = 30\,000$ и дисперсиями полезного сигнала $D_X = 519$ и помехи $D_\varepsilon = 81{,}5$. Проверялось выполнение условия (47).

Далее по формуле (50) вычислялась оценка дисперсии помехи D_ε, которую можно также вычислить традиционным методом, так как значения отсчетов известны (это возможно только в рамках эксперимента, поскольку на практике отделить помеху от полезного сигала невозможно). Далее по формуле (22) формировался массив из отсчетов $\varepsilon'(i\Delta t)$ и по формуле (23) формировалась эквивалентная помеха $\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)$. Затем вычислялись традиционные оценки спектральных характеристик $a_n^{\text{т}}$, $b_n^{\text{т}}$, зашумленного сигнала $g^{\mathbf{e}}(i\Delta t)$. После этого по формулам (31), (32) вычислялись традиционные оценки спектральных характеристик $a_{n\varepsilon}^{\text{т}}$, $b_{n\varepsilon}^{\text{т}}$, помехи $\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)$. Наконец, определялись значения оценок спектральных характеристик a_n, b_n зашумленного сигнала $g^{\mathbf{e}}(i\Delta t)$, состоящего из смеси полезного сигнала $X(i\Delta t)$ и эквивалентной помехи $\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)$ и спектральных характеристик $a_{n\varepsilon}$, $b_{n\varepsilon}$ эквивалентной помехи $\varepsilon^{\mathbf{e}}(i\Delta t)$. В ходе эксперимента для спектров n = 1, 2, 3, 4 оценки спектральных характеристик принимали значения, близкие к нулю. Однако при n = 5 как в оценках $a_5^{\text{т}}$, $b_5^{\text{т}}$, так и в оценках $a_{5\varepsilon}^{\text{т}}$, $b_{5\varepsilon}^{\text{т}}$, наблюдался резкий скачок. Результат эксперимента по определению дисперсии помехи и спектральных характеристик зашумленного сигнала и помехи для этого случая представлен в табл. 2.

Таблица 2

$a_{5\varepsilon}$	$b_{5\varepsilon}^{\text{т}}$	$b_{5\varepsilon}$	$D_\varepsilon^{\text{т}}$	D_ε	$a_5^{\text{т}}$	a_5	$b_5^{\text{т}}$	b_5
0,9	0,5	0,4	81,5	82,1	1,2	0,9	1,9	1,8

Как видно из табл. 2, при n = 5 оценки спектральных характеристик зашумленного сигнала a_5, b_5, а также оценки спектральных характеристик помехи $a_{5\varepsilon}$, $b_{5\varepsilon}$ оказались близкими по значению к оценкам спектральных характеристик, вычисленным по традиционным технологиям.

Заключение

Благодаря стремительному развитию современных систем контроля в последние годы, несмотря на влияние различных факторов, затрудняющих безаварийную эксплуатацию многих объектов, обеспечивается их нормальное функционирование. Для этого во многих отраслях промышленности в системах контроля для идентификации текущего технического состояния объекта из оценок корреляционных и спектральных характеристик зашумленных сигналов, получаемых от соответствующих датчиков, формируется множество эталонных информативных признаков. В процессе эксплуатации объектов они сравниваются с текущими оценками тех же сигналов. Если их отличие превосходит допустимые значения установленных регламентов, то считается, что техническое состояние объекта изменилось. Однако применение технологий корреляционного и спектрального анализа эффективно и целесообразно в тех случаях, когда для анализируемых сигналов выполняются такие классические условия, как стационарность, нормальность закона распределения и отсутствие корреляции между полезным сигналом и помехой. При этом в системах контроля легко решается задача заблаговременной регистрации и сигнализации о начале всевозможных неисправностей, приводящих к отклонению технического состояния от нормального. Данные технологии можно применять в тех случаях, когда несмотря на появление корреляции между полезным сигналом и помехой запоздалая индикация неисправностей не приводит к аварийному состоянию объекта. Однако имеется множество объектов, для которых запоздалая индикация неисправностей может привести к катастрофическим авариям. Например, в системах контроля и диагностики морских платформ и коммуникаций, компрессорных станций, нефтяных буровых установок, магистральных нефтегазовых трубопроводов и т. д. запоздалый мониторинг неисправностей может стать причиной катастрофических аварий. При решении задач контроля и диагностики для таких объектов необходимо принимать во внимание, что при возникновении неисправностей на зашумленных сигналах появляются помехи, коррелирующие с полезным сигналом. В некоторых случаях они оказываются единственной ценной информацией о начале неисправностей, которые предшествуют аварийному состоянию объекта. Однако в существующих системах контроля часто в результате фильтрации информация, содержащаяся в помехе, теряется. Предлагаемые алгоритмы робастного спектрального и корреляционного анализа зашумленного сигнала и технологии формирования из спектральных и корреляционных оценок помехи информативных признаков в сочетании с традиционными алгоритмами позволяют повысить достоверность решения задач контроля и диагностики. Это связано с тем, что при этом для контроля технического состояния объектов кроме традиционных информативных признаков используются комбинации оценок, позволяющие использовать помеху в качестве носителя диагностической информации. Благодаря этому появляется возможность значительно повысить степень достоверности результатов контроля начала скрытого периода перехода объектов в аварийное состояние.

Список литературы

1. **Солодовников В. В., Плотников В. Н., Яковлев А. В.** Теория автоматического управления техническими системами. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1993.
2. **Методы** классической и современной теории автоматического управления. Т. 2. Статическая динамика и идентификация систем автоматического управления / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
3. **Раннев Г. Г.** Измерительные информационные системы. М.: Изд. Центр "Академия", 2010.
4. **Льюнг Л.** Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
5. **Алексеев А. А., Кораблев Ю. А., Шестопалов М. Ю.** Идентификация и диагностика систем. М.: Изд. центр "Академия", 2009.
6. **Bendat J. S., Piersol A. G.** Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis, 2nd Edition. Wiley, New York, 1993.
7. **Aliev T. A.** Digital Noise Monitoring of Defect Origin. London: Springer, 2007.
8. **Алиев Т. А., Алиев Э. Р.** Многоканальная телеметрическая система сейсмоакустического помехомониторинга землетрясений // Автоматика и вычислительная техника. 2008, № 4. — С. 81—88.
9. **Aliev T. A., Guluyev G. A., Pashayev F. H., Sadygov A. B.** Noise monitoring technology for objects in transition to the emergency state // Mech. Syst. Signal Process. 2012. V. 27. — P. 755—762.
10. **Aliev T. A., Alizada T. A., Rzayeva N. E.** Noise technologies and systems for monitoring the beginning of the latent period of accidents on fixed platforms // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. V. 87. — P. 111—123.
11. **Mehdiyeva G. Y., Ibrahimov V. R., Imanova M. N.** Some refinement of the notion of symmetry for the Volterra integral equations and the construction of symmetrical methods to solve them // J. Computational and Appl. Mathematics. 2016. V. 306. — P. 1—9.
12. **Guseynov S. E., Aleksejeva J. V., Andreyev S. A.** On one Regularizing Algorithm for Comprehensive Diagnosing of Apparatus, Engines and Machinery. Advanced Materials Research. 2015. V. 1117. — P. 254—257.
13. **Skobelev O. P.** Acceleration, Vibration and Shock Sensor Dynamics. Wit Pr: Computational Mechanics, 2000.
14. **Aliev T. A., Abbasov A. M., Guluyev Q. A., Pashaev F. H., Sattarova U. E.** System of robust noise monitoring of anomalous seismic processes // Soil Dynamics and Earthquake Eng. 2013. V. 32. Is. 1. — P. 11—25.

Algorithms of Spectral and Correlation Analysis of the Noise of Random Signals in the Hidden Period of Failures on Control Objects

T. A. Aliev, director@cyber.az,
Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, AZ1141, Azerbaijan
N. E. Rzayeva, nikanel1@gmail.com,
Azerbaijan University of Architecture and Construction, Baku, AZ1071, Azerbaijan

Corresponding author: **Rzayeva N. E.,** Researcher,
Azerbaijan University of Architecture and Construction,
Baku, AZ1071, Azerbaijan, e-mail: nikanel1@gmail.com

Accepted on August 10, 2017

It is well known that in normal technical condition of the objects of control and diagnostics for noisy signal which are received from corresponding sensors classical conditions such as normal distribution law, stationarity and etc. take place. Also it is well known that during exploitation of the control objects because of different defects like wear, microcracks, corrosion, deformation and etc. the hidden period of failure origin take place. In this period noise which have correlation with the useful signal appears. That is why determination of spectral and correlation characteristics of the noisy signal using traditional algorithms and technologies in the hidden stage of failures origin in the control objects take place with some errors. In this case the indication of the hidden stage of defects origin which lead to failures in the objects in some cases is belated. In the article algorithms and tecnologies of the substitution of unmeasurement readings of the noise for their approximate values are offered. Also the possibility of the use of the given readings for both determination the values of spectral and correlation characteristics of the noise and for providing the robustness of the results of correlation and spectral analysis in the hidden period of failures on the control objects is shown.

Keywords: *noise, spectral analysis, correlation analysis, noisy signal, monitoring, diagnostics, control object*

For citation:

Aliev T. A., Rzayeva N. E. Algorithms of Spectral and Correlation Analysis of the Noise of Random Signals in the Hidden Period of Failures on Control Objects, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 3, pp. 183—193.

DOI: 10.17587/mau.19.183-193

References

1. **Solodovnikov V. V., Plotnikov V. N., Yakovlev A. V.** *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya tekhnicheskimi sistemami* (Theory of automatic control of technical systems), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. E. Baumana, 1993 (in Russian).
2. **Pupkov K. A., Egupov N. D.** ed. *Metody klassicheskoj i sovremennoj teorii avtomaticheskogo upravleniya. T. 2. Staticheskaya dinamika i identifikaciya sistem avtomaticheskogo upravleniya* (Methods of the classical and modern theory of automatic control. Vol. 2. Static dynamics and identification of systems of automatic control), Moscow, Publishing house of MGTU im. N. E. Baumana, 2004 (in Russian).
3. **Rannev G. G.** *Izmeritel'nye informacionnye sistemy* (Measuring information systems), Moscow, Izd. Centr "Akademiya", 2010 (in Russian).
4. **L'yung L.** *Identifikaciya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya*, Moscow, Nauka, 1991.
5. **Alekseev A. A., Korablev Yu. A., Shestopalov M. Yu.** Identifikaciya i diagnostika system (Identification and diagnostics of systems), Moscow, Izd. centr "Akademiya", 2009 (in Russian).
6. **Bendat J. S., Piersol A. G.** Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis, 2nd Edition. Wiley, New York, 1993.
7. **Aliev T. A.** Digital Noise Monitoring of Defect Origin. London: Springer, 2007.
8. **Aliev T. A., Aliev E. R.** *Mnogokanal'naya telemetricheskaya sistema sei-smoakusticheskogo pomekhomonitoringa zemletryasenii* (Multichannel telemetric system of a seismoacoustic pomekhomonitoring of earthquakes), *Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika*, 2008, no. 4, pp. 81—88 (in Russian).
9. **Aliev T. A., Guluyev G. A., Pashayev F. H., Sadygov A. B.** Noise monitoring technology for objects in transition to the emergency state, *Mech. Syst. Signal Process*, 27 (2012), pp. 755—762.
10. **Aliev T. A., Alizada T. A., Rzayeva N. E.** Noise technologies and systems for monitoring the beginning of the latent period of accidents on fixed platforms, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2017, vol. 87, pp. 111—123.
11. **Mehdiyeva G. Y., Ibrahimov V. R., Imanova M. N.** Some refinement of the notion of symmetry for the Volterra integral equations and the construction of symmetrical methods to solve them, *J. Computational and Appl. Mathematics*, 2016, vol. 306, pp. 1—9.
12. **Guseynov S. E., Aleksejeva J. V., Andreyev S. A.** On one Regularizing Algorithm for Comprehensive Diagnosing of Apparatus, Engines and Machinery, *Advanced Materials Research*, 1117 (2015), pp. 254—257.
13. **Skobelev O. P.** Acceleration, Vibration and Shock Sensor Dynamics, Wit Pr: Computational Mechanics, 2000.
14. **Aliev T. A., Abbasov A. M., Guluyev Q. A., Pashaev F. H., Sattarova U. E.** System of robust noise monitoring of anomalous seismic processes, *Soil Dynamics and Earthquake Eng.*, 2013, vol. 32, iss. 1, pp. 11—25.

УДК 620.9:658.011.56 DOI: 10.17587/mau.19.194-200

Т. Т. Оморов, чл.-корр., д-р техн. наук, зав. лабораторией, omorovtt@mail.ru,
Национальная академия наук Кыргызской Республики, г. Бишкек

Симметрирование распределенной электрической сети методом цифрового регулирования

Рассматривается проблема симметрирования распределенной трехфазной распределительной электрической сети. Фактор несимметрии фазных токов приводит к значительным потерям активной мощности в сети. Предлагается подход к синтезу цифрового регулятора, обеспечивающего снижение уровня несимметрии сети за счет минимизации тока нейтрального провода. Техническую и программную реализацию синтезированного регулятора можно осуществить на основе микропроцессорного контроллера в составе автоматизированной информационно-измерительной системы коммерческого учета электроэнергии.

Ключевые слова: *трехфазная сеть, несимметричный режим, переключательный элемент, синтез цифрового регулятора*

Введение

Наиболее целесообразным режимом работы распределенной трехфазной распределительной электрической сети (РЭС) является симметричный режим, при котором ток в нейтральном проводе отсутствует [1, 2]. Однако в большинстве случаев из-за разбалансировки нагрузок и неравномерного их распределения по фазам РЭС функционируют, в основном, в несимметричных режимах [2, 3]. Это приводит к повышенным потерям активной мощности в сети и трансформаторных подстанциях (ТП), ухудшению качества электроэнергии, а также к выходу из строя бытовой техники и промышленных установок [4, 5]. В целях решения проблемы симметрирования трехфазных сетей предложен ряд технологий [6—8], которые не нашли широкого практического применения из-за их сложности и недостаточной эффективности. В работе [9] предложен один из возможных подходов к ее решению на основе создания цифровой системы автоматического управления процессом симметрирования сети в составе концентратора данных автоматизированной информационно-измерительной системы коммерческого учета электроэнергии (АИИС КУЭ) [10—13]. Как известно, в традиционных АИИС КУЭ концентраторы данных, в основном, реализуют функцию сбора данных с группы счетчиков электроэнергии, установленных у абонентов сети, а также выполняют вычислительные операции, связанные с коммерческим учетом электроэнергии. Рассматриваемый подход предусматривает, что на концентраторы данных возлагается дополнительная функция цифрового управления, обеспечивающего требуемое перераспределение потоков электроэнергии между фазами сети путем переключения однофазных нагрузок с более нагруженной фазы на менее нагруженную. При этом необходимо, чтобы счетчики электроэнергии в своем составе имели переключательные элементы (ПЭ). Создание таких ПЭ является реальной задачей, так как современные однофазные и трехфазные счетчики [10] имеют электромагнитные реле с мощными контактами до 100А, которые можно использовать для переключения электроприемников с одной фазы на другую.

Целью данной работы является развитие указанного подхода к решению проблемы симметрирования распределенных электрических сетей.

Постановка задачи

Рассмотрим трехфазную четырехпроводную распределенную сеть, к которой подключены питающая трансформаторная подстанция (ТП) и группа из n счетчиков электроэнергии $\{Сч_{\nu k}\}$, установленных у однофазных потребителей. Один из вариантов ее условной схемы показан на рис. 1, где k, ν — индексные переменные, обозначающие соответственно номера фаз A, B, C $(k = \overline{1,3})$ и электроприемников (нагрузок) сети $(\nu = \overline{1,n})$; $\tilde{I}_k$ — синусоидальный мгновенный ток

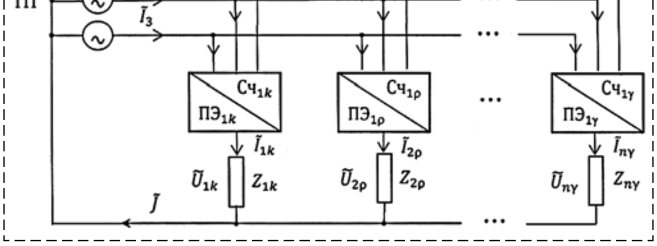


Рис. 1. Условная схема трехфазной распределительной сети

на входе k-й фазы; $Z_{\nu k}$ — обозначение нагрузки с координатой (ν, k); $\tilde{I}_{\nu k}$, $\tilde{U}_{\nu k}$ — мгновенные сила тока и напряжение на нагрузке $Z_{\nu k}$; $\tilde{J}$ — мгновенная сила тока в нейтральном проводе; $ПЭ_{\nu k}$ — переключательный элемент счетчика $Сч_{\nu k}$.

Далее принимаются следующие предположения:

1) трехфазная сеть функционирует в условиях несимметрии фазных токов;

2) счетчики электроэнергии ($Сч_{\nu k}$) имеют переключательные элементы ($ПЭ_{\nu k}$);

3) концентратор данных периодически опрашивает счетчики электроэнергии ($Сч_{\nu k}$) в дискретные моменты времени $t = t_\xi$ (ξ = 1, 2, ...) и записывает в свою базу следующие данные:

- действующие значения силы токов $I_{\nu k}$ и напряжений $U_{\nu k}$ на нагрузках $Z_{\nu k}$;
- коэффициенты мощности $\cos\varphi_{\nu k}$.

Как известно [1], условием симметричности трехфазной четырехпроводной распределительной сети является отсутствие тока $\tilde{J}$ в нейтральном (нулевом) проводе. В несимметричном режиме действующее значение указанного тока может достигать значительной величины из-за разбаланса фазных токов $\tilde{I}_k$ $(k = \overline{1,3})$. При этом чем меньше значение действующего тока J, тем выше уровень симметричности сети и ниже активные потери мощности в ней. Следовательно, качество и эффективность функционирования РЭС можно оценить с помощью следующей целевой (критериальной) функции:

$$E = J^2. \qquad (1)$$

Таким образом, минимизируя значение показателя качества E можно добиться оптимизации режима работы распределительной сети. Для этой цели можно использовать цифровой регулятор в составе концентратора данных. Его основная функция состоит в определении координаты такой нагрузки (электроприемника), переключение которой с одной фазы на другую обеспечивает минимизацию критериальной функции E. В результате такой процедуры формируется управляющее воздействие u на технологический объект, включающий группу электроприемников $\{Z_{\nu k}\}$, к которым подключены счетчики электроэнергии $\{Сч_{\nu k}\}$ с переключательными элементами $\{ПЭ_{\nu k}\}$. При этом сигнал управления u представляет собой командный цифровой код, который содержит информацию о координате электроприемника (счетчика) и паре фаз трехфазной сети, в которых необходимо осуществлять операцию переключения.

Задача заключается в синтезе цифрового регулятора, т. е. в определении его алгоритма функционирования, обеспечивающего формирование управляющего сигнала u на объект на основе минимизации критериальной функции E.

Решение задачи управления

Решение сформулированной задачи управления включает следующие основные этапы:

1. Построение модели нагрузок.
2. Идентификация пары фаз сети для переключения.
3. Прогнозирование и минимизация целевой функции E.
4. Формирование управляющего сигнала на объект для переключения нагрузки.

Построение модели нагрузок. Как известно, счетчики электроэнергии ($Сч_{\nu k}$) измеряют лишь действующие (среднеквадратические) значения силы токов и напряжений на нагрузках потребителей, непосредственное использование которых невозможно для оценки тока $\tilde{J}$ в нейтральном проводе и прогнозирования значений целевой функции E. Для того чтобы корректно использовать законы Кирхгофа, необходимо, чтобы синусоидальные токи и напряжения на входах фаз и электроприемниках были представлены в комплексной форме [1, 13, 14]:

$$\begin{aligned} &\dot{I}_k(\xi) = I_k^{\text{в}}(\xi) + jI_k^{\text{м}}(\xi) = I_k \mathbf{e}^{j\theta_k},\ k = \overline{1,3};\\ &\dot{I}_{\nu k} = I_{\nu k}^{\text{в}} + jI_{\nu k}^{\text{м}} = I_{\nu k}\mathbf{e}^{j\alpha_k};\\ &\dot{U}_{\nu k} = U_{\nu k}^{\text{в}} + jU_{\nu k}^{\text{м}} = U_{\nu k}\mathbf{e}^{j\psi_k},\ \nu = \overline{1,n},\ k = \overline{1,3}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где символы "в" и "м" обозначают вещественные и мнимые части соответствующих комплексных переменных; I_k, $I_{\nu k}$, $U_{\nu k}$, $\theta_{\nu k}$, α_k, ψ_k — модули и фазовые сдвиги этих переменных соответственно; $j = \sqrt{-1}$ — мнимое число.

Для построения модели нагрузок в форме (2) необходимо определить неизвестные фазовые сдвиги θ_k, α_k и ψ_k, так как действующие значения токов I_k, $I_{\nu k}$ и напряжений $U_{\nu k}$ измеряются счетчиками электроэнергии, т. е. являются известными величинами, которые хранятся в базе данных концентратора данных. Методика идентификации искомых фазовых сдвигов предложена в работе [14].

Идентификация пары фаз сети для переключения. Для этой цели введем в рассмотрение следующие разности:

$$e_k = I_k - I_0,\ k = \overline{1,3}, \qquad (3)$$

где I_k — действующее значение силы тока $\tilde{I}_k$; I_0 — среднее значение силы токов на входах фаз, определяемое формулой

$$I_0 = (I_1 + I_2 + I_3)/3.$$

Отметим, что величины e_k, определяемые выражением (3), представляют собой ошибки регулирования, которые в процессе управления должны стремиться к нулю. Далее находим максимальное e_{max} и минимальное e_{min} значения среди указанных отклонений: $e_{max} = \max\{e_1, e_2, e_3\}$, $e_{min} = \min\{e_1, e_2, e_3\}$. Простой анализ показывает, что эти величины однозначно определяют искомую пару фаз сети, на которых имеется необходимость выполнения требуемых переключений некоторого, пока не известного электроприемника. Очевидно, что необходимо отключать определенную нагрузку с фазы, где достигается e_{max}, на фазу с наименьшим значением ошибки e_{min}.

Для того чтобы ограничить (минимизировать) число переключений электроприемников, целесообразно ввести некоторое условие, которое определяет требуемый режим работы РЭС. В частности, можно считать, что требуемый уровень симметричности (квазиоптимальности) трехфазной сети достигается, если выполняется следующее условие:

$$E(\xi) \leqslant \delta, \tag{4}$$

где δ — положительное число, определяющее максимально допустимый уровень целевой функции $E(\xi)$ в момент времени $t = t_\xi$.

Прогнозирование и анализ целевой функции. Предположим, что в момент времени $t = t_\xi$ условие (4) не выполняется. В целях наглядности дальнейших выкладок обозначим n_a число электроприемников ($Z_{\nu k}$), подключенных к фазе A, а комплексные токи электроприемников, подключенных к фазе A, упорядочиваем, так чтобы была сквозная их нумерация с индексом m, где $m = 1, 2, ..., n_a$. При этом обозначения этих токов оставляем прежними ($\dot{I}_{m1}$). Теперь в целях конкретизации решения сформулированной выше задачи далее без потери общности предположим, что

$$e_{max} = e_1,\ e_{min} = e_2,$$

т. е. для снижения уровня несимметричности сети необходимо осуществить переключение некоторой, пока не известной, нагрузки Z_{m1} с фазы A ($k = 1$) на фазу B ($k = 2$). Теперь для формирования критериальной функции $E(\xi)$ в момент времени $t = t_\xi$ на основе представления (2) запишем выражение для комплексного тока $\dot{J}(\xi)$ в нулевом проводе [1]:

$$\dot{J}(\xi) = \dot{I}_1(\xi) + \dot{I}_2(\xi) + \dot{I}_3(\xi) = J^{\text{в}}(\xi) + jJ^{\text{м}}(\xi),$$
$$\nu = \overline{1, n},$$

где вещественные и мнимые части равны

$$J^{\text{в}}(\xi) = \sum_{k=1}^{3} I_k^{\text{в}}(\xi),\ \ J^{\text{м}}(\xi) = \sum_{k=1}^{3} I_k^{\text{м}}(\xi). \tag{5}$$

При этом критериальная функция $E(\xi)$, определяемая формулой (1), запишется в виде

$$E(\xi) = [J^{\text{в}}(\xi)]^2 + [J^{\text{м}}(\xi)]^2, \tag{6}$$

где оценки функций $J^{\text{в}}(\xi)$ и $J^{\text{м}}(\xi)$ определяются по формулам (5).

Теперь предположим, что в качестве претендента на переключение рассматривается нагрузка Z_{m1}, подключенная к первой фазе (фазе A). Задача состоит в определении прогнозной оценки целевой функции $E(\xi + 1)$ в предположении, что нагрузка Z_{m1} в следующий момент времени $t = t_{\xi+1}$ будет переключаться на вторую фазу (фазу B). Соответствующий комплексный ток $\dot{I}_{m1}$ до переключения имеет вид

$$\dot{I}_{m1}(\xi) = I_{m1}^{\text{в}}(\xi) + jI_{m1}^{\text{м}}(\xi). \tag{7}$$

Обозначим $\dot{I}_{m2}$ комплексный ток нагрузки Z_{m1} в предположении, что эта нагрузка будет подключена на фазу B. Тогда прогнозное значение этого тока в момент времени $t = t_{\xi+1}$ можно представить в виде

$$\dot{I}_{m2}(\xi+1) = I_{m2}^{\text{в}}(\xi+1) + jI_{m2}^{\text{м}}(\xi+1). \tag{8}$$

Вещественные и мнимые части, входящие в выражения (7) и (8), определяются на основе методики, изложенной в работе [12]. В целях повышения точности расчетов при их вычислении можно использовать комплексные представления напряжений ($\dot{U}_{\nu k}$) на соответствующих нагрузках с учетом новой координаты электроприемника Z_{m1} в контуре фазы B. В результате выполнения операции переключения в последующий момент времени $t = t_{\xi+1}$ токи на входах соответствующих фаз изменяются. При этом на основе первого закона Кирхгофа выражения для этих токов с учетом (7) и (8) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{I}_1(\xi+1) = \dot{I}_1(\xi) - \dot{I}_{m1}(\xi) = I_1^{\text{в}}(\xi+1) + jI_1^{\text{м}}(\xi+1);\\
&\dot{I}_2(\xi+1) = \dot{I}_2(\xi) + \dot{I}_{m2}(\xi+1) = I_2^{\text{в}}(\xi+1) + jI_2^{\text{м}}(\xi+1);\\
&\dot{I}_3(\xi+1) = \dot{I}_3(\xi) = I_3^{\text{в}}(\xi) + jI_3^{\text{м}}(\xi),
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
&I_1^{\text{в}}(\xi+1) = I_1^{\text{в}}(\xi) - I_{m1}^{\text{в}}(\xi);\\
&I_2^{\text{в}}(\xi+1) = I_2^{\text{в}}(\xi) + I_{m2}^{\text{в}}(\xi+1);\\
&I_1^{\text{м}}(\xi+1) = I_1^{\text{м}}(\xi) - I_{m1}^{\text{м}}(\xi);\\
&I_2^{\text{м}}(\xi+1) = I_2^{\text{м}}(\xi) + I_{m2}^{\text{м}}(\xi+1).
\end{aligned} \tag{10}$$

При этом с учетом соотношений (9) прогнозное значение комплексного тока $\dot{J}(\xi+1)$ в нейтральном проводе определяется выражением

$$\dot{J}(\xi+1) = \dot{I}_1(\xi+1) + \dot{I}_2(\xi+1) + \dot{I}_3(\xi+1) =$$
$$= J^{\text{в}}(\xi+1) + jI^{\text{м}}(\xi+1),$$

где

$$J^{\text{в}}(\xi+1) = I_1^{\text{в}}(\xi+1) + I_2^{\text{в}}(\xi+1) + I_3^{\text{в}}(\xi);$$
$$J^{\text{м}}(\xi+1) = I_1^{\text{м}}(\xi+1) + I_2^{\text{м}}(\xi+1) + I_3^{\text{м}}(\xi). \quad (11)$$

Таким образом, в результате переключения нагрузки Z_{m1} с фазы А на фазу В прогнозное значение целевой функции принимает вид

$$E(\xi + 1) = [J^{\text{в}}(\xi + 1)]^2 + [J^{\text{м}}(\xi + 1)]^2, \quad (12)$$

где вещественные $J^{\text{в}}(\xi + 1)$ и мнимые $J^{\text{м}}(\xi + 1)$ части функции определяются по формулам, аналогичным выражениям (5).

Введем в рассмотрение вектор параметров

$$\mathbf{q}_m = [q_{m1}, q_{m2}, q_{m3}, q_{m4}] = [I_{m1}^{\text{в}}, I_{m1}^{\text{м}}, I_{m2}^{\text{в}}, I_{m2}^{\text{м}}],$$

составленный из вещественных и мнимых частей комплексных токов $\dot{I}_{m1}(\xi)$ и $\dot{I}_{m2}(\xi+1)$, где $m = \overline{1, n_a}$. При этом прогнозное значение показателя качества $E(\xi + 1)$ является функцией от вектора параметров $\mathbf{q}_m$, т. е. $E'(\xi + 1) = E(\mathbf{q}_m)$. В результате проблема симметрирования трехфазной сети сводится к задаче минимизации целевой функции $E(\mathbf{q}_m)$:

$$\min_{\mathbf{q}_m \in R^4} E(\mathbf{q}_m) = E(\mathbf{q}_{m^*}) = E(\mathbf{q}^*), \quad (13)$$

где R^4 — четырехмерное арифметическое пространство; $\mathbf{q}^* = \mathbf{q}_{m^*}$ — искомый вектор параметров, индекс m^* которого определяет координату электроприемника для соответствующего переключения.

Экстремальная задача (13) имеет дискретный характер, а ее решение при достаточно большом числе электроприемников (n_a) представляет определенные трудности и связано с большим объемом вычислительных операций. В связи с этим рассмотрим вопрос об упрощении ее решения. Для этой цели с учетом выражений (10) и (11) критериальную функцию $E(\xi + 1)$, определяемую формулой (12), можно записать в виде

$$E(\xi+1) = [J^{\text{в}}(\xi) + I_{m2}^{\text{в}}(\xi+1) - I_{m1}^{\text{в}}(\xi)]^2 +$$
$$+[J^{\text{м}}(\xi) + I_{m2}^{\text{м}}(\xi+1) - I_{m1}^{\text{м}}(\xi)]^2,$$

где вещественные $I_{m1}^{\text{в}}(\xi), I_{m2}^{\text{в}}(\xi+1)$ и мнимые $I_{m1}^{\text{м}}(\xi), I_{m2}^{\text{м}}(\xi+1)$ части определяются по формулам (10). После несложных преобразований получаем, что

$$E(\xi+1) = E(\xi) + [I_{m2}^{\text{в}}(\xi+1) - I_{m1}^{\text{в}}(\xi)]^2 +$$
$$+ [I_{m2}^{\text{м}}(\xi+1) - I_{m1}^{\text{м}}(\xi)]^2 + \Delta E(\xi+1), \quad (14)$$

где $E(\xi)$ — начальное значение целевой функции, определяемое формулой (6);

$$\Delta E(\xi+1) = 2J^{\text{в}}(\xi)[I_{m2}^{\text{в}}(\xi+1) - I_{m1}^{\text{в}}(\xi)] +$$
$$+ 2J^{\text{м}}(\xi)[I_{m2}^{\text{м}}(\xi+1) - I_{m1}^{\text{м}}(\xi)].$$

Очевидно, что для несимметричной трехфазной сети значение целевой функции $E(\xi) > 0$. Тогда из соотношения (14) видно, что первые три составляющие выражения для $E(\xi + 1)$ являются положительными величинами. В результате можно сформулировать следующее утверждение.

Утверждение. Для того чтобы обеспечить уменьшение прогнозного значения целевой функции $E(\xi + 1)$, достаточно выполнения условия

$$\Delta E(\xi + 1) < 0. \quad (15)$$

Отсюда следует, что чем больше величина $|\Delta E|$, тем меньше значение показателя качества E. Полученный результат позволяет вместо целевой функции $E(\mathbf{q}_m)$ использовать функцию $\Delta E(\xi + 1) = \Delta E(\mathbf{q}_m)$ при оптимизации режима работы РЭС. Теперь в целях целенаправленного поиска координаты искомого электроприемника введем допустимое подмножество Q для вектора параметров q_m, определяемое следующим соотношением:

$$Q = \{\mathbf{q}_m \in R^4 : I_{ml} < e_{\max}, m = \overline{1, n_a}, l = 1, 2\},$$

где $e_{\max} = e_1$; I_{ml} — модуль комплексного тока $\dot{I}_{ml}$.

При этом функция $\Delta E(\xi + 1) = \Delta E(\mathbf{q}_m)$ будет определена на подмножестве Q, и круг возможных вариантов значительно сужается. В результате вместо решения экстремальной задачи (13) можно решить следующую задачу:

$$\min_{\mathbf{q}_m \in Q} \Delta E(\mathbf{q}_m) = \Delta E(\mathbf{q}_{m^*}), \quad (16)$$

где $\mathbf{q}_{m^*}$ — решение задачи оптимизации; m^* — индекс (номер) электроприемника для соответствующего переключения.

Анализ показывает, что введение допустимого подмножества Q и минимизация функции $\Delta E(\mathbf{q}_m)$ на этом подмножестве позволяет значительно уменьшить число вычислительных операций, необходимых для формирования управляющих воздействий на объект. В отдельных случаях процесс симметрирования сети можно свести лишь к анализу соотношения (15).

Полученные результаты позволяют определить обобщенную структуру системы управления процессом симметрирования фазных токов, которая показана на рис. 2. Распределительная сеть рассматривается как многомерный объект, а ее текущее состояние определяется набором векторов $\mathbf{I}$, $\mathbf{I_z}$ и $\mathbf{U_z}$, компоненты которых состо-

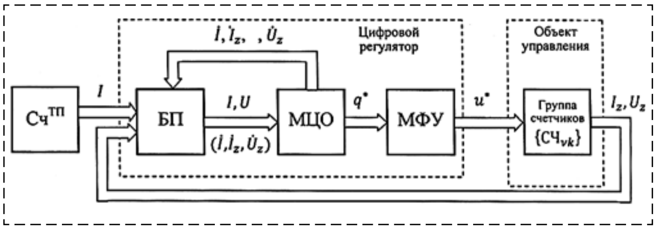


Рис. 2. Структура цифровой системы управления

ят из соответствующих модулей (действующих значений) комплексных переменных (токов, направлений) на входах фаз и нагрузках сети, определяемых формулой (3), с большой частотой измеряются счетчиками электроэнергии ($\{Сч_{vk}\}$, $Сч^{ТП}$), установленными у абонентов сети и в трансформаторной подстанции, и подаются на вход цифрового регулятора. Последний включает блок памяти (БП), программные модули цифровой обработки и оптимизации (МЦО) и формирования управляющих сигналов (МФУ). В БП хранятся данные, полученные со счетчиков электроэнергии, а также составляющие комплексных переменных, описывающих состояния электроприемников и выходов ТП. МЦО обеспечивает выполнение следующих основных функций: построение моделей нагрузок; определение пары фаз для переключения нагрузок; формирование целевой функции $E(\mathbf{q}_m)$; анализ соотношения (15); решение экстремальной задачи (16).

На основе полученных результатов МФУ формирует управляющий сигнал u^*, который передается по каналам связи на соответствующий счетчик электроэнергии ($Сч_{m^*k}$) выбранного электроприемника и через его переключающий элемент ($ПЭ_{m^*k}$) реализует соответствующую операцию переключения. При этом, по существу, будет обеспечиваться квазиоптимальность режима работы РЭС. Построенную таким образом систему управления можно рассматривать как систему с переменной структурой, так как при этом будет обеспечиваться адаптация распределенной трехфазной сети к условиям, которые возникают при неконтролируемых случайных изменениях ее нагрузок путем автоматической самонастройки структуры РЭС в режиме реального времени. Техническая и программная реализация синтезированного цифрового регулятора осуществляется на основе микропроцессорного контроллера в составе концентратора данных.

Заключение

Предложен подход к решению задачи симметрирования распределенной трехфазной распределительной сети, что эквивалентно оптимизации режима ее работы. Разработана процедура синтеза цифрового регулятора, обеспечивающего снижение уровня несимметрии фазных токов на основе управления потоками электроэнергии между фазами сети в режиме реального времени, что осуществляется путем переключения однофазных электроприемников с более нагруженной фазы на менее нагруженную. Качество процессов регулирования оценивается целевой функцией, характеризующей потери активной мощности в распределенной сети из-за фактора несимметричности. Получено условие, выполнение которого гарантированным образом обеспечивает уменьшение значения выбранного показателя эффективности системы. Процедура синтеза регулятора основана на идентификации модели нагрузок и минимизации критериальной функции. Использование результатов синтеза регулятора дает возможность вместо традиционных АИИС КУЭ, относящихся к классу информационно-измерительных систем, построить информационно-управляющие системы, ориентированные на повышение эффективности распределительных сетей, а также технико-экономических показателей распределительных компаний.

Список литературы

1. **Демирчян К. С., Нейман Л. Р., Коровкин А. В.** Теоретические основы электротехники. Т. 1. СПб.: Питер, 2009. 512 с.

2. **Железко Ю. С.** Потери электроэнергии. Реактивная мощность. Качество электроэнергии. М.: ЭНАС, 2009. 456 с.

3. **Пономаренко О. И., Холиддинов И. Х.** Влияние несимметричных режимов на потери мощности в электрических сетях распределенных систем электроснабжения // Энергетик. 2015. № 12. С. 6—8.

4. **Авербух М. А., Жилин Е. В.** О потерях электроэнергии в системах электроснабжения индивидуального жилищного строительства // Энергетик. 2016. № 6. С. 54—56.

5. **Косоухов Ф. Д., Васильев Н. В., Филиппов А. О.** Снижение потерь от несимметрии токов и повышение качества электрической энергии в сетях 0,38 кВ с коммунально-бытовыми нагрузками // Электротехника. 2014. № 6. С. 8—12.

6. **Патент** № 2548656 (РФ). Самокиш В. В. Способ симметрирования фазных токов трехфазной четырехпроводной линии и устройство для его осуществления // Бюлл. № 11. 27.12.2013.

7. **Патент** № 2249286 (РФ). Г. А. Большанин. Способ автоматизированного активного контроля уровня несимметрии напряжений и токов // Бюлл. № 9. 27.03.2005.

8. **Патент** № 2490768 (РФ). И. В. Наумов, Д. А. Иванов, С. В. Подъячих, Гантулга Дамдинсурэн. Симметрирующее устройство для трехфазных сетей с нулевым проводом // Бюлл. № 23. 20.08.2013.

9. **Оморов Т. Т., Такырбашев Б. К.** К проблеме оптимизации несимметричных режимов работы распределительных сетей // Приборы и системы: управление, контроль, диагностика. 2016. № 6. С. 11—15.

10. URL: www.ackye.ru/activities/schetchiki-elektrojenergii-askue/

11. **Оморов Т. Т., Такырбашев Б. К.** Идентификация состояния распределительной электрической сети в системах автома-

тизации учета и управления энергопотреблением // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. № 10. С. 651—656.

12. **Солдатов А. А.** Система контроля и диагностики оборудования подстанционных информационно-измерительных комплексов учета электроэнергии. Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2016. № 6. С. 1—7.

13. **Оморов Т. Т., Такырбашев Б. К., Осмонова Р. Ч.** Диагностика состояний электрических линий распределительных сетей в составе АСКУЭ // Контроль. Диагностика. 2017. № 5. С. 44—48.

14. **Оморов Т. Т., Такырбашев Б. К., Осмонова Р. Ч.** К проблеме моделирования несимметричных распределительных электрических сетей в составе АСКУЭ // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер. "Энергетика". 2017. № 1. С. 21—28.

Balancing of the Distributed Electrical Network by Method of Digital Regulation

T. T. Omorov, omorovtt@mail.ru,
National Academy of Science of the Kyrgyz Republic, Bishkek, 720071, Kyrgyzstan,

Corresponding author: **Omorov T. T.,** corresponding-member of the NAS KR
doctor of technical Sciences, Head of the laboratory of the NAS KR,
Bishkek, 720071, Kyrgyzstan, e-mail: omorovtt@mail.ru

Accepted on November 17, 2017

A three-phase distribution electrical network operating in an asymmetric mode is considered. As is known, the factor of asymmetry of phase currents leads to significant losses of active power in the network and transformer substations, as well as to the failure of household appliances and industrial installations. For the symmetry of distributed networks, a number of technologies have been proposed that have not found wide practical application because of their complexity and insufficient efficiency. In the traditional automated information and measuring systems of commercial electricity metering, the functions of data collection from a group of electricity meters installed at the network subscribers are realized, and, in general, the tasks of commercial metering of electricity are being solved. At the same time, in these systems, the optimization of the operating modes of distribution networks is not carried out. One of the possible approaches to solving the problem of balancing a three-phase network based on controlling the flow of electricity between the phases of the network is by switching single-phase electric receivers from a more loaded phase to a less loaded one. The implementation of this approach is implemented by introducing into the structure of the existing automated informative electric power accounting system an additional control subsystem — a digital controller that performs the functions of generating the appropriate control signals for switching electronic meters of electricity connected to the loads of the distribution network. The quality of control processes is evaluated by the objective (criterial) function, which characterizes the loss of active power in the network due to the asymmetry factor. A condition is obtained, the fulfillment of which guarantees the reduction of the value of the chosen indicator of system efficiency in a guaranteed way. A procedure for synthesizing a digital regulator has been developed that provides a reduction in the level of unbalance of phase currents based on the identification of the network load model and minimization of the selected criterial function. The obtained results make it possible to build information and control systems in place of the traditional automated informative electric power accounting systems, which are related to the class of information and measurement systems, which allow increasing the technical and economic performance of distribution companies.

Keywords: *three-phase network, unbalanced mode, switching element, synthesis of a digital controller*

For citation:

Omorov T. T. Balancing of the distributed electrical network by method of digital regulation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 3, pp. 194—200.

DOI: 10.17587/mau.19.194-200

References

1. **Demirchjan K. S., Nejman L. R., Korovkin A. V.** *Teoreticheskie osnovy elektrotehniki* (Theoretical foundations of electrical engineering), vol. 1. SPb., Piter, 2009, 512 p. (in Russian).

2. **Zhelezko Ju. S.** *Poteri jelektrojenergii. Reaktivnaja moshhnost'. Kachestvo elektrojenergii* (Power loss. Reactive power'. Power quality), Moscow, JeNAS, 2009, 456 p. (in Russian).

3. **Ponomarenko O. I., Holiddinov I. H.** *Vliyanie nesimmetrichnyh rezhimov na poteri moshchnosti v elektricheskih setyah raspredelennyh sistem ehlektrosnabzheniya* (Influence of the asymmetrical modes on losses of power in electrical networks of the distributed systems of power supply), *Energetik*, 2015, no. 12, pp. 6—8 (in Russian).

4. **Averbuh M. A., Zhilin E. V.** *O poteryah elektroehnergii v sistemah elektrosnabzheniya individual'nogo zhilishchnogo stroitel'stva* (About losses of the electric power in systems of power supply of individual housing construction), *Energetik*, 2016, no. 6, pp. 54—57 (in Russian).

5. **Kosouhov F. D., Vasil'ev N. V., Filippov A. O.** *Snizhenie poter' ot nesimmetrii tokov i povyshenie kachestva elektricheskoj energii v setyah 0,38 kV s kommunal'no-bytovymi nagruzkami* (Decrease in losses from asymmetry of currents and improvement of quality of electric energy in networks of 0,38 kV with household loadings), *Elektrotekhnika*, 2014, no. 6, pp. 8—12 (in Russian).

6. **Pat.** № 2548656 (RF). Samokish V. V. *Sposob simmetrirovaniya faznyh tokov trekhfaznoj chetyrekhprovodnoj linii i ustrojstvo dlya ego osushchestvleniya* (Way of balancing of phase currents of the three-phase four-wire line and the device for his implementation), Byull. № 11, 27.12.2013 (in Russian).

7. **Pat.** № 2249286 (RF). G. A. Bol'shanin. *Sposob avtomatizirovannogo aktivnogo kontrolya urovnya nesimmetrii napryazhenij i tokov* (Way of the automated active control of level of asymmetry of tension and currents|), Byull. № 9, 27.03.2005 (in Russian).

8. **Pat.** № 2490768 (RF). I. V. Naumov, D. A. Ivanov, S. V. Pod"yachih, Gantulga Damdinsurehn. Simmetriruyushchee ustrojstvo dlya trekhfaznyh setej s nulevym provodom (The symmetrizing device for three-phase networks with a zero wire), Byull. № 23, 20.08.2013 (in Russian).

9. **Omorov T. T., Takyrbashev B. K.** To a problem of optimization of asymmetrical working hours of distributive networks, *Devices and systems: Management, Control, Diagnostics*, 2016, no. 6, pp. 11—15.

10. **Available** at: www.ackye.ru/activities/schetchiki-elektroenergii-askue/

11. **Omorov T. T., Takyrbashev B. K.** *Identifikatsiya sostoyaniya raspredelitel'noi elektricheskoi seti v sistemakh avtomatizatsii ucheta i upravleniya energopotrebleniem* (Identification of the State of the Distributive Electrical Network in the Automated Systems of Accounting and Management of the Power Consumption), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, no. 10, pp. 651—656 (in Russian).

12. **Soldatov A.** *Sistema controlya Ii diagnostiky oborudovaniya podstanzionnyh informazionno-izmeritelnyh kompleksov ucheta electroenergii* (The system of control and diagnostics of the equipment of substation information-measuring complexes of the account of the electric power), *Devices and systems: Management, control, diagnostics*, 2016, no. 1, pp. 1—7 (in Russian).

13. **Omorov T. T., Osmonova R. Ch., Takyrbashev B. K.** *Diagnostika sostoyanij ehlektricheskih linij raspredelitel'nyh setej v sostave ASKUEH* (Diagnostics of conditions of distributive networks electric lines as a part of ACSKAE), *Kontrol. Diagnostika*. 2017, no. 5, pp. 44—48 (in Russian).

14. **Omorov T. T., Takyrbashev B. K., Osmonova R. Ch.** *K probleme modelirovaniya nesimmetrichnyh raspredelitel'nyh elektricheskih setej v sostave ASKUE* (On modelling unbalanced distributive networks incorporated in ASCAE), *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Energetika*, 2017, no. 1, pp. 21—28 (in Russian).

УДК 629.73.018.7 DOI: 10.17587/mau.19.201-208

О. Н. Корсун, д-р техн. наук, проф., marmotto@rambler.ru,
А. В. Стуловский, инженер, avstlv2@gmail.com,
Государственный НИИ авиационных систем, г. Москва,
А. В. Канышев, нач. отд., astra_kanysheva@mail.ru,
Государственный летно-испытательный центр им В. П. Чкалова, г. Ахтубинск

Идентификация моделей гистерезиса аэродинамических коэффициентов на закритических углах атаки[1]

Рассмотрена проблема идентификации математической модели движения самолетов на закритических углах атаки по данным летного эксперимента. Характерной особенностью динамики самолета в этом диапазоне углов атаки является возникновение гистерезиса аэродинамических коэффициентов. Предложены алгоритмы получения оценок коэффициентов подъемной силы, силы сопротивления, коэффициента момента тангажа по данным летного эксперимента. Рассмотрена математическая модель гистерезиса коэффициента подъемной силы, выполнена идентификация параметров этой модели по полетным данным. Для описания гистерезисов коэффициентов силы сопротивления и момента тангажа предложены модели, выражающие эти параметры через гистерезис коэффициента подъемной силы. Приводятся примеры обработки полетных данных современного маневренного самолета, подтверждающие работоспособность рассмотренных моделей и алгоритмов.

Ключевые слова: *летные испытания, идентификация аэродинамических коэффициентов, аэродинамический гистерезис, отклоняемый вектор тяги, закритические углы атаки, сверхманевренность*

Введение

В настоящее время маневренные самолеты, оснащенные системой отклоняемого вектора тяги (ОВТ), способны выполнять управляемый полет вне традиционного диапазона эксплуатационных углов атаки, т. е. при значениях углов атаки, существенно превышающих критические. Хорошо известно [1, 2], что при этом аэродинамические процессы принципиально изменяются по сравнению с традиционной эксплуатационной областью. Известно также, что погрешности методов расчетной аэродинамики и трубного эксперимента для этих режимов значительно возрастают в силу существенно нелинейного и нестационарного характера обтекания. Поэтому актуальной является проблема проверки и уточнения аэродинамических коэффициентов по результатам летных экспериментов методами идентификации систем. Очевидно [1—3], что согласованная с полетными данными модель динамики самолета необходима при разработке, модернизации, испытаниях, создании тренажеров, расследовании летных происшествий, т. е. на всех основных этапах жизненного цикла.

Важнейшей особенностью закритических режимов является присутствие гистерезиса в зависимостях аэродинамических коэффициентов от угла атаки. Это явление обусловлено тем, что в закритической области отрыв потока при возрастании угла атаки и восстановление потока при последующем уменьшении угла атаки происходят несимметрично. Указанный эффект имеет место даже при весьма малых значениях производной угла атаки по времени, вследствие чего его называют стационарным гистерезисом [2].

В данной статье предлагаются алгоритмы получения оценок коэффициентов подъемной силы, силы сопротивления, коэффициента момента тангажа непосредственно по данным летного эксперимента. Рассмотрена математическая модель гистерезиса коэффициента подъемной силы, выполнена идентификация ее параметров. Для описания гистерезисов коэффициентов силы сопротивления и момента тангажа предложены выражения, позволяющие вычислить эти параметры через гистерезис подъемной силы и коэффициенты, аналогичные известным из аэродинамики и динамики полета коэффициен-

[1] Работа поддержана РФФИ, проект 17-08-00856-а.

там аэродинамического качества и запасу статической устойчивости по перегрузке [1—3].

1. Получение оценок аэродинамических коэффициентов на закритических углах атаки по данным натурных экспериментов

В области создания методов оценивания аэродинамических характеристик самолетов по данным летных экспериментов на основе теории идентификации систем к настоящему времени получен значительный задел [3—5]. Главным образом он относится к традиционному эксплуатационному диапазону углов атаки [6—11]. Следует отметить, что опыт идентификации на больших докритических углах атаки [12—14] в определенной степени может быть распространен и на закритическую область, как это показано, например, в статье [15]. Кроме того, модели аэродинамического гистерезиса рассматривались в работах [2, 16—18]. Авторы работ [2, 16] подчеркивали, что интерес к разработке математических моделей гистерезиса на закритических углах атаки был вызван появлением фигуры "кобра Пугачева", при выполнении которой маневренный самолет, не имеющий отклоняемого вектора тяги, кратковременно выходил в область закритических углов атаки, несмотря на серьезные ограничения по управляемости [2].

В настоящем разделе предложены алгоритмы непосредственного получения из летного эксперимента оценок коэффициентов подъемной силы, силы сопротивления, момента тангажа в функции угла атаки. До начала обработки полетных данных необходимо скорректировать погрешности бортовых измерений, которые в закритической области могут существенно увеличиться, и предусмотреть учет сил и моментов, создаваемых отклоняемым вектором тяги. Пути решения этих задач подробно изложены в работе [15]. Далее расчет оценок аэродинамических коэффициентов подъемной силы и сопротивления для дискретных моментов времени выполняется по следующим формулам:

$$c_{ye}(t_i) = \frac{(n_y(t_i)\,m\,g - P_y(t_i))\cos(\alpha(t_i) + \varphi_{\text{дв}}) + (n_x(t_i)\,m\,g - P_x(t_i))\sin(\alpha(t_i) + \varphi_{\text{дв}})}{q\,S}; \quad (1)$$

$$c_{xe}(t_i) = -\frac{(P_y(t_i) - n_y(t_i)\,m\,g)\sin(\alpha(t_i) + \varphi_{\text{дв}}) + (n_x(t_i)\,m\,g - P_x(t_i))\cos(\alpha(t_i) + \varphi_{\text{дв}})}{q\,S}, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, ..., N.$$

В выражениях (1), (2) используются следующие обозначения:

c_{ye}, c_{xe} — оценки аэродинамических коэффициентов подъемной силы и сопротивления;

N — число точек на участке обработки;

α — угол атаки, рад;

m — масса самолета, кг;

S — эквивалентная площадь крыла, м^2;

$q = \rho_H V^2/2$ — скоростной напор, Па;

ρ_H — плотность воздуха на высоте полета, кг/м^3;

V — истинная воздушная скорость полета, м/с;

n_x, n_y — перегрузки вдоль осей связанной системы координат;

P_x, P_y — проекции силы тяги двигателя на оси связанной системы координат, Н;

$\varphi_{\text{дв}}$ — угол между осью симметрии выходного устройства двигателя и осью Ox связанной системы координат, рад.

Угол $\varphi_{\text{дв}}$ рассчитывается с учетом угла установки двигателя и отклонения сопел двигателя, имеющих место на закритических углах атаки. Проекции силы тяги, генерируемые в результате такого отклонения сопел, вычислялись с помощью модели сил и моментов, создаваемых двигателем [15].

На рис. 1 оценки коэффициентов подъемной силы и сопротивления, полученные для одного участка полета современного маневренного самолета, представлены в зависимости от угла атаки. На рис. 1 хорошо видно, что в традиционном эксплуатационном диапазоне эти зависимости являются однозначными функциями, и гистерезис возникает только при углах атаки свыше 26°, т. е. в околокритической и закритической областях.

Другим коэффициентом, относительно которого разрешалась поставленная задача, явился коэффициент момента тангажа. Значения соответствующего коэффициента находились по формуле

$$m_z(t_i) = \left(\frac{J_z}{q\,S\,b_a}\right)\left(\frac{d\omega_z(t_i)}{dt} - \frac{J_x - J_y}{J_z}\omega_x(t_i)\omega_y(t_i)\right), \quad (3)$$

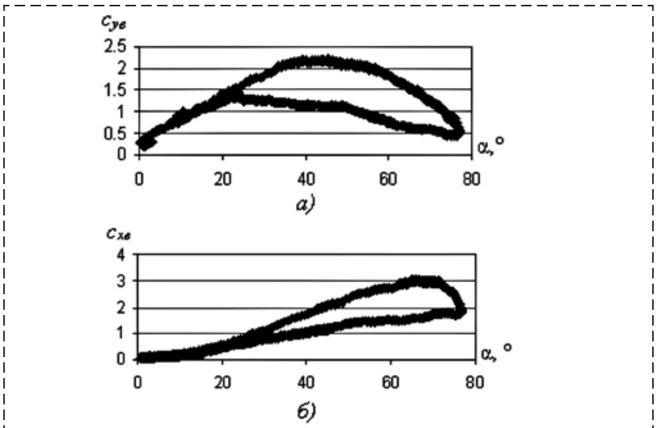


Рис. 1. Зависимость значений коэффициентов подъемной силы (*а*) и силы сопротивления (*б*) от угла атаки

где b_a — длина аэродинамической хорды, м; J_x, J_y, J_z — моменты инерции относительно осей связанной системы, кг·м^2; ω_x, ω_y, ω_z — угловые скорости относительно осей связанной системы, рад/с.

В выражении (3) производная угловой скорости тангажа по времени рассчитывается численно по формулам, приведенным в работе [1], которые хорошо себя зарекомендовали при обработке данных летных испытаний.

Затем полученное значение коэффициента момента тангажа представляется в виде суммы трех компонент:

$$m_z(t_i) = m_z(\alpha, t_i) + m_z(P, t_i) + m_z(\varphi, t_i), \qquad (4)$$

где $m_z(P, t_i)$ — компонента коэффициента момента тангажа, определяемая отклонением вектора тяги двигателя; $m_z(\varphi, t_i)$ — компонента коэффициента момента тангажа, определяемая отклонением стабилизаторов.

Для получения оценок составляющей $m_z(\alpha, t_i)$ коэффициента момента тангажа, зависящей только от угла атаки, из полученной величины $m_z(t_i)$ исключается вклад тяги двигателя $m_z(P, t_i)$, получаемый по модели, рассмотренной в работе [15]. Вклад стабилизаторов $m_z(\varphi, t_i)$ в создание момента находится после этого с помощью регрессии и также исключается. Далее строится график оценок $m_z(\alpha, t_i)$, рассчитанных по формулам (3)—(4), в функции значений угла атаки $\alpha(t_i)$, что позволяет получить оценку зависимости $m_z(\alpha)$. Описанные выше операции при обработке одного из участков полета позволяют построить график, изображенный на рис. 2.

При получении оценки, показанной на рис. 2, классические нестационарные вращательные производные коэффициента момента тангажа по угловым скоростям тангажа и угла атаки не использовались в силу малого вклада этих компонент в конечный результат. Это допущение было подтверждено путем расчета этих составляющих по банку аэродинамических характеристик самолета и подстановки их в формулу (4), которая в этом случае принимала вид

$$m_z(t_i) = m_z(\alpha, t_i) + m_z(P, t_i) + m_z(\varphi, t_i) +$$
$$+ m_z(\omega_z, t_i) + m_z(d\alpha/dt, t_i),$$

где $m_z(\omega_z, t_i)$, $m_z(d\alpha/dt, t_i)$ — компоненты коэффициента момента тангажа, создаваемые угловыми скоростями тангажа и угла атаки.

При использовании модифицированной формулы для обработки того же полетного участка, график, показанный на рис. 2, практически не изменился.

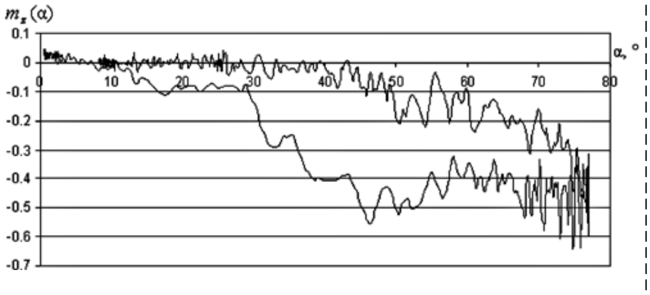


Рис. 2. Зависимость коэффициента момента тангажа от угла атаки

2. Математическая модель аэродинамического гистерезиса коэффициента подъемной силы

Алгоритмы предыдущего раздела позволяют найти по данным натурного эксперимента для отдельного участка оценки коэффициентов подъемной силы, силы сопротивления, момента тангажа в области закритических углов атаки. Однако значительный интерес представляет задача формирования математических моделей, описывающих полученные результаты.

Такая модель для гистерезиса коэффициента подъемной силы была предложена в работах [2, 16] и обсуждалась в работах [13, 17, 18]. Для описания гистерезиса вводится дополнительная величина $\bar{x}$ — координата, характеризующая положение точки отрыва потока на хорде профиля. Эта величина измеряется в долях хорды. Соответственно, $\bar{x}$ принимает значения от 0 до 1. Сама модель представляет собой систему двух уравнений [18]:

$$\begin{aligned} c_{ye}(\alpha) &= C_{y0}(\alpha)\left(\frac{1+\sqrt{\bar{x}}}{2}\right)^2; \\ \tau_1 \frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{x} &= x_0(\alpha), \quad \bar{x}(0) = 1, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $C_{y0}(\alpha)$ — оценка значений коэффициента в функции угла атаки, не принимающая в расчет гистерезис; $\tau_1 = \text{const}$ — параметр модели; $x_0(\alpha)$ — статическая зависимость координаты срыва потока от угла атаки.

Именно введение точки отрыва потока позволяет описать несимметричность его восстановления и срыва. Из вида записи (5) понятно, что для практической реализации модель нуждается в уточнении.

Требуется выбрать способ задания функции $x_0(\alpha)$. В соответствии с [18] функция $x_0(\alpha)$ имеет вид

$$x_0(\alpha) = 0,5\{1 - \text{th}[\lambda(\alpha - \tau_2 d\alpha/dt - \alpha^*)]\}.$$

Поэтому дифференциальное уравнение для $\bar{x}$ примет следующий вид:

$$\tau_1 \frac{d\bar{x}}{dt} + \bar{x} = 0{,}5\{1 - \text{th}[\lambda(\alpha - \tau_2 d\alpha/dt - \alpha^*)]\}, \quad (6)$$

где $d\alpha/dt$ — производная угла атаки по времени, рад/с; τ_1, τ_2, α^*, λ — параметры уравнения, значения которых определяются характеристиками аэродинамического профиля и конфигурацией крыла, а также динамикой процесса нестационарного обтекания.

Эти параметры наделяются следующим физическим смыслом [18]. Рассматривается положение точки отрыва потока в установившемся состоянии. Тогда в выражении (6) $\frac{d\bar{x}}{dt}$ и $\dot{\alpha}$ обращаются в ноль. В этом случае

$$\bar{x}_{\text{уст}} = 0{,}5\{1 - \text{th}[\lambda(\alpha - \alpha^*)]\}.$$

Рассмотрев это выражение, можно прийти к выводу, что α^* — угол атаки, характеризующий такое состояние потока в установившемся режиме обтекания, при котором точка срыва потока расположена от носка хорды на относительном расстоянии $\bar{x} = 0{,}5$.

Таким образом, параметры α^* и λ определяют обтекание поверхности в установившемся состоянии, а постоянные времени τ_1 и τ_2 характеризуют динамические свойства процесса.

Теперь остается только определить зависимость $C_{y0}(\alpha)$. Методике ее расчета посвящен следующий раздел статьи.

3. Опорная кривая

При рассмотрении системы (5) становится понятным физический смысл величины $C_{y0}(\alpha)$. Действительно, с точки зрения построения модели $C_{y0}(\alpha)$ служит опорной кривой, из которой искомые значения $c_{ye}(\alpha)$ получаются посредством добавления возмущения, определяемого величиной $\bar{x}$.

Рассматривались различные способы выбора соответствующей кривой. Первоначально планировалось использовать полиномы второго или третьего порядка, коэффициенты которых находились регрессионными методами. К сожалению, в данной задаче такой подход натолкнулся на ограниченность форм, которые можно придать полиномам изменением их коэффициентов.

Поэтому было решено перейти к более общему способу задания кривой, а именно, к сплайнам. Кратко приведем здесь формулы примененных эрмитовых кубических сплайнов [19]. Пусть на некотором интервале $x \in [x_1, x_M]$ заданы M значений x_j, $j = 1, 2, ..., M$, которые называются узлами сплайна. Тогда для точки x из отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ значение сплайна рассчитывается по формуле

$$S(x) = \varphi_1(t) f_i + \varphi_2(t) f_{i+1} + \varphi_3(t) h_i f_i' + \varphi_4(t) h_i f_{i+1}',$$

причем

$$\varphi_1(t) = (1-t)^2(1+2t), \quad \varphi_2(t) = t^2(3-2t),$$
$$\varphi_3(t) = t(1-t)^2, \quad \varphi_4(t) = -t^2(1-t),$$
$$h_i = x_{i+1} - x_i, \quad t = (x - x_i)/h_i.$$

Значения коэффициентов $f_i, f_{i+1}, f_i', f_{i+1}'$ могут быть определены, например, с помощью линейной регрессии.

Первоначально предполагалось, что модель сможет подобрать наиболее точные коэффициенты и добиться лучшего соответствия, если опорная кривая, или образующая, будет проходить примерно в центре наблюдаемой в расчетах петли гистерезиса (как это показано на рис. 3).

Однако проведенное тестирование показало, что модель учитывает только ветвь гистерезиса, проходящую ниже образующей (рис. 4), причем параметры модели варьировались в весьма широких пределах и на рисунке показан самый лучший результат.

Поэтому было принято решение взять в качестве образующей сплайн, получаемый с использованием только тех точек, которые входят в верхнюю ветвь петли гистерезиса. Пример такой образующей приводится на рис. 5.

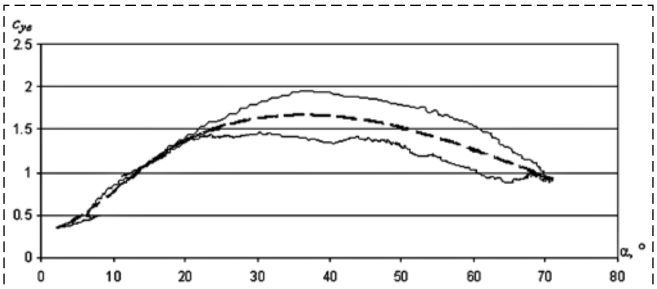


Рис. 3. Зависимость значений коэффициента подъемной силы от угла атаки (сплошная линия) и аппроксимирующий эти значения сплайн (штриховая линия)

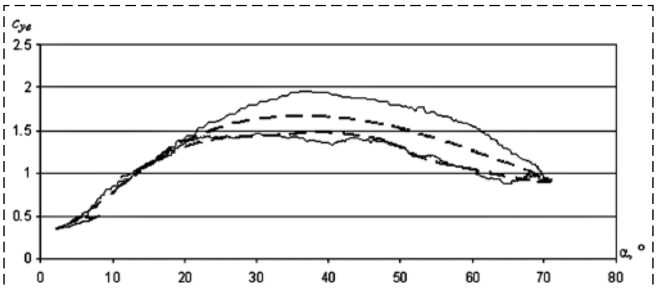


Рис. 4. Зависимость значений коэффициента подъемной силы от угла атаки, получаемая с помощью модели (5)—(6) (штриховая линия) и рассчитанная по полетным данным зависимость (сплошная линия)

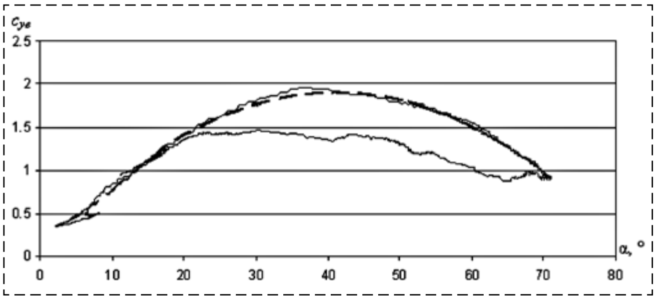


Рис. 5. Зависимость значений коэффициента подъемной силы от угла атаки (сплошная линяя) и значений сплайна, построенного по верхней ветви гистерезиса (штриховая линия)

После того как получена опорная кривая, модель (5)—(6) для вычисления коэффициента $c_{ye}(\alpha)$ определена с точностью до неизвестных параметров τ_1, τ_2, α^*, λ, оценки которых найдем с помощью идентификации. Минимизируемый функционал на каждом участке обработки сформируем как сумму квадратов рассогласований между коэффициентом $c_{ye}(\alpha)$, вычисленным по модели (5)—(6), и непосредственными оценками коэффициента подъемной силы, рассчитанным по формуле (1). В связи с малым числом параметров и низкой вычислительной сложностью задачи поиск оптимального решения можно осуществить методом перебора. Пример петли гистерезиса, построенной с помощью модели (5)—(6), приводится на рис. 6.

Указанная процедура параметрической идентификации была применена для четырех участков полета продолжительностью примерно от 36 до 53 с. На каждом из них самолет выходил на закритические углы атаки, а затем возвращался в эксплуатационный диапазон. Маневр выполняется по высоте в пределах от 4,5 до 7,5 км, для значений числа Маха от 0,2 до 0,6.

Осреднение полученных оценок параметров τ_1, τ_2, α^*, λ позволило получить обобщенную модель, достаточно хорошо аппроксимирующую коэффициент подъемной силы на всех рассмотренных участках.

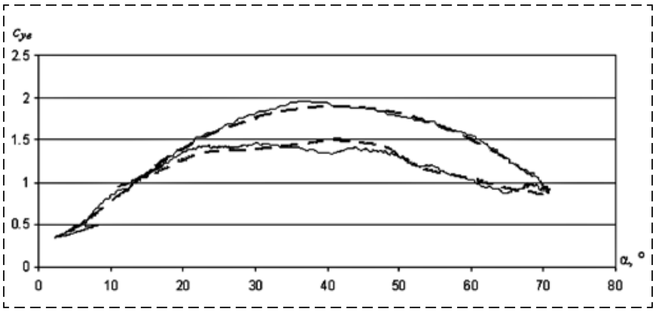


Рис. 6. Зависимость значений коэффициента подъемной силы от угла атаки, получаемая с помощью модели (5)—(6) (штриховая линия) и рассчитанная по полетным данным (сплошная линия)

4. Коэффициенты силы сопротивления и момента тангажа

Результаты предыдущего раздела показали, что модель гистерезиса (5)—(6) может успешно применяться для описания коэффициента подъемной силы в области закритических углов атаки. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть возможность ее использования для расчета коэффициентов силы сопротивления и момента тангажа.

Пробный эксперимент для коэффициента силы сопротивления дал положительные результаты, сопоставимые по точности аппроксимации с графиком на рис. 6.

Основной недостаток такого подхода следует из схемы его получения — применение модели, построенной для другого, хотя и математически похожего процесса. Следствием этого оказывается отсутствие ясной физической интерпретации параметров модели. Кроме того, представляется нерациональным создавать отдельную модель гистерезиса для каждого коэффициента.

Поэтому в настоящей статье предлагаются модели, определяющие коэффициенты силы сопротивления и момента тангажа через модель гистерезиса коэффициента подъемной силы. Для этого предлагается использовать такие известные в аэродинамике и в динамике полета параметры, как коэффициент аэродинамического качества и запас статической устойчивости.

Напомним, что коэффициент аэродинамического качества для заданной полетной конфигурации и числа М полета в общем случае зависит от угла атаки и выражается формулой

$$K_x(\alpha) = \frac{c_{ye}(\alpha)}{c_{xe}(\alpha)}. \qquad (7)$$

При анализе результатов обработки для всех рассмотренных участков полета было установлено, что вычисленные по формуле (7) значения коэффициента аэродинамического качества демонстрируют весьма высокую степень совпадения, прежде всего в интересующей нас области закритических углов атаки (рис. 7, см. третью сторону обложки).

Для получения осредненной оценки удобно использовать, например, эрмитов сплайн, коэффициенты которого определяются методом множественной регрессии.

Оценки коэффициента силы сопротивления находятся по формуле

$$c_{xe}(\alpha) = c_{ye}(\alpha)/\widehat{K}_x(\alpha), \qquad (8)$$

где $\widehat{K}_x(\alpha)$ — оценка коэффициента аэродинамического качества, полученная осреднением

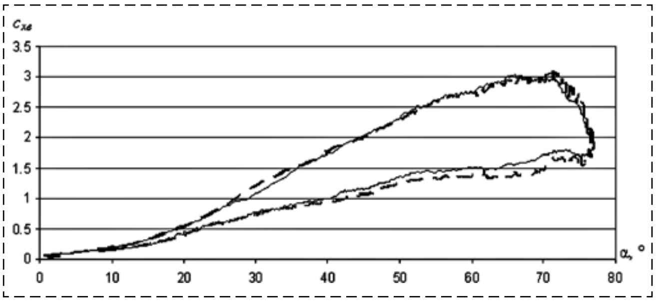


Рис. 8. Значения c_{xe}, рассчитанные по формуле (8) (штриховая линия) и вычисленные из полетных данных по формуле (2) (сплошная линия)

по нескольким однотипным участкам полета; $c_{ye}(\alpha)$ — значение коэффициента подъемной силы, полученного с помощью модели (5)—(6).

Сопоставление значений коэффициента силы сопротивления, полученных вышеуказанным методом и вычисленных из полетных данных по формуле (2) для одного из участков полета, приводится на рис. 8. Высокая степень соответствия подтверждает работоспособность предложенного подхода.

При анализе устойчивости продольного движения широко используется запас статической устойчивости по перегрузке [1—3], при вычислении которого основным элементом является отношение приращения коэффициента момента тангажа к приращению коэффициента подъемной силы, что по физическому смыслу соответствует плечу действия силы.

Это позволяет для вычисления оценок коэффициента момента тангажа предложить формулу, аналогичную (8):

$$m_z(\alpha) = c_{ye}(\alpha)\widehat{K}_\nu(\alpha), \tag{9}$$

где $\widehat{K}_\nu(\alpha)$ — оценка коэффициента преобразования, осредненная по нескольким участкам полета.

Для осреднения также предлагается использовать эрмитов сплайн и множественную регрессию.

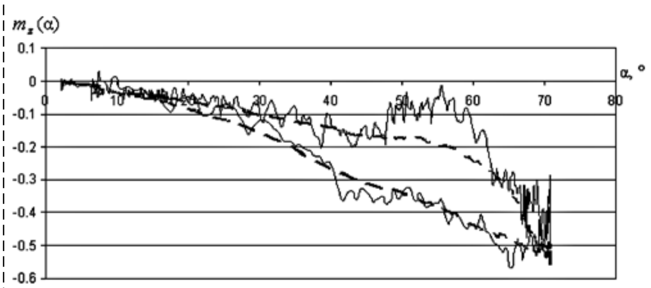


Рис. 10. Значения коэффициента момента тангажа, рассчитанные по формуле (9) (штриховая линия) и вычисленных из полетных данных (сплошная линия) по формулам (3)—(4)

Оценки коэффициента $K_\nu(\alpha) = m_z(\alpha)/c_{ye}(\alpha)$, вычисленные для четырех участков полета, показаны на рис. 9 (см. третью сторону обложки).

Здесь, как и в случае с оценками коэффициента аэродинамического качества, имеет место высокая степень согласованности между различными участками полета. На рис. 10 представлены оценки коэффициента момента тангажа, рассчитанные описанным выше способом по формуле (9), и оценки, непосредственно полученные из летного эксперимента по формулам (3)—(4). Как видим, степень соответствия остается достаточно хорошей, хотя и уступает результату для коэффициента силы сопротивления (см. рис. 9).

Заключение

В статье излагается методика идентификации аэродинамических коэффициентов подъемной силы, силы сопротивления, момента тангажа по данным летных испытаний в области закритических углов атаки.

Рассмотрена математическая модель аэродинамического гистерезиса, подтверждено ее соответствие полетным данным.

Предложены модели для расчета аэродинамических гистерезисов коэффициентов силы сопротивления и момента тангажа через гистерезис коэффициента подъемной силы и экспериментально определяемые коэффициенты преобразования, аналогичные коэффициенту аэродинамического качества и запасу статической устойчивости по перегрузке.

Работоспособность предложенных методик идентификации подтверждена примерами обработки полетных данных на закритических углах атаки.

Список литературы

1. **Васильченко К. К., Леонов В. А., Пашковский И. М., Поплавский Б. К.** Летные испытания самолетов. М.: Машиностроение, 1996. 745 с.

2. **Аэродинамика**, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / Под ред. Г. С. Бюшгенса. М.: Наука. Физмалит, 1998. 816 с.

3. **Белоцерковский С. М., Качанов Б. О., Кулифеев Ю. Б., Морозов В. И.** Создание и применение математических моделей самолетов. М.: Наука, 1984. 143 с.

4. **Klein V., Morelli E. A.** Aircraft system identification: Theory and Practice. USA, Reston: AIAA, 2006. 499 p.

5. **Korsun O. N., Poplavsky B. K.** Approaches for flight tests aircraft parameter identification // 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS 2014. St. Petersburg. Russian Federation. 2014. Paper № 2014-0210.

6. **Корсун О. Н., Николаев С. В.** Идентификация аэродинамических коэффициентов самолетов в эксплуатационном диапазоне углов атаки // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2016. № 9. С. 3—10.

7. **Lawrence E. Hale, Mayuresh Patil, and Christopher J. Roy.** Aerodynamic Parameter Identification and Uncertainty Quantification for Small Unmanned Aircraft // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2017. Vol. 40, No. 3. P. 680—691.

8. **Игнатьев Д. И., Храбров А. Н.** Использование искусственных нейронных сетей для моделирования динамических эффектов аэродинамических коэффициентов трансзвукового самолета // Ученые записки ЦАГИ. 2011. Т. XLII, № 6. С. 84—91.

9. **Дорофеев Е. А., Игнатьев Д. И., Храбров А. Н.** Применение искусственных нейронных сетей для моделирования нестационарных аэродинамических характеристик // Труды МФТИ. 2011. Т. 3, № 2. С. 15—25.

10. **Grishin I. I., Ignatyev D. I., Khrabrov A. N., Kolinko K. A., Vinogradov Yu. A., Zhuk A. N.** Experimental investigations and mathematical simulation of unsteady aerodynamic coefficients of Transonic Cruiser at small velocities in the wide range of attack angles // International Online Journal Visualization of Mechanical Processes. 2011. Vol. 1, Iss. 2.

11. **Yongkyu Song, Byungheum Song, Seanor B.** et la On-line aircraft parameter identification using Fourier transform regression with an application to F/A-18 HARV flight data // KSME International Journal. 2002. Vol. 16, N. 3. P. 327—337.

12. **Ericsson L. E.** Critical issues in high-alpha vehicle dynamics. AIAA: Report No. AIAA-91-3221. 1991.

13. **Luchtenburg D. M., Rowley C. M., Lohry M. W., Martinelli L., Stengel R. F.** Unsteady high-angle-of-attack aerodynamic models of a generic jet transport // Journal of Aircraft. 2015. Vol. 52, N. 3. P. 890—895.

14. **Корсун О. Н., Николаев С. В., Поплавский Б. К.** Алгоритмы проверки правильности полетных данных и оценивания нелинейностей при идентификации аэродинамических коэффициентов самолетов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 4. С. 270—278.

15. **Корсун О. Н., Стуловский А. В., Канышев А. В.** Анализ движения самолетов на закритических углах атаки: коррекция погрешностей бортовых измерений и моделирование отклоняемого вектора тяги // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 10. С. 705—711.

16. **Goman M. G., Khrabrov A. N.** State-Space Representation of Aerodynamic Characteristics of an Aircraft at High Angles of Attack, Journal of Aircraft. 1994. Vol. 31, N. 5. P. 1109—1115.

17. **Jategaonkar R. V.** Flight vehicle system identification: A time domain methodology. Reston, USA: AIAA, 2006. 410 p.

18. **Овчаренко В. Н.** Идентификация аэродинамических характеристик воздушных судов по полетным данным. М.: Изд-во МАИ, 2017. 182 с.

19. **Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

Identification of Hysteresis Models for Aerodynamic Coefficients at Overcritical Angles of Attack

O. N. Korsun, marmotto@rambler.ru, **A. V. Stulovsky,** avstlv2@gmail.com,
State Research Institute of aviation systems, Moscow, 125167, Russian Federation,
A. V. Kanyshev, astra_kanysheva@mail.ru,
State Flight Test Center named after V. P. Chkalov, Akhtubinsk, Russian Federation

Corresponding author: **Korsun Oleg N.**, D. Sc., Professor,
State Research Institute of Aviation Systems, Moscow, 125167, Russian Federation,
e-mail: marmotto@rambler.ru

Accepted on October 27, 2017

At present, maneuverable thrust vectored aircraft are capable of performing a controlled flight beyond normal flight envelope, namely, for attack angles significantly exceeding the critical value. It is well known that in this case the aerodynamic processes fundamentally change in comparison with flight at small and average angles of attack. It is also known that the errors in the methods of computational aerodynamics and the wind-tunnel data for overcritical range increase significantly due to the essentially nonlinear and unsteady nature of the flow. Therefore, the problem of validation and estimation of aerodynamic coefficients based on the results of flight tests by methods of system identification is vital. It is obvious that agreement of aircraft dynamics models with the flight data is necessary for the development, modernization, testing, creation of simulators, investigation of flight incidents, i.e. for all the main stages of the aircraft life cycle. One of the most important poststall effects is the emergence of hysteresis in the dependences of the aerodynamic coefficients on the angle of attack. This phenomenon is due to the fact that the flow separation with increasing angle of attack and flow restoration with the subsequent decrease of the angle of attack occur asymmetrically. This effect takes place even for very small values of the derivative of the angle of attack with respect to time, and as a result it is called stationary hysteresis. This article deals with the problems concerning identification of the mathematical model for aircraft motion at the overcritical angles of attack by processing flight test data. Algorithms for obtaining estimates for coefficients of the lift force, the drag force and the pitching moment from the flight test data are proposed. The mathematical model of the hysteresis of the lift coefficient is considered, and its parameters are identified. Furthermore, article presents expressions allowing the calculation of the hysteresis of the drag coefficient and the pitch moment through the hysteresis of the lifting force and the coefficients analogous to the lift-drag ratio and static stability coefficients known from aerodynamics and flight dynamics.

Keywords: *flight tests, identification of aerodynamic coefficients, aerodynamic hysteresis, thrust vectoring, overcritical angles of attack, supermaneuverability*

Acknowledgements: This work is supported by RFBR grant no. 17-08-00856_a.

For citation:

Korsun O. N., Stulovsky A. V., Kanyshev A. V. Identification of Hysteresis Models for Aerodynamic Coefficients at Overcritical Angles of Attack, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 3, pp. 201—208.

DOI: 10.17587/mau.19.201-208

References

1. **Vasil'chenko K. K., Leonov V. A., Pashkovskij I. M., Poplavskij B. K.** Letnye ispytanija samoletov, Moscow, Mashinostroenie, 1996, 745 p. (in Russian).

2. **Bjushgens G. S.** ed. *Ajerodinamika, ustojchivost' i upravljaemost' sverhzvukovyh samoletov* (Aerodynamics, stability and controllability of supersonic aircraft), Moscow, Nauka, 1998, 816 p. (in Russian).

3. **Belocerkovskij S. M., Kachanov B. O., Kulifeev Ju. B., Morozov V. I.** Sozdanie i primenenie matematicheskih modelej samoletov, Moscow, Nauka, 1984, 143 p. (in Russian).

4. **Klein V., Morelli E. A.** Aircraft system identification: Theory and Practice, USA, Reston: AIAA. 2006. 499 p.

5. **Korsun O. N., Poplavsky B. K.** Approaches for flight tests aircraft parameter identification, *29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, ICAS 2014,* St. Petersburg. Russian Federation, 2014, Paper № 2014-0210.

6. **Korsun O. N., Nikolaev S. V.** *Identifikacija ajerodinamicheskih kojefficientov samoleta v jekspluatacionnom diapazone uglov ataki* (Aircraft Aerodynamic Coefficients Identification in the Angle of Attack Operational Range), *Vestnik Komp'juternyh i Informacionnyh Tehnologij*, 2016, no. 9, pp. 3—10 (in Russian).

7. **Hale L. E., Patil M., Roy C. J.** Aerodynamic parameter identification and uncertainty quantification for small unmanned aircraft, *Journal of guidance, control, and dynamics*, 2017, vol. 40, no. 3, pp. 680—691.

8. **Ignat'ev D. I., Hrabrov A. N.** *Ispol'zovanie iskusstvennyh neironnyh setej dlja modelirovanija dinamicheskih jeffektov ajerodinamicheskih kojefficientov transzvukovogo samoleta* (Application of neural networks in the simulation of dynamic effects of canard aircraft aerodynamics), *Uchenye zapiski CAGI*, 2011, vol. XLII, no. 6, pp. 84—91 (in Russian).

9. **Dorofeev E. A., Ignat'ev D. I., Hrabrov A. N.** *Primenenie iskusstvennyh neironnyh setej dlja modelirovanija nestacionarnyh ajerodinamicheskih harakteristik* (Application of neural networks in the simulation of unsteady aerodynamic characteristics), *Trudy MFTI*, 2011, vol. 3, no. 2, pp. 15—25 (in Russian).

10. **Grishin I. I., Ignatyev D. I., Khrabrov A. N., Kolinko K. A., Vinogradov Yu. A., Zhuk A. N.** Experimental investigations and mathematical simulation of unsteady aerodynamic coefficients of Transonic Cruiser at small velocities in the wide range of attack angles, *International Online Journal Visualization of Mechanical Processes*, 2011, vol. 1, iss. 2.

11. **Yongkyu Song, Byungheum Song, Seanor B.** et la Online aircraft parameter identification using Fourier transform regression with an application to F/A-18 HARV flight data, *KSME International Journal*, 2002, vol. 16, no. 3, pp. 327—337.

12. **Ericsson L. E.** Critical issues in high-alpha vehicle dynamics; 1991. AIAA: Report No, AIAA-91-3221.

13. **Luchtenburg D. M., Rowley C. M., Lohry M. W., Martinelli L., Stengel R. F.** Unsteady high-angle-of-attack aerodynamic models of a generic jet transport, *Journal of Aircraft*, 2015, vol. 52, no. 3, pp. 890—895.

14. **Korsun O. N., Nikolaev S. V., Poplavskij B. K.** *Algoritmy proverki pravil'nosti poletnyh dannyh i ocenivanija nelinejnostej pri identifikacii ajerodinamicheskih kojefficientov samoletov* (Algorithms for validation of flight data and the evaluation of nonlinearities of the aerodynamic coefficients of the aircraft), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no.4, pp. 270—278 (in Russian).

15. **Korsun O. N., Stulovskij A. V., Kanyshev A. V.** *Analiz dvizhenija samoletov na zakriticheskih uglah ataki: korrekcia pogreshnostej bortovyh izmerenij i modelirovanie otklonjaemogo vektora tjagi* (Analysis of the aircraft motion at overcritical angles of attack: on-board measurements errors and simulation of thrust vectoring), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 10, pp. 705—711 (in Russian).

16. **Goman M. G., Khrabrov A. N.** State-Space Representation of Aerodynamic Characteristics of an Aircraft at High Angles of Attack, *Journal of Aircraft*, 1994, vol. 31, no. 5, pp. 1109—1115.

17. **Jategaonkar R. V.** Flight vehicle system identification: A time domain methodology, USA, Reston, AIAA, 2006, 410 p.

18. **Ovcharenko V. N.** *Identifikacija ajerodinamicheskih harakteristik vozdushnyh sudov po poletnym dannym* (Identification of aerodynamic characteristics of aircrafts according to flight data), Moscow, Publishing house of MAI, 2017, 182 p. (in Russian).

19. **Zav'jalov Ju. S., Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L.** *Metody splain-funkcyj* (Methods spline functions), Moscow, Nauka, 1980, 352 p. (in Russian).

УДК 629.05 DOI: 10.17587/mau.19.209-216

А. А. Ардашов[1], канд. техн. наук, ст. науч. сотр., ст. преподаватель, avgust.ar.@yandex.ru,
В. Н. Арсеньев[1], д-р техн. наук, проф., проф. каф., vladar56@mail.ru,
Д. С. Силантьев[2], науч. сотр., denissila@mail.ru,
С. Б. Силантьев[1], канд. техн. наук, доц., проф., silantev2008@yandex.ru,
[1] Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург,
[2] НИИ кораблестроения и вооружения ВМФ ВУНЦ ВМФ "Военно-морская академия", Санкт-Петербург

Оценивание точности определения параметров движения летательного аппарата с бесплатформенной инерциальной навигационной системой в инерциальном базисе

Представлена методика решения задачи оценивания погрешностей определения линейных и угловых параметров движения летательного аппарата с бесплатформенной инерциальной навигационной системой в инерциальном базисе. На основе разработанной методики получены числовые значения характеристик точности расчета параметров движения летательного аппарата.

Ключевые слова: *бесплатформенная инерциальная навигационная система, летательный аппарат, ошибки, параметры движения, система координат, точность*

Введение

В процессе полета летательного аппарата (ЛА) необходимо определять линейные и угловые параметры его движения в инерциальной (неподвижной в инерциальном пространстве) системе координат (СК). Во многих случаях требуется решать эту задачу автономно, используя инерциальную навигационную систему. Несмотря на известные достоинства инерциальных навигационных систем с гиростабилизированной платформой, их использование во многих случаях невозможно из-за больших массы и габаритных размеров, а также большого энергопотребления. Поэтому в последнее время все большее распространение получают бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС). Исследованию особенностей функционирования подобного рода систем посвящены работы многих авторов, среди которых следует выделить работы В. Н. Бранца, И. П. Шмыглевского, А. А. Красовского, О. Н. Анучина, Г. И. Емельянцева, В. Г. Пешехонова, С. П. Крюкова, Г. И. Чеснокова, В. А. Троицкого, В. А. Погорелова, С. В. Соколова [1—8]. В качестве измерительных устройств в этих системах преимущественно используются три акселерометра и три датчика угловой скорости (ДУС), оси чувствительности которых установлены по осям связанной с корпусом ЛА системы координат. От точности решения задачи навигации зависит точность решения и других задач управления движением ЛА, в частности, задачи наведения. Умение оценивать точность определения как текущих параметров движения центра масс, так и текущих параметров углового положения ЛА бесплатформенной инерциальной системой, умение выявлять конкретные факторы, оказывающие определяющее влияние на эту точность, и формирование практических рекомендаций по уменьшению их негативного влияния позволяют в процессе реализации этих рекомендаций повысить эффективность применения ЛА. Решению вопросов оценивания точности определения навигационных параметров посвящены работы [9—11], в которых модель ошибок БИНС построена для географической (подвижной) СК. Представленные в работе [10] уравнения ошибок БИНС в случае инерциального опорного трехгранника не позволяют оценить точность определения параметров движения ЛА с БИНС в инерциальном базисе. В настоящей статье предлагается методика оценивания ошибок БИНС при определении параметров движения ЛА, полет которого рассматривается в неподвижной в инерциальном пространстве СК.

Постановка задачи

Основными факторами, определяющими ошибки БИНС, использующей в качестве измерительных устройств три акселерометра и три ДУС, являются зоны нечувствительности, погрешности реализации масштабных коэффициентов и неортогональности установки данных устройств на борту ЛА. Для описания движения ЛА и оценивания точности определения параметров его движения БИНС в инерциальном базисе будем рассматривать две системы координат: инерциальную и связанную (рис. 1).

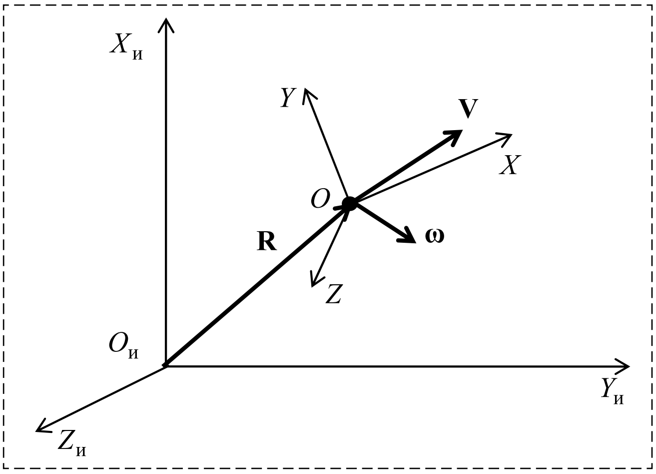


Рис. 1. Инерциальная и связанная СК

Инерциальная система координат (ИСК) — $O_иX_иY_иZ_и$ — неподвижна в инерциальном пространстве. Связанная система координат (ССК) — $OXYZ$ связана с ЛА. Начало O связанной системы координат расположено в центре масс ЛА. Направления осей ССК определяются конструктивными особенностями объекта. Обычно они связаны с некоторыми осями или плоскостями симметрии ЛА. Как правило, ось OX совпадает с продольной осью симметрии ЛА и направлена от хвостовой к носовой части, а оси OY и OZ лежат в плоскости, перпендикулярной оси OX, и составляют с ней правую тройку. Для каждого конкретного ЛА связанная система координат задается в конструкторской документации на него.

Угловое положение ССК относительно ИСК задается тремя углами: углом рыскания ψ, углом тангажа ϑ и углом крена γ.

ЛА движется поступательно со скоростью $\mathbf{V}$ и изменяет свое угловое положение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Положение ЛА в инерциальном пространстве характеризуется радиус-вектором $\mathbf{R}$.

Для определения параметров движения ЛА используется БИНС, измерительными устройствами которой являются три акселерометра и три ДУС, жестко закрепленные на корпусе ЛА. Акселерометры измеряют составляющие вектора кажущегося ускорения $\dot{\mathbf{W}}$, ДУС — составляющие вектора абсолютной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в ССК. Вектор кажущегося ускорения ЛА с проекциями на оси ИСК $\dot{\mathbf{W}}_и = [\dot{W}_{иx}, \dot{W}_{иy}, \dot{W}_{иz}]^{\mathrm{т}}$ определяется в соответствии с выражением

$$\dot{\mathbf{W}}_и = \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{W}}, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ — матрица перехода от ССК к ИСК;

$\dot{\mathbf{W}} = [\dot{W}_x, \dot{W}_y, \dot{W}_z\,]^{\mathrm{т}}$ — вектор кажущегося ускорения ЛА с проекциями на оси ССК.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \\ = \begin{bmatrix} \cos\vartheta\cos\psi & \sin\gamma\sin\psi - \cos\gamma\cos\psi\sin\vartheta & \sin\gamma\cos\psi\sin\vartheta + \cos\gamma\sin\psi \\ \sin\vartheta & \cos\gamma\cos\vartheta & -\sin\gamma\cos\vartheta \\ -\cos\vartheta\sin\psi & \cos\gamma\sin\psi\sin\vartheta + \sin\gamma\cos\psi & \cos\gamma\cos\psi - \sin\gamma\sin\psi\sin\vartheta \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Матрица $\mathbf{A}$ находится путем решения векторно-матричного дифференциального уравнения [12]

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}, \tag{3}$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Элементами матрицы $\boldsymbol{\Omega}$ служат проекции ω_x, ω_y, ω_z вектора угловой скорости ЛА $\boldsymbol{\omega}$ на оси ССК. Решение данного уравнения можно представить следующим образом:

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(0) + \int_0^t \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Omega}(t)dt.$$

Истинное значение вектора ускорения с проекциями на оси ИСК $\dot{\mathbf{V}}_и = [\dot{V}_{иx}, \dot{V}_{иy}, \dot{V}_{иz}\,]^{\mathrm{т}}$ определяется путем решения основного уравнения инерциальной навигации

$$\dot{\mathbf{V}}_и = \dot{\mathbf{W}}_и + \mathbf{g}_и(\mathbf{R}_и), \tag{5}$$

где $\mathbf{g}_и(\mathbf{R}_и)$ — вектор ускорения свободного падения с проекциями на оси ИСК; $\mathbf{R}_и$ — радиус-вектор положения ЛА с проекциями на оси ИСК.

На практике уравнение (5) представляется в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{V}}_и = \dot{\mathbf{W}}_и + \mathbf{g}_и(\mathbf{R}_и); \\ \dot{\mathbf{R}}_и = \mathbf{V}_и, \end{cases} \tag{6}$$

интегрирование которой дает искомые параметры движения центра масс ЛА — $\mathbf{R}_и$ и $\mathbf{V}_и$.

Учитывая особенности съема исходной информации в БИНС и необходимость ее преобразования в соответствии с выражением (1), система (6) может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{V}}_и = \mathbf{A}\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{g}_и(\mathbf{R}_и); \\ \dot{\mathbf{R}}_и = \mathbf{V}_и; \\ \dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}. \end{cases} \tag{7}$$

На рис. 2 приведена структурная схема, поясняющая принцип функционирования описанной выше БИНС.

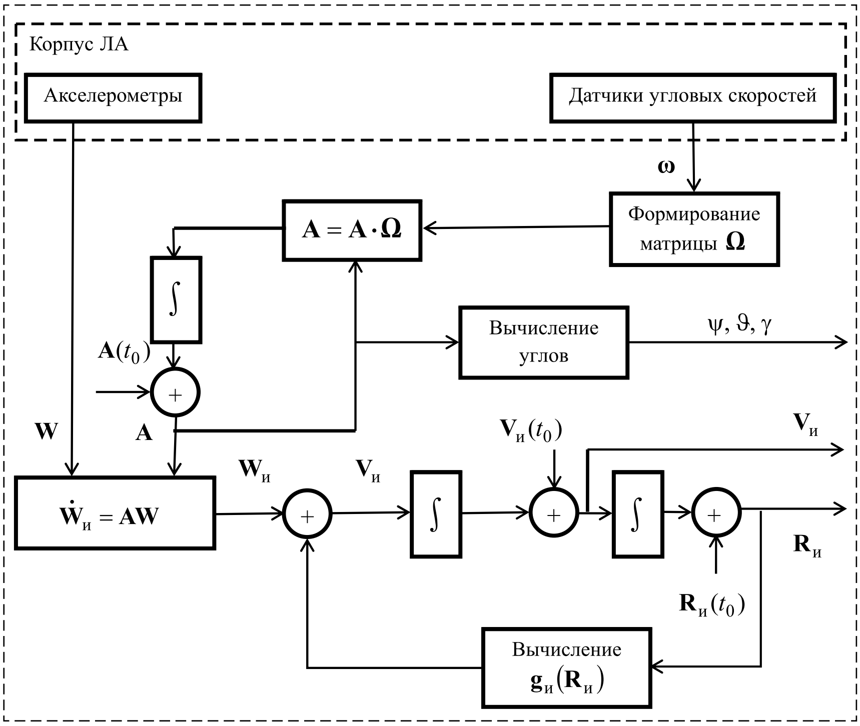


Рис. 2. Структура БИНС

Необходимо оценить ошибки определения БИНС параметров движения центра масс ($\Delta\mathbf{V}_и(t)$, $\Delta\mathbf{R}_и(t)$) и параметров углового движения ($\Delta\psi(t)$, $\Delta\vartheta(t)$, $\Delta\gamma(t)$) ЛА в инерциальной СК.

Для решения поставленной задачи необходимо иметь следующие исходные данные:

$\psi(t_0)$, $\vartheta(t_0)$, $\gamma(t_0)$ — начальные углы рыскания, тангажа и крена соответственно, задающие угловое положение ЛА в ИСК;

$\Delta\mathbf{R}_и(t_0)$, $\Delta\mathbf{V}_и(t_0)$ — начальные векторы погрешностей определения в ИСК координат и составляющих вектора скорости ЛА соответственно;

$\Delta\psi(t_0)$, $\Delta\vartheta(t_0)$, $\Delta\gamma(t_0)$ — начальные погрешности определения углов рыскания, тангажа и крена соответственно;

$x_и(t)$, $y_и(t)$, $z_и(t)$ — координаты ЛА в ИСК в зависимости от времени полета;

$\dot{\mathbf{W}}(t) = \left[\dot W_x(t), \dot W_y(t), \dot W_z(t)\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор кажущегося ускорения ЛА с проекциями на оси ССК в зависимости от времени полета;

$\boldsymbol{\omega}(t) = \left[\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор абсолютной угловой скорости ЛА с проекциями на оси связанной СК в зависимости от времени полета;

$\Delta\dot{\mathbf{W}}_0(t) = \left[\Delta\dot W_{x_0}, \Delta\dot W_{y_0}, \Delta\dot W_{z_0}\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор, определяющий зоны нечувствительности акселерометров, установленных по соответствующим осям ССК;

$\Delta\mathbf{k}_{\mathbf{W}} = \left[\Delta k_{W_x}, \Delta k_{W_y}, \Delta k_{W_z}\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор, определяющий погрешности реализации масштабных коэффициентов акселерометров, установленных по соответствующим осям ССК;

$\Delta\varphi_{\mathbf{W}} = \left[\Delta\varphi_{W_1}, \Delta\varphi_{W_2}, \Delta\varphi_{W_3}, \Delta\varphi_{W_4}, \Delta\varphi_{W_5}, \Delta\varphi_{W_6}\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор, определяющий коэффициенты неортогональности установки акселерометров по соответствующим осям ССК;

$\Delta\boldsymbol{\omega}_0 = \left[\Delta\omega_{x_0}, \Delta\omega_{y_0}, \Delta\omega_{z_0}\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор, определяющий зоны нечувствительности ДУС, установленных по соответствующим осям связанной СК;

$\Delta\mathbf{k}_\omega = \left[\Delta k_{\omega_x}, \Delta k_{\omega_y}, \Delta k_{\omega_z}\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор, определяющий погрешности реализации масштабных коэффициентов ДУС, установленных по соответствующим осям ССК;

$\Delta\varphi_\omega = \left[\Delta\varphi_{\omega_1}, \Delta\varphi_{\omega_2}, \Delta\varphi_{\omega_3}, \Delta\varphi_{\omega_4}, \Delta\varphi_{\omega_5}, \Delta\varphi_{\omega_6}\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор, определяющий коэффициенты неортогональности установки ДУС по соответствующим осям ССК;

$b_{00} = 3{,}986 \cdot 10^{14}$ м^3/с^2 — константа.

Оценивание точности определения БИНС параметров движения центра масс ЛА в инерциальном базисе

Оценивание точности определения БИНС параметров движения центра масс ЛА (**V**, **R**) базируется на разработанной одним из авторов данной статьи модели [13], основой для которой является система (7):

$$\begin{cases} \Delta\dot{\mathbf{V}}_и(t) = \mathbf{A}(t)\Delta\dot{\mathbf{W}}(t) + \Delta\mathbf{A}(t)\dot{\mathbf{W}}(t) + \Delta\mathbf{g}_и(t); \\ \Delta\dot{\mathbf{R}}_и(t) = \Delta\mathbf{V}_и(t); \\ \Delta\dot{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(t)\Delta\boldsymbol{\Omega}(t) + \Delta\mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Omega}(t); \\ \dot{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Omega}(t). \end{cases} \tag{8}$$

Для нахождения решения системы (8) сначала определяются начальные значения элементов матрицы ошибок перехода от ССК к ИСК в соответствии с выражением

$$\Delta\mathbf{A}(t_0) = \mathbf{A}'(t_0) - \mathbf{A}(t_0),$$

где $\mathbf{A}'(t_0)$ — матрица, определяемая в соответствии с выражением (2) при условии, что

$$\psi = \psi(t_0) + \Delta\psi(t_0),\ \vartheta = \vartheta(t_0) + \Delta\vartheta(t_0),$$
$$\gamma = \gamma(t_0) + \Delta\gamma(t_0);$$

$\mathbf{A}(t_0)$ — матрица, определяемая в соответствии с выражением (2) при условии, что

$$\psi = \psi(t_0),\ \vartheta = \vartheta(t_0),\ \gamma = \gamma(t_0).$$

На основании заданных зависимостей определяются на текущий момент времени t_i значения следующих параметров: $x_и(t)$, $y_и(t)$, $z_и(t)$, $\dot{W}_x(t), \dot{W}_y(t), \dot{W}_z(t)$, $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$.

Затем вычисляются значения элементов вектора ошибок измерений акселерометрами проекций вектора кажущегося ускорения ЛА на оси ССК в текущий момент времени:

$$\Delta\dot{W}_x(t) = \Delta\dot{W}_{x_0} + \Delta k_{W_x}\dot{W}_x(t) +$$
$$+(1+\Delta k_{W_x})\Delta\varphi_{W_1}\dot{W}_y(t) - (1+\Delta k_{W_x})\Delta\varphi_{W_2}\dot{W}_z(t);$$
$$\Delta\dot{W}_y(t) = \Delta\dot{W}_{y_0} + \Delta k_{W_y}\dot{W}_y(t) -$$
$$-(1+\Delta k_{W_y})\Delta\varphi_{W_3}\dot{W}_x(t) + (1+\Delta k_{W_y})\Delta\varphi_{W_4}\dot{W}_z(t);$$
$$\Delta\dot{W}_z(t) = \Delta\dot{W}_{z_0} + \Delta k_{W_z}\dot{W}_z(t) +$$
$$+(1+\Delta k_{W_z})\Delta\varphi_{W_5}\dot{W}_x(t) - (1+\Delta k_{W_z})\Delta\varphi_{W_6}\dot{W}_y(t),$$

которые являются составляющими вектора $\Delta\dot{\mathbf{W}}(t)$.

Аналогично вычисляются значения элементов вектора ошибок измерений ДУС проекций вектора абсолютной угловой скорости ЛА на оси ССК в текущий момент времени:

$$\Delta\omega_x(t) = \Delta\omega_{x_0} + \Delta k_{\omega_x}\omega_x(t) + (1+\Delta k_{\omega_x})\Delta\varphi_{\omega_1}\omega_y(t) -$$
$$-(1+\Delta k_{\omega_x})\Delta\varphi_{\omega 2}\omega_z(t);$$
$$\Delta\omega_y(t) = \Delta\omega_{y_0} + \Delta k_{\omega_y}\omega_y(t) - (1+\Delta k_{\omega_y})\Delta\varphi_{\omega_3}\omega_x(t) +$$
$$+(1+\Delta k_{\omega_y})\Delta\varphi_{\omega_4}\omega_z(t);$$
$$\Delta\omega_z(t) = \Delta\omega_{z_0} + \Delta k_{\omega_z}\omega_z(t) + (1+\Delta k_{\omega_z})\Delta\varphi_{\omega_5}\omega_x(t) -$$
$$-(1+\Delta k_{\omega_z})\Delta\varphi_{\omega_6}\omega_y(t),$$

которые являются составляющими матрицы $\Delta\mathbf{\Omega}(t)$. После чего рассчитывается модуль радиуса-вектора положения ЛА в ИСК в текущий момент времени t:

$$R_и(t) = \sqrt{x_и^2(t) + y_и^2(t) + z_и^2(t)}.$$

Определяются значения элементов вектора ошибок определения ускорения силы тяготения в проекциях на оси ИСК:

$$\Delta g_{иx}(t) = \frac{b_{00}}{R_и^3(t)}\left(1 - \frac{3x_и^2(t)}{R_и^2(t)}\right)\Delta x_и(t) -$$
$$-\frac{3b_{00}x_и(t)y_и(t)}{R_и^5(t)}\Delta y_и(t) - \frac{3b_{00}x_и(t)z_и(t)}{R_и^5(t)}\Delta z_и(t);$$
$$\Delta g_{иy}(t) = \frac{b_{00}}{R_и^3(t)}\left(1 - \frac{3y_и^2(t)}{R_и^2(t)}\right)\Delta y_и(t) -$$
$$-\frac{3b_{00}y_и(t)x_и(t)}{R_и^5(t)}\Delta x_и(t) - \frac{3b_{00}y_и(t)z_и(t)}{R_и^5(t)}\Delta z_и(t);$$
$$\Delta g_{иz}(t) = \frac{b_{00}}{R_и^3(t)}\left(1 - \frac{3z_и^2(t)}{R_и^2(t)}\right)\Delta z_и(t) -$$
$$-\frac{3b_{00}z_и(t)x_и(t)}{R_и^5(t)}\Delta x_и(t) - \frac{3b_{00}z_и(t)y_и(t)}{R_и^5(t)}\Delta y_и(t),$$

которые являются составляющими вектора $\Delta\mathbf{g}_и$.

Формируется матрица

$$\mathbf{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, определены начальные условия и правые части системы (8), интегрирование которой позволяет получить погрешности вычисления истинных значений вектора скорости $\Delta\mathbf{V}_и(t)$ и радиус-вектора положения $\Delta\mathbf{R}_и(t)$ ЛА в ИСК в зависимости от текущего времени полета (t).

Оценивание точности определения БИНС параметров углового положения ЛА в инерциальном базисе

В результате решения системы (8) помимо текущих ошибок определения истинных параметров движения центра масс ЛА в ИСК $\Delta\mathbf{V}_и(t)$, $\Delta\mathbf{R}_и(t)$ мы получаем информацию о параметрах углового положения ЛА. Эта информация содержится в матрицах $\mathbf{A}(t)$ и $\Delta\mathbf{A}(t)$. Однако в отличие от параметров движения центра масс информация об ошибках определения углового положения ЛА относительно инерциальной системы координат в этих матрицах в явном виде не содержится. Поэтому встает задача оценивания точности определения текущих значений углового положения ЛА на основе текущих значений коэффициентов матриц $\mathbf{A}(t)$ и $\Delta\mathbf{A}(t)$.

Для решения данной задачи необходимо из матрицы $\mathbf{A}(t)$ взять текущие значения элементов $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$, из матрицы $\Delta\mathbf{A}(t)$ — $\Delta\alpha_{11}, \Delta\alpha_{21}, \Delta\alpha_{22}, \Delta\alpha_{23}, \Delta\alpha_{31}$. Используя значения этих элементов, получим значения ошибок определения углов рыскания $\Delta\psi$, тангажа $\Delta\vartheta$ и крена $\Delta\gamma$:

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -\operatorname{arctg}\frac{\alpha_{31}+\Delta\alpha_{31}}{\alpha_{11}+\Delta\alpha_{11}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha_{31}}{\alpha_{11}}\right); \\ \Delta\vartheta &= \arcsin(\alpha_{21}+\Delta\alpha_{21}) - \arcsin(\alpha_{21}); \\ \Delta\gamma &= -\operatorname{arctg}\frac{\alpha_{23}+\Delta\alpha_{23}}{\alpha_{22}+\Delta\alpha_{22}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{22}}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Пример

На основании предложенной методики оценим ошибки определения в ИСК текущих параметров движения ЛА с БИНС, изменения значений проекций вектора кажущегося ускорения и значений проекций вектора абсолютной угловой скорости которого на оси ССК в зависимости от времени полета имеют вид, представленный на рис. 3 и 4 соответственно.

Изменение координат ЛА в инерциальном пространстве в зависимости от времени полета представлено на рис. 5 и 6.

Начальные погрешности определения в инерциальном пространстве координат, составляющих вектора скорости и углового положения ЛА равны нулю. Погрешности измерительных устройств БИНС заданы в таблице.

Для представленных в примере исходных данных были проведены расчеты изменения ошибок

Погрешности измерительных устройств БИНС

Тип ошибки измерителя	Значение ошибки	
	акселерометра	ДУС
Зона нечувствительности	0,01 м/с^2	1 °/ч
Коэффициент нелинейности	0,01	0,01
Коэффициент неортогональности, ′	1	1

определения координат, составляющих вектора скорости и углового положения ЛА в инерциальном пространстве в зависимости от времени полета путем интегрирования системы (8) и использования соотношений (9). Результаты этих расчетов для соответствующих ошибок представлены на рис. 7, 8 и 9.

Результаты расчетов показывают, что графики изменения ошибок определения координат

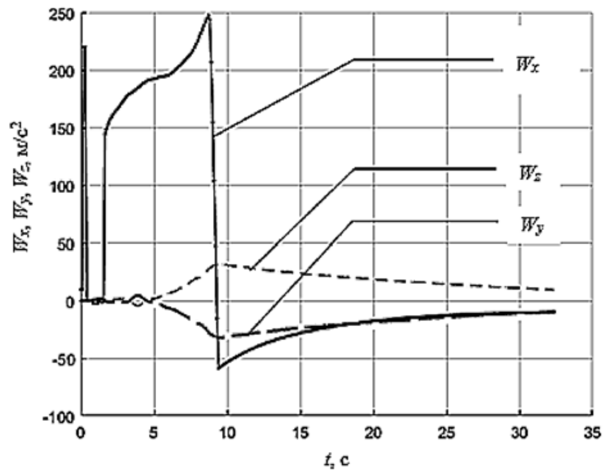


Рис. 3. Изменения значений проекций вектора кажущегося ускорения ЛА на оси ССК

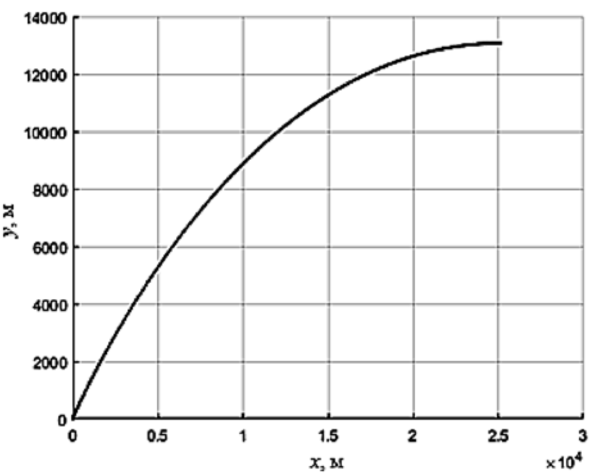


Рис. 5. Траектория полета ЛА в плоскости *XY* ИСК

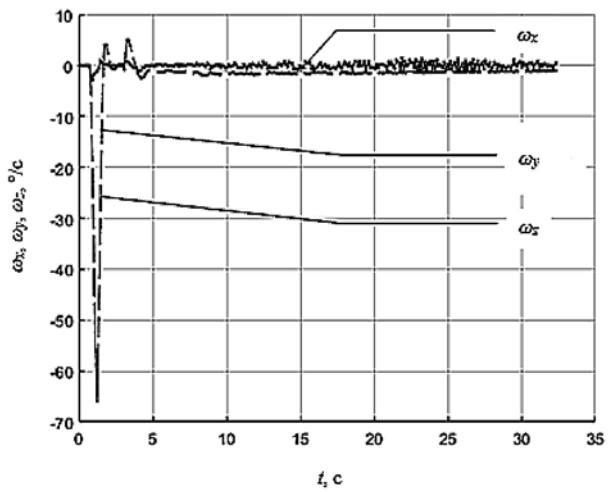


Рис. 4. Изменения значений проекций вектора абсолютной угловой скорости ЛА на оси ССК

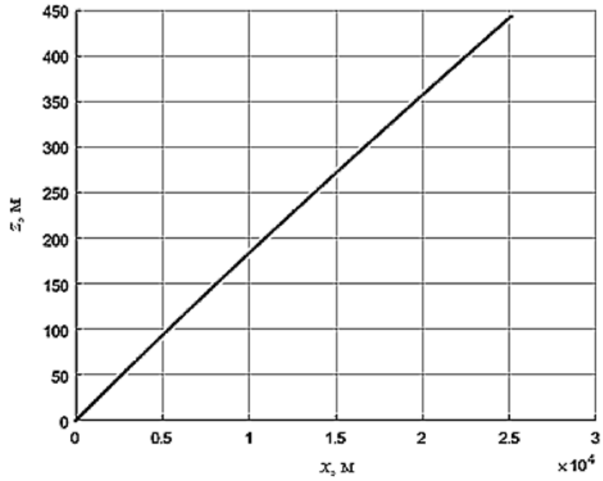


Рис. 6. Траектория полета ЛА в плоскости *XZ* ИСК

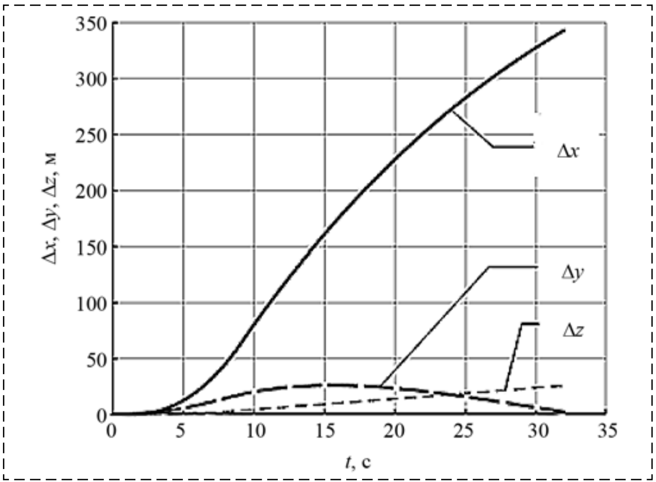


Рис. 7. Изменения ошибок определения координат ЛА в ИСК

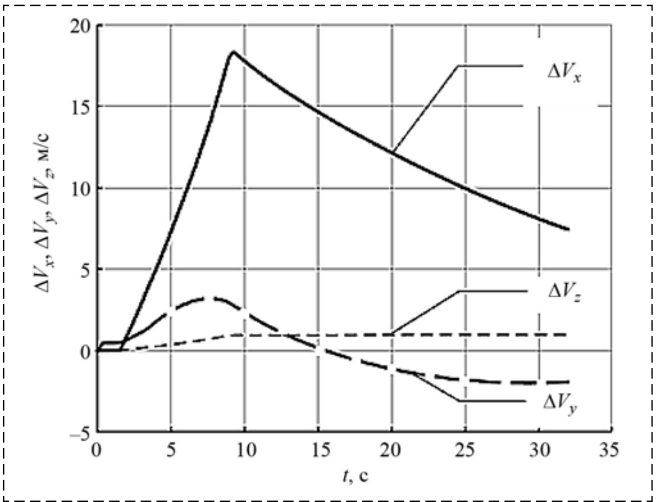


Рис. 8. Изменения ошибок определения составляющих скорости ЛА в ИСК

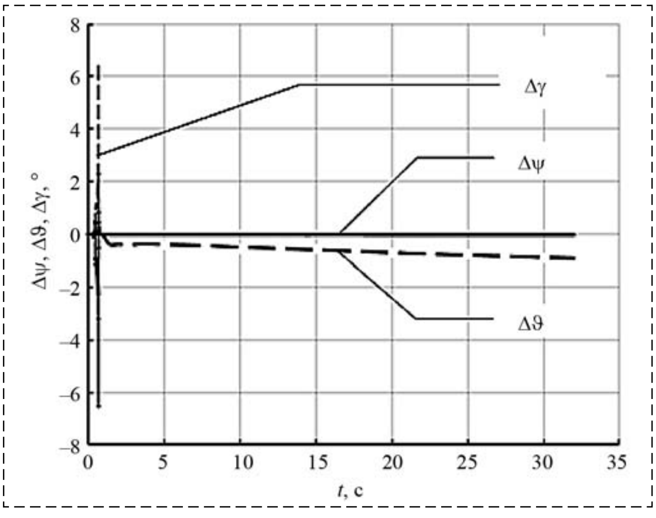


Рис. 9. Изменения ошибок определения углового положения ЛА в ИСК

(рис. 7) и составляющих скорости (рис. 8) ЛА в ИСК коррелируют с графиками изменения значений проекций вектора кажущегося ускорения ЛА на оси ССК (см. рис. 3), а графики изменения ошибок определения углового положения (рис. 9) ЛА в ИСК — с графиками изменения значений проекций вектора абсолютной угловой скорости ЛА на оси ССК (см. рис. 4). Для рассмотренного случая основная абсолютная ошибка БИНС наблюдается в определении параметров движения центра масс ЛА по оси X ИСК: до 18 м/с по скорости (ΔV_x) (см. рис. 7) и до 350 м по координате (Δx) (см. рис. 8) при дальности полета ЛА 25 км (см. рис. 5). Относительная ошибка по координате X (δx) на момент окончания полета ЛА составила порядка 1,5 %. Относительная ошибка по координате Z (δz) на тот же момент времени при боковом отклонении ЛА на 450 м (см. рис. 6) составила порядка 5 % при абсолютной ошибке в определении бокового положения (Δz) 25 м (см. рис. 8). Это свидетельствует о превалирующем влиянии погрешностей определения параметров бокового движения центра масс ЛА по отношению к погрешностям определения других параметров движения центра масс. Основная ошибка в определении углового положения — ошибка определения угла тангажа ($\Delta\vartheta$), что связано с разворотом ЛА на всем участке полета по углу тангажа (см. рис. 5). Эта ошибка на момент окончания полета ЛА составила порядка 1° (рис. 9).

Сравнение полученных ошибок определения БИНС параметров движения ЛА с требуемыми позволяет сделать вывод о пригодности или непригодности использования данной БИНС в конкретном случае. Если делается вывод о непригодности БИНС, то принимаются соответствующие решения, которые приводят к изменению исходных данных для решения поставленной задачи. После этого проводится повторная проверка на соответствие заданным точностным характеристикам БИНС по представленной выше методике. Данная методика также может быть использована при оценивании влияния погрешности конкретного измерителя на определение параметров движения ЛА в ИСК.

Заключение

В статье предложена методика, позволяющая оценить точность определения параметров движения ЛА с БИНС в инерциальном базисе. Это дает возможность принять решение об удовлетворении заданным требованиям по точности БИНС с определенными характеристиками измерительных устройств в каждом конкретном случае применения ЛА по назначению. Данная методика также может быть использована при анализе погрешностей БИНС, применяемых на различных типах ЛА, при определении ошибок, оказывающих наиболее существенное влияние на определение параметров движения ЛА, при формировании рекомендаций по уменьшению негативного влияния этих ошибок и при обосновании требований к бесплатформенным инерциальным системам навигации летательных аппаратов.

Список литературы

1. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.
2. **Красовский А. А.** Развитие теории акселерометрических бесплатформенных инерциальных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. № 6. С. 83—91.
3. **Анучин О. Н., Емельянцев Г. И.** Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов. СПб.: Изд. ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 1999. 356 с.
4. **Пешехонов В. Г.** Проблемы и перспективы современной гироскопии // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 1—2. С. 49—55.
5. **Крюков С. П., Чесноков Г. И., Троицкий В. А.** Опыт разработки и сертификации бесплатформенной инерциальной навигационной системы для гражданской авиации и создания на ее основе модификаций для управления движением морских, наземных и аэрокосмических объектов и задач геодезии и гравиметрии // Гироскопия и навигация. 2002. № 4 (39). С. 115—124.
6. **Погорелов В. А.** Стохастическая модель корректируемой бесплатформенной навигационной системы // Датчики и системы. 2005. № 12. С. 20—23.
7. **Погорелов В. А.** Применение матриц направляющих косинусов в задаче синтеза алгоритма навигации в бесплатформенных инерциальных навигационных системах летательных аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2005. № 12. С. 35—40.
8. **Соколов С. В., Погорелов В. А.** Основы синтеза многоструктурных бесплатформенных навигационных систем / Под ред. В. А. Погорелова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 184 с.
9. **Матвеев В. В., Распопов В. Я.** Основы построения бесплатформенных инерциальных навигационных систем. СПб.: Изд. ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор", 2009. 280 с.
10. **Голован А. А., Парусников Н. А.** Математические основы навигационных систем: Часть I: Математические модели инерциальной навигации. М.: МАКС, 2011. 136 с.
11. **Доронин Д. В., Донченко А. А., Шевцов С. Н.** Функционирование математической модели ошибок бесплатформенной инерциальной навигационной системы при одновременной навигации, динамическом построении и обработке данных многоструктурных систем управления в рамках разработки алгоритмов интегрированной системы навигации летательного аппарата с использованием GPS/ ГЛОНАСС технологий // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2012. Т. 14, № 4 (5). С. 1363—1367.
12. **Бурмистров В. В., Вайнтрауб А. И., Лукашевский А. А., Силантьев С. Б., Скрябин С. С., Хорошилов В. А.** Системы управления ракет-носителей. Часть 1. СПб.: Изд. ВКА имени А. Ф. Можайского, 2014. 143 с.
13. **Силантьев Д. С.** Модель ошибок бесплатформенной инерциальной навигационной системы летательного аппарата // Навигация и гидрография. 2016. № 45/2016. С. 17—23.

Estimation of Accuracy of Definition of Parameters of Movement of the Aircraft with a Strapdown Inertial Navigation System in the Inertial Basis

A. A. Ardashov[1], avgust.ar.@yandex.ru, **V. N. Arseniev**[1], vladar56@mail.ru,
D. S. Silantyev[2], denissila@mail.ru, **S. B. Silantyev**[1], silantev2008@yandex.ru,
[1] Military-space academy of a name of A. F. Mozhaisky, 197198
[2] Research Institute of shipbuilding and arms of the Navy of VUNTs Navy "Military Sea Academy", Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: **Silantyev Sergei B.,** Ph. D., Professor,
Military-space academy of a name of A. F. Mozhaisky,
Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, e-mail: silantev2008@yandex.ru

Accepted on November 27, 2017

During the flight of the aircraft (AC) in many cases, there is the problem of determining linear and angular parameters of its motion in the inertial (fixed to inertial space) coordinate system. Lately increasingly strapdown inertial navigation system (SINS) based on three accelerometers and three angular velocity sensors of the sensitivity axis with the axes associated with the body of the aircraft coordinate system. Issues of assessment of accuracy of determining navigation parameters AC, these systems cover a lot of work. However, they do not allow to assess the accuracy of the determination of motion parameters of the aircraft with a strapdown inertial navigation system in the inertial basis. This article presents the method of solving the problem of estimation of accuracy of definition of linear and angular motion parameters of the aircraft with a strapdown inertial navigation system in the inertial basis. A block diagram for explaining the principle of operation of the described the SINS. To describe the motion of AC and estimation of accuracy of definition of parameters of its motion, the SINS in the inertial basis is used two coordinate systems: inertial, the associated. As the main factors determining the errors, the SINS, are considered dead zones, errors of implementation and scale factors of reorthogonalize the installation of measuring devices. On the basis of the developed technique obtained numerical values of accuracy of calculation of parameters of motion of the aircraft. The proposed method allows to evaluate the accuracy of the determination of motion parameters of AC with the SINS in the inertial basis. This gives you the opportunity to decide on the satisfaction of specified requirements on the accuracy of sins with certain characteristics of measuring devices in each case, application of the AC to the destination. This technique can also be used in the error analysis of SINS used in the different types of AC, in determining the errors that have the most significant impact on the determination of motion parameters of AC, when forming recommendations on reducing the negative impact of these errors and validating requirements for strapdown inertial navigation systems of aircraft.

Keywords: *strapdown inertial navigation system, aircraft, errors, movement parameters, coordinate system, precision*

For citation:

Ardashov A. A., Arseniev V. N., Silantyev D. S., Silantyev S. B. Estimation of Accuracy of Definition of Parameters of Movement of the Aircraft with a Strapdown Inertial Navigation System in the Inertial Basis, *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 3, pp. 209—216.

DOI: 10.17587/mau.19.209-216

References

1. **Branec V. N., Shmyglevskij I. P.** *Vvedenie v teoriju besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh system* (Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems), Moscow, Nauka, 1992, 280 p. (in Russian).

2. **Krasovskij A. A.** *Razvitie teorii akselerometricheskih besplatformennyh inercial'nyh system* (The development of the theory of accelerometer strapdown inertial systems), *Izv. RAN. Teorija i sistemy upravlenija*, 1995, no. 6, pp. 83—91 (in Russian).

3. **Anuchin O. N., Emel'jancev G. I.** *Integrirovannye sistemy orientacii i navigacii dlja morskih podvizhnyh ob#ektov* (The integrated system of orientation and navigation for sea mobile objects), SPb., GNC RF CNII "Jelektropribor", 1999, 356 p. (in Russian).

4. **Peshehonov V. G.** *Problemy i perspektivy sovremennoj giroskopii* (Problems and prospects of modern gyroscopy), *Izv. vuzov. Priborostroenie*, 2000, vol. 43, no. 1—2, pp. 49—55 (in Russian).

5. **Krjukov S. P., Chesnokov G. I., Troickij V. A.** *Opyt razrabotki i sertifikacii besplatformennoj inercial'noj navigacionnoj sistemy dlja grazhdanskoj aviacii i sozdanija na ee osnove modifikacij dlja upravlenija dvizheniem morskih, nazemnyh i ajerokosmicheskih ob#ektov i zadach geodezii i gravimetrii* (Experience developing and certifying a strapdown inertial navigation system for civil aviation and the creation on its basis of modifications to marine traffic control, ground-based and aerospace objects and tasks of geodesy and gravimetry), *Giroskopija i navigacija*, 2002, no. 4 (39), pp. 115—124 (in Russian).

6. **Pogorelov V. A.** *Stohasticheskaja model' korrektiruemoj besplatformennoj navigacionnoj sistemy* (A stochastic model of corrected strapdown navigation system), *Datchiki i Sistemy*, 2005, no. 12, p. 20—23 (in Russian).

7. **Pogorelov V. A.** *Primenenie matric napravljajushhih kosinusov v zadache sinteza algoritma navigacii v besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistemah letatel'nyh apparatov* (The application of the matrix guides of the cosines in the problem of synthesis algorithm of navigation in strapdown inertial navigation systems of aircraft), *Mekhatronika. Avtomatizatsiya. Upravlenie*, 2005, no. 12, pp. 35—40 (in Russian).

8. **Sokolov S. V., Pogorelov V. A.** *Osnovy sinteza mnogostrukturnyh besplatformennyh navigacionnyh sistem* (Basis for synthesis of multi-structured strapdown navigation systems), Moscow, Fizmatlit, 2009, 184 p. (in Russian).

9. **Matveev V. V., Raspopov V. Ja.** *Osnovy postroenija besplatformennyh inercial'nyh navigacionnyh sistem* (Fundamentals of strapdown inertial navigation systems), SPb, GNC RF OAO "Koncern "CNII Jelektropribor", 2009, 280 p. (in Russian).

10. **Golovan A. A., Parusnikov N. A.** *Matematicheskie osnovy navigacionnyh sistem: Chast' I: Matematicheskie modeli inercial'noj navigacii* (Mathematical foundations of navigation systems: Part I: Mathematical models of inertial navigation), Moscow, MAKS, 2011, 136 p. (in Russian).

11. **Doronin D. V., Donchenko A. A., Shevcov S. N.** *Funkcionirovanie matematicheskoj modeli oshibok besplatformennoj inercial'noj navigacionnoj sistemy pri odnovremennoj navigacii, dinamicheskom postroenii i obrabotki dannyh mnogostrukturnyh sistem upravlenija v ramkah razrabotki algoritmov integrirovannoj sistemy navigacii letatel'nogo apparata s ispol'zovaniem GPS/GLONASS tehnologij* (The functioning of the mathematical error models of strapdown inertial navigation system with simultaneous navigation, dynamic construction and processing of multi-structured data management systems in the framework of the development of algorithms for integrated navigation system of the aircraft using GPS/GLONASS technology), *Izvestija Samarskogo Nauchnogo Centra Rossijskoj Akademii Nauk*, 2012, vol. 14, no. 4 (5), pp. 1363—1367 (in Russian).

12. **Burmistrov V. V., Vajntraub A. I., Lukashevskij A. A., Silant'ev S. B., Skrjabin S. S., Horoshilov V. A.** *Sistemy upravlenija raket-nositelej* (The control system of the rockets), SPb, VKA imeni A. F. Mozhajskogo, 2014, 143 p. (in Russian).

13. **Silant'ev D. S.** *Model' oshibok besplatformennoj inercial'noj navigacionnoj sistemy letatel'nogo apparata* (The error model of strapdown inertial navigation system of the aircraft), *Navigacija i Gidrografija*, 2016, no. 45/2016, pp. 17—23 (in Russian).

Издательство «НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5397,** тел./факс: **(499) 269-5510**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *Е. В. Комиссарова*.

Сдано в набор 21.12.2017. Подписано в печать 09.02.2018. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ MH318. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

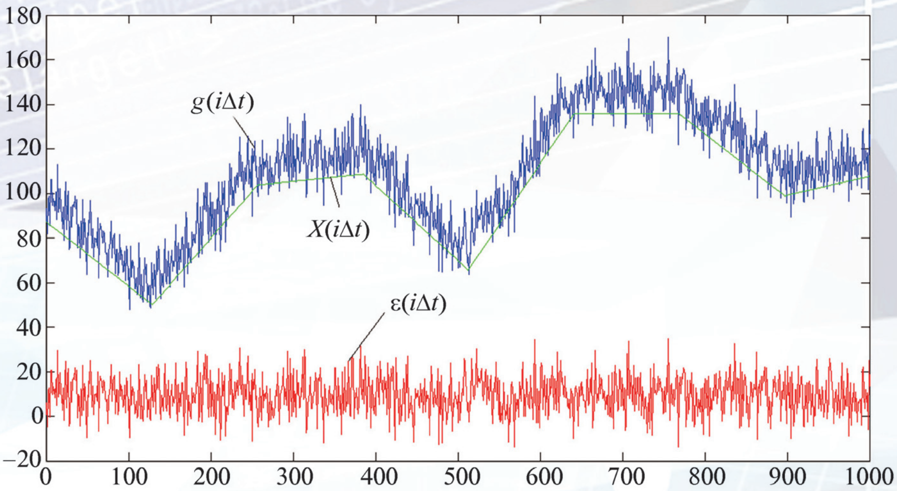
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1.

Рисунок к статье Т. А. Алиева, Н. Э. Рзаевой

«АЛГОРИТМЫ СПЕКТРАЛЬНОГО И КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА ПОМЕХИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ В СКРЫТОМ ПЕРИОДЕ АВАРИЙНОГО СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТОВ КОНТРОЛЯ»



Графики первых 1000 отсчетов полезного сигнала $X(i\Delta t)$, помехи $\varepsilon(i\Delta t)$ и суммарного зашумленного сигнала $g(i\Delta t)$

Рисунки к статье О. Н. Корсуна, А. В. Стуловского, А. В. Каньшева

«ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ГИСТЕРЕЗИСА АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ЗАКРИТИЧЕСКИХ УГЛАХ АТАКИ»

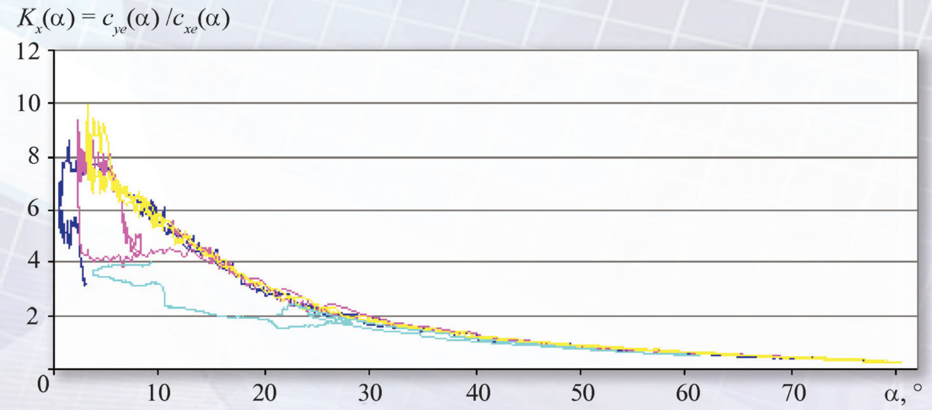


Рис. 7. Зависимость значений c_{ye}/c_{xe} от угла атаки на четырех исследуемых участках

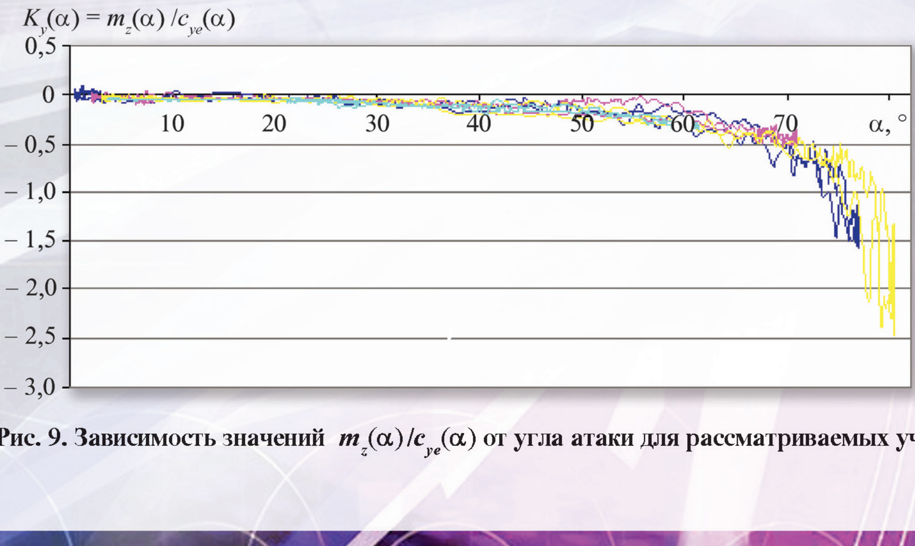


Рис. 9. Зависимость значений $m_z(\alpha)/c_{ye}(\alpha)$ от угла атаки для рассматриваемых участков

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ" выпускает *научно-технические журналы*

Теоретический и прикладной научно-технический журнал

ПРОГРАММНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ

В журнале освещаются состояние и тенденции развития основных направлений индустрии программного обеспечения, связанных с проектированием, конструированием, архитектурой, обеспечением качества и сопровождением жизненного цикла программного обеспечения, а также рассматриваются достижения в области создания и эксплуатации прикладных программно-информационных систем во всех областях человеческой деятельности.

Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 22765; «Пресса России» – 39795

Ежемесячный теоретический и прикладной научно-технический журнал

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития основных направлений в области разработки, производства и применения информационных технологий.

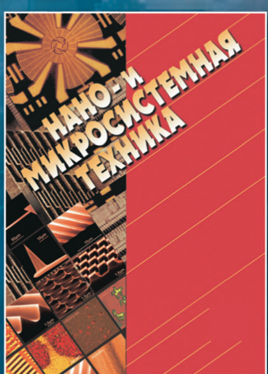
Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 72656; «Пресса России» – 94033

Научно-практический и учебно-методический журнал

БЕЗОПАСНОСТЬ ЖИЗНЕДЕЯТЕЛЬНОСТИ

В журнале освещаются достижения и перспективы в области исследований, обеспечения и совершенствования защиты человека от всех видов опасностей производственной и природной среды, их контроля, мониторинга, предотвращения, ликвидации последствий аварий и катастроф, образования в сфере безопасности жизнедеятельности.

Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 79963; «Пресса России» – 94032



Ежемесячный междисциплинарный теоретический и прикладной научно-технический журнал

НАНО- и МИКРОСИСТЕМНАЯ ТЕХНИКА

В журнале освещаются современное состояние, тенденции и перспективы развития нано- и микросистемной техники, рассматриваются вопросы разработки и внедрения нано- и микросистем в различные области науки, технологии и производства.

Подписные индексы по каталогам: «Роспечать» – 79493; «Пресса России» – 27849

Все журналы распространяются только по подписке.

Оформить подписку можно через подписные агентства либо непосредственно в редакции журналов.

Адрес редакции журналов для авторов и подписчиков:
107076, Москва, Стромынский пер., 4. Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"
Тел.: (499) 269-55-10, 269-53-97. Факс: (499) 269-55-10.
E-mail: antonov@novtex.ru

ISSN 1684-6427. МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ. 2018. Том 19. № 3. 145–216. Индексы: 79492 ("Роспечать"), 27848 ("Пресса России")