

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 24

2023

№ 1

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print)

ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Главный редактор:
ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

Заместители главного редактора:
БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.
ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.
ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.

Ответственный секретарь:
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционный совет:
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН
КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН
СИГОВ А. С., акад. РАН
СОЙФЕР В. А., акад. РАН
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН
ШЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

Редколлегия:
DORANTES D. J., PhD, Турция
GROUMPOS P. P., PhD, Греция
ISIDORI A., PhD, Италия
KATALINIC B., PhD, Австрия
LIN CH.-Y., PhD, Тайвань
MASON O. J., PhD, Ирландия
ORTEGA R. S., PhD, Франция
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США
STRZELECKI R. M., PhD, Польша
SUBUDHI B. D., PhD, Индия
АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан
ГАРАЩЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина
БОБЦОВ А. А., д.т.н.
БУКОВ В. Н., д.т.н.
ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.
ЖУКОВ И. А., д.т.н.
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.
ЛОХИН В. М., д.т.н.
МАГОМЕДОВ М. Х., д.ф.-м.н.
ПУТОВ В. В., д.т.н.
ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.
РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.
СЕРГЕЕВ С. Ф., д.пс.н.
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.
ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.
ФУРСОВ В. А., д.т.н.

Редакция:
БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Директор издательства:
АНТОНОВ Б. И.

СОДЕРЖАНИЕ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Иванов В. П. Новый подход к синтезу оптимального терминального управления нелинейными динамическими системами 3

Обухов А. Д., Назарова А. О. Метод управления на основе технологий компьютерного зрения и машинного обучения для адаптивных систем 14

Omorov T. T., Zakiriaev K. E., Takyrbashev B. K., Imanakunova Zh. S. Automated Control of Unauthorized Power Take-Offs in a Distributed Electrical Network 24

РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Костюков В. А., Медведев М. Ю., Пшихопов В. Х. Планирование движения наземных роботов в среде с препятствиями: алгоритмы построения траекторий в группе при заданном шаблоне 33

Селюцкий Ю. Д. О регулировании колебаний ветроэнергетической системы, использующей эффект галоупирования 46

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в МНБД Scopus и RSCI (на платформе Web of Science).

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:

<http://mech.novtex.ru>, e-mail: mech@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL



MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Editor-in-Chief
FILIMONOV N. B.

Deputy Editors-in-Chief:
BOLSHAKOV A. A.
PODURAEV Yu. V.
YUSCHENKO A. S.

Responsible Secretary:
BEZMENOVA M. Yu.

Editorial Board:
ANSHAKOV G. P.
BOLOTNIK N. N.
CHENTSOV A. G.
CHERNOUSKO F. L.
FEDOROV I. B.
KALYAEV I. A.
KURZHANSKI A. B.
KUZNETSOV N. A.
PESHEKHONOV V. G.
REZCHIKOV A. F.
SCHERBATYUK A. F.
SEBRYAKOV G. G.
SIGOV A. S.
SOJFER V. A.
SOLOMENTSEV Yu. M.
VASSILYEV S. N.
YUSUPOV R. M.
ZHELTOV S. Yu.

Editorial Council:
ALIEV T. A., Azerbaijan
DORANTES D. J., PhD, Turkey
GARASCHENKO F. G., Ukraine
GROUMPOS P. P., PhD, Greece
ISIDORI A., PhD, Italy
KATALINIC B., PhD, Austria
LIN CH.-Y., PhD, Taiwan
MASON O. J., PhD, Ireland
ORTEGA R. S., PhD, France
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA
STRZELECKI R. M., PhD, Poland
SUBUDHI B. D., PhD, India
BOBTSOV A. A.
BUKOV V. N.
ERMOLOV I. L.
FILARETOV V. F.
FRADKOV V. L.
FURSOV V. A.
ILYASOV B. G.
KOROSTELEV V. F.
LEBEDEV G. N.
LOKHIN V.M.
MAGOMEDOV M. Kh.
PUTOV V. V.
PSHIKHOPOV V. Kh.
RAPOPORT E. Ya.
SERGEEV S. F.
ZHUKOV I. A.

Editorial Staff:
BEZMENOVA M. Yu.

Director of the Publishing House:
ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

- Ivanov V. P. New Approach to the Synthesis of Optimal Terminal Control of Nonlinear Dynamic Systems 3
- Obukhov A. D., Nazarova A. O. A Control Method Based on Computer Vision and Machine Learning Technologies for Adaptive Systems 14
- Omorov T. T., Zakiriev K. E., Takyrbashev B. K., Imanakunova Zh. S. Automated Control of Unauthorized Power Take-Offs in a Distributed Electrical Network 24

ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

- Kostjukov V. A., Medvedev M. Y., Pshikhopov V. Kh. Algorithms for Path Planning in a Group of Mobile Robots in an Environment with Obstacles with a Given Template 33
- Selyutskiy Y. D. On the Regulation of Oscillations of a Galloping-Based Wind Power Harvesting System 46

Information about the journal is available online at:
<http://mech.novtex.ru>, e-mail: mech@novtex.ru

В. П. Иванов, канд. техн. наук, доц., ст. науч. сотр., vpivanov.spb.su@gmail.com,
Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр Российской академии наук

Новый подход к синтезу оптимального терминального управления нелинейными динамическими системами

Рассматривается проблема построения общих решений задач терминального управления нелинейными системами. Используются ранее доказанные положения о том, что оптимальная траектория является огибающей параметрического семейства поверхностей (параметрического семейства сингулярных кривых), и что оптимальное управление может быть найдено на этом семействе. Здесь обыгрывается тот факт, что в каждой точке оптимальной траектории вектор-функция множителей Лагранжа касателен к ней, но также касателен к сингулярной кривой. Приводится конструктивный метод построения сингулярных кривых на основе условного разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби. "Свободные" параметры сингулярных кривых находятся из условия минимизации терминального функционала, что позволяет избежать явного решения краевой задачи для класса нелинейных динамических систем, упростить вычислительные алгоритмы. Сингулярные кривые описываются редуцированной (сокращенной) математической моделью. Таким образом, для синтеза закона оптимального управления мы должны использовать полную (исходную) математическую модель динамической системы, но для его вычисления в тот или иной момент времени достаточно и редуцированной (сокращенной). Указанное соображение определяет принцип информационного дуализма. Приведен иллюстрирующий пример. Показано, что такой подход можно применять и для решения некоторых классов дифференциальных игр.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, оптимальное управление, огибающие, параметрическое семейство, сингулярные кривые, редуцированные модели, информационный дуализм

Введение

Синтез оптимального управления динамическими системами различного назначения является задачей, без решения которой невозможно создание высокоэффективных устройств, систем, технологий. В первую очередь это относится к управлению изделиями авиационной, ракетной, космической техники, а в более широком смысле — к транспортным системам различного назначения, к управлению ядерными, химическими реакторами, энергетическими и экономическими системами и к управлению во многих других сферах практической деятельности человечества. Усложненность и разнообразие рассматриваемых задач определяет актуальность методов оптимизации.

В теории и практике оптимального управления нелинейными системами достаточно широко используются системы терминального управления, в которых целью управления является достижение заданной точки пространства состояний в заданный (терминальный)

момент времени. Или в другой формулировке: целью является минимизация терминального функционала, определенного в заданной точке пространства состояний в данный момент времени. Отметим, что к задаче минимизации терминального функционала может быть сведена (при введении соответствующих переменных) большая часть задач оптимального управления с иными критериями качества.

Методам решения задач оптимального управления, в том числе численным, посвящено достаточно много научной литературы (см. работы [1—7]).

Настоящая работа базируется на обзоре результатов исследований автора [8—11] с добавлением новых фрагментов, новых интерпретаций. Общая идея подхода состоит в том, что непрерывная фазовая траектория может быть представлена как огибающая семейства сингулярных кривых, восставленных в каждой ее точке, в общем случае не являющихся фазовыми траекториями. Это создает предпосылки к поиску управления на семействе сингулярных кривых.

Постановка задачи оптимального терминального управления нелинейной динамической системой

Рассмотрим класс нелинейных управляемых динамических систем вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= f_j(x) + B_j(x)u_j, \quad j = 1, \dots, m, \\ \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x), \quad i = m + 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f = (f_1, \dots, f_n)$ и $B = (B_1, \dots, B_m)$ — заданные нелинейные вектор-функции; $B_j \neq 0, j = 1, \dots, m; u = (u_1, \dots, u_m)$ — m -мерный вектор управления; $m < n$.

В рамках данной статьи будем рассматривать случай, когда каждая j -я компонента управления ограничена отрезками $[U_{j \min}^{dop}, U_{j \max}^{dop}]$.

Задан терминальный функционал:

$$J = F[\|x_i(T) - x_{zad\ i}\|, i = m + 1, \dots, n], \quad (2)$$

определенный на решениях системы уравнений (1). F — некоторая заданная функция; $T \in \mathfrak{Z}(t); x_{zad} = (x_{zad\ 1}, \dots, x_{zad\ n})$ — заданные значения вектора состояния.

В момент $t = T$ могут быть введены дополнительные условия вида

$$h_i = h_i[x(T)], \quad i = 1, \dots, n,$$

которые могут быть включены в функционал (2) через дополнительные множители Лагранжа.

Так как система уравнений (1) — автономная, то множество $\mathfrak{Z}(t)$ допустимо сузить до отрезка $[t_0, T]$, где t_0 — начальное значение аргумента $t, t_0 \in \mathfrak{Z}(t)$. Момент времени T не фиксирован. Значения $x(t_0) = x_0$ известны.

Сформулируем задачу оптимального управления следующим образом [6, 7]: среди всех допустимых на отрезке $[t_0, T]$ управлений $u \in U$, переводящих точку (t_0, x_0) в точку $(T, x(T))$, найти такие, для которых функционал (2), определенный на решениях системы уравнений (1), принимает наименьшее значение при выполнении условий (3).

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $p = (p_1, \dots, p_n)$ и составим гамильтониан задачи оптимизации H :

$$H = \sum_{i=1}^n p_i f_i + \sum_{j=1}^m p_j B_j u_j. \quad (3)$$

С использованием функции H в пространстве переменных $D^n(x, p), x \in D^n(x, p), p \in D^n(x, p)$, уравнения для x и p запишутся в следующей канонической форме [6, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что H и p на оптимальном решении непрерывны и к этому же приводит аналог условия Эрдмана—Вейерштрасса классического вариационного исчисления. Непрерывность сохраняется и в том случае, когда правые части уравнений (1) терпят разрыв.

Как доказано в работах [6, 7], для оптимизации управления $u(t)$ и фазовой траектории $x(t)$ в рамках принципа максимума необходимо существование такого ненулевого вектора p , что выполняются следующие условия:

1. Функция H переменного $u \in U$ при каждом $t \in [t_0, T]$, т. е. при фиксированных x, p , достигает при $u = u_{opt}(t)$ минимума:

$$H(x_{opt}, u_{opt}, p) = \min_{u \in U} H(x, u, p). \quad (5)$$

Таким образом, оптимальное управление на границе множества допустимого управления определяется как

$$u_{opt} = \arg \min_{u \in U} H(x, u, p). \quad (6)$$

2. Выполняются условия трансверсальности:

$$\left[H \delta t - \sum_{i=1}^n p_i \delta x_i \right]_{t_0}^T + \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \delta x_i \right]_{t_0}^T = 0, \quad (7)$$

где $\delta t, \delta x_i$ — произвольные вариации соответствующих переменных.

Обобщенные условия трансверсальности в силу независимости вариаций приводят к соотношениям:

$$\begin{aligned} [H]_{t_0}^T &= 0, \\ p_i|_{t_0}^T &= \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Непосредственным следствием системы уравнений (4) и условия (5) является выполнение соотношения

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

С учетом (8) для автономных систем при не заданном явно аргументе имеем:

$$H = \text{const} = 0. \quad (9)$$

Из соотношения (5) ввиду особой структуры уравнений динамической системы (1) и, соответственно, гамильтониана (3), оптимальное управление определяется как

$$\begin{aligned} u_{\text{opt}} &= \arg \min_{u \in U} H(x, u, p) = \\ &= \arg \min_{u \in U} \left(\sum_{i=1}^n p_i f_i + \sum_{j=1}^m p_j B_j u_j \right) = \\ &= \arg \min_{u \in U} \left(\sum_{j=1}^m p_j B_j u_j \right), \end{aligned} \quad (10)$$

откуда после преобразований имеем:

$$u_{\text{opt } j} = \begin{cases} U_{j \min}^{\text{dop}}, & \text{если } p_j B_j > 0, \\ u_{j \text{ особ}}, & \text{если } p_j = 0, \\ U_{j \max}^{\text{dop}}, & \text{если } p_j B_j < 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$j = 1, \dots, m,$$

где $u_{j \text{ особ}}$ — особое оптимальное управление.

Отметим, что если в начальный момент времени значения x известны (или могут быть оценены), то вектор p определен (с точностью до констант) согласно условиям трансверсальности лишь на правом конце фазовой траектории. Возникает специфическая краевая задача, после решения которой ("в принципе") тем или иным способом можно найти $p(t)$, а следовательно, и u_{opt} [6, 7].

В общем случае для нелинейных динамических систем аналитического решения краевая задача не имеет. Поэтому приходится использовать различные численные методы, такие как метод последовательных приближений, метод Ньютона, метод поворота опорной гиперплоскости, различные градиентные методы и т. д. [12, 13].

Однако вычислительные трудности, стоящие на этом пути, методические ошибки численных методов и ошибки округлений, проблемы машинного нуля, проблемы устойчивости и сходимости и др. делают процесс нахождения достоверных значений весьма трудным, а нередко (например, при выполнении требования реального масштаба времени, длительного участка особого управления и др.) и невозможным.

Поэтому представляется желательным использовать нетрадиционные методы синтеза оптимального управления, одним из которых, в частности, является метод огибающих.

Оптимальное управление и параметрическое семейство поверхностей (сингулярных кривых)

В работах [8—11] доказано, что оптимальную траекторию можно представить как огибающую параметрического семейства поверхностей с выделенными на них сингулярными кривыми, которые в общем случае не являются фазовыми траекториями. В силу теоремы Якоби возможна и другая трактовка: поверхность Гамильтона—Якоби, определяющая оптимальную фазовую траекторию, является огибающей частных параметрических поверхностей, формирующих сингулярные кривые.

И там же доказывается, что оптимальное управление может быть найдено на семействе сингулярных кривых.

Отметим, что на семейство поверхностей (сингулярных кривых) не налагается никаких ограничений, кроме условий огибания их оптимальной траекторией. Например, в плоском случае возможно использование квадратичных парабол. Но это требует трансформации закона управления. Можно пойти другим путем: не меняя структуры закона управления, построить рациональные сингулярные кривые, удовлетворяющие условиям огибания.

В рамках данной работы предлагается следующий подход.

Представим уравнение (9) в следующем виде:

$$H[x, u_{\text{opt}}(x, p), p] = H(x, p) = 0. \quad (12)$$

Введем непрерывную функцию $W(x)$, такую что $W[x(T)] = J = F[x(T)]$, $p = \frac{\partial W}{\partial x}$, и приведем уравнение (12) к уравнению Гамильтона—Якоби:

$$H(x, p)h\left(x, \frac{\partial W}{\partial x}\right) = 0. \quad (13)$$

Отметим, что уравнение (13) можно получить из уравнения Бэллмана с учетом автономности системы уравнений (1), условий трансверсальности (7), подставляя закон оптимального управления (11).

Представим функцию W в виде суммы функций, каждая из которых зависит только

от одной из переменных x_v , $v = 1, \dots, n$, и аддитивной константы W_0 , т. е.

$$W = \sum_{v=1}^n \overline{W}_v(x_v, \alpha) + W_0, \quad (14)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Определим канонические переменные p_v , $v = 1, \dots, n$:

$$p_v = \frac{\partial W}{\partial x_v} = \frac{\partial \overline{W}_v(x_v, \alpha)}{\partial x_v}, \quad v = 1, \dots, n. \quad (15)$$

Согласно выражениям (15) переменные p_v , $v = 1, \dots, n$, оказываются функциями только одной x_v и α , в то время как уравнения (1), (4) и условие $p = \frac{\partial W}{\partial x}$ говорят о том, что p_v , $v = 1, \dots, n$, в общем случае должны быть функциями всех x_1, \dots, x_n и остальных p_i , $i = 1, \dots, n$, $i \neq v$.

Это противоречие может быть устранено, если приравнять значениям $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ некоторые определенные комбинации переменных x_1, \dots, x_n , "замороженных" в данный момент времени, т. е.

$$\alpha_v = \alpha_v(x_1, \dots, x_n), \quad v = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Из выражений (11), (13), (15) следует, что p_1, \dots, p_n и управление u_{opt} можно определить на параметрическом семействе поверхностей, которое огибает оптимальная траектория, если в качестве параметров соответствующим образом взять "замороженные" фазовые координаты при условии, что $\det \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_v} \right) \neq 0$, $i, v = 1, \dots, n$.

Фиксируя в качестве параметров "замороженные" в текущий момент времени значения фазовых координат, мы тем самым на семействе поверхностей выделим семейство сингулярных кривых. Назовем их мгновенными решениями $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, поскольку они определяются функцией W , являющейся решением уравнения (13).

Вместе с тем, если W — полный интеграл уравнения (13), то по теореме Якоби имеем:

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha}, \quad p = \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (17)$$

Потребуем, чтобы α и β удовлетворяли преобразованию гамильтониана $H(x, p)$ в гамильтониан $H(\alpha)$, а также каноническим уравнениям, которые ввиду (13) запишутся как

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0. \quad (18)$$

Последние соотношения говорят о том, что для построения мгновенных решений можно проводить условное разделение переменных в уравнении Гамильтона—Якоби (см. [8]). Отметим, что мгновенные решения также должны удовлетворять условию минимизации функционала (2) относительно используемых параметров.

Нахождение оптимального терминального управления на семействе сингулярных кривых (мгновенных решений)

Представим уравнения (5) для p_1, \dots, p_m в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{dp_v}{dt} = & -\frac{\partial H}{\partial x_v} = -p_v \left(\frac{\partial f_v}{\partial x_v} + \frac{\partial B_v}{\partial x_v} u_v \right) - \\ & - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^m p_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_v} + \frac{\partial B_j}{\partial x_v} u_j \right) - \sum_{i=m+1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_v}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$v = 1, \dots, m.$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{dp_v}{dt} + \Phi_v p_v = G_v, \quad v = 1, \dots, m, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_v = & - \left(\frac{\partial f_v}{\partial x_v} + \frac{\partial B_v}{\partial x_v} u_v \right), \\ G_v = & - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^m p_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_v} + \frac{\partial B_j}{\partial x_v} u_j \right) - \sum_{i=m+1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_v}. \end{aligned}$$

Проинтегрировав уравнение (24), получим

$$p_v = \exp(-\int \Phi_v dt) (\int G_v \exp(\int \Phi_v dt) dt - C_v), \quad (21)$$

$$v = 1, \dots, m.$$

Постоянные C_v находятся из условий трансверсальности (7).

Отметим, что знак функций p_v , $v = 1, \dots, m$, как следует из (20), (21), определяется знаком функций G_v [8, 9].

Рассмотрим участок особого управления.

В работе [14] доказано, что ввиду линейного вхождения управления в систему уравнений (1) особое оптимальное управление каждой j -й компоненты может быть найдено из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right) = & 0, \\ k = & 0, 1, \dots, 2p_s \end{aligned} \quad (22)$$

(p_s — порядок сингулярности) при выполнении следующих необходимых условий оптимальности:

$$(-1)^{p_s} \frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{d^{2p_s}}{dt^{2p_s}} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right) \right] \geq 0, \quad (23)$$

$$p_s = 0, 1, 2, \dots$$

если $\det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right\} \equiv 0, i, j = 1, \dots, m$.

Первоначально рассмотрим случай, когда порядок сингулярности равен единице. Тогда, согласно (22), особое управление можно найти из системы уравнений

$$p_j = 0; \frac{dp_j}{dt} = 0; \frac{d^2 p_j}{dt^2} = 0, j = 1, \dots, m. \quad (24)$$

Из первых двух уравнений системы (24) следует, что на участке особого управления, ввиду (20), (21), $G_j = 0$. Разрешим это уравнение относительно переменной x_j . Если корень существует, то

$$x_j = \eta_j(x_v, p_v; v = 1, \dots, n; v \neq j). \quad (25)$$

Третье уравнение системы (28) после преобразований запишем как

$$\frac{dG_j}{dt} = \frac{\partial G_j}{\partial x_j} (f_j + B_j u_{j \text{ osob}}) + \frac{\partial G_j}{\partial \eta_j} \frac{d\eta_j}{dt}.$$

Из последнего соотношения можно найти особое управление:

$$u_{j \text{ osob}} = \frac{1}{B_j} \left(-f_j + \frac{d\eta_j}{dt} \right) \quad (26)$$

при выполнении необходимых условий оптимальности в следующей форме:

$$B_j \frac{\partial G_j}{\partial x_j} \Big|_{x_j = \eta_j} \leq 0, j = 1, \dots, m. \quad (27)$$

Отметим, что корень уравнения $G_j = 0$ обязательно может быть единственным. Тогда каждый корень проверяется на выполнение необходимых (27) и достаточных (2) условий оптимальности.

В случае произвольного порядка сингулярности особое оптимальное управление, ввиду (1), находится из решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$p_j = 0; \frac{dp_j}{dt} = 0; \frac{d^2 p_j}{dt^2} = 0; \quad (28)$$

$$\dots \frac{d^{2p_s} p_j}{dt^{2p_s}} = 0, j = 1, \dots, m$$

при выполнении необходимых условий (23). Как доказано в работе [14], особое управление "проявится" в последней производной.

Но можно находить особое управление из других соображений.

Отметим, что первые три уравнения системы (28) представляют собой уравнения первого порядка сингулярности. Продифференцировав условие сингулярности первого порядка ($2p_z - 1$) раз, можно найти особое управление в виде [8, 9]

$$u_{j \text{ osob}} = f \left(x, \eta_j, \frac{d\eta_j}{dt}, \dots, \frac{d^{2p_z-1} \eta_j}{dt^{2p_z-1}} \right). \quad (29)$$

Вблизи точки первого порядка сингулярности (см. (20, 21)) $\text{sign} p_j = \text{sign} G_j$.

Так как особое управление порядка сингулярности p_z находится при четной производной сопряженной переменной (см. (29)), то ее знак также будет соответствовать знаку функции G_j .

Для нахождения управления на границе допустимого множества управлений из соотношений (1), (2), (5), (12) можно получить выражение

$$u_{\text{opt } j} = \begin{cases} U_{j \text{ min}}^{\text{dop}}, & \text{если } -G_j B_j > 0, \\ u_{j \text{ osob}}, & \text{если } x_j = \eta_j, \\ U_{j \text{ max}}^{\text{dop}}, & \text{если } -G_j B_j < 0, \end{cases} \quad (30)$$

$$j = 1, \dots, m.$$

Увяжем управление с мгновенными решениями.

Используя соотношения (12)–(14), составим уравнение Гамильтона–Якоби (12) в виде [8, 9]

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{W}_j}{\partial x_j} (f_j + B_j u_j) + \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial x_i} f_i = 0. \quad (31)$$

Условно разделим переменные:

$$\frac{\partial \bar{W}_n}{\partial x_n} f_n = \alpha_n; \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial x_i} f_i - \alpha_{i+1} = \alpha_i,$$

$$i = m + 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial \bar{W}_j}{\partial x_j} (f_j + B_j u_j) - \alpha_{j+1} = \alpha_j,$$

$$j = 1, \dots, m, \alpha_{n+1} = 0. \quad (32)$$

Проинтегрируем уравнения, не забывая, что в каждом из них только одна соответствующая переменная, а затем сложим и найдем функцию W :

$$W = \sum_{j=1}^m \int \frac{\alpha_j + \alpha_{j+1}}{f_j + B_j u_j} dx_j + \sum_{i=m+1}^{n-1} \int \frac{\alpha_{i+1} + \alpha_i}{f_i} dx_i + \int \frac{\alpha_n}{f_n} dx_n + W_0.$$

Найдем выражения для составления мгновенных решений $\left(\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)$ (1), (18):

$$\int \frac{dx_m}{f_m + B_m u_m} = \int \frac{dx_{m+1}}{f_{m+1}}; \int \frac{dx_j}{f_j + B_j u_j} = \int \frac{dx_{j+1}}{f_{j+1} + B_{j+1} u_{j+1}}; j = 1, \dots, m-1; (33) \int \frac{dx_i}{f_i} = \int \frac{dx_{i+1}}{f_{i+1}}; i = m+1, \dots, n-1.$$

Из этих соотношений с учетом особенности системы уравнений (1) (так как $\frac{dx_j}{f_j + B_j u_j} = dt$) получим сингулярные модели для мгновенных решений. Минимальная модель определяется числом переменных, входящих в функционал, т. е. получим

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, \alpha), i = m+1, \dots, n. (34)$$

Часть "замороженных" α определяют параметры η , от которых зависит управление. Оставшуюся их часть обозначим как $\{\tilde{\alpha}\}$, т. е. $\{\tilde{\alpha}\} = \{\alpha\}/\{\eta\}$. В итоге получим следующую сингулярную модель, описывающую мгновенные решения:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, \eta_i, \tilde{\alpha}), i = m+1, \dots, n. (35)$$

Проинтегрировав систему уравнений (35), подставим полученные значения x_j на момент $t = T$ в функционал (2) и, минимизируя последний, найдем параметры η как

$$\eta_j = \arg \min_{\eta} (F \|x_i(T) - x_{\text{зад } i}\|), (36) i \geq m+1; i = k, \dots, n),$$

а согласно (26), (30) — и оптимальное управление.

Если правые части модели (35) не содержат x_i , то аналитическое интегрирование модели гарантировано.

Таким образом, синтез оптимального закона управления мы проводим на исходной математической модели системы (1), но вычисляем его (находим) на редуцированной сингулярной модели (35). Такая информационная двойственность задачи нами названа принципом информационного дуализма [11, 15].

Отметим, что в случае, когда система уравнений (35) не интегрируется или нет желания ее интегрировать, можно воспользоваться известным подходом. Задачу нахождения оптимального управления можно рассматривать как задачу вариационного исчисления, как задачу минимизации терминального функционала (2) по параметрам η при наличии ограничений (39), т. е. как задачу Майера в Гамильтоновом или Лагранжевом формализме, но не на исходном n -мерном пространстве, а на редуцированном размерностью $n - k$ ($k \geq m + 1$), что значительно проще [16].

Выделим некоторые особенности данного подхода.

1. Фактически η , а следовательно и управление, мы находим на редуцированном пространстве переменных, а именно, вместо пространства переменных x_1, \dots, x_n используем пространство переменных x_{m+1}, \dots, x_n , т. е. пространство определения функционала (2).

2. Параметры η в момент времени t в пространстве определения функционала (2) формируют оптимальное управление по принципу обратной связи.

3. Параметры η в момент времени t в пространстве определения функционала (2) формируют адаптивное оптимальное управление. Адаптация осуществляется по вычисляемым в каждый момент времени параметрам на мгновенных решениях и соответствующим производным.

Отметим, что редуцированная модель (35) не содержит ограничений на управление и не включает в себя дифференциальные уравнения, описывающие изменения x_1, \dots, x_m . Такую ситуацию можно трактовать и как ситуацию отсутствия информации по x_1, \dots, x_m , а также отсутствия информации по ограничениям на управление.

В работе [17] Ю. Б. Гермейер назвал построение редуцированной модели (35) в случае игровых задач "информационным доопределением игры". Таким образом можно считать принцип информационного дуализма расширением принципа информационного доопределения игры на класс задач терминального оптимального управления.

Поскольку редуцированная модель проще исходной, ее целесообразно применять для вычисления оптимального управления исходной системой (11), что упрощает алгоритмы и приборную реализацию системы управления.

Иллюстрирующий пример

Дана динамическая система

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= A(x); \\ \frac{dx_1}{dt} &= \frac{B}{x_1}(u - \cos x_2); \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 \sin x_2; \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_1 \cos x_2,\end{aligned}$$

где t — независимая переменная (время); $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ — вектор фазовых координат; $A(x)$ — заданная функция; B — константа; u — управление, $u \in [-U, +U]$, U — предельно допустимое значение управления.

Требуется найти управление, минимизирующее функционал

$$J = \sqrt{[x_3(T) - x_{3\text{zad}}]^2 + [x_4(T) - x_{4\text{zad}}]^2},$$

где $x_{3\text{zad}}, x_{4\text{zad}}$ — заданные значения соответствующих координат.

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ и составим гамильтониан задачи оптимизации:

$$\begin{aligned}H &= p_1 A + p_2 \frac{B}{x_1}(u - \cos x_2) + \\ &+ p_3 x_1 \sin x_2 + p_4 x_1 \cos x_2.\end{aligned}$$

Запишем дифференциальные уравнения для сопряженных переменных:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -p_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + p_2 \frac{B}{x_1^2}(u - \cos x_2) - \\ &- p_3 \sin x_2 - p_4 \cos x_2; \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \frac{\partial A}{\partial x_2} - p_2 \frac{B}{x_1} \sin x_2 - \\ &- p_3 x_1 \cos x_2 + p_4 x_1 \sin x_2; \\ \frac{dp_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0; \\ \frac{dp_4}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_4} = 0.\end{aligned}$$

Уравнения трансверсальности при $t = T$ примут вид

$$\begin{aligned}p_1 &= 0; p_2 = 0; \\ p_3 &= \frac{\partial J}{\partial x_3} = \frac{x_3(T) - x_{3\text{zad}}}{\sqrt{[x_3(T) - x_{3\text{zad}}]^2 + [x_4(T) - x_{4\text{zad}}]^2}}; \\ p_4 &= \frac{\partial J}{\partial x_4} = \frac{x_4(T) - x_{4\text{zad}}}{\sqrt{[x_3(T) - x_{3\text{zad}}]^2 + [x_4(T) - x_{4\text{zad}}]^2}}.\end{aligned}$$

Из уравнений для сопряженных переменных следует, что $p_3 = \text{const}$, $p_4 = \text{const}$.

Введем параметр η такой, что $\text{tg} \eta = \frac{p_3}{p_4}$.

Для порядка сингулярности, равного единице, оптимальное управление находится из решения следующей системы уравнений:

$$p_2 = 0; \frac{dp_2}{dt} = 0; \frac{d^2 p_2}{dt^2} = 0.$$

Перепишем ее с учетом полученных результатов:

$$p_2 = 0; x_1 \sin(x_2 - \eta) = 0; \frac{d}{dt}[x_1 \sin(x_2 - \eta)] = 0.$$

Из второго уравнения следует, что $x_2 = \eta$, а из третьего, что $\frac{dx_2}{dt} = \frac{d\eta}{dt}$.

Отметим, что $\eta = \text{const}$. Тогда, соответственно, выражение для нахождения особого оптимального управления примет вид

$$u_{\text{особ}} = \cos \eta,$$

а полный закон управления мы запишем как

$$u = \begin{cases} -U \text{sign} \sin(x_2 - \eta), & \text{если } x_2 \neq \eta; \\ \cos \eta, & \text{если } x_2 = \eta. \end{cases}$$

Для вычисления управления запишем редуцированную модель:

$$\begin{aligned}\frac{dx_3}{dt} &= x_1 \sin \eta; \\ \frac{dx_4}{dt} &= x_1 \cos \eta.\end{aligned}$$

Так как на правом конце траектории $x_2 = \eta = \text{const}$, то из редуцированной системы дифференциальных уравнений при "замороженной" переменной x_1 получим

$$\begin{aligned}x_3(T) &= x_3(t) + x_1 \sin \eta(T - t); \\ x_4(T) &= x_4(t) + x_1 \cos \eta(T - t).\end{aligned}$$

Подставив их в функционал, получим

$$J = \sqrt{[x_3(t) + x_1 \sin \eta(T - t) - x_{3 \text{ zad}}]^2 + [x_4(t) + x_1 \cos \eta(T - t) - x_{4 \text{ zad}}]^2}.$$

Минимизируем функционал по η : $\frac{\partial J}{\partial \eta} = 0$.

Из последнего выражения определим η :

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{x_{3 \text{ zad}} - x_3(t)}{x_{4 \text{ zad}} - x_4(t)}.$$

Тогда управление, вычисленное на редуцированной модели, примет вид

$$u = \begin{cases} -U \operatorname{sign} \sin(x_2 - \eta), & \text{если } x_2 \neq \eta; \\ \cos \eta, & \text{если } x_2 = \eta. \end{cases}$$

Расчеты показали идентичность результатов, полученных из решения краевой задачи методом последовательных приближений и с использованием методом огибающих на редуцированной модели, но при этом вычислительные затраты оказались на порядок меньше.

Приложение нового подхода к задачам терминального игрового управления

Игровые задачи представляют собой развитие задач оптимального терминального управления. Поэтому к ним вполне может быть применен рассмотренный выше подход. Первоначально рассмотрим нелинейную дифференциальную игру "преследование—уклонение" двух одностипных объектов [15].

Задана цена игры — евклидова мера расстояния между центрами масс игроков на конечный момент времени T (заранее не определен):

$$J = \min_{u_p \in U_p} \max_{u_e \in U_e} \sqrt{[x_p(T) - x_e(T)]^2 + [z_p(T) - z_e(T)]^2}, \quad (37)$$

где x_k, z_k — координаты центра масс игроков в левосторонней системе отсчета; u_k — управление игрока; U_k — множество допустимых значений управления; индекс k принимает значения $k = p$ для преследователя и $k = e$ для уклоняющегося,

Цена игры определена на решениях следующей системы дифференциальных уравнений игроков, описывающих движения в горизонтальной плоскости:

$$\begin{aligned} \frac{dV_k}{dt} &= A_k(t); \\ \frac{d\varphi_k}{dt} &= \frac{g}{V_k} u_k; \\ \frac{dx_k}{dt} &= V_k \cos \varphi_k; \\ \frac{dz_k}{dt} &= V_k \sin \varphi_k, \end{aligned} \quad (38)$$

где t — независимая переменная (время); V_k — скорость; φ_k — угол поворота траектории; g — ускорение свободного падения; A — некоторая заданная функция. Множество допустимых значений управления U_k ограничено отрезком $[-N_k, +N_k]$.

При $t = t_0$ (t_0 — начальное значение времени) считаются известными $V_k = V_{k0}$, $\varphi_k = \varphi_{k0}$, $x_k = x_{k0}$, $z_k = z_{k0}$.

Для каждого игрока введем вектор-функцию множителей Лагранжа $\lambda_k = (\lambda_{V_k}, \lambda_{\varphi_k}, \lambda_{x_k}, \lambda_{z_k})$ и составим гамильтониан игровой задачи [2—5]:

$$\begin{aligned} H = \sum_{k=p,e} \left(\lambda_{V_k} A_k + \lambda_{\varphi_k} \frac{g}{V_k} u_k + \right. \\ \left. + \lambda_{x_k} V_k \cos \varphi_k + \lambda_{z_k} V_k \sin \varphi_k \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Запишем дифференциальные уравнения для сопряженных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{V_k}}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial V_k} = \lambda_{\varphi_k} \frac{g}{V_k^2} u_k - \\ &\quad - \lambda_{x_k} \cos \varphi_k - \lambda_{z_k} \sin \varphi_k; \\ \frac{d\lambda_{\varphi_k}}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial \varphi_k} = \\ &= \lambda_{x_k} V_k \sin \varphi_k - \lambda_{z_k} V_k \cos \varphi_k; \\ \frac{d\lambda_{x_k}}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial x_k} = 0; \\ \frac{d\lambda_{z_k}}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial z_k} = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнения трансверсальности при $t = T$ примут вид: $\lambda_{V_k} = 0$, $\lambda_{\varphi_k} = 0$,

$$\begin{aligned} \lambda_{x_k} &= (-1)^j \frac{x_p(T) - x_e(T)}{\sqrt{[x_p(T) - x_e(T)]^2 + [z_p(T) - z_e(T)]^2}}; \\ \lambda_{z_k} &= (-1)^j \frac{z_p(T) - z_e(T)}{\sqrt{[x_p(T) - x_e(T)]^2 + [z_p(T) - z_e(T)]^2}}; \\ k = p, e, \quad j &= \begin{cases} 1, & \text{если } k = p, \\ 2, & \text{если } k = e. \end{cases} \end{aligned}$$

Введем параметр η такой, что $\operatorname{tg} \eta = \frac{\lambda_{zp}}{\lambda_{xp}} = \frac{\lambda_{ze}}{\lambda_{xe}}$. Тогда (с учетом третьего и четвертого уравнений для сопряженных переменных) для $k = p, e$ получим: $\lambda_{xk} = \cos \eta = \operatorname{const}$, $\lambda_{zk} = \sin \eta = \operatorname{const}$.

Согласно работам [1–11] определим оптимальное управление игроков как аргумент, минимизирующий гамильтониан (39) для преследователя или максимизирующий для преследуемого.

Тогда

$$u_{k \text{ opt}} = \begin{cases} -N_k \operatorname{sign} \lambda_{\varphi k}, & \text{если } \lambda_{\varphi k} \neq 0; \\ u_{k \text{ soc}}, & \text{если } \lambda_{\varphi k} = 0, \end{cases} \quad (41)$$

где $u_{k \text{ soc}}$ — особое оптимальное управление игрока.

Как показано в работе [14], для порядка сингулярности, равного единице, особое оптимальное управление находится из решения следующей системы уравнений:

$$\lambda_{\varphi k} = 0; \quad \frac{d\lambda_{\varphi k}}{dt} = 0; \quad \frac{d^2\lambda_{\varphi k}}{dt^2} = 0.$$

Перепишем ее с учетом полученных результатов:

$$\lambda_{\varphi k} = 0; \quad V_k \sin(\varphi_k - \eta) = 0; \quad \frac{d}{dt} [V_k \sin(\varphi_k - \eta)] = 0. \quad (42)$$

Из второго уравнения (42) следует, что на участке особого управления $\varphi_k = \eta$, а из третьего уравнения (42) — что $\frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\eta}{dt}$. Или

$$\frac{g}{V_k} u_{k \text{ soc}} = \frac{d\eta}{dt}.$$

Отметим, что $\eta = \operatorname{const}$. Соответственно, выражение для нахождения особого оптимального управления примет вид

$$u_{k \text{ soc}} = 0. \quad (43)$$

В некоторых случаях полезно сохранить производную по параметру η , например для того, чтобы компенсировать неточность его вычислений или адаптировать к неточности модели. Тогда выражение для особого управления получим в форме

$$u_{k \text{ soc}} = \frac{V_k}{g} \frac{d\eta}{dt}.$$

Придадим выражению для оптимального управления (41) иную форму. Рассмотрим второе уравнение сопряженной системы:

$$\frac{d\lambda_{\varphi k}}{dt} = V_k \sin(\varphi_k - \eta).$$

Проинтегрируем его:

$$\lambda_{\varphi k} = \int V_k \sin(\varphi_k - \eta) dt + C.$$

Постоянная интегрирования C (краевая задача) выбирается из условия реализации соотношения $\lambda_{\varphi k} = 0$ при $\sin(\varphi_k - \eta) = 0$.

Отсюда

$$\operatorname{sign} \lambda_{\varphi k} = -\operatorname{sign} \sin(\varphi_k - \eta).$$

Используя полученные соотношения, преобразуем выражение для оптимального управления. Получим:

$$u_{k \text{ opt}} = \begin{cases} -N_k \operatorname{sign} \sin(\varphi_k - \eta), & \text{если } \sin(\varphi_k - \eta) \neq 0; \\ u_{k \text{ soc}}, & \text{если } \sin(\varphi_k - \eta) = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Напомним, что согласно условиям трансверсальности на правом конце траектории $\eta = \operatorname{const}$.

Из уравнения Гамильтона—Якоби для данной задачи следует ряд редуцированных моделей, из которых минимальная строится в пространстве переменных, входящих в функционал, т. е. получим [15]

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= V_k \cos \varphi_k; \\ \frac{dz_k}{dt} &= V_k \sin \varphi_k \quad (k = p, e). \end{aligned} \quad (45)$$

В этой модели V_k и φ_k — условные константы. Интегрируя уравнения (45), найдем $x_k(T, \varphi_k)$ и $z_k(T, \varphi_k)$. Подставим эти значения в функционал (37) и найдем η как аргумент, оптимизирующий функционал (37):

$$\eta = \arg \min_{\varphi_p} \max_{\varphi_e} \sqrt{[x_p(T) - x_e(T)]^2 + [z_p(T) - z_e(T)]^2}$$

или

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{z_e(T) - z_p(T)}{x_e(T) - x_p(T)}. \quad (46)$$

Отметим, что редуцированная модель (45) не содержит ограничений на управление и не включает в себя дифференциальные уравнения, описывающие изменения V_k и φ_k . Такую ситуацию можно трактовать и как ситуацию отсутствия информации по V_k , φ_k и N_k . В работе [17] Ю. Б. Гермейер назвал построение редуцированной модели (45) "информационным доопределением игры".

Отметим, что в рамках данного подхода редуцированная модель информационного доопределения является одной из множества редуцированных моделей, сформированных из исходной модели игровой задачи.

Можно показать, что метод огибающих применим и для других классов дифференциальных игр: коалиционных, кооперативных, иерархических. Использование редуцированных моделей облегчает реализацию игр, а в ряде случаев позволяет получить интерпретацию, отличную от традиционной.

Заключение

В статье рассмотрены нетрадиционные методы синтеза оптимального терминального управления. Для преодоления проблем, связанных с решением краевой задачи, предлагается новый подход, основанный на использовании метода огибающих.

Известно, что участвующий в формировании оптимального управления вектор множителей Лагранжа касателен к фазовой траектории. Следовательно, он касателен и к каждой сингулярной кривой. Поэтому при некоторых условиях возможен синтез оптимального терминального управления на сингулярных кривых.

Выражения для сингулярных кривых (мгновенных решений) определяют редуцированную математическую модель. Если синтез структуры оптимального управления осуществляется на полной (исходной) математической модели, то для вычисления управления в тот или иной момент времени достаточно использовать редуцированную (упрощенную) модель. Налицо то, что названо принципом информационного дуализма, который можно трактовать как расширение принципа информационного доопределения Ю. Б. Гермейера на задачи оптимального терминального управления. Следовательно,

при отсутствии информации о некоторых проекциях фазового вектора ее недостаток компенсируется переходом на редуцированную модель.

Полученные в статье результаты могут быть использованы при решении ряда прикладных задач, в частности, при разработке систем автоматического управления подвижными объектами.

Список литературы

1. Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 263 с.
2. Салмин В. В., Лазарев Ю. Н., Старинова О. Л. Методы оптимального управления и численные методы в задачах синтеза технических систем. Самара: Изд-во СГАУ, 2007.
3. Измйлов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 304 с.
4. Батенко А. П. Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.
5. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
6. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
7. Сейдж Э. П., Уайт Ч. С. Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 389 с.
8. Иванов В. П. Оптимизация вырожденного управления динамическими системами методом огибающих // Труды СПИИРАН. 2006. Т. 2, Вып. 3. С. 358–365.
9. Иванов В. П. Оптимизация управления динамическими системами на границе допустимого множества управлений методом огибающих // Труды СПИИРАН. Вып. 4. 2007. С. 270–276.
10. Anodina-Andrievskaja E. M., Ivanov V. P. New Methods of Synthesis and Calculation of Optimal Terminal Control // 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF). 2021. DOI: 10.1109/WECONF51603.2021.9470551.
11. Иванов В. П. Информационный дуализм задачи оптимального терминального управления динамическим объектом // Информатизация и связь. 2021. № 2. С. 85–90.
12. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.
13. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 448 с.
14. Габбасов Р., Кириллова Ф. М. Особое оптимальное управление. М.: Наука, 1973. 253 с.
15. Иванов В. П. Информационный дуализм в нелинейной дифференциальной игре "преследование-уклонение" // Информатизация и связь. 2021. № 5. С. 111–116.
16. Анодина-Андриевская Е. М., Иванов В. П. Вариационная задача синтеза оптимального управления // Волновая электроника и инфокоммуникационные системы. Материалы XXV международной научной конференции (WECONF-2022). Санкт-Петербург, 2022. С. 19–28.
17. Гермейер Ю. Б. Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976. 327 с.

New Approach to the Synthesis of Optimal Terminal Control of Nonlinear Dynamic Systems

V. P. Ivanov, Ph.D, Associate Professor, Senior Researcher, vpivanov.spb.su@gmail.com,
St. Petersburg Federal Research Center of Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation

Corresponding author: **Ivanov V. P.**, Ph.D, Associate Professor, Senior Researcher,
St. Petersburg Federal Research Center of Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russian Federation,
e-mail: vpivanov.spb.su@gmail.com

Accepted on September 27, 2022

Abstract

The problem of constructing common solutions to terminal control problems of nonlinear systems is considered here. Previously proven positions are used that the optimal trajectory is an envelope of a parametric family of surfaces (a parametric family of singular curves), and that optimal control can be found on this family. The fact that at each point of the optimal trajectory the vector-function of Lagrange factors is tangent to it, but also tangent to the singular curve, is played out here. A constructive method of constructing singular curves based on conditional separation of variables in the Hamilton-Jacobi equation is given. The "free" parameters of singular curves are based on the condition of minimizing the terminal functionality, which avoids an explicit solution to the boundary problem for a class of nonlinear dynamic systems, and simplifies computational algorithms. Singular curves are described by a reduced (abbreviated) mathematical model. Thus, to synthesize the law of optimal control, we must use the complete (original) mathematical model of the dynamic system, but to calculate it at one time or another, it is enough reduced model. This consideration defines the principle of informational dualism. An illustrative example is given. It has been shown that this approach can be used to solve some classes of differential games.

Keywords: nonlinear dynamic systems, optimal control, envelopes, parametric family, singular curves, reduced models, informational dualism

For citation:

Ivanov V. P. New Approach to the Synthesis of Optimal Terminal Control of Nonlinear Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 1, pp. 3–13.

DOI: 10.17587/mau.24.3-13

References

1. **Alexandrov A. G.** Optimal and adaptive systems, Moscow, Higher School, 1989, 263 p. (in Russian)
2. **Salmin V. V., Lazarev Yu. N., Starinova O. L.** Optimal control methods and numerical methods in the problems of synthesis of technical systems [Electronic resource], Samara, SSAU Publishing House, 2007 (in Russian).
3. **Izmylov A. F., Solodov M. V.** Numerical optimization methods, Moscow, FIZMATLIT, 2005, 304 p. (in Russian).
4. **Batenko A. P.** Terminal control systems, Moscow Radio and Communications, 1984, 160 p. (in Russian).
5. **Krasovsky N. N.** Theory of motion control, Moscow, Nauka, 1968, 476 p. (in Russian).
6. **Boltyansky V. G.** Mathematical methods of optimal control, Moscow, Nauka, 1969, 408 p. (in Russian).
7. **Sage E. P., White C. S.** Optimal control of systems, Moscow, Radio and Communications, 1982, 389 p. (in Russian).
8. **Ivanov V. P.** Optimization of degenerate control of dynamic systems by the envelope method, *Proceedings of SPIIRAN*, 2006, vol. 3, no. 2, pp. 358–365 (in Russian).
9. **Ivanov V. P.** Optimization of control of dynamic systems on the boundary of an acceptable set of controls by the envelope method, *Proceedings of SPIIRAN*, 2007, vol. 4, pp. 270–276 (in Russian).
10. **Anodina-Andrievskaja E. M., Ivanov V. P.** New Methods of Synthesis and Calculation of Optimal Terminal Control, *2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*, 2021, doi: 10.1109/WECONF51603.2021.9470551
11. **Ivanov V. P.** Informational dualism of the problem of optimal terminal control of a dynamic object, Moscow, *Informatization and communication*, 2021, no. 2, pp. 85–90 (in Russian).
12. **Vasiliev F. P.** Optimization methods, Moscow, Factorial press, 2002, 824 p. (in Russian).
13. **Fedorenko R. P.** Approximate solution of optimal control problems, Moscow, Nauka, 1978, 448 p. (in Russian).
14. **Gabbasov R., Kirillova F. M.** Special optimal control, Moscow, Nauka, 1973, 253 p. (in Russian).
15. **Ivanov V. P.** Informational dualism in the nonlinear differential game "pursuit-evasion", Moscow, *Informatization and communication*, 2021, no. 5, pp. 111–116 (in Russian).
16. **Anodina-Andrievskaja E. M., Ivanov V. P.** Variational Problem of Optimal Control Synthesis, *2022 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*, 2022, pp. 19–28 (in Russian).
17. **Hermeyer Yu. B.** Games with non-contradictory interests, Moscow, Nauka, 1976, 327 p. (in Russian).

А. Д. Обухов, д-р техн. наук, доц., obuhov.art@gmail.com,
А. О. Назарова, студент, nazarova.al.ol@yandex.ru,
Тамбовский государственный технический университет

Метод управления на основе технологий компьютерного зрения и машинного обучения для адаптивных систем*

Рассматривается проблема организации процесса управления в адаптивных системах, в которых требуется обеспечить сохранение оптимального состояния системы при изменении внешних условий. Анализ существующих подходов к решению данной задачи показал большую перспективность синергетического эффекта от использования технологий машинного обучения и компьютерного зрения. Проведен системный анализ процесса управления с использованием данных технологий, формализованы его основные объекты, поставлена задача исследования. Для ее решения предложен метод, новизна которого заключается в применении технологий машинного обучения и компьютерного зрения для распознавания и получения сжатого представления о состоянии наблюдаемой среды, объектов наблюдения и управления, а также в унификации процесса выбора управляющей команды на основе трех подходов (системы правил, классифицирующей нейронной сети, машинного обучения с подкреплением). Все этапы метода формализованы, возможность использования технологий машинного обучения (нейронных сетей) для их реализации теоретически обоснована. Практическая значимость разработанного метода заключается в возможности автоматизации деятельности человека-оператора в сложных адаптивных системах за счет использования технологий машинного обучения и компьютерного зрения. Метод апробирован на примере системы управления адаптивной беговой платформой. Проведены экспериментальные исследования для оценки работоспособности метода, его производительности и точности работы при определении состояния объектов наблюдения с использованием технологий компьютерного зрения. В результате работы была доказана высокая эффективность предложенного подхода. Использование технологий компьютерного зрения и машинного обучения позволило не только осуществлять управление адаптивной беговой платформой, но и корректно определять критические ситуации (падение и резкую остановку человека), что повышает безопасность работы системы управления, расширяет ее функциональность в области мониторинга состояния окружающей среды и объектов наблюдения.

Ключевые слова: адаптивные системы, процесс управления, компьютерное зрение, машинное обучение, нейронные сети, распознавание объектов

Введение

Разработка адаптивных систем сопряжена с необходимостью обеспечения их корректного функционирования при различных условиях внешней среды. Это требует реализации гибких алгоритмов управления отдельными компонентами, обладающими высокой стабильностью и надежностью. Вопросам обеспечения адаптивности посвящены работы многих исследователей, так как в условиях повсеместной автоматизации производства, промышленности и в повседневной жизни необходимо осуществить замещение человека-оператора на сравнимую по качеству принятия управленческих решений программную систему.

Адаптивность программной системы может быть достигнута посредством различных механизмов: циклов обратной связи, рефлексии, сервис-ориентированной архитектуры, агентов,

машинного обучения [1]. Анализ данной области выявил множество подходов, относящихся как непосредственно к разработке адаптивных систем, так и к классификации неопределенных внешних объектов и воздействий среды, которые способны привести адаптивную систему к сбою. В работах [2, 3] рассматриваются современные архитектурные подходы к решению проблемы неопределенности, их классификация, влияние на качество работы адаптивных систем. В работе [4] внимание сосредоточено на аспектах проектирования самоадаптивных систем, а также проведена систематизация подходов к самоавтоматизации в условиях неопределенности. Понятие самоадаптации автором разбито на семь "волн", и седьмая волна (адаптация на основе опыта) фокусируется на методах машинного обучения как на средстве улучшения реализации адаптирующейся программной системы, так как растущие масштабы и сложность программного обеспечения требует более гибких и интеллектуальных алгоритмов.

Для отслеживания состояния объектов окружающей среды необходимо применение

*Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках гранта Президента РФ МК-857.2022.1.6.

соответствующих технологий, которые должны позволить получить своевременную и достаточную информацию о воздействиях на адаптивную систему. Если система достаточно изолирована от внешней среды и структурно проста, то решение данной задачи возможно за счет включения в среду большого числа датчиков и сенсоров, отслеживающих состояние, положение и характеристики ключевых объектов наблюдения [5]. Однако в целом такие условия невозможны для широкого класса систем: объекты наблюдения могут постоянно меняться, появляться и выходить из зоны функционирования адаптивной системы, сама эта зона может быть непостоянной и подвижной (например, в системах автопилотирования, видеонаблюдения и так далее) [6]. Но даже в относительно изолированных системах, например, при разработке систем захвата движений, существуют определенные сложности при использовании датчиков и трекеров, приводящие к ограничению свободы движения и перемещения человека в пространстве [7]. Сложности возникают и при распознавании нескольких человек одновременно на большой площади, так как системы трекинга в основном ограничены довольно небольшой зоной.

Все вышесказанное приводит к необходимости использования более универсальных подходов, применимых для решения широких классов задач при наличии в области наблюдения произвольного числа объектов различных категорий. Перспективным инструментом для реализации подобных алгоритмов является использование технологий компьютерного зрения и машинного обучения [8]. В настоящее время они уже успешно применяются при реализации модулей управления для различных адаптивных систем: автопилотов [9], систем умного дома с распознаванием лиц и жестов [10], систем поддержки принятия врачебных решений [11], робототехнических комплексов [12], систем дополненной и виртуальной реальности [13].

Таким образом, дальнейшее совершенствование алгоритмов управления в адаптивных системах является актуальной задачей, имеющей важное значение для развития экономики, промышленности и обеспечения безопасности в различных отраслях. Целью исследования является разработка метода управления, позволяющего имитировать действия человека-оператора в адаптивной системе, что позволит достигнуть высоких показателей эффективно-

сти ее работы. Под эффективностью будем понимать некоторое значение оценочной функции среды наблюдения. Для достижения поставленной цели проведен системный анализ процессов в предметной области, после чего формализованы основные этапы предлагаемого подхода и, наконец, проведена его апробация и проверка в ходе экспериментальных исследований.

Системный анализ предметной области

На первом этапе осуществим системный анализ и формализацию основных компонентов предметной области. Пусть задана некоторая среда функционирования адаптивной системы, для которой необходимо реализовать систему управления. Среда может принимать различные состояния $e_t \in E$, где E — множество всех состояний среды. Под состоянием среды понимается некоторая конечная последовательность значений параметров среды, однозначно определяющая ее ключевые характеристики.

Определение 1. Под *состоянием среды* будем понимать графическую информацию, полученную из кадра $f_t \in F$ в некоторый момент времени t из множества всех отслеживаемых моментов T (или из некоторой последовательности кадров $F_a = \{f_t | t_1 \leq t \leq t_2\}$, $F_a \subseteq F$):

$$e_t \rightarrow \{f_t\}, t \in T. \quad (1)$$

Кадру соответствует кортеж его характеристик:

$$f_t \rightarrow \langle pix_t, sz_x, sz_y \rangle, \quad (2)$$

где pix_t — множество значений пикселей кадра; sz_x, sz_y — размер кадра по оси OX и OY , таким образом, кадр задается трехмерным массивом значений пикселей размером $sz_x \times sz_y \times ch$, где ch — число цветовых каналов.

Каждому состоянию среды также соответствует некоторое множество объектов, которые присутствуют на кадре (объекты наблюдения X) либо которые воздействуют на среду (объекты управления O). Получим:

$$e_t \rightarrow \langle X_t, O_t \rangle, X_t \subseteq X, O_t \subseteq O. \quad (3)$$

Определение 2. Под *объектом наблюдения* $x_i \in X$ понимается распознанная некоторым методом MR сущность v_i среды e_t , обладающая

определенными свойствами и характеристиками, поведением и функциональностью:

$$MR : f_t \rightarrow \{v_i : (\forall i)(x_i \in X_t)\}. \quad (4)$$

Каждый объект наблюдения определяется кортежем:

$$x_i = \langle s_j, k_n, v_i \rangle, \quad (5)$$

где s_j — состояние объекта наблюдения x_i , включающее некоторую конечную последовательность значений параметров, характеризующих объект: $s_j \rightarrow \langle s_{j,1}, s_{j,2}, \dots, s_{j,m} \rangle$; k_n — категория (тип) объекта наблюдения x_i ; v_i — визуальное представление объекта наблюдения x_i в кадре f_t .

В соответствии с работами [14–16] в настоящее время предпочтительнее с точки зрения производительности и точности работы использование в качестве исходных данных не всего изображения f_y , а некоторого его сжатого представления z_t , обладающего намного меньшей размерностью: $|z_t| \ll |sz_x \times sz_y \times ch|$. Такое представление содержит основные признаки среды, но его использование накладывает ограничения на возможность осуществления отображения (4). Поэтому для того, чтобы, с одной стороны, сохранить возможность извлечения объектов наблюдения, а с другой, значительно уменьшить размерность исходных данных, перейдем от представления (5) к следующей форме представления объектов наблюдения:

$$x_i = \langle s_j, k_n, zv_i \rangle, \quad (6)$$

$$NN_{AE}(v_i) = v_i \xrightarrow{\text{Encoder}} zv_i \xrightarrow{\text{Decoder}} v_i,$$

где $NN_{AE}(v_i)$ — автоэнкодер, принимающий на вход и выходящий графическую информацию об объекте наблюдения и формирующий сжатое представление признаков zv_i , обладающее намного меньшей размерностью $|zv_i| \ll |v_i|$.

Определение 3. Под объектом управления (агентом) $o_m \in O$ будем понимать сущность, которая осуществляет взаимодействие со средой, объектами наблюдения и может быть формализована в форме объекта наблюдения, если он присутствует в рамках среды как распознанная сущность, либо в форме без графического представления, если он не принадлежит кадру.

Формализуем представление объекта управления как выбор из двух возможных форм:

$$o_m = \begin{cases} \langle s_j, k_n, v_m \rangle, & \text{если } (\exists MR(f_t) \wedge \exists o_m \in O_t); \\ \langle s_j, k_n \rangle, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, можно сказать, что в рассматриваемой среде задана пара (марковская цепь) $\langle S, P \rangle$, где S — множество состояний объектов среды, а P — множество вероятностей переходов:

$$P = \{p(s_{t+1} | s_t) : (t \in \{0, 1, \dots\}), (s_t, s_{t+1} \in S)\}.$$

Данные переходы существуют и для объектов наблюдения, и для объектов управления. Для осуществления оптимального управления объектом $o_m \in O$ необходимо выбрать из множества управляющих воздействий (действий) A те, что позволяют достигнуть желаемого результата. Чтобы формализовать достижимость результата для объекта управления, необходимо задать функцию оценки состояния среды (награды) $Q : S \times A \rightarrow \mathbb{R}$, ставящую в соответствие текущим состояниям объектов некоторое численное значение, принимающее максимальные значения при их оптимальном состоянии и минимальные — в противном случае. Расчетная формула функции зависит от конкретной предметной области и ключевых свойств объектов среды.

Обозначим MC — метод управления, отвечающий за формирование необходимых управляющих воздействий для компенсации возможных негативных факторов и сохранения максимальных значений целевой функции наград Q . Метод управления в простейшей форме можно представить как множество различных траекторий изменения состояний среды под воздействием множества действий:

$$MC : S_t \rightarrow (\langle S_t, a_t \rangle, \langle S_{t+1}, a_{t+1} \rangle, \langle S_{t+2}, a_{t+2} \rangle, \dots). \quad (8)$$

Иными словами, метод управления должен формировать такую траекторию изменения состояния среды, при которой функция наград будет стремиться к максимуму. В рассматриваемой предметной области, таким образом, реализуется марковский процесс принятия решений, который можно представить в виде четверки $\langle S, A, P, Q \rangle$. Получим схему управления, показанную на рис. 1.

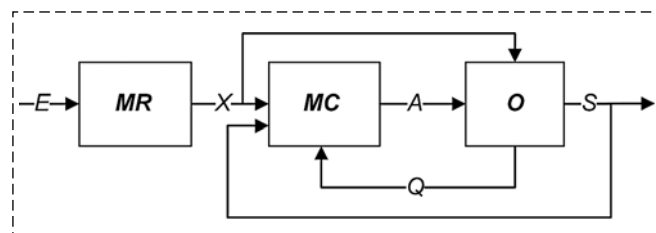


Рис. 1. Схема управления адаптивной системой
Fig. 1. Adaptive system control scheme

На основе проведенного анализа осуществим постановку задачи исследования в формализованной форме.

Формализованная постановка задачи исследования

Необходимо для текущего состояния среды $e_t \in E$, включающей множество объектов наблюдения X_t и управления O_t , каждому из которых соответствует некоторая категория $k_n \in K$ и состояние $s_j \in S$, на основе метода *МС* определить управляющее воздействие $a_k \in A$, при котором целевая функция оценки среды достигает экстремума $Q \rightarrow \max$.

Для решения поставленной задачи предлагается метод управления *МС*, основанный на технологиях машинного обучения и компьютерного зрения и позволяющий автоматизировать следующие процессы: поиск и распознавание категорий объектов ($X \rightarrow K$); оценку состояний объектов ($X \rightarrow S$, $O \rightarrow S$) и определение множества векторов признаков ($X \rightarrow ZV$); выявление свойств среды e_t (нахождение вектора признаков $E \rightarrow Z$); выбор управляющего воздействия $a_k \in A$; оценку состояния среды Q .

Формализация метода управления на основе технологий компьютерного зрения и машинного обучения

Рассмотрим формализованное представление основных этапов предлагаемого метода.

1. Получение информации в момент времени $t \in T$ о среде e_t путем извлечения кадра f_t или некоторого множества кадров ($\{f_t\}$).

2. Реализация процедуры распознавания *MR* объектов наблюдения. Процедура распознавания *MR* основана на технологиях компьютерного зрения и нейронных сетях, что позволяет сегментировать кадр на области, соответствующие объектам заданных категорий. Данная процедура может быть реализована как за счет уже существующей предварительно обученной нейронной сети, так и путем обучения новой сети на собранном наборе данных. Для того, чтобы определить все составляющие процедуры распознавания *MR* для каждого объекта наблюдения, выполним следующие шаги:

2.1. Определение визуального представления для каждого объекта наблюдения $x_i \in X_t$ (сегментирование кадра):

$$NN_r : f_t \rightarrow v_i; v_i = \{h_{ij}\}, \quad (9)$$

где $\{h_{ij}\}$ — множество ключевых точек объекта наблюдения, распознанных нейронной сетью распознавания NN_r , в том числе весь набор пикселей, принадлежащих объекту x_i .

2.2. Получение сжатого представления о среде и объектах наблюдения:

$$NN_{AE}(e_t) \rightarrow z_t; \quad (10)$$

$$NN_{AE}(v_i) \rightarrow zv_i. \quad (11)$$

2.3. Определение категории объектов с применением нейронных сетей или иных технологий классификации NN_k :

$$NN_k : zv_i \rightarrow k_n. \quad (12)$$

2.4. Определение состояния объекта с помощью алгоритма классификации или нейронной сети NN_s :

$$NN_s : \langle zv_i, k_n \rangle \rightarrow s_j. \quad (13)$$

2.5. Оценка общего состояния среды как совокупности состояний объекта, существующих в ней в момент времени $t \in T$:

$$S_t = \{s_j : (\forall i)(\langle x_i, s_j \rangle \in e_t)\}. \quad (14)$$

3. Выбор управляющей команды. Процедура выбора управляющей команды может осуществляться по трем различным направлениям, в результате чего определяется метод управления *МС*.

3.1. Управление на основе правил относительно объекта управления. Введем систему продукционных правил следующих видов:

— относительно состояний объектов:

$$\begin{aligned} &\text{ЕСЛИ } \{ \langle \text{состояние объекта управления} \\ &\quad o_m = s_a \rangle \} \\ &\{ \text{И/ИЛИ } \langle \text{состояние объекта наблюдения} \\ &\quad x_i = s_b \rangle \} \\ &\text{ТО } \langle \text{выполнить действие } a_k \rangle; \quad (15) \end{aligned}$$

— относительно состояния всей среды:

$$\begin{aligned} &\text{ЕСЛИ } \{ \langle \text{состояние среды } e_t = S_t \rangle \} \\ &\text{ТО } \langle \text{выполнить действие } a_k \rangle. \quad (16) \end{aligned}$$

Данный подход требует привлечения экспертов для формирования системы правил, однако в ряде технических систем такой подход обеспечивает наибольшую прозрачность и

надежность работы системы управления. Недостатком подхода является некорректная работа системы в случае появления состояний, не попадающих ни под одно из правил.

3.2. Управление на основе классифицирующей нейронной сети для выбора оптимальной команды:

$$NN_c : \{s_j : (s_j \in S_t)\} \rightarrow a_k. \quad (17)$$

Для реализации данного подхода требуется большая выборка размеченных данных для обучения нейронной сети, охватывающих все возможные состояния объектов наблюдения с соответствующими им действиями системы управления. Недостаточная точность нейронной сети может привести к выбору ошибочного действия, а ее переобучение — к некорректной работе на неизвестных сочетаниях состояний объектов.

3.3. Управление на основе максимизации функции оценки и машинного обучения с подкреплением основано на использовании Q-обучения. Данный подход основан на анализе вознаграждения R системы управления вплоть до окончания работы в момент времени w :

$$R = \sum_{t=0}^w r_t. \quad (18)$$

Система управления максимизирует вознаграждение в каждый момент времени t , однако на практике будущие вознаграждения учитываются с поправочными уменьшающими коэффициентами $\gamma < 1$. В теории Q-обучения для определения полного дисконтированного будущего вознаграждения, начиная от текущего момента времени t и до конца работы системы w , используется следующая формула:

$$R_t = r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \dots + \gamma^{w-t} r_w = r_t + \gamma R_{t+1}. \quad (19)$$

Для выбора оптимальной команды необходимо максимизировать значение Q-функции, которая определяется как максимальное дисконтированное будущее вознаграждение при выполнении команды a_k в состоянии S_i :

$$Q(S_i, a_k) = \max(R_{t+1}). \quad (20)$$

Для реализации метода управления на основе Q-обучения необходимо реализовать нейронную сеть, аппроксимирующую выражение (20):

$$NN_q : \langle S, A \rangle \rightarrow R. \quad (21)$$

Для обучения сети NN_q необходимо собрать большой объем данных о среде и поведении объектов в ней либо в реальной системе, либо в ее имитации (абстрактной модели). В процессе функционирования нейронная сеть NN_q для всех возможных состояний S_t будет выбирать действие из множества A таким образом, чтобы в результате его выполнения достигалась наибольшая награда R_{t+1} .

4. Выполнение выбранной управляющей команды a_k . Выбор команды a_k в момент времени $t \in T$ приводит к изменению среды:

$$a_k : S_t \rightarrow S_{t+1}, X_t \rightarrow X_{t+1}, O_t \rightarrow O_{t+1}. \quad (22)$$

5. Определение обратной связи FB — разницы между текущим и следующим состоянием среды:

$$FB_t = \left\langle \begin{array}{l} \Delta S_t = \{s_j : (\forall j)(s_j \notin S_t, s_j \in S_{t+1})\}, \\ \Delta X_t = \{x_i : (\forall i)(x_i \notin X_t, x_i \in X_{t+1})\}, \\ \Delta O_t = \{o_m : (\forall m)(o_m \notin O_t, o_m \in O_{t+1})\} \end{array} \right\rangle. \quad (23)$$

6. Оценка состояния системы. Если используется Q-обучение, то для оценки можно использовать формулу (19). Иначе можно адаптировать данную формулу и привести ее к общему виду функции оценки, которая зависит от нового состояния среды и полученной обратной связи и накапливается с течением времени:

$$Q(S_t, FB_t) = \sum_{i=0}^t q_i. \quad (24)$$

Таким образом, необходимо максимизировать значения функции (24) путем выбора команд, обеспечивающих наибольшее значение q_i . Значение q_i может быть задано на основе оценки характеристик объектов наблюдения, среды или использования иных расчетных формул.

Для успешного применения предложенного метода для решения задач анализа и обработки информации рассмотрим обоснование возможности осуществления отображений (9)—(13), (17), (21). Введем следующие обозначения:

G_i — i -е отображение из набора (9)—(13), (17), (21);

X_i — входные данные отображения G_i , имеющие форму $NX_i = \{nx_{ij}\}$, где $|NX_i|$ — число измерений формата входных данных, nx_{ij} — размер данных по j -му измерению;

Y_i — выходные данные отображения G_i , имеющие форму $NY_i = \{ny_{ij}\}$, где $|NY_i|$ — число измерений формата выходных данных, ny_{ij} — размер данных по j -му измерению;

NN_i — нейронная сеть, реализующая отображение G_i .

Проанализируем формат входных и выходных данных для каждого отображения G_i :

1) X_1 — множество пикселей (кадр), $|NX_1| = 3$, Y_1 — множество координат пикселей, $|NY_1| = 2$;

2) X_2 — множество пикселей (кадр или их последовательность), $|NX_2| \in \{3,4\}$, Y_2 — вектор, $|NY_2| = 1$;

3) X_3 — множество координат пикселей, $|NX_3| = 3$, Y_3 — вектор, $|NY_3| = 1$;

4) X_4 — вектор, $|NX_4| = 1$, Y_4 — категория (целое число), $|NY_4| = 1$;

5) X_5 — кортеж из вектора и категории (целого числа), $|NX_5| = 2$, Y_5 — состояние (целое число), $|NY_5| = 1$;

6) X_6 — множество состояний, вектор, $|NX_6| = 1$, Y_6 — команда (целое число), $|NY_6| = 1$;

7) X_7 — кортеж из множества состояний и действий, $|NX_7| = 1$, Y_7 — вектор значений вознаграждения для каждого действия, $|NY_7| = 1$.

Для обоснования возможности выполнения всех отображений G_i с применением нейронных сетей NN_i сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *Каждому $|NX_i|$ -мерному вектору входных данных X_i , заданному в отображении G_i , можно поставить в соответствие $|NY_i|$ -мерный вектор выходных данных Y_i , полученный в ходе преобразования X_i нейронной сетью NN_i , с отклонением от $|NY_i|$ -мерного вектора требуемых значений Y_i^* не более, чем на ε при условии, что отображение $X_i \rightarrow Y_i$ непрерывно.*

Доказательство. На первом этапе убедимся, что отображение $X_i \rightarrow Y_i$ удовлетворяет данным условиям. Изложенный выше анализ X_i и Y_i показывает, что каждое отображение G_i является непрерывным: кадру или набору пикселей всегда можно поставить в соответствие некоторый вектор (для отображений G_1, G_2, G_3), вектору — значение категории (для G_4, G_5, G_6) или вознаграждения (для G_7). Предположим, что это не так. Тогда получим, что для отображений G_1, G_2, G_3 невозможно выполнить преобразование пикселей таким образом, чтобы получить некоторый вектор. Однако принцип работы сверточных нейронных сетей и алгоритмов сжатия изображений позволяет осуществить такую свертку или сжатие для любых изображений. Если для отображений G_4, G_5, G_6 входному вектору x_{ij} нельзя поставить ни одну категорию $y_{ij} \in Y_i$, то множество Y_i может быть расширено дополнительной категорией y_{uj} , соответствующей x_{ij} ("неизвестное" состо-

яние, "пустая" команда и так далее). Наконец, для любого сочетания состояний и команд отображения G_7 может быть задана награда, в том числе нулевая, если такое сочетание не присутствовало в исходной выборке. Если $X_i \rightarrow Y_i$ задано табличными значениями, оно может быть заменено сплайном некоторой степени, что обеспечивает непрерывность каждого G_i .

На основе доказательства теорем Хехт—Нильсена и Колмогорова—Арнольда [17] возможно аппроксимировать многомерную функцию $X_i \rightarrow Y_i$ с помощью некоторой нейронной сети (минимум трехслойной) с конечным числом элементов для любой размерности векторов $|NX_i|$ и $|NY_i|$. Теорема Цыбенко гласит, что при условии непрерывности отображения G_i его можно аппроксимировать нейронной сетью с ошибкой, не превышающей ε . Таким образом, мы можем успешно применять нейронные сети NN_i для каждого отображения G_i .

Практическое применение метода при реализации системы управления беговой платформой

Рассмотрим пример апробации разработанного метода при реализации системы управления беговой платформой. Общий вид экспериментальной установки представлен на рис. 2. Используемая в эксперименте беговая платформа обладает следующими характеристиками: длина полотна = 1,5 м, ширина полотна = 0,9 м, диапазон регулировки скорости полотна = [0,01; 3,5] м/с [18]. Для реализации системы управления использовали камеру с максимальным разрешением кадра 1920×1080 пикселей и записью до 60 кадров в секунду. Необходимо организовать регулирование скорости адаптивной беговой платформы с использованием технологий машинного обучения и компьютерного зрения на основе разработанного метода.

На первом этапе соберем последовательность кадров с камеры, используя библиотеку *OpenCV*. В результате получена информация о движении человека в течение 17 026 кадров, в процессе которых наблюдаемый объект стоял, двигался, ходил и падал. Обозначим состояния объектов наблюдения следующим образом: для человека x_1 — остановка ($s_{1,1}$), движение ($s_{1,2}$), падение ($s_{1,3}$); для беговой платформы x_2 — размеры дорожки ($s_{2,1}$), относительное положение человека на дорожке в диапазоне от 0 до 1 ($s_{2,2}$), скорость беговой дорожки ($s_{2,3}$).



Рис. 2. Распознанные объекты: беговая платформа и человек на ней
 Fig. 2. Recognized objects: the running platform and the person on it

Для распознавания объектов используем два инструмента. Так как беговая платформа и камера зафиксированы относительно друг друга, то для распознавания платформы на кадре можно использовать класс *TrackerKCF* из набора *OpenCV-Tracker*, позволяющий отслеживать с некоторой точностью фрагмент изображения с высокой производительностью. Для распознавания человека используем предварительно обученную нейронную сеть *MediaPipe Pose*, отслеживающую 33 ключевые точки, а также позволяющую сегментировать человека на кадре. Результат второго этапа (сегментирование основных объектов наблюдения) представлен на

рис. 2. Таким образом, для двух основных объектов посредством технологий компьютерного зрения и нейронных сетей получены их сжатые представления — 33 точки для человека и 4 точки для дорожки (записаны в состоянии $s_{2,1}$), что значительно сокращает объем обрабатываемых данных.

У каждого из объектов наблюдения задана только одна категория, поэтому необходимости в проведении этапа 2.3 нет. Далее в соответствии с этапом 2.4 осуществим классификацию состояния человека на три состояния: остановка ($s_{1,1}$), движение ($s_{1,2}$), падение ($s_{1,3}$). Множество записанных кадров разделено на три группы, соответствующие этим состояниям: 7347 кадров для состояния $s_{1,1}$, 7273 кадров — для $s_{1,2}$, 2406 — для $s_{1,3}$. Для решения задачи классификации обучена нейронная сеть NN_s из трех слоев, на вход передается вектор из пяти записей по 33 точки с двумя координатами (последовательность поз человека), на выход — метка состояния. В качестве функции потерь используется перекрестная энтропия, оптимизатор — *Adam*. После обучения итоговая точность классификации состояния составила 88 %, на тестовых данных — до 71 %. Процесс обучения отражен на рис. 3.

Результат работы нейронной сети представлен на рис. 4 (см. вторую сторону обложки). Нейронная сеть успешно фиксирует в ходе анализа последовательности из пяти кадров состояние человека и может использоваться для получения соответствующего управляющего воздействия. Ее можно применять для фиксации состояния человека (его резкой остановки или падения), что дополнительно повышает безопасность использования беговой платформы. Данный момент особенно актуален при

применении технологий компьютерного зрения несмотря на то, что в процессе взаимодействия с беговой дорожкой человек находится в страховке.

Оценим скорость распознавания состояния человека. Камера захватывает кадры с частотой 60 кадров в секунду, для распознавания позы используется последовательность из пяти кадров. Таким образом, время распознавания составляет минимум 83 мс плюс время обработки

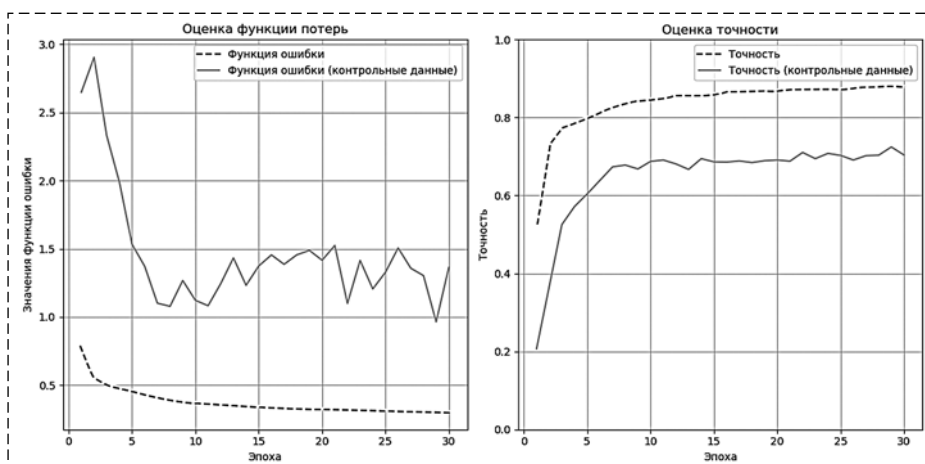


Рис. 3. Процесс обучения нейронной сети классификации поз человека
 Fig. 3. The process of training a neural network for the classification of human poses

кадра (30 мс на кадр). Поза может быть распознана через 233 мс или ранее (так как нейронная сеть может обработать позу раньше, чем зафиксирует пять кадров), что является адекватной скоростью реакции системы.

Под состоянием объекта "дорожка" $s_{2,2}$ в данном эксперименте будем понимать положение человека относительно дорожки в диапазоне от 0 до 1, где нулю соответствует левый край полотна, а 1 — правый. Определение этого состояния можно осуществить путем вычисления положения центральной точки силуэта человека относительно платформы. После завершения этапа 2 будет выполнена обработка информации для распознавания, классификации и позиционирования объектов в кадре. Если человека находится в состоянии $s_{1,1}$ (остановка) или $s_{1,3}$ (падение), то состояние дорожки игнорируется. Результат определения позиции человека на дорожке представлен на рис. 5 (см. вторую сторону обложки).

Далее в соответствии с этапом 3 необходимо выбрать управляющую команду на основе состояния объектов. При этом ввиду небольшого числа объектов воспользуемся подходом, изложенным на этапе 3.1. Пусть задано три класса команд: "стоп", "ускорение", "замедление". Введем правила:

- если объект пользователя находится в состоянии $s_{1,2}$, и состояние платформы $s_{2,2} > 0,5$, то выполнить действие "ускорение";
- если объект пользователя находится в состоянии $s_{1,2}$, и состояние платформы $s_{2,2} < 0,5$, то выполнить действие "замедление";
- если объект пользователя находится в состоянии $s_{1,1}$ или $s_{1,3}$, то выполнить действие "стоп".

В качестве обратной связи системы управления используется текущая скорость платформы $s_{2,3}$, которая изменяется на следующей итерации в зависимости от управляющего воздействия. В качестве функции оценки среды используем текущее отклонение человека относительно центральной точки (положение 0,5 на платформе). Будем использовать следующую формулу:

$$Q = 1 - \frac{\sum_{t=0}^T |s_{2,3}(t) - 0,5|}{T}, \quad (25)$$

где $s_{2,3}(t)$ — состояние дорожки, характеризующее относительное положение человека, в момент времени t . График изменения положения человека в ходе испытания представлен на рис. 6.

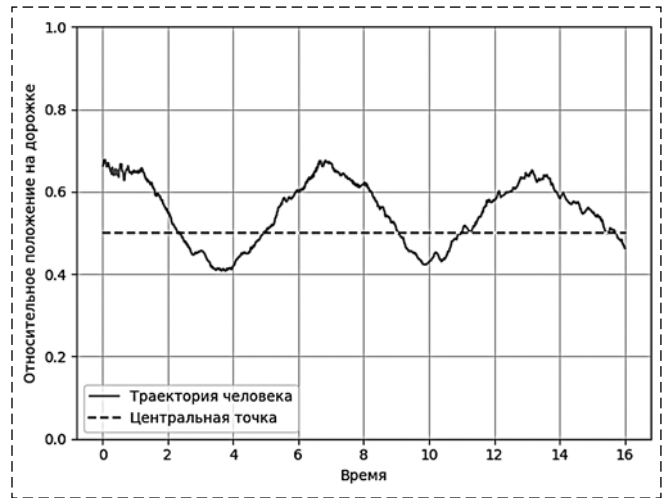


Рис. 6. Пример определения позиции человека
Fig. 6. The example of determining the position of a person

При движении в течение 16 с получено значение функции наград, равное 0,92, таким образом, отклонение от эталонной траектории составило всего 8 %, что можно считать допустимым результатом, сравнимым со значениями, полученными при участии человека-оператора (0,85...0,95). Таким образом, разработанный метод был успешно апробирован в программном обеспечении системы управления беговой платформы.

Заключение

В ходе анализа предметной области адаптивных систем выявлена необходимость в разработке обобщенного подхода к организации процесса управления с применением технологий компьютерного зрения. В результате системного анализа формализованы ключевые составляющие процесса управления и поставлена задача исследования: необходимо определить набор управляющих воздействий для каждого состояния среды наблюдения на основе выбранной целевой функции оценки. Для решения поставленной задачи предложен метод, основанный на технологиях машинного обучения и компьютерного зрения, формализованы его этапы, представлено теоретическое обоснование его реализации. Новизна метода заключается в применении технологий машинного обучения и компьютерного зрения для распознавания и получения сжатого представления о состоянии наблюдаемой среды, объектов наблюдения и управления, унификации процесса выбора управляющей команды на основе трех подходов (система правил, клас-

сифицирующая нейронная сеть, машинное обучение с подкреплением). Представленный метод позволяет автоматизировать деятельность человека-оператора в адаптивных системах.

Метод апробирован при реализации системы управления адаптивной беговой платформой, проведена оценка его точности, быстродействия и эффективности. Полученные практические результаты подтвердили работоспособность метода. Применение технологий компьютерного зрения в рамках метода позволило успешно распознавать с высокой точностью (до 88 %) текущую позу человека, что может быть использовано для оценки его состояния и предотвращения опасных для здоровья пользователя ситуаций.

Проведенные экспериментальные исследования позволили также выявить ограничения используемых технологий компьютерного зрения: необходимость разделения программного кода на отдельные потоки выполнения для обеспечения высокого уровня производительности; высокая вероятность искажения объекта наблюдения в кадре при его быстром перемещении, что затрудняет работу нейронных сетей; определенные требования к оборудованию (разрешение и частота кадров видеопотока). Решением данных проблем может быть использование высокочастотных камер (от 60 и более кадров в секунду) с большим разрешением кадра (от 1920×1080 пикселей), обеспечивающих более низкую вероятность получения смазанных и нечетких изображений. Таким образом, при использовании технологий компьютерного зрения необходимо учитывать сильные и слабые стороны данного инструмента, качество видеопотока, так как эффективность работы алгоритмов в этой области напрямую зависит от исходных данных.

Список литературы

1. Raibulet C., Arcelli Fontana F., Caretoni S. A preliminary analysis of self-adaptive systems according to different issues // *Software Quality Journal*. 2020. Vol. 28, N. 3. P. 1213–1243.

2. Weyns D., Bencomo N., Calinescu R., Camara J., Ghezzi C., Grassi V., Tamburrelli G. Perpetual assurances for self-adaptive systems, *Software Engineering for Self-Adaptive Systems III*, Assurances. Springer, Cham. 2017. P. 31–63.

3. Mahdavi-Hezavehi S., Avgeriou P., Weyns D. A classification framework of uncertainty in architecture-based self-adaptive systems with multiple quality requirements // *Managing Trade-Offs in Adaptable Software Architectures*. Morgan Kaufmann, 2017. P. 45–77.

4. Weyns D. *An Introduction to Self-adaptive Systems: A Contemporary Software Engineering Perspective*. John Wiley & Sons. 2020.

5. Casadei R., Fortino G., Pianini D., Russo W., Savaglio C., Virolini M. Modelling and simulation of opportunistic IoT services with aggregate computing // *Future Generation Computer Systems*. 2019. Vol. 91. P. 252–262.

6. Chen Y., Li W., Sakaridis C., Dai D., Van Gool L. Domain adaptive faster r-cnn for object detection in the wild // *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. 2018. P. 3339–3348.

7. Colyer S. L., Evans M., Cosker D. P., Salo A. I. A review of the evolution of vision-based motion analysis and the integration of advanced computer vision methods towards developing a markerless system // *Sports medicine-open*. 2018. Vol. 4, N. 1. P. 1–15.

8. Lyons N. Deep Learning-based Computer Vision Algorithms, Immersive Analytics and Simulation Software, and Virtual Reality Modeling Tools in Digital Twin-driven Smart Manufacturing // *Economics, Management, and Financial Markets*. 2022. Vol. 17, N. 2. P. 67–81.

9. Ge M., Zhang Y. Visual Autopilot Decision System Based on Deep Learning, 3D Imaging Technologies—Multi-dimensional Signal Processing and Deep Learning // Springer, Singapore. 2021. P. 329–335.

10. Oudah M., Al-Naji A., Chahl J. Hand gesture recognition based on computer vision: a review of techniques // *Journal of Imaging*. 2020. Vol. 6, N. 8. P. 73.

11. González Izard S., Sánchez Torres R., Alonso Plaza Ó., Juanes Méndez J. A., García-Peñalvo F. J. Nextmed: automatic imaging segmentation, 3D reconstruction, and 3D model visualization platform using augmented and virtual reality // *Sensors*. 2020. Vol. 20, N. 10. P. 2962.

12. Kazemian A., Yuan X., Daytalab O., Khoshnevis B. Computer vision for real-time extrusion quality monitoring and control in robotic construction // *Automation in Construction*. 2019. Vol. 101. P. 92–98.

13. Yang L. L., Huang J., Feng T. I. A. N., Hong-An W. A. N. G., Guo-Zhong D. A. I. Gesture interaction in virtual reality // *Virtual Reality & Intelligent Hardware*. 2019. Vol. 1, N. 1. P. 84–112.

14. Cheng Z., Sun H., Takeuchi M., Katto J. Deep convolutional autoencoder-based lossy image compression // *2018 Picture Coding Symposium (PCS)*. IEEE. 2018. P. 253–257.

15. Zhou L., Cai C., Gao Y., Su S., Wu J. Variational autoencoder for low bit-rate image compression // *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*. 2018. P. 2617–2620.

16. Tsimpouris E., Tsakiridis N. L., Theocharis J. B. Using autoencoders to compress soil VNIR—SWIR spectra for more robust prediction of soil properties // *Geoderma*. 2021. Vol. 393. P. 114967.

17. Бутырский Е. Ю., Кувалдин И. А., Чалкин В. П. Аппроксимация многомерных функций // *Научное приборостроение*. 2010. Т. 20, № 2. С. 82–92.

18. Krasnyanskiy M. N., Obukhov A. D., Dedov D. L. Control System for an Adaptive Running Platform for Moving in Virtual Reality // *Automation and Remote Control*. 2022. Vol. 83, N. 3. P. 355–366.

A Control Method Based on Computer Vision and Machine Learning Technologies for Adaptive Systems

A. D. Obukhov, obuhov.art@gmail.com, A. O. Nazarova, nazarova.al.ol@yandex.ru,
Tambov State Technical University, Tambov, 392000, Russian Federation

Corresponding author: Obukhov Artem D., Dr. of Tech. Sc., Associate Professor,
Tambov State Technical University, Tambov, 392000, Russian Federation,
e-mail: obuhov.art@gmail.com

Abstract

We consider the problem of organizing the control process in adaptive systems, in which it is required to ensure the preservation of the optimal state of the system when external conditions change. The analysis of existing approaches to its solution showed great promise in the synergistic effect of using machine learning and computer vision technologies. A system analysis of the management process using these technologies has been carried out. Its primary objects have been formalized, and the research task has been set. To solve it, a method is proposed, the novelty of which lies in the usage of machine learning and computer vision technologies for recognizing and obtaining a compressed idea of the state of the observed environment, objects of observation and control. And also, the choice of the control team was unified, based on three approaches: a system of rules, a neural network with classification, and machine learning with reinforcement. All stages of the method are formalized, and the possibility of using machine learning technologies (neural networks) for their implementation is theoretically substantiated. The practical significance of the developed method lies in the possibility of automating the activities of a human operator in complex adaptive systems through the use of machine learning and computer vision technologies. The method was tested on the example of an adaptive running platform control system. Experimental studies have been carried out to assess the efficiency of the method, its performance and accuracy of work in determining the state of objects of observation using computer vision technologies. The result of the work is the proven high efficiency of the proposed approach. The usage of computer vision and machine learning technologies made it possible not only to control the adaptive running platform but also to determine critical situations (falling or sudden stop of a person), which increases the safety of the control system, expands its functionality in monitoring the state of the environment and objects of observation.

Keywords: adaptive systems, process management, computer vision, machine learning, neural networks, object recognition

Acknowledgements: This article was prepared with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the grant of the President of the Russian Federation MK-857.2022.1.6.

For citation:

Obukhov A. D., Nazarova A. O. A Control Method Based on Computer Vision and Machine Learning Technologies for Adaptive Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 1, pp. 14–23.

DOI: 10.17587/mau.24.14-23

References

1. Raibulet C., Arcelli Fontana F., Carettoni S. A preliminary analysis of self-adaptive systems according to different issues, *Software Quality Journal*, 2020, vol. 28, no. 3, pp. 1213–1243.
2. Weyns D., Bencomo N., Calinescu R., Camara J., Ghezzi C., Grassi V., Tamburrelli G. Perpetual assurances for self-adaptive systems, *Software Engineering for Self-Adaptive Systems III. Assurances*. Springer, Cham, 2017, pp. 31–63.
3. Mahdavi-Hezavehi S., Avgeriou P., Weyns D. A classification framework of uncertainty in architecture-based self-adaptive systems with multiple quality requirements, *Managing Trade-Offs in Adaptable Software Architecture*, Morgan Kaufmann, 2017, pp. 45–77.
4. Weyns D. An Introduction to Self-adaptive Systems: A Contemporary Software Engineering Perspective, John Wiley & Sons, 2020.
5. Casadei R., Fortino G., Pianini D., Russo W., Savaglio C., Viroli M. Modelling and simulation of opportunistic IoT services with aggregate computing, *Future Generation Computer Systems*, 2019, vol. 91, pp. 252–262.
6. Chen Y., Li W., Sakaridis C., Dai D., Van Gool L. Domain adaptive faster r-cnn for object detection in the wild, *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2018, pp. 3339–3348.
7. Colyer S. L., Evans M., Cosker D. P., Salo A. I. A review of the evolution of vision-based motion analysis and the integration of advanced computer vision methods towards developing a markerless system, *Sports medicine-open*, 2018, vol. 4, no. 1, pp. 1–15.
8. Lyons N. Deep Learning-based Computer Vision Algorithms, Immersive Analytics and Simulation Software, and Virtual Reality Modeling Tools in Digital Twin-driven Smart Manufacturing, *Economics, Management, and Financial Markets*, 2022, vol. 17, no. 2, pp. 67–81.
9. Ge M., Zhang Y. Visual Autopilot Decision System Based on Deep Learning, *3D Imaging Technologies—Multi-dimensional Signal Processing and Deep Learning*, Springer, Singapore, 2021, pp. 329–335.
10. Oudah M., Al-Naji A., Chahl J. Hand gesture recognition based on computer vision: a review of techniques, *Journal of Imaging*, 2020, vol. 6, no. 8, pp. 73.
11. González Izard S., Sánchez Torres R., Alonso Plaza Ó., Juanes Méndez J. A., García-Peñalvo F. J. Nextmed: automatic imaging segmentation, 3D reconstruction, and 3D model visualization platform using augmented and virtual reality, *Sensors*, 2020, vol. 20, no. 10, 2962 p.
12. Kazemian A., Yuan X., Davtalab O., Khoshnevis B. Computer vision for real-time extrusion quality monitoring and control in robotic construction, *Automation in Construction*, 2019, vol. 101, pp. 92–98.
13. Yang L. I., Huang J., Feng T. I. A. N., Hong-An W. A. N. G., Guo-Zhong D. A. I. Gesture interaction in virtual reality, *Virtual Reality & Intelligent Hardware*, 2019, vol. 1, no. 1, pp. 84–112.
14. Cheng Z., Sun H., Takeuchi M., Katto J. Deep convolutional autoencoder-based lossy image compression, *2018 Picture Coding Symposium (PCS)*. IEEE, 2018, pp. 253–257.
15. Zhou L., Cai C., Gao Y., Su S., Wu J. Variational autoencoder for low bit-rate image compression, *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops*, 2018, pp. 2617–2620.
16. Tsimpouris E., Tsakiridis N. L., Theocharis J. B. Using autoencoders to compress soil VNIR–SWIR spectra for more robust prediction of soil properties, *Geoderma*, 2021, vol. 393, 114967 p.
17. Butyrskij E. Yu., Kuvaldin I. A., Chalkin V. P. Approximation of multidimensional functions, *Nauchnoe Priborostroenie*, 2010, vol. 20, no. 2, pp. 82–92 (in Russian).
18. Krasnyanskiy M. N., Obukhov A. D., Dedov D. L. Control System for an Adaptive Running Platform for Moving in Virtual Reality, *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 3, pp. 355–366.

T. T. Omorov¹, Corresponding-Member of the NAS KR, Dr. Tech. Sc., Head of the Laboratory, omorovtt@mail.ru,
K. E. Zakiriae², Senior Teacher, kubz1@mail.ru,
B. K. Takyrbashev¹, Cand. Sc., Senior Researcher, b.takyrbashev@gmail.com,
Zh. S. Imanakunova³, Cand. Sc., Associate Professor, j.imanakunova@kstu.kg,
¹ Institute of Mechanical Engineering and Automation, National Academy
of Science of Kyrgyz Republic (NAS KR), Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic,
² IssyKul State University, Karakol, 722200, Kyrgyz Republic,
³ Kyrgyz State Technical University, Bishkek, 720044, Kyrgyz Republic

Corresponding author: **Omorov T. T.**, Dr. Tech. Sc., Head of the Laboratory, Institute of Mechanical Engineering and Automation of the NAS KR, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, e-mail: omorovtt@mail.ru

Accepted on September 27, 2022

Automated Control of Unauthorized Power Take-Offs in a Distributed Electrical Network

Abstract

A distributed electrical network (DEN) with a voltage of 0.4 kV operating in an unsymmetric mode is considered as an object of automated control. The problem of identification of places and control of unauthorized power take-offs (UPTO) in the DEN in the conditions of functioning of the automated system of control and accounting of electricity (ACMSE) is formulated. The primary source information for its solution is the data obtained from the head and subscriber electricity meters by synchronized remote measurements at discrete points in time. This problem belongs to the class of problems in which there is significant uncertainty about the current state of the object under study and the parameters of external disturbing influences, which are unauthorized consumers of electricity. Under these conditions, the primary measurement data on the characteristics of the network subscribers' loads received from the counters of the automated system and recorded in its database are insufficient to solve the problem under consideration. In this regard, in order to reduce the level of uncertainty and obtain additional necessary information about the state of the object, the concept of a virtual DEN model is introduced into consideration, designed to describe its desired state, which is determined by the absence of these external random disturbances in the network. A new method for solving the formulated problem is proposed, based on the concept of a virtual DEN model. The conditions for identifying the current state of the DEN have been obtained. For this purpose, the desired input phase currents of the virtual network are determined by introducing equivalent complex resistances of certain parts of the three-phase network. The vectors of the effective values of currents and voltages on the loads of subscribers and inter-subscriber sections of the virtual network are identified. Criterion functions are introduced that determine the deviations of the corresponding components of the stress vectors on the loads of subscribers of the real DEN and its virtual model. Based on these functions, an identification criterion and an algorithm for monitoring unauthorized power take-offs in a three-phase distributed network are formulated. The obtained results are oriented for the creation of algorithmic and special software for the subsystem of automated control of UPTO as part of the ACMSE.

Keywords: distributed network, virtual network, unauthorized power take-off, identification and control method

For citation:

Omorov T. T., Zakiriae K. E., Takyrbashev B. K., Imanakunova Zh. S. Automated Control of Unauthorized Power Take-Offs in a Distributed Electrical Network, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 1, pp. 24–32.

DOI: 10.17587/mau.24.24-32

УДК 620.9: 681.5

DOI: 10.17587/mau.24.24-32

Т. Т. Оморов¹, чл.-корр. НАН КР, д-р техн. наук, зав. лабораторией, omorovtt@mail.ru,
К. Э. Закиряев², ст. преподаватель, kubz1@mail.ru,
Б. К. Такырбашев¹, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., b.takyrbashev@gmail.com,
Ж. С. Иманакунова³, канд. техн. наук, доц., j.imanakunova@kstu.kg,
¹ Национальная академия наук Кыргызской Республики (НАН КР),
Институт машиноведения и автоматики, г. Бишкек,
² Иссык-Кульский государственный университет, г. Каракол,
³ Кыргызский государственный технический университет, г. Бишкек

Автоматизированный контроль несанкционированных отборов мощностей в распределенной электрической сети

В качестве объекта автоматизированного контроля рассматривается распределенная электрическая сеть (РЭС) напряжением 0,4 кВ, функционирующая в несимметричном режиме. Формулируется задача идентификации мест и

контроля несанкционированных отборов мощностей (НОМ) в РЭС в условиях функционирования автоматизированной системы контроля и учета электроэнергии (АСКУЭ). Первичной исходной информацией для ее решения являются данные, полученные с головного и абонентских счетчиков электроэнергии путем синхронизированных дистанционных измерений в дискретные моменты времени. Данная проблема относится к классу задач, в которых имеется существенная неопределенность о текущем состоянии исследуемого объекта и параметрах внешних возмущающих воздействий, в качестве которых выступают несанкционированные потребители электроэнергии. В указанных условиях первичные измерительные данные о характеристиках нагрузок абонентов сети, полученные со счетчиков автоматизированной системы и записанные в ее базу данных, являются недостаточными для решения рассматриваемой задачи. В связи с этим в целях снижения уровня неопределенности и получения дополнительной необходимой информации о состоянии объекта в рассмотрение вводится понятие виртуальной модели РЭС, предназначенной для описания ее желаемого состояния, которое определяется отсутствием в сети указанных внешних случайных возмущений. Предложен новый метод решения сформулированной задачи, основанный на концепции виртуальной модели РЭС. Получены условия для идентификации текущего состояния РЭС. Для этой цели определены входные желаемые фазные токи виртуальной сети путем введения эквивалентных комплексных сопротивлений определенных частей трехфазной сети. Идентифицированы векторы действующих значений токов и напряжений на нагрузках абонентов и межабонентских участках виртуальной сети. Введены критериальные функции, определяющие отклонения соответствующих компонентов векторов напряжений на нагрузках абонентов реальной РЭС и ее виртуальной модели. На основе указанных функций сформулирован критерий идентификации и алгоритм контроля несанкционированных отборов мощностей в трехфазной распределенной сети. Полученные результаты ориентированы для создания алгоритмического и специального программного обеспечения подсистемы автоматизированного контроля НОМ в составе АСКУЭ.

Ключевые слова: распределенная сеть, виртуальная сеть, несанкционированный отбор мощности, метод идентификации и контроля

Introduction

Electricity generated by generating systems is supplied to its consumers through low-voltage distributed electric networks (DEN). One of the main indicators of the quality and efficiency of DEN is the loss of electricity in them, which is caused by a number of factors. The latter, along with the asymmetry of currents and voltages [1–3] and the nonlinear properties of individual loads [4, 5] of subscribers of three-phase networks, also include uncontrolled current leakage in them, including unauthorized power take-offs (UPTO) [6–8]. The volumes of UPTO in certain periods of time reach significant values.

As is known, in recent years, in order to automate information processes in DEN, new digital technologies have been widely introduced in the form of automated control and metering systems for electricity (ACMSE) [9, 10], which are elements of Smart Grid technology [11, 12]. An analysis of the functional structure of modern ACMSEs shows that they are mainly designed to implement the functions of commercial electricity metering, and therefore belong to the class of information-measuring systems. As part of these automated systems, there are no algorithmic and software tools aimed at solving a set of tasks to minimize power losses in the distribution zone. It can be noted that the specified complex includes the tasks of optimizing the operating

modes of the DEN due to their balancing [13–17], as well as the tasks of identifying and controlling the UPTO. To date, a number of methods and methods have been proposed [7, 18–21] aimed at identifying and identifying the places of UPTO in a distributed network. However, the practical application of these methods as part of existing ACMSEs presents certain difficulties due to the difficulties in their software implementation in real time. The article proposes a new method for automated control of unauthorized power takeoffs in DEN based on the development of the approaches described in [8, 22].

Problem statement

As an object, a four-wire DEN with a voltage of 0.4 kV is considered, the design scheme of which is shown in Fig. 1, where k, v — index variables denoting,

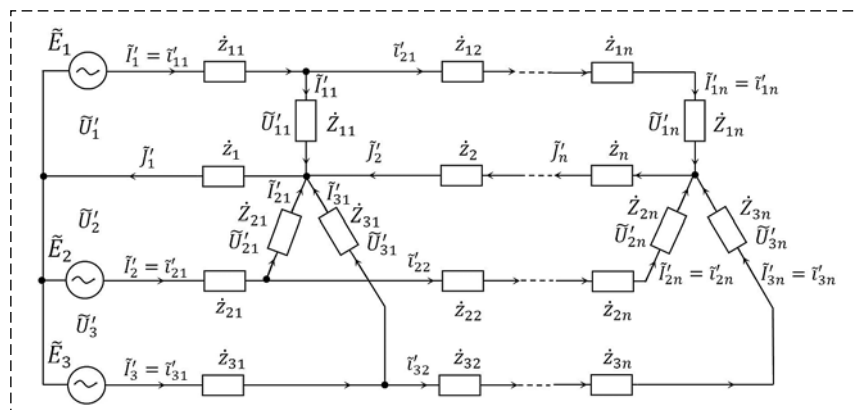


Fig.1. Calculation scheme of a three-phase network

respectively, the numbers of phases A, B, C ($v = \overline{1,3}$) and electrical circuits of the network ($v = \overline{1,n}$); \tilde{E}_k — e.m.f. power supply; $\tilde{I}_{kv}, \tilde{U}_{kv}, \tilde{Z}_{kv}$ — instantaneous current, voltage and complex resistance of the subscriber's load with coordinate (k, v) , respectively; $\tilde{i}_{kv}, \tilde{z}_{kv}$ — current and complex resistance of the v -th intersubscriber section of the k -th phase; $\tilde{J}'_v, \tilde{z}'_v$ — instantaneous current and complex resistance of the v -th section of the neutral wire; $\tilde{I}'_k, \tilde{U}'_k, \tilde{Z}'_k$ — instantaneous currents, voltages and complex resistance at the inputs of the corresponding phases.

We will assume that the following conditions are met:

1. There are uncontrolled power take-offs (UPTO) in the network, the locations of which are unknown.

2. At a discrete time $t = t_0$, using electricity meters of ACMSE, synchronous measurements of the effective values of currents I'_k, I'_{kv} and voltages U'_k, U'_{kv} , respectively, at the phase inputs and at network loads, as well as power factors $\cos \phi'_k$ and $\cos \phi'_{kv}$ between them. The information obtained is recorded in the database of the automated system and on their basis the current and voltage vectors $\tilde{I}'_k = [I'_{k1}, I'_{k2}, \dots, I'_{kn}]$ and $\tilde{U}'_k = [U'_{k1}, U'_{k2}, \dots, U'_{kn}]$, $k = \overline{1,3}$.

At the time of synchronous measurements ($t = t_0$), the DEN can be in one of two possible states:

- 1) in the regular (normal, desired) state (C^0);
- 2) in a perturbed state (C').

In the state C' in the network at least one of its phases is connected to unauthorized consumers of electricity, and in the state C^0 the latter are absent.

The problem is identification:

- 1) the current state of the DEN;
- 2) places of unauthorized power take-offs based on data received from electricity meters of ACMSE.

The solution of the formulated problem includes the following main stages:

1. Building a virtual model of DEN.
2. Identification of the current state of the DEN.
3. Estimation of the input phase currents of the virtual network.
4. Identification of the vectors of currents and voltages of the virtual DEN.
5. Construction of an identification criterion and algorithm.

Building a virtual model of DEN

Studies show that the identification problem under consideration belongs to the class of problems in which there is a significant uncertainty about the current state of the object under consideration and the parameters of external

disturbances in the form of UPTO. Such uncertainty is mainly due to the lack of practically no information about unauthorized consumers of electricity and the necessary data on the state of inter-subscriber sections of DEN. Under these conditions, in order to solve the problem posed, it becomes necessary to generate additional information about the object in addition to the primary initial data obtained from the AC-MSE electricity meters. For this purpose, we introduce the concept of a virtual DEN model into consideration. Its structure and parameters should adequately describe the desired state of a real distributed three-phase network in the absence of external disturbances in the form of UPTO. On Fig. 2 shows the design scheme of the k -th phase of such a virtual network.

Here \tilde{E}_k — the complex e.m.f source for k -th phase; $\tilde{I}_{kv}, \tilde{U}_{kv}, \tilde{Z}_{kv}$ — complex current, voltage and load resistance of the virtual subscriber having coordinate k, v ; i_{kv} — the complex current of the corresponding intersubscriber section.

The values of currents \tilde{I}_{kv}, i_{kv} and voltages \tilde{U}_{kv} , describing the state of the network under consideration, differ from their corresponding values characterizing the state of the original — real DEN (Fig. 1.), i.e. $\tilde{I}_{kv} \neq I'_{kv}$, $i_{kv} \neq i'_{kv}$, $\tilde{U}_{kv} \neq U'_{kv}$. In this case, the resistance values \tilde{Z}_{kv} and \tilde{z}_{kv} of the loads of subscribers and inter-subscriber sections of the real and virtual networks have the same values. In the future, these network variables will be represented in the following complex form [23]:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{kv} &= I_{kv} e^{j(\beta_k + \alpha_{kv})}, \quad i_{kv} = I_{kv} e^{j(\beta_k + \tilde{\alpha}_{kv})}; \\ \tilde{U}_{kv} &= U_{kv} e^{j(\beta_k + \psi_{kv})}, \quad \tilde{Z}_{kv} = Z_{kv} e^{j\varphi_{kv}}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$k = \overline{1,3}, v = \overline{1,n}$$

$I_{kv}, I_{kv}, U_{kv}, Z_{kv}$ — modules of the corresponding complex quantities; φ_{kv} — resistance argument \tilde{Z}_{kv} ; $\alpha_{kv}, \tilde{\alpha}_{kv}, \psi_{kv}$ — deviations of phase shifts from their basic values β_k , determined by the formulas

$$\beta_k = \frac{2(k-1)\pi}{3}.$$

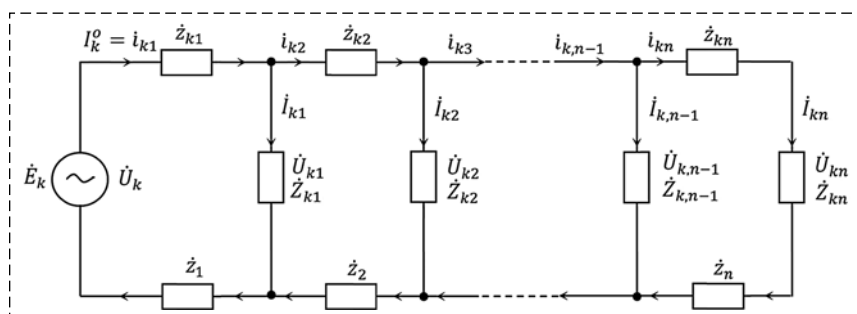


Fig.2. Calculation scheme of the k -th phase of the virtual network

The current values of the currents I_k^o , $k = \overline{1,3}$, at the inputs of the phases of the virtual network will be called the desired phase currents. A comparative analysis of the structures of the original DEN (Fig. 1) and the virtual network (Fig. 2) shows that the following relations hold for their input complex phase currents:

$$\dot{I}'_k = \dot{I}_k^o + \dot{I}_k^x, \quad k = \overline{1,3},$$

where \dot{I}_k^x — the complex current on the load of an unauthorized consumer connected to the phase with number k .

Identification of the current state of the network

According to the conditions of the problem under consideration, the current values of phase currents $I'_k = I'_k(t_0)$ at the input of the original real distributed network (Fig. 1) at the time $t = t_0$ are measured by the main three-phase meter, which are contained in the ACMSE database. The analysis shows that to identify the current state of the DEN, it is advisable to use the following conditions:

$$|I'_k - I_k^o| \leq \Delta I, \quad k = \overline{1,3}, \quad (2)$$

where ΔI — the maximum allowable error in measuring currents in ACMSE.

It is obvious that if at least one of the relations (2) is not fulfilled, there are UPTOs in the network, and their fulfillment means that the DEN is operating in the normal mode. Thus, relations (2) can be used as a criterion condition for identifying the current state of the DEN. Now let's set the task of estimating the values of the input desired phase currents I_k^o , $k = \overline{1,3}$, on the virtual network.

Estimation of the input desired phase currents of the virtual network. Consider a virtual network, the scheme of which is shown in Fig. 2.

For this purpose, we introduce into consideration the concepts of equivalent complex resistances \dot{Z}_{kv}^{equ} , determined for individual parts of a three-phase network, an illustration of which for the end sections of the k -th phase is shown in Fig. 3, a, b, c.

The indicated equivalent resistances, as can be seen from the figures, are the total resistances of the subsequent sections of the network, starting at nodes with coordinates (k, v) :

$$\dot{Z}_{kv}^{equ} = \frac{\dot{U}_{kv}}{\dot{I}_{kv}} = Z_{kv}^{equ} e^{j\varphi_{kv}^{equ}}, \quad k = \overline{1,3}, \quad v = \overline{1,n}, \quad (3)$$

where Z_{kv}^{equ} , φ_{kv}^{equ} — the modulus and phase \dot{Z}_{kv}^{equ} . In this case, the following formulas are valid for the modules:

$$Z_{kv}^{equ} = \frac{U_{kv}}{I_{kv}}, \quad k = \overline{1,3}, \quad n = \overline{1,n}. \quad (4)$$

With known values of network load resistances \dot{Z}_{kv} and intersubscriber sections \dot{z}_{kv} and \dot{z}_v , to determine the introduced equivalent resistances, you can use the formula for determining the total resistance of the series-parallel connection of circuits starting from the end sections of the DEN [23]. Wherein

$$\dot{Z}_{k,n-1}^{equ} = \frac{\dot{Z}_{k,n-1}(\dot{z}_{kn} + \dot{z}_n + \dot{Z}_{kn})}{\dot{Z}_{k,n-1} + \dot{z}_{kn} + \dot{z}_n + \dot{Z}_{kn}},$$

$$\dot{Z}_{k,n-2}^{equ} = \frac{\dot{Z}_{k,n-2}(\dot{z}_{k,n-1} + \dot{z}_{n-1} + \dot{Z}_{k,n-1}^{equ})}{\dot{Z}_{k,n-2} + \dot{z}_{k,n-1} + \dot{z}_{n-1} + \dot{Z}_{k,n-1}^{equ}}.$$

In the general case, the equivalent resistances \dot{Z}_{kv}^{equ} of series circuits (sections), determined by expressions (3), starting from nodes with coordinates (k, v) , are calculated by the formulas:

$$\dot{Z}_{kv}^{equ} = \frac{\dot{U}_{kv}}{\dot{I}_{kv}} = \frac{\dot{Z}_{kv}(\dot{z}_{k,v+1} + \dot{z}_{v+1} + \dot{Z}_{k,v+1}^{equ})}{\dot{Z}_{kv} + \dot{z}_{k,v+1} + \dot{z}_{v+1} + \dot{Z}_{k,v+1}^{equ}}, \quad (5)$$

$$k = \overline{1,3}, \quad v = \overline{1, n-1},$$

where $\dot{Z}_{kn}^{equ} = \dot{Z}_{kn}$.

To estimate the desired input phase currents I_k^o of the virtual network, it is first necessary to determine the total phase resistances \dot{Z}_k (Fig. 2):

$$\dot{Z}_k = \frac{\dot{U}_k}{\dot{I}_k^o} = Z_k e^{j\varphi_k}, \quad k = \overline{1,3}, \quad (6)$$

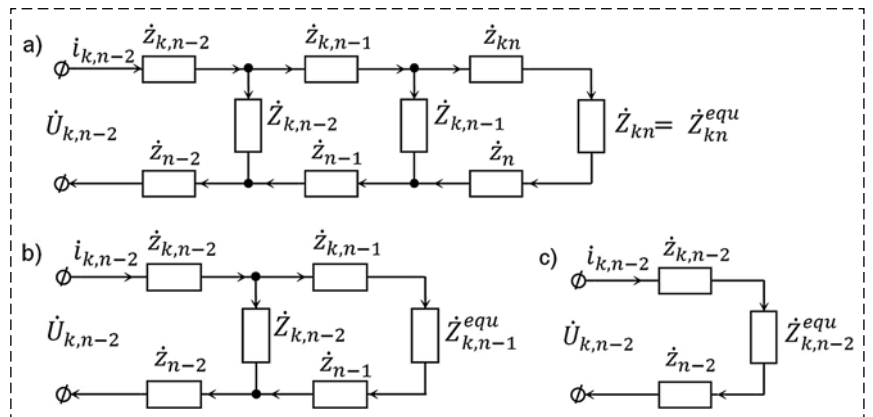


Fig. 3. Illustration of equivalent resistances \dot{Z}_{kv}^{equ}

where Z_k, φ_k — the modulus and phase of resistance \dot{Z}_k . Moreover, they are determined through equivalent resistances \dot{Z}_{k1}^{equ} :

$$\dot{Z}_k = \dot{Z}_{k1}^{equ}. \quad (7)$$

Here we note that the load resistances of subscribers \dot{Z}_{kv} are calculated from the data of subscriber electricity meters, and inter-subscriber resistances \dot{z}_{kv} and \dot{z}_v can be preliminarily identified using, for example, the methods described in [24, 25]. However, this approach leads to a number of difficulties in the practical implementation of the procedure for searching for places of unauthorized consumers. In particular, for this purpose, a sufficiently large amount of memory in the ACMSE database will be required, and it is also necessary to set a more detailed structure of the distribution network. In this regard, it is more appropriate to evaluate the inter-subscriber resistances directly in the process of identifying places of unauthorized power takeoff (UPTO).

Assessment of intersubscriber resistances. It can be noted that the determination of the complex resistances \dot{z}_{kv} and \dot{z}_v presents certain computational difficulties. In this regard, it is advisable to approximate the representation of these resistances. As is known, in the general case, the resistance of inter-subscriber sections of the network \dot{z}_{kv}, \dot{z}_v can be represented in a complex form:

$$\begin{aligned} \dot{z}_{kv} &= z_{kv}^B + jz_{kv}^M = z_{kv} e^{j\varphi_v}, \quad k = \overline{1,3}, \quad v = \overline{1,n}, \\ \dot{z}_v &= z_v^B + jz_v^M = z_v e^{j\varphi_v}, \quad k = \overline{1,3}, \quad v = \overline{1,n}, \end{aligned}$$

where $z_{kv}, z_v, \varphi_{kv}, \varphi_v, z_{kv}^B, z_v^B, z_{kv}^M, z_v^M$ — the modules, phases, real and imaginary parts of \dot{z}_{kv} and \dot{z}_v respectively. Applied calculations for estimating the values z_{kv}^B, z_v^B and z_{kv}^M, z_v^M of inter-subscriber sections of a number of trunk lines of three-phase networks show that the values of active resistances z_{kv}^B and z_v^B are approximately two orders of magnitude greater than the values of reactive resistances z_{kv}^M and z_v^M . Therefore, we can approximately assume that

$$\begin{aligned} \dot{z}_{kv} &\approx z_{kv} \approx z_{kv}^B, \quad k = \overline{1,3}, \quad n = \overline{1,n}, \\ \dot{z}_v &\approx z_v \approx z_v^B, \quad k = \overline{1,3}, \quad n = \overline{1,n}. \end{aligned} \quad (8)$$

To determine z_{kv} and z_v , you can use information about the lengths of wires of intersubscriber sections of the network and their passport data. Further, we denote by L_{kv} the length of the wire between the corresponding neighboring subscribers of the network. Now suppose that the phase and neutral wires have different cross sections. Then, the active resis-

tances of these intersubscriber sections are determined by the formulas:

$$\begin{aligned} z_{kv} &= \rho_1 L_{kv}, \\ z_v &= \rho_2 L_{kv}, \quad k = \overline{1,3}, \quad v = \overline{1,n}, \end{aligned} \quad (9)$$

where ρ_1, ρ_2 — the specific resistances of the phase and neutral wires, respectively.

With this approach, in order to evaluate the inter-subscriber resistances determined by formulas (8) and (9), it is necessary to have data on the lengths of wires in the inter-subscriber sections of a three-phase network in the ACMSE database.

Estimation of the input phase currents of the virtual network

For this purpose, consider a virtual model of the k -th phase, the scheme of which is shown in Fig. 2. As is known, the functional relationships between the e.m.f. \dot{E}_k of the mains power supply and voltage \dot{U}_k at the phase inputs are determined by the relations:

$$\dot{E}_k = \dot{U}_k + \dot{I}_k^o \dot{z}_B, \quad k = \overline{1,3}, \quad (10)$$

where \dot{z}_B — the internal resistance of the source, which can be represented in a complex form:

$$\dot{z}_B = z_B e^{j\varphi_B},$$

where the numerical values of the module z_B and the argument φ_B are determined by the passport data of the transformer. Now, taking into account the fact that stresses $\dot{U}_k = \dot{I}_k^o \dot{Z}_k$, relations (10) can be represented as:

$$\dot{E}_k = \dot{I}_k^o (\dot{Z}_k + \dot{z}_B), \quad k = \overline{1,3}.$$

From here we get

$$\frac{\dot{E}_k}{\dot{I}_k^o} = \dot{Z}_k + \dot{z}_B, \quad k = \overline{1,3}, \quad (11)$$

where \dot{Z}_k is the total complex resistance of the k -th virtual phase, determined by formulas (6) and (7). Now, we will write the variables included in the last expressions in exponential form:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_k &= Z_k e^{j\varphi_k}, \\ \dot{I}_k^o &= I_k^o e^{j(\beta_k + \alpha_k)}, \\ \dot{E}_k &= E_k e^{j(\beta_k + \hat{\psi}_k)}, \quad k = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (12)$$

where Z_k, I_k^o, E_k — the modules of the corresponding complex variables; φ_k — resistance argument \dot{Z}_k ; $\alpha_k, \hat{\psi}_k$ — deviations of the phase shifts

of the corresponding currents and e.m.f from their base values β_k .

Further, to estimate the input phase desired currents I_k^o , relations (11), taking into account (12), we write in exponential form:

$$\frac{E_k e^{j(\beta_k + \hat{\psi}_k)}}{I_k^o e^{j(\beta_k + \alpha_k)}} = \dot{Z}'_k, k = \overline{1,3}, \quad (13)$$

where

$$\dot{Z}'_k = Z_k e^{j\varphi_k} + z_B e^{j\theta_B} = Z'_k e^{j\theta_k}.$$

Here Z'_k and θ_k are known real numbers. Note that the value of the e.m.f. E can be preliminarily determined from the data \dot{I}_k and \dot{Z}_k obtained from the readings of the head three-phase meter at time $t = t_0$. As a result, relation (13) will be written as:

$$\frac{E_k e^{j\lambda_k}}{I_k^o} = Z'_k e^{j\theta_k}, k = \overline{1,3}.$$

From this it can be seen that the following relations must be satisfied:

$$\frac{E_k}{I_k^o} = Z'_k, \lambda_k = \theta_k, k = \overline{1,3},$$

where the phase shift differences $\lambda_k = \hat{\psi}_k - \alpha_k$.

As a result, the desired input currents I_k^o of the virtual network are determined by the formulas

$$I_k^o = \frac{E_k}{Z'_k}, k = \overline{1,3}. \quad (14)$$

Identification of the vectors of currents and voltages of the virtual DEN

Now let's set the task of determining the vectors $\bar{U}_k = [U_{k1}, U_{k2}, \dots, U_{kn}]$ and $\bar{I}_k = [I_{k1}, I_{k2}, \dots, I_{kn}]$, which determine the state of the virtual network. Note that the modules of equivalent resistances Z_{k1}^{equ} were found earlier. Then, based on formulas (4), we calculate the voltages U_{k1} (Fig. 2):

$$U_{k1} = I_{k1} Z_{k1}^{equ}, k = \overline{1,3},$$

where $I_{k1} = I_k^o, k = \overline{1,3}$.

Then the effective currents I_{k1} on the loads of virtual subscribers with resistance Z_{k1} can be found by the formulas:

$$I_{k1} = \frac{U_{k1}}{Z_{k1}}, k = \overline{1,3},$$

where Z_{k1} — the modulus of complex resistance \dot{Z}_{k1} .

Next, the effective values of the intersubscriber currents I_{k2} are calculated (Fig. 2). For this purpose, consider the balance relations for currents in nodes with coordinate $(k, 1)$:

$$i_{k2} = i_{k1} - \dot{I}_{k1}, k = \overline{1,3}.$$

It is easy to show that the following expressions are true for the squares of the modules of currents i_{k2} :

$$\begin{aligned} I_{k2}^2 &= (i_{k1} - \dot{I}_{k1})(i_{k1} - \dot{I}_{k1})^* = \\ &= (i_{k1} - \dot{I}_{k1})(i_{k1}^* - \dot{I}_{k1}^*) = \\ &= i_{k1} i_{k1}^* + \dot{I}_{k1} \dot{I}_{k1}^* - (i_{k1} \dot{I}_{k1}^* + \dot{I}_{k1} i_{k1}^*), k = \overline{1,3}, \end{aligned}$$

the components of which can be determined by the formulas:

$$i_{k1} i_{k1}^* = I_{k1}^2, \dot{I}_{k1} \dot{I}_{k1}^* = I_{k1}^2,$$

$$\begin{aligned} i_{k1} \dot{I}_{k1}^* + \dot{I}_{k1} i_{k1}^* &= i_{k1} I_{k1} (e^{j(\alpha_{k1} - \tilde{\alpha}_{k1})} + e^{-j(\alpha_{k1} - \tilde{\alpha}_{k1})}) = \\ &= i_{k1} I_{k1} (e^{j(\alpha_{k1} - \tilde{\alpha}_{k1})} + e^{-j(\alpha_{k1} - \tilde{\alpha}_{k1})}) = 2I_{k1} I_{k1} \cos \lambda_{k1}, \end{aligned}$$

where I_{k1}, I_{k1} — the effective values of the currents flowing through the corresponding resistances \dot{z}_1 and \dot{Z}_{k1} , and the parameter λ_{k1} is determined by the expression

$$\lambda_{k1} = \alpha_{k1} - \tilde{\alpha}_{k1}, k = \overline{1,3}.$$

Since \dot{Z}_{kv}^{equ} is determined by formula (5), then for $v = 1$ the following relation is true:

$$\frac{\dot{I}_{k1}}{i_{k1}} = \frac{\dot{Z}_{k1}^{equ}}{Z_{k1}},$$

which, taking into account (1) and (3), has the form:

$$\frac{I_{k1}}{I_{k1}} e^{j\lambda_{k1}} = \frac{Z_{k1}^{equ}}{Z_{k1}} e^{j(\varphi_{k1}^{equ} - \varphi_{k1})}.$$

From here we obtain the values of the phase differences:

$$\lambda_{k1} = \varphi_{k1}^{equ} - \varphi_{k1}.$$

As a result, the following formula holds for I_{k2}^2 :

$$\begin{aligned} I_{k2}^2 &= I_{k1}^2 + I_{k1}^2 - I_{k1} I_{k1} (e^{j\lambda_{k1}} + e^{-j\lambda_{k1}}) = \\ &= I_{k2}^2 + I_{k1}^2 - 2I_{k1} I_{k1} \cos \lambda_{k1}, k = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

From here we obtain the numerical values of I_{k2} :

$$I_{k2} = \sqrt{I_{k1}^2 + I_{k1}^2 - 2I_{k1} I_{k1} \cos \lambda_{k1}}, k = \overline{1,3}.$$

Now, in a similar way, we determine the parameters U_{k2} and I_{k2} of virtual loads having coordinates $(k, 2)$ according to the following formulas:

$$U_{k2} = I_{k2} Z_{k2}^{equ},$$

$$I_{k2} = \frac{U_{k2}}{Z_{k2}}, k = \overline{1, 3}.$$

Further, continuing the above computational procedure for $v = 3, 4, \dots, n$, we determine the remaining voltages U_{kv} and currents I_{kv} on the loads of the virtual network. Note that the general iterative formula for calculating the intersubscriber currents I_{kv} has the form:

$$I_{kv} = \sqrt{I_{k,v-1}^2 + I_{k,v-1}^2 - I_{k,v-1} I_{k,v-1} \cos \lambda_{k,v-1}}, \quad (15)$$

$$k = \overline{1, 3}, v = \overline{1, n},$$

and the desired voltages and currents are determined by the following formulas:

$$U_{kv} = I_{kv} Z_{kv}^{equ}, I_{kv} = \frac{U_{kv}}{Z_{kv}}, k = \overline{1, 3}, v = \overline{1, n}, \quad (16)$$

where

$$\lambda_{k,v-1} = \varphi_{k,v-1}^{equ} - \varphi_{k,v-1},$$

$$I_{kn} = I_{kn}.$$

As a result of using the technique considered above, we obtain the desired values of all components of the vectors $\bar{U}_k = [U_{k1}, U_{k2}, \dots, U_{kn}]$ and $\bar{I}_k = [I_{k1}, I_{k2}, \dots, I_{kn}]$.

Construction of an identification criterion and algorithm

For this purpose, on the basis of the found estimates of the input phase currents I_k^o of the virtual network, it is necessary to first analyze the relations (2). Let us assume that these conditions are not satisfied for all $k(k = \overline{1, 3})$, i.e., there are single unauthorized power takeoffs in the network in all its phases. Note that the AC-MSE database contains the vectors $\bar{U}'_k = [U'_{k1}, U'_{k2}, \dots, U'_{kn}]$, $k = \overline{1, 3}$, which are preliminarily determined on the basis of data obtained from subscriber meters systems. In addition, the vectors $\bar{U}_k = [U_{k1}, U_{k2}, \dots, U_{kn}]$, characterizing the state of the virtual network, were identified above (Fig. 2).

$$\Delta U_{kv} = |\bar{U}_{kv} - \bar{U}'_{kv}|, k = \overline{1, 3}, v = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Now, let's assume that unauthorized power withdrawals in the network are carried out in the vicinity of the nodes of a real DEN, having coordinates (k, m_k) , which is conditionally shown in Fig. 4, where $v = m_k$ and $m_k < n$.

In this case, each phase of a three-phase network with respect to these nodes can be conditionally divided into two parts. Obviously, throughout the first (initial) part of the k -th phase of the DEN, the current I_k^x of an unauthorized consumer additionally flows through its intersubscriber sections, and in the second section, i.e. after the point (k, m_k) , the indicated current is absent. A comparative analysis of the processes in the considered parts of the network shows that in the initial sections of each phase of the network, the values of the voltage differences ΔU_{kv} , where $v = \overline{1, m_k}$, differ significantly from the values of the differences $\Delta U_{k\xi}$, $\xi = \overline{m_{k+1}, n}$ related to areas where there are no UPTOs. Moreover, the values ΔU_{kv} for the initial sections of the network are much larger than $\Delta U_{k\xi}$ calculated for the second part of the network, i.e.

$$\Delta U_{kv} \gg \Delta U_{k\xi}, v = \overline{1, m_k}, \xi = \overline{m_{k+1}, n}. \quad (18)$$

An illustration of this situation using a graph of the discrete (lattice) function ΔU_{kv} is shown in Fig. 5.

Now we introduce discrete functions F_{kv} defined by the following differences:

$$F_{kv} = |\Delta U_{kv} - \Delta U_{k,v+1}|, v = \overline{1, n-1}. \quad (19)$$

The set of values F_{kv} for a given k is the vector $F_k = [F_{k1}, F_{k2}, \dots, F_{k,n-1}]$. The analysis shows that,

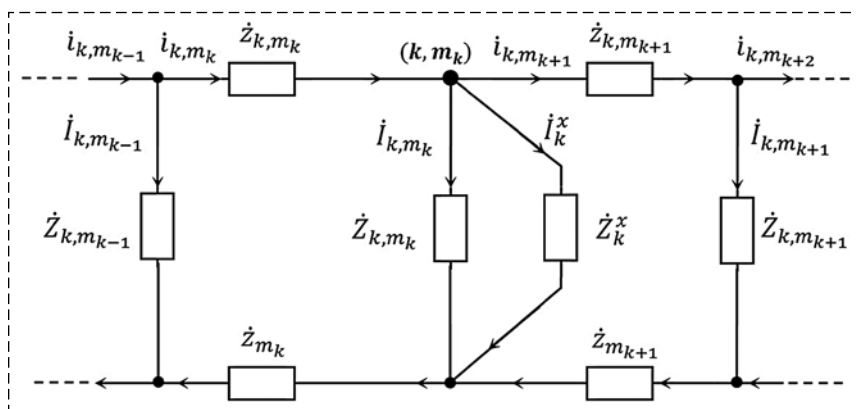


Fig. 4. Conditional fragment of the network where UPTO is carried out

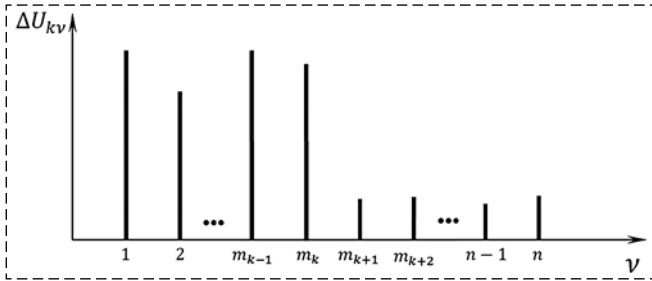


Fig. 5. Graphical representation of the function ΔU_{kv}

taking into account relations (18) and the condition $m_k < n$, the graphic representation of the function F_{kv} is presented in the form shown in Fig. 6.

As can be seen from the figure, the UPTO coordinate in the k -th phase of the network is determined based on the solution of the following extremal problem:

$$\max_{v \in V} F_{kv} = F_{k, m_k}, \quad k = \overline{1, 3}, \quad (20)$$

where m_k — the number of the node of the k -th phase, in the vicinity of which an unauthorized power take-off is observed; V — a discrete subset consisting of network subscriber numbers, i.e. $V = \{1, 2, \dots, n\}$. As a result, the extremal problem (20) is reduced to finding the maximum element of the vector $F_k = [F_{k1}, F_{k2}, \dots, F_{k, n-1}]$, $k = \overline{1, 3}$, which is solved by fairly simple means. It is easy to see that when $m_k = n$ in the graph of the function F_{kv} (Fig. 6) there will be no "impulse that has an excessively large amplitude. This means that if conditions (2) are not met, UPTO is carried out in the final section of the k -th phase with the coordinate (k, n) .

Thus, the introduction of the concept of a virtual model of a distributed network and the procedure proposed above for constructing discrete functions F_{kv} make it possible to identify the places of unauthorized power takeoffs in the DEN. At the same time, the system of discrete functions (17) and (19) can be used to construct an identification criterion for UPTO, which can be formulated as fol-

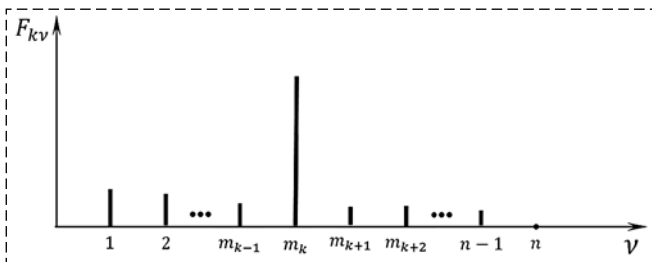


Fig. 6. Graphic representation of the function F_{kv}

lows: the coordinates of unauthorized consumers in the DEN are determined based on the analysis of the structure of the functions F_{kv} , $v = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, 3}$, in particular, by solving the extremal problem (20).

The results obtained above allow us to formulate the following UPTO control algorithm in a distributed three-phase network.

1. Cyclic interrogation of the main three-phase and subscriber electricity meters of ACMSE at a discrete time.

2. Recording the information received from the counters in the ASKUE database and forming the vectors $\bar{U}'_k = [U'_{k1}, U'_{k2}, \dots, U'_{kn}]$, $k = \overline{1, 3}$.

3. Formation of a virtual model of DEN (Fig. 2).

4. Determination of the input phase currents of the virtual network I_k^o , $k = \overline{1, 3}$, according to formulas (14).

5. Identification of the current state of the distribution network by checking conditions (2).

6. If relations (2) are satisfied, go to step 1. Otherwise, go to step 7.

7. Estimation of intersubscriber resistances z_{kv} , $k = \overline{1, 3}$, $v = \overline{1, n}$, trunk line, in particular, according to formulas (9), if they are not previously identified and are not contained in the ACMSE database.

8. Calculation of equivalent resistances Z_{kv}^{equ} , $k = \overline{1, 3}$, $v = \overline{1, n}$, defined by expressions (5).

9. Identification of virtual network parameters, i.e. estimation of intersubscriber currents I_{kv} , $k = \overline{1, 3}$, $v = \overline{1, n}$, according to formulas (15), as well as current vectors $\bar{I}_k = [I_{k1}, I_{k2}, \dots, I_{kn}]$ and voltages $\bar{U}_k = [U_{k1}, U_{k2}, \dots, U_{kn}]$, whose components are calculated by formulas (16).

10. Calculation of stress differences ΔU_{kv} , $k = \overline{1, 3}$, $v = \overline{1, n}$, determined by formulas (17).

11. Formation of discrete functions F_{kv} , $k = \overline{1, 3}$, $v = \overline{1, n}$, according to formulas (19) and vectors $F_k = [F_{k1}, F_{k2}, \dots, F_{k, n-1}]$.

12. Analysis of the structure of the criterial functions F_{kv} ($k = \overline{1, 3}$, $v = \overline{1, n}$), in particular, the solution of the extremal problem (20).

13. On the basis of this analysis, the implementation of operational control of unauthorized power take-offs in the DEN.

14. End of the UPTO monitoring process in the network and go to step 1.

Conclusion

The practice of operating distributed electrical networks (DEN) with a voltage of 0.4 kV shows that

they can experience significant losses of electricity in certain periods of time due to unauthorized power take-offs (UPTO). As part of the ACMSE hardware and software systems, which are implemented in low-voltage networks for the purpose of automating and informatizing the processes of monitoring and accounting for electricity, there are no technical and software tools designed to identify and control unauthorized power take-offs in the DEN. A new method and algorithm for solving this problem are proposed based on the concept of a virtual model of a three-phase network. The latter was introduced to describe the desired state of a real network, to the phases of which unauthorized consumers of electricity are connected. The computational procedure of the developed algorithm, in contrast to existing methods, is more adapted for use as part of ACMSE in real time. The results obtained can be used to create a subsystem for automated control of DEN as part of ACMSE.

References

1. **Kosoukhob F. D., Vasilev N. V., Filipov A. O.** Reducing losses from current unbalance and improving electric-energy quality in 0.38-Kv networks with municipal loads, *Russian electrical engineering*, Allerton Press, Inc. (New York), 2014, vol. 85, no. 6, pp. 350–353.
2. **Czarnecki L. S., Bhattarai P. D.** Currents' physical components (CPC) in three-phase systems with asymmetrical voltage, *Przegld Elektrotechniczny*, 2015, no.6, pp. 40–47, doi: 10.15199/48.2015.06.06.
3. **Averbuh M. A., Zhilin E. B.** About electric power losses in systems of electrosupply of individual housing construction, *Energetic*, 2016, no.6. pp. 54-56 (in Russian).
4. **Harutyunyan A. G.** On the calculation of additional power losses in three-phase four-wire networks, *Electricity*, 2015, no. 10, pp. 55–58 (in Russian).
5. **Zhelezko Y. S.** Electricity losses. Reactive power. Power quality, M., ENAS, 2009, 456 p. (in Russian).
6. **Sapronov A. A., Kuzhekov S. L., Tynyansky V. G.** Emergency reveal of unmonitored power consumption in up to 1 kv electrical networks, *Russian Electromechanics*, 2004, no. 1, pp. 55–58 (in Russian).
7. **Danilov M. I., Romanenko I. G.** Identification of unauthorized electricity consumption in the phases of distribution networks with automated metering systems, *Elektricheskie Stancii*, 2022, no. 2 (1087), pp. 10–19 (in Russian).
8. **Omorov T. T.** To the problem of localization of unauthorized selection of the electric power in distributive networks as a part of ASCAE, *Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics*, 2017, no. 7, pp. 27–32 (in Russian).
9. **Yakushev K. V.** Automat system of the commercial account of the electric power for the retail market Information and control systems in the industry, *The Young scientis*, 2009, no. 3 (23), pp. 9–13 (in Russian).
10. **Eremina M. A.** Development of automatic systems of the commercial account of power resources, *The Young scientist*, 2015, no. 3, pp. 135–138 (in Russian).
11. **Buchholz B. M., Stychinski Z. A.** Smart Grids — fundamentals and technologies in electricity networks, Moscow, MEI, 2017, 461 p. (in Russian).
12. **Stephen Bush F.** Smart Grid: Communication-Enabled Intelligence for the Electric Power Grid, John Wiley & Sons Limited, 2018, 572 p.
13. **Kiselyov M. G., Lepanov M. G.** Simmetrirovanie of currents in electrosupply networks a power electric regulator of inactive capacity, *The Electrical engineer*, 2018, no. 11, pp. 63–70 (in Russian).
14. **Omorov T. T., Takyrbashev B. K., Koibagrov T. D.** Electricity Losses Management in Distribution Network as a Composition of Automated Meter Reading and Control System (AMRCS), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 4, pp. 191–199 (in Russian).
15. **Omorov T. T., Takyrbashev K., Zakiriaev K. E., Koibagrov T. Zh.** Digital control of electric power flows in non-symmeter distribution networks as a composition of AM-RCS, *Energy Systems Research*, 2021, no. 1, pp. 38–46.
16. **Samokish V. V.** The patent № 2548656 (Russian Federations). Sposob of balancing of phase currents of a three-phase four-wire line and the device for its realization, *Biull*, no. 11. 27.12.2013 (in Russian).
17. **Naumov I. V., Ivanov D. A., Podjachih S. V.** The patent № 2490768 (Russian Federations). The symmetrizing device for three-phase networks with a zero wire, *Biull*, no. 23. 20.08.2013 (in Russian).
18. **Tariq M., Poor H. V.** Electricity Theft Detection and Localization in Grid-Tied Microgrids, *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2018, vol. 9, no. 3, pp. 1920–1929, doi: 10.1109/TSG.2016.2602660
19. **Kirankumar T., Sri Madhu G. N.** Power theft detection using probabilistic neural network classifier, *International Research Journal of Engineering and Technology*, 2018, vol. 5, no. 8, pp. 834–838.
20. **Jeyaranjani J., Devaraj D.** Machine learning algorithm for efficient power theft detection using smart meter data, *International Journal of Engineering & Technology*, 2018, vol. 7, no. 3, pp. 900–904.
21. **Messinis G. M., Rigas A. E., Hatzigiorgiou N. D.** A Hybrid Method for Non-Technical Loss Detection in Smart Distribution Grids, *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2019, vol. 10, no. 6, pp. 6080–6091, doi: 10.1109/TSG.2019.2896381
22. **Omorov T. T., Takyrbashev B. K.** Identification of the State of the Distributive Electrical Network in the Automated Systems of Accounting and Management of the Power Consumption, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 10, pp. 651–656 (in Russian).
23. **Demirchjan K. S., Nejman L. R., Korovkin A. V.** Theoretical of a basis electrical engineers. Vol.1, SPb., Peter, 2009, 512 p. (in Russian).
24. **Kononov Y.** Refinement of the parameters of sections of lines of the medium voltage network according to the data of synchronous measurements, *Russian Electromechanics*, 2018, vol. 61, no. 1, pp. 77–84 (in Russian).
25. **Omorov T. T., Osmonova R. Ch., Takyrbashev B. K., Imanakunova Zh. S.** Methodology for identification of the parameters of the trunk line of the distribution network according to ASKUE data, *Kazan state power engineering university bulletin*, 2021, no. 3(51), pp. 168–177 84 (in Russian).

В. А. Костюков, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., wkost-einheit@yandex.ru,
М. Ю. Медведев, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., medvmihal@sfsedu.ru,
В. Х. Пшихопов, д-р техн. наук, гл. науч. сотр., pshichop@rambler.ru,
Южный федеральный университет, г. Таганрог

Планирование движения наземных роботов в среде с препятствиями: алгоритмы построения траекторий в группе при заданном шаблоне*

Предлагается метод решения задачи планирования движения группы наземных робототехнических платформ (РТП) с требованием поддержания заданного шаблона строя при наличии стационарных препятствий и источников возмущений. Выделяется задача построения траектории ведущей РТП группы, сопряженная с применением планировщика перемещений и последующим сглаживанием полученной траектории. Для сглаживания применяется разработанная ранее процедура. Траектории остальных элементов группы определяются путем построения смещенных пространственных кривых, вдоль которых должны двигаться эти элементы с учетом заданной конфигурации или требований сохранения некоторых средних кинематических параметров элементов вдоль своей траектории.

Для решения задачи уклонения группы от источников возмущений использован метод, рассмотренный в предыдущих работах авторов для одиночных подвижных объектов. Данный метод базируется на расчете вероятностей успешного прохождения элементами группы своих траекторий. Эти вероятности могут быть найдены после оценки параметров характеристических вероятностных функций источников, описывающих характер их воздействия на движущиеся объекты в течение малых интервалов времени. Развита методика, позволяющая находить целевые траектории ведущей и ведомых РТП группы, вероятность успешного прохождения которых превышает заданное целевое значение. Указанная методика обобщается на случай, когда критерием оптимизации является вероятность успешного прохождения только части РТП группы в целевую область.

Рассматриваются и обсуждаются результаты моделирования, подтверждающие эффективность и работоспособность предлагаемой методики планирования траекторий движения роботов, образующих группу, в среде с препятствиями и в поле источников-репеллеров.

Ключевые слова: планирование траекторий, групповое управление, гладкие траектории, локальные минимумы, робототехническая платформа, двумерная среда

Введение

Задача движения строем является актуальной при решении различных задач, таких как слежение группой за целью [1], ретрансляция связи [2], движение колонной или шеренгой [3], обследование местности и поиск объектов [4], картографирование и георазведка [5]. Часто строй предварительно задается, например, при проведении сейсморазведки группой АНПА [6, 7] или при создании многопозиционных радиолокационных систем с использованием БЛА [8–10]. При групповом применении робототехнических платформ (РТП) обеспечиваются высокая живучесть системы, быстрое развертывание в заданном направлении и перемещение в требуемую область. Однако совместное выполнение задач подвижными роботами предъ-

являет высокие требования к точности систем планирования и управления движением.

Распространенным методом формирования строя является метод виртуальных структур. Для формирования виртуальной структуры может использоваться ведущий робот [11, 12], либо данная задача может решаться в рамках децентрализованных структур [13–15]. В рамках группы с лидером виртуальная структура строится относительно его положения. При этом члены группы должны знать координаты лидера, чтобы определять свои положения в строю. В рамках децентрализованной структуры робототехнические платформы (РТП) должны знать положения своих соседей, чтобы определить свои координаты в строю.

В группах РТП с лидером задача ведомой РТП заключается в слежении за точкой, положение которой индуцируется лидером. Данная задача рассмотрена в ряде работ, например в работах [3, 4, 16–19].

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 22-29-00337.

В статье [3] слежение за лидером осуществляется на основе уравнений кинематики материальной точки на плоскости [15]. Авторы предлагают и исследуют новые алгоритмы слежения в системе координат ведущего робота. Также предлагаются алгоритмы оценивания скоростей робота-лидера, которые используют расширенный наблюдатель состояния [20]. Алгоритм слежения базируется на методе линеаризации с обратной связью [21]. В данной работе учтены ограничения, связанные с определением взаимного положения и ориентации роботов группы. Основным недостатком работы [3] является использование упрощенных уравнений динамики, что снижает точность слежения, особенно в режимах быстрого маневрирования.

В работе [4] решается задача формирования заданного строя в терминальной постановке [22] и дальнейшего слежения за лидером, который должен все время находиться в геометрическом центре группы. Задача решена при условии, что координаты робота-лидера известны не всем ведомым роботам. Основное ограничение результатов данной статьи — задача решена без учета динамики движения.

В работе [16] также рассмотрена проблема движения строем за лидером, которая решается с использованием уравнений кинематики и динамики материальной точки. При этом основное направление исследования — разработка алгоритмов группового управления, функционирующих в условиях ошибок в системе связи, которые приводят к ошибкам в определении координат робота-лидера. Для решения задачи предложен адаптивный динамический регулятор, использующий аппроксимирующую сеть радиальных базисных функций.

Различным аспектам влияния особенностей системы связи и внутригрупповой навигации посвящены работы [17–19], в которых изучаются алгоритмы группового слежения за лидером при передаче только линейных координат, ограничениях на расстояние работы системы связи, при необходимости обеспечивать гладкость траекторий движения.

В данной статье задача планирования строевых движений группы РТП в среде с препятствиями также решается в рамках структуры с лидером. Это обусловлено тем фактом, что в таких системах требования к системе групповой связи ниже, что, например, для подводной среды является определяющим фактором.

Рассматривается группа РТП на плоскости, которая движется в среде с препятствиями и конфликтными областями (рис. 1, см. третью сторону обложки). Препятствия представлены на рис. 1 серыми многоугольниками. Конфликтные области представляют собой секторы, ограниченные окружностями и заданным углом.

Требуется разработать алгоритм планирования, обеспечивающий:

а) построение начальной траектории условного ведущего элемента группы при движении в указанной среде с препятствиями;

б) построение траекторий движения всех остальных РТП, сопряженных с траекторией условного ведущего элемента группы;

в) осуществление маневров уклонения от препятствий и источников конфликтных областей.

Построение начальной траектории условного ведущего элемента группы описано в первой части работы [23], в которой использован модернизированный алгоритм потенциальных полей [24–26], позволяющий избегать локальных минимумов за счет их детектирования.

Для ведомых РТП требуется исходя из заданного шаблона строя определить соответствующие траектории движения всех остальных элементов группы. Для поддержания заданного строя предлагается метод контрольных конфигураций, предполагающий жесткое следование шаблону только на линейных участках траекторий движения элементов, что обеспечивает корректный учет кинематических и динамических их ограничений.

На этапе осуществления маневров предлагается использовать метод, развитый в работах [27, 28], который позволяет двигаться в среде с препятствиями и с конфликтными областями, образуемыми источниками возмущений.

Построение кусочно-линейных пространственных траекторий отдельных элементов группы по методу смещения

Для РТП планирование индивидуальной траектории, в силу кинематических ограничений, необходимо осуществлять без жесткой привязки к шаблону строя на криволинейных участках, чтобы обеспечить гладкость этих траекторий.

Поэтому целесообразно ограничить изломы траекторий движения отдельных элементов. Для линейных участков траектории ведомых

РТП могут быть построены параллельным переносом соответствующих прямых участков траектории ведущей РТП с сохранением расстояния d_1 (рис. 2, см. третью сторону обложки). Точки пересечения построенных прямых определяют базовые точки кусочно-линейной кривой ведомой РТП. К полученной кривой далее применяется квадратично-линейное сглаживание [23]. Затем для получающейся траектории на основании требований к сохранению заданного шаблона строя определяется функция изменения траекторной скорости.

Шаблон строя назовем *простым*, если положения всех элементов группы соответствуют узлам прямоугольной ортогональной сетки. Тогда становится возможным использовать метод смещения при формировании соответствующих индивидуальных траекторий с последующим сглаживанием согласно работе [23].

При построении прямолинейных отрезков смещенной траектории нужно нивелировать сильные отклонения точек пересечения индуцированных прямых от соответствующей базовой точки траектории ведущей РТП. Рассмотрим процесс выполнения смещения кусочно-линейной кривой i -й РТП, заданной точками $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}, A_3^{(i)}, A_4^{(i)}, \dots$, к соответствующей кривой $(i+1)$ -й РТП, находящейся в соседнем ряду. На рис. 2 приведен случай, когда при достаточно малом угле при вершине $A_2^{(i)}$ происходит превышение расстоянием $d_{v,2,0} = |A_2^{(i)} A_2^{(i+1)}|$ предельно допустимого отклонения $d_{v,max}$. В этом случае можно просто приблизить индуцированную точку $A_2^{(i+1)}$ к $A_2^{(i)}$ по биссектрисе указанного угла при вершине в новое положение до получения равенства $d_{v,2} = |A_2^{(i)} A_2^{(i+1)}|$. Тогда индуцированная кусочно-линейная кривая приобретет две дополнительные точки $A_{2,1}^{(i+1)}, A_{2,2}^{(i+1)}$.

Другой подход — это ограничение снизу радиуса скругления. Например, для точки $A_3^{(i)}$, меньший угол при вершине которой лежит слева по ходу движения, для нивелирования указанного отклонения нужно правильно выбрать радиусы скругления в точках $A_3^{(i)}$ и $A_3^{(i+1)}$.

Интерполяционный метод контрольных конфигураций

Точное удержание заданного шаблона при движении группы вдоль всей траектории с учетом кинематических ограничений РТП трудно осуществимо на практике. Поэтому возникает необходимость разработки прибли-

женной методики, требующей поддержания заданного строя только в некоторые моменты времени. Рассмотрим подход, который требует поддержания заданного строя только в некоторые моменты времени. Например, на рис. 3 (см. третью сторону обложки) показан случай, в котором не требуется сохранять строй при поворотах группы. На рис. 3 КК0, КК1, КК2, КК3 — контрольные конфигурации группы роботов.

Этот подход назовем интерполяционным методом контрольных конфигураций. В данном методе нужно построить такие параметрические представления траекторий элементов группы, которые обеспечивают совпадение пространственного положения группы с шаблоном строя в заданные моменты времени $t_{g,h}$, $h = 1, 2, \dots, N_g$ (N_g — число контрольных конфигураций), включая начальный и конечный моменты движения группы. При этом целевые конфигурации привязываются к линейным участкам движения группы.

Метод включает несколько этапов. На первом этапе происходит построение кусочно-линейных кривых для всех РТП. Для каждой i -й РТП, $i = 1, 2, \dots, N$, строятся кусочно-линейные кривые с линейными участками $A_{k-1}^{(i)} A_k^{(i)}$, $k = 2, 3, \dots, K$, по методу смещения, где $A_k^{(i)}$ суть базовые точки каждой из траекторий.

На втором этапе строятся сглаженные, линейно-квадратичные пространственные траектории для всех РТП согласно работе [23].

На третьем этапе строятся временные параметрические представления для траекторий всех РТП. Для этого вначале находятся крейсерские скорости каждой РТП $V^{(i)}$, $i = 2, 3, \dots, N$, согласно выражениям (31), (32) из работы [23] так, чтобы все РТП приходили в свои конечные целевые точки за одинаковое время. Тогда согласно формулам (30)—(35) из работы [23] получим следующую формулу:

$$V^{(i)} = \sum_{j=1}^{K-1} |C_j^{(i)} B_{j+1}^{(i)}| + \sum_{k=2}^{N-1} R_k^{(i)} \varphi_j^{(i)} / (1 - \eta_j^{(i)}), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

На четвертом этапе для каждой РТП определяются потенциальное множество точек "привязки" $M_{g,h}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, N$, $h = 1, 2, \dots, N_g$, и соответствующее множество моментов времени $t_{g,h}$. При фиксированном i $M_{g,h}^{(i)}$ есть точка, с которой должен совпасть центр i -й РТП в момент времени $t_{g,h}$. Поэтому множество точек $M_{g,h}^{(i)}$ определяет целевую конфигурацию строя в мо-

мент времени $t_{g,h}$. В наиболее простом случае каждому линейному участку $C_k^{(i)}B_{k+1}^{(i)}$ $k = 1, 2, \dots, K-1$, соответствует только одна целевая конфигурация, к которой должна притянуться группа. В этом случае $N_g = K-1$. Поскольку h и k — одинаковые множества, используем далее только индекс k .

Для построения целевых конфигураций $M_{g,h}^{(i)}$ вначале определяется временная параметрическая траектория ведущей РТП. В качестве точек $M_{g,1}^{(1)}$ и $M_{g,K-1}^{(1)}$ можно взять начальную $A_1^{(1)}$ и конечную $A_K^{(1)}$ точки траектории ведущей РТП, а для всех остальных точек $M_{g,k}^{(1)}$ — середины линейных участков $C_k^{(1)}B_{k+1}^{(1)}$. Целевые положения остальных РТП $M_{g,k}^{(i)}(x_{g,k}^{(i)}, y_{g,k}^{(i)})$ в базовой системе координат находятся по формуле

$$(x_{g,k}^{(i)}, y_{g,k}^{(i)}, 1)^T = [A(M_{g,k}^{(1)}, \varphi_k^{(1)})]_{3 \times 3} (x_{g,k}^{(1)}, y_{g,k}^{(1)}, 1)^T. \quad (2)$$

Здесь $[A(M_{g,k}^{(1)}, \varphi_k^{(1)})]_{3 \times 3}$ — матрица однородного преобразования от сопутствующей системы координат шаблона (СКСШ) к базовой системе координат, зависящая от соответствующего целевого положения $M_{g,k}^{(1)}$ ведущей РТП и угла поворота СКСШ относительно базовой системы координат $\varphi_k^{(1)}$ на k -м участке траектории ведущей РТП; $(x_{g,k}^{(i)}, y_{g,k}^{(i)}, 1)$ — вектор целевого положения i -й РТП в СКСШ.

Если для ведущей РТП каждая точка $M_{g,k}^{(1)}$ лежит строго внутри отрезка $C_k^{(1)}B_{k+1}^{(1)}$, то для другой i -й РТП может возникнуть ситуация, когда $M_{g,k}^{(i)}$ лежит вне линейного отрезка $C_k^{(i)}B_{k+1}^{(i)}$ траектории этой РТП на k -м участке. Действительно, положение граничных точек криволинейного k -го участка траектории i -й РТП определяется траекторией ведущей РТП, поперечной координатой $y_g^{(i)}$ целевого положения i -й РТП в шаблоне строя, а также максимально допустимым отклонением d_3 сглаженной траектории от исходной и минимально-допустимым радиусом скругления R_{\min} траектории. Поэтому при достаточно большом значении модуля $|x_g^{(i)}|$ по отношению к длине $|C_k^{(i)}B_{k+1}^{(i)}|$ возможен выход $M_{g,k}^{(i)}$ за пределы отрезка $C_k^{(i)}B_{k+1}^{(i)}$. Точка $M_{g,k}^{(i)}$ будет всегда лежать на прямой, порождаемой отрезком $C_k^{(i)}B_{k+1}^{(i)}$. В связи с этим принимается следующая корректировка для $M_{g,k}^{(i)}$:

$$M_{g,k}^{(i)} = \begin{cases} \tilde{M}_{g,k}^{(i)}, & \text{если } \tilde{M}_{g,k}^{(i)} \in C_k^{(i)}B_{k+1}^{(i)}; \\ C_k^{(i)}, & \text{если } \tilde{M}_{g,k}^{(i)} \text{ лежит левее } C_k^{(i)}; \\ C_{k+1}^{(i)}, & \text{если } \tilde{M}_{g,k}^{(i)} \text{ лежит правее } B_{k+1}^{(i)}, \end{cases} \quad (3)$$

где $\tilde{M}_{g,k}^{(i)}$ определяется по формуле (2). Согласно определению (3) правая граничная точка $M_{g,h}^{(i)}$ каждого из участков $M_{g,h-1}^{(i)}M_{g,h}^{(i)}$, $h = 1, 2, \dots, K-1$, либо принадлежит отрезку $C_k^{(i)}B_{k+1}^{(i)}$, либо совпадает с одной из правых граничных точек криволинейных $(h-1)$ -го и h -го участков — $C_k^{(i)}$ или $C_{k+1}^{(i)}$.

Заметим, что упрощенные параметрические представления для траектории каждой ведомой РТП не могут, в общем случае, обеспечить совпадение положений элементов группы с соответствующими точками целевых конфигураций $\tilde{M}_{g,k}^{(i)}$, поскольку выбор крейсерских скоростей по формуле (1) гарантирует достижение только конечной целевой конфигурации. Одним из способов решения этой проблемы является допущение различия крейсерских скоростей на каждом линейном участке и введение интервалов выравнивания скорости между соседними линейными интервалами с точками стыковки, взятыми в соответствующих точках целевых конфигураций. В этих точках целесообразно обеспечить гладкость функции траекторной скорости. Последовательное решение этой задачи приведено в **Приложении 1**.

В итоге можно получить следующие параметрические временные представления для каждого из трех участков:

1. Для интервала выравнивания скорости:

$$r_k^{(i)} = M_{g,k-1}^{(i)} + p_k^{(i)} s_k^{(i)}(t), \quad (4)$$

где $p_k^{(i)}$ — единичный направляющий вектор k -го интервала i -й РТП;

$$s_k^{(i)}(t) = 0, 25a_{q,k}^{(i)}(t^4 - t_{g,k-1}^4) + b_{q,k}^{(i)}(t^3 - t_{g,k-1}^3)/3 + 0, 5c_{q,k}^{(i)}(t^2 - t_{g,k-1}^2) + d_{q,k}^{(i)}(t - t_{g,k-1}).$$

2. Для интервала с постоянной скоростью движения:

$$r_k^{(i)}(t) = M_{e,k}^{(i)} + p_k^{(i)}(t - t_{e,k}^{(i)}). \quad (5)$$

3. Для интервала движения по криволинейному участку:

$$r_k^{(i)}(t) = O_k^{(i)} + R_{g,k}^{(i)} \begin{bmatrix} \cos \Phi_k^{(i)} + \varphi_k^{(i)} \\ \sin \Phi_k^{(i)} + \varphi_k^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\Phi_k^{(i)} = \{a_k^{(i)} \Delta t_k^{(i)} \sin[\pi(t - t_{l,k}^{(i)})/\Delta t_k^{(i)}] + b_k^{(i)}(t - t_{l,k}^{(i)})\}/R_k^{(i)}.$$

Все параметры, входящие в формулы (4)–(6), определяются согласно формулам (П.2) –(П.10) **Приложения 1**, а также по результатам работы [23].

Метод контрольных конфигураций может быть использован и в случае, когда требуется обеспечить нахождение группы в заданном строю в фиксированные моменты времени при отсутствии информации об индивидуальных траекториях отдельных РТП. В этом случае существует кусочно-линейная траектория для каждой РТП, из которой легко получить соответствующую сглаженную линейно-квадратичную траекторию.

Частным случаем описанного алгоритма является алгоритм сходимости к конечному положению шаблона, когда единственным требованием к конфигурации в процессе движения является требование сформировать строй в конечный момент движения. Изменение соотношения между размером строя и минимальным линейным размером траектории ведущей РТП практически не влияет на реализацию этого случая, что важно для большого числа прикладных задач управления движением группы подвижных объектов

Корректировка индивидуальных траекторий при действии источников возмущений

При воздействии источников возмущений используем метод расчета вероятностей успешного прохождения РТП в поле этих источников. Он базируется на понятии характеристической вероятностной функции (ХВФ) источника, дающей поле вероятностей успешного прохождения малых траекторий в окрестности данного источника в различных точках области его действия [27, 28]. Будем далее рассматривать частный случай источников с равномерным азимутальным распределением ХВФ:

$$q_{0S}(d, \alpha, T) = \begin{cases} \exp(-\varepsilon T \exp[-(d/d_p)^2]), \\ \text{при } M \in U_S; \\ 1, \text{ иначе,} \end{cases} \quad (7)$$

где U_S — круговая область действия источника S , характеризующаяся центром O , направляющим вектором средней линии n_S , радиусом d_0 , углом $\Delta\alpha_S$, стягивающим этот сектор; d_p — эффективный радиус источника; ε — характерная частота воздействия источника на РТП.

В случае оптимизации движения группы в составе N РТП по критерию максимума вероятности успешного прохождения возникают две характерные оптимизационные задачи.

Первая задача заключается в прохождении участка с источниками группой РТП, каждая из которых имеет постоянную по модулю скорость V . Решение этой задачи связано с оптимизацией следующего функционала [27, 28]:

$$Q(\{Tr\}) = \prod_{n=1}^N q_n(Tr_n) = \prod_{n=1}^N \exp \left[-\sum_{k=1}^K \varepsilon^{(k)} I^{(n,k)} \right], \quad (8)$$

где $\{Tr\}$ — совокупность траекторий всех РТП группы; $q_n(Tr_n)$ — вероятность успешного прохождения индивидуальной траектории n -й РТП группы. Для случая кусочно-линейных траекторий РТП величины $I^{(n,k)}$ задаются формулой

$$I^{(n,k)} = \frac{\sqrt{\pi} d_p^{(k)}}{2V} \sum_{l=1}^{M_n-1} \eta_{l,k}^{(k)}(A_{n,l}, A_{n,l+1}) \times \left\{ \exp \left[-\left(\frac{d_{n,l}^{(k)} \sin \varphi_{n,l}^{(k)}}{d_p^{(k)}} \right)^2 \right] [\text{sign}(\tilde{\rho}_{2,n,l}^{(k)}) \times \right. \quad (9)$$

$$\left. \times \text{erf}(|\tilde{\rho}_{2,n,l}^{(k)}|) - \text{sign}(\tilde{\rho}_{1,n,l}^{(k)}) \text{erf}(|\tilde{\rho}_{1,n,l}^{(k)}|) \right] \Big\},$$

$$\tilde{\rho}_{1,n,l}^{(k)} = \frac{d_{n,l}^{(k)} \cos \varphi_{n,l}^{(k)}}{d_p^{(k)}}, \quad \tilde{\rho}_{2,n,l}^{(k)} = \tilde{\rho}_{1,n,l}^{(k)} + \frac{\Delta r_{n,l}}{d_p^{(k)}}, \quad (10)$$

где $d_{n,l}^{(k)} = |O_k A_{n,l}|$ — расстояние от центра k -го источника до точки $A_{n,l}$ n -го РТП группы; M_n — число узлов кусочно-линейной траектории n -й РТП; $\Delta r_{n,l} = |A_{n,l} A_{n,l+1}|$ — длина отрезка $A_{n,l} A_{n,l+1}$; $\varphi_{n,l}^{(k)}$ — угол между векторами $O_k A_{n,l}$ и $A_{n,l} A_{n,l+1}$. Здесь $\varepsilon^{(k)}$, $d_p^{(k)}$ — характерная частота и эффективный радиус действия k -го источника с областью в виде кругового сектора, причем $d_p^{(k)}$ может не быть равен радиусу этого сектора $d_0^{(k)}$; erf — функция ошибок [29].

Вторая задача означает максимизацию вероятности успешного прохождения участка с источниками только определенным числом элементов группы.

Рассмотрим разбиение множества всех РТП группы на подмножества из m элементов, где $m = 1, 2, \dots, M$, $M = N$. Для каждого m множество возможных сочетаний занумеруем следующим образом: $u = 1, 2, \dots, C_M^m$. В пределах каждого подмножества $\Pi_{m,u}$ с номером u занумеруем каждый его элемент следующим образом: $u = m'(m, u, 1), m'(m, u, 2), \dots, m'(m, u, m)$, где

$m'(m, u, c)$ — функция трех натуральных аргументов, осуществляющая обращение к каждому элементу $P_{m,u}$. Расширим множество значений третьего аргумента функции $m'(m, u, c)$ так, чтобы при $m < c \leq M$ эта функция давала $M - m$ номеров всех других РТП, не попавших в подмножество $P_{m,u}$. В этом случае величина

$$P_{m,u} = \prod_{c=1}^m q_{m'(m,u,c)} \prod_{c=m+1}^M [1 - q_{m'(m,u,c)}] \quad (11)$$

есть вероятность события "Все элементы подмножества $P_{m,u}$ прошли успешно свои дистанции, а все остальные элементы группы — не успешно" [29]. Здесь $q_{m'(m,u,c)}$ есть вероятность успешного прохождения траектории $Tr_{m'(m,u,c)}$.

Тогда вероятность успешного прохождения участка с источниками РТП в составе не меньше, чем M_{pr} элементов, рассчитывается по формуле

$$Q[\{Tr\}, M_{pr}] = \sum_{m=M_{pr}}^M \left(\sum_{u=1}^{C_M^m} P_{m,u} \right) \quad (12)$$

$$= \sum_{m=M_{pr}}^M \left\{ \sum_{u=1}^{C_M^m} \left\{ \prod_{c=1}^m q_{m'(m,u,c)} \prod_{c=m+1}^M [1 - q_{m'(m,u,c)}] \right\} \right\}.$$

При решении обеих задач для РТП, размер которой мал по сравнению со средним расстоянием до центров источников, может быть применена следующая методика. Задается целевая вероятность $Q_{gr,goal}$ и рассчитывается вероятность $Q[\{Tr\}, M_{pr}]$ (12) для исходных траекторий элементов группы. Если $Q[\{Tr\}, M_{pr}] < Q_{gr,goal}$, то выбираем ведущий элемент группы, траектория которого проходит, например, ближе всего к источникам. Определяем оценку Q^* вероятности Q (12) при одинаковости вероятностей успешного прохождения траекторий каждой РТП $q_n(Tr_n) \approx q = \text{const}$, $n = 1, 2, \dots, N$. В этом случае Q^* есть функция от q . Для определенности рассмотрим частный случай, когда требуется обеспечить успешное прохождение не менее чем для $M_{pr} = M - 1 = N - 1$ элементов группы. Тогда получаем следующее приближенное равенство для определения минимального значения q по заданной вероятности $Q_{gr,goal}$:

$$Q[\{Tr\}, N - 1] \approx Q^* = Nq^{N-1}(1 - q) + q^{N-1} = q^{N-1}[q(1 - N) + N] = Q_{gr,goal}. \quad (13)$$

Пусть q^* — решение уравнения (13). Применим разработанную в работах [27, 28] процедуру нахождения траектории ведущей РТП с ве-

роятностью успешного прохождения, не меньшей чем q^* . Если на u -м шаге этой процедуры достигнута вероятность q^* , тогда строятся скорректированные траектории $\{Tr\}_u$ для всех остальных элементов группы, затем рассчитывается уточненная вероятность $Q[\{Tr\}_u, N - 1]$ успешного прохождения $M - 1$ элемента по формулам (9), (10), (12). Если условие $Q > Q_{gr,goal}$ удовлетворяется, то искомые траектории элементов группы построены, иначе итерационная процедура повторяется до тех пор, пока не будет удовлетворяться последнее неравенство, достигнуты предельные отклонения от исходных программных траекторий или предельно допустимое время расчета. Таким образом, получена процедура, позволяющая достигнуть, по возможности, целевой вероятности успешного по критерию (12) прохождения группой РТП полей источников.

Результаты численного моделирования

Моделирование метода контрольных конфигураций. На рис. 4 (см. третью сторону обложки) и рис. 5 представлены результаты применения метода контрольных конфигураций при движении пяти РТП клином при следующих исходных данных:

— матрица базовых точек кусочно-линейной кривой ведущей РТП

$$[A_k^{(1)}] = 100 \begin{bmatrix} 0,5 & 2,0 & 3,0 & 4,0 & 4,5 & 1,0 & 3,5 & 5,0 \\ 1,0 & -0,5 & 1,5 & 3,5 & 2,5 & 2,0 & 1,0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

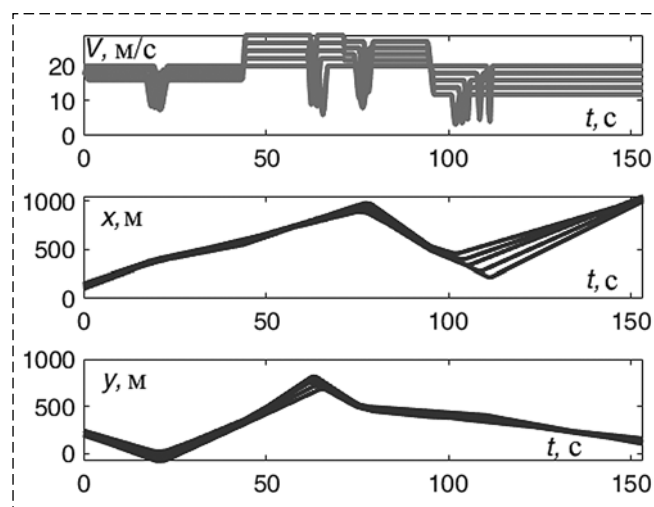


Рис. 5. Скорости и координаты роботов группы
Fig. 5. Speeds and coordinates of the robots of the group

- параметры строя $[a, \Delta a, b, \Delta b] = [6, 5, 4, 3]$;
- диапазон скоростей $V_{\min} = 0,1$ м/с, $V_{\max} = 20,0$ м/с;
- целевое время движения по траектории для каждой РТП $T_{goal} = 100$ с;
- целевые параметры скругления $d_{\min} = 4$ м, $d_{goal} = 5$ м;
- коэффициент крейсерской и минимальной скорости на повороте $\eta = 0,1$.

Контрольные конфигурации привязаны к серединам линейных отрезков ведущей РТП, а последняя целевая конфигурация соответствует достижению группой конечного положения. На рис. 4 (см. третью сторону обложки) приведены линейно-квадратичные сглаженные индивидуальные траектории отдельных РТП и их положения в несколько моментов времени. Красной линией показана траектория ведущей РТП. Зеленым цветом показаны траектории остальных РТП. Также зеленым цветом выделены положения РТП, соответствующие целевым моментам времени $t_{g,k}$ $k = 1,2,3,4,5$, а красным — положения РТП в другие моменты времени.

На рис. 5 представлены зависимости траекторных скоростей РТП и их координат от времени. Заметим, что разработанный алгоритм объединяет те соседние участки кусочно-ломаной, угол между которыми меньше некоторого значения δ , чтобы исключить построение участков скругления с большим радиусом кривизны. В данном случае $\delta = 3$, а три участка кусочно-ломаной ведущей РТП подпадают под это условие, поэтому число базовых точек сокращено до шести.

Если параметры клинообразного строя $a, \Delta a, b, \Delta b$ достаточно большие по сравнению с размерами линейных участков траекторий, то алгоритм исключает точное выравнивание по шаблону для части РТП группы для предотвращения разрывов в траекториях и/или отрицательных скоростей. Целевые положения таких РТП на соответствующих участках корректируются в соответствии с формулой (3).

На рис. 6 (см. третью сторону обложки) представлены аналогичные результаты моделирования при условии, что коэффициент 100 в выражении (14) заменен на 60. В данном случае целевая конфигурация соблюдается только в конечный момент движения группы $t_{g,5}$.

Как видно из рис. 4 и рис. 6, когда размеры строя достаточно малы по сравнению с линейными размерами участков кусочно-линейных пространственных кривых РТП, осуществля-

ется точное следование шаблону в целевые моменты времени. При увеличении размера шаблона для ряда линейных участков точное выравнивание по шаблону избирательно блокируется алгоритмом: для одной РТП может быть проведено притягивание к шаблону, а для другой — скорректировано согласно описанным выше критериям.

Таким образом, результаты моделирования показывают эффективность развитого здесь метода контрольных конфигураций.

Моделирование движения группы в среде с источниками возмущений. Результаты моделирования представлены на рис. 7 (см. третью сторону обложки).

Моделирование проведено для $N = 5$, тип строя "шеренга", 11 источников помех. Предварительно определены исходные траектории движения РТП группы по методу, рассмотренному выше (см. желтую траекторию на рис. 7). Целевая вероятность успешного прохождения для $N - 1$ элемента группы есть $Q_{gr,goal} = 0,95$. Исходные вероятности успешного прохождения ведущего элемента и $M-1$ элемента группы составляют: $q_1 = 0,526$ и $Q_1 = Q\{Tr; M - 1\} = 0,252$. Применение рассмотренной итерационной процедуры на шаге $u = 50$ дает скорректированные траектории (показаны зеленым цветом), удовлетворяющие условию $Q_{50} = 0,98 \geq Q_{gr,goal}$.

Заключение

В статье предложен метод контрольных конфигураций, реализующий интерполяцию промежуточных положений каждого элемента группы по конечному набору их целевых положений в избранные моменты времени, соответствующие строгому соблюдению заданного шаблона строя.

Для построения траектории ведущей РТП при ее движении в среде с препятствиями использован метод, рассмотренный в работе [23].

При движении группы РТП в среде, содержащей источники возмущений, которые могут быть описаны характеристическими вероятностными функциями типа (7), возможно эффективно корректировать исходные траектории элементов группы, построенные планировщиком перемещений с учетом заданного строя группы. Эта корректировка сводится к максимизации вероятности успешного прохождения всех элементов группы или их части

в поле источников с помощью оптимизационной процедуры [27, 28].

В настоящей статье разработан подход к построению целевых траекторий элементов группы РТП, движущихся заданным строем в условиях стационарных препятствий и источников, которые могут быть описаны ХВФ типа (7). Результаты моделирования показывают эффективность развитого подхода для исследования движений групп РТП в условиях помеховых воздействий в двухмерном приближении.

Список литературы

1. Sun F., Li H., Zhu W., Kurths J. Fixed-time formation tracking for multiple nonholonomic wheeled mobile robots based on distributed observer // *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 106. P. 3331–3349.
2. Dong X., Yu B., Shi Z., Zhong Y. Time-Varying Formation Control for Unmanned Aerial Vehicles: Theories and Applications // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. Vol. 23, N. 1. P. 340–348.
3. Arteaga-Escamilla C. M., Castro-Linares R., Álvarez-Gallegos J. Leader–follower formation with reduction of the off-tracking and velocity estimation under visibility constraints // *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2021. Vol. 18, N. 610.
4. Pack D. J., DeLima P., Toussaint G. J., York G. Cooperative control of UAVs for localization of intermittently emitting mobile targets // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*. 2009. Vol. 39, N. 4. P. 959–970.
5. Безрук Г. Г., Мартынова Л. А., Саенко И. Б. Динамический метод поиска антропогенных объектов в морском дне с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов // *Труды СПИИРАН*. 2018. Т. 3, № 58. С. 203–226.
6. Мартынова Л. А. Метод эффективного удержания положения АНПА на маршрутной траектории при ведении сейсморазведки // *Информационно-управляющие системы*. 2018. Т. 3. С. 34–44.
7. Мартынова Л. А., Конохов Г. В., Пашкевич И. В., Рухлов Н. Н. Особенности группового управления анпа при ведении сейсморазведки // *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2017. № 9, № 194. С. 21–33.
8. Шепета А. П., Ненашев В. А. Точностные характеристики определения координат объектов в двухпозиционной системе малогабаритных бортовых РЛС // *Информационно-управляющие системы*. 2020. Т. 2. С. 31–36.
9. Nenashev V. A., Khanykov I. G. Formation of Fused Images of the Land Surface from Radar and Optical Images in Spatially Distributed On-Board Operational Monitoring Systems // *Journal of Imaging*. 2021. Vol. 7, N. 251. URL: <https://doi.org/10.3390/jimaging7120251>.
10. Ненашев В. А., Ханыков И. Г. Формирование комплексного изображения земной поверхности на основе кластеризации пикселей локационных снимков в многопозиционной бортовой системе // *Информатика и автоматизация*. 2021. Т. 20, № 2. С. 302–340.
11. Морозова Н. С. Виртуальные формации и виртуальные лидеры в задаче о движении строем группы роботов // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2015. № 1. С. 135–149.
12. Lewis M. A., Tan K.-H. High Precision Formation Control of Mobile Robots Using Virtual Structures // *Autonomous Robots*. 1997. N. 4. P. 387–403.
13. Эндо Т., Маэда Р., Мацуно Ф. Анализ устойчивости роя гетерогенных роботов с ограниченным полем зрения // *Информатика и автоматизация*. 2020. Т. 19, № 5. С. 942–966.
14. Гайдук А. Р., Мартынов О. В., Медведев М. Ю., Пшихопов В. Х., Хамдан Н., Фархунд А. Нейросетевая система управления группой роботов в неопределенной двумерной среде // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2020. Т. 21, № 8. С. 470–479.
15. Пшихопов В. Х., Медведев М. Ю. Децентрализованное управление группой однородных подвижных объектов в двумерной среде с препятствиями // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. Т. 17, № 5. С. 346–353.
16. Park B.-S., Yoo S.-J. Adaptive Secure Control for Leader-Follower Formation of Nonholonomic Mobile Robots in the Presence of Uncertainty and Deception Attacks // *Mathematics*. 2021. Vol. 9.
17. Hirata-Acosta J., Pliego-Jiménez J., Cruz-Hernández C., Martínez-Clark R. Leader-Follower Formation Control of Wheeled Mobile Robots without Attitude Measurements // *Applied Sciences*. 2021. Vol. 11, N. 12.
18. Maghenem M., Loria A., Panteley E. Cascades-based leader-follower formation tracking and stabilization of multiple nonholonomic vehicles // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2020. Vol. 65, N. 8. P. 3639–3646.
19. Wang Z., Wang L., Zhang H., Chen Q., Liu J. Distributed regular polygon formation control and obstacle avoidance for non-holonomic wheeled mobile robots with directed communication topology // *IET Control Theory and Applications*. 2020. Vol. 14, N. 9. P. 1113–1122.
20. Бобцов А. А., Ортега Р., Николаев Н. А., Слита О. В., Козачек О. А., Ван Ч. Оценка переменных состояния математической модели конвертора Чука с частично неизвестными параметрами // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2021. Т. 22, № 9. С. 451–458.
21. Воротников В. И., Вохмянина А. В. Метод линеаризующей обратной связи в задаче управления по части переменных при неконтролируемых помехах // *Труды СПИИРАН*. 2018. Вып. 6(61). С. 61–93.
22. Finaev V. I., Medvedev M. Yu., Pshikhopov V. K., Pereverzev V. A., Soloviev V. V. Unmanned Powerboat Motion Terminal Control in an Environment with Moving Obstacles // *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2021. Vol. 22, N. 3. P. 145–154.
23. Костюков В. А., Медведев М. Ю., Пшихопов В. Х. Планирование движения наземных роботов в среде с препятствиями: алгоритм построения сглаженных индивидуальных траекторий // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2022. Т. 23, № 11. С. 585–595.
24. Khatib O. Real-Time Obstacles Avoidance for Manipulators and Mobile Robots // *International Journal of Robotics Research*. 1986. Vol. 5, N. 1. P. 90–98.
25. Платонов А. К., Карпов И. И., Кирильченко А. А. Метод потенциалов в задаче прокладки трассы. М.: Препринт Института прикладной математики АН СССР. 1974. 27 с.
26. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Вопросы управления движением мобильных роботов методом потенциального наведения // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2019. Т. 20, № 11. С. 677–685.
27. Медведев М. Ю., Костюков В. А., Пшихопов В. Х. Оптимизация движения мобильного робота на плоскости в поле конечного числа источников-репеллеров // *Труды СПИИРАН*. 2020. Т. 19, № 1. С. 43–78.
28. Kostjukov V., Medvedev M., Pshikhopov V. Method for Optimizing of Mobile Robot Trajectory in Repeller Sources Field // *Informatics and Automation*. 2021. Vol. 20, N. 3. P. 690–726.
29. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М: Физматлит, 1969.
30. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1977.

Приложение 1.

Обоснование метода контрольных конфигураций при простом шаблоне строя движущейся группы

Ветвление в определении точек целевых конфигураций для ведущих РТП порождает пять возможных типов участков $M_{g,h-1}^{(i)}M_{g,h}^{(i)}$.

Тип участка "lcl" соответствует объединению линейного участка $M_{g,k-1}^{(i)}B_{g,k}^{(i)}$, криволинейного участка $B_{g,k}^{(i)}C_{g,k}^{(i)}$ и линейного участка $C_{g,k}^{(i)}M_{g,k}^{(i)}$ и имеет место, если $M_{g,k-1}^{(i)} \in C_{k-1}^{(i)}B_k^{(i)}$ и $M_{g,k}^{(i)} \in C_k^{(i)}B_{k+1}^{(i)}$. Тип "lclc" соответствует объединению линейного участка $M_{g,k-1}^{(i)}B_{g,k}^{(i)}$, криволинейного участка $B_{g,k}^{(i)}C_{g,k}^{(i)}$, линейного участка $C_{g,k}^{(i)}B_{g,k+1}^{(i)}$ и криволинейного участка $B_{g,k+1}^{(i)}C_{g,k+1}^{(i)}$, причем $M_{g,k}^{(i)} = C_{g,k+1}^{(i)}$. Тип "lc", соответствует объединению линейного участка $M_{g,k-1}^{(i)}B_{g,k}^{(i)}$ и криволинейного участка $B_{g,k}^{(i)}C_{g,k}^{(i)}$, причем $M_{g,k}^{(i)} = C_{g,k}^{(i)}$. Тип "l" соответствует единственному линейному участку $C_{g,k}^{(i)}M_{g,k}^{(i)}$, причем $M_{g,k-1}^{(i)} = C_{g,k}^{(i)}$. Тип участка "0" отражает вырожденный случай, когда $M_{g,k-1}^{(i)} = C_{g,k}^{(i)} = M_{g,k}^{(i)}$.

Положим, что на каждом линейном участке есть интервал с постоянной скоростью движения, а каждый криволинейный участок по режиму движения полностью совпадает с рассмотренным ранее.

Для обеспечения непрерывности и гладкости функции скорости при переходе от одного участка к другому введем на каждом из первых линейных отрезков участков типов lcl, lclc, lc и l интервал выравнивания скорости $M_{g,k-1}^{(i)}M_{e,k}^{(i)}$, где точка $M_{e,k}^{(i)} \in M_{g,k-1}^{(i)}B_k^{(i)}$ для типов lcl, lclc, lc и $M_{e,k}^{(i)} \in M_{g,k}^{(i)}$ для типа l. В процессе прохождения этого участка скорость $v_k^{(i)}(t)$ i -й РТП должна непрерывно и гладко меняться так, чтобы было выполнено краевое условие

$$\begin{aligned} v_k^{(i)}(t_{g,k-1}) &= v_{k-1}^{(i)}(t_{g,k-1}); \\ \dot{v}_k^{(i)}(t_{g,k-1}) &= \dot{v}_{k-1}^{(i)}(t_{g,k-1}). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

Положение точки $M_{e,k}^{(i)}$ можно предварительно задать. Тогда для каждого из интервалов выравнивания скорости $M_{g,k-1}^{(i)}M_{e,k}^{(i)}$ необходимо определить момент $t_{e,k}$ достижения точки $M_{e,k}^{(i)}$ и сам закон изменения скорости $v_k^{(i)}(t)$.

Таким образом, линейный пространственный участок траектории обязательно содержит интервал с постоянной скоростью движения и может содержать интервал выравнивания ско-

рости. Чтобы скорость была положительной на интервалах выравнивания для аппроксимации выбирается полином третьего порядка. Заметим, что в граничных моментах времени $t_{g,k-1}$, $t_{e,k}$ каждого из интервалов выравнивания производная скорости соседнего участка, либо интервала с постоянной скоростью движения того же участка всегда равны нулю. Для гладкой стыковки соседних участков в случае полиномиальной аппроксимации этим граничным точкам будут отвечать две стационарные точки полинома, в которых производная обращается в ноль. Но для полинома 3-го порядка между указанными двумя граничными точками не может быть локальных экстремумов, так как нет других стационарных точек [30]. Этим обеспечится монотонность функции скорости на интервале выравнивания.

На рис. П1—П4 приведены типовые зависимости скорости от времени на участках различных типов.

Из рис. П.1—П.4 видно, что для задания скоростного режима на каждом из участков достаточно определить: а) коэффициенты аппроксимирующего полинома $\{a_{g,k}^{(i)}, b_{g,k}^{(i)}, c_{g,k}^{(i)}, d_{g,k}^{(i)}\}$ на интервале выравнивания скорости; б) скорость $V_k^{(i)}$ на интервалах движения с постоянной скоростью; в) параметры $\{\varphi_k^{(i)}, a_k^{(i)}, b_k^{(i)}, t_{l,k}^{(i)}, \Delta t_k^{(i)}\}$ для косинусной аппроксимирующей функции на k -м криволинейном интервале для участков типов lcl и lc; г) для участков типа lclc требуется дополнительно определить параметры второго криволинейного интервала $\{\varphi_{k+1}^{(i)}, a_{k+1}^{(i)}, b_{k+1}^{(i)}, t_{l,k+1}^{(i)}, \Delta t_{k+1}^{(i)}\}$.

Для решения этой задачи вначале рассмотрим участок типа lcl (см. рис. П.1). Сформулируем достаточные требования к скоростному режиму на участке lcl.

1. При $t = t_{e,k}$ скорость $v_k^{(i)}(t_{e,k}^{(i)})$ должна совпадать со скоростью на линейных интервалах $M_{e,k}^{(i)}B_k^{(i)}$ и $B_{g,k}^{(i)}M_{g,k}^{(i)}$ и обеспечивать гладкость функции $v^{(i)}(t)$.

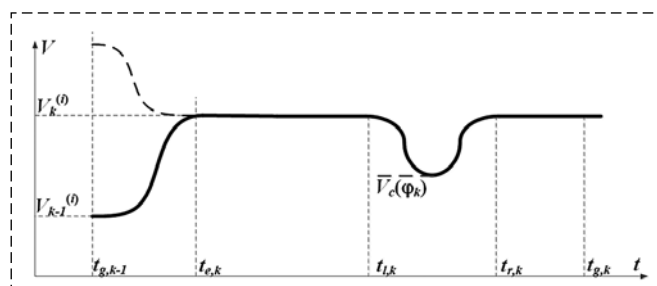


Рис. П1. Зависимость скорости от времени для участка типа lcl
Fig. П1. The dependence of speed on time for the lcl type

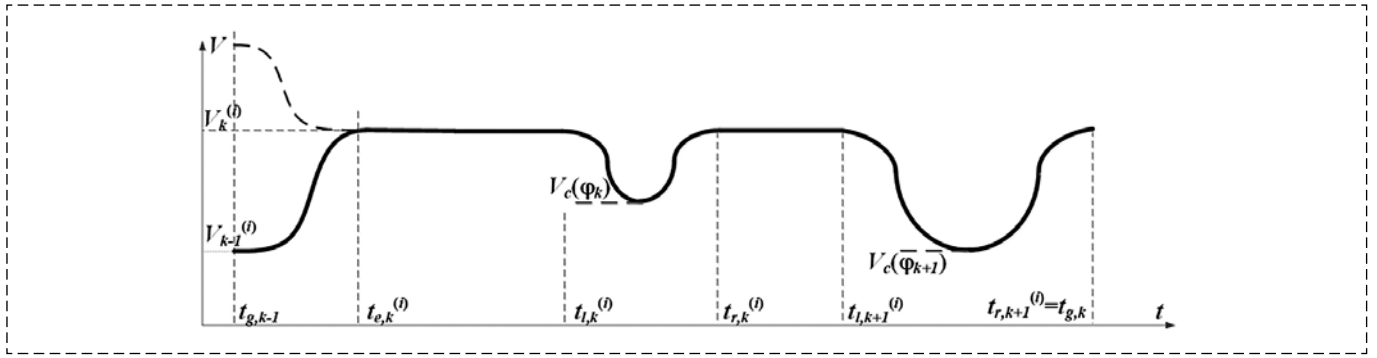


Рис. П2. Зависимость скорости от времени для участка типа lcIc
 Fig. П2. The dependence of speed on time for the lcIc type

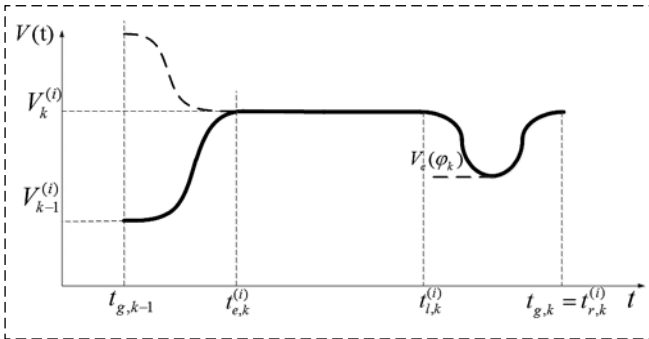


Рис. П3. Зависимость скорости от времени для участка типа lc
 Fig. П3. The dependence of speed on time for the lc type

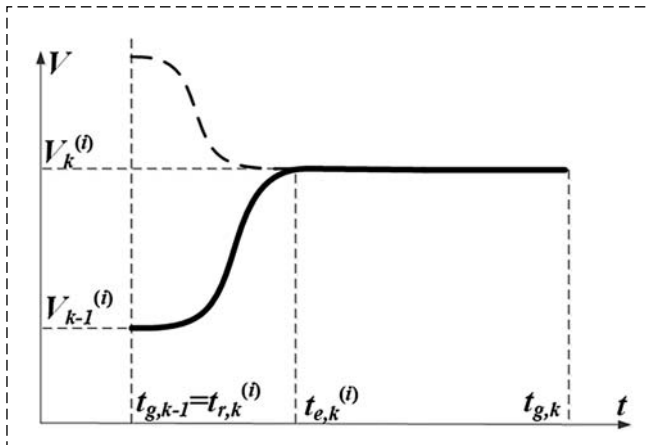


Рис. П4. Зависимость скорости от времени для участка типа l
 Fig. П4. The dependence of speed on time for the l type

2. Проходимый РТП путь на участке выравнивания скорости должен быть равен

$$l_{ge,k}^{(i)} = |M_{g,k-1}^{(i)} M_{e,k}^{(i)}| = k_e |M_{g,k-1}^{(i)} B_k^{(i)}|,$$

где $k_e < 1$ — постоянный коэффициент.

3. Проходимый РТП путь на двух интервалах с постоянной скоростью движения должен быть равен $|M_{g,k-1}^{(i)} B_k^{(i)}| + |C_k^{(i)} M_{g,k}^{(i)}| - l_{ge,k}^{(i)}$.

4. Профиль скорости на каждом криволинейном участке определяется по той же методике, что и на этапе 2.

Исходя из перечисленных четырех требований, краевого условия (П.1) и требования использования полинома 3-го порядка приходим к системе нелинейных уравнений относительно неизвестных $\{a_{q,k}^{(i)}, b_{q,k}^{(i)}, c_{q,k}^{(i)}, d_{q,k}^{(i)}, t_{e,k}^{(i)}, V_k^{(i)}\}$:

$$\begin{cases} a_{q,k}^{(i)} t_{g,k-1}^3 + b_{q,k}^{(i)} t_{g,k-1}^2 + c_{q,k}^{(i)} t_{g,k-1} + d_{q,k}^{(i)} = V_{k-1}^{(i)}; \\ a_{q,k}^{(i)} t_{e,k}^3 + b_{q,k}^{(i)} t_{e,k}^2 + c_{q,k}^{(i)} t_{e,k} + d_{q,k}^{(i)} = V_k^{(i)}; \\ 3a_{q,k}^{(i)} t_{g,k-1}^2 + 2b_{q,k}^{(i)} t_{g,k-1} + c_{q,k}^{(i)} = 0; \\ 3a_{q,k}^{(i)} t_{e,k}^2 + 2b_{q,k}^{(i)} t_{e,k} + c_{q,k}^{(i)} = 0; \\ a_{q,k}^{(i)} (t_{e,k}^4 - t_{g,k-1}^4)/4 + b_{q,k}^{(i)} (t_{e,k}^3 - t_{g,k-1}^3)/3 + \\ + c_{q,k}^{(i)} (t_{e,k}^2 - t_{g,k-1}^2)/2 + d_{q,k}^{(i)} (t_{e,k} - t_{g,k-1}) = l_{ge,k}^{(i)}; \\ (t_{g,k} - t_{e,k}^{(i)}) V_k^{(i)} - 2R_k^{(i)} \psi_k^{(i)} / (1 - \eta_k^{(i)}) = \\ = |M_{g,k-1}^{(i)} B_k^{(i)}| + |C_k^{(i)} M_{g,k}^{(i)}| - l_{ge,k}^{(i)}. \end{cases} \quad (\text{П.2})$$

Значения $V_k^{(i)}$ и $t_{e,k}^{(i)}$ должны удовлетворять неравенствам

$$V_{\min} < V_k^{(i)} < V_{\max}, \quad t_{g,k-1} < t_{e,k}^{(i)} < t_{g,k}. \quad (\text{П.3})$$

Система (П.2) после исключения коэффициентов $\{a_{q,k}^{(i)}, b_{q,k}^{(i)}, c_{q,k}^{(i)}, d_{q,k}^{(i)}\}$ преобразуется к виду:

$$\begin{cases} 0, 25(V_{k-1}^{(i)} + V_k^{(i)}) t_{e,k}^{(i)4} - b_{q,k}^{(i)} [(V_{k-1}^{(i)} + V_k^{(i)}) t_{g,k-1} + \\ + 0, 5l_{ge,k}^{(i)}] t_{e,k}^{(i)3} / 3 + 1, 5t_{g,k-1} [(V_{k-1}^{(i)} + V_k^{(i)}) t_{g,k-1} + \\ + l_{ge,k}^{(i)}] t_{e,k}^{(i)2} - t_{g,k-1}^2 [(V_{k-1}^{(i)} + V_k^{(i)}) t_{g,k-1} + \\ + 1, 5l_{ge,k}^{(i)}] t_{e,k}^{(i)} + 0, 25t_{g,k-1}^3 [(V_{k-1}^{(i)} + V_k^{(i)}) t_{g,k-1} + \\ + 2l_{ge,k}^{(i)}] = 0, \quad t_{e,k}^{(i)} = t_{g,k} - \rho_k^{(i)} / V_k^{(i)}, \end{cases} \quad (\text{П.4})$$

$$\text{где } \rho_k^{(i)} = |M_{g,k-1}^{(i)} B_k^{(i)}| + |C_k^{(i)} M_{g,k}^{(i)}| + \frac{2R_k^{(i)} \psi_k^{(i)}}{1 - \eta_k^{(i)}} - l_{ge,k}^{(i)}.$$

Система (П.4) сводится к уравнению 5-го порядка относительно $t_{e,k}^{(i)}$, поэтому она решается численно. Для нахождения начально-

го приближения рассмотрим линейный закон изменения скорости на участке выравнивания $M_{g,k-1}^{(i)} M_{e,k}^{(i)}$:

$$v_{approx}^{(i)}(t) = V_k^{(i)} + (t - t_{g,k-1})(V_k^{(i)} - V_{k-1}^{(i)}) / (t_{g,k} - t_{g,k-1}), \quad (\text{П.5})$$

что далее позволяет выразить $l_{ge,k}^{(i)}$ через $V_k^{(i)}$ и $t_{e,k}^{(i)}$:

$$l_{ge,k}^{(i)} = \int_{t_{g,k-1}^{(i)}}^{t_{e,k}^{(i)}} v_{approx}^{(i)}(t) dt = 0,5 V_k^{(i)} (V_k^{(i)} - V_{k-1}^{(i)}) / (t_{g,k} - t_{g,k-1}). \quad (\text{П.6})$$

Искомое начальное приближение $V_{k,approx}^{(i)}$ и $t_{e,k,approx}^{(i)}$ определяется путем совместного решения уравнения (П.6) при $V_k^{(i)} = V_{k,approx}^{(i)}$ и последнего уравнения в (П. 4):

$$t_{e,k,approx}^{(i)} = t_{g,k} - \rho_k^{(i)} / V_{k,approx}^{(i)}. \quad (\text{П.7})$$

После нахождения $t_{e,k}^{(i)}, V_k^{(i)}$ из (П.3) коэффициенты $\{a_{q,k}^{(i)}, b_{q,k}^{(i)}, c_{q,k}^{(i)}, d_{q,k}^{(i)}\}$ находятся с помощью первых четырех уравнений в (П.2) по формуле

$$\begin{aligned} [a_{q,k}^{(i)}, b_{q,k}^{(i)}, c_{q,k}^{(i)}, d_{q,k}^{(i)}]^T &= \\ &= \begin{bmatrix} t_{g,k-1}^3 & t_{g,k-1}^2 & t_{g,k-1} & 1 \\ t_{e,k}^{(i)3} & t_{e,k}^{(i)2} & t_{e,k}^{(i)} & 1 \\ 3t_{g,k-1}^2 & 2t_{g,k-1} & 1 & 0 \\ 3t_{e,k}^{(i)2} & 2t_{e,k}^{(i)} & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{k-1}^{(i)} \\ V_k^{(i)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{П.8}) \end{aligned}$$

На основании проведенного анализа, позволяющего определить все неопределенные параметры скоростного режима на участке типа *lcl*, могут быть получены соответствующие режимы для остальных типов участков.

Для остальных типов участков систему уравнений относительно $t_{e,k}^{(i)}, V_k^{(i)}$ можно получить из (П.4), если в качестве $\rho_k^{(i)}$ взять

$$\begin{aligned} \rho_k^{(i)} &= |M_{g,k-1}^{(i)} B_k^{(i)}| + |C_k^{(i)} M_{g,k}^{(i)}| - l_{ge,k}^{(i)} + \\ &+ 2[R_k^{(i)} \psi_k^{(i)} / (1 - \eta_k^{(i)}) + R_{k+1}^{(i)} \psi_{k+1}^{(i)} / (1 - \eta_{k+1}^{(i)})] - \\ &\text{для типа } lclc, \\ \rho_k^{(i)} &= |M_{g,k-1}^{(i)} B_k^{(i)}| - l_{ge,k}^{(i)} + 2[R_k^{(i)} \psi_k^{(i)} / (1 - \eta_k^{(i)})] - \\ &\text{для типа } lc, \\ \rho_k^{(i)} &= |C_k^{(i)} M_{g,k}^{(i)}| - l_{ge,k}^{(i)} \text{ — для типа } l. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что тип k -го участка определяется предыдущим типом и положением точки $M_{g,k}^{(i)}$. Введем параметр

$$\text{flag}(M_{g,k}^{(i)}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tilde{M}_{g,k}^{(i)} \in C_k^{(i)} B_{k+1}^{(i)}; \\ -2, & \text{если } \tilde{M}_{g,k}^{(i)} \text{ лежит левее } C_k^{(i)}; \\ 2, & \text{если } \tilde{M}_{g,k}^{(i)} \text{ лежит правее } B_{k+1}^{(i)}. \end{cases} \quad (\text{П.10})$$

Тогда справедлива табл. П1 соответствий между типом предыдущего участка, параметром $\text{flag}(M_{g,k}^{(i)})$ и типом текущего участка. Первый участок не рассматривается, поскольку точка $M_{g,k}^{(i)}$ совпадает с первой базовой точкой $A_1^{(i)}$.

Вторая и третья колонки, соответствующие значениям $\text{flag}(M_{g,k}^{(i)}) = -2$ и $\text{flag}(M_{g,k}^{(i)}) = 1$, используются для всех участков, а в последней колонке без скобок отмечен тип текущего участка для $k = 2, 3, \dots, K - 1$, а типы для $k = K - 1$ отмечены в скобках.

Для определения временных параметрических представлений для всех РТП на всех участках осуществляется цикл перебора от 2-го до $(K - 1)$ -го участков. На каждом шаге определяются соответствующие параметры скоростного режима по соотношениям (П.4), (П.8), (П.9), (П.10). Если по какой-либо причине для i -й РТП уравнения (П.3) не имеют решения, удовлетворяющего условиям (П.2), то тогда для этой РТП построение временного параметрического представления траектории проводится на основании этапа 3.

Если для i -й РТП на всех участках ее траектории решение системы (П.4) найдено и удовлетворяет условиям (П.3), то осуществляется

Таблица П1
Table П1

Соответствие между типом предыдущего участка, параметром $\text{flag}(M_{g,k}^{(i)})$ и типом текущего участка
Correspondence between the type of the previous section, the parameter $\text{flag}(M_{g,k}^{(i)})$ and the type of the current section

Тип предыдущего участка	Тип текущего участка		
	$\text{flag}(M_{g,k}^{(i)}) = -2$	$\text{flag}(M_{g,k}^{(i)}) = -1$	$\text{flag}(M_{g,k}^{(i)}) = 2$
<i>lcl</i>	<i>lc</i>	<i>lcl</i>	<i>lccl (lcl)</i>
<i>lccl</i>	0	<i>l</i>	<i>lc (l)</i>
<i>lc</i>	<i>lc</i>	<i>lcl</i>	<i>lccl (lcl)</i>
<i>l</i>	<i>lc</i>	<i>lcl</i>	<i>lccl (lcl)</i>
0	<i>lc</i>	<i>lcl</i>	<i>lccl (lcl)</i>

Расчетные формулы характерных временных параметров каждого участка
Calculation formulas of the parameters of the intervals

Тип k -го участка	Характерные временные параметры (кроме $t_{e,k}^{(i)}$)
lcl, lc	$t_{l,k}^{(i)} = t_{e,k}^{(i)} + (M_{g,k-1}^{(i)} B_k^{(i)} - I_{ge,k}^{(i)}) / V_k^{(i)}, t_{r,k}^{(i)} = t_{l,k}^{(i)} + 2\Delta t_k^{(i)}, \Delta t_k^{(i)} = R_k^{(i)} \Psi_k^{(i)} / (1 - \eta_k^{(i)}) V_k^{(i)}$
$lclc$	$t_{l,k}^{(i)} = t_{e,k}^{(i)} + (M_{g,k-1}^{(i)} B_k^{(i)} - I_{ge,k}^{(i)}) / V_k^{(i)}, t_{r,k}^{(i)} = t_{l,k}^{(i)} + 2\Delta t_k^{(i)}, \Delta t_k^{(i)} = R_k^{(i)} \Psi_k^{(i)} / (1 - \eta_k^{(i)}) V_k^{(i)},$ $t_{l,k+1}^{(i)} = t_{r,k}^{(i)} + C_k^{(i)} B_{k+1}^{(i)} / V_k^{(i)}, t_{r,k+1}^{(i)} = t_{l,k+1}^{(i)} + 2\Delta t_{k+1}^{(i)}, \Delta t_{k+1}^{(i)} = R_{k+1}^{(i)} \Psi_{k+1}^{(i)} / (1 - \eta_{k+1}^{(i)}) V_k^{(i)}$

цикл расчета характерных времен линейных и криволинейных участков, не определенных ранее, по описанной выше итерационной процедуре с учетом характерных временных параметров каждого участка согласно табл. П2.

Здесь предполагается, что $t_{l,1}^{(i)} = t_{r,1}^{(i)} = 0, B_1^{(i)} = C_1^{(i)} = A_1^{(i)}$.

Для участков типов 1 и 0 дополнительных временных параметров определять не требуется.

Algorithms for Path Planning in a Group of Mobile Robots in an Environment with Obstacles with a Given Template

V. A. Kostjukov, wkost-einheit@yandex.ru, M. Y. Medvedev, medvmihal@sfnu.ru,
V. Kh. Pshikhov, pshichop@rambler.ru,
Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation

Corresponding author: Kostjukov Vladimir A., Cand. of Tech. Sc., Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation, e-mail: wkost-einheit@yandex.ru

Accepted on September 20, 2022

Abstract

A method is proposed for solving the problem of planning the movement of a group of ground-based robotic platforms (UGR) with the requirement to maintain a given formation of the system in the presence of stationary obstacles and sources of disturbances. The task of calculating the trajectory of the leading UGR, coupled with the use of a displacement planner and subsequent smoothing of the resulting trajectory according to the method considered in the first part of this work, is highlighted. The trajectories of the slaved elements of the group are determined by constructing offset spatial curves along which these elements should move, taking into account a given configuration or the requirements of preserving some average kinematic parameters of the elements along their trajectory. To solve the problem of evading the group from the influence of sources of disturbances, the method considered in the previous works of the authors is proposed. It is based on the calculation of the probabilities of successful passage of the elements of the group of their trajectories. These probabilities can be found after evaluating the parameters of the characteristic probability functions of the sources describing the nature of their impact on moving objects over small time intervals. In this article, this method is modified by additional optimization of the resulting spatial trajectory along the length for each UGR, taking into account a given degree of permissible deviation from the original curve. A technique has been developed that allows to find the target trajectories of the leading and driven UGR of the group, the probability of successful passage of which exceeds the specified target value. The methodology is generalized to the case when the optimization criterion is the probability of successful completion of only part of the UGR group. Simulation results confirm the effectiveness of the proposed method of planning the trajectories of robots forming a group in the field of repeller sources.

Keywords: trajectory planning, group control, smooth trajectories, local minima, robotic platform, two-dimensional environment.

Acknowledgements: The study was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation, project No. 22-29-00337 performed at Joint-Stock Company "Robotics and Control Systems".

For citation:

Kostjukov V. A., Medvedev M. Y., Pshikhov V. Kh. Algorithms for Path Planning in a Group of Mobile Robots in an Environment with Obstacles with a Given Template, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 1, pp. 33–45.

DOI: 10.17587/mau.24.33-45

References

1. Sun F., Li H., Zhu W., Kurths J. Fixed-time formation tracking for multiple nonholonomic wheeled mobile robots based on distributed observer, *Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 106, pp. 3331–3349.
2. Dong X., Yu B., Shi Z., Zhong Y. Time-Varying Formation Control for Unmanned Aerial Vehicles: Theories and Applications, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 23 (1), pp. 340–348.
3. Arteaga-Escamilla C. M., Castro-Linares R., Álvarez-Gallegos J. Leader–follower formation with reduction of the off-tracking and velocity estimation under visibility constraints, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2021, vol. 18 (610).
4. Pack D. J., DeLima P., Toussaint G. J., York G. Cooperative control of UAVs for localization of intermittently emitting mobile targets, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 2009, vol. 39(4), pp. 959–970.
5. Bezruk G. G., Martynova L. A., Saenko I. B. Dynamic method of searching for anthropogenic objects in the seabed using autonomous uninhabited underwater vehicles, *SPIIRAS Proceedings*, 2018, vol. 3(58), pp. 203–226 (in Russian).
6. Martynova L. A. The method of effective retention of the position of the ANPA on the route trajectory when conducting seismic exploration, *Information and control systems*, 2018, vol. 3, pp. 34–44 (in Russian).
7. Martynova L. A., Konyukhov G. V., Pashkevich I. V., Rukhlov N. N. Features of ABBA Group management during seismic exploration, *Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*, 2017, vol. 9(194), pp. 21–33 (in Russian).
8. Shepeta A. P., Nenashev V. A. Accuracy characteristics of object location in a two-position system of small onboard radars, *Informatsionno-Upravliaiushchie Sistemy*, 2020, vol. 2, pp. 31–36 (in Russian).
9. Nenashev V. A., Khanykov I. G. Formation of Fused Images of the Land Surface from Radar and Optical Images in Spatially Distributed On-Board Operational Monitoring Systems, *Journal of Imaging*, 2021, vol. 7 (251), available at: <https://doi.org/10.3390/jimaging7120251>.
10. Nenashev V., Khanykov I. Formation of a Fused Image of the Land Surface Based on Pixel Clustering of Location Images in a Multi-Position Onboard System, *Informatics and Automation*, 2021, vol. 20 (2), pp. 302–340 (in Russian).
11. Morozova N. S. Virtual formations and virtual leaders in formation control problem for group of robots, *Vestnik S.-Petersburg Univ. Ser. 10. Prikl. Mat. Inform. Prots. Upr.*, 2015, no. 1, pp. 135–149 (in Russian).
12. Lewis M. A., Tan K.-H. High Precision Formation Control of Mobile Robots Using Virtual Structures, *Autonomous Robots*, 1997, no.4, pp. 387–403.
13. Endo T., Maeda R., Matsuno F. Stability Analysis of Swarm Heterogeneous Robots with Limited Field of View, *Informatics and Automation*, 2020, vol.19 (5), pp. 942–966.
14. Gaiduk A. R., Martjanov O. V., Medvedev M. Yu., Pshikhopov V. Kh., Hamdan N., Farhood A. Neural network based control system for robots group operating in 2-d uncertain environment, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 8, pp. 470–479.
15. Pshikhopov V. Kh., Medvedev M. Yu. Decentralized Control of a Group of Similar Objects Moving in a Two-Dimensional Environment with Obstacles, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol.17, no. 5, pp. 346–353 (in Russian).
16. Park B.-S.; Yoo S.-J. Adaptive Secure Control for Leader-Follower Formation of Nonholonomic Mobile Robots in the Presence of Uncertainty and Deception Attacks, *Mathematics*, 2021, vol. 9.
17. Hirata-Acosta J., Pliego-Jiménez J., Cruz-Hernández C., Martínez-Clark R. Leader-Follower Formation Control of Wheeled Mobile Robots without Attitude Measurements, *Applied Sciences*, 2021, vol. 11(12).
18. Maghenem M., Loria A., Panteley E. Cascades-based leader-follower formation tracking and stabilization of multiple nonholonomic vehicles, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, vol. 65(8), pp. 3639–3646.
19. Wang Z., Wang L., Zhang H., Chen Q., Liu J. Distributed regular polygon formation control and obstacle avoidance for non-holonomic wheeled mobile robots with directed communication topology, *IET Control Theory and Applications*, 2020, vol. 14(9), pp. 1113–1122.
20. Bobtsov A. A., Ortega R., Nikolaev N. A., Slita O. V., Kozachek O. A., Wang C. Estimation of State Variables in the Čuk Converter Mathematical Model with Partially Unknown Parameters, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 9, pp. 451–458 (in Russian).
21. Vorotnikov V., Vokhmyanina A. Feedback Linearization Method for Problem of Control of a Part of Variables in Uncontrolled Disturbances, *SPIIRAS Proceedings*, 2018, vol. 6 (61), pp. 61–93 (in Russian).
22. Finaev V. I., Medvedev M. Yu., Pshikhopov V. K., Pereverzev V. A., Soloviev V. V. Unmanned Powerboat Motion Terminal Control in an Environment with Moving Obstacles, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 3, pp. 145–154.
23. Kostjukov V., Medvedev M., Pshikhopov V. Planning the Movement of a Group of Ground Robots in an Environment with Obstacles: an Algorithm for Constructing Smoothed Individual Trajectories, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 11, pp. 585–595 (in Russian).
24. Khatib O. Real-Time Obstacles Avoidance for Manipulators and Mobile Robots, *International Journal of Robotics Research*, 1986, vol. 5(1), pp. 90–98.
25. Platonov A. K., Karpov I. I., Kiril'chenko A. A. Potential field attitude in the problem of path finding, Moscow, Institute of Applied Mathematics. Academy of Science USSR, 1974, 27 p. (in Russian).
26. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Issues of Motion Control of Mobile Robots Based on the Potential Guidance Method, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 11, pp. 677–685 (in Russian).
27. Medvedev M., Kostjukov V., Pshikhopov V. Optimization of mobile robot movement on a plane with finite number of repeller sources, *SPIIRAS Proceedings*, 2020, vol. 19, no. 1, pp. 43–78.
28. Kostjukov V., Medvedev M., Pshikhopov V. Method for Optimizing of Mobile Robot Trajectory in Repeller Sources Field, *Informatics and Automation*, 2021, vol. 20, no. 3, pp. 690–726.
29. Wentzel E. S. Probability theory, Moscow, Fizmatlit, 1969.
30. Vygodsky M. Ya. Handbook of Higher Mathematics, Moscow, Nauka, 1977.

Ю. Д. Селюцкий, канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр., seliutski@imec.msu.ru,
НИИ механики МГУ, г. Москва

О регулировании колебаний ветроэнергетической системы, использующей эффект галопирования*

В настоящее время интенсивно исследуются различные возможности получения энергии из возобновляемых источников, в частности, потоков среды. Наиболее широко распространены ветроэнергетические установки с вращающимся рабочим элементом (пропеллером или турбиной с вертикальной осью, например, ротором Дарье или Савониуса). Однако активно рассматривается возможность использовать для генерации энергии колебания упругих конструкций, индуцированные потоком среды. Одним из видов таких колебаний является галопирование, т. е. колебания плохообтекаемых тел в направлении поперек набегающего потока. Возникновение галопирования связано с тем, что аэродинамические силы, действующие на плохообтекаемое тело, при определенных условиях создают отрицательное демпфирование.

В настоящей работе рассматривается механическая система, состоящая из трех тел, которые могут двигаться в направлении, перпендикулярном потоку. Одно из этих тел представляет собой призму квадратного сечения, а два других — материальные точки. Тела последовательно соединены друг с другом и с неподвижной опорой пружинами. С призмой жестко соединен постоянный магнит, который движется в катушке индуктивности. В результате в электрическом контуре, соединенном с катушкой, генерируется электрический ток. Для подобных установок, с одной стороны, требуется, чтобы галопирование возникало при как можно меньшей скорости потока. С другой стороны, при больших скоростях потока необходимо уменьшать амплитуду колебаний, чтобы установка не разрушилась. Исследовано влияние параметров системы (в частности, коэффициентов жесткости пружин) на устойчивость равновесия и на характеристики периодических решений. Показано, что за счет изменения жесткостей пружин можно заметно расширить интервал скоростей потока, в которых возникает галопирование. Амплитуды колебаний тел системы возрастают с ростом скорости потока. Для того чтобы увеличить скорость потока, при которой они достигают предельно допустимых значений, предложен алгоритм регулирования колебаний. В рамках этого алгоритма перемещение одной из материальных точек относительно призмы блокируется/деблокируется в зависимости от текущей скорости потока.

Ключевые слова: колебания, периодическое решение, галопирование, управление, ветроэнергетическая установка

Введение

Галопированием называют поступательные колебания плохообтекаемых конструкций в потоке среды в направлении поперек потока. Эти колебания возникают, когда скорость потока превышает некоторое критическое значение. Данный эффект наблюдается для различных конструкций, таких как мосты, высокие здания и т. д. Его появление связано с особенностями аэродинамического воздействия на тела такой формы: при определенных условиях аэродинамическое демпфирование становится отрицательным.

По-видимому, впервые условия возникновения галопирования были получены Ден Гартогом [1] применительно к обледеневшим проводам. В последующем появилось множество работ, посвященных моделированию и экспериментальному исследованию галопирования плохообтекаемых тел различной формы, в том числе прямоугольных призм (например, [2—5]). В работах [6, 7] было показано, что квазистатический подход (т. е. описание аэродинамическо-

го воздействия на тело с учетом только его мгновенного состояния движения) может обеспечить достаточно точное описание данного явления. Достаточно активно ведутся экспериментальные исследования галопирования призм различной формы (см., например, работы [8—12]). В частности, в статье [9] приведены экспериментальные данные об аэродинамических силах, действующих на призму квадратного сечения. Рассмотрена конфигурация, в которой к одной из сторон призмы прикреплена плоская пластина, перпендикулярная боковой грани призмы, а также конфигурация без такой пластины.

Галопирование может значительно ускорить износ конструкций и вызвать их разрушение. Поэтому достаточно активно изучаются способы гашения подобных колебаний. В статье [13] анализируется влияние пассивного инерционного гасителя на интенсивность галопирования. В работе [14] исследуются бифуркации Андронова—Хопфа для системы, состоящей из плохообтекаемого тела и прикрепленного к нему инерционного гасителя (здесь нужно отметить, что возникновение галопирующих колебаний связано как раз с бифуркацией этого типа). В статье [15] предложена схема гаше-

*Работа выполнена при поддержке РФН (проект 22-29-00472).

ния галопирующих колебаний призмы квадратного сечения с помощью шара, который может двигаться по круговой направляющей, прикрепленной к призме.

Однако возникновение колебаний под действием потока среды означает, что часть энергии набегающего потока преобразуется в энергию этих колебаний. Соответственно, это явление может быть полезно в рамках "зеленой энергетики", позволяя использовать возобновляемую энергию ветра (или воды) для выработки электричества. Различные ветроэнергетические установки колебательного типа описаны, в частности, в работах [16, 17].

В статье [18] проанализирован потенциал галопирующих колебаний для преобразования энергии и отмечена перспективность подобных устройств. В работе [19] рассматривается ветроэнергетическая установка, в которой рабочий элемент совершает галопирующие колебания, а электрический ток вырабатывается линейным генератором на постоянном магните. В статье [20] проведено экспериментальное исследование установки такого же типа, причем основное внимание уделяется зависимости характеристик колебаний от ориентации призмы относительно набегающего потока. В статье [21] предложена система, состоящая из плохообтекаемого тела и пьезоэлемента. В работе [22] описаны эксперименты, в ходе которых сравнивалась мощность, которая вырабатывается при галопировании призм с различными формами поперечного сечения (прямоугольное, треугольное и т. д.). В статье [23] проанализировано несколько конфигураций ветроэнергетической установки с двумя подвижными телами, одно из которых не взаимодействует с потоком, а другое является плохообтекаемым телом, которое может совершать галопирующие колебания. Показано, что некоторые конфигурации позволяют обеспечить большую вырабатываемую мощность, чем аналогичная система, в которой имеется только одно подвижное тело.

В данной работе исследуется динамика ветроэнергетической установки, функционирующей которой основано на эффекте галопирования и которая содержит три подвижных массы. Электричество вырабатывается с помощью линейного генератора. Анализируется влияние жесткостей пружин, соединяющих тела друг с другом, на область устойчивости положения равновесия. Обсуждается возможность уменьшения скорости потока, при которой возникает

галопирование, а также возможность гашения колебаний при больших скоростях потока.

Описание и математическая модель системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из твердого тела M_1 , представляющего собой призму с квадратным сечением, и двух материальных точек M_2 и M_3 , связанных с этим телом пружинами (рис. 1). Точка M_2 с помощью пружины прикреплена к неподвижной точке O . Эти объекты могут двигаться вдоль некоторой неподвижной горизонтальной прямой OY , причем призма M_1 перемещается поступательно.

К призме жестко прикреплен магнит M_0 , который может перемещаться внутри катушки индуктивности. Катушка включена в электрическую цепь, содержащую активное сопротивление. Таким образом, при движении тела M_1 магнит движется внутри катушки, и в цепи возникает ток.

Пусть OXY — неподвижная система координат, ось абсцисс которой направлена по горизонтали перпендикулярно прямой OY . Пусть Y_1 — ордината центра призмы, а Y_2 и Y_3 — ординаты материальных точек M_2 и M_3 соответственно.

Будем считать, что рассматриваемая электро-механическая система помещена в горизонтальный поток среды, скорость V которого на бесконечности постоянна и направлена вдоль оси OX . Будем считать, что поток взаимодействует только с призмой, причем аэродинамическое воздействие сводится к силе лобового сопро-

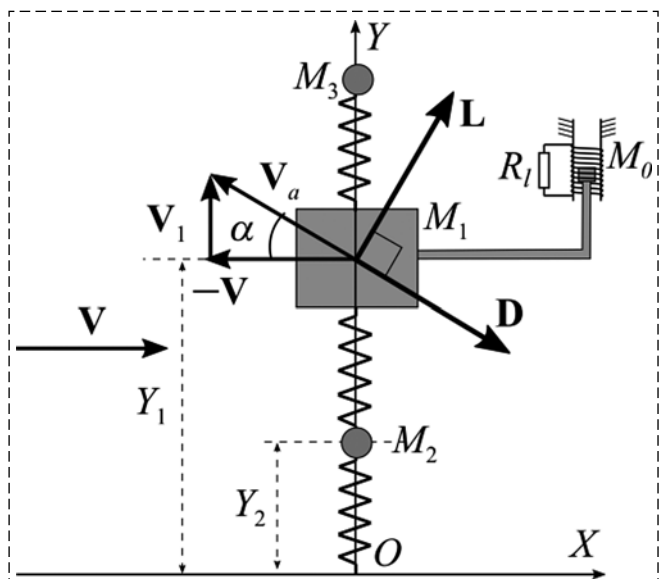


Рис. 1. Схема рассматриваемой системы
Fig. 1. Scheme of the considered system

тивления \mathbf{D} и боковой силе \mathbf{L} . Для описания этих сил воспользуемся квазистатическим подходом. В его рамках сила \mathbf{D} направлена против воздушной скорости \mathbf{V}_a призмы (т. е. ее скорости относительно набегающего потока), а сила \mathbf{L} — перпендикулярно ей. Модули этих сил определяются следующими соотношениями:

$$D = \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_d(\alpha), \quad L = \frac{\rho S}{2} V_a^2 C_l(\alpha). \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность среды; S — площадь боковой грани призмы; α — угол атаки, т. е. угол между воздушной скоростью и отрицательным направлением оси абсцисс; C_d и C_l — безразмерные коэффициенты силы лобового сопротивления и боковой силы, соответственно. Воздушная скорость и угол атаки определяются следующими соотношениями:

$$V_a = \sqrt{V_1^2 + V^2}, \quad \alpha = \arctg \frac{V_1}{V}, \quad (2)$$

где $V_1 = \frac{dY_1}{dt}$.

Здесь учтено, что в рассматриваемом случае угол атаки не может выходить за пределы диапазона от $-\pi/2$ до $\pi/2$. Отметим, что квазистатический подход, позволяющий описывать аэродинамические силы на основании только информации о мгновенном состоянии движения системы, активно используется для анализа движения различных объектов в потоке среды (см., например, работу [24]).

Для описания ЭДС E , возникающей в электрической цепи при перемещении магнита, а также силы F_{em} электромеханического взаимодействия, воспользуемся подходом, описанным, в частности, в статье [21]:

$$E = C \frac{dY_1}{dt}, \quad F_{em} = -CI, \quad (3)$$

где C — коэффициент электромеханического взаимодействия, а I — сила тока в цепи.

С учетом соотношений (1)–(4) уравнения движения системы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 Y_1}{dt^2} + K_1(Y_1 - Y_2) + K_3(Y_1 - Y_3) + \\ + H_1 \left(\frac{dY_1}{dt} - \frac{dY_2}{dt} \right) + H_3 \left(\frac{dY_1}{dt} - \frac{dY_3}{dt} \right) = \\ = \frac{\rho S}{2} \left(V^2 + \left(\frac{dY_1}{dt} \right)^2 \right) C_y(\alpha) - CI; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2 \frac{d^2 Y_2}{dt^2} + K_2 Y_2 + K_1(Y_2 - Y_1) + \\ + H_2 \frac{dY_2}{dt} + H_1 \left(\frac{dY_2}{dt} - \frac{dY_1}{dt} \right) = 0; \\ m_3 \frac{d^2 Y_3}{dt^2} + K_3(Y_3 - Y_1) + H_3 \left(\frac{dY_3}{dt} - \frac{dY_1}{dt} \right) = 0; \\ L_c \frac{dI}{dt} = -(R_l + R_c)I + C \frac{dY_1}{dt}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь m_1 — масса призмы; $m_{1,2}$ — массы точек M_1 и M_2 ; K_{1-3} и H_{1-3} — коэффициенты жесткости и демпфирования пружин (индекс 1 отвечает пружине, соединяющей точку M_2 с телом M_1 , индекс 2 — пружине, соединяющей точку M_1 с неподвижным основанием, а индекс 3 — пружине, соединяющей точку M_3 с призмой); L_c и R_c — индуктивность и сопротивление катушки; R_l — нагрузочное сопротивление в цепи; $C_y(\alpha) = C_s \cos \alpha - C_d \sin \alpha$ — безразмерный коэффициент проекции аэродинамической силы на ось ординат.

Чтобы несколько упростить уравнения, проведем обезразмеривание системы (4), введя безразмерные переменные и параметры следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau = t \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad y_1 = \frac{Y_1}{b}, \quad y_2 = \frac{Y_2}{b}, \quad y_3 = \frac{Y_3}{b}, \\ \nu = \frac{IR_c}{Cb} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad u = \frac{V}{b} \sqrt{\frac{m_2}{k_2}}, \\ m = \frac{m_1}{m_2}, \quad M = \frac{m_3}{m_2}, \quad k = \frac{k_1}{k_2}, \quad K = \frac{K_3}{k_2}, \\ h_{1-3} = \frac{H_{1-3}}{\sqrt{k_2 m_2}}, \quad \mu = \frac{\rho S b}{2 m_2}, \\ L = \frac{L_c}{R_c} \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}, \quad R = \frac{R_l}{R_c}, \quad c = \frac{C^2}{R_c \sqrt{k_2 m_2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

В обозначениях (5) уравнения (4) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_1 + k(y_1 - y_2) + K(y_1 - y_3) + h_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \\ + h_3(\dot{y}_1 - \dot{y}_3) = \mu(u^2 + \dot{y}_1^2)C_y(\alpha) - c\nu; \\ \ddot{y}_2 + y_2 + k(y_2 - y_1) + h_2 \dot{y}_2 + h_1(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = 0; \\ M \ddot{y}_3 + K(y_3 - y_1) + h_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_1) = 0; \\ Li = -(R+1)\nu + \dot{y}_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Точкой здесь обозначена производная по безразмерному времени τ .

Если индуктивность катушки достаточно мала, то характерное время протекания про-

цессов в электрической цепи будет существенно меньше, чем в механической части системы. Тогда из последнего уравнения (6) получаем, что $v = \dot{y}_1 / (R + 1)$. Подставив это выражение в первое уравнение (6), получим следующую систему:

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + k(y_1 - y_2) + K(y_1 - y_3) + h_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + \\ + h_3(\dot{y}_1 - \dot{y}_3) = \mu(u^2 + \dot{y}_1^2)C_y(\alpha) - \chi\dot{y}_1; \\ \ddot{y}_2 + y_2 + k(y_2 - y_1) + h_2\dot{y}_2 + h_1(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = 0; \\ M\ddot{y}_3 + K(y_3 - y_1) + h_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_1) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\chi = c / (R + 1)$.

Зависимость коэффициента C_y от угла атаки для призмы квадратного сечения представлена на рис. 2 на основании обработки экспериментальных данных, приведенных в работе [9]. Точками изображены значения, полученные в результате обработки экспериментальных данных, кривыми — аппроксимационная зависимость (кубический сплайн).

Отметим, что в области небольших углов атаки функция C_y монотонно возрастает, а практически во всей остальной части диапазона убывает.

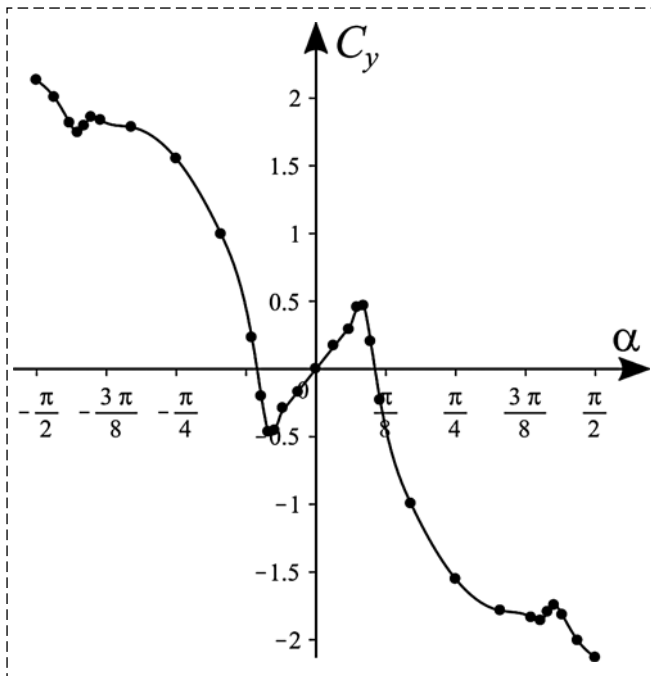


Рис. 2. Зависимость коэффициента C_y от угла атаки (по данным работы [9]): точки — эксперимент, кривая — аппроксимация кубическим сплайном

Fig. 2. Dependence of the coefficient C_y on the angle of attack (based on data from [9]): dots — experimental data; line — cubic spline approximation

Влияние коэффициентов жесткости пружин на устойчивость равновесия

Система (7) с учетом соотношений (2) и (8) имеет единственное положение равновесия, а именно, тривиальное. С точки зрения практического применения рассматриваемой механической системы для преобразования энергии потока к устойчивости этого положения предъявляются противоречивые требования. С одной стороны, оно должно быть неустойчивым, чтобы в системе возникали колебания, энергию которых можно преобразовать в электричество. С другой стороны, естественно ожидать, что амплитуда таких колебаний будет расти с увеличением скорости ветра, что может привести к износу и разрушению устройства. Поэтому желательно, чтобы положение равновесия было асимптотически устойчивым при большой скорости ветра. Для того чтобы удовлетворить этим требованиям, в системе необходимо управление. В принципе, такое управление можно осуществлять с помощью привода, формируя управляющий сигнал с помощью ПД или ПИД регулятора (как, например, в работе [25]). Однако для работы привода необходимо постоянно затрачивать электроэнергию. В связи с этим параметрическое управление может оказаться предпочтительным.

Одним из возможных вариантов может быть регулирование эффективного коэффициента жесткости пружин (например, путем блокировки/разблокировки возможности пружины совершать колебания).

Проанализируем, как жесткость пружин, соединяющих призму M_1 с материальными точками, влияет на характер устойчивости равновесия.

В результате линеаризации уравнений движения в окрестности тривиального равновесия получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + (k + K)y_1 - ky_2 - Ky_3 + (h_1 + h_3 + \\ + \chi - \mu u C_{y1})\dot{y}_1 - h_1\dot{y}_2 - h_3\dot{y}_3 = 0; \\ \ddot{y}_2 - ky_1 + (1 + k)y_2 - h_1\dot{y}_1 + (h_1 + h_2)\dot{y}_2 = 0; \\ M\ddot{y}_3 - Ky_1 + Ky_3 + h_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_1) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введено обозначение

$$C_{y1} = \left. \frac{dC_y}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}.$$

Заметим, что эта величина, как видно из рис. 2, положительна.

Условия асимптотической устойчивости, получаемые с помощью критерия Гурвица для характеристического полинома системы (9), оказываются достаточно громоздкими. Тем не менее, нетрудно показать, что при достаточно большой скорости потока будет иметь место неустойчивость. В то же время, при $u = 0$ равновесие асимптотически устойчиво.

Исследуем численно влияние параметров k и K на значение критической скорости потока u_{cr} , т. е. скорости, при которой происходит потеря устойчивости.

Выберем для остальных безразмерных параметров следующие значения:

$$m = 1; \mu = 0,1; h_1 = h_2 = \chi = 0,01; h_3 = 0,02. \quad (9)$$

На рис. 3 представлены зависимости u_{cr} от коэффициента жесткости k при разных значениях K и M .

Видно, что за счет параметра k можно добиться заметного уменьшения критической скорости. Таким образом, материальная точка M_1 , расположенная "между" неподвижным основанием и призмой, позволяет расширить диапазон скоростей ветра, в котором установка способна производить энергию. Отметим, что случай, когда жесткости обеих пружин, соединяющих призму с материальными точками, велики, соответствует галопирующей системе с одной массой. Таким образом, наличие груза M_2 позволяет расширить рабочий диапазон по сравнению с системой, в которой имеется одна подвижная масса.

В то же время, уменьшение K приводит к росту u_{cr} . Этот рост тем заметнее, чем больше масса M . Этот результат является ожидаемым, поскольку материальная точка M_3 играет в си-

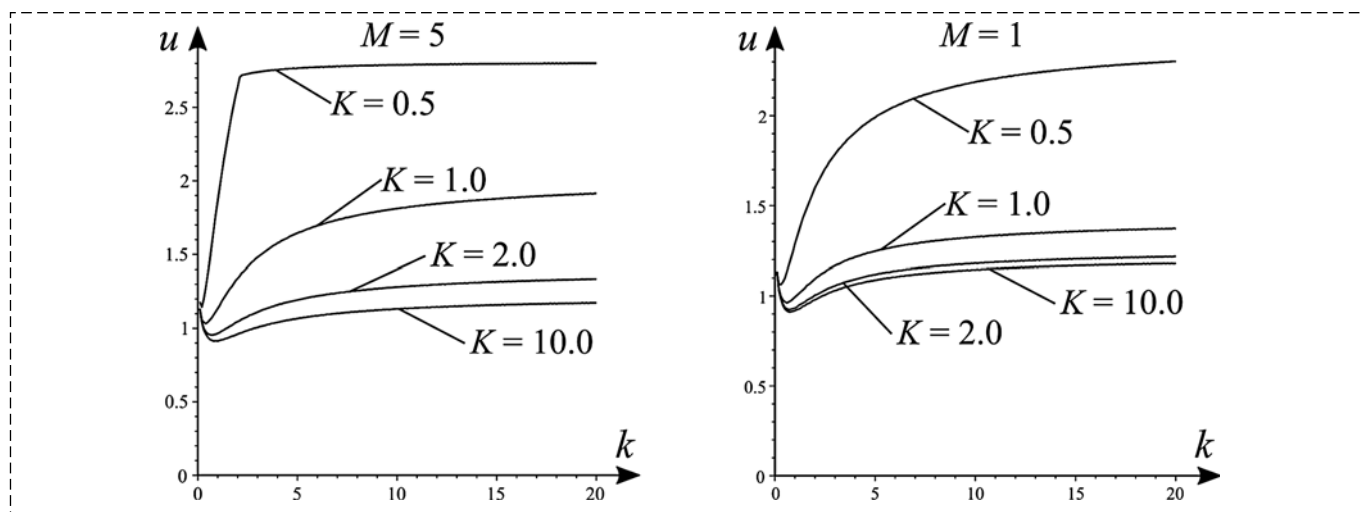


Рис. 3. Зависимость критической скорости от k при разных значениях параметров K и M

Fig. 3. Dependence of the critical speed on k for different values of parameters K and M

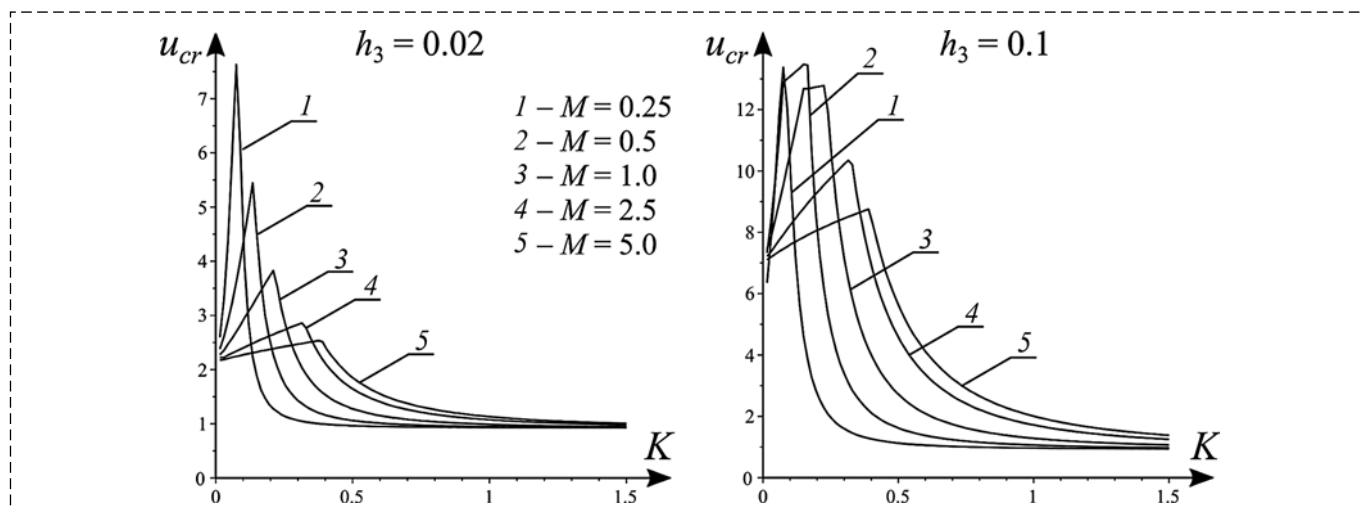


Рис. 4. Зависимость критической скорости от параметра K при разных значениях M и h_3

Fig. 4. Dependence of the critical speed on parameter K for different values of M and h_3

стеме роль динамического гасителя колебаний, аналогичного описанному в работах [13, 14].

На рис. 4 представлены зависимости u_{cr} от K при разных значениях коэффициента демпфирования третьей пружины и массы M .

Видно, что u_{cr} зависит от K немонотонно. При этом за счет надлежащего выбора значений жесткости пружины и массы точки M_3 можно существенно увеличить критическую скорость. Это увеличение, естественно, тем больше, чем больше коэффициент h_3 . Любопытно, что с ростом параметра M значение u_{cr} уменьшается и одновременно расширяется диапазон K , в котором критическая скорость достаточно велика. Соответственно, целесообразно выбирать массу M не слишком маленькой, чтобы небольшое отклонение значения жесткости не привело к значительному уменьшению u_{cr} .

Периодические режимы

Рабочие режимы установки отвечают притягивающим периодическим решениям системы (7). Исследуем влияние параметров системы на характеристики этих решений.

Рассмотрим ситуацию, когда безразмерные коэффициенты, характеризующие полезную нагрузку и демпфирование в пружинах, а также параметр μ малы, т. е. $\mu, h_{1,2,3}, L, \chi \sim \varepsilon \ll 1$. Такие соотношения естественным образом выполняются при реалистичных значениях размерных параметров системы (например, из работы [21]). Тогда в достаточно широком диапазоне зна-

чений других безразмерных параметров периодические решения близки к гармоническим колебаниям, частоты которых близки к собственным частотам рассматриваемой системы и определяются следующим уравнением:

$$-Mm\omega^6 + (Mm(k+1) + K(M+m) + Mk)\omega^4 - (K(k+1)(M+m) + Kk + Mk)\omega^2 + Kk = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) может иметь до трех положительных корней, соответственно, возможно одновременное существование трех периодических решений.

Средняя за период электрическая мощность, вырабатываемая установкой, определяется следующей формулой:

$$P = \frac{1}{T} \int_{\tau=0}^T v^2 R d\tau = \frac{1}{T} \int_{\tau=0}^T \frac{R \dot{y}_1^2}{(R+1)^2} d\tau. \quad (11)$$

Выберем для безразмерных параметров следующие значения:

$$m = M = 1; \quad \mu = 0,1; \quad h_1 = h_2 = \chi = 0,01.$$

На рис. 5 представлена эволюция периодических решений (циклов) при изменении скорости набегающего потока. Ограничимся рассмотрением только того семейства, на которое система выходит из окрестности равновесия в случае, когда скорость потока превышает критическое значение. Численное моделирование показывает, что другие семейства циклов имеют достаточно небольшую область притяжения в пространстве начальных условий.

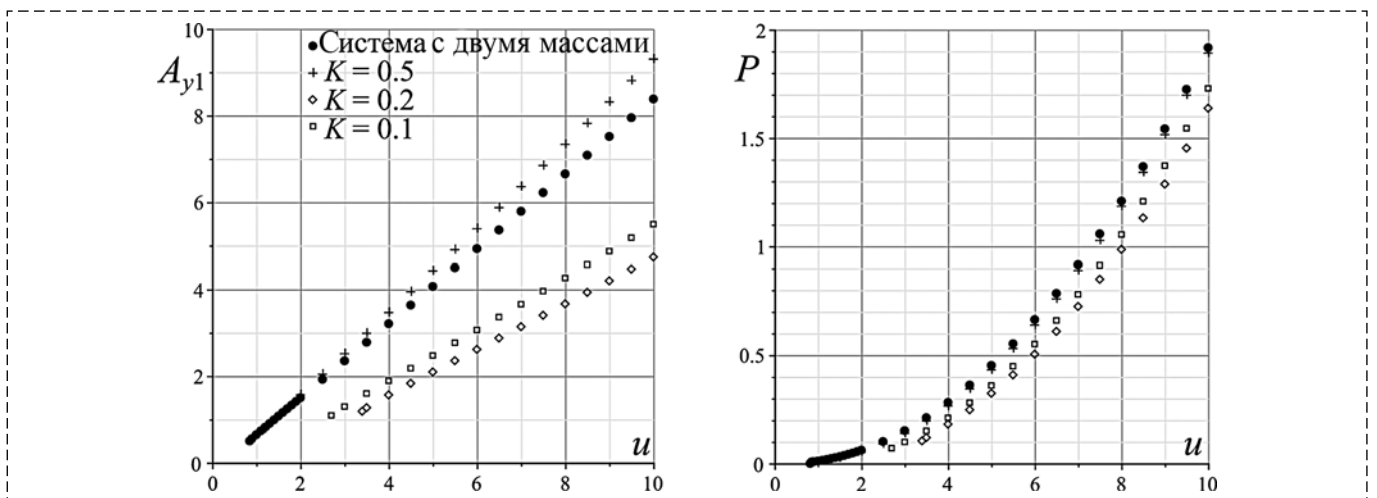


Рис. 5. Эволюция характеристик колебаний при изменении скорости потока:

a — амплитуда призм; b — выходная мощность

Fig. 5. Evolution of characteristics of oscillations when the wind speed changes:

a — amplitude of oscillations of the prism; b — output power

Черными кружками на рис. 5 показаны решения, соответствующие случаю больших значений коэффициентов K и h_3 , когда поведение рассматриваемой системы близко к поведению системы с двумя подвижными массами. Исследуемое семейство режимов существует при $u > 0,85$. Следует отметить, что положение равновесия становится неустойчивым при $u \approx 0,92$. Таким образом, имеет место "жесткая" потеря устойчивости.

Видно, что с ростом скорости потока амплитуда колебаний A_{y1} призмы также растет (почти линейно). Однако на практике всегда существует некоторое предельное значение, которое амплитуда не может превысить без ущерба для установки. Соответственно, существует и некоторое предельное значение скорости потока u_{\max} , при достижении которого необходимо подавлять колебания.

Семейства циклов, возникающие при небольших значениях K , когда точка M_3 движется

относительно призмы, показаны на рис. 5 крестиками ($K = 0,5$), ромбиками ($K = 0,2$), квадратиками ($K = 0,1$). В расчетах принято $h_3 = 0,02$. Видно, что амплитуда призмы также практически линейно зависит от u . Зависимость мощности P , даваемой формулой (11), от скорости близка к квадратичной. Любопытно, что амплитуда призмы немонотонно зависит от жесткости K .

Таким образом, целесообразно предусмотреть в системе две конфигурации с возможностью переключения между ними: конфигурация 1, в которой массы M_1 и M_3 фиксированы друг относительно друга (пружина между ними не деформируется), и конфигурация 2, когда эти массы могут перемещаться друг относительно друга (пружина свободна). Переключение между этими конфигурациями должно осуществляться в момент, когда скорость потока проходит значение u_{\max} . С математической точки зрения соответствующий

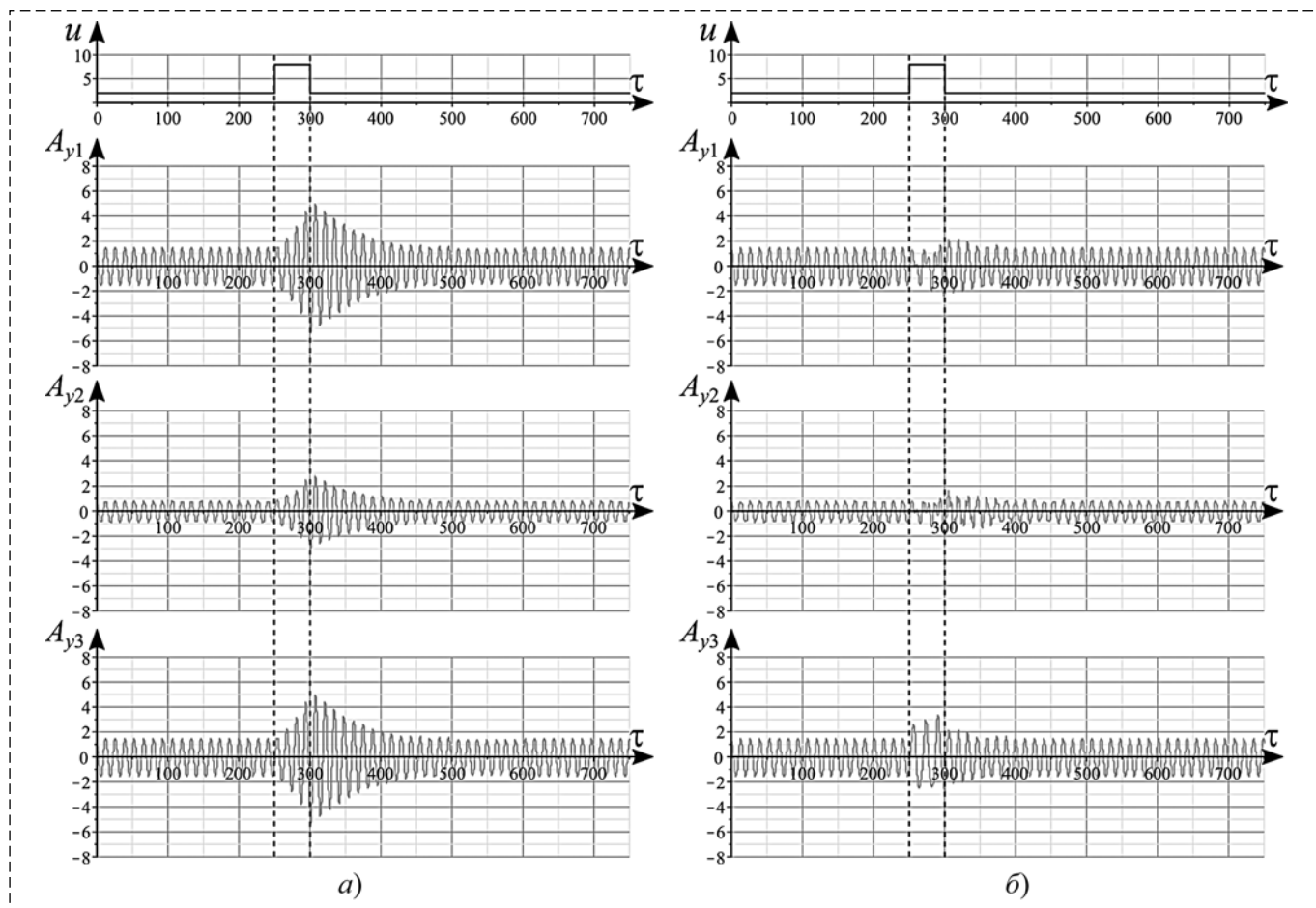


Рис. 6. Амплитуда призмы и точек M_2 , M_3 в зависимости от времени в случае, когда скорость ветра меняется по закону (13) при $\tau_0 = 50$:

a — без управления; b — с управлением (12)

Fig. 6. Amplitude of prism and points M_1 , M_2 vs. time in case when the wind speed changes according to (13) with $\tau_0 = 50$:

a — without control; b — with control according to (12)

закон управления коэффициентами жесткости и демпфирования этой пружины будет выглядеть следующим образом:

$$K = \begin{cases} K_0, & u < u_{\max}; \\ K_1, & u \geq u_{\max}; \end{cases} \quad h_3 = \begin{cases} h_{30}, & u < u_{\max}; \\ h_{31}, & u \geq u_{\max}. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь $K_0 \gg K_1$, $h_{30} \gg h_{31}$, а $u_{\max 0}$ — значение u_{\max} при $K = K_0$.

Выберем для расчетов следующие значения: $u_{\max} = 5$, $K_0 = 1000$, $h_{30} = 10$, $K_1 = 0,2$, $h_{31} = 0,02$.

Для иллюстрации работы этого алгоритма было проведено численное моделирование динамики системы в случае, когда скорость ветра на некоторое время резко возрастает:

$$u = \begin{cases} 2, & 0 < \tau < 250; \\ 8, & 250 \leq \tau < 250 + \tau_0; \\ 2, & 250 + \tau_0 \leq \tau. \end{cases} \quad (13)$$

На рис. 6 и 7 представлены зависимости от времени амплитуды A_{y1} колебаний призмы, а также амплитуд A_{y2} и A_{y3} колебаний точек M_1 и M_2 , соответственно. На рис. 6 приведены результаты моделирования для кратковременного порыва ветра ($\tau_0 = 50$), а на рис. 7 — для более длительного порыва ($\tau_0 = 750$). На рис. 6, а и 7, а показаны расчеты для случая, когда коэффициенты K и h_3 не изменяют своих значений, а на рис. 6, б и 7, б — для случая, когда они изменяются в соответствии с законом (12).

Видно, что в случае короткого порыва ветра амплитуда колебаний призмы при наличии управления даже несколько уменьшается во время порыва. В случае длительного порыва она после сравнительно короткого переходного процесса выходит на уровень, заметно меньший, чем без управления. После того, как скорость ветра возвращается к исходному значению, амплитуды колебаний всех тел при

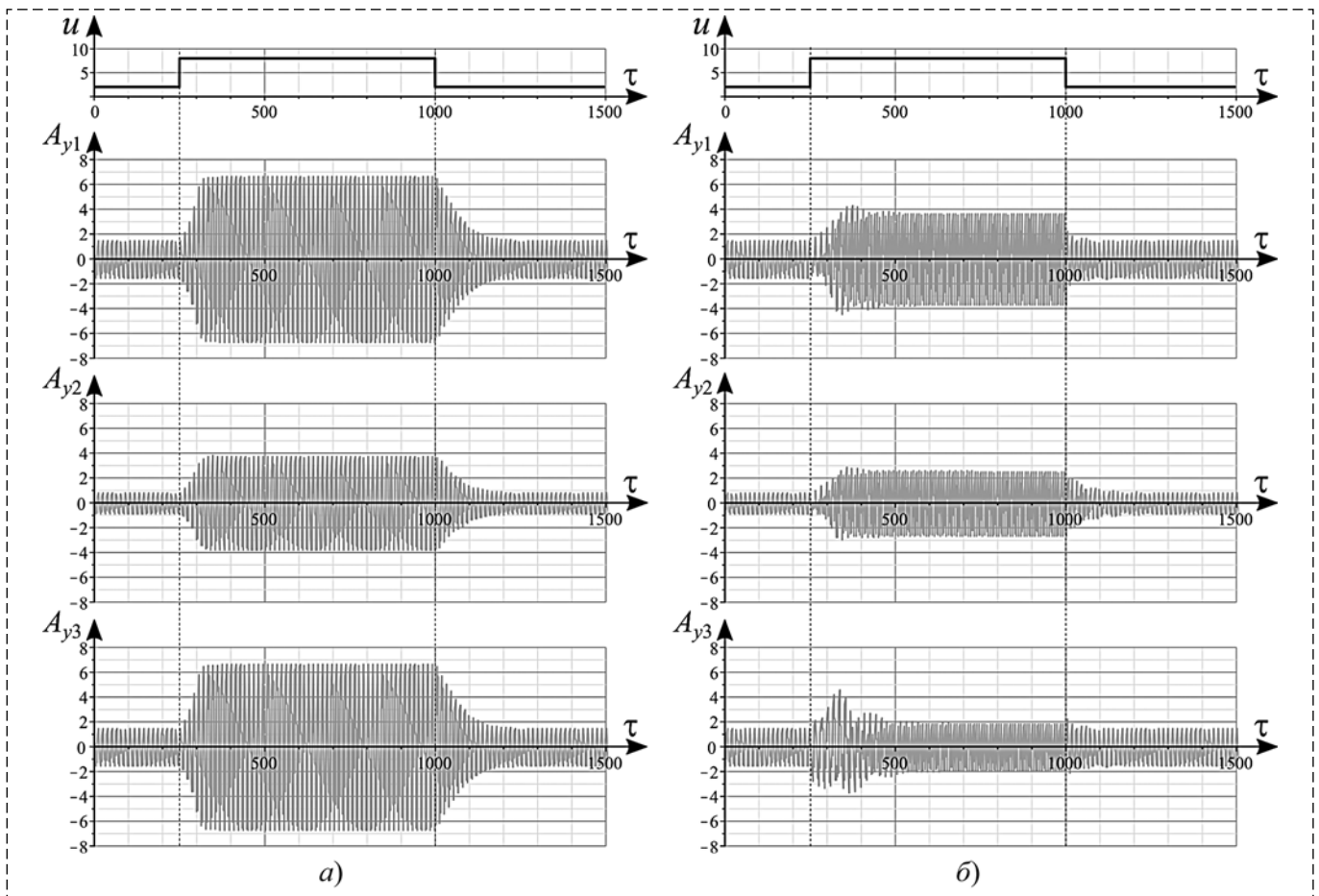


Рис. 7. Амплитуда призмы и точек M_2 , M_3 в зависимости от времени в случае, когда скорость ветра меняется по закону (13) при $\tau_0 = 750$:

а — без управления; б — с управлением (12)

Fig. 7. Amplitude of prism and points M_1 , M_2 vs. time in case when the wind speed changes according to (13) with $\tau_0 = 750$:

а — without control; б — with control according to (12)

наличии управления также весьма быстро возвращаются к соответствующим значениям. Без управления переходный процесс оказывается заметно более длительным.

Таким образом, предложенное управление параметром K обеспечивает заметное уменьшение амплитуды колебаний при росте скорости ветра и, соответственно, позволяет расширить диапазон допустимых скоростей ветра.

Необходимо отметить, что такой метод управления не может гарантировать, что амплитуда колебаний останется в допустимом диапазоне, если скорость потока увеличится еще сильнее. В этом случае может потребоваться управление другого типа. Например, можно показать, что тривиальное равновесие можно стабилизировать, если повернуть призму на определенный угол и зафиксировать в новом положении.

Заключение

Рассмотрена ветроэнергетическая установка с тремя подвижными телами, соединенными пружинами. Одно из этих тел является плоскообтекаемым (призма квадратного сечения) и может совершать галопирующие колебания в потоке среды. Исследовано влияние коэффициентов жесткости пружин на устойчивость тривиального равновесия. Показано, что наличие дополнительных подвижных масс позволяет обеспечить существование периодических режимов при меньших значениях скорости потока, чем в системе с одной подвижной массой. Численно исследована эволюция периодических режимов, возникающих в системе, при изменении параметров (масс дополнительных подвижных тел, коэффициентов жесткостей пружин, скорости набегающего потока). Предложена схема управления характеристиками одной из пружин, соединяющих тела системы, которая позволяет увеличить максимально допустимую скорость потока за счет уменьшения амплитуды колебаний тел.

Список литературы

1. Den Hartog J. P. Transmission Line Vibration Due to Sleet // Trans. AIEE. 1932. V. 51. P. 1074–1086.
2. Luo S. C., Chew Y. T., Ng Y. T. Hysteresis Phenomenon in the Galloping Oscillation of a Square Cylinder // J. Fluids & Struct. 2003. Vol. 18, N. 1. P. 103–118. DOI: 10.1016/S0889-9746(03)00084-7.

3. Oka S., Ishihara T. Numerical Study of Aerodynamic Characteristics of a Square Prism in a Uniform Flow // J. Wind Eng. & Ind. Aerodyn. 2009. Vol. 97. P. 548–559. DOI: 10.1016/j.jweia.2009.08.006.
4. Alonso G., Meseguer J., Sanz-Andres A., Valero E. On the galloping instability of two-dimensional bodies having elliptical cross sections // J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2010. Vol. 98. P. 438–448.
5. Люсин В. Д., Рябинин А. Н. О галопировании призм в потоке газа или жидкости // Труды ЦНИИ имени академика А. Н. Крылова. 2010. Вып. 53(337). С. 79–84.
6. Parkinson G. V., Brooks N. P. H. On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders // ASME. J. Appl. Mech. 1961. Vol. 28, N. 2. P. 252–258. DOI: 10.1115/1.3641663.
7. Parkinson G. V., Smith J. D. The Square Prism as an Aeroelastic Non-Linear Oscillator // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1964. Vol. 17, N. 2. P. 225–239. DOI: 10.1093/qjmam/17.2.225
8. Bearman P. W., Gartshore I. S., Maull D. J., Parkinson G. V. Experiments on Flow-Induced Vibration of a Square-Section Cylinder // J. Fluids & Struct. 1987. Vol. 1, N. 1. P. 19–34. DOI: 10.1016/S0889-9746(87)90158-7.
9. Sarioglu M., Akansu Y. E., Yavuz T. Flow Around a Rotatable Square Cylinder-Plate Body // AIAA Journal. 2006. Vol. 44, N. 5. P. 1065–1072. DOI: 10.2514/1.18069
10. Alonso G., Meseguer J., Perez-Grande I. Galloping stability of triangular cross-sectional bodies: A systematic approach // J. Wind Engineering Industrial Aerodynamics. 2007. Vol. 95. P. 928–940.
11. Gao G.-Z., Zhu L.-D. Nonlinear Mathematical Model of Unsteady Galloping Force on a Rectangular 2:1 Cylinder // J. Fluids and Struct. 70. 2017. P. 47–71. DOI: 10.1016/j.jfluidstruct.2017.01.013.
12. Deniz S., Staubli T. Oscillating Rectangular and Octagonal Profiles: Interaction of Leading- and Trailing-Edge Vortex Formation // J. Fluids & Struct. 1997. Vol. 11, N.1. P. 3–31. DOI:10.1006/jfls.1996.0065.
13. Abdel-Rohman M. Design of Tuned Mass Dampers for Suppression of Galloping in Tall Prismatic Structures // J. Sound & Vibr. 1994. Vol. 171, N. 3. P. 289–299. DOI: 10.1006/jsvi.1994.1121
14. Gattulli V., Di Fabio F., Luongo A. Simple and Double Hopf Bifurcations in Aeroelastic Oscillators with Tuned Mass Dampers // J. Franklin Institute. 2001. Vol. 338. P. 187–201. DOI: 10.1016/S0016-0032(00)00077-6
15. Selwanis M. M., Franzini G. R., Beguin C., Gosselin F. P. Wind Tunnel Demonstration of Galloping Mitigation with a Purely Nonlinear Energy Sink // J. Fluids & Struct. 2021. Vol. 100. P. 103169. DOI: 10.1016/j.jfluidstruct.2020.103169
16. McCarthy J. M., Watkins S., Deivasigamani A., John S. J. Fluttering energy harvesters in the wind: A review // J. Sound & Vibr. 2016. Vol. 361. P. 355–377. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.09.043
17. Klimina L. Dynamics of a slider-crank wave-type wind turbine // Proceedings of the 14th IFToMM World Congress. 2015. P. 582–588. DOI: 10.6567/IFToMM.14TH.WC.OS13.007
18. Barrero-Gil A., Alonso G., Sanz-Andres A. Energy Harvesting from Transverse Galloping // J. Sound & Vibr. 2010. Vol. 329. P. 2873–2883. DOI: 10.1016/J.JSV.2010.01.028
19. Dai H. L., Abdelkefi A., Javed U., Wang L. Modeling and Performance of Electromagnetic Energy Harvesting from Galloping Oscillations // Smart Mater. & Struct. 2015. Vol. 24, N. 4. P. 045012. DOI: 10.1088/0964-1726/24/4/045012
20. Hemon P., Amandolese X., Andrianne T. Energy Harvesting from Galloping of Prisms: A Wind Tunnel Experiment // J. Fluids and Struct. 2017. Vol. 70. P. 390–402. DOI: 10.1016/j.jfluidstruct.2017.02.006
21. Javed U., Abdelkefi A., Akhtar I. An Improved Stability Characterization for Aeroelastic Energy Harvesting Applications //

22. Wang K. F., Wang B. L., Gao Y., Zhou J. Y. Nonlinear Analysis of Piezoelectric Wind Energy Harvesters with Different Geometrical Shapes // Arch. Appl. Mech. 2020. Vol. 90. P. 721–736. DOI: 10.1007/s00419-019-01636-8

23. Vicente-Ludlam D., Barrero-Gil A., Velazquez A. Enhanced Mechanical Energy Extraction from Transverse Galloping

Using a Dual Mass System // J. Sound & Vib. 2015. Vol. 339. P. 290–303. DOI: 10.1016/j.jsv.2014.11.034

24. Dosaev M. Interaction Between Internal and External Friction in Rotation of Vane with Viscous Filling // Appl. Math. Mod. 2019. Vol. 68. P. 21–28. DOI: 10.1016/j.apm.2018.11.002

25. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Application of a PID-like control to the problem of triaxial electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the orbital frame // Aerosp. Sci. & Tech. 2022. Vol. 127. 107720. DOI: 10.1016/j.ast.2022.107720

On the Regulation of Oscillations of a Galloping-Based Wind Power Harvesting System

Y. D. Selyutskiy, seliutski@imec.msu.ru,

Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation

Corresponding author: Selyutskiy Yury D., PhD., Leading Researcher,
Institute of Mechanics of Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russian Federation,
e-mail: seliutski@imec.msu.ru

Accepted on October 04, 2022

Abstract

Currently, various possibilities for obtaining energy from renewable sources, in particular, flows of water or wind, are intensively investigated. The most widely used wind power harvesters are those where the working element rotates (a propeller or a vertical axis turbine, such as a Darrieus or Savonius rotor). However, the possibility of using the flow-induced oscillations of elastic structures in order to generate energy is now actively considered. One of the types of such oscillations is galloping, i.e. vibrations of bluff bodies in the direction perpendicular to the incident flow. The occurrence of galloping is due to the fact that aerodynamic forces acting on a bluff body, under certain conditions, create a negative damping. In this paper, we consider a mechanical system consisting of three bodies that can move in a direction perpendicular to the flow. One of these bodies is a square prism, and the other two are material points. The bodies are connected in series with each other and with a fixed support by linear elastic springs. A permanent magnet is rigidly connected to the prism. This magnet moves inside an induction coil. As a result, an electric current is generated in the electrical circuit connected to the coil. For such installations, on the one hand, it is required that galloping occurs at the lowest possible flow speed. On the other hand, at high flow speeds, it is necessary to reduce the amplitude of oscillations so that the device would not be damaged. The influence of the system parameters (in particular, the spring stiffness coefficients) on the stability of the equilibrium and on the characteristics of periodic solutions is studied. It is shown that by changing the stiffness of the springs, it is possible to significantly expand the range of flow speeds where the galloping occurs. The amplitudes of oscillations of bodies increase as the flow speed grows. In order to increase the limit flow speed, at which the amplitudes of oscillations start exceeding the maximum permissible value, a regulating algorithm is proposed. Within the framework of this algorithm, the displacement of one of mass points with respect to the prism is locked/unlocked depending on the current flow speed.

Keywords: oscillations, periodic solution, galloping, wind power harvester

For citation:

Selyutskiy Y. D. On the Regulation of Oscillations of a Galloping-Based Wind Power Harvesting System, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2023, vol. 24, no. 1, pp. 46–56.

DOI: 10.17587/mau.24.46-56

References

1. Den Hartog J. P. Transmission Line Vibration Due to Sleet, *Trans. AIEE*, 1932, vol. 51, pp. 1074–1086.

2. Luo S. C., Chew Y. T., Ng Y. T. Hysteresis Phenomenon in the Galloping Oscillation of a Square Cylinder, *J. Fluids & Struct.*, 2003, vol. 18, no. 1, pp. 103–118, doi: 10.1016/S0889-9746(03)00084-7.

3. Oka S., Ishihara T. Numerical Study of Aerodynamic Characteristics of a Square Prism in a Uniform Flow, *J. Wind Eng. & Ind. Aerodyn.*, 2009, vol. 97, pp. 548–559, doi: 10.1016/j.jweia.2009.08.006.

4. Alonso G., Meseguer J., Sanz-Andres A., Valero E. On the galloping instability of two-dimensional bodies having elliptical cross sections, *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2010, vol. 98, pp. 438–448.

5. Lusin V. D., Ryabinin A. N. On the galloping of prisms in gas or fluid flow, *Proceedings of the Krylov State Research Center*, 2010, iss. 53 (337), pp. 79–84 (in Russian).

6. Parkinson G. V., Brooks N. P. H. On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders, *ASME. J. Appl. Mech.*, 1961, vol. 28, no. 2, pp. 252–258, doi: 10.1115/1.3641663.

7. Parkinson G. V., Smith J. D. The Square Prism as an Aeroelastic Non-Linear Oscillator, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1964, vol. 17, no. 2, pp. 225–239, doi: 10.1093/qjmam/17.2.225

8. Bearman P. W., Gartshore I. S., Maull D. J., Parkinson G. V. Experiments on Flow-Induced Vibration of a Square-Section Cylinder, *J. Fluids & Struct.* 1987, vol. 1, no. 1, pp. 19–34, doi: 10.1016/s0889-9746(87)90158-7.

9. Sarioglu M., Akansu Y. E., Yavuz T. Flow Around a Rotatable Square Cylinder-Plate Body, *AIAA Journal*, 2006, vol. 44, no. 5, pp. 1065–1072, doi: 10.2514/1.18069

10. Alonso G., Meseguer J., Perez-Grande I. Galloping stability of triangular cross-sectional bodies: A systematic approach, *J. Wind Engineering Industrial Aerodynamics*, 2007, vol. 95, pp. 928–940.

11. **Gao G.-Z., Zhu L.-D.** Nonlinear Mathematical Model of Unsteady Galloping Force on a Rectangular 2:1 Cylinder, *J. Fluids and Struct.*, 2017, no. 70, pp. 47–71, doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2017.01.013.
12. **Deniz S., Staubli T.** Oscillating Rectangular and Octagonal Profiles: Interaction of Leading- and Trailing-Edge Vortex Formation, *J. Fluids & Struct.*, 1997, vol. 11, no. 1, pp. 3–31, doi:10.1006/jfls.1996.0065.
13. **Abdel-Rohman M.** Design of Tuned Mass Dampers for Suppression of Galloping in Tall Prismatic Structures, *J. Sound & Vibr.*, 1994, vol. 171, no. 3, pp. 289–299, doi: 10.1006/jsvi.1994.1121
14. **Gattulli V., Di Fabio F., Luongo A.** Simple and Double Hopf Bifurcations in Aeroelastic Oscillators with Tuned Mass Dampers, *J. Franklin Institute*, 2001, vol. 338, pp. 187–201, doi: 10.1016/S0016-0032(00)00077-6
15. **Selwanis M. M., Franzini G. R., Beguin C., Gosselin F. P.** Wind Tunnel Demonstration of Galloping Mitigation with a Purely Nonlinear Energy Sink, *J. Fluids & Struct.*, 2021, vol. 100, pp. 103169, doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2020.103169
16. **McCarthy J. M., Watkins S., Deivasigamani A., John S. J.** Fluttering energy harvesters in the wind: A review, *J. Sound & Vibr.*, 2016, vol. 361, pp. 355–377, doi: 10.1016/j.jsv.2015.09.043
17. **Klimina L.** Dynamics of a slider-crank wave-type wind turbine, *Proceedings of the 14th IFToMM World Congress*, 2015, pp. 582–588, doi: 10.6567/IFToMM.14TH.WC.OS13.007
18. **Barrero-Gil A., Alonso G., Sanz-Andres A.** Energy Harvesting from Transverse Galloping, *J. Sound & Vibr.*, 2010, vol. 329, pp. 2873–2883, doi: 10.1016/J.JSV.2010.01.028
19. **Dai H. L., Abdelkefi A., Javed U., Wang L.** Modeling and Performance of Electromagnetic Energy Harvesting from Galloping Oscillations, *Smart Mater. & Struct.*, 2015, vol. 24, no. 4, pp. 045012, doi: 10.1088/0964-1726/24/4/045012
20. **Hemon P., Amandolese X., Andrienne T.** Energy Harvesting from Galloping of Prisms: A Wind Tunnel Experiment, *J. Fluids and Struct.*, 2017, vol. 70, pp. 390–402, doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2017.02.006
21. **Javed U., Abdelkefi A., Akhtar I.** An Improved Stability Characterization for Aeroelastic Energy Harvesting Applications, *Comm. in Nonlin. Sci. & Num. Simul.*, 2016, vol. 36, pp. 252–265, doi: 10.1016/j.cnsns.2015.12.001
22. **Wang K. F., Wang B. L., Gao Y., Zhou J. Y.** Nonlinear Analysis of Piezoelectric Wind Energy Harvesters with Different Geometrical Shapes, *Arch. Appl. Mech.*, 2020, vol. 90, pp. 721–736, doi: 10.1007/s00419-019-01636-8
23. **Vicente-Ludlam D., Barrero-Gil A., Velazquez A.** Enhanced Mechanical Energy Extraction from Transverse Galloping Using a Dual Mass System, *J. Sound & Vibr.*, 2015, vol. 339, pp. 290–303, doi: 10.1016/j.jsv.2014.11.034
24. **Dosaev M.** Interaction Between Internal and External Friction in Rotation of Vane with Viscous Filling, *Appl. Math. Mod.*, 2019, vol. 68, pp. 21–28, doi: 10.1016/j.apm.2018.11.002
25. **Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A.** Application of a PID-like control to the problem of triaxial electrodynamic attitude stabilization of a satellite in the orbital frame, *Aerosp. Sci. & Tech.*, 2022, vol. 127, p. 107720, doi: 10.1016/j.ast.2022.107720

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Матросская тишина, 23с2

Телефон редакции журнала: **+7(499) 270 16 52**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *М. Ю. Безменова*.

Сдано в набор 28.10.2022. Подписано в печать 09.12.2022. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Заказ МН123. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: www.aov.ru