

МЕХАТРОНИКА, АВТОМАТИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ

Том 23

2022

№ 7

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print)

ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Главный редактор:

ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.

Заместители главного редактора:

БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.

ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.

ЮШЕНКО А. С., д.т.н.

Ответственный секретарь:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Редакционный совет:

АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН

БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН

ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН

ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН

КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН

КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН

КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН

ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН

РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН

СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН

СИГОВ А. С., акад. РАН

СОЙФЕР В. А., акад. РАН

СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН

ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН

ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН

ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН

ШЕРБАТЮК А. Ф., чл.-корр. РАН

ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН

Редколлегия:

DORANTES D. J., PhD, Турция

GROUMPOS P. P., PhD, Греция

ISIDORI A., PhD, Италия

KATALINIC B., PhD, Австрия

LIN CH.-Y., PhD, Тайвань

MASON O. J., PhD, Ирландия

ORTEGA R. S., PhD, Франция

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США

STRZELECKI R. M., PhD, Польша

SUBUDHI V. D., PhD, Индия

АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан

ГАРАЩЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина

БОЦЦОВ А. А., д.т.н.

БУКОВ В. Н., д.т.н.

ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.

ЖУКОВ И. А., д.т.н.

ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.

КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.

ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.

ЛОХИН В. М., д.т.н.

МАГОМЕДОВ М. Х., д.ф.-м.н.

ПУТОВ В. В., д.т.н.

ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.

РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.

СЕРГЕЕВ С. Ф., д.пс.н.

ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.

ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.

ФУРСОВ В. А., д.т.н.

Редакция:

БЕЗМЕНОВА М. Ю.

Директор издательства:

АНТОНОВ Б. И.

СОДЕРЖАНИЕ

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Карабутов Н. Н. Идентифицируемость и обнаруживаемость показателей Ляпунова линейных динамических систем 339

Нгуен Ба Хю, Фуртат И. Б. Управление объектами с секторной нелинейностью с гарантией нахождения регулируемой переменной в заданном множестве 351

РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Мелехин В. Б., Хачумов М. В. Процедуры самообучения автономных интеллектуальных мобильных систем в нестабильных априори неописанных проблемных средах 356

Alhelou M., Wassouf Y., Serebrenny V. V., Gavrilov A. I., Lobusov E. S. Managing the Handling-Comfort Trade-Off of a Quarter Car Suspension System using Active Disturbance Rejection Control and Vyshnegradsky Equation. 367

ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА,
УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Шашихин В. Н., Мерзляков К. Д. Синтез стабилизирующего управления квадрокоптером на основе линейных матричных неравенств 376

Солдаткин В. М., Мифтахов Б. И., Солдаткин В. В., Ефремова Е. С., Никитин А. В. Теоретические основы построения электронной системы пространственного измерения воздушных сигналов летательного аппарата с одним неподвижным приемником набегающего воздушного потока 384

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российского индекса научного цитирования, а также в МНБД Scopus и RSCI (на платформе Web of Science).

Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:

<http://mech.novtex.ru>, e-mail: mech@novtex.ru

MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL

Vol. 23

2022

No. 7

MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIYA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

Editor-in-Chief

FILIMONOV N. B.

Deputy Editors-in-Chief:

BOLSHAKOV A. A.

PODURAEV Yu. V.

YUSCHENKO A. S.

Responsible Secretary:

BEZMEENOVA M. Yu.

Editorial Board:

ANSHAKOV G. P.

BOLOTNIK N. N.

CHENTSOV A. G.

CHERNOUSKO F. L.

FEDOROV I. B.

KALYAEV I. A.

KURZHANSKI A. B.

KUZNETSOV N. A.

PESHEKHONOV V. G.

REZCHIKOV A. F.

SCHERBATYUK A. F.

SEBRYAKOV G. G.

SIGOV A. S.

SOJFER V. A.

SOLOMENTSEV Yu. M.

VASSILYEV S. N.

YUSUPOV R. M.

ZHELTOV S. Yu.

Editorial Council:

ALIEV T. A., Azerbaijan

DORANTES D. J., PhD, Turkey

GARASCHENKO F. G., Ukraine

GROUMPOS P. P., PhD, Greece

ISIDORI A., PhD, Italy

KATALINIC B., PhD, Austria

LIN CH.-Y., PhD, Taiwan

MASON O. J., PhD, Ireland

ORTEGA R. S., PhD, France

SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA

STRZELECKI R. M., PhD, Poland

SUBUDHI B. D., PhD, India

BOBTSOV A. A.

BUKOV V. N.

ERMOLOV I. L.

FILARETOV V. F.

FRADKOV V. L.

FURSOV V. A.

ILYASOV B. G.

KOROSTELEV V. F.

LEBEDEV G. N.

LOKHIN V.M.

MAGOMEDOV M. Kh.

PUTOV V. V.

PSHIKHOPOV V. Kh.

RAPOPORT E. Ya.

SERGEEV S. F.

ZHUKOV I. A.

Editorial Staff:

BEZMEENOVA M. Yu.

Director of the Publishing House:

ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospective development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

CONTENTS

SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

- Karabutov N. N.** Identifiability and Detectability of Lyapunov Exponents for Linear Dynamical Systems 339
- Nguyen Ba Huy, Furtat I. B.** Control of Sector-Bound Systems with the Guarantee Output Signal in a Given Set 351

ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

- Melekhin V. B., Khachumov M. V.** Procedures for Self-Learning of Autonomous Intelligent Mobile Systems in Unstable a Priori Undescribed Problematic Environments 356
- Alhelou M., Wassouf Y., Serebrenny V. V., Gavrilov A. I., Lobusov E. S.** Managing the Handling-Comfort Trade-Off of a Quarter Car Suspension System using Active Disturbance Rejection Control and Vyshnegradsky Equation. 367

DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

- Shashikhin V. N., Merzlyakov K. D.** Synthesis of Stabilizing Control of a Quadcopter Based on Linear Matrix Inequalities. 376
- Soldatkin V. M., Miftakhov B. I., Soldatkin V. V., Efremova E. S., Nikitin A. V.** Theoretical Foundations of Construction of the Electronic System for Spatial Measuring of Air Signals Aircraft Plane's with One Fixed Receiver of Incoming Air Flow 384

Information about the journal is available online at:
<http://mech.novtex.ru>, e-mail: mech@novtex.ru

Н. Н. Карабутов, д-р техн. наук, проф., kn22@yandex.ru,
МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва

Идентифицируемость и обнаруживаемость показателей Ляпунова линейных динамических систем

Характеристические показатели Ляпунова являются одним из действенных инструментов анализа качественных характеристик динамических систем. Вопросы идентифицируемости, восстанавливаемости и обнаруживаемости характеристических показателей Ляпунова не рассматривались. Эта проблема является актуальной. В работе предложен подход для проверки указанных характеристик линейной динамической системы при оценке характеристических показателей. Он основан на анализе геометрических структур, зависящих от коэффициента структурности системы. Коэффициент структурности отражает изменение характеристических показателей Ляпунова, а геометрические структуры позволяют принять решение о типе показателей. Получены условия полностью обнаруживаемых показателей Ляпунова, что соответствует определению полного множества показателей, а также σ -обнаруживаемости с уровнем ν -невосстанавливаемости, если система содержит невосстанавливаемые линеалы. Предложен способ проверки адекватности получаемого множества характеристических показателей Ляпунова. Получена допустимая граница подвижности старшего показателя Ляпунова.

Ключевые слова: динамическая система, характеристический показатель Ляпунова, идентифицируемость, восстанавливаемость, обнаруживаемость, линеал, почти периодическая функция, робот, структура, коэффициент структурности

Введение

Для анализа качественного поведения динамических систем широко используют характеристические показатели Ляпунова (ХПЛ). Они применяются для оценки поведения траекторий различных объектов в физике [1], медицине [2], экономике [3], астрономии [4]. Чаще всего ХПЛ оценивают на основе анализа временных рядов. Предполагается, что известна априорная информация о структуре системы. В статье [5] приведен обзор вычисления наибольшего ХПЛ для различных классов систем. В работе [6] предложен алгоритм оценки характеристических показателей Ляпунова неизвестной динамической системы. Алгоритм позволяет оценить все ХПЛ. Он основан на применении сетей с многомерным упреждением, в качестве базиса сети используются монотонные сигмоидальные функции. Задача сведена к подбору параметров функций, аппроксимирующих временной ряд по квадратичному критерию.

Существует несколько подходов к оценке ХПЛ (см. например, работы [7, 8]). В дальнейшем эти подходы были модифицированы [9, 10]. Большинство предложенных алгорит-

мов и процедур основано на реконструкции аттрактора системы и анализе временного ряда. Такой подход базируется на теореме Такенса [11]. Близкие идеи реализованы в работе [9]. Обзор других процедур и алгоритмов представлен в работе [12]. В статье [13] дана модификация алгоритма Бенетти для вычисления наибольшего показателя Ляпунова. Предлагаемый подход развивает методы реконструкции аттрактора системы. Он основан на динамическом изменении периода временной задержки.

Большинство предлагаемых подходов и методов оценки ХПЛ разработано для систем, не содержащих входных воздействий. Как правило, предложены способы оценки максимального (наибольшего) показателя Ляпунова. Это объясняется классом исследуемых объектов и трудностями оценки всего спектра характеристических показателей Ляпунова.

Заметим, что в большинстве публикаций применение ХПЛ ограничено исследованием качественного поведения системы и не затрагивает другие вопросы теории идентификации. Естественной является попытка на основе анализа характеристик ХПЛ покрыть более широкий спектр задач идентификации. К ним можно

отнести и задачу структурной идентификации. Анализ публикаций показывает, что с таких позиций исследования не проводились. Не рассматривались вопросы, отражающие связь идентифицируемости системы и обнаруживаемости характеристических показателей Ляпунова.

С учетом этого ниже предлагается подход к оценке идентифицируемости системы и принятию на ее основе решения об обнаруживаемости характеристических показателей Ляпунова в условиях априорной неопределенности. В качестве исходных данных используется экспериментальная информация о работе системы в условиях нормальной эксплуатации. Для вычисления всего спектра ХПЛ используется подход, предложенный в работах [14, 15]. Он основан на анализе свойств специального класса геометрических структур, описывающих динамику изменения характеристических показателей Ляпунова. Рассмотрен случай стационарных и периодических систем.

Постановка задачи

Рассматривается динамическая система

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu, \\ y &= C^T X, \end{aligned} \quad (1)$$

где $X \in R^m$ — вектор состояния; $u \in R$, $y \in R$ — вход и выход системы; $A \in R^{m \times m}$, $B \in R^m$, $C \in R^m$.

Матрица A является матрицей Гурвица. Для системы (1) известна измерительная информация

$$I_o = \{Y(t), U(t), t \in J = [t_0, t_1]\}. \quad (2)$$

Решение системы (1) запишем в виде

$$X(t) = \mathcal{X}(t_0, u, t), \quad (3)$$

где \mathcal{X} — оператор, однозначно определяемый матрицами A , B и начальными условиями $X(t_0)$.

При $X_0 = X(t_0)$ решение системы (1) имеет вид

$$X(t) = X_g(t) + X_q(t), \quad (4)$$

где $X_q(t)$ — частное решение (1) с $U \in I_o$; $X_g(t)$ — общее решение (1) с $u(t) = 0$ при неизвестном $X_0 \in I_o$.

Обозначим $X_g(X_0, t)$ — общее решение системы (1) с $X_0 = X_0(Y_0) \in I_o$.

Задача состоит в нахождении оценки решения $X_g(t) = X_g(X_q, X_0, t)$ на множестве I_o и

получении условий идентифицируемости и обнаруживаемости спектра собственных чисел и порядка системы (1) по $X_g(t)$.

Способ получения оценки решения $X_g(t) = X_g(X_q, X_0, t)$ на основе обработки множества измерений (2) описан в работе [14]. Поэтому в дальнейшем считаем, что имеется оценка решения $X_g(t) = X_g(X_q, X_0, t)$.

Восстанавливаемость и обнаруживаемость системы

Приведем ряд понятий из общей теории систем [16]. Вопросы восстанавливаемости и обнаруживаемости тесно взаимосвязаны между собой. Вычисление ХПЛ основано на получении оценок переменных состояния системы. Возможность их определения связана с проблемой восстанавливаемости системы (1) на основе $y(t)$.

Определение 1. Пусть $y(t, t_0, X_0, u)$ описывает изменение выходной переменной $y(t)$ линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t)X(t) + Bu(t), \\ y(t) &= C^T X(t), \end{aligned} \quad (5)$$

из начального состояния $X_0 = X(t_0)$. Тогда система называется *полностью восстанавливаемой*, если для всех t_1 существует такой момент $t_0 \in (-\infty, t_1)$, что из равенства

$$y(t, t_0, X_0, u) = y(t, t_0, X'_0, u) \quad (6)$$

$\forall u(t)$ и $t_0 \in [t_0, t_1]$ следует $X_0 = X'_0$.

Из определения 1 следует, что если система является полностью восстанавливаемой, и выходная переменная наблюдается до произвольного момента t_1 , то существует момент $t_0 < t_1$, при котором состояние системы может быть определено единственным образом. Если $X(t_0)$ известно, то значение $X(t_1)$ также может быть определено.

Теорема 1. Система (5) является полностью восстанавливаемой в том и только том случае, если для всех t_1 существует такой момент $t_0 \in (-\infty, t_1)$, что из равенства

$$y(t, t_0, X_0, 0) = 0 \quad (7)$$

следует $X_0 = 0$.

Определение 2. Пусть A , C — матрицы размерности $n \times n$ и $l \times n$ соответственно. Тогда пара (A, C) называется *полностью восстанавливаемой*, если система

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t)X(t) + Bu(t), \\ y(t) &= CX(t) \end{aligned} \quad (8)$$

является полностью восстанавливаемой.

Может возникнуть ситуация, когда состояние системы является не полностью восстанавливаемым, что затрудняет оценку текущего состояния системы.

Определение 3. Пространство невозстанавливаемых состояний \mathcal{PN}_n линейной системы (1) с постоянными параметрами является *линейным подпространством состояний* X_0 , для которых

$$y(t, t_0, X_0, 0) = 0, \quad t \geq t_0.$$

Теорема 2. Подпространство невозстанавливаемых состояний \mathcal{PN}_n n -мерной линейной системы (1) является нуль-пространством матрицы восстанавливаемости $D = (C \ SA \ SA^2 \ \dots \ SA^{n-1})^T$.

Любое состояние, принадлежащее подпространству невозстанавливаемых состояний, обладает тем свойством, что движение системы из этого состояния при нулевом входном сигнале сходится к нулю. Это соответствует случаю, когда любое состояние, принадлежащее подпространству невозстанавливаемых состояний, принадлежит также подпространству устойчивых состояний системы. Из устойчивости системы следует, что выбор невозстанавливаемой компоненты состояния не приводит к возрастанию ошибки. Систему, обладающую таким свойством, будем называть *обнаруживаемой*.

Определение 4. Линейная система (1) с постоянными параметрами является *обнаруживаемой*, если ее подпространство невозстанавливаемых состояний содержится в подпространстве устойчивых состояний.

Определение 5. Пара (A, C) является обнаруживаемой, если система

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(t)X(t), \\ y(t) = CX(t) \end{cases} \quad (9)$$

является обнаруживаемой.

Теорема 3. Любая асимптотически устойчивая система вида (1) является обнаруживаемой. Любая полностью восстанавливаемая система вида (1) является обнаруживаемой.

Рассмотрим систему (8) и соответствующую ей переходную матрицу $\Phi(t, t_0)$. Тогда система (8) является полностью восстанавливаемой в том и только том случае, если

$$\begin{aligned} M(t, t_1) &= \int_t^{t_1} \Phi(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau > 0 \\ &(\forall t_1) \ \& \ (-\infty < t_0 < t_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Если

$$\alpha_0 I \leq M(t_1 - \sigma, t_1) \leq \alpha_1 I \quad \forall t_1,$$

$$\beta_0 I \leq \Phi^T(t_1 - \sigma, t_1) M(t_1 - \sigma, t_1) \Phi(t_1 - \sigma, t_1) \leq \alpha_1 I \quad \forall t_1, \quad (\alpha_0, \alpha_1, \beta_0) > 0,$$

то система (8) является равномерно полностью восстанавливаемой.

Равномерная восстанавливаемость гарантирует, что идентификация состояния всегда возможна приблизительно в пределах одинакового интервала времени. Для системы (1) равномерная полная восстанавливаемость следует из полной восстанавливаемости.

Оценка $X_g(t)$

Для оценки ХПЛ сформируем множество $\{X_g(t)\}$, реализовав операцию $\{X(t)\} \setminus \{X_q(t)\}$. Применим для этого подход, предложенный в работах [14, 15].

Представим I_o в виде

$$I_o = I_o^q(J_q) \cup I_o^g(J_g), \quad (11)$$

где $J_q \cup J_g = J \subseteq R$; I_o^q, I_o^g — множества, содержащие информацию о X_q и X_g .

Утверждение 1 [14]. Для идентификации $X_q(t)$ на множестве I_o^q применима модель

$$\widehat{X}_q(t) = \widehat{A}_q W(t) \quad \forall t \in J_q, \quad (12)$$

где $\widehat{A}_q \in R^{2 \times 2}$ — матрица параметров модели, $W = [u \ u']^T$.

На основе модели (12) определяем оценку частного решения $\widehat{X}_q(t)$ системы на множестве I_o^g и далее находим оценку общего решения

$$\widehat{X}_g(t) = X(t) - \widehat{X}_q(t) \quad \forall t \in J_g, \quad (13)$$

где $\widehat{X}_g(t) = [\widehat{y}_g(t) \ \dot{\widehat{y}}_g(t)]^T$.

ХПЛ. Коэффициент структурности системы

Для действительной функции $h(t)$ ХПЛ [17] определяется в виде

$$\chi[h] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln|h(t)|}{t}, \quad (14)$$

где $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty}$ — верхний предел.

χ_i ($i = \overline{1, m}$) ненулевого решения стационарной системы (1) совпадают с действительными частями собственных чисел λ_i матрицы A . Пусть известна оценка общего решения $X_g(t)$, $\forall t \in J_g$, системы (1). Полагаем, что система является устойчивой и, следовательно, восстанавливаемой и обнаруживаемой. Применим (14) к $\hat{y}_g(t)$:

$$\chi[\hat{y}_g] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\ln|\hat{y}_g(t)|}{t}, \quad (15)$$

где $\bar{t} \in J_g$ — максимальное значение (верхняя грань) t на интервале $J_g \subset J$.

Предел (15) есть наибольший (максимальный) ХПЛ. Если предел (14) существует, то $\chi[\hat{y}_g]$ является оценкой максимального собственного числа матрицы A . Следовательно, $\chi[\hat{y}_g]$ характеризует степень устойчивости системы (1). Если $m = 2$, то для \hat{y}_g получаем

$$\chi[\hat{y}_g] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \bar{t}} \frac{\ln|\dot{\hat{y}}_g|}{t}. \quad (16)$$

Также применяется показатель Перрона [18]

$$\eta[h] = \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln|h(t)|}{t}, \quad (17)$$

где $\underline{\lim}_{t \rightarrow \infty}$ — нижний предел.

Идея применения ХПЛ в задачах идентификации изложена в работах [14, 19]. Предлагаемый подход основан на анализе коэффициента структурности (КС)

$$k_s(t, \rho) = \frac{\rho(\hat{y}_g)}{t}, \quad (18)$$

где $\rho(\hat{y}_g) = \rho_g = \ln|\hat{y}_g(t)| \forall t \in \bar{J}_g \subset J_g$, $\bar{J}_g = [t_0, \bar{t}]$ определяется в соответствии с выражением (15).

В отличие от подходов, рассмотренных во введении, излагаемый ниже подход к оценке ХПЛ основан на анализе специального класса структур.

Структуры для оценки ХПЛ

Рассмотрим множества

$$\begin{aligned} I_{k_s} &= \{k_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), t \in \bar{J}_g\}, \\ I_{k'_s} &= \{k'_s(t, \rho(\dot{\hat{y}}_g(t))), t \in \bar{J}_g\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Определим на $I_{k_s}, I_{k'_s}$ отображение $S_{k_s, \rho} \rightarrow I_{k_s} \times I_{k'_s}$. Структура $S_{k_s, \rho}$ отражает динамику изменения показателей, зависящих от ХПЛ. На множестве $I_{k'_s}$ рассмотрим функцию, описывающую изменение первой разности КС $k'_s(t, \rho(\dot{\hat{y}}_g(t)))$:

$$\Delta k'_s(t) = k'_s(t, \rho(\dot{\hat{y}}_g(t + \tau))) - k'_s(t, \rho(\dot{\hat{y}}_g(t))), \quad (20)$$

где $\tau > 0$. Далее сформируем множество

$$I_{\Delta k'_s} = \{\Delta k'_s(t, \rho(\dot{\hat{y}}_g(t))), t \in \bar{J}_g\} \quad (21)$$

и введем структуру $S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho} \rightarrow I_{k_s, \rho} \times I_{\Delta k'_s, \rho}$. Кроме структуры $S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$ рассмотрим соответствующее ей преобразование

$$\mathcal{L}S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho} \rightarrow I_{k_s, \rho} \times B(I_{\Delta k'_s, \rho}), \quad (22)$$

где $B(I_{\Delta k'_s, \rho}) \subset \{-1; 1\}$. Элементы бинарного множества $B(I_{\Delta k'_s, \rho})$ определим следующим образом:

$$b(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta k'_s(t) \geq 0, \\ -1, & \text{если } \Delta k'_s(t) < 0, \end{cases} \quad t \in \bar{J}_g. \quad (23)$$

Замечание 1. Для некоторого класса систем на основе изменения $S_{k_s, \rho}$ можно выбрать границы верхнего предела в выражении (15).

Замечание 2. Выбор области значений функции $b(t)$ определяем удобством ее графического анализа.

Рассмотрим структуры $S\mathcal{K}_{k_s^i, \rho} \rightarrow I_{k_s} \times I_{k_s^i}$ и $\mathcal{L}S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$, где i обозначает i -ую производную $\hat{y}_g(t)$,

$$I_{k_s^i} = \{k_s(t, \rho(\hat{y}_g^{(i)}(t))), t \in \bar{J}_g\}. \quad (24)$$

Наибольший показатель Ляпунова $\chi_l[\hat{y}_g]$ лежит в левой части структуры $S\mathcal{K}_{k_s^i}$. Все остальные показатели $\chi_i[\hat{y}_g]$ совпадают с нижними показателями Перрона $\eta_i[\hat{y}_g]$ и расположены правее от $\chi_l[\hat{y}_g]$. На $S\mathcal{K}_{k_s^i}$ показатели $\chi_i[\hat{y}_g]$ соответствуют локальным минимумам кривой, описывающей изменение $S\mathcal{K}_{k_s^i, \rho}$. Расположение минимумов на $S\mathcal{K}_{k_s^i, \rho}$ совпадает с изменением знака структуры $\mathcal{L}S\mathcal{K}_{\Delta k'_s, \rho}$. В результате получаем $\mathcal{M}_{LE}^m = \{\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_m\}$, где $\hat{\lambda}_i$ есть оценка i -го собственного числа λ_i матрицы A системы (1). При полной \mathcal{L} -обнаруживаемости системы (1) (см. следующий раздел) можно получить полный спектр ХПЛ, которому соответствует полное пространство линейных $\mathcal{L}^m(t)$.

Идентифицируемость и обнаруживаемость ХПЛ

Стационарная система

Рассмотрим вход $u \in \mathcal{PE}_\alpha$, где \mathcal{PE}_α — свойство постоянства возбуждения:

$$\mathcal{PE}_\alpha : u^2(t) \geq \alpha \quad (25)$$

справедливо для $\exists \alpha > 0$ и $\forall t \geq t_0$ на некотором интервале $T > 0$. При таком входе фазовый портрет системы является замкнутым, система (1) — идентифицируемой [15], а модель (10) — идентифицирующей.

Определение 6. Система (1) называется \mathcal{L} -обнаруживаемой, если на основе линеалов можно обнаружить характеристические показатели Ляпунова.

Приведем модификацию теоремы 1 [14] для случая простых ХПЛ.

Теорема 4. *Характеристические показатели Ляпунова системы (1) являются \mathcal{LP} -обнаруживаемыми или полностью обнаруживаемыми, а система (1) имеет порядок m , если функция $b(t)$ на интервале $[t_0, t^*] \subset \bar{J}_g$ ($t^* \leq \bar{t}$) меняет свой знак $(m - 1)$ раз.*

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим систему (1) с устойчивой матрицей состояния A . Пусть корни являются простыми действительными и упорядочены в виде $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$. Согласно [20] решение системы (1) является линеалом $\mathcal{L}^m(t)$, который является частью линейного пространства $\mathcal{L}^m(t)$. Так как система является линейной, то для $\mathcal{L}^i(t)$ справедливо вложение [20]

$$0 \equiv \mathcal{L}^0(t) \subset \mathcal{L}^1(t) \subset \dots \subset \mathcal{L}^n(t) \equiv \mathcal{L}^m(t), \quad (26)$$

которое будем называть пирамидой L^m , где l_i — размерность линеала $\mathcal{L}^i(t)$. Разность двух соседних линеалов

$$\mathcal{L}_k = \mathcal{L}^{l_0}(t) \subset \mathcal{L}^{l_k}(t) \setminus \mathcal{L}^{l_{k-1}}(t) \quad (27)$$

будем называть ступенью пирамиды. Ступень имеет вес $m_k = l_k - l_{k-1}$.

l_k соответствует числу базисных решений, которое содержит линеал $\mathcal{L}^{l_k}(t)$. На начальном интервале времени $\mathcal{L}^{l_1}(t)$ содержит показатель λ_m . При увеличении t решение переходит на ступень $\mathcal{L}^{l_2}(t)$ пирамиды. На $\mathcal{L}^{l_2}(t)$ доминирует показатель λ_{m-1} . Это вызывает изменение свойств функции $b(t)$. Далее применяем индукцию по

ступеням пирамиды, пока не получим все пространство $\mathcal{L}^m(t)$. ■

Следствие из теоремы 4. *Если число смен знаков функции $b(t)$ меньше $m - 1$, то пирамида L^m будет содержать ступени, которые являются необнаруживаемыми.*

Доказательство следствия из теоремы 4. Пусть число смен знака υ функции $b(t)$ $\upsilon < m - 1$. Это значит, что вложение (26) будет содержать линеалы $\mathcal{L}^{l_k}(t) = \mathcal{NL}_k(t)$, $k \geq 1$, которые в (26) присутствуют неявно из-за невозможности их обнаружения (вычисления). Но в силу устойчивости системы (1) эти множества $\{\mathcal{NL}_k\}$ существуют неявно. Следовательно, пирамида линеалов L^m будет иметь υ ступеней из-за необнаруживаемости линеалов \mathcal{NL}_k : $L_\upsilon = L^m \setminus \{\mathcal{NL}_k | k > 0\}$. ■

Обозначим $\sigma = m - 1 - \upsilon$. Из следствия из теоремы 5 получаем:

Определение 7. Система (1) называется σ -обнаруживаемой с уровнем υ -невосстанавливаемости, если υ линеалов имеют уровень \mathcal{NL}_k , где $k > 0$.

Замечание 3. \mathcal{LP} -обнаруживаемость и восстанавливаемость трактуется как возможность вычисления ХПЛ.

Замечание 4. При \mathcal{LP} -обнаруживаемости системы (1) элементы множества \mathcal{M}_{LE}^m соответствуют ступеням пирамиды L^m .

Теорема 5. *Если система (1) является устойчивой и восстанавливаемой, а структура $\mathcal{LSK}_{\Delta k', p}$ меняет знак $m - 1$ раз, то характеристические показатели Ляпунова системы являются \mathcal{LP} -обнаруживаемыми, а структура $\mathcal{SK}_{k', p}$ содержит множество \mathcal{M}_{LE}^m характеристических показателей Ляпунова, которое отражает структуру линеала L^m .*

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 5 и следует из устойчивости и восстанавливаемости системы (1).

Следствие из теоремы 5. *Если число смен знаков структуры $\mathcal{LSK}_{\Delta k', p}$ меньше $m - 1$, то пирамида L^m будет содержать ступени, которые являются необнаруживаемыми.*

Система с периодическими коэффициентами

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{X} &= A(t)X + Bu, \\ y &= C^T X, \end{aligned} \quad (28)$$

где $X \in R^m$ — вектор состояния; $u \in R$, $y \in R$ — вход и выход системы; $A(t) \in R^{m \times m}$, $B \in R^m$, $C \in R^m$.

Пусть матрица $A(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

A1. $A(t)$ является непрерывной матрицей Фробениуса и ограниченной

$$\|A(t)\| \leq \alpha_A, \quad (29)$$

где $\alpha_A > 0$, $\|\cdot\|$ — норма матрицы.

A2. $A(t)$ является почти периодической, т. е. из любой последовательности [20]

$$A_i(t) = A_i(t - \tau_i) \quad (30)$$

можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся на всей оси к некоторой почти периодической матрице $\bar{A}(t)$.

A3. Матрица $A(t)$ является гурвицевой для почти всех $t \geq 0$.

Применим к системе (21) подход, изложенный в разделе "Оценка $X_g(t)$ ", и получим множество $\{X_g(t)\}$. Рассмотрим класс почти периодических функций по Бору [21].

Определение 8. Числовое множество $\Xi = \{\xi\}$ называется *относительно плотным* на действительной оси $-\infty < x < \infty$, если существует такое число $l > 0$, что каждый отрезок $a \leq x \leq a + l$ длины l содержит хотя бы один элемент Ξ , т. е. при любом a имеем

$$[a, a + l] \cap \Xi \neq \emptyset. \quad (31)$$

Определение 9. Число $T = T_f(\delta)$ называется *почти периодом* функции $f(x)$ с точностью до δ (или δ -*почти периодом* или δ -*смещением*), если неравенство

$$|f(x + T_f) - f(x)| < \delta, \quad \delta > 0 \quad (32)$$

имеет место для любого $x \in (-\infty, \infty)$.

Определение 10. Функция $f(x) \in (-\infty, \infty)$ называется *почти периодической в смысле Бора* (\mathcal{BF} -функцией), если относительно плотное множество почти периодов T_f функции $f(x)$ с точностью до δ существует, т. е. существует такое положительное число $l = l(\delta)$, что любой отрезок $[a, a + l]$ содержит, по меньшей мере, одно число T_f , для которого справедливо

$$|f(x + T_f) - f(x)| < \delta \text{ при } x \in (-\infty, \infty). \quad (33)$$

Элементы множества $\{X_g(t)\}$, а следовательно, и $u_g(t)$ принадлежат к классу экспоненциально-синусоидальных функций, и условие (32) может не выполняться. Поэтому следует обеспечить принадлежность $\hat{y}_g(t)$ к классу \mathcal{BF} -функций. Выполним следующие действия [22]. Рассмотрим

некоторую точку $t \in R$ и ее окрестность O_t . Определим среднее значение $\hat{y}_g(t) \forall t \in O_t$:

$$\alpha = \bar{y}_{g, O_t} = \frac{1}{N_t} \sum_i \hat{y}_i, \quad (34)$$

где N_t — число точек на O_t , $t_i \in O_t$ — текущее покрытие интервала O_t с шагом τ .

Для $\forall t \in R$, принадлежащих окрестности $O_{t+T_{yg}}$, получим

$$\pi = \bar{y}_{g, O_{t+T_{yg}}} = \frac{1}{N_{t+T_{yg}}} \sum_i \hat{y}_i. \quad (35)$$

Определение 11 [22]. Функция $\hat{y}_g(t) \in (0, \infty)$ называется α -*почти периодической* в смысле Бора функцией (\mathcal{BF}_{α} -функцией), если для любого $\delta > 0$ существует относительно плотное множество почти периодов T_f функции $\hat{y}_g(t)$ с точностью до δ , т. е. существует положительное число $l = l(\delta)$ такое, что любой отрезок $[a, a + l]$ содержит, по меньшей мере, одно число T_f для которого выполнено неравенство

$$\left| \frac{\hat{y}_g(t + T_f)}{\pi} - \frac{\hat{y}_g(t)}{\alpha} \right| < \delta \text{ при } t \in [0, \infty). \quad (36)$$

Рассмотрим структуру $\mathcal{SK}_{\Delta k'_{s,p}}$, определенную на $I_{k_{s,p}} \times I_{\Delta k'_{s,p}}$ и описываемую функцией $f_{sk}(t) : k_s \rightarrow \Delta k_s$. Функция $k_s(t)$ является \mathcal{BF}_{α} -функцией. Поэтому $f_{sk}(t)$ будет содержать области \mathcal{D}_{sk} , которые имеют резко изменяющуюся амплитуду.

Определение 12. [14]. Область \mathcal{D}_{sk} функции f_{sk} называется α -*областью* на интервале $J_{sk} = [t, t + T]$ ($T > 0$) изменения t , если она соответствует изменению \mathcal{BF}_{α} -функции $k_s(t)$ на этом интервале.

Теорема 6 [22]. Если система (28) является устойчивой и содержит простые собственные числа, то структуры $\mathcal{SK}_{k'_{s,p}}$, $i = \bar{1}, m$, содержат информацию о характеристических показателях Ляпунова.

Теорема 7 [22]. Если система (28) является устойчивой и восстанавливаемой, а функция $f_{sk}(t)$ на интервале $[t_0, t^*] \subset \bar{J}_g$ ($t^* \leq \bar{t}$) содержит не менее m областей \mathcal{D}_{sk} , то система (28) имеет порядок m и является \mathcal{LP} -идентифицируемой (\mathcal{LP} -обнаруживаемой).

Доказательство теоремы 7 следует из теоремы 6.

Так как система (28) является устойчивой и восстанавливаемой, то согласно теореме 7

она является идентифицируемой на множестве $\{SK_{k_{s,p}^i}\}$. В работе [22] показано, что расположение локальных минимумов на $SK_{k_{s,p}^i}$ совпадает с областями D_{sk} структуры $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$. В результате анализа D_{sk}^i получаем множество M_{LE} , содержащее оценки показателей системы (28). Мощность M_{LE} может не совпадать с числом характеристических показателей системы. M_{LE} характеризует доступное множество линеалов системы (28).

Обозначим κ_m верхнюю оценку наименьшего $\eta_i[\hat{y}_g]$.

Теорема 8. Если: а) для системы (28) выполняются предположения А1–А3, б) система (28) является восстанавливаемой, в) элементы множества $\{k_{s,p}^i(t)\}$ являются $WF_{\alpha\pi}$ -функциями, г) структура $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ содержит точку, в которой изменяется знак производной, то показатель κ_m является обнаруживаемым.

Доказательство теоремы 8. Так как выполняются предположения А1–А3, то система является устойчивой и восстанавливаемой. Согласно теореме 6 система ХПЛ является идентифицируемой (обнаруживаемой) на структуре $SK_{k_{s,p}^i}$. $k_{s,p,j}^i(t) \in \{k_{s,p}^i(t)\}$ ($j > 0$) является $WF_{\alpha\pi}$ -функцией, поэтому структура $SK_{k_{s,p}^i}$ будет содержать локальные минимумы, глобальный минимум которых будут являться верхней оценкой κ_m наименьшего $\eta_i[\hat{y}_g]$, что подтверждает обнаруживаемость $\eta_i[\hat{y}_g]$. ■

Замечание 5. Так как решение принимается на основе анализа нескольких структур $SK_{k_{s,p}^i}$ ($i \geq 1$), то в качестве κ_m выбираем верхнюю границу из $\kappa_{m,i}$.

Замечание 6. Подход, основанный на анализе $SK_{k_{s,p}^i}$, позволяет получить оценки наименьшего показателя Ляпунова $\eta_i[\hat{y}_g]$. Этим он отличается от процедур, предлагаемых в литературе. Если структура $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ содержит единичное резкое изменение значения, то это является признаком того, что $SK_{k_{s,p}^i}$ содержит оценку $\eta_m[\cdot]$. Так как $|\eta_m[\cdot]| > |\chi_i[\cdot]|$, где $i = \overline{1, m-1}$, то $\eta_m[\cdot]$ равен κ_m и называется верхней оценкой наименьшего ХПЛ. Связано это с тем, что соответствующий линеал $L^m(t)$ имеет минимальную область определения. Функция $\hat{y}_g(t)$ на $L^m(t)$ не является $\alpha\pi$ -почти периодической, так ее параметры α , π быстро убывают и, следовательно, условие (32) не выполняется. Поэтому линеал $L^m(t)$ будет содержать только одно значение, которое соответствует κ_m .

Теорема 9. Пусть: 1) для системы (28) выполняются предположения А1–А3, 2) система (28) является восстанавливаемой, 3) элементы множества $\{k_{s,p}^i(t)\}$ являются $WF_{\alpha\pi}$ -функциями, 4) структура $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ содержит не менее t областей D_{sk}^v ($v \leq t$), которым на структуре $SK_{k_{s,p}^i}$ соответствуют локальные минимумы. Тогда множество M_{LE} является $L\mathcal{P}$ -обнаруживаемым или полностью обнаруживаемым.

Доказательство теоремы 9. Система (28) является устойчивой и восстанавливаемой, а структура $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ содержит t областей D_{sk}^v . $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ является производной от $SK_{k_{s,p}^i}$. Поэтому на $SK_{k_{s,p}^i}$ областям D_{sk}^v будут соответствовать локальные минимумы, отражающие положение ХПЛ. Это следует из теорем 7, 8. Следовательно, множество M_{LE} является идентифицируемым или $L\mathcal{P}$ -обнаруживаемым. ■

Замечание 7. Так как собственные числа $\lambda_i(t)$ матрицы A являются периодическими функциями времени, то линеалы $L^i(t)$ и $L^{i+1}(t)$ могут пересекаться [22]. Этот случай может приводить к бесконечному спектру характеристических показателей Ляпунова.

Система (28) является нестационарной, поэтому необходимо оценить область, которой принадлежит множество M_{LE} . Это связано с тем, что множество M_{LE} может быть большим (см. замечание 7). Нетрудно заметить, что снизу эта область ограничена показателем κ_m .

Естественно, можно указать допустимую область для M_{LE} и число, определяющее подвижность старшего показателя Ляпунова. Снизу эта область ограничена показателем κ_m . При выборе данных параметров можно ограничиться временным диапазоном $[0, \bar{t}]$, где \bar{t} выбирается согласно (15). Выбор области изменения χ_1 можно осуществить на основе анализа структуры $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$. Так как индикатором наличия χ_1 является область $D_{sk}^1 \subset SK_{\Delta k_{s,p}^i}$, то на $SK_{k_{s,p}^i}$ D_{sk}^1 будет соответствовать фрагмент $\mathcal{V}_{k_{s,p}^i}^1$, который изменяется на интервале $J_{k_{s,p}^i}^1$. Следовательно, $\chi_1 \in J_{k_{s,p}^i}^1$. Тогда допустимая граница подвижности старшего показателя χ_1 определяется [22] как

$$\chi_1 \leq \sup J_{k_{s,p}^i}^1. \quad (37)$$

Итак, справедлива

Теорема 10. Пусть выполняются условия теоремы 9. Тогда допустимая граница подвижности старшего показателя χ_1 удовлетворяет условию (37).

В рамках рассматриваемого подхода встает вопрос о критерии оценки $\mathcal{L}\mathcal{P}$ -обнаруживаемости системы (28). В условиях неопределенности адекватные показатели предложить сложно. Такие теоретические показатели [20], как прочность и достижимость, не поддаются проверке в условиях неопределенности. Так как результатом $\mathcal{L}\mathcal{P}$ -обнаруживаемости являются множество \mathcal{M}_{LE} и граница подвижности (37), то следует использовать результаты анализа специального класса структур. Для подтверждения обнаруживаемости множества \mathcal{M}_{LE} применим подход, основанный на проверке χ -адекватности полученных оценок ХПЛ [22].

Рассмотрим структуру $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$, описываемую функцией $f_{\hat{y}_g, \hat{y}_g} : \hat{y}_g \rightarrow \hat{y}_g$ в пространстве $R_y = (\hat{y}_g, \hat{y}_g)$. Так система (28) удовлетворяет условиям А1-А3, то $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ будет содержать области, которые отражают $\alpha\pi$ -почти периодическое поведение системы. Далее рассмотрим структуры $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$, $SL_{k_{s,p}^i}$, которые описываются функциями

$$f_{SL_{k_{s,p}^i}} : \hat{y} \rightarrow k_{s,p}^i, f_{SL_{\Delta k_{s,p}^i}} : \hat{y} \rightarrow \Delta k_{s,p}^i. \quad (38)$$

Определение 13. Оценки ХПЛ χ_i являются χ -адекватными в пространстве R , если области их определения совпадают с областями $\alpha\pi$ -почти периодичности структуры $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$.

По аналогии с $\mathcal{D}_{sk} \subset SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ введём фрагменты $\mathcal{D}_{sl}^j \subset SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ ($j \geq 1$) в пространстве R_y . Обозначим $\text{dom } \mathcal{D}_{sl}^j$ — область определения \mathcal{D}_{sl}^j . Справедлива следующая модификация теоремы 3 [22].

Теорема 11. Пусть: 1) система (28) является устойчивой и восстанавливаемой, 2) множество \mathcal{M}_{LE} является $\mathcal{L}\mathcal{P}$ -обнаруживаемым, 3) области определения фрагментов \mathcal{D}_{sl}^j структуры $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ совпадают с областями $\alpha\pi$ -почти периодичности структуры $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$. Тогда оценки элементов множества \mathcal{M}_{LE} являются χ -адекватными областям $\alpha\pi$ -почти периодичности $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$.

Доказательство теоремы 11. Согласно теореме 7 функция $f_{sk}(t)$ содержит не менее m областей \mathcal{D}_{sk}^j . Структуры $SK_{\Delta k_{s,p}^i}$ и $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ имеют одинаковую область значений. Данное утверждение справедливо и для \mathcal{D}_{sk}^j , \mathcal{D}_{sl}^j . Области \mathcal{D}_{sk}^j , \mathcal{D}_{sl}^j определяют изменение ХПЛ. Из равенства областей значений \mathcal{D}_{sk}^j , \mathcal{D}_{sl}^j следует конгруэнтность областей значений \mathcal{D}_{sk}^j , \mathcal{D}_{sl}^j . Если области определения фрагмента \mathcal{D}_{sl}^j структуры $SL_{\Delta k_{s,p}^i}$ и области $\alpha\pi$ -почти периодичности $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$ совпадают,

то в силу наличия зависимости между функциями $f_{SL_{k_{s,p}^i}}$ и $f_{SL_{\Delta k_{s,p}^i}}$ получаем, что некоторая совокупность элементов множества \mathcal{M}_{LE} покрывает соответствующую $\alpha\pi$ -почти периодическую область $S_{\hat{y}_g, \hat{y}_g}$. Следовательно, оценки χ_i являются χ -адекватными в пространстве R_y . ■

Примеры

1. Рассмотрим систему, фазовый портрет которой показан на рис. 1. Известно информационное множество (4). Вход $u(t) = 5 + 2\sin(0,2\pi t)$. Из рис. 1 следует, что в системе присутствуют колебания.

Применение модели (12) на интервале $\hat{A}_q = [0,302; 0,189; -2,03]^T$ позволяет получить общее решение системы. Коэффициент детерминации модели равен 0,95. На основе модели (10) получены оценки $\hat{y}_g(t)$ и $\hat{y}_g(t)$. Вектор параметров модели для определения $\hat{y}_g(t)$ равен $[-0,17; -0,89; 0,27]^T$. Фазовый портрет системы показан на рис. 2 и подтверждает принадлежность к системе с периодическими коэффициентами.

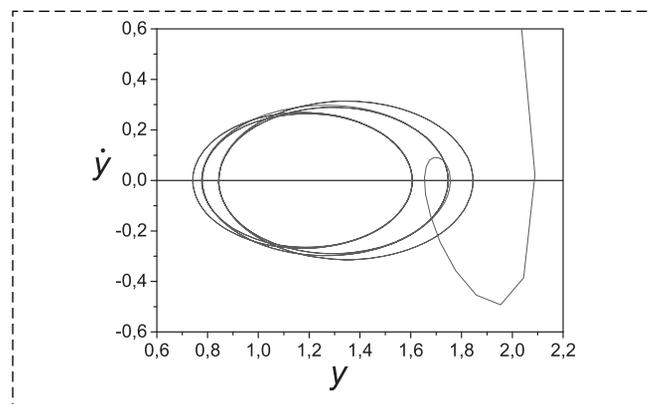


Рис. 1. Фазовый портрет системы
Fig. 1. Phase portrait of system

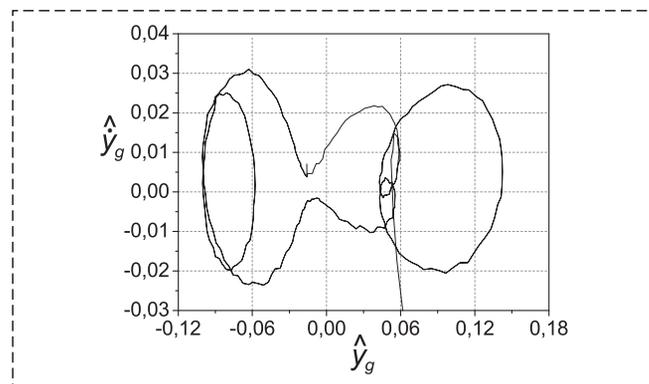


Рис. 2. Фазовый портрет системы в пространстве $R_y = (\hat{y}_g, \hat{y}_g)$
Fig. 2. System phase portrait in space $R_y = (\hat{y}_g, \hat{y}_g)$

Из рисунков следует, что система является устойчивой и восстанавливаемой. Следовательно, ее ХПЛ должны быть обнаруживаемые. Результаты, подтверждающие $\mathcal{L}\mathcal{P}$ -обнаруживаемость ХПЛ, представлены на рис. 3 (см. вторую сторону обложки), где показаны структуры $S\mathcal{K}_{\Delta k_{s,p}^1}$ и $S_{k_{s,p}^1}$, Δk_s^1 имеет вид (17),

$$k_s^1(t, \rho) = \frac{\rho(\dot{y}_g(t))}{t}. \quad (39)$$

На основе анализа $S\mathcal{K}_{\Delta k_{s,p}^1}$ получаем $M_{LE} = \{-1,8; [-1,21; -0,88]\}$. Применение теоремы 7 показывает, что порядок системы равен 2. Верхняя оценка для наименьшего ХПЛ $\kappa_m = -1,8$. Допустимая граница подвижности старшего показателя χ_1 равна $-0,8$. На интервале изменения $k_s \in [-0,2; -0,13]$ имеем еще одно наблюдаемое множество ХПЛ M_{LE}^1 , что подтверждает вывод, приведенный в замечании 7. Пример оценки χ -адекватности ХПЛ демонстрирует рис. 4 (см. вторую сторону обложки).

Вернемся к исходной системе (28). Рассматривалась система второго порядка с матрицей

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1(t) & a_2(t) \end{bmatrix}, \quad (40)$$

$$a_1(t) = -3 + 0,2 \sin(0,02\pi t),$$

$$a_2(t) = -4 + 0,3 \sin(0,04\pi t).$$

Собственные числа матрицы A изменялись в диапазоне $\lambda_1(t) \in [-1,325; -0,819]$, $\lambda_2(t) \in [-2,37; -3,48]$. Результаты моделирования подтверждают обнаруживаемость ХПЛ системы (28).

2. На рис. 5 (см. вторую сторону обложки) показаны результаты моделирования для системы (1) с матрицей A и спектром

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A) = (-1; -2; -3). \quad (41)$$

С помощью подхода, предложенного в разделе "Оценка $X_g(t)$ ", получено множество $\{y_g(t), 0 \leq t \leq 16 \text{ с}\}$. Сформированы множества $I_{\Delta k_s^i}$, $I_{k_s^i}$, $I_{k_i^i}$, $i = 1, 2$, на основе обработки $\hat{y}_g(t)$. На рис. 5 (см. вторую сторону обложки) показаны результаты оценки порядка системы и $\mathcal{L}\mathcal{P}$ -обнаруживаемости ХПЛ на основе теоремы 4, где используются следующие обозначения:

$$k_s = k_s(t, \rho),$$

$$k_s^1 = k_s(t, \rho(\hat{y}_g(t))), k_s^2 = k_s(t, \rho(\ddot{\hat{y}}_g(t))).$$

Цифрами 1, 2, 3 на рис. 5 (см. вторую сторону обложки) обозначены оценки ХПЛ (собственных чисел λ_i , $i = 1, 2, 3$). Результаты, представленные на рисунке, показывают, что ХПЛ являются обнаруживаемыми, а система идентифицируемой и восстанавливаемой.

3. Рассмотрим модель однозвенного роботоманипулятора с гибким шарниром, описываемого системой уравнений [23]

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_m} & -\frac{b}{J_m} & \frac{k}{J_m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{J_l} & 0 & -\frac{k}{J_l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_\tau}{J_m} u \\ 0 \\ -\frac{mgh}{J_l} \sin x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где x_1 и x_2 — угловые положения вала двигателя и звена; u — управляющий крутящий момент двигателя; J_m , J_l — моменты инерции двигателя и звена; k — постоянная упругости; b — коэффициент вязкого трения; k_τ — коэффициент усиления усилителя; m — масса звена; h — центр масс и g — ускорение свободного падения. Система (42) учитывает влияние вязкого трения и упругой деформации гибкого соединения. Вектор $Y = [x_1, x_3]^T$ доступен для измерения. Параметры системы: $J_m = 0,037 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $J_l = 0,093 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, $\kappa = 0,18 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$, $B = 0,0083 \text{ Н}\cdot\text{м/рад}$, $m = 0,21 \text{ кг}$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, $h = 0,15 \text{ м}$, $k_\tau = 0,18 \text{ Н}\cdot\text{м/В}$.

На рис. 6 представлен фазовый портрет системы по каналу x_1 — x_2 . Вход $u(t)$ не удовлетворяет условию постоянства возбуждения. Но несмотря на это в системе возникают затухающие колебания. Система является устойчивой и, следовательно, восстанавливаемой. Поэтому, несмотря на не замкнутость фазового портрета (условие h -идентифицируемости), внутренние колебания в системе позволяют говорить об идентифицируемости системы.

Структуры $S_{k_{s,p}^1, k_{s,p}^2}$, $\mathcal{L}S\mathcal{K}_{\Delta k_{s,p}^2}$ для оценки характеристических показателей Ляпунова показаны на рис. 7 (см. вторую сторону обложки). Здесь \hat{y}_1 — оценка x_2 ,

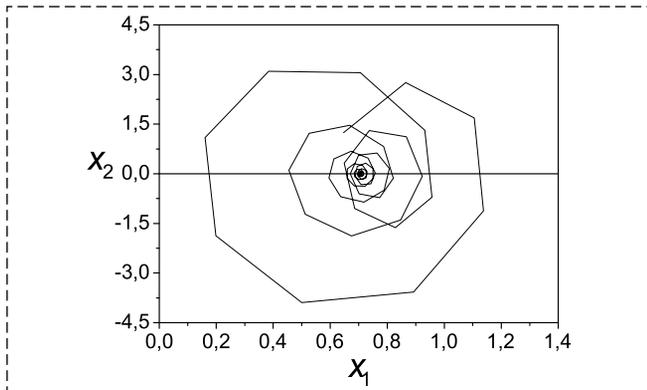


Рис. 6. Фазовый портрет системы по каналу "x₁-x₂"
Fig. 6. System (42) phase portrait "x₁-x₂"

$$k_s^1(t, \rho) = \frac{\rho(y_1(t))}{t}, k_s^2(t, \rho) = \frac{\rho(\hat{y}_1(t))}{t}, \quad (43)$$

$$LSK_{\Delta k_{s,p}^2} \rightarrow I_{k_{s,p}^1} \times B(I_{\Delta k_{s,p}^2}).$$

Так как система является устойчивой, то рассматриваются только отрицательные ХПЛ. Наличие колебаний отражает изменение функции $b(t)$, которая на рис. 7 (см. вторую сторону обложки) представлена структурой $LSK_{\Delta k_{s,p}^2}$, описываемой функцией $LSK_{\Delta k_{s,p}^2} \rightarrow I_{k_{s,p}^1} \times B(I_{\Delta k_{s,p}^2})$. Переменные состояния системы являются $\mathcal{BF}_{\text{от}}$ -функциями. Применим теорему 8. Из рис. 7 следует, что порядок системы равен 4, известна оценка показателя Перрона (наименьшего ХПЛ, которому соответствует значение $-0,7$). Область, которой принадлежит наибольший ХПЛ $\chi_1[x_2]$, обозначена эллипсом \mathcal{B}_χ . Согласно работе [15] \mathcal{B}_χ соответствует наличию комплексного корня. Что касается третьего $\chi_3[x_2]$, то он лежит между $\eta[x_2]$ и областью \mathcal{B}_χ . Он принадлежит области, приближающейся снизу к значению $k_s^2 = 0$. Лицеал, соответствующий $\chi_1[x_2]$, является линейным зависимым, и поэтому система является σ -обнаруживаемой с уровнем $\nu = 1$. Спектр корней системы $\sigma(\lambda) = [-0,65 \ 0 \ \pm 0,8 \ +8,16i]$. Система (42) является чувствительной к входным воздействиям.

Рассмотрим линеаризованную систему (42). Результаты оценки идентифицируемости и обнаруживаемости ХПЛ представлены на рис. 8 и рис. 9 (см. вторую сторону обложки). Фазовый портрет системы показан на рис. 8 в пространстве $(x_{l,1}, x_{l,2})$, где $x_{l,1}, x_{l,2}$ — переменные состояния линеаризованной системы. Аналогичный вид фазовый портрет имеет и в пространстве $(x_{l,3}, x_{l,4})$. Система является устойчивой, и в ней возникают затухающие колебания. Следовательно, система является

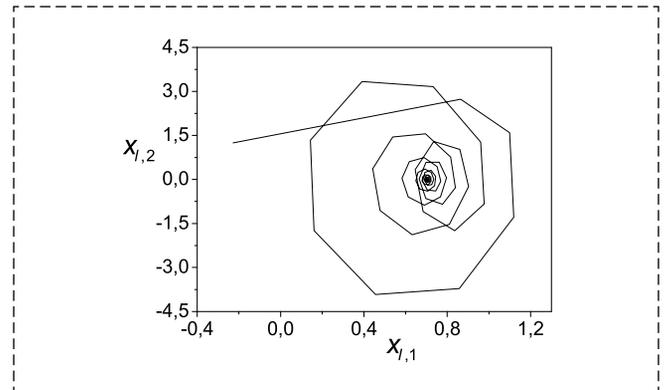


Рис. 8. Фазовый портрет линеаризованной системы (42)
Fig. 8. Phase portrait of linearized system (42)

идентифицируемой, а переменные состояния являются $\mathcal{BF}_{\text{от}}$ -функциями. На рис. 9 (см. вторую сторону обложки) представлены структуры $SL_{k_{s,p}^1, k_{s,p}^2}$, $LSKL_{\Delta k_{s,p}^2}$, подтверждающие обнаруживаемость ХПЛ:

$$SL_{k_{s,p}^1, k_{s,p}^2} \rightarrow I_{k_{s,p}^1} \times I_{k_{s,p}^2}, \quad (44)$$

$$LSKL_{\Delta k_{s,p}^2} \rightarrow I_{k_{s,p}^1} \times B(I_{\Delta k_{s,p}^2}),$$

где

$$k_s^{1,l}(t, \rho) = \frac{\rho(x_{l,1}(t))}{t}, k_s^{2,l}(t, \rho) = \frac{\rho(x_{l,2}(t))}{t}. \quad (45)$$

Из рис. 9 следует, что линеаризованная система (29) содержит пару комплексных показателей $\chi_i[x_{l,2}]$, а порядок системы равен 4. Действительные части этих показателей близки. Итак, линеаризованная система (42) является идентифицируемой, множество ХПЛ обнаруживаемо. Следует отметить, что линеаризация изменяет расположение спектра ХПЛ и влияет на степень устойчивости. Но при этом исключается показатель, лежащий на границе устойчивости. Еще раз отмечаем, что система является очень чувствительной к изменению параметров.

Закключение

Рассмотрена проблема идентифицируемости, восстанавливаемости и обнаруживаемости ХПЛ. Приведены условия, позволяющие оценить возможность вычисления ХПЛ. Они основаны на анализе свойств геометрических структур, отражающих динамику изменения характеристических показателей. Получены условия σ -обнаруживаемости с уровнем ν -восстанавливаемости и \mathcal{LP} -обнаруживаемости ХПЛ стационарной системы. Рассмотрен случай линейной системы с периодическими

коэффициентами и получены условия обнаруживаемости ее ХПЛ. Показано, что для некоторого класса нелинейных систем линеаризация может приводить к существенному изменению распределения ХПЛ.

Список литературы

1. **Thamilmaran K., Senthikumar D. V., Venkatesan A., Lakshmanan M.** // Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit. E. 2006. Vol. 74, N. 9. 036205.
2. **Porcher R., Thomas G.** Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series // Physical Review E. 2001. Vol. 64, N. 1. 010902(R).
3. **Holyst J. A., Urbanowicz K.** Chaos control in economical model by time-delayed feedback method // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2000. Vol. 287, Iss. 3–4. P. 587–598.
4. **Macek W. M., Redaelli S.** Estimation of the entropy of the solar wind flow // Phys. Rev. E. 2000. Vol. 62, N. 5. P. 6496–6504.
5. **Skokos Ch.** The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation // Lect. Notes Phys. 2010. Vol. 790. P. 63–135.
6. **Gencay R., Dechert W. D.** An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system // Physica D 59. 1992. P. 142–157. North-Holland.
7. **Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.** Determining Lyapunov exponents from a time series // Phys. D Nonlinear Phenomena. 1985. Vol.16, N. 3. P. 285–317. doi: 10.1016/0167-2789(85)90011-9.
8. **Sano M., Sawada Y.** Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 55, N. 10. P. 1082–1085.
9. **Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J.** A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // Phys. 1993. Vol.65, N. 1–2. P. 117–134.
10. **Balcerzak M., Pikunov D., Dabrowski A.** The fastest, simplified method of Lyapunov exponents spectrum estimation for con-

tinuous-time dynamical systems // Nonlinear Dyn. 2018. Vol. 94. P. 3053–3065.

11. **Takens F.** Detecting strange attractors in turbulence. Springer, Coventry, England, 1981.
12. **Soloviev V., Bielinskyi A., Serdyuk O., Solovieva V., Semerikov S.** Lyapunov exponents as indicators of the stock market crashes. 2020. URL: <http://ds.knu.edu.ua/jspui/handle/123456789/3080>.
13. **Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.** Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 268–273.
14. **Karabutov N.** Structural methods of estimation Lyapunov exponents linear dynamic system // International journal of intelligent systems and applications. 2015. Vol. 7, N. 10. P.1–11.
15. **Карабутов Н. Н.** Структуры в задачах идентификации: Построение и анализ. М.: Ленанд, 2018. 312 с.
16. **Квакернаак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977, 650 с.
17. **Ляпунов А. М.** Общая задача об устойчивости движения. М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 471 с.
18. **Изобов Н. А.** Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006. 319 с.
19. **Карабутов Н. Н.** Структурная идентификация систем: анализ информационных структур. М.: УРСС/ Книжный дом "Либроком", 2009. 176 с.
20. **Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.** Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
21. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
22. **Karabutov N.** About Lyapunov exponents identification for systems with periodic coefficients // International journal of intelligent systems and applications. 2018. Vol. 10, N. 11. P.1–10.
23. **Veluvolu K., Soh Y.** Fault reconstruction and state estimation with sliding mode observers for lipschitz non-linear systems // IET Control Theory & Applications. 2011. Vol. 5(11). P. 1255–1263.

Identifiability and Detectability of Lyapunov Exponents for Linear Dynamical Systems

N. N. Karabutov, kn22@yandex.ru,

MIREA — Russian Technological University, Moscow, 119454, Russian Federation

Corresponding author: **Karabutov Nikolay N.**, DTS, Professor, MIREA — Russian Technological University Moscow, 119454, Russian Federation, e-mail: kn22@yande.ru

Accepted on February 24, 2022

Abstract

Lyapunov exponents (LE) are an effective tool for analyzing the qualitative characteristics of dynamic systems. Identifiability, recoverability and detectability problem of Lyapunov exponents not studied. This problem is actual. We propose an approach for verifying identifiability, recoverability and detectability. The approach bases on the analysis of geometric frameworks depending on the structural properties coefficient of the system. The structural properties coefficient reflects the change in Lyapunov exponents, and geometric frameworks are a source for deciding on the type of indicators. We obtain conditions for the complete detectability of Lyapunov exponents. These conditions guarantee the receipt of indicators set. We propose a criterion of σ -detectability with a level of ν -non-recoverability and give a method to evaluate it. We propose the method for verifying the adequacy of the Lyapunov exponents set. The permissible mobility border of the largest Lyapunov exponent obtains.

Keywords: dynamic system, Lyapunov exponent, identifiability, recoverability, detectability, lineal, almost periodic function, robot, structure, structural properties coefficient.

For citation:

Karabutov N. N. Identifiability and Detectability of Lyapunov Exponents for Linear Dynamical Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 7, pp. 339–350.

DOI: 10.17587/mau.23.339-350

References

1. **Thamilmaran K., Senthilkumar D. V., Venkatesan A., Lakshmanan M.** Experimental realization of strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced electronic circuit, *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 2006, vol. 74(3 Pt 2):036205.
2. **Porcher R., Thomas G.** Estimating Lyapunov exponents in biomedical time series, *Physical Review E*, 2001, vol. 64, no. 1, 010902(R).
3. **Holyst J. A., Urbanowicz K.** Chaos control in economical model by time-delayed feedback method, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2000, vol. 287, iss. 3–4, pp. 587–598.
4. **Macek W. M., Redaelli S.** Estimation of the entropy of the solar wind flow, *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 62, no. 5, pp. 6496–6504.
5. **Skokos Ch.** The Lyapunov Characteristic Exponents and Their Computation, *Lect. Notes Phys.*, 2010, vol. 790, pp. 63–135.
6. **Gencay R., Dechert W. D.** An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system, *Physica D59*, 1992, pp. 142–157.
7. **Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.** Determining Lyapunov exponents from a time series, *Phys. D Nonlinear Phenomena*, 1985, vol.16, no. 3, pp. 285–317, doi: 10.1016/0167-2789(85)90011-9.
8. **Sano M., Sawada Y.** Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series, *Phys. Rev. Lett*, 1985, vol. 55, no. 10, pp. 1082–1085.
9. **Rosenstein M. T., Collins J. J., De Luca C. J.** A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Physica D65*, 1993, vol. 65, no. 1–2, pp. 117–134.
10. **Balcerzak M., Pikunov D., Dabrowski A.** The fastest, simplified method of Lyapunov exponents spectrum estimation for continuous-time dynamical systems, *Nonlinear Dyn.*, 2018, vol. 94, pp. 3053–3065.
11. **Takens F.** Detecting strange attractors in turbulence, Springer, Coventry, England, 1981.
12. **Soloviev V., Bielinskyi A., Serdyuk O., Solovieva V., Semerikov S.** Lyapunov exponents as indicators of the stock market crashes, 2020, available at: <http://ds.knu.edu.ua/jspui/handle/123456789/3080>.
13. **Glyzin D. S., Glyzin S. D., Kolesov A. Yu., Rozov N. Kh.** The Dynamic Renormalization Method for Finding the Maximum Lyapunov Exponent of a Chaotic Attractor, *Differential Equations*, 2005, vol. 41, pp. 284–289.
14. **Karabutov N.** Structural methods of estimation Lyapunov exponents linear dynamic system, *International journal of intelligent systems and applications*, 2015, vol. 7, no. 10, pp.1-11.
15. **Karabutov N. N.** Frameworks in identification problems: Construction and analysis, Moscow, Lenand, 2018, 312 p.
16. **Kwakernaak H., Sivan R.** Linear optimal control systems, Wiley-Interscience, A division of John Wiley & Sons, INC, New York, 1972, 576 p.
17. **Lyapunov A. M.** General Problem of the Stability of Motion, Taylor & Francis, London, Washington, DC, 1992.
18. **Izobov N. A.** Introduction in theory of Lyapunov indexes, Minsk BGU, 2006, 319 p.
19. **Karabutov N. N.** Structural Identification of Systems. Analysis of Information Structures, Moscow, URSS/ Librokom, 2009, 176 p.
20. **Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytsky V. V.** Theory of Lyapunov indexes and its application to stability problems, Moscow, Nauka, 1966, 576 p.
21. **Demidovich B. P.** Lektion on mathematical stability, Moscow, Nauka, 1967, 472 p.
22. **Karabutov N.** About Lyapunov exponents identification for systems with periodic coefficients, *International journal of intelligent systems and applications*, 2018, vol. 10, no. 11, pp.1–10.
23. **Veluvolu K., Soh Y.** Fault reconstruction and state estimation with sliding mode observers for lipschitz non-linear systems, *IET Control Theory & Applications*, 2011, vol. 5(11), pp. 1255–1263.



**KAZAN
DIGITAL
WEEK 2022**
21–24 СЕНТЯБРЯ

Кабинет Министров Республики Татарстан
под эгидой правительства Российской Федерации
21–24 сентября 2022 года
в столице Республики Татарстан г. Казани проводит

Международный форум KAZAN DIGITAL WEEK – 2022 (KDW–2022)

ТЕМАТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ KDW–2022:

- интеллектуальные транспортные системы;
- цифровые технологии в сфере государственного и муниципального управления;
- цифровая индустрия 4.0;
- кибербезопасность нового времени;
- экосистема финтех;
- инновации, интегрированные в бизнес;
- цифровые технологии в здравоохранении и медицине;
- цифровые технологии в образовании;
- цифровые технологии в культуре;
- цифровые технологии в сфере сельского хозяйства.

Информация об условиях участия в различных мероприятиях форума, алгоритм регистрации, информация о публикации научных статей и презентаций, а также полный архив материалов KDW–2021 представлены на сайте kazandigitalweek.ru/kazandigitalweek.com.

ПРИГЛАШАЕМ К ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Статьи принимаются в строгом соответствии с тематическими направлениями. Автор должен указать тематическое направление статьи. Все статьи проходят проверку программой "Антиплагиат" и двустороннее слепое рецензирование. После отбора экспертной группой статьи будут опубликованы в сборнике материалов форума. Возможна публикация в журналах, включенных в международную реферативную базу данных Scopus и рецензируемых ВАК, индексируемых в РИНЦ. Статьи принимаются до 1 июня 2022 года на электронный адрес: org@kazandigitalweek.ru.

Запрос об условиях участия в выставке направлять на электронный адрес: Artem.Safin@tatar.ru

Ба Хю Нгуен, аспирант, leningrat206@gmail.com,

И. Б. Фуртат, д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр., зав. лаб., cainenash@mail.ru,
Институт проблем машиноведения РАН, Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург

Управление объектами с секторной нелинейностью с гарантией нахождения регулируемой переменной в заданном множестве*

Предложен новый метод синтеза управления объектами с секторной нелинейностью с гарантией нахождения регулируемой переменной в заданном множестве при неизвестных ограниченных возмущениях. Синтез алгоритма осуществляется в два этапа. На первом этапе используется преобразование координат, чтобы свести исходную задачу с ограничениями к задаче исследования на устойчивость по вход—состоянию новой расширенной системы без ограничений. На втором этапе синтезируется закон управления для преобразованной системы, в котором настраиваемый параметр выбирается из решения линейных матричных неравенств. Для иллюстрации эффективности работы предлагаемого метода приведены результаты моделирования в MATLAB/Simulink, которые показали эффективность предложенного метода и подтвердили теоретические результаты.

Ключевые слова: нелинейная система, секторная нелинейность, преобразование координат, заданное множество, неизвестное ограниченное возмущение, устойчивость, линейные матричные неравенства

Введение

На практике широко распространены задачи управления нелинейными системами, в частности, объектами с секторной нелинейностью. Примерами таких систем могут быть электромеханические объекты, колебательные системы, электроэнергетические сети, манипуляторы и т. д. Существует большое число работ, посвященных управлению такими системами, например [1—6]. Однако в данных работах удается обеспечить заданное качество регулирования только в установившемся режиме.

Настоящая статья посвящена управлению с гарантией заданного качества выходного сигнала в любой момент времени. Для управления линейными системами в работах [7—9] предложен базовый метод на основе специального преобразования координат, позволяющего свести исходную задачу с ограничениями по регулируемой переменной к задаче без ограничений.

В данной работе будет применен метод, предложенный в [7—9], для синтеза закона управления системами с секторной нелинейностью и будут получены новые условия расчета параметров регулятора с использованием техники линейных матричных неравенств (ЛМН) [10, 11]. Статья организована следующим образом. В разделе 1 формулируется задача управ-

ления нелинейным объектом с гарантией принадлежности выходных сигналов в заданном множестве. В разделе 2 описан основной результат статьи, где предложен метод синтеза на основе линейных матричных неравенств. Для иллюстрации результатов работы и эффективности предполагаемого метода в разделе 3 приводятся и анализируются результаты моделирования, полученные в MATLAB/Simulink.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{D}\mathbf{f}; \\ y &= \mathbf{L}\mathbf{x},\end{aligned}\quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — измеряемый вектор состояния; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ — сигнал управления; $y \in \mathbb{R}$ — выходной сигнал; $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^l$ — неизвестное ограниченное возмущение такое, что $|\mathbf{f}(t)| \leq \bar{f}$ для любых $t > 0$; $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ — неизвестная нелинейная функция, которая удовлетворяет условию секторного ограничения для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$|\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})| \leq M|\mathbf{x}|. \quad (2)$$

Здесь $M > 0$ — известная константа. Матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ известны. Пара (\mathbf{A}, \mathbf{B}) управляема и пара (\mathbf{A}, \mathbf{L}) наблюдаема.

Требуется разработать закон управления, обеспечивающий нахождение регулируемого сигнала $y(t)$ объекта (1) в следующем множестве:

*Метод решения и основной результат получены за счет гранта Российского научного фонда № 18-79-10104-П в ИПМаш РАН, <https://rscf.ru/project/18-79-10104/>. Численное моделирование выполнено за счет средств гранта РФФИ № 20-08-00610.

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R} : \underline{g}(t) < y(t) < \bar{g}(t)\} \quad (3)$$

для любых $t \geq 0$,

где $\underline{g}(t)$ и $\bar{g}(t)$ — непрерывные и ограниченные функции вместе со своими первыми производными по времени. Данные функции выбираются разработчиками исходя из требований к работе системы.

2. Метод решения. Основной результат

Следуя работам [7–9], введем следующую замену координат:

$$y(t) = \Phi(\varepsilon(t), t), \quad (4)$$

где $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}$ — непрерывно-дифференцируемая функция по времени t , $\Phi(\varepsilon, t) \in \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:

- а) $\underline{g}(t) < \Phi(\varepsilon, t) < \bar{g}(t)$ для любых $t \geq 0$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$;
- б) существует обратное отображение $\varepsilon = \Phi^{-1}(y, t)$ для любых $y \in \mathcal{Y}$ и $t \geq 0$;
- в) $\Phi(\varepsilon, t)$ — непрерывно-дифференцируемая функция по ε и t , $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \neq 0$ для любых ε и $t \geq 0$;
- г) $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$ — ограниченная функция для любых ε и $t \geq 0$, $\left| \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right| < \gamma$, $\gamma > 0$ определяется видом замены (4).

В отличие от работ [7–9] в настоящей работе $\Phi(\varepsilon, t)$ — скалярная функция. Чтобы сформулировать закон управления, требуется знание о динамике $\varepsilon(t)$. Для этого найдем полную производную по времени функции $y(t)$ вдоль траекторий (1), (4):

$$\dot{y} = \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}. \quad (5)$$

Принимая во внимание (1), с учетом $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \neq 0$ перепишем (4) в виде

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[\mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{L}\mathbf{B}u + \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{f} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right]. \quad (6)$$

Для решения поставленной задачи напомним основной результат работы [7, теорема 1] для скалярного преобразования (4).

Теорема 1. Пусть для преобразования (4) выполнены условия (а)–(г). Если существует такой закон управления $u(t)$, что решение (б) ограничено, то $y(t) \subset \mathcal{Y}$.

Теорема 1 позволяет свести задачу управления (1) с ограничением по выходу (3) к задаче управления (6) без ограничения.

Зададим закон управления для объекта (1) в виде

$$u = -(\mathbf{L}\mathbf{B})^{-1} [K\varepsilon + \mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{x} + M\text{sign}(\varepsilon)\|\mathbf{L}\mathbf{G}\|\|\mathbf{x}\|], \quad (7)$$

где K — положительное число,

$$\text{sign}(\varepsilon) = \begin{cases} -\varepsilon, & \varepsilon < 0, \\ \varepsilon, & \varepsilon \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Далее сформулируем основной результат в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Допустим, что при преобразовании (4) выполнены условия (а)–(г), $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} > 0$ для любых ε и t . Пусть для заданного числа $c > 0$ существуют положительное число K и положительные коэффициенты τ_i , $i = 1, 2, 3$, такие что выполнены следующие неравенства:

$$\begin{bmatrix} -K + \tau_1 & \frac{1}{2}\mathbf{L}\mathbf{D} & -\frac{1}{2} \\ * & -\tau_2\mathbf{I} & \mathbf{O} \\ * & * & -\tau_3 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (9)$$

$$-2c\tau_1 + \bar{f}^2\tau_2 + \gamma^2\tau_3 \leq 0,$$

где "*" — симметричный блок симметричной матрицы; \mathbf{O} , \mathbf{I} — нулевая и единичная матрицы соответствующей размерности. Тогда закон управления (7) обеспечивает выполнение целевого условия (3).

Доказательство. Постановив закон управления (7) в (6), получим

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[-K\varepsilon - M\text{sign}(\varepsilon)\|\mathbf{L}\mathbf{G}\|\|\mathbf{x}\| + \mathbf{L}\mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{f} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right]. \quad (10)$$

Для исследования выражения (10) на устойчивость по вход–состоянию [12, 13] рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = \frac{1}{2}\varepsilon^2. \quad (11)$$

Найдем полную производную по времени от функции Ляпунова (11) вдоль решений (10):

$$\dot{V} = \varepsilon\dot{\varepsilon} = \varepsilon \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left[-K\varepsilon - M\text{sign}(\varepsilon)\|\mathbf{L}\mathbf{G}\|\|\mathbf{x}\| + \mathbf{L}\mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) + \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{f} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right]. \quad (12)$$

Потребуем выполнение условия

$$\dot{V} \leq 0 \quad (13)$$

при

$$V \geq c, \quad (14)$$

с учетом ограничений

$$|\mathbf{f}| \leq \bar{f}, \left| \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right| \leq \gamma. \quad (15)$$

Слагаемое $\left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} > 0$ не влияет на знак выражения (12). Принимая во внимание неравенство

$$\mathbf{L}\mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{L}\mathbf{G}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})| \leq \|\mathbf{L}\mathbf{G}\| |\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})| \leq \mathbf{M} \|\mathbf{L}\mathbf{G}\| |\mathbf{x}|,$$

перепишем условия (13)–(15) как

$$\varepsilon \left[-K\varepsilon + \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{f} - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right] \leq 0 \vee \left(\varepsilon, \mathbf{f}, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right): \quad (16)$$

$$\varepsilon^2 > c, \mathbf{f}^T \mathbf{f} \leq \bar{f}^2, \left(\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)^2 \leq \gamma^2.$$

Обозначив $\mathbf{z} = \text{col} \left\{ \varepsilon, \mathbf{f}, \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right\}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{l+2}$, перепишем (16) в матричном виде:

$$\mathbf{z}^T \begin{bmatrix} -K & \frac{1}{2} \mathbf{L}\mathbf{D} & -\frac{1}{2} \\ * & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} \leq 0;$$

$$\mathbf{z}^T \begin{bmatrix} -1 & \mathbf{O} & 0 \\ * & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} \leq -2c; \quad (17)$$

$$\mathbf{z}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{O} & 0 \\ * & I & \mathbf{O} \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} \leq \bar{f}^2;$$

$$\mathbf{z}^T \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{O} & 0 \\ * & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ * & * & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z} \leq \gamma^2.$$

Согласно S-процедуре [10, 14] и результатам работ [15, 16] для выполнения неравенств (17) необходимо выполнение (9). Следовательно, функция $\varepsilon(t)$ ограничена для любых t , и сигнал $\mathbf{x}(t)$ будет ограничен в силу ограниченности $\varepsilon(t)$, $\Phi(\varepsilon, t)$. Тогда управление (7) будет ограничено, и, с учетом теоремы 1, целевое условие (3) будет выполнено. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из соотношения (4) и ограниченности $\varepsilon(t)$ следует ограниченность $\mathbf{x}(t)$ независимо от того, гурвицева матрица \mathbf{A} или нет. Таким образом данный результат может применяться для неустойчивых объектов.

3. Численное моделирование

Рассмотрим объект (1) со следующими параметрами:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,1 & 2 & -3 \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{L} = [2 \quad 1 \quad 1];$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & -0,1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \sin \mathbf{x};$$

$$f(t) = 0,1 + \sin(3t) + \text{sat} \left(\frac{d(t)}{0,3} \right),$$

где $\text{sat}\{\cdot\}$ — функция насыщения; $d(t)$ — сигнал, моделируемый в MATLAB SIMULINK с помощью блока "Band-Limited White Noise" с мощностью шума и временем выборки 0,1.

Зададим $\Phi(\varepsilon, t)$ в виде

$$\Phi(\varepsilon, t) = \frac{\bar{g}(t)e^\varepsilon + g(t)}{e^\varepsilon + 1}. \quad (18)$$

Очевидно, что функция $\Phi(\varepsilon, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Действительно, так как $\bar{g}(t) > \underline{g}(t)$, то для любых ε и $t \geq 0$ имеем

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} = \frac{e^\varepsilon (\bar{g}(t) - g(t))}{(e^\varepsilon + 1)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} = \frac{\dot{\bar{g}}(t)e^\varepsilon + \dot{g}(t)}{e^\varepsilon + 1} <$$

$$< \max \left\{ \sup_{t \geq 0} \{ \dot{\bar{g}}(t) \}, \sup_{t \geq 0} \{ \dot{g}(t) \} \right\} = \gamma.$$

Параметры функции $\Phi(\varepsilon, t)$ зададим в виде

$$\bar{g}(t) = \begin{cases} -3 \cos t + 0,2, & t < 2\pi, \\ \cos t + 2,2, & t \geq 2\pi; \end{cases}$$

$$\underline{g}(t) = \begin{cases} 3 \cos t - 0,2, & t < 2\pi, \\ \cos t + 1,8, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

Воспользуемся пакетом YALMIP [17] и решателем SEDUMI [18] для решения неравенства (6). Для заданного числа $c = 100$ найдем $\tau_1 = 0,51$, $\tau_2 = 7,03$, $\tau_3 = 8,59$ и $K = 6,96$. Для заданного числа $c = 0,1$ найдем $\tau_1 = 1,32$, $\tau_2 = 4,05$, $\tau_3 = 7,92$ и $K = 55,62$.

Переходные процессы по $y(t)$, $u(t)$ при $\mathbf{x}(0) = \text{col} \left\{ \frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -1 \right\}$ при двух различных значениях $c = 100$ и $c = 0,1$ приведены на рис. 1 (см. третью сторону обложки). На рис. 2 приведен график возмущения $f(t)$.

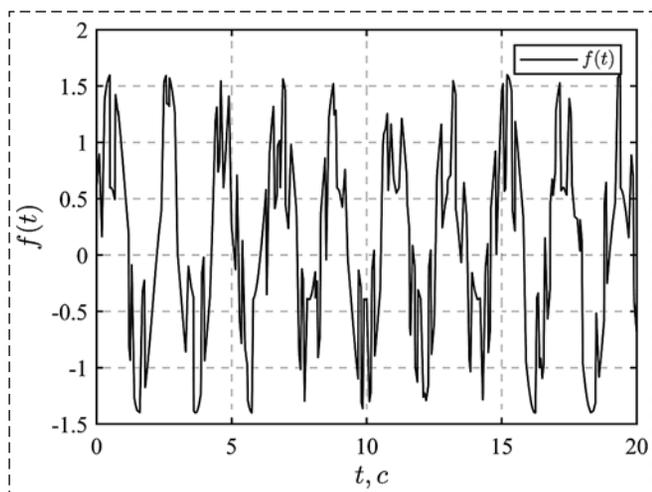


Рис. 2. Переходной процесс $f(t)$
Fig. 2. The transient of $f(t)$

Из рис. 1, а следует, что выходной сигнал не выходит из заданного множества, что удовлетворяет требованию поставленной задачи и согласуется с аналитическими выводами. Также отметим, что чем меньше значение c в условии (14), тем лучше закон управления подавляет влияние возмущения. Это объясняется тем, что траектория $\varepsilon(t)$ не покидает интервал $[-\sqrt{2c}; \sqrt{2c}]$ (см. доказательство теоремы 2). Отметим, что при уменьшении параметра c уменьшается длина отрезка $[-\sqrt{2c}; \sqrt{2c}]$, а значит, больше подавляются колебания в области $x(t)$ (рис. 1, а). Колебания сигнала управления $u(t)$ на рис. 1, б (см. третью сторону обложки), обусловлены наличием возмущения $f(t)$. Из рис. 1, б также видно, что для стабилизации системы в заданном множестве не требуется большого значения управляющего сигнала. В данном случае значение сигнала управления сопоставимо со значением возмущения.

Заключение

В статье предложен новый метод синтеза управления для систем с секторной нелинейностью и гарантией нахождения выходного сигнала в заданном множестве на основе метода, предложенного в работах [7–9], и техники ЛМН. Разработанный метод применяется в задаче управления объектом по состоянию в условиях неизвестных ограниченных возмущений. В отличие от работ [7–9] предложенный метод позволяет рассчитывать параметры регулятора с использованием линейных матричных неравенств, что расширяет применимость полученного метода на практике по сравнению с работами [7–9].

Результаты моделирования проиллюстрировали эффективность предложенного метода и подтвердили теоретические выводы.

Список литературы

1. Gupta S., Joshi S. M. Some properties and stability results for sector-bounded LTI systems // Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control. 1994. Vol. 3. P. 2973–2978. DOI: 10.1109/CDC.1994.411339.
2. Alvergue L., Gu G., Acharya S. A generalized sector bound approach to feedback stabilization of nonlinear control systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2012. Vol. 23. P. 1563–1580 DOI:10.1002/rnc.2843.
3. Churilov A. Stabilization of systems with sector bounded nonlinearity by a sawtooth sampled-data feedback // Cybernetics and Physics. 2019. Vol. 8. P. 222–227. DOI: 10.35470/2226-4116-2019-8-4-222-227.
4. Pendharkar I., Pillai H. Systems with sector bound nonlinearities: A behavioral approach // Systems & Control Letters. 2008. Vol. 57. P. 112–122. DOI: 10.1016/j.sysconle.2007.06.019.
5. Novara C., Canuto E., Carlucci D. Control of systems with sector-bounded nonlinearities: robust stability and command effort minimization by disturbance rejection // Control Theory and Technology. 2016. Vol. 14. P. 209–223. DOI: 10.1007/s11768-016-6017-6.
6. Gomes da Silva J. M., Castelan E. B., Corso J., Eckhard D. Dynamic output feedback stabilization for systems with sector-bounded nonlinearities and saturating actuators // Journal of the Franklin Institute. 2013. Vol. 350. P. 464–484. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2012.12.009.
7. Фуртат И. Б., Гушчин П. А. Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве // Автоматика и телемеханика. 2021. № 4. С. 121–139.
8. Furtat I., Gushchin P. Nonlinear feedback control providing plant output in given set // International Journal of Control. 2021. URL: <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>.
9. Furtat I., Gushchin P. Control of Dynamical Systems with Given Restrictions on Output Signal with Application to Linear Systems // IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, N. 2. P. 6384–6389.
10. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory // SIAM studies in applied mathematics. 1994. Vol. 15. 205 p.
11. Herrmann G., Turner M., Postlethwaite I. Linear matrix inequalities in control // Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control. Springer Nature. 2007. P. 123–142 (Lecture Notes in Control and Information Sciences).
12. Sontag E. Input to state stability: Basic concepts and results // Nonlinear and optimal control theory. Springer. 2008. P. 163–220.
13. Dashkovskiy S., Efimov D., Sontag E. Input to state stability and allied system properties // Automation and Remote Control. 2011. Vol. 72, N. 8. P. 1579–1614.
14. Fridman E. A refined input delay approach to sampled-data control // Automatica. 2010. V. 46. P. 421–427.
15. Furtat I. B. Robust Synchronization of the Structural Uncertainty Nonlinear Network with Delay and Disturbances // Proc. of the 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, July 3-5, 2013, Caen, France. P. 227–232.
16. Фуртат И. Б. Робастное управление электрическим генератором с компенсацией возмущений // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 5. С. 102–108.
17. Lofberg J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB // 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508). 2004. P. 284–289. DOI: 10.1109/CACSD.2004.1393890.
18. Sturm J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones // Optimization methods and software. 1999, Vol. 11. P. 625–653.

Control of Sector-Bound Systems with the Guarantee Output Signal in a Given Set

Ba Huy Nguyen, leningrat206@gmail.com, I. B. Furtat, cainenash@mail.ru,

Institute for Problems of Mechanical Engineering (RAS), Saint Petersburg, 199178, Russian Federation,
ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: **Furtat Igor**, Head of Lab at IPME RAS,
Saint Petersburg, 199178, Russian Federation, e-mail: cainenash@mail.ru

Accepted on February 24, 2022

Abstract

In this paper, we propose a new method for synthesizing the control of plants with sector-bound nonlinearity with a guarantee of finding the controlled signal in given set at any time under conditions of unknown bounded disturbances. The basis of the method consists of two stages. At the first stage, the coordinate transformation is used to reduce the original constrained problem to the problem of studying the input-to-state stability of a new extended system without constraints. Thus, any known control methods can now be applied to stabilize the system in new coordinates. At the same time, to achieve the goal, it is not required to reduce the value of the control error. It is enough to show its boundedness. At the second stage, a control law is synthesized for the extended system, where the adjustable parameter is selected from the solution of linear matrix inequalities. To illustrate the effectiveness of the proposed method, simulation in the MATLAB Simulink is given. The simulation results show the presence of controlled signals in the given set and the boundedness of all signals in the control system. It is shown that an increase the value of the gains in the control law improves the quality of disturbance attenuation that is consistent with theoretical results.

Keywords: nonlinear systems, sector nonlinearity, coordinate transformation, given set, unknown bounded disturbance, stability, linear matrix inequalities

Acknowledgements. The proposed method and the main result were obtained under the Russian Science Foundation Grant No. 18-79-10104-П at IPME RAS, <https://rscf.ru/en/project/18-79-10104/>. Numerical simulations were performed at RFBR grant No. 20-08-00610.

For citation:

Nguyen Ba Huy, Furtat I. B. Control of Sector-Bound Systems with the Guarantee Output Signal in a Given Set, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 7, pp. 351–355.

DOI: 10.17587/mau.23.351-355

References

1. Gupta S., Joshi S. M. Some properties and stability results for sector-bounded LTI systems, *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 1994, vol. 3, pp. 2973–2978.
2. Alvergue L., Gu G., Acharya S. A generalized sector bound approach to feedback stabilization of nonlinear control systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, vol. 23, pp. 1563–1580.
3. Churilov A. Stabilization of systems with sector bounded nonlinearity by a sawtooth sampled-data feedback, *Cybernetics and Physics*, 2019, vol. 8, pp. 222–227.
4. Pendharkar I., Pillai H. Systems with sector bound nonlinearities: A behavioral approach, *Systems & Control Letters*, 2008, vol. 57, pp. 112–122.
5. Novara C., Canuto E., Carlucci D. Control of systems with sector-bounded nonlinearities: robust stability and command effort minimization by disturbance rejection, *Control Theory and Technology*, 2016, vol. 14, pp. 209–223.
6. Gomes da Silva J. M., Castelan E. B., Corso J., Eckhard D. Dynamic output feedback stabilization for systems with sector-bounded nonlinearities and saturating actuators, *Journal of the Franklin Institute*, 2013, vol. 350, pp. 464–484.
7. Furtat I., Gushchin P. Control of dynamic plants with a guarantee of finding the regulated signal in a given set, *Automation and Remote Control*, 2021, no. 4, pp. 121–139 (in Russian).
8. Furtat I., Gushchin P. Nonlinear feedback control providing plant output in given set, *International Journal of Control*, 2021, available at: <https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1861336>.
9. Furtat I., Gushchin P. Control of Dynamical Systems with Given Restrictions on Output Signal with Application to Linear Systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2020, vol. 53, no. 2, pp. 6384–6389.
10. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, *SIAM studies in applied mathematics*, 1994, vol. 15, 205 p.
11. Herrmann G., Turner M., Postlethwaite I. Linear matrix inequalities in control, *Mathematical Methods for Robust and Nonlinear Control. Springer Nature*, 2007, pp. 123–142 (Lecture Notes in Control and Information Sciences).
12. Sontag E. Input to state stability: Basic concepts and results, *Nonlinear and optimal control theory*, Springer, 2008, pp. 163–220.
13. Dashkovskiy S., Efimov D., Sontag E. Input to state stability and allied system properties, *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, no. 8, pp. 1579–1614.
14. Fridman E. A refined input delay approach to sampled-data control, *Automatica*, 2010, vol. 46, pp. 421–427.
15. Furtat I. B. Robust Synchronization of the Structural Uncertainty Nonlinear Network with Delay and Disturbances, *Proc. of the 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, July 3–5, 2013, Caen, France, pp. 227–232.
16. Furtat I. B. Robust control of electric generator with compensation of perturbations, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2011, vol. 50, no. 5, pp. 785–792.
17. Lofberg J. YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*, 2004, pp. 284–289.
18. Sturm J. F. Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization methods and software*, 1999, vol. 11, pp. 625–653.

В. Б. Мелехин, д-р техн. наук, проф., pashka1602@rambler.ru,
Дагестанский государственный технический университет, г. Махачкала,
М. В. Хачумов, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., khmike@ribox.ru,
Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН,
Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, с. Вельхово, Ярославская обл.

Процедуры самообучения автономных интеллектуальных мобильных систем в нестабильных априори неописанных проблемных средах*

Решаются актуальные проблемы искусственного интеллекта, связанные с разработкой когнитивных инструментов наглядно-действенного мышления автономных интеллектуальных мобильных систем, обеспечивающих им возможность организации целесообразного поведения в априори неописанных проблемных средах. Разработан алгоритм самообучения с активно-пассивной логикой поведения, позволяющий интеллектуальным системам автоматически формировать условные программы целесообразного поведения, отражающие закономерности преобразования различных ситуаций априори неописанной, нестабильной проблемной среды. Характерной особенностью предложенного алгоритма самообучения является имитация отработки пробных действий в текущих условиях функционирования, что наделяет интеллектуальную систему способностью к изучению закономерностей проблемной среды без изменений в процессе самообучения текущих условий функционирования, которые могут быть не связаны с заданной целью целесообразного поведения. Для формального описания текущих ситуаций проблемной среды, а также условных сигналов, закрепляемых в формируемых условных программах целесообразного поведения, предложено использовать нечеткие семантические сети. Это позволяет автономным интеллектуальным мобильным системам накапливать опыт целесообразного поведения безотносительно к конкретной предметной области и переносить его в новые условия априори неописанной проблемной среды, аналогичные ранее изученным условиям функционирования. Найдены граничные оценки сложности алгоритмов самообучения, имеющие полиномиальную зависимость от числа вершин сравниваемых между собой нечетких семантических сетей в процессе самообучения и мощности множества обрабатываемых интеллектуальной системой пробных действий, представленных в ее памяти в виде фреймподобных нечетко заданных конструкций. Проведено имитационное моделирование целесообразного поведения автономных интеллектуальных систем, организованное на основе предложенного алгоритма самообучения, показавшее его работоспособность и эффективность использования для адаптации интеллектуальных систем к априори неописанным, нестабильным проблемным средам. Практическая значимость полученных результатов заключается в эффективности их использования для разработки решателей задач автономных интеллектуальных мобильных систем различного назначения, обеспечивающих возможность выполнения сложных заданий в априори неописанных реальных проблемных средах.

Ключевые слова: априори неописанная проблемная среда, автономная интеллектуальная система, нечеткая семантическая сеть, алгоритмы самообучения, условная программа целесообразного поведения

Введение

Актуальной проблемой искусственного интеллекта является разработка интеллектуально-го решателя задач для автономных интеллектуальных мобильных систем (АИМС), способных выполнять различные по сложности задания в априори неописанных условиях проблемной среды. Одним из подходов к решению данной проблемы является создание интеллектуального решателя задач, который обеспечивает АИМС возможность автоматического планирования

целесообразного поведения в априори неописанных проблемных средах на основе когнитивных инструментов наглядно-действенного мышления [1].

В основу построения когнитивных инструментов наглядно-действенного мышления АИМС закладывается формализация механизмов рефлекторного поведения живых систем, опирающихся на метод проб и ошибок, а также средства избирательности поступающей из проблемной среды информации [2, 3]. Полученные таким образом инструментальные средства позволяют АИМС выявлять результативные действия с точки зрения достижения текущей цели или подцели поведения при высоком уровне

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-10056, <http://rscf.ru/project/21-71-10056>.

априорной неопределенности условий функционирования. Иначе говоря, на основе наглядно-действенного мышления организуется целесообразная деятельность АИМС, которая опирается на информацию, поступающую из проблемной среды, обрабатываемые интеллектуальной системой пробные действия, а также на формальное описание условий успешной отработки различных пробных действий и получаемых на этой основе результатов [4].

Когнитивные инструменты наглядно-действенного мышления позволяют АИМС формировать условные программы целесообразной деятельности (УПЦД), представляющие собой упорядоченную последовательность следующих элементарных актов поведения:

$$a_{i_2}^1 \& b_{i_1}^1 \rightarrow a_{i_2}^2 \text{ и } a_{i_2}^1 \& b_{i_1}^1 \rightarrow c_{i_3},$$

где $b_{i_1} \in B$, $B = \{b_{i_1}\}$, $i_1 = \overline{1, n_1}$, — множество действий, обрабатываемых АИМС; $a_{i_2} \in A$, $A = \{a_{i_2}\}$, $i_2 = \overline{1, n_2}$, — множество сигналов, характерных для различных состояний проблемной среды; $c_{i_3} \in C$, $C = \{c_{i_3}\}$, $i_3 = \overline{1, n_3}$, — множество безусловных сигналов, определяемых исходя из функционального назначения АИМС.

Каждый элементарный акт поведения $a_{i_2}^1 \& b_{i_1}^1 \rightarrow a_{i_2}^2$ означает, что если АИМС наблюдает в проблемной среде условный сигнал $a_{i_2}^1 \in A$, то обрабатываемое ею действие $b_{i_1}^1 \in B$ приводит к появлению в ней условного сигнала $a_{i_2}^2 \in A$. Данные элементарные акты поведения закрепляются в формируемой УПЦД, если отработка интеллектуальной системой соответствующих им действий позволяет устранить одно из различий между текущей и целевой ситуациями проблемной среды.

Произвольный сигнал проблемной среды $a_{i_2} \in A$ приобретает статус условного сигнала и вызывает у АИМС входящие за ним в структуру УПЦД условные реакции после его закрепления в процессе самообучения в формируемой условной программе целесообразной деятельности. Что же касается появления в проблемной среде безусловных сигналов $c_{i_3} \in C$, то это сигнализирует АИМС о том, что в текущих условиях функционирования обеспечены необходимые условия для достижения соответствующей им подцели или цели поведения после выполнения определяемых этими сигналами безусловных реакций.

Необходимо отметить, что для формализации наглядно-действенного мышления и со-

ответствующего ему поведения АИМС можно использовать различные виды роевых [5–7] и генетических [8–10] алгоритмов, а также нейронные сети [11, 12], если их предварительно наделять подсистемой самообучения. Однако применение данных принципов организации наглядно-действенного мышления позволяет эффективным образом организовать целесообразную деятельность АИМС только на уровне безусловного поведения живых систем, так как в них не реализуются эффективные механизмы избирательности поступающей из проблемной среды информации и автоматического наращивания элементарных актов поведения в формируемых УПЦД.

Обойти данные недостатки позволяет применение ситуационного подхода к организации принятия решений [13] и различных алгоритмов самообучения, предусматривающих возможность имитации отработки пробных действий на основе формального описания модели текущей ситуации проблемной среды в виде нечеткой семантической сети [14]. Эффективность такого подхода к построению наглядно-действенного мышления АИМС обусловлена тем, что в этом случае процесс самообучения реализуется без внесения в текущее состояние проблемной среды изменений, возникающих в результате непосредственной отработки интеллектуальной системой пробных действий. Это позволяет избежать проблемы, связанной с тем, что непосредственно обрабатываемые пробные действия могут быть вообще не связанными с достижением заданной на текущий момент времени цели поведения и могут даже приводить в проблемной среде к изменениям, препятствующим выполнению полученного АИМС задания.

К инструментальным средствам наглядно-действенного мышления АИМС, лишенным недостатков рассмотренных выше различных принципов, на основе которых можно организовать целесообразное поведение интеллектуальных систем, следует отнести алгоритмы самообучения в априори неописанных проблемных средах с активной логикой поведения [4]. Однако такие алгоритмы не позволяют АИМС эффективным образом организовать самообучение в нестабильных проблемных средах, в которых происходят изменения текущих условий функционирования независимо от обрабатываемых интеллектуальной системой действий. В связи с этим возникает необходимость в разработке эффективного алгоритма само-

обучения, позволяющего организовать целесообразное поведение АИМС в нестабильных проблемных средах. Решению данной проблемы и посвящается настоящая статья, в которой предлагается эффективный алгоритм самообучения АИМС в нестабильной проблемной среде с активно-пассивной логикой поведения.

Постановка задачи

Рассмотрим АИМС, оснащенную моторной системой, манипулятором и техническим зрением, что обеспечивает интеллектуальной системе возможность обрабатывать множество различных действий $b_{i_1} \in B$ в текущих ситуациях проблемной среды $S_{i_4} \in S$, $S = \{S_{i_4}\}$, $i_4 = \overline{1, n_4}$, и наблюдать за происходящими изменениями на основе появляющихся в ней сигналов $a_{i_5} \in A$.

Отработка различных действий $b_{i_1} \in B$ позволяет АИМС передвигаться в проблемной среде и манипулировать находящимися в среде объектами $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$, $O = \{o_{i_5}(X_{i_5})\}$, $i_5 = \overline{1, n_5}$, где X_{i_5} — множество характеристик $o_{i_5}(X_{i_5})$ объекта среды, по которым интеллектуальная система способна его идентифицировать.

При этом принцип построения и технические характеристики перечисленных выше подсистем АИМС практически не оказывают влияния на организацию процесса планирования ее целесообразного поведения, а определяются функциональным назначением интеллектуальной системы или классом задач, на решение которых она ориентирована.

Пусть подсистема технического зрения АИМС обладает возможностью построения формального описания воспринимаемой в проблемной среде ситуации $S_{i_4} \in S$ в виде пассивной семантической сети $S_{i_4}^*$ [14]. Каждая такая сеть $S_{i_4}^*$ представляет собой помеченный граф:

$$G_{i_4} = (V_{i_4}, E_{i_4}),$$

где V_{i_4} — множество вершин, которые определяются находящимися в проблемной среде объектами $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$; E_{i_4} — множество ребер, помеченных количественными оценками $r_{i_6}^*$ отношений $r_{i_6} \in R$, $R = \{r_{i_6}\}$, $i_6 = \overline{1, n_6}$, которые сложились в проблемной среде между инцидентными им в семантической сети $S_{i_4}^*$ объектами и АИМС; R — множество различного вида отношений, которые могут выполняться между объектами и АИМС в проблемной среде.

Для имитации отработки пробных действий в процессе самообучения в текущих ситуациях проблемной среды, определяемых семантическими сетями $S_{i_4}^*$, каждое действие $b_{i_1} \in B$ в модели представления знаний АИМС имеет следующий формат описания:

<Идентификатор действия b_{i_1} , "вход $S_{i_1}^I$ ", "действие b_{i_1} ", "выход $S_{i_1}^P$ ">

где $S_{i_1}^I$ — активная нечеткая семантическая сеть, соответствующая подситуации, определяющей условия, которые должны выполняться в проблемной среде для результативной отработки действия $b_{i_1} \in B$; $S_{i_1}^P$ — активная нечеткая семантическая сеть, соответствующая подситуации, характеризующей изменения, происходящие в проблемной среде в результате отработки АИМС действия $b_{i_1} \in B$.

Семантические сети $S_{i_1}^I$ и $S_{i_1}^P$ описываются в модели представления знаний АИМС соответственно в виде помеченных графов:

$$G_{i_1}^I = (V_{i_1}^I, E_{i_1}^I) \text{ и } G_{i_1}^P = (V_{i_1}^P, E_{i_1}^P),$$

где $V_{i_1}^I = V_{i_1}^P$ — множества активных вершин, которые в нечетких семантических сетях $S_{i_1}^I$ и $S_{i_1}^P$ определяются слотами $x_{i_1}^{i_7}(X_{i_1}^{i_7})$ [14]; $E_{i_1}^I$ — множество ребер сети $S_{i_1}^I$, помеченных нечеткими значениями $r_{i_6}^{**} = \langle T_{i_6}^\delta, r_\delta^H, r_\delta^B \rangle$, $i_6 = \overline{1, n_6}$, $\delta = \overline{1, 5}$, отношений $r_{i_6} \in R$, позволяющими определять их количественные оценки $r_{i_6}^*$, которые должны выполняться в проблемной среде между объектами и АИМС для успешной отработки в среде действия $b_{i_1} \in B$; $E_{i_1}^P$ — множество ребер сети $S_{i_1}^P$, помеченных нечеткими значениями отношений $r_{i_6}^{**}$, которые позволяют описать в общем виде результаты отработки действий $b_{i_1} \in B$; $T_{i_6}^\delta$ — терм лингвистической переменной [15], название которой совпадает с названием отношения r_{i_6} ; r_δ^H, r_δ^B — соответственно нижняя и верхняя границы подынтервала численных значений термина $T_{i_6}^\delta$, в который должны попадать количественные оценки $r_{i_6}^*$ отношений r_{i_6} в текущих условиях функционирования для результативной отработки АИМС определенных действий $b_{i_1} \in B$; $X_{i_1}^{i_7}$ — множество характеристик, которыми должны обладать произвольные объекты проблемной среды $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$, чтобы ими была допустима пометка слотов $x_{i_1}^{i_7}(X_{i_1}^{i_7})$ в активных нечетких семантических сетях $G_{i_1}^I$ и $G_{i_1}^P$.

Необходимо отметить, что произвольный слот $x_{i_1}^{i_7}(X_{i_1}^{i_7})$ в сетях $S_{i_1}^I$ и $S_{i_1}^P$ может быть помечен объектом проблемной среды $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$ в текущих условиях функционирования тогда и только тогда, когда для этого объекта выполняется условие $X_{i_1}^{i_7} \subseteq X_{i_5}$. Например, чтобы АИМС могла захватить и поднять находящийся в проблемной среде объект $o_{i_5}(X_{i_5})$, он должен обладать весом, не превышающим грузоподъемность ее манипулятора, и иметь допустимые для его захвата габаритные размеры.

Семантические сети $S_{i_1}^I$ в процессе самообучения АИМС исполняют роль условных сигналов $a_{i_2} \in A$, а сети $S_{i_1}^P$, в зависимости от их содержания, могут быть как условными $a_{i_2} \in A$, так и безусловными сигналами $c_{i_3} \in C$.

Цель поведения задается АИМС в виде помеченного графа $G^{**} = (V^{**}, E^{**})$, соответствующего целевой подситуации проблемной среды $S_{i_4}^{**}$, где V^{**} — множество вершин, определяемых слотами $x_{i_1}^{i_7}(X_{i_1}^{i_7})$, которые позволяют АИМС установить объекты проблемной среды $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$, связанные с достижением заданной цели; E^{**} — множество ребер, помеченных нечеткими значениями $r_{i_6}^{**}$ отношений, которые характеризуют условия, определяющие достижение заданной цели поведения.

Основной операцией, которая выполняется над различными семантическими сетями в процессе имитации отработки пробных и выявления результативных действий $b_{i_1} \in B$, является определение нечеткого вложения одной сети в другую, например, активной нечеткой семантической сети $S_{i_1}^I$ в семантическую сеть $S_{i_4}^*$, определяющую текущие условия функционирования АИМС.

Определение 1. Активная нечеткая семантическая сеть $S_{i_1}^I$ является нечетко вложенной в семантическую сеть $S_{i_4}^*$, если для них выполняются следующие условия [16]:

1. Для каждой вершины $v_{i_8} \in V_{i_1}^I$, помеченной в сети $S_{i_1}^I$ слотом $x_{i_1}^{i_7}(X_{i_1}^{i_7})$, имеется структурно эквивалентная ей вершина $v_{i_9} \in V_{i_4}^*$, помеченная в сети $S_{i_4}^*$ объектом проблемной среды $o_{i_5}(X_{i_5})$, для которого выполняется условие $X_{i_1}^{i_7} \subseteq X_{i_5}$.

2. Для каждого ребра $e_{i_{10}} \in E_{i_1}^I$, помеченного в сети $S_{i_1}^I$ нечетким значением $r_{i_6}^{**} = \langle T_{i_6}^\delta, r_{i_6}^H, r_{i_6}^B \rangle$ отношения $r_{i_6} \in R$, имеется структурно эквивалентное ему ребро $e_{i_{11}} \in E_{i_4}^*$ в сети $S_{i_4}^*$, помеченное количественной оценкой $r_{i_6}^*$ этого отношения, для которой выполняется условие $r_{i_6}^* \in (r_{i_6}^H, r_{i_6}^B)$.

Если же в сравниваемых между собой семантических сетях $S_{i_1}^I$ и $S_{i_4}^*$ для одной из пар структурно эквивалентных ребер условие $r_{i_6}^* \in (r_{i_6}^H, r_{i_6}^B)$ не выполняется, то принимается решение о том, что между ними имеется различие по значениям соответствующего им отношения.

Определение 2. Активная нечеткая семантическая сеть $S_{i_1}^I$ является нечетко равной семантической сети $S_{i_4}^*$, если они являются структурно эквивалентными и для них выполняются пп. 1, 2 *определения 1*.

Таким образом, требуется разработать когнитивные инструменты, позволяющие организовать самообучение АИМС в априори неописанных нестабильных условиях поведения путем имитации отработки пробных действий, используя заданную модель текущей ситуации проблемной среды в виде пассивной нечеткой семантической сети. Данные инструменты должны обеспечивать АИМС возможность автоматического формирования УПЦД в процессе самообучения в динамической проблемной среде. Динамическая проблемная среда отличается от статической среды тем, что в ней в результате устойчиво повторяющихся событий могут происходить независимые от АИМС изменения, сопровождающиеся появлением в ней различных условных $a_{i_2} \in A$ и безусловных $c_{i_3} \in C$ сигналов.

Синтез алгоритма самообучения АИМС с активно-пассивной логикой поведения

В общем случае целесообразное поведение АИМС в априори неописанных условиях проблемной среды, организованное на основе когнитивных инструментов наглядно-действенного мышления, включает следующие три составляющие:

а) самообучение, которое сводится к изучению закономерностей целенаправленного преобразования различных ситуаций проблемной среды. В процессе самообучения АИМС формирует УПЦД, в которых учитываются происходящие в проблемной среде изменения и запоминаются в виде условных сигналов. Различные сигналы проблемной среды $a_{i_2} \in A$ в процессе самообучения приобретают роль условных или пусковых сигналов, побуждающих АИМС к отработке последовательности действий, закрепленной в УПЦД, если они

являются предвестниками появления в проблемной среде заданного на текущий момент времени безусловного сигнала $c_{i_3} \in C$;

б) условно рефлекторное поведение, реализуемое путем отработки в текущих условиях функционирования действий УПЦД для достижения соответствующих им безусловных сигналов при восприятии в проблемной среде закрепленных в них условных сигналов;

в) выполнение безусловных реакций после появления в проблемной среде соответствующих им безусловных сигналов.

Условные сигналы $a_{i_2} \in A$, закрепляемые в процессе самообучения в УПЦД, определяются в виде активных нечетких семантических сетей, соответствующих подситуациям $S_{i_1}^I$ и $S_{i_1}^P$. Такое представление условных и безусловных сигналов проблемной среды позволяет АИМС переносить накопленный опыт поведения в новые, априори не описанные условия функционирования, аналогичные ранее изученным в процессе самообучения условиям. Для этого необходимо и достаточно, чтобы:

— все слоты в активных нечетких семантических сетях $S_{i_1}^I$, определяющих условные сигналы $a_{i_2} \in A$, могли быть помечены объектами, находящимися в новых условиях функционирования АИМС;

— количественные оценки отношений между данными объектами в проблемной среде попадали в интервалы численных значений термов, которыми определяются одноименные с ними ребра в сетях $S_{i_1}^I$.

В общем случае процесс самообучения АИМС с активно-пассивной логикой поведения в нестабильной проблемной среде состоит из пассивной и активной фаз и может быть организован следующими способами.

1. Если в динамической проблемной среде самопроизвольные изменения происходят часто, например, в течение заданного промежутка времени T , то АИМС использует алгоритм самообучения с нестрогим чередованием пассивных и активных шагов целесообразного поведения. На первом шаге пассивной фазы этого алгоритма интеллектуальная система после наблюдения каждого нового изменения, происходящего в проблемной среде, осуществляет имитацию отработки пробных действий в целях формирования первого элементарного акта поведения $S_{i_1}^I \& b_{i_1} \rightarrow c_{i_3}$. Когда интеллектуальной системе в течение заданного про-

межутка времени T в пассивной фазе удастся сформировать данный элементарный акт поведения, она переходит на следующий пассивный шаг самообучения, подцелью которого является появление в проблемной среде условного сигнала $a_{i_2} \in A$, определяемого нечеткой семантической сетью $S_{i_1}^I$.

Если же в течение заданного промежутка времени T не будет закреплен в формируемой УПЦД новый элементарный акт поведения, то по истечении этого промежутка времени АИМС переходит к активной фазе самообучения. В этой фазе интеллектуальная система путем имитации пробных действий, используя формальное описание текущей ситуации проблемной среды в виде нечеткой семантической сети $S_{i_4}^*$, формирует условную программу целесообразной деятельности, связанную с достижением последнего закрепленного в пассивной фазе условного сигнала.

2. В случае, когда самопроизвольные изменения в проблемной среде происходят не часто, самообучение АИМС с активно-пассивной логикой поведения осуществляется на основе алгоритма со строгим чередованием активных и пассивных шагов целесообразной деятельности.

Приведем в качестве примера структурированное описание алгоритма самообучения с нестрогим чередованием активных и пассивных шагов самообучения АИМС в динамической проблемной среде с быстрой самопроизвольной сменой условий функционирования. В структурированном виде данный алгоритм самообучения можно представить следующим образом.

Исходные данные: заданный безусловный сигнал c_{i_3} ; формальное описание текущей ситуации проблемной среды в виде пассивной нечеткой семантической сети $S_{i_4}^*$; модель представления знаний, определяющая условия $S_{i_1}^I$ успешной отработки пробных действий $b_{i_1} \in B$ и результатов $S_{i_1}^P$ их выполнения в проблемной среде.

Промежуточные переменные: воспринимаемые в проблемной среде условные $a_{i_2} \in A$, и безусловные $c_{i_3} \in C$ сигналы; выявляемые в процессе самообучения элементарные акты поведения $a_{i_2}^{j_1} \& b_{i_1}^{j_1} \rightarrow a_{i_2}^{j_1+1}$ и $a_{i_2}^{j_1} \& b_{i_1}^{j_1} \rightarrow c_{i_3}$, где $a_{i_2}^{j_1} = S_{i_1}^I(j_1)$, $a_{i_2}^{j_1+1} = S_{i_1}^P(j_1+1)$, $c_{i_3} = S_{i_4}^C$.

Выходные переменные: формируемая условная программа целесообразной деятельности в виде следующей простой цепи:

$$S_{i_1}^I(1) \& b_{i_1}^1 \rightarrow S_{i_1}^P(1) \& b_{i_1}^2 \rightarrow \\ \rightarrow S_{i_1}^P(2) \& b_{i_1}^3 \rightarrow \dots \rightarrow \\ \rightarrow S_{i_1}^P(j_1) \& b_{i_1}^{j_1} \rightarrow \dots \rightarrow S_{i_1}^{\Pi},$$

где j_1 — индекс, соответствующий номеру последнего шага самообучения АИМС.

Начало.

1. Принять на первом шаге самообучения $j_2 = 1$.

2. Установить в качестве подцели на текущем шаге самообучения появление в проблемной среде сигнала, определяемого активной нечеткой семантической сетью $S_{i_4}^T$ (на первом шаге самообучения $S_{i_4}^T = S_{i_4}^{\Pi}$), где $S_{i_4}^{\Pi}$ — активная нечеткая семантическая сеть, определяющая формальное описание заданного безусловного сигнала c_{i_3} .

3. Сформировать формальное описание текущей ситуации проблемной среды в виде пассивной нечеткой семантической сети $S_{i_4}^*$. Построить нечеткую семантическую сеть $S_{i_4}^{*\Pi}$, определяющую целевую ситуацию проблемной среды, привязанную к текущим условиям функционирования. Для этого выполнить в семантической сети $S_{i_4}^*$ замену:

— слотов объектами, находящимися в проблемной среде;

— значений ее отношений на биективно соответствующие им значения отношений в нечеткой семантической сети $S_{i_4}^{\Pi}$.

4. Проверить условие "все вершины в сети $S_{i_4}^{*\Pi}$ помечены объектами проблемной среды": если условие выполняется, то перейти к п. 5; в противном случае перейти к п. 26.

5. Приступить к самообучению в пассивной фазе изучения закономерностей преобразования текущей ситуации проблемной среды, проводя наблюдение за изменениями, происходящими в текущих условиях функционирования.

6. Проверить условие "в текущей ситуации проблемной среды, определяемой пассивной нечеткой семантической сетью $S_{i_4}^*$, в течение промежутка времени T произошли самопроизвольные изменения": если условие выполняется, то перейти к п. 8; в противном случае перейти к п. 7.

7. Приостановить процесс изучения закономерностей проблемной среды пассивным образом, перейти к п. 16.

8. Зафиксировать изменения, произошедшие в проблемной среде, и внести их в формальное описание текущих условий функционирования

в $S_{i_4}^*$, получив, таким образом, формальное описание полученной ситуации проблемной среды в виде семантической сети $S_{i_4}^{**}$.

9. Проверить условие "нечеткая семантическая сеть $S_{i_4}^T$ является нечетко вложенной в семантическую сеть $S_{i_4}^{**}$ ": если условие выполняется, то перейти к п.10; в противном случае перейти к п. 12.

10. Проверить условие "подцель текущего шага самообучения определяется заданным безусловным сигналом c_{i_3} ": если условие выполняется, то перейти к п.11; в противном случае перейти к п. 12.

11. Отработать безусловные реакции, соответствующие сигналу c_{i_3} . Проверить условие "в изменившихся условиях проблемной среды требуется повторное достижение заданной цели поведения": если условие выполняется, перейти к п. 2, в противном случае перейти к п. 27.

12. Отработать действия, закрепленные в формируемой условной программе целесообразного поведения, и безусловные реакции, соответствующие заданному безусловному сигналу c_{i_3} .

Проверить условие "в изменившихся условиях проблемной среды требуется повторное достижение заданной цели поведения": если условие выполняется, то в качестве подцели поведения $S_{i_4}^T$ на следующем $j_2 = j_2 + 1$ шаге самообучения принять последний закрепленный в формируемой условной программе целесообразного поведения условный сигнал $S_{i_1}^I(j_2)$, перейти к п. 13; в противном случае перейти к п. 27.

13. Проверить условие "заданное множество действий B включает действие $b_{i_1}^{j_1}$, у которого "входная" подситуация $S_{i_1}^I(j_1)$ является нечетко вложенной в описание текущей ситуации проблемной среды $S_{i_4}^{**}$, а "выходная" подситуация $S_{i_1}^P(j_1)$ этого действия является либо нечетко вложенной, либо нечетко равной заданной на текущем шаге самообучения подцели поведения $S_{i_4}^T$ ": если условие выполняется, то перейти к п. 14; в противном случае, если такое действие отсутствует во множестве действий B , то перейти к п. 6.

14. Принять в качестве подцели поведения $S_{i_4}^T$ на следующем $j_1 = j_1 + 1$ шаге самообучения условный сигнал $S_{i_1}^I(j_1)$.

15. Сохранить в формируемой условной программе целесообразного поведения элементарный акт поведения $S_{i_1}^I(j_1) \& b_{i_1}^{j_1} \rightarrow S_{i_1}^P(j_1)$; принять $j_1 = j_1 + 1$, перейти к п. 5.

16. Приступить к самообучению в активной фазе целесообразного поведения, связанному с выявлением закономерностей преобразования текущей ситуации проблемной среды $S_{i_4}^{**}$ в целях появления в ней заданного сигнала $S_{i_4}^T$.

17. Определить на текущем j_1 -м шаге самообучения случайным образом пробное действие $b_{i_1}^{j_1}$ согласно равномерному закону распределения вероятностей его выбора во множестве действий B .

18. Проверить условие "вход $S_{i_1}^I(j_1)$ действия $b_{i_1}^{j_1}$ является нечетко вложенным в нечеткую семантическую сеть $S_{i_4}^{**}$ ": если условие выполняется, то перейти к п. 20; в противном случае исключить действие $b_{i_1}^{j_1}$ из числа результативных действий на текущем шаге самообучения, перейти к п. 19.

19. Проверить условие " $j_1 = n_1$ ": если условие выполняется, то перейти к п. 5; в противном случае принять $j_1 = j_1 + 1$, перейти к п. 17.

20. Выполнить замену значений отношений в нечеткой семантической сети $S_{i_4}^{**}$ на значения биективно соответствующих им одноименных отношений в "выходе" $S_{i_1}^P(j_1)$ пробного действия $b_{i_1}^{j_1}$. Таким образом сформировать нечеткую семантическую сеть $S_{i_4}^{*P}$.

21. Проверить условие "семантическая сеть $S_{i_4}^T$ является нечетко вложенной в семантическую сеть $S_{i_4}^{*P}$ ": если условие выполняется, то перейти к п. 22; в противном случае перейти к п. 23.

22. Закрепить в формируемой условной программе целесообразной деятельности элементарный акт поведения $S_{i_1}^I(j_1) \& b_{i_1}^{j_1} \rightarrow S_{i_1}^P(j_1)$. Принять в качестве текущей подцели поведения $S_{i_8}^T$ условный сигнал $S_{i_1}^I(j_1)$; $j_1 = j_1 + 1$, перейти к п. 5.

23. Определить все различия между семантическими сетями в следующих парах: $\langle S_{i_4}^{**}, S_{i_4}^{*Ц} \rangle$ и $\langle S_{i_4}^{*P}, S_{i_4}^{*Ц} \rangle$.

24. Проверить условие "число различий между семантическими сетями $S_{i_4}^{**}$ и $S_{i_4}^{*Ц}$ больше числа различий между сетями $S_{i_4}^{*P}$ и $S_{i_4}^{*Ц}$ ": если условие выполняется, то перейти к п. 25; в противном случае исключить действие $b_{i_1}^{j_1}$ из числа результативных действий на текущем шаге самообучения, перейти к п. 17.

25. Закрепить в формируемой условной программе целесообразной деятельности элементарный акт поведения $S_{i_1}^I(j_1) \& b_{i_1}^{j_1} \rightarrow S_{i_1}^P(j_1)$. Принять в качестве текущей подцели поведения $S_{i_4}^T$ условный сигнал $S_{i_1}^I(j_1)$, перейти к п. 5.

26. Достигнуть цели в текущих условиях проблемной среды не представляется возможным, так как в ней отсутствуют необходимые для этого объекты.

27. Конец.

Необходимо отметить, что в приведенном алгоритме самообучения промежуток времени T пассивного наблюдения АИМС за самопроизвольными изменениями, происходящими в текущих условиях функционирования, может определяться, например, исходя из среднего суммарного времени отработки всех допустимых пробных действий в текущих условиях проблемной среды.

Введем понятие функциональной сложности β алгоритма самообучения АИМС, под которой следует понимать число элементарных сравнений между собой пометок различных семантических сетей в процессе выработки УПЦД. В этом случае для рассмотренного выше алгоритма самообучения с активно-пассивной логикой поведения можно доказать следующее утверждение.

Утверждение. Функциональная сложность β алгоритма самообучения с активно-пассивной логикой с нестрогим чередованием пассивных и активных шагов целесообразного поведения имеет следующие граничные оценки:

$$4(n_7 + n_8)n_9^2 \leq \beta \leq 4n_1(n_7 + n_8)n_9^2,$$

где n_7, n_8 — число шагов самообучения, выполненных АИМС, соответственно, в пассивной и активной фазах целесообразного поведения; n_9 — число вершин в семантической сети $S_{i_4}^*$, имеющей максимальную размерность среди всех сравниваемых между собой в процессе самообучения нечетких семантических сетей; n_1 — число обрабатываемых АИМС разнообразных действий или мощность множества B .

Доказательство. 1. Алгоритм самообучения с активно-пассивной логикой поведения включает две фазы: пассивную (пп. 5—15) и активную (пп. 16—25) фазы целесообразного поведения.

2. В процессе самообучения сравниваются между собой семантические сети, которые представляют собой помеченные графы. Следовательно, число элементарных операций сравнения между собой пометок вершин и ребер различных нечетких семантических сетей имеет сложность порядка $O(n_9^2)$.

3. На каждом шаге пассивной фазы самообучения согласно п. 11 алгоритма самообуче-

ния с активно-пассивной логикой поведения, в лучшем случае, результативное действие b_i^j может быть выбрано первым, в худшем случае — последним. Следовательно, в первом случае АИМС на каждом шаге пассивного самообучения выбирает и имитирует отработку одного пробного действия, а во втором случае — n_1 пробных действий. При этом на каждом шаге пассивной фазы самообучения согласно пп. 9, 10, 13 выполняется по 4 сравнения между собой различных семантических сетей. Следовательно, согласно п. 2 проводимого доказательства нижняя граничная оценка функциональной сложности β алгоритма самообучения в пассивной фазе будет определяться величиной, равной $4n_7n_9^2$, а верхняя — величиной, равной $4n_1n_7n_9^2$.

4. Для активной фазы граничные оценки функциональной сложности алгоритма самообучения с активно-пассивной логикой поведения определяются исходя из следующих соображений.

Согласно пп. 17–19 алгоритма самообучения с активно-пассивной логикой поведения вполне вероятно, что в лучшем случае на каждом j_1 активном шаге самообучения АИМС результативное действие b_i^j случайным образом может быть выбрано первым, а в худшем случае — последним. Следовательно, в первом случае АИМС на каждом шаге активного самообучения выбирает и имитирует отработку одного пробного действия, а во втором случае — n_1 пробных действий.

На каждом шаге активной фазы самообучения (см. пп. 18, 21, 23) проводится 4 сравнения между собой различных семантических сетей. Следовательно, согласно п. 2 проводимого доказательства нижнее граничное значение оценки сложности β в активной фазе самообучения может быть не менее величины, равной $4n_8n_9^2$, а верхнее — не более величины, равной $4n_1n_8n_9^2$.

Из пп.1–4 проведенного доказательства с очевидностью следует справедливость сформулированного **утверждения**: функциональная сложность β алгоритма самообучения с активно-пассивной логикой с нестрогим чередованием пассивных и активных шагов целесообразного поведения имеет граничные оценки $4(n_7 + n_8)n_9^2 \leq \beta \leq 4n_1(n_7 + n_8)n_9^2$.

Таким образом, предложенный алгоритм самообучения имеет полиномиальную функциональную сложность, что обеспечивает возможность его эффективной реализации на

бортовой ЭВМ интеллектуального решателя задач АИМС.

Пример. Поясним инструменты выбора и имитации АИМС результативных действий в процессе самообучения на примере пассивной фазы целесообразного поведения. Пусть АИМС в нестабильных условиях функционирования для достижения текущей подцели поведения требуется перенести объект $o_1(X_1)$ и поставить его на другой объект $o_2(X_2)$ в ситуации проблемной среды, показанной на рис. 1. В приведенной на рис. 1 исходной ситуации проблемной среды в зоне разрешающей способности технического зрения АИМС за пределами рабочей зоны ее манипулятора, равной 1 м, расположены три объекта $o_1(X_1)$, $o_2(X_2)$ и $o_3(X_3)$. При этом объект $o_3(X_3)$ является подвижным и в текущий момент времени загораживает проход АИМС к объекту $o_1(X_1)$.

Таким образом, для решения сформулированной выше задачи АИМС требуется выполнить преобразование текущей ситуации проблемной среды (рис. 1) в целевую ситуацию, приведенную на рис. 2.

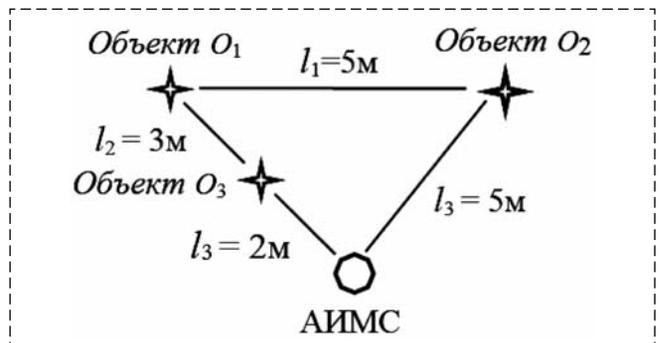


Рис. 1. Семантическая сеть S_i^* , соответствующая исходной ситуации проблемной среды $S_i^* \in S$

Fig. 1. Semantic network S_i^* corresponding to the initial situation of the problem environment $S_i^* \in S$

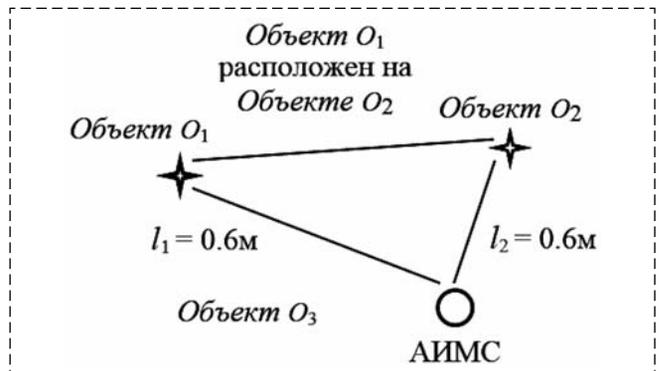


Рис. 2. Семантическая сеть S_i^* , определяющая заданную АИМС целевую ситуацию проблемной среды

Fig. 2. Semantic network S_i^* that defines the target

Допустим, что в общем случае в процессе самообучения на основе алгоритма с активно-пассивной логикой поведения АИМС может обрабатывать следующие действия.

1. $\langle S_1^И, b_1, S_1^P \rangle$ — подойти к объекту $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$, где $S_1^И$ — подситуация, представленная в виде активной нечеткой семантической сети, определяющей условия, которые должны выполняться в проблемной среде для результативной отработки АИМС действия b_1 . В данной подситуации между объектом $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$, находящимся в проблемной среде, и АИМС выполняется следующее отношение: $r_{i_6} = \langle T_{i_6}^2, r_{i_6}^H, r_{i_6}^B \rangle$.

Здесь r_{i_6} — расстояние между АИМС и объектом проблемной среды; $T_{i_6}^2$ — терм «близко» лингвистической переменной «Расстояние между АИМС и объектом проблемной среды», определяющий расстояния соответствующие разрешающей способности технического зрения интеллектуальной системы; $r_{i_6}^H$ и $r_{i_6}^B$ — соответственно нижняя и верхняя граничные оценки интервала численных значений термина $T_{i_6}^2$; S_1^P — подситуация проблемной среды, в которую преобразуется подситуация $S_1^И$ в результате отработки АИМС действия b_1 . В подситуации S_1^P допустимые расстояния между АИМС и объектом $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$ определяются термом $T_{i_6}^1$ «рядом», которые соответствуют рабочей зоне манипулятора интеллектуальной системы.

2. $\langle S_2^И, b_2, S_2^P \rangle$ — захватить и перенести объект $o_{i_5}^1(X_{i_5}^1) \in O$ к объекту $o_{i_5}^2(X_{i_5}^2) \in O$, где $S_2^И$ — подситуация, согласно которой находящийся в проблемной среде объект $o_1(X_1)$ должен располагаться «рядом» с АИМС и удовлетворять условию $X_{i_5}^1 \subseteq X_1$; S_2^P — подситуация, в которой объект $o_1(X_1)$ находится в рабочем органе манипулятора АИМС, а объект $o_2(X_2)$ расположен «рядом» с интеллектуальной системой и удовлетворяет условию $X_{i_5}^2 \subseteq X_2$.

3. $\langle S_3^И, b_3, S_3^P \rangle$ — подойти к объекту $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$ и обойти его, где $S_3^И$ — подситуация, в которой объект $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$ расположен «близко» и находится на пути целенаправленного движения АИМС; S_3^P — подситуация, соответствующая условию, когда АИМС обошла объект $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$, и он больше не препятствует ее движению вперед.

4. $\langle S_4^И, b_4, S_4^P \rangle$ — поставить объект $o_{i_5}^1(X_{i_5}^1) \in O$ на объект $o_{i_5}^2(X_{i_5}^2) \in O$, где $S_4^И$ — подситуация проблемной среды, в которой объект $o_{i_5}^1(X_{i_5}^1)$ находится в рабочем органе манипулятора

АИМС, а объект $o_{i_5}^2(X_{i_5}^2)$ расположен «рядом» с ней; S_4^P — подситуация, в которой АИМС, а также объекты $o_{i_5}^1(X_{i_5}^1)$ и $o_{i_5}^2(X_{i_5}^2)$ находятся «рядом», а объект $o_{i_5}^1(X_{i_5}^1)$ расположен на объекте $o_{i_5}^2(X_{i_5}^2)$.

5. $\langle S_5^И, b_5, S_5^P \rangle$ — снять объект $o_{i_5}^1(X_{i_5}^1) \in O$ с объекта $o_{i_5}^2(X_{i_5}^2) \in O$, где $S_5^И$ — подситуация проблемной среды, в которой АИМС, а также объекты $o_{i_5}^1(X_{i_5}^1)$ и $o_{i_5}^2(X_{i_5}^2)$ находятся «рядом», и объект $o_{i_5}^1(X_{i_5}^1)$ расположен на объекте $o_{i_5}^2(X_{i_5}^2)$; S_5^P — подситуация, в которой АИМС, а также объекты $o_{i_5}^1(X_{i_5}^1)$ и $o_{i_5}^2(X_{i_5}^2)$ расположены «рядом», и объект $o_{i_5}^1(X_{i_5}^1)$ находится в рабочем органе манипулятора интеллектуальной системы.

6. $\langle S_6^И, b_6, S_6^P \rangle$ — отойти от объекта $o_{i_5}(X_{i_5}) \in O$, где $S_6^И$ — подситуация проблемной среды, в которой АИМС и объект $o_{i_5}(X_{i_5})$ расположены «рядом»; S_6^P — подситуация, в которой АИМС и объект $o_{i_5}(X_{i_5})$ находятся на расстоянии «близко» друг от друга.

В рассмотренных выше условиях проблемной среды в формируемой условной программе целесообразного поведения на первом шаге самообучения запоминается следующий элементарный акт поведения: $S_1^И \& b_1 \rightarrow S_1^P$. Это обусловлено тем, что только активная нечеткая семантическая сеть $S_1^И$ в исходной ситуации проблемной среды является нечетко вложенной в сеть $S_{i_4}^*$, а число различий между сетями $S_{i_1}^И$ и $S_{i_4}^{**}$ превышает число различий между сетями $S_{i_1}^P$ и $S_{i_4}^*$. Справедливость данного утверждения с очевидностью следует из того, что после отработки действия b_1 АИМС окажется «рядом» с объектом $o_1(X_1)$ (рис. 2).

Резюмируя вышеизложенное, отметим, что предложенные инструментальные средства наглядно-действенного мышления позволяют организовать интеллектуальный решатель задач АИМС, наделяющий интеллектуальные системы способностью к самообучению и целесообразному поведению в априори неопределенных проблемных средах с высоким уровнем неопределенности.

Заключение

1. Формализация мыслительных актов рефлексивного поведения высокоразвитых живых систем и организованный на этой основе знаково-сигнальный принцип управления целесообразным поведением технических систем яв-

ляются одним из перспективных направлений создания АИМС различного назначения, способных эффективным образом действовать и решать поставленные перед ними задачи в нестабильных, априори неописанных условиях функционирования.

2. Предложенные когнитивные инструменты наглядно-действенного мышления позволяют организовать различные виды целесообразной деятельности АИМС в априори неописанных условиях проблемной среды. Построенные на их основе алгоритмы самообучения обладают полиномиальной сложностью, что обеспечивает возможность их эффективной реализации в бортовом интеллектуальном решателе задач различных по назначению и функциональным возможностям АИМС.

3. Разработанный алгоритм самообучения обеспечивает возможность АИМС определять связь между различными происходящими в проблемной среде изменениями и отрабатываемыми действиями, а также изучать на этой основе закономерности преобразования различных ситуаций сложных, априори неописанных, нестабильных условий функционирования.

4. Использование нечетких семантических сетей для описания безотносительно к конкретной предметной области условных и безусловных сигналов позволяет АИМС накапливать опыт поведения в различных условиях функционирования, а затем переносить его в новые априори неописанные условия проблемной среды, аналогичные ранее исследованным условиям функционирования.

Список литературы

1. Мелехин В. Б., Хачумов М. В. Формы мышления автономных интеллектуальных агентов: особенности и проблемы

их организации // Морские интеллектуальные технологии. 2020. № 4 — 1(50). С. 223—229. DOI: 10.37220/MIT.2020.4.031.

2. Брайнес С. Н., Напалков А. Н., Свечинский В. Б. Нейрокибернетика. М.: Госмедиздат, 1962. 172 с.

3. Шингаров Г. Х. Условные рефлексы и проблема знака и значения. М.: Наука, 1986. 200 с.

4. Мелехин В. Б., Хачумов М. В. Инструментальные средства управления целесообразным поведением самоорганизующихся автономных интеллектуальных агентов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22, № 4. С. 171—180.

5. Кулинич А. А., Карпов В. Э., Карпова И. П. Социальные сообщества роботов. М.: URSS, ООО "ЛЕНАНД", 2019. 352 с.

6. Zhu B., Xie L., Han D., Meng X., Teo R. A survey on recent progress in control of swarm systems // Science China Information Sciences. 2017. Vol. 60, N. 7. Article 070201.

7. Boxin Guan, Tiantian Xu, Yuhai Zhao, Yuan Li, Xiangjun Dong. A random grouping-based self-regulating artificial bee colony algorithm for interactive feature detection // Knowledge-Based Systems. 2021. Vol. 241. Article 108434.

8. Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. и др. Биопиринированные методы в оптимизации. М.: Физматлит, 2009. 384 с.

9. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. М.: Горячая линия-Телеком, 2008. 452 с.

10. Могилев А. А., Курейчик В. М. Модифицированный генетический алгоритм планирования процессов, реализованный с использованием облачных вычислений // Известия южного Федерального университета. Технические науки. 2020. № 2 (212). С. 157—159.

11. Кудирин А. А., Николенко С. И. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей. СПб.: Питер, 2018. 476 с.

12. Shuang Bai, Congcong Wang. Information aggregation and fusion in deep neural networks for object interaction exploration for semantic segmentation // Knowledge-Based Systems. 2021. Vol. 218. Article 106843.

13. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Ситуационный подход в автоматизации управления техническими объектами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 9. С. 562—178.

14. Мелехин В. Б., Хачумов М. В. Нечеткие семантические сети как адаптивная модель представления знаний автономных интеллектуальных систем // Искусственный интеллект и принятие решений. 2020. № 3. С. 61—72.

15. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.

16. Melekhin V. B., Khachumov M. V. Planning polyphasic behavior of autonomous intelligent mobile systems in uncertain environments // Information and Control Systems. 2021. № 4 (113). С. 28—36.

Procedures for Self-Learning of Autonomous Intelligent Mobile Systems in Unstable a Priori Undescribed Problematic Environments

V. B. Melekhin, pashka1602@rambler.ru,

Dagestan State Technical University, Makhachkala, 367015, Russian Federation,

M. V. Khachumov, khmike@inbox.ru,

Federal Research Center "Computer Science and Control", Moscow, 117313, Russian Federation,

Program Systems Institute of the Russian Academy of Sciences, Veskovo, 152021, Russian Federation

Corresponding author: Melekhin Vladimir B., D. Sc., Professor, Makhachkala, 367015, Russian Federation, e-mail: pashka1602@rambler.ru

Abstract

The article deals with topical problems of artificial intelligence related to the development of cognitive tools for visual-effective thinking of autonomous intelligent mobile systems, which provide them with the possibility of organizing expedient behavior in a priori undescribed problematic environments. A self-learning algorithm with an active-passive logic of behavior has been developed that allows intelligent systems to automatically generate conditional programs of expedient behavior that reflect the patterns of transformation of various situations of an a priori undescribed, unstable problem environment. A characteristic feature of the proposed self-learning algorithm is the imitation of testing trial actions in the current operating conditions, which gives the intelligent system the ability to study the patterns of the problem environment without changing the current operating conditions during the self-learning process, which may not be related to the specified goal of expedient behavior. For a formal description of the current situations of the problem environment, as well as conditional signals fixed in the generated conditional programs of expedient behavior, it is proposed to use fuzzy semantic networks. This allows autonomous intelligent mobile systems to accumulate experience of expedient behavior regardless of a specific subject area and transfer it to new conditions of an a priori undescribed problem environment, similar to the previously studied operating conditions. Boundary estimates of the complexity of self-learning algorithms are found that have a polynomial dependence on the number of vertices of fuzzy semantic networks compared with each other in the process of self-learning and the power of the set of trial actions worked out by the intelligent system, represented in its memory in the form of frame-like fuzzy specified structures. A simulation of the expedient behavior of autonomous intelligent systems was carried out, organized on the basis of the proposed self-learning algorithm, which showed its efficiency and effectiveness in adapting intelligent systems to a priori undescribed, unstable problem environments. The practical significance of the results obtained lies in the effectiveness of their use for the development of problem solvers for autonomous intelligent mobile systems for various purposes, which provide the ability to perform complex tasks in a priori undescribed real problem environments.

Keywords: a priori undescribed problem environment, autonomous intelligent system, fuzzy semantic network, self-learning algorithms, conditional program of expedient behavior.

Acknowledgements: This study was supported by the Russian Science Foundation, Grant number 21-71-10056 (<http://rscf.ru/cn/project/21-71-10056/>).

For citation:

Melekhin V. B., Khachumov M. V. Procedures for Self-Learning of Autonomous Intelligent Mobile Systems in Unstable a Priori Undescribed Problematic Environments, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 7, pp. 356—366.

DOI: 10.17587/mau.23.356-366

References

1. **Melekhin V. B., Hachumov M. V.** Formy myshleniya avtonomnyh intellektual'nyh agentov: osobennosti i problemy ih organizatsii, *Morskoe intellektual'nye tekhnologii*, 2020, no. 4—1(50), pp. 223—229 (in Russian).
2. **Brajnes S. N., Napalkov A. N., Svechinskij V. B.** Nejrokibernetika, Moscow, Gosmedizdat, 1962, 172 p. (In Russian).
3. **Shingarov G. H.** Uslovnye refleksy i problema znaka i znacheniya, Moscow, Nauka, 1986, 200 p. (in Russian).
4. **Melekhin V. B., Hachumov M. V.** Instrumental'nye sredstva upravleniya celesoobraznym povedeniem samoorganizuyushchihsvya avtonomnyh intellektual'nyh agentov, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 4, pp. 171—180 (in Russian).
5. **Kulinich A. A., Karpov V. E., Karpova I. P.** Social'nye soobshchestva robotov. Moscow, URSS, OOO "LENAND", 2019, 352 p. (in Russian).
6. **Zhu B., Xie L., Han D., Meng X., Teo R.** A survey on recent progress in control of swarm systems, *Science China Information Sciences*, 2017, vol. 60, no. 7, Article 070201.
7. **Boxin Guan, Tiantian Xu, Yuhai Zhao, Yuan Li, Xiangjun Dong.** A random grouping-based self-regulating artificial bee colony algorithm for interactive feature detection, *Knowledge-Based Systems*, 2021, vol. 241, Article 108434.
8. **Gladkov L. A., Kurejchik V. V., Kurejchik V. M.** et al. Bio-inspirirovannyye metody v optimizatsii. Moscow, Fizmatlit, 2009, 384 p. (in Russian).
9. **Rutkovskaya D., Pilin'skij M., Rutkovskij L.** Nejronnye seti, geneticheskie algoritmy i nechetkie sistemy, 2-e izd. Moscju, Goryachaya liniya-Telekom, 2008, 452 p. (in Russian).
10. **Mogilev A. A., Kurejchik V. M.** Modificirovannyj geneticheskij algoritm planirovaniya processov, realizovannyj s ispol'zovaniem oblačnyh vychislenij, *Izvestiya yuzhnogo Federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2020, no. 2 (212), pp. 157—159 (in Russian).
11. **Kudirin A. A., Nikolenko S. I.** Glubokoe obuchenie. Pogruzenie v mir nejronnyh setej, Sankt-Peterburg, Piter, 2018, 476 p. (in Russian).
12. **Shuang Bai, Congcong Wang.** Information aggregation and fusion in deep neural networks for object interaction exploration for semantic segmentation, *Knowledge-Based Systems*, 2021, vol. 218, Article 106843.
13. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Situacionnyj podhod v avtomatizatsii upravleniya tekhnicheskimi ob'ektami, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol.19, no. 9, pp. 562—178 (in Russian).
14. **Melekhin V. B., Hachumov M. V.** Nechetkie semanticheskie seti kak adaptivnaya model' predstavleniya znanij avtonomnyh intellektual'nyh sistem, *Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij*, 2020, no. 3, pp. 61—72 (in Russian).
15. **Zade L.** Ponyatie lingvisticheskoy peremennoj i ego primenenie k prinyatiyu priblizhennyh reshenij, Moscow, Mir, 1976, 165 p.
16. **Melekhin V. B., Khachumov M. V.** Planning polyphasic behavior of autonomous intelligent mobile systems in uncertain environments, *Information and Control Systems*, 2021, no. 4 (113), pp. 28—36 (in Russian).

M. Alhelou, Postgraduate Student, muhammed.alhelou@gmail.com,
Y. Wassouf, Postgraduate Student, vassufya@student.bmstu.ru,
V. V. Serebrenny, Cand. Tech. Sc., Professor, vsereb@bmstu.ru,
A. I. Gavrilov, Cand. Tech. Sc., Associate Professor, alexgavrilov@mail.ru,
E. S. Lobusov, Cand. Tech. Sc., Associate Professor, evgeny.lobusov@yandex.ru,
 Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation

Corresponding author: Alhelou Muhammed, Postgraduate Student, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation, e-mail: muhammed.alhelou@gmail.com

Accepted on April 12, 2022

Managing the Handling-Comfort Trade-Off of a Quarter Car Suspension System using Active Disturbance Rejection Control and Vyshnegradsky Equation

Abstract

In this paper, we tackle the handling-comfort conflicting problem of a quarter-car system using Active Disturbance Rejection Control (ADRC). ADRC parameters are tuned using Vyshnegradsky equations which determine the stability criteria of a third order system. To do this, a multi-objective optimization procedure for selection of ADRC observer coefficients is formulated using a genetic algorithm. Suspension deflection and sprung mass acceleration responses are tested to a random road disturbance input. Simulation results show that the compromised solution between handling and comfort can be achieved by introducing the sprung mass acceleration into the feedback loop of ADRC. Using this approach allows for improving the issue of comfort up to 50 percent with just 10 percent worse performance of the issue of handling.

Keywords: Vyshnegradsky chart, NSGA-II, multi-objective optimization, comfort, handling

For citation:

Alhelou M., Wassouf Y., Serebrenny V. V., Gavrilov A. I., Lobusov E. S. Managing the Handling-Comfort Trade-Off of a Quarter Car Suspension System using Active Disturbance Rejection Control and Vyshnegradsky Equation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 7, pp. 367-375.

DOI: 10.17587/mau.23.367-375

УДК 621.396.988.6:629.19

DOI: 10.17587/mau.23.367-375

М. Алхелу, аспирант, muhammed.alhelou@gmail.com, **Я. Вассуф**, аспирант, vassufya@student.bmstu.ru,
В. В. Серебряный, канд. техн. наук, проф., vsereb@bmstu.ru,
А. И. Гаврилов, канд. техн. наук, доц., alexgavrilov@mail.ru,
Е. С. Лобусов, канд. техн. наук, доц., evgeny.lobusov@yandex.ru
 МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва

Управление компромиссом между управляемостью и комфортом системы подвески типа "четверть автомобиля" с использованием активного управления подавлением помех и уравнения Вышнеградского

Рассматривается проблема конфликта управляемости и комфорта в модели типа "четверть автомобиля", использующей систему активного управления подавлением помех (АУПП). Параметры системы АУПП настраиваются с использованием уравнений Вышнеградского, которые определяют критерии устойчивости системы третьего порядка. Для этого с использованием генетического алгоритма сформулирована процедура многоцелевой оптимизации для выбора коэффициентов наблюдателя системы АУПП. Проверяется реакция подвески на прогиб и ускорение поддрессоренной массы при случайной дорожной помехе. Результаты моделирования показывают, что компромисс между управляемостью и комфортом может быть достигнут путем введения ускорения поддрессоренной массы в контур обратной связи системы АУПП. Использование этого подхода позволяет повысить уровень комфорта до 50 % при ухудшении управляемости всего на 10 %.

Ключевые слова: диаграмма Вышнеградского, nsga-ii, многоцелевая оптимизация, комфорт, управляемость

Introduction

The car suspension system refers to a set of mechanical components that connect the wheels to the frame or the body. The suspension transfers to the supporting frame the forces and moments arising from the interaction of the wheels with the road. It provides the required character of the movement of the wheels relative to the frame, as well as the necessary smoothness. Suspension systems can be classified into three main categories: passive, semi-active and active. Passive suspensions include mainly the springs and shock absorbers. Semi-active depends on the changing of the shock absorber geometry so it could change its damping efficiency according to driving conditions. Semi-active damper could be seen as orifice-based damper or Magnetorheological fluid-based damper. Active suspension includes additional damping parts (new damping geometry). It could be seen as slow active or full active.

Problem statement

When the car moves along a disturbed road with wheel resonances, significant vertical reactions to the road disturbances could appear. This makes the car bounce up and down and makes the ride uncomfortable and arises what is so-called a *ride comfort problem*. When the wheel encounters a bump or pothole it experiences a larger reaction force, sometimes large enough to make the tire lose contact with the road surface, which means losing the road holding and arises what is so-called a *road-holding problem*. When the wheels of the car poorly come into contact with the road surface or in the opposite condition, tightly contacted to it, the car control becomes difficult. Here arises the *problem of handling*, which is considered a situation in between the two problems of ride-comfort and road-holding. The three mentioned problems conflict with each other. Vehicle suspension control should be a compromise between these conflicting objectives.

Related works

Several works [1–8] claimed that automotive suspension designs are usually compromise between road handling and passenger comfort. Suspension system must provide good quality control of the car (handling problem), and isolate passenger as far as possible from road disturbances (comfort problem). Good handling requires stiff suspension and good comfort requires soft suspension. Traditionally,

many approaches to suspension designs are proposed to manage the trade-off between comfort and handling problems. One of these approaches [9] is the optimization of the passive suspension system coefficients using a genetic algorithm. However, physical limitations prevent passive suspension from achieving the best performances for both targets. Other approaches [10–12, 23–26, 28–30, 33] used active suspension system to enhance the optimization process while others used the semi-active suspension system [27, 31–32]. However, not many Active Disturbance Rejection Control (ADRC) approaches are proposed over years to manage the conflicting problem between handling and comfort.

Some works [13–15] proposed ADRC to stabilize the vehicle body attitude using a decoupling strategy. Many researches [16, 17] used ADRC to enhance the performance of only the ride comfort, while others [3, 18] used ADRC parameters optimization to provide a good efficiency of the system design.

Known stability criteria (Hurwitz, Routh) look for sufficient coefficients that make the system dynamic stable but do not give a direct indication to the transient process quality. Whereas, Vyshnegradsky chart allows the monitoring of the two features at the same time. It allows the selection of an area in which the coefficients may vary and shows how the quality of the transient process may change. In addition, the work on the Vyshnegradsky chart allows for easier tuning of a third order system coefficients while maintaining its stability. As a result, changing coefficients using a genetic algorithms becomes easier and more visible.

Contributions

In this paper, we propose a new approach to manage the contradiction between the problem of handling and the problem of comfort in a slow active suspension. The new approach is based on the off-line optimization of the parameters of an ADRC. To do this, observer coefficients of a second order linear ADRC are determined using the NSGA-II multi-objective genetic algorithm [19] based on system performance monitoring on a Vyshingraddsky chart. The ability to manage the handling-comfort contradiction is tested by changing the observer coefficients within a wide space of the Vyshnegradsky chart.

Quarter-car slow active suspension system

The suspension system, shown in Fig. 1, represents the vehicle system at each wheel. It consists of

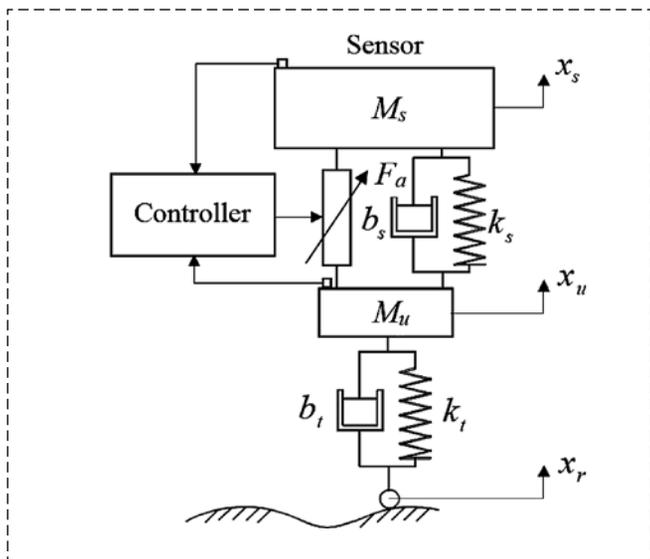


Fig. 1. Quarter-car slow active suspension system

Table 1

Approximated values of the quarter-car slow active system parameters

Parameter	Unit	Value	Parameter	Unit	Value
M_s	kg	300	k_t	N/m	180 000
M_u	kg	50	b_s	Ns/m	1200
k_s	N/m	18 000	b_t	Ns/m	0

a spring with stiffness k_s , a damper with damping coefficient b_s and a hydraulic actuator with acting force F_a .

The coefficient k_t represents tire stiffness and b_t represents tire damping. The effective vehicle body mass is shown by M_s (sprung mass), and M_u (unsprung mass) represents the effective equivalent mass to the wheel and axle. States x_u , x_s represent the vertical displacements from the static equilibrium for M_u and M_s respectively. The road profile is represented by x_r . The suspension travel $x_s - x_u$ is measured and compared to the set point ($r = 0$). The required actuator force is determined by the controller to eliminate the error, and thus, to reduce the vehicle oscillations. The actuator can provide a maximum force of 1500 N.

Table 1 shows the values of the slow active suspension system parameters [16].

The vibration model of the sprung and unsprung masses can be expressed in the following dynamic equations:

$$\begin{aligned}
 M_u \ddot{x}_u &= k_s(x_s - x_u) + b_s(\dot{x}_s - \dot{x}_u) - \\
 &\quad - k_t(x_u - x_r) - b_t(\dot{x}_u - \dot{x}_r) - F_a; \\
 M_s \ddot{x}_s &= -k_s(x_s - x_u) - b_s(\dot{x}_s - \dot{x}_u) + F_a.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

In this paper, the ADRC is proposed to replace the control part in Fig. 1. The sensors used in this configuration are: a potentiometer sensor that measures the suspension deflection $x_s - x_u$ and an accelerometer that measures the sprung mass acceleration \ddot{x}_s .

Conventional second order linear active disturbance rejection controller

The ADRC is a data-driven technique intended to transcend the complexity of traditional methods, like proportional-integral-derivative (PID). This technique is inherited from PID, and can be considered as a robust control approach, as it represents all the unknown dynamics that are not included in the mathematical model of the controlled system, and compensates for the modeling uncertainties and external perturbations in real time [20]. In general, ADRC is classified into linear and nonlinear depending on the linearity or nonlinearity of its components (mainly the observer and the controller). The linear ADRC is a process that aims to reject the unknown internal dynamics of a plant and the external disturbances in real time. It depends on forcing the controlled plant to behave as an n -order integrator system which is easily controlled by a PD controller, even if the plant is nonlinear and time-variant. The conventional observer used in a linear ADRC is the Luenberger observer. The order of the linear ADRC depends on the number of integrations (n) that the ADRC forces the system to act as (e.g. $n = 2$ means second order ADRC).

Fig. 2 shows the contents of a linear ADRC structure. It consists of two main loops: the con-

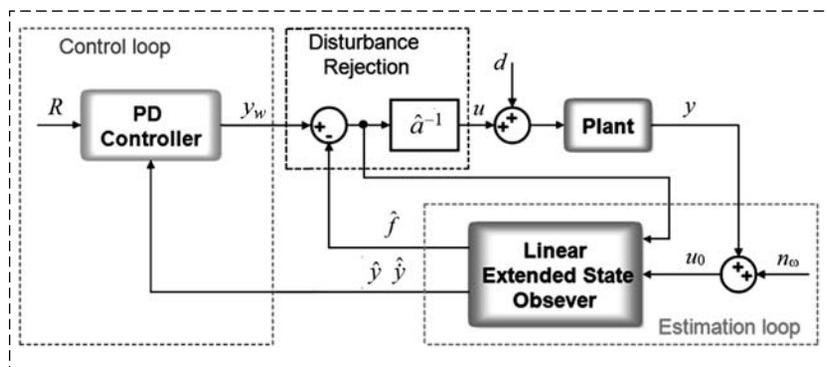


Fig. 2. Contents of a linear ADRC structure

trol loop and the estimation loop. It contains three main blocks: the controller, the estimator (Extended State Observer (ESO)) and a disturbance rejection scheme. In Fig. 2, u_0 is the pre-control signal, u is the final control signal, d is an input disturbance, n_w is the output sensor noise, R is the reference signal, \hat{f} is the estimated general system disturbance, y_w is the noised output, \hat{a} is an estimation value of the system gain, and $\hat{y}, \dot{\hat{y}}$ are the estimated output and its velocity respectively.

Extended State Observer

The idea behind the ESO is that to capture the information about the generalized disturbances (uncertainties and external disturbances (\hat{f})) and the internal dynamics of the system ($\hat{y}, \dot{\hat{y}}$).

System dynamics can be expressed in the general form:

$$\dot{y} = g(t, y, \dot{y}) + au + w, \quad (2)$$

where y is the output signal, u is the control input, $g(\cdot)$ is the dynamic of the plant (including unknown dynamics), w is the external disturbance, and a is the system coefficient. All parts of this dynamic ($g(\cdot)$, a , w) are usually not precisely known. By combining the external and the internal disturbances in one *general disturbance function* $f(\cdot)$, the dynamics can be written as:

$$\dot{y} = f(t, y, \dot{y}, w) + au, \quad (3)$$

which has the following state space representation:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= f + au; \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (4)$$

The general disturbance $f(\cdot)$ is augmented to the states in the following way:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_3 + au; \\ \dot{x}_3 &= \dot{f}(t, x_1, x_2, w); \\ y &= x_1. \end{aligned} \quad (5)$$

This can be expressed in vector matrix form as:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_x x + B_x u + E_x \dot{f}; \\ y &= C_x x, \end{aligned} \quad (6)$$

where the matrices A_x , B_x , C_x , E_x are defined as the following:

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_x = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$$C_x = [1 \ 0 \ 0]; \quad E_x = [0 \ 0 \ 1]^T.$$

A linear ESO (LESO; e.g. Luenberger) can be used here to estimate the states x_1, x_2, x_3 . This way, LESO can be designed to be:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 + \alpha_1 \hat{e}; \\ \dot{z}_2 &= z_3 + au + \alpha_2 \hat{e}; \\ \dot{z}_3 &= \alpha_3 \hat{e}, \end{aligned} \quad (8)$$

where z_1, z_2 , and z_3 are the estimated values of x_1, x_2 , and x_3 respectively, α_1, α_2 , and α_3 are the observer gains, and $\hat{e} = y - z_1$ is the estimated error of x_2 . \hat{a} is an estimated value for a in equation (2) and it can be chosen in this structure empirically. The estimated variables ($\hat{y} = z_1, \dot{\hat{y}} = z_2, \hat{f} = z_3$) besides the estimated value \hat{a} are then used to eliminate the disturbance and control the system as shown in Fig. 2.

Disturbance rejection scheme

The disturbance rejection scheme can be defined as:

$$u = \frac{u_0 - z_3}{\hat{a}} = \frac{u_0 - \hat{f}}{a}, \quad (9)$$

where u_0 is the controller output. Returning to equation (3) and replacing u by its estimated value:

$$\dot{y} = f(\cdot) + a \left(\frac{u_0 - \hat{f}}{\hat{a}} \right). \quad (10)$$

If the estimation $\hat{a} \approx a$ is realistic and the estimator is good enough to consider that $\hat{f} \approx f$, then the plant could be written as a second order integrator:

$$\dot{y} \approx u_0. \quad (11)$$

Feedback controller

If a proportional-derivative (PD) controller is used as a feedback controller, then the control signal u_0 can be written in the following form:

$$u_0(t) = K_p (y_{ref} - \hat{y}) + K_d \dot{\hat{y}}. \quad (12)$$

The PD gains can be chosen as follows:

$$K_p = w_{CL}^2; \quad K_d = -2\xi w_{CL}, \quad (13)$$

where K_p is the proportional gain, K_d is the derivative gain, $-w_{CL}$ is the desired closed loop pole and ξ is the desired damping coefficient of the closed loop. The observer pole, $-w_{ESO}$ should be placed N times to the left of the controlled system close loop pole to ensure that the dynamics of the observer are fast enough, where $N \in [3, 10]$, i.e. $w_{ESO} = -Nw_{CL}$.

In this paper, all the observer poles are placed in one location for simplicity. That means that the characteristic equation of the observer will be:

$$D(\lambda) = (\lambda + w_{ESO})^3 = \lambda^3 + 3w_{ESO}\lambda^2 + 3w_{ESO}^2\lambda + w_{ESO}^3 \quad (14)$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are calculated by solving the equation:

$$D(\lambda) = |sI - A_x + LC_x|; \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

As a result, the estimator gains can be chosen as:

$$\alpha_1 = 3w_{ESO}; \quad \alpha_2 = 3w_{ESO}^2; \quad \alpha_3 = w_{ESO}^3. \quad (16)$$

In this article, we rely on the selection of the observer coefficients by performing a *multi-objective optimization* process using a genetic algorithm. The optimization process requires choosing the three observer coefficients, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, so that in each iteration two performance indicators are performed, the first related to comfort and the second related to handling. Thus, the optimization process will take place in three-dimensional (3D) space. If the *Vyshnegradsky* equation is used to determine the variable range of the observer's coefficients, this allows the optimization problem to be transferred from 3D space to 2D space, thus facilitating the process of selecting the appropriate parameters.

Vyshnegradsky equation

The stability conditions of a third-order system were first formulated by Vyshnegrad in 1876, before the Hurwitz criterion appeared in 1895. Consider the third-order characteristic equation:

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (17)$$

It could be brought to a normalized form by dividing all its coefficients by a_3 and introduce a new variable:

$$q = \lambda\sqrt[3]{a_0a_3^{-1}}. \quad (18)$$

As a result, we obtain the normalized equation:

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0, \quad (19)$$

where the coefficients: $A = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_0^2a_3}}$; $B = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_0a_3^2}}$ are

called the parameters of Vyshnegrad. On the plane of parameters A and B , we draw the stability boundary. The stability conditions are $A > 0$; $B > 0$; $AB > 1$. The equation of the boundary of stability (oscillatory) $AB = 1$; for $A > 0$; $B > 0$.

Multi-objective optimization

The main task in multi-objective optimization is to find a design vector $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ that minimizes a fitness function $F(X) = \{f_1(X), f_2(X), \dots, f_m(X)\}^T$, subject to p inequality and q equality constraints, respectively, in addition to the boundaries of the design vector elements:

$$\begin{aligned} P_i(X) &\leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; \\ Q_j(X) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, q; \\ x_k^{(L)} &\leq x_k \leq x_k^{(U)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (20)$$

It has been stated in [21] that in order to implement multi-objective optimization into any design, a multi-objective optimization design procedure should be carried out. This procedure is based on three main steps:

1. the definition of multi-objective optimization problem (objectives, decision variables and constrains);
2. the multi-objective optimization process (search);
3. the multi-criteria decision making stage (analysis and selection).

For points (2, 3), we use NSGA-II optimization algorithm, which attempts to solve problems of the following forms:

$$\min_X F(X) \quad \text{subject to} \quad LB \leq X \leq UB. \quad (21)$$

Where $F(X)$ is the objective function, X is the objective vector, LB is the lower boundary of the objective variables and UB is the upper boundary of the objective variables.

The proposed ADRC to manage the handling-comfort contradiction

An ADRC in its traditional form, single input and single output, is unable to manage the contradiction between handling and comfort by optimizing its observer coefficients. This is due to the need of using feedback from the two contradicted issues to the controller, not only monitoring them. The ADRC, in its traditional form, will consider only one input (suspension deflection) while the management process requires feedback of two performance indicators (suspension deflection and sprung mass acceleration). In the following we propose a new ADRC that considers the two issues of contradiction into one scheme.

Fig. 3 shows the proposed ADRC scheme to improve system performance with respect to comfort problem. In this scheme, y is the suspension deflection, b_a is the sprung mass acceleration and K_a is a control coefficient.

In Fig. 3, the closed loop transfer function from the sprung-mass acceleration input b_a to the estimated suspension deflection z_1 can be found as follows:

Equation (8) can be reformulated as:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - \alpha_1 z_1 + \alpha_1 y; \\ \dot{z}_2 &= z_3 + \hat{a}u + \alpha_2 y - \alpha_2 z_1; \\ \dot{z}_3 &= \alpha_3 y - \alpha_3 z_1. \end{aligned} \quad (22)$$

And can be represented in state-space as:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{a} \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} y. \quad (23)$$

While the whole control signal can be written as:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\hat{a}}(-K_p z_1 - K_d z_2 - K_a b_a - z_3) = \\ &= \frac{1}{\hat{a}} \begin{pmatrix} -K_p & -K_d & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \frac{K_a}{\hat{a}} b_a. \end{aligned} \quad (24)$$

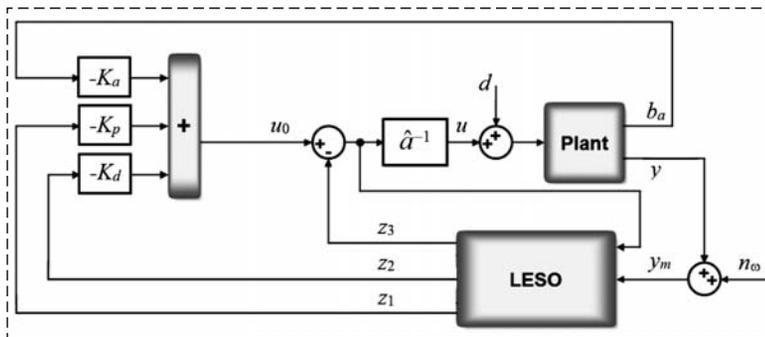


Fig. 3. Proposed ADRC scheme

Substituting equation (24) into equation (23):

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 \\ -\alpha_2 - K_p & -K_d & 0 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ K_a \\ 0 \end{pmatrix} b_a + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} y. \quad (25)$$

Returning to the sprung mass equation (second part of equation (1)) we get:

$$\begin{aligned} M_s b_a &= -K_s y - C_s \dot{y} + u \\ &= -K_s y - C_s \dot{y} - \frac{1}{\hat{a}}(K_p z_1 + K_d z_2 + z_3). \end{aligned} \quad (26)$$

Equation (26) can be reformulated to the following:

$$\dot{y} = -\frac{K_s}{C_s} y - \frac{M_s}{C_s} b_a - \frac{1}{C_s \hat{a}}(K_p z_1 + K_d z_2 + z_3). \quad (27)$$

Thus equation (25) can be extended to the following:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 - K_p & -K_d & 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ -\frac{K_p}{C_s \hat{a}} & -\frac{K_d}{C_s \hat{a}} & -\frac{1}{C_s \hat{a}} & -\frac{K_s}{C_s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ K_a \\ 0 \\ \frac{M_s}{C_s} \end{pmatrix} b_a. \quad (28)$$

If we chose $\frac{1}{\hat{a}C_s} = X_a$, then equation (28) can be written as:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ -\alpha_2 - K_p & -K_d & 0 & \alpha_2 \\ -\alpha_3 & 0 & 0 & \alpha_3 \\ -X_a K_p & -X_a K_d & -X_a & -\frac{K_s}{C_s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ K_a \\ 0 \\ \frac{M_s}{C_s} \end{pmatrix} b_a. \quad (29)$$

The output from b_a to y can be written as:

$$y = \frac{-M_s s^3 + (C_s K_a K_d X_a - K_d M_s - M_s \alpha_1) s^2 + \sum_1 s - C_s K_a \alpha_3 X_a}{C_s s^4 + (K_s + C_s \alpha_1 + C_s K_d) s^3 + \Pi_1 s^2 + \Pi_2 s + C_s K_p \alpha_3} b_a;$$

$$\sum_1 = (C_s K_a K_p X_a - K_p M_s - M_s \alpha_2 - K_d M_s \alpha_1 + C_s K_a K_d \alpha_1 X_a);$$

$$\Pi_1 = C_s \alpha_2 + C_s \alpha_3 + K_s \alpha_1 + C_s K_p + K_d K_s + (30) + C_s K_d \alpha_1 + C_s K_d \alpha_2 + C_s K_p \alpha_1;$$

$$\Pi_2 = K_s \alpha_2 + K_p K_s + C_s K_d \alpha_3 + C_s K_p \alpha_2 + K_d K_s \alpha_1.$$

The necessary and insufficient condition for stability is that all terms of the numerator are negative, thus if $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, K_p, K_d$ are all positive then $K_a > 0$,

$$K_a < \frac{M_s}{C_s X_a} \left(1 + \frac{\alpha_1}{K_d} \right)$$

and

$$K_a < \frac{M_s}{C_s X_a} \frac{K_p + \alpha_2 + K_d \alpha_1}{K_p + K_d \alpha_1}$$

are the minimal conditions for stability.

The design of conventional suspension is focused on obtaining a good compromise between comfort and handling. To do this, two main cost functions are introduced:

◀ The root mean square (RMS) value of the vertical body acceleration reached by the vehicle, representing the analysis index of the comfort.

$$f_1 = RMS(\ddot{x}_s). \quad (31)$$

◀ The RMS value of suspension deflection, representing the analysis index of the handling.

$$f_2 = RMS(x_s - x_u). \quad (32)$$

Hence the whole cost function will be $F(X) = [f_1(X), f_2(X)]$.

Returning to equation (14), we can write the observer characteristic equation as:

$$\lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3 = 0. \quad (33)$$

This equation is similar to equation (17) for $a_0 = 1$. Therefore, this will correspond to a Vyshnegradsky equation with:

$$A = \frac{\alpha_1}{\sqrt[3]{\alpha_3}}; \quad B = \frac{\alpha_2}{\sqrt[3]{\alpha_3^2}}. \quad (34)$$

If α_3 is chosen as constant between 1 and a sufficient positive number (as example 343), A and B are chosen from Vyshnegradsky chart so the ESO has a sufficient performance and the cutoff frequency w_c is chosen to be in a sufficient range, then α_1, α_2 can be calculated to have the best response of the closed loop system:

$$\alpha_1 = A \sqrt[3]{\alpha_3}; \quad \alpha_2 = B \sqrt[3]{\alpha_3^2}. \quad (35)$$

This way, the optimization vector X can be chosen as:

$$X = [A, B, \alpha_3, w_c, K_a]. \quad (36)$$

To simplify the search space, A and B can be tested in the range [1, 15]. Closed loop cutoff frequency w_c can be tested on a range that reflects the bandwidth of the actuator used (for example, for a slow active suspension system the control system is able to filter out noise up to 5 rad/s). For simplicity we'll let w_c change in the range [0.1, 5] rad/s and α_3 is chosen to vary in the range [1, 343]. If as mentioned before $\hat{a} \approx 0.001$, this mean that $0 < K_a < 0,32$ is a sufficient changing range for K_a .

Using NSGA-II as a multi-objective optimization algorithm that considers the two cost functions f_1 and f_2 , the boundaries of the optimization vector can be chosen as:

$$LB = [1, 1, 1, 0.1, 0.01], \quad (37)$$

$$UB = [15, 15, 343, 5, 0.32].$$

Simulations

Simulation is divided into two parts. The first part tests the ability of conventional ADRC, that considers only the suspension deflection, to solve handling-comfort problem. The second verifies this ability by introducing the sprung mass acceleration in the feedback loop. Simulation blocks are built in MATLAB and a random filtered disturbance, which has clear physical meaning and easy computing character, is used as in [22]:

$$\dot{q}(t) = -2\pi f_0 q(t) + 2\pi n_0 \sqrt{G_q(n_0)} v w(t), \quad (38)$$

where $q(t)$ is the random road input signal, f_0 is the filter lower-cut-off frequency, $G_q(n_0)$ is the road roughness coefficient and $w(t)$ is a Gaussian white noise. We will consider an integration filter ($f_0 = 0$),

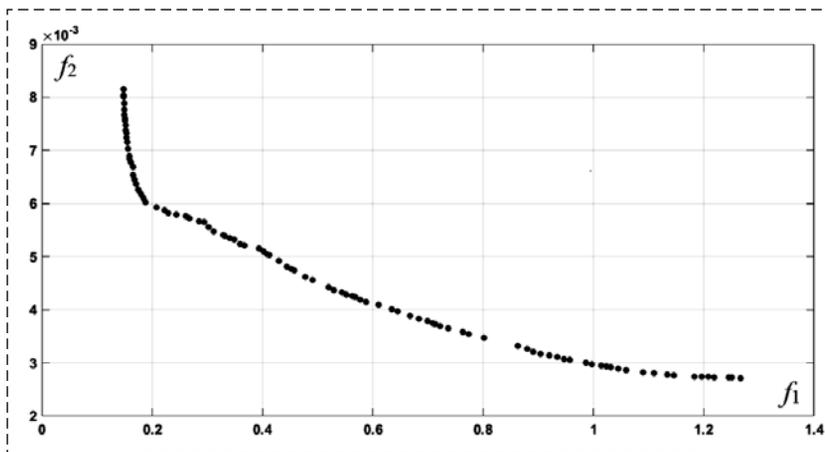


Fig. 4 Min-Min Pareto solution for f_1 vs f_2

the vehicle speed is $v = 54$ Km/h and it is driving on a class D road for which $G_q(n_0) = 1024 \cdot 10^{-6}$ (See [22]).

NSGA-II multi-objective optimization is used to verify ADRC performance in the presence of the two conflicting cost functions. Population size is chosen 100 and the number of iterations 100. At the end of the searching process we get 100 sub-optimal solutions.

Fig. 4 shows the min-min Pareto solution of the issue of contradiction between the fitness function f_1 and the fitness function f_2 during optimization process. Fig. 5 (see the third side of the cover) and Fig. 6 (see the third side of the cover) show the suspension deflection and the sprung mass acceleration for the best comfort solution for which $[A, B, \alpha_3, w_c, K_a] = [2.19, 4.71, 330.47, 0.1, 0.32]$. Fig. 7 (see the third side of the cover) and Fig. 8 (see the third side of the cover) show the suspension deflection and the sprung mass acceleration for the best handling solution for which $[A, B, \alpha_3, w_c, K_a] = [1.17, 14.23, 329.6, 4.88, 0]$. Table 2 shows the RMS values of the suspension deflection and the sprung mass acceleration for the corresponding solutions.

It could be seen from the previous figures and Table 2 that, introducing of the sprung mass acceleration in the feedback loop has helped the ADRC to

Table 2

RMS values of the suspension deflection and the sprung mass acceleration for the corresponding solutions

Parameter	Handling (RMS)	Comfort (RMS)	Passive (RMS)
Sprung mass acceleration	1.25	0.156	0.363
Suspension deflection	0.0027	0.007	0.0059

manage the handling-comfort contradiction effectively. ADRC can improve the comfort problem up to 50 percent at the expense of the regression of the handling problem up to 10 percent, but in the opposite case it improves the handling problem up to 50 percent at the expense of the regression of the comfort problem up to 300 percent. Thus, it can be said that this method is effective to improve the problem of comfort with so little regression of the handling problem.

Conclusion

In this article, the possibility of managing the conflict between handling and comfort of a quarter car system using the ADRC controller was studied. The study is built on the basis of extending the ADRC control part to include the sprung mass acceleration. The ADRC observer coefficients and the introduced sprung mass acceleration coefficient are chosen optimally using NSGA-II multi-objective optimization algorithm and Vyshnegradsky equations. Simulation results showed that the introduction of sprung mass acceleration in the control loop resulted in a noticeable improvement in the handling-comfort contradiction management. This method can be used to improve the comfort problem while keeping a good handling performance.

References

1. Darus R., Sam Y. M. Modeling and control active suspension system for a full car model, *2009 5th International Colloquium on Signal Processing & Its Applications, IEEE*, 2009, pp. 13–18.
2. Sun W., Pan H., Zhang Y., Gao H. Multi-objective control for uncertain nonlinear active suspension systems, *Mechatronics*, 2014, vol.24, no. 4, pp. 318–327.
3. Peng C. et al. ADRC trajectory tracking control based on PSO algorithm for a quad-rotor, *2013 IEEE 8th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*, IEEE, 2013, pp. 800–805.
4. Zakovyryn I. A., Kruglov S. P. The question of the implementation of self-tuning in the control system of adaptive semi-active suspension of the vehicle, *Young science of Siberia: electron, scientific journal*, 2020, vol. 8, no. 2, pp. 29–45 (in Russian).
5. Bakhmutov S. V., Yurlin D. V. Modeling of active car suspension systems by the method of a complex model with an external description of control systems, *Works by US*, 2017, vol. 269, no. 2, pp. 6–15 (in Russian).
6. Azizov M. E., Fedotov Yu. A. Automated control system for vehicle suspension stiffness, *Proceedings of young scientists and specialists of the Samara University*, 2020, vol. 16, no. 1, pp. 196–201 (in Russian).
7. Zhileikin M. M. et al. Development of adaptive relay control law for three-level damping of elastic-damping suspension

elements of multi-axle wheeled vehicles, *Mechanical engineering and computer technology*, 2013, no. 9, pp. 201–232 (in Russian).

8. **Sinit'syn A. S.** Synergetic synthesis of adaptive suspension control system, *System synthesis and applied synergetics*, 2015, pp. 72–85 (in Russian).

9. **Savsani V. et al.** Pareto optimization of a half car passive suspension model using a novel multiobjective heat transfer search algorithm, *Modelling and Simulation in Engineering*, 2017, vol. 2017.

10. **Ishak N. et al.** An observer design of nonlinear quarter car model for active suspension system by using backstepping controller, *2009 5th International Colloquium on Signal Processing & Its Applications, IEEE*, 2009, pp. 160–165.

11. **Nagarkar M. P. et al.** Multi-Objective Optimization of Nonlinear Quarter Car Suspension System—PID and LQR Control, *Procedia manufacturing*, 2018, vol. 20, pp. 420–427.

12. **Pepe G., Roveri N., Carcaterra A.** Experimenting sensors network for innovative optimal control of car suspensions, *Sensors*, 2019, vol. 14, no. 19, pp. 3062.

13. **Chang X. et al.** Active disturbance rejection control for a flywheel energy storage system, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2014, vol. 62, no. 2, pp. 991–1001.

14. **Li F. et al.** Study on adrc parameter optimization using cpso for clamping force control system, *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, vol. 2018, Article ID 2159274.

15. **Hasbullah F., Faris W. F.** Simulation of disturbance rejection control of half-car active suspension system using active disturbance rejection control with decoupling transformation, *Journal of Physics: Conference Series. IOP Publishing*, 2017, vol. 949, no. 1, pp. 012025.

16. **Hasbullah F. et al.** Ride comfort performance of a vehicle using active suspension system with active disturbance rejection control, *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 78–101.

17. **Li P., Lam J., Chun K. C.** Experimental investigation of active disturbance rejection control for vehicle suspension design, *International Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, vol. 1, pp. 89–96.

18. **Yeqing L., Wang H., Tian Y.** Active Disturbance Rejection Control for Active Suspension System of Nonlinear Full Car, *2018 IEEE 7th Data Driven Control and Learning Systems Conference (DDCLS), IEEE*, 2018, pp. 724–729.

19. **Aravind S. A.** Fast Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II. Matlab source code, 2012, 5 p.

20. **Alhelou M., Gavrilov A. I.** Synthesis of Active Disturbance Rejection Control, *Vestnik of the Moscow State Technical University. N. E. Bauman. The series "Instrumentation"*, 2020, vol. 4, pp. 22–41.

21. **Sánchez Corrales H. S.** Multi-objective optimization and multicriteria design of PI/PID controllers, University of Barcelona, 2016, 163 p.

22. **Zhou Qi.** Research and simulation on new active suspension control system, Lehigh University, 2013, 93 p.

23. **Zhdanov A. A., Lipkevich D. B.** ADCAs is a system of autonomous adaptive control of the active suspension of the car, *Proceedings of the Institute of System Programming of the Russian Academy of Sciences*, 2004, vol. 7, pp. 119–160 (in Russian).

24. **Zhdanov A. A. et al.** 4 GN is a tool for the development of neuron-like adaptive control systems based on the method of autonomous adaptive control, *All-Russian Scientific and Technical Conferences Neuroinformatics-2005*, Moscow, MEPhI. 2005, pp. 203–209 (in Russian).

25. **Alsalameh B., Ryazantsev V. I.** On the operation of the stabilization system of vertical reactions of the road to the wheels of the car together with the wheel convergence control system, *Energy and resource conservation: industry and transport*, 2018, vol. 2, pp. 56–63 (in Russian).

26. **Zakharenkov N. V.** Development and study of the dynamics of the active damping system of longitudinal-angular vibrations of transport vehicles. Diss. Omsk State Technical University, 2013, 19 p. (in Russian).

27. **Kruglov, S. P., Zakovyryn I.** A Adaptive suspension control of a car based on an identification algorithm, *Information technologies and mathematical modeling in the management of complex systems*, 2020, vol. 3, pp. 29–44 (in Russian).

28. **Spatsiyan A. V.** Synthesis of an observer for the active suspension control system of a car, *XXIV Tupolev readings (school of young scientists)*, 2019, pp. 117–122 (in Russian).

29. **Spatsiyan A. V.** Synthesis of the regulator of the vehicle suspension control system, *Optimization of energy consumption in the task of developing an algorithm for energy-efficient heating control*, 2018, pp. 119 (in Russian).

30. **Nikiforov P. A., Burakov M. V., Garanikov V. V.** Control of the active suspension of the car, *Problems and Prospects of Student Science*, 2018, vol. 2, pp. 57–59 (in Russian).

31. **Azizov M. E., Fedotov Y. A.** Automated control system for the rigidity of the suspension of the car, *Proceedings of young scientists and specialists of the Samara University*, 2020, vol. 1, pp. 196–201 (in Russian).

32. **Ogryzkov S. V.** Extreme control system of smooth running of the car, *Vestnik SevNTU*. 2012, vol. 134, pp. 71–74 (in Russian).

33. **Sinit'syn A. S.** Synthesis of a synergetic system of discontinuous control of the active suspension of the car, *Izvestia of the Southern Federal University for Technical Sciences*, 2020, vol. 2, p. 13 (in Russian).

В. Н. Шашихин, д-р техн. наук, проф., shashihin@bk.ru,

К. Д. Мерзляков, магистрант, x-sive2016@yandex.ru,

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, г. Санкт-Петербург

Синтез стабилизирующего управления квадрокоптером на основе линейных матричных неравенств

Актуальность представленной работы обусловлена широким внедрением беспилотных летательных аппаратов, включая и квадрокоптеры, в различные сферы как гражданского, так и военного применения. Выполнен обзор различных методов управления квадрокоптерами с учетом их особенностей как нелинейных объектов высокой размерности. Работа посвящена стабилизации квадрокоптера на сложной траектории, заданной функциональными зависимостями координат в трехмерном пространстве. Построена нелинейная динамическая модель квадрокоптера в связанной системе координат. Управление квадрокоптером строится в виде комбинации двух управляющих воздействий. При решении обратной задачи динамики находится программное управление, реализующее движение по заданной траектории. Стабилизация движения вдоль требуемой траектории обеспечивается обратной связью по фазовым координатам. Коэффициенты стабилизирующего регулятора находятся методом модального управления на основе решения линейного матричного неравенства с использованием линеаризованной модели. Найденные коэффициенты обратной связи позволяют достичь требуемую степень устойчивости замкнутой системы, которая обеспечивает робастность квадрокоптера по отношению к параметрическим возмущениям. Правомочность такого подхода к синтезу управления нелинейной системой обосновывается теоремой о топологической эквивалентности нелинейной системы и линеаризованной модели в части того, что нелинейная система имеет устойчивое или неустойчивое многообразие, которые являются аналогами устойчивых или неустойчивых пространств линеаризованной системы. Приведены результаты вычислительных экспериментов для оценки погрешности воспроизведения заданной траектории квадрокоптера. Для подтверждения эффективности синтезированного стабилизирующего управления и оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина выполнено имитационное моделирование поведения квадрокоптера и вычислена погрешность воспроизведения траектории. По данному критерию более эффективным для квадрокоптера является стабилизирующее управление, синтезированное на основе линейных матричных неравенств. Вычислительные эксперименты выполнены с использованием пакета прикладных программ MATLAB.

Ключевые слова: нелинейная модель квадрокоптера, траекторное управление, стабилизирующее управление, линейные матричные неравенства, моделирование

Введение

В настоящее время исследованию беспилотных летательных аппаратов, к которым относятся и квадрокоптеры, уделяется большое внимание в связи с широкими возможностями их использования в различных сферах гражданского и военного применения [1, 2]. Обеспечение устойчивости квадрокоптера во время движения по заданной траектории является сложной теоретической и практической проблемой, привлекающей пристальное внимание разработчиков систем управления квадрокоптерами [3, 4].

Решение задачи управления квадрокоптером осуществляется с привлечением как традиционных подходов классической теории автоматического управления с использованием пропорционально-интегрально-дифференци-

альных регуляторов, так и с использованием различных адаптивных регуляторов [2, 5], методов H_∞ теории управления [6], регуляторов, построенных на основе синергетического подхода [7] и нейронных сетей [8]. Однако использование таких методов управления приводит к усложнению регуляторов и, как следствие, к увеличению стоимости и уменьшению надежности квадрокоптеров.

В статье для стабилизации движения квадрокоптера на заданной траектории предлагается использовать метод модального управления на основе решения линейного матричного неравенства [9].

Постановка задачи

Квадрокоптер является беспилотным летательным аппаратом (БЛА), представляющим

платформу с четырьмя роторами. Одна пара роторов вращается по часовой стрелке, другая — против часовой стрелки. По сравнению с БЛА вертолетного типа квадрокоптеры обладают рядом преимуществ, таких как: надежность и простота конструкции, большая стабильность, компактность и маневренность, малая взлетная масса при существенной массе полезной нагрузки.

Нелинейная математическая модель квадрокоптера. Стабилизация движения квадрокоптера по заданной траектории проводится на основе нелинейной математической модели, представленной в работе [10]:

$$\ddot{x} = \frac{k}{m} (\cos \psi \sin \theta \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi) \times (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) - \frac{A_x}{m} \dot{x}; \quad (1a)$$

$$\ddot{y} = \frac{k}{m} (\sin \psi \sin \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi) \times (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) - \frac{A_y}{m} \dot{y}; \quad (1b)$$

$$\ddot{z} = \frac{k}{m} \cos \theta \cos \varphi (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2) - \frac{A_z}{m} \dot{z} - g; \quad (1в)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{I_y - I_z}{I_x} \dot{\theta} \dot{\psi} + \frac{kl}{I_x} (\omega_4^2 - \omega_2^2); \quad (1г)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{I_z - I_x}{I_y} \dot{\varphi} \dot{\psi} + \frac{kl}{I_y} (\omega_3^2 - \omega_1^2); \quad (1д)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{I_x - I_y}{I_z} \dot{\varphi} \dot{\theta} + \frac{b}{I_z} (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2 - \omega_4^2), \quad (1e)$$

где x, y, z — координаты центра масс квадрокоптера в земной системе координат; φ, θ, ψ — углы Эйлера (углы тангажа, крена и рысканья); ω_i — угловая скорость вращения винта i -го мотора квадрокоптера; A_x, A_y, A_z — коэффициенты аэродинамического сопротивления; l — расстояние от центра масс квадрокоптера до моторов; I_x, I_y, I_z — моменты инерции квадрокоптера; b — коэффициент крутящего момента моторов; m — масса квадрокоптера; k — коэффициент тяги моторов; g — ускорение свободного падения.

Параметры модели:

$$m = 2, k = 3 \cdot 10^{-6}, \quad (2a)$$

$$I_{xx} = I_{yy} = 5 \cdot 10^{-3}, I_{zz} = 0,01,$$

$$l = 0,4, A_x = A_y = A_z = 0,25, b = 7 \cdot 10^{-8}. \quad (2б)$$

Нелинейная математическая модель квадрокоптера (1) может быть представлена в векторном виде

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (3)$$

где $\dot{\mathbf{x}}(t)$ — производная по времени; $\mathbf{x}(t) \in R^{n=12}$ — фазовый вектор, определяющий состояние квадрокоптера; $\mathbf{u}(t) \in R^{m=4}$ — управляющее воздействие со следующими компонентами соответственно:

$$\mathbf{x}(t) = (x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = y, x_4 = \dot{y}, x_5 = z, x_6 = \dot{z}, x_7 = \varphi, x_8 = \dot{\varphi}, x_9 = \theta, x_{10} = \dot{\theta}, x_{11} = \psi, x_{12} = \dot{\psi})^T \in R^{12}, \quad (4)$$

$$\mathbf{u}(t) = (u_1 = \omega_1^2, u_2 = \omega_2^2, u_3 = \omega_3^2, u_4 = \omega_4^2)^T \in R^4.$$

Линеаризация исходной модели. Пусть функция

$$F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = (f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)))_{i=1}^n,$$

в окрестности Ω частных решений x^S , соответствующих управляющим воздействиям u^S ,

$$\Omega = \{(x^s, u^s) \mid \|x^s\| + \|u^s\| < \varrho,$$

$$\varrho = \text{const} > 0\} \subset R^n \otimes R^m$$

удовлетворяет условиям существования производных по векторным аргументам $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$, определенным в (4):

$$\mathbf{A} = \frac{dF(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{d\mathbf{x}(t)} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \dots & \partial f_1 / \partial x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n / \partial x_1 & \dots & \partial f_n / \partial x_n \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x^S \\ u(t)=u^S}}; \quad (5a)$$

$$\mathbf{B} = \frac{dF(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{d\mathbf{u}(t)} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial u_1 & \dots & \partial f_1 / \partial u_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial f_n / \partial u_1 & \dots & \partial f_n / \partial u_m \end{bmatrix}_{\substack{x(t)=x^S \\ u(t)=u^S}}. \quad (5б)$$

При использовании формулы Тейлора уравнение (3) может быть преобразовано к квазилинейному виду

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(x^s, u^s)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(x^s, u^s)\mathbf{u}(t) + \phi(x^s, u^s), \quad (6)$$

$$x(0) = x_0.$$

Пусть для всех

$$\xi^S \in \mathcal{S}(x^S, u^S, \rho) = \{(x^S, u^S) : \|x - x^S\| + \|u - u^S\| \leq \rho, \rho > 0\} \subset R^n \otimes R^m$$

выполняются оценки

$$\|\phi(x^S, u^S)\| \leq q \|(x^S, u^S)\|. \quad (7)$$

Если матрица Якоби вычислена по формуле (5а) и выполнено условие (7), тогда уравнение (6) будет определять уравнение первого приближения

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t), \quad (8)$$

где $\mathbf{w}(t) \in R^n$ — вектор состояния; $\mathbf{v}(t) \in R^m$ — вектор управления.

Система (8) может быть использована для синтеза управления, стабилизирующего систему (3), в окрестности частного решения. Для гиперболических систем (матрица Якоби не имеет чисто мнимых собственных значений) в соответствии с теоремой о топологической эквивалентности [10, 11] вид устойчивости нелинейной системы (3) совпадает с видом устойчивости системы первого приближения (8) независимо от характера нелинейных членов. Таким образом, вид траекторий системы (8) определяет геометрическую картину поведения траекторий исходной нелинейной системы (3).

Задача синтеза стабилизирующего управления. Вид траекторий нелинейной системы (3) определяется характеристическими показателями Ляпунова [12]. Характеристическим показателем функции $\mathbf{x}(t)$ называется величина (которая может иметь конечное значение или значение $\pm\infty$), определенная как

$$\lambda(\mathbf{x}) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (t^{-1} \ln \|\mathbf{x}(t)\|).$$

Характеристический показатель Ляпунова функции $\mathbf{x}(t)$ есть результат сравнения скорости роста $\mathbf{x}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ с экспонентой $\exp\{\alpha t\}$, для которой характеристический показатель равен α . Среди всего набора характеристических показателей Ляпунова важен наибольший (старший) показатель $\lambda_1 = \lambda_{\max}$. Набор показателей Ляпунова характеризует устойчивость траекторий нелинейной системы (3). Если $\lambda_1 < 0$, то траектория нелинейной системы асимптотически устойчива; если $\lambda_1 > 0$ — неустойчива. Набор характеристических показателей, упорядоченных по убыванию $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$,

является спектром нелинейной динамической системы.

Для системы (3) необходимо найти стабилизирующий регулятор в виде обратной связи по фазовому вектору

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (9)$$

такой, чтобы спектр характеристических показателей Ляпунова замкнутой системы

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(\mathbf{x}(t), \mathbf{K}\mathbf{x}(t)) \quad (10)$$

принадлежал левой полуплоскости, а система (10) была асимптотически устойчива со степенью устойчивости μ , которая определяется старшим характеристическим показателем Ляпунова.

Синтез стабилизирующего управления квадрокоптером на основе линейного матричного неравенства

Задача стабилизации по состоянию системы (8) состоит в выборе закона управления (9) из класса линейных обратных связей по фазовому вектору, при котором замкнутая система является асимптотически устойчивой.

Для синтеза стабилизирующих управлений квадрокоптером рассмотрим метод модального управления, основанный на применении линейных матричных неравенств [9]. Уравнение линеаризованной системы, замкнутой стабилизирующим управлением, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{w}(t) = \\ &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{w}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{w}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

В соответствии со вторым методом Ляпунова система (11) будет асимптотически устойчивой, если у нее существует положительно определенная функция Ляпунова

$$V(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \mathbf{P} \mathbf{w} \text{ с } \mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0,$$

производная которой в силу системы (11) является отрицательно определенной функцией

$$\dot{V} = \mathbf{w}^T (\mathbf{A}_c^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_c) \mathbf{w} < 0, \quad \forall \mathbf{w} \neq 0. \quad (12)$$

С учетом (11) неравенство (12) имеет вид

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{K}^T \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{K} < 0,$$

умножая которое слева и справа на матрицу \mathbf{P}^{-1} и обозначая $\mathbf{G} = \mathbf{P}^{-1}$, имеем

$$\mathbf{GA}^T + \mathbf{AG} + \mathbf{GK}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{BKG} < 0, \mathbf{G} > 0. \quad (13)$$

Таким образом, синтез стабилизирующего управления сводится к вычислению пары матриц (\mathbf{G} , \mathbf{K}), удовлетворяющих матричным неравенствам (13). Введем новую матричную переменную $\mathbf{L} = \mathbf{KG}$ и запишем неравенства (13) в виде

$$\mathbf{GA}^T + \mathbf{AG} + \mathbf{L}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{BL} < 0, \mathbf{G} > 0. \quad (14)$$

Параметры искомой обратной связи вычисляются по формуле

$$\mathbf{K} = \mathbf{LG}^{-1}. \quad (15)$$

Для выполнения дополнительного условия на степень устойчивости μ область корней характеристического уравнения замкнутой системы на комплексной плоскости должна ограничиваться областью, расположенной строго левее вертикальной линии, которая отстоит от мнимой оси на расстоянии $-\mu$. Это требование будет выполнено, если полная производная квадратичной функции Ляпунова удовлетворяет условию

$$\dot{V} = \mathbf{w}^T(\mathbf{A}_c^T\mathbf{P} + \mathbf{PA}_c)\mathbf{w} < -2\mu\mathbf{w}^T\mathbf{P}\mathbf{w}, \forall \mathbf{w} \neq 0,$$

из которого следует необходимость выполнения условия

$$\mathbf{GA}^T + \mathbf{AG} + \mathbf{L}^T\mathbf{B}^T + \mathbf{BL} + 2\mu\mathbf{G} < 0, \mathbf{G} > 0.$$

Параметры обратной связи также вычисляются по формуле (15).

Исследование стабилизации движения квадрокоптера на заданной траектории

Вычислительный эксперимент по стабилизации квадрокоптера проводился с использованием нелинейной модели (3). Для оценки эффективности системы стабилизации приведены результаты имитационного моделирования с использованием регуляторов, синтезированных на основе решения линейных

матричных неравенств и линейно-квадратичной оптимизации. Параметры обратной связи вычислялись по линеаризованной модели (8), в которой матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} определены выражением (5а), (5б) и равны

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9,81 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,125 & 0 & 0 & -9,81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,5 \cdot 10^{-6} & 1,5 \cdot 10^{-6} & 1,5 \cdot 10^{-6} & 1,5 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,4 \cdot 10^{-4} & 0 & 2,4 \cdot 10^{-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2,4 \cdot 10^{-4} & 0 & 2,4 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7,0 \cdot 10^{-6} & 7,0 \cdot 10^{-6} & 7,0 \cdot 10^{-6} & 7,0 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

Элементы матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} вычислены при значениях параметров (2) нелинейной модели квадрокоптера (1) в нулевой особой точке. Траектория движения квадрокоптера задается следующим образом:

$$\mathbf{x}_{\text{уст}}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) = x(t) = 2 \sin 0,5t \\ x_3(t) = y(t) = 2 \cos 0,5t \\ x_5(t) = z(t) = 0,2 \sin 0,5t \end{bmatrix}.$$

Движение по заданной траектории обеспечивается управлением

$$\mathbf{u}_{\text{уст}}(t) = -(\mathbf{CA}_3^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{x}_{\text{уст}}(t),$$

где $A_3 = A + BK$ и

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сравнение двух методов управления — модального и оптимального — проводилось с использованием погрешности реализации траекторий по следующей методике. Пусть $y(x)$ — заданная траектория, координаты которой определяются для системы равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih$, ($i = 0, 1, 2$). Обозначим $\tilde{y}_i(x_i)$ — последовательные значения реализованной траектории. Тогда оценка абсолютной погрешности воспроизведения траектории определяется неравенством [14]

$$E_i \geq |y_i - \tilde{y}_i|. \quad (16)$$

Погрешность вычисляется с использованием евклидова расстояния по следующему алгоритму.

1. Для некоторой точки реализованной траектории определяется расстояние до каждой точки заданной траектории.

2. Находится минимум из расстояний, определенных на шаге 1.

3. Повторяются шаги 1 и 2 до тех пор, пока не закончатся все точки полученной траектории.

4. Находится максимум из всех ранее вычисленных на шаге 2 минимумов.

Полученное значение максимума и является оценкой погрешности реализации заданной траектории.

Исследование стабилизирующего модального управления. Матрица коэффициентов обратной связи, вычисленная по формуле (15) с учетом линейного матричного неравенства (14), равна

$$K \approx 10^5 \begin{bmatrix} 0,08 & 0,06 & 0 & 0 & -2,18 & -1,32 & 0 & 0 & 0,74 & 0,09 & -0,47 & -0,33 \\ 0 & 0 & -0,077 & -0,06 & -2,18 & -1,32 & 0,74 & 0,09 & 0 & 0 & 0,47 & 0,33 \\ -0,08 & -0,06 & 0 & 0 & -2,18 & -1,32 & 0 & 0 & -0,74 & -0,09 & -0,47 & -0,33 \\ 0 & 0 & 0,08 & 0,06 & -2,18 & -1,32 & -0,74 & -0,09 & 0 & 0 & 0,47 & 0,33 \end{bmatrix}.$$

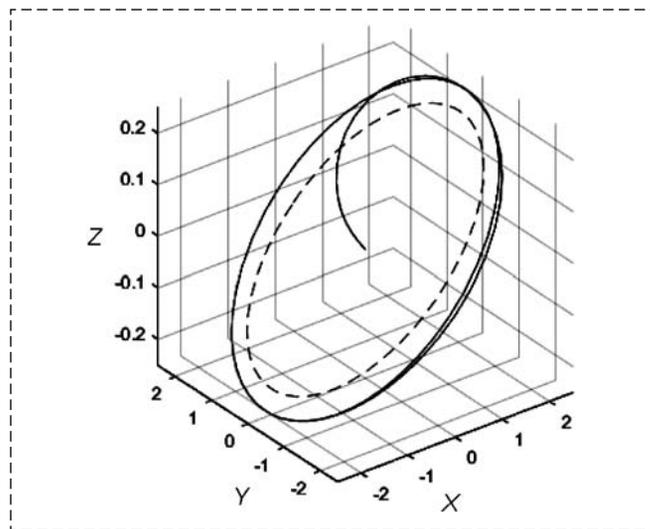


Рис. 1. Траектории системы, замкнутой стабилизирующим управлением

Fig. 1. Trajectories of the system closed by stabilizing control

Траектории замкнутой системы (заданная — штриховая линия, реализованная — сплошная линия) при стабилизирующем управлении представлены на рис. 1.

Спектр характеристических показателей Ляпунова нелинейной системы (3), замкнутой синтезированным стабилизирующим управлением (15), равен

$$\lambda\{F(x(t), Kx(t))\} = [\lambda_1 = -0,4862 \quad \lambda_2 = -0,4902 \\ \lambda_3 = -0,4862 \quad \lambda_4 = -0,4902 \quad \lambda_5 = -0,4548 \\ \lambda_6 = -0,4613 \quad \lambda_7 = -0,6228 \quad \lambda_8 = -0,6476 \\ \lambda_9 = -1,7233 \quad \lambda_{10} = -1,7608 \quad \lambda_{11} = -1,5666 \\ \lambda_{12} = -1,5957].$$

Исследование оптимального управления. Для системы (8) с обратной связью (9) решение задачи линейно-квадратичной оптимизации состоит в минимизации функционала

$$J(x, u) = \int_0^{\infty} [w^T(t)Qw(t) + v^T(t)Rv(t)]dt$$

при ограничениях в виде уравнений динамики с матрицами $Q = Q^T > 0$, $R = R^T > 0$, которые задаются таким образом, чтобы регулятор

удовлетворял в наибольшей степени динамике квадрокоптера [13].

Матрица регулятора в обратной связи определяется формулой

$$\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}, \quad (17)$$

где \mathbf{P} — решение матричного уравнения Риккати:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0.$$

Матрица параметров оптимального регулятора (17) равна

$$\mathbf{K} \approx 10^6 \begin{bmatrix} -2 & -2,77 & 0 & 0 & 1,41 & 1,55 & 0 & 0 & -10,64 & -2,01 & 1,41 & 1,45 \\ 0 & 0 & 2 & 2,77 & 1,41 & 1,55 & -10,64 & -2,01 & 0 & 0 & -1,41 & -1,45 \\ 2 & 2,77 & 0 & 0 & 1,41 & 1,55 & 0 & 0 & 10,64 & 2,01 & 1,41 & 1,45 \\ 0 & 0 & -2 & -2,77 & 1,41 & 1,55 & 10,64 & 2,01 & 0 & 0 & -1,41 & -1,45 \end{bmatrix}.$$

Траектории замкнутой системы (заданная — штриховая линия, реализованная — сплошная линия) при оптимальном управлении представлены на рис. 2.

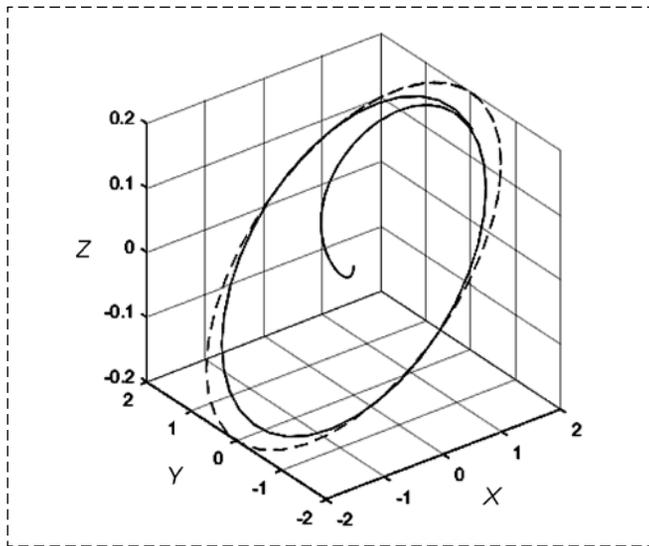


Рис. 2. Траектории системы, замкнутой оптимальным управлением

Fig. 2. Trajectories of the system closed by optimal control

Оценка погрешности
Error estimation

Управление	Погрешность воспроизведения траектории
Стабилизирующее	$E = 0,2596$
Оптимальное	$E = 0,9791$

Спектр характеристических показателей Ляпунова нелинейной системы (3), замкнутой синтезированным оптимальным управлением (17), равен

$$\lambda\{F(\mathbf{x}(t), \mathbf{K}\mathbf{x}(t))\} = [\lambda_1 = -0,9918 \quad \lambda_2 = -1,3861 \\ \lambda_3 = -1,0219 \quad \lambda_4 = -1,2798 \quad \lambda_5 = -1,8531 \\ \lambda_6 = -2,2558 \quad \lambda_7 = -2,2096 \quad \lambda_8 = -2,8395 \\ \lambda_9 = -7,8741 \quad \lambda_{10} = -40,2311 \\ \lambda_{11} = -959,3377 \quad \lambda_{12} = -959,6001].$$

Оценки погрешности, вычисленные по формуле (16), для стабилизирующего и оптимального управления представлены в таблице.

Как видно из таблицы, меньшую оценку погрешности имеет стабилизирующее управление. Спектры характеристических показателей Ляпунова при стабилизирующем и оптимальном управлении обеспечивают асимптотическую устойчивость замкнутой нелинейной системы.

Заключение

В работе синтезирована обратная связь, обеспечивающая стабилизацию движения квадрокоптера по заданной траектории. Вычисление коэффициентов обратной связи проводилось методом модального управления на основе использования линейных матричных неравенств. При синтезированном стабилизирующем управлении спектр характеристических показателей Ляпунова, расположенный в левой полуплоскости, свидетельствует об устойчивости замкнутой нелинейной системы. Проведена серия вычислительных экспериментов в целях определения оценки погрешности воспроизведения траектории квадрокоптера с использованием стабилизирующей обратной связи, синтезированной методом модального управления на основе решения линейного матричного неравенства и оптимального управления, полученного в результате решения задачи линейно-квадратичной оптимизации.

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают эффективность по данному критерию стабилизирующего управления по сравнению с оптимальным управлением.

Список литературы

1. Красовский А. Н. Алгоритм автоматического программного управления полетом дрона-квадрокоптера до цели и обратно // Актуальные исследования. 2020. Т. 2, № 5. С. 1—19.
2. Сао С. L1 adaptive output feedback controller for systems of unknown dimension // IEEE Transactions on Automatic Control. 2008. Vol. 53, N. 3. P. 815—821.
3. Белоконь А. И., Золотухин Ю. Н., Котов К. Ю., Мальцев А. С., Нестеров А. А. Управление параметрами полета квадрокоптера при движении по заданной траектории // Автоматика. 2013. № 4. С. 32—42.
4. Зуо Z. Trajectory tracing control design with command-filtered compensation for a quadrotor // IET Control Theory Application. 2010. Vol. 4, N. 11. P. 2343—2355.
5. Белявский А. О., Томашевич С. И. Синтез адаптивной системы управления квадрокоптером методом пассивации // Управление большими системами. 2016. № 63. С. 155—181.

6. Raffo G. V., Ortega M. G., Rubio F. R. An integral predictive nonlinear H_∞ control structure for a quadrotor helicopter // Automatica. 2010. Vol. 46, N. 1. P. 29—39.
7. Веселов Г. Е., Скляр А. А., Скляр С. А. Синергетический подход к управлению траекторным движением мобильных роботов в среде с препятствиями // Мехатроника. 2013. № 7. С. 20—25.
8. Nikol C., Machab C. J. B., Ramirez-Serrano A. Robust neural network control of a quadrotor helicopter // Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering. 2008. P. 1233—1237.
9. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 208 с.
10. Luukkonen N. Modelling and control of quadcopter // Independent research project in applied mathematics, Espoo, Finland. 2011. P. 2—23.
11. Гробман Д. Гомеоморфизм систем дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1959. Т. 128, № 5. С. 880—881.
12. Оморев Р. О. Метод топологической грубости динамических систем // Материаловедение. 2017. Т. 24, № 4. С. 77—83.
13. Шашихин В. Н. Управление крупномасштабными динамическими системами. СПб.: ПОЛИТЕХПРЕСС, 2020. 308 с.
14. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1966. 368 с.
15. Козлов В. Н., Куприянов В. Е., Шашихин В. Н. Теория автоматического управления: Учебное пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 127 с.

Synthesis of Stabilizing Control of a Quadcopter Based on Linear Matrix Inequalities

V. N. Shashikhin, shashihin@bk.ru, K. D. Merzlyakov, x-sive2016@yandex.ru,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, 195251, Russian Federation

Corresponding author: Shashihin Vladimir N., Dr. of Tech. Sc., Professor,
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, 195251, Russian Federation,
e-mail: shashihin@bk.ru

Accepted on March 24, 2022

Abstract

The relevance of the work is due to the widespread introduction of unmanned aerial vehicles, including quadcopters, in various areas of both civil and military applications. A review of various methods of controlling quadcopters, considering their features as nonlinear objects of high dimensionality, is performed. The work is devoted to stabilizing a quadcopter on a complex trajectory defined by functional coordinate relationships in 3D space. A nonlinear dynamic model of the quadcopter in a coupled coordinate system is constructed. The quadcopter control is based on a combination of two control actions. When solving the inverse dynamics problem, program control provides motion along a given trajectory. Stabilization of motion along the desired trajectory is provided by phase coordinate feedback. The stabilizing regulator ratios are found by the modal control method based on the solution of a linear matrix inequality using a linearized model. The found feedback ratios provide the required degree of stability of the closed-loop system, ensuring the quadcopter robustness to parametric perturbations. The legitimacy of this approach to the synthesis of control of a nonlinear system is substantiated by the topological equivalence theorem for the nonlinear system and the linearized model in that the nonlinear system has stable or unstable manifolds, which are analogs of the stable or unstable spaces of the linearized system. The results of computational experiments to estimate the error in reproducing a given quadcopter trajectory are presented. A simulation of the quadcopter behavior was performed, and the trajectory reproduction error was calculated to confirm the effectiveness of the synthesized stabilizing control and the optimal control based on the Pontryagin maximum principle. According to this criterion, the stabilizing control synthesized based on linear matrix inequalities is more effective for the quadcopter. Computational experiments were performed using the MATLAB application software package.

Keywords: nonlinear quadcopter model, trajectory control, stabilizing control, linear matrix inequalities, modeling

For citation:

Shashikhin V. N., Merzlyakov K. D. Synthesis of Stabilizing Control of a Quadcopter Based on Linear Matrix Inequalities, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 7, pp. 376—383.

DOI: 10.17587/mau.23.376-383

References

1. **Krasovsky A. N.** Algorithm for automatic program control of the drone-quadcopter flight to the target and back, *Aktualnye issledovaniya*, 2020, vol. 2, no. 5. p. 1–19 (in Russian).
2. **Cao C.** L1 adaptive output feedback controller for systems of unknown dimension, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, vol. 53, no. 3, p. 815–821.
3. **Belokon A. I., Zolotukhin Yu. N., Kotov K. Yu., Maltsev A. S., Nesterov A. A.** Control of flight parameters of a quadcopter when moving along a given trajectory, *Avtometriya*, 2013, no. 4, p. 32–42 (in Russian).
4. **Zuo Z.** Trajectory tracing control design with command-filtered compensation for a quadrotor, *IET Control Theory Application*, 2010, vol. 4, no. 11, p. 2343–2355.
5. **Belyavsky A. O., Tomashevich S. I.** Synthesis of an adaptive quadcopter control system by the passification method, *Upravlenie Bolshimi Sistemami*, 2016, no. 63, p. 155–181 (in Russian).
6. **Raffo G. V., Ortega M. G., Rubio F. R.** An integral predictive nonlinear control structure for a quadrotor helicopter, *Automatica*, 2010, vol. 46, no. 1, p. 29–39.
7. **Veselov G. E., Sklyarov A. A., Sklyarov S. A.** Synergetic approach to the control of trajectory motion of mobile robots in an environment with obstacles, *Mekhatronika*, 2013, no. 7, p. 20–25 (in Russian).
8. **Nikol C., Machab C. J. B., Ramirez-Serrano A.** Robust neural network control of a quadrotor helicopter, *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, 2008, p. 1233–1237.
9. **Balandin D. V., Kogan M. M.** Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities, Moscow, Fizmatlit, 2007, 208 p. (in Russian).
10. **Luukkonen N.** Modelling and control of quadcopter, *Independent research project in applied mathematics*, Espoo, Finland, 2011, pp. 2–23.
11. **Grobman D.** Homeomorphism of systems of differential equations, *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, 1959, vol. 128, no. 5, p. 880–881.
12. **Omorov R. O.** Method of topological roughness of dynamical systems, *Materials Science*, 2017, vol. 24, no. 4, p. 77–83.
13. **Shashikhin V. N.** Control of large-scale dynamical systems, St. Petersburg, POLYTECHPRESS, 2020, 308 p. (in Russian)
14. **Demidovich B. P., Maron I. A., Shuvalova E. Z.** Numerical methods of analysis: approximation of functions, differential and integral equations, Moscow, Nauka, 1966, 368 p. (in Russian).
15. **Kozlov V. N., Kupriyanov V. E., Shashikhin V. N.** Theory of automatic control, St. Petersburg, Publishing house of the Polytechnic University, 2009, 127 p. (in Russian).



**4-6 октября 2022 г. в Санкт-Петербурге
на базе АО "Концерн" ЦНИИ "Электроприбор" состоится
15-я мультиконференция по проблемам управления
(МКПУ-2022)**

Председатель президиума мультиконференции —
академик РАН В. Г. Пешехонов

Мультиконференция включает пять локальных конференций:

- **XXXIII конференция памяти выдающегося конструктора
гироскопических приборов Н.Н. Острякова**

Председатель программного комитета — акад. РАН В. Г. Пешехонов

- **Конференция "Информационные технологии в управлении" (ИТУ-2022)**

Сопредседатели программного комитета: член-корр. РАН В. Н. Васильев,
д.т.н. проф. В. Н. Шелудько, член-корр. РАН Р. М. Юсупов

- **Конференция "Математическая теория управления и ее приложения" (МТУиП-2022)**

Сопредседатели программного комитета: член-корр. РАН Д. А. Новиков
и д.ф.-м.н. проф. Н. В. Кузнецов

- **Конференция "Управление в аэрокосмических системах"
имени академика Е. А. Микрина (УАКС-2022)**

Сопредседатели программного комитета: акад. РАН С. Ю. Желтов,
член-корр. РАН В. А. Соловьев, член-корр. РАН М. В. Сильников

- **Конференция "Управление в морских системах" (УМС-2022)**

Сопредседатели программного комитета: акад. РАН Е. И. Якушенко,
акад. РАН С. Н. Васильев, член-корр. РАН А. Ф. Щербатюк

В рамках мультиконференции пройдет Семинар по закрытой тематике

Информация для связи:

ГНЦ РФ АО "Концерн" ЦНИИ "Электроприбор",
Тел.: +7 (812) 499-82-10 — Истомина Елена Анатольевна
+7 (812) 499 82 67 — Тарановский Дмитрий Олегович
Факс: +7 (812) 232 33 76 E-mail: icins@eprib.ru

В. М. Солдаткин, д-р техн. наук, проф., w-soldatkin@mail.ru, **Б. И. Мифтахов**, аспирант,
В. В. Солдаткин, д-р техн. наук, проф., **Е. С. Ефремова**, канд. техн. наук, доц.,
А. В. Никитин, канд. техн. наук, доц.,

Казанский национальный исследовательский технический университет им А. Н. Туполева—КАИ

Теоретические основы построения электронной системы пространственного измерения воздушных сигналов летательного аппарата с одним неподвижным приемником набегающего воздушного потока

Отмечается необходимость получения достоверной информации о воздушных сигналах, определяющих пространственное движение летательных аппаратов (ЛА), в том числе малоразмерных, беспилотных и пилотируемых, для обеспечения безопасности полета в приземном возмущенном слое атмосферы.

Показано, что традиционные системы воздушных сигналов ЛА, реализующие аэродинамический и флюгерные методы измерения параметров набегающего воздушного потока с помощью установленных на правом и левом борту и распределенных по фюзеляжу приемников воздушных давлений, температуры торможения и флюгерных датчиков аэродинамических углов атаки и скольжения, имеют сложную конструкцию, значительную массу и стоимость, что ограничивает их применение на малоразмерных, беспилотных и других классах ЛА.

Отмечается, что разрабатываемая система воздушных сигналов с одним неподвижным приемником набегающего воздушного потока, построенная на основе вихревого метода измерения параметров набегающего воздушного потока, позволяет существенно упростить конструкцию и снизить массу системы, однако обеспечивает измерение только в азимутальной или вертикальной плоскостях в ограниченном диапазоне измерения аэродинамического угла. Разрабатываемая система воздушных сигналов, реализующая ионно-меточный метод измерения параметров набегающего воздушного потока, позволяет обеспечить панорамное измерение аэродинамического угла, но также только в одной плоскости при усложнении конструкции и повышении требований к идентичности каналов многоканальной измерительной схемы, что также ограничивает их применение на малоразмерных ЛА.

Известные возможности и достоинства ультразвукового метода измерения параметров газовых потоков и панорамного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости с неподвижным приемником набегающего воздушного потока определили предложение использовать ультразвуковой метод для пространственного измерения воздушных сигналов.

Раскрывается функциональная схема электронной системы пространственного измерения воздушных сигналов ЛА с одним (интегрированным) неподвижным приемником набегающего воздушного потока и ультразвуковыми измерительными каналами, подключенными ко входу вычислителя. Для расширения функциональных возможностей на внешней обтекаемой поверхности приемной платы системы установлено отверстие-приемник статического давления, соединенное пневмоканалом со входом датчика абсолютного давления с частотным выходом, который также подключен ко входу вычислителя, на выходе которого формируются цифровые выходные сигналы системы воздушных сигналов ЛА.

Получены аналитические модели информативных сигналов и алгоритмов пространственного определения воздушных сигналов в измерительных каналах электронной системы с одним неподвижным приемником набегающего воздушного потока.

Раскрываются существенные преимущества рассматриваемой электронной системы, повышающие конкурентоспособность и эффективность применения системы на малоразмерных и других классах ЛА для повышения безопасности полета и эффективности решения полетных задач.

Ключевые слова: летательный аппарат, воздушные сигналы, система, пространственное измерение, электронная, неподвижный приемник, функциональная схема, алгоритмы, преимущества, применение

Введение

Полет широкого класса летательных аппаратов (ЛА), в том числе малоразмерных пилотируемых и беспилотных, осуществляется в приземном возмущенном слое атмосферы, и для обеспечения безопасности пилотирования и решения полетных задач необходима достоверная информация о воздушных сигналах, определяющих движение ЛА относительно окружающей воздушной среды [1–3]. Широко используемые

на самолетах и других ЛА системы воздушных сигналов реализуют аэродинамический и флюгерные методы измерения параметров скорости и углов направления набегающего воздушного потока с помощью установленных на правом и левом бортах и распределенных по фюзеляжу приемников воздушных давлений, флюгерных или других датчиков аэродинамических углов атаки и скольжения, а также приемников температуры торможения, выходы которых соединены пневмопроводами или кабелями связи

со входом устройства обработки информации, расположенного внутри фюзеляжа, в котором по известным аналитическим моделям определяются и формируются выходные сигналы по воздушным сигналам движения ЛА относительно окружающей среды [4–6]. Однако большое число распределенных автономных приемников и датчиков для определения параметров набегающего воздушного потока, а также пневмопроводов и кабелей связи их с устройством обработки информации приводят к значительному усложнению конструкции, увеличению массы и стоимости таких традиционных систем, что ограничивает их применение на малоразмерных и других классах ЛА.

Анализ вариантов систем воздушных сигналов ЛА с неподвижным приемником набегающего воздушного потока

Проводится разработка системы воздушных сигналов ЛА с одним неподвижным приемником набегающего воздушного потока на основе вихревого метода измерения параметров набегающего воздушного потока [7], в котором используется эффект образования и периодического срыва вихрей с поверхности плохобтекаемых тел с частотами, зависящими от скорости и угла направления набегающего потока. По частотам вихреобразования за телами и статическому давлению, воспринимаемому на скользящей поверхности неподвижного приемника, по разработанным аналитическим моделям во встроенном вычислителе определяются воздушные сигналы ЛА. При этом существенно упрощается конструкция и снижается масса системы, однако обеспечивается измерение только в азимутальной или вертикальной плоскостях в диапазоне углов направления набегающего потока, ограниченном значением $+15\dots-25^\circ$.

Проводится разработка системы воздушных сигналов ЛА, реализующая ионно-меточный метод измерения параметров набегающего воздушного потока, в которой в набегающий воздушный поток вносится ионная метка с явно выраженным электростатическим зарядом, и регистрируется траектория ее движения совместно с потоком с помощью приемных электродов, распределенных в плоскости измерения и подключенных к многоканальной измерительной схеме. По выходным сигналам

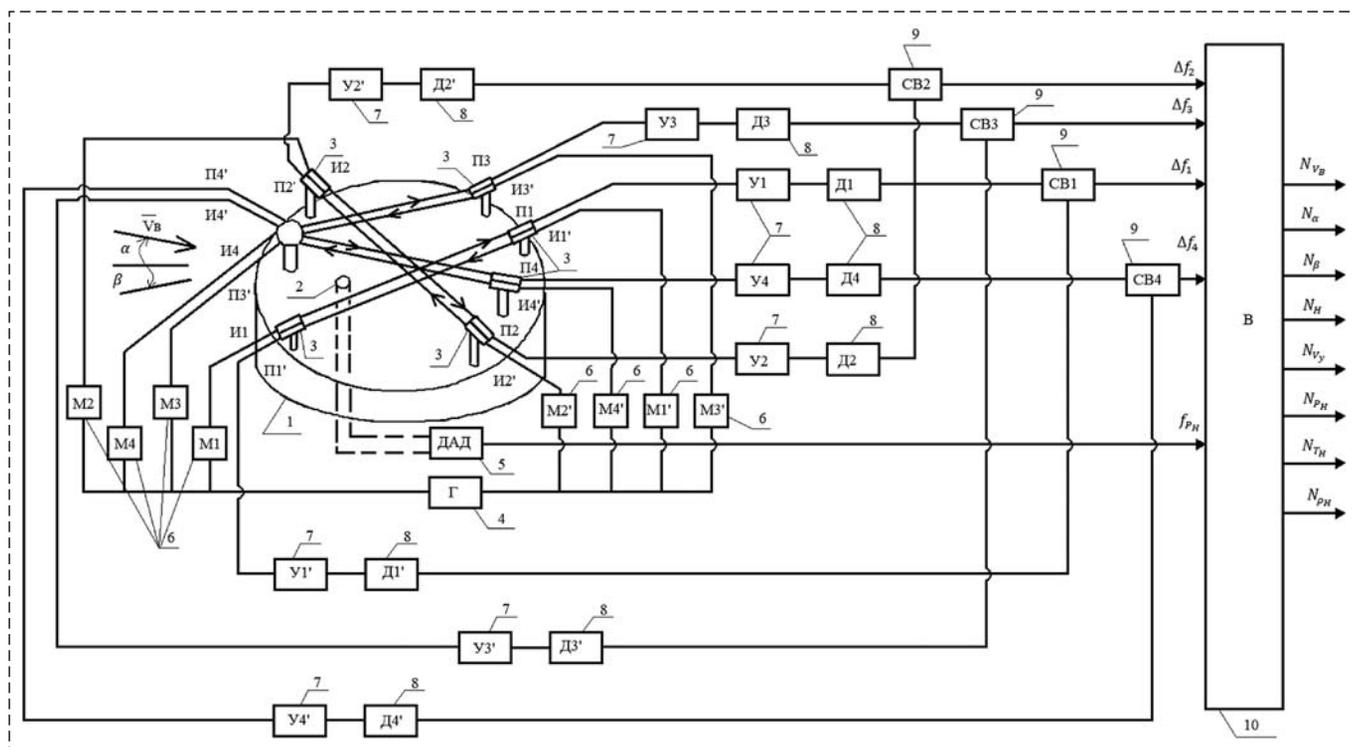
системы во встроенном вычислителе на основе разработанных аналитических моделей определяются воздушные сигналы ЛА, однако также только в азимутальной или вертикальной плоскостях, но в диапазоне изменения угла направления набегающего воздушного потока до $\pm 180^\circ$ [8]. Многоканальная измерительная схема определяет жесткие требования к идентичности измерительных каналов, реализация которых усложняет систему.

Функциональная схема электронной системы пространственного измерения воздушных сигналов ЛА с одним неподвижным приемником набегающего воздушного потока

Известные возможности и достоинства ультразвукового метода измерения параметров газовых потоков [9] и его использование в панорамном электронном датчике аэродинамического угла и истинной воздушной скорости ЛА с неподвижным приемником [10] определили построение электронной системы пространственного измерения воздушных сигналов ЛА с одним неподвижным приемником набегающего потока.

На рисунке приведена функциональная схема электронной системы пространственного измерения воздушных сигналов ЛА с одним неподвижным приемником набегающего воздушного потока.

Электронная система пространственного измерения воздушных сигналов ЛА содержит расположенную в набегающем воздушном потоке приемную плату 1. На внешней обтекаемой поверхности приемной платы 1 установлено отверстие-приемник 2, воспринимающее статическое давление P_H набегающего воздушного потока. На внешней обтекаемой поверхности приемной платы 1 на стойках установлены четыре пары совмещенных излучателей-приемников 3 ультразвуковых колебаний. Излучатели И1, И2, И3, И4 формируют ультразвуковые колебания по направлению набегающего воздушного потока, которые воспринимаются приемниками П1, П2, П3, П4. Излучатели И1', И2', И3', И4' формируют ультразвуковые колебания, распространяющиеся против направления набегающего воздушного потока, которые воспринимаются приемниками П1', П2', П3', П4'. Излучатели через соответствующие модуляторы М1, М2, М3, М4 и М1', М2', М3', М4'



Электронная система пространственного измерения воздушных сигналов летательного аппарата с одним неподвижным приемником набегающего воздушного потока

подключены к генератору 2 (Г) синусоидальных колебаний высокой частоты.

Совмещенные пары излучателей-приемников И1—П1, И2—П2 и И1'—П1', И2'—П2' расположены по окружности в плоскости изменения угла скольжения ортогонально друг к другу под углом $\Theta_0 = 45^\circ$ к оси приемной платы, параллельной продольной оси ЛА, относительно которой отсчитывается угол скольжения. Совмещенные пары излучателей-приемников И3—П3, И4—П4 установлены на одной оси ортогонально приемной плате 1, а их совмещенные пары И3'—П3 и И4'—П4 установлены в плоскости изменения угла атаки под углом $\varphi_0 = 45^\circ$ к оси приемной платы, относительно которой отсчитываются угол атаки.

Выходы приемников П1 и П1', П2 и П2', П3 и П3', П4 и П4', воспринимающих ультразвуковые колебания, распространяющиеся по направлению набегающего потока и против потока, через соответствующие усилители 7 и детекторы 8 соединены со входами схем вычитания частот 9 СВ1, СВ2, СВ3, СВ4, на выходах которых формируются разности частот Δf_1 , Δf_2 , Δf_3 , Δf_4 пар приемников, воспринимающих ультразвуковые колебания в противоположных направлениях. Выходы схем вычитания частот соединены со входом вычислителя 10.

Отверстие-приемник 2 статического давления P_H пневмоканалом соединен со входом датчика абсолютного давления 5 (ДАД) с частотным выходом сигналом f_{PH} , который также соединен со входом вычислителя 10, на выходе которого формируются цифровые выходные сигналы системы измерения воздушных сигналов летательного аппарата.

Система устанавливается на ЛА таким образом, чтобы ось приемной платы 1 с элементами регистрации параметров вектора скорости набегающего воздушного потока была параллельна продольной оси ЛА, а обтекаемая поверхность приемной платы находилась в плоскости измерений угла скольжения.

Аналитические модели информативных сигналов и алгоритмов пространственного определения воздушных сигналов в измерительных каналах электронной системы

При работе электронной системы пространственного измерения воздушных сигналов ЛА (см. рисунок) расположенное на плате 1 отверстие-приемник 2 воспринимает статическое давление P_H набегающего воздушного потока,

которое по пневмопроводу поступает на вход датчика абсолютного давления 5. Частотный выходной сигнал f_{PH} датчика 5 подается на вход вычислителя 10, в котором в соответствии со стандартной зависимостью [11] абсолютная высота полета в диапазоне $-200 \text{ м} < H < 11\,000 \text{ м}$ определяется по формуле

$$H = \frac{T_0}{\tau} \left[1 - \left(\frac{P_H}{P_0} \right)^{R\tau} \right], \quad (1)$$

где $T_0 = 288,15 \text{ К}$ и $P_0 = 101\,325 \text{ Па}$ — абсолютная температура и абсолютное давление на высоте $H = 0$; $\tau = 0,0065 \text{ К/м}$ — температурный градиент, определяющий изменение абсолютной температуры воздуха T при изменении высоты; $R = 29,27125 \text{ м/К}$ — газовая постоянная.

При изменении абсолютной (барометрической) высоты H вертикальная скорость V_y определяется путем вычисления производной по времени от абсолютной высоты H по соотношениям

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{dH}{dt} \approx \frac{H(t_i) - H(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \\ &= \frac{1}{4\Delta t} [H(t_i) - H(t_i - 2\Delta t) + \\ &+ H(t_i - \Delta t) - H(t_i - 3\Delta t)], \end{aligned} \quad (2)$$

где Δt — фиксированный интервал времени.

Работа каналов измерения истинной воздушной скорости V_b , угла скольжения β и угла атаки α основана на различии времени прохождения ультразвуковых колебаний от излучателей до приемников по направлению набегающего воздушного потока и против направления потока.

Применительно к совмещенным парам излучатели—приемники И1—П1, И1'—П1' и И2—П2, И2'—П2' интервалы времени t_1 , t_1' и t_2 , t_2' прохождения ультразвуковых колебаний от излучателей до приемников будут определяться соотношениями

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{L}{a + V \cos(\Theta_0 + \beta)}; \quad t_1' = \frac{L}{a - V \cos(\Theta_0 + \beta)}; \\ t_2 &= \frac{L}{a + V \cos(\Theta_0 - \beta)}; \quad t_2' = \frac{L}{a - V \cos(\Theta_0 - \beta)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где L — расстояние между излучателями И1, И1' и приемниками П1, П1' ультразвуковых колебаний; a — скорость распространения звука в воздухе; β — угол скольжения.

Как только первые электрические колебания, создаваемые на выходах пьезоэлектрических приемников П1, П1' и П2, П2', пройдя через усилители У1, У1' и У2, У2' и детекторы Д1, Д1' и Д2, Д2', поступают на модуляторы М1, М1' и М2, М2', работающие в триггерном режиме, модуляторы закрывают прохождение колебаний от генератора 2 к пьезоэлектрическим элементам излучателей И1, И1' и И2, И2', и посылка ультразвуковых колебаний от излучателей 3 прекращается. Модуляторы М1, М1' и М2, М2' вновь открываются после того, как последние ультразвуковые колебания первых пакетов достигнут пьезоэлектрических приемников П1, П1' и П2, П2'.

На входы схемы вычитания СВ1 и схемы вычитания СВ2 будут поступать процессы с частотами f_1 , f_1' и f_2 , f_2' , определяемыми соотношениями

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{L} [a + V \cos(\Theta_0 + \beta)]; \\ f_1' &= \frac{1}{L} [a - V \cos(\Theta_0 + \beta)]; \\ f_2 &= \frac{1}{L} [a + V \cos(\Theta_0 - \beta)]; \\ f_2' &= \frac{1}{L} [a - V \cos(\Theta_0 - \beta)]. \end{aligned} \quad (4)$$

На выходах схем вычитания СВ1 и СВ2 формируются информативные сигналы измерительных каналов в виде разности $\Delta f_1 = f_1 - f_1'$ и $\Delta f_2 = f_2 - f_2'$ частот ультразвуковых колебаний, распространяющихся по потоку и против потока, определяемые соотношениями вида

$$\Delta f_1 = \frac{2V}{L} \cos(\Theta_0 + \beta); \quad \Delta f_2 = \frac{2V}{L} \cos(\Theta_0 - \beta). \quad (5)$$

Представляя косинусы суммы и разности в виде

$$\begin{aligned} \cos(\Theta_0 + \beta) &= \cos \Theta_0 \cos \beta + \sin \Theta_0 \sin \beta; \\ \cos(\Theta_0 - \beta) &= \cos \Theta_0 \cos \beta - \sin \Theta_0 \sin \beta \end{aligned}$$

и принимая $\Theta_0 = 45^\circ$, $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получим

$$\begin{aligned} \Delta f_1 &= \frac{\sqrt{2}V}{L} (\cos \beta + \sin \beta); \\ \Delta f_2 &= \frac{\sqrt{2}V}{L} (\cos \beta - \sin \beta). \end{aligned} \quad (6)$$

Сумма ($\Delta f_1 + \Delta f_2$) и разность ($\Delta f_1 - \Delta f_2$) будут определяться как

$$\Delta f_1 + \Delta f_2 = \frac{2\sqrt{2}}{L} V \cos \beta; \Delta f_1 - \Delta f_2 = \frac{2\sqrt{2}}{L} V \sin \beta.$$

Тогда аналитическое выражение для определения угла скольжения β будет иметь вид

$$\beta = \arctg \frac{\Delta f_1 - \Delta f_2}{\Delta f_1 + \Delta f_2}. \quad (7)$$

Сумма квадратов $\Delta f_1^2 + \Delta f_2^2$ будет определяться соотношением

$$\begin{aligned} \Delta f_1^2 + \Delta f_2^2 &= \\ &= \frac{2}{L^2} V^2 [(\cos \beta + \sin \beta)^2 + (\cos \beta - \sin \beta)^2] = \\ &= \frac{2}{L^2} V^2 (\cos^2 \beta + 2 \cos \beta \sin \beta + \sin^2 \beta + \\ &+ \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \sin \beta + \sin^2 \beta) = \frac{4}{L^2} V^2. \end{aligned}$$

Тогда аналитическое выражение для определения истинной воздушной скорости $V_B = V$ будет иметь вид

$$V_B = \frac{L}{2} \sqrt{\Delta f_1^2 + \Delta f_2^2}. \quad (8)$$

Используя рассмотренную выше методику применительно к совмещенным парам излучателей—приемников И3—П3, И4—П4, И3'—П3', И4'—П4', расположенных под углом $\alpha_0 = 45^\circ$ к оси приемной платы I , угол атаки α можно определить по формуле

$$\alpha = \arctg \frac{\Delta f_3 - \Delta f_4}{\Delta f_3 + \Delta f_4}. \quad (9)$$

Абсолютную температуру T_H на высоте полета H можно определить с помощью проводникового или полупроводникового терморезистора, установленного в пневмопроводе статического давления и включенного в плечо мостовой измерительной схемы. При окружающих условиях, близких к стандартной атмосфере, абсолютную температуру T_H можно определить по формуле [12]

$$T_H = T_0 - \tau H. \quad (10)$$

Плотность воздуха ρ_H на высоте H можно представить [13] как

$$\rho_H = \rho_0 \frac{P_H T_0}{P_0 T_H},$$

где $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3 = 0,125 \text{ Н} \cdot \text{с/м}^4$ — массовая плотность воздуха на высоте $H = 0$ стандартной атмосферы по ГОСТ 4401—81 [11].

Приборная скорость $V_{\text{пр}}$ ЛА, т. е. истинная воздушная скорость V_B , приведенная к нормальным условиям ρ_0, P_0, T_0 на уровне $H = 0$ стандартной атмосферы, будет определяться по формуле [12]

$$V_{\text{пр}} = \sqrt{\Delta} V_B = \sqrt{\frac{P_H T_0}{P_0 T_H}} V_B,$$

где $\Delta = \sqrt{\frac{\rho_H}{\rho_0}}$.

Число Маха M , характеризующее отношение истинной воздушной скорости V_B ЛА к скорости звука a_H на высоте полета H , в диапазоне дозвуковых скоростей определяется по формуле [12]

$$M = \frac{V_B}{a_H} = \frac{V_B}{\sqrt{kgRT_H}},$$

где $g = 9,80665 \text{ м/с}^2$ — ускорение силы тяжести; k — показатель адиабаты для воздуха.

По приведенным аналитическим моделям в вычислителе системы определяются все воздушные сигналы движения ЛА относительно окружающей воздушной среды.

Заключение

Таким образом, предлагаемая система обеспечивает измерение всех воздушных сигналов дозвукового ЛА относительно окружающей воздушной среды. По сравнению с известными системами измерений воздушных сигналов ЛА предлагаемая система имеет ряд существенных преимуществ:

1. Система является электронным устройством с одним интегрированным приемником параметров набегающего воздушного потока и встроенным вычислителем, осуществляющим обработку информации и формирование выходных сигналов без соединительных длинных кабелей и пневмопроводов, что существенно

снижает массу, упрощает конструкцию и снижает стоимость.

2. Использование частотно-временных первичных информативных сигналов позволяет уменьшить погрешности их выделения, преобразования, передачи и обработки, что повышает точность измерения воздушных сигналов ЛА.

3. Получение выходных сигналов по всем воздушным сигналам ЛА непосредственно в цифровой форме упрощает их использование в современных системах цифрового отображения информации, системах управления и других технических системах.

Все это повышает конкурентоспособность и эффективность применения электронной системы пространственного измерения воздушных сигналов на малоразмерных и других классах ЛА, позволяет повысить безопасность полетов и эффективность решения полетных задач.

Список литературы

1. **Практическая** аэродинамика маневренного самолета / Под ред. Н. М. Лысенко. М.: Воениздат, 1977. 439 с.
2. **Деревянкин В. П.** Обнаружение нештатных ситуаций и предотвращение критических режимов полета // Изв. вузов. Авиационная техника. 2004. № 3. С.54–57.
3. **Солдаткин В. М.** Методы и средства построения бортовых информационно-управляющих систем обеспечения

безопасности полета. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та. 2004. 350 с.

4. **Клюев Г. И., Макаров Н. Н., Солдаткин В. М., Ефимов И. П.** Измерители аэродинамических параметров летательных аппаратов. Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2005. 509 с.

5. **Кравцов В. Г., Алексеев Н. В.** Аэротриетрия высотно-скоростных параметров летательных аппаратов // Приборы и системы: Управление, контроль, диагностика. 2000. № 8. С. 47–50.

6. **Макаров Н. Н.** Системы обеспечения безопасности функционирования бортового эргатического комплекса: Теория, проектирование, применение. М.: Машиностроение / Машиностроение—Полет, 2009. 760 с.

7. **Солдаткин В. М., Ефремова Е. С.** Особенности построения и анализ статической точности вихревой системы воздушных сигналов дозвукового летательного аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 7. С. 443–448.

8. **Солдаткин В. М., Солдаткин В. В., Крылов Д. Л.** Теоретические основы построения системы воздушных сигналов самолета с неподвижным невыступающим приемником потока // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 7. С. 495–502.

9. **Кремлевский П. П.** Расходомеры и счетчики количества. Л.: Машиностроение, 1973. 776 с.

10. **Солдаткин В. М., Солдаткин В. В., Ефремова Е. С., Мифтахов Б. И.** Модели формирования и обработки сигналов панорамного датчика аэродинамического угла и истинной воздушной скорости // Мехатроника, автоматизация, управление. 2021. Т. 22, № 7. С. 442–448.

11. **ГОСТ 4401-81.** Атмосфера стандартов. Параметры. М.: Изд-во Стандартов, 1981. 179 с.

12. **Браславский Д. А., Логунов С. С., Пельпо Д. С.** Авиационные приборы и автоматы. М.: Машиностроение, 1970. 432 с.

13. **Залманзон Л. А.** Проточные элементы пневматических приборов контроля и управления. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 249 с.

Theoretical Foundations of Construction of the Electronic System for Spatial Measuring of Air Signals Aircraft Plane's with One Fixed Receiver of Incoming Air Flow

V. M. Soldatkin, w-soldatkin@mail.ru, **B. I. Miftakhov**, bulatmiftakhov@mail.ru,
V. V. Soldatkin, w-soldatkin@mail.ru, **E. S. Efremova**, soldatkina1991@bk.ru, **A. V. Nikitin**, nikitin.rf@mail.ru,
Kazan National Research Technical University Named after A. N. Tupolev—KAI,
Kazan, 420111, Russian Federation

Corresponding author: Soldatkin V. M., Dr. Tech. Sc., Professor, Kazan National Research Technical University Named after A. N. Tupolev—KAI, Kazan, 420111, Kazan, Russian Federation.

Accepted on January 30, 2022

Abstract

It is noted that it is necessary to obtain reliable information about air signals that determine the spatial movement of aircraft plane (AP), including small-sized, unmanned and manned, to ensure flight safety in the surface disturbed layer of the atmosphere. It is shown that traditional air data systems of AP implementing aerodynamic and wind cock methods for measuring the parameters of incoming air flow using air pressure receivers installed on the right and left side and distributed over the fuselage, braking temperature receiver and wind cock sensors of aerodynamic angles of incidence and gliding have a complex design, considerable weight and cost, which limits their use on small-sized, unmanned and other aircraft classes. It is noted that the developed air data system with one fixed receiver of incoming air flow, built on the basis of the vortex method for measuring the parameters of incoming air flow, can significantly simplify the design and reduce the mass of system, but provides measurement only in the azimuthal or vertical plane in a limited range of measurement of the aerodynamic angle. The air data system being developed, which implements an ion-mark method for measuring the parameters of incoming air flow, allows for panoramic measurement of the aerodynamic angle, but also only in one plane

with increasing complexity of the design and increasing requirements for the identity of the channels of the multichannel measuring circuit, which also limits their use on small-sized aircraft. The known capabilities and advantages of the ultrasonic method for measuring the parameters of gas flows and a panoramic sensor of the aerodynamic angle and true airspeed with a fixed receiver of the incoming air flow have determined the possibility of using the ultrasonic method for spatial measurement of air signals. The functional scheme of the electronic system for spatial measuring air signals of aircraft plane with one (integrated) fixed receiver of incoming air flow and ultrasonic instrumentation channels connected to the input of the computer is revealed. To expand the functionality, a static pressure receiver-hole is installed on the external streamlined surface of the system's receiving board, connected by a pneumatic channel to the input of an absolute pressure sensor with a frequency output, which is also connected to the input of a computer, at the output of which digital output signals of the air data system of aircraft plane are generated. Analytical models of informative signals and algorithms for spatial determination of air signals in instrumentation channels of the electronic system with one fixed receiver of incoming air flow are obtained. The essential advantages of the considered electronic system are revealed, which increase the competitiveness and efficiency of the system application on small-sized and other classes of aircraft planes to improve flight safety and the efficiency of solving flight tasks.

Keywords: aircraft plane, air signals, system, spatial measurement, electronic, fixed receiver, functional scheme, algorithms, advantages, application

For citation:

Soldatkin V. M., Miftakhov B. I., Soldatkin V. V., Efremova E. S., Nikitin A. V. Theoretical Foundations of Construction of the Electronic System for Spatial Measuring of Air Signals Aircraft Plane's with One Fixed Receiver of Incoming Air Flow, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 7, pp. 384–390.

DOI: 10.17587/mau.23.384-390

References

1. **Lysenko N. M. ed.** Practical aerodynamics of a maneuverable aircraft, Moscow, Voenizdat, 1977, 439 p. (in Russian).
2. **Derevyankin V. P.** Detection of emergency situations and prevention of critical flight modes, *Izvestiya Vuzov. Aviatzionnaya Tekhnika*, 2004, no. 3, pp. 54–57 (in Russian).
3. **Soldatkin V. M.** Methods and means of building on-board information-controlling systems for ensure flight safety, Kazan, Publishing house of Kazan State Technical University, 2004, 350 p. (in Russian).
4. **Klyuev G. I., Makarov N. N., Soldatkin V. M., Efimov I. P.** Meters of aerodynamic parameters of aircraft, Ulyanovsk, Publishing house of UISTU, 2005, 509 p. (in Russian).
5. **Kravtsov V. G., Alekseev N. V.** Aerometry of altitude-speed parameters of aircraft, *Pribory i Sistemy: Upravleniye. Kontrol. Diagnostika*, 2000, no. 8, pp. 47–50 (in Russian).
6. **Makarov N. N.** Systems for ensuring the safety of the functioning of the onboard ergatic complex: Theory, design, application, Moscow, Mashinostroenie, Mashinostroenie-Polet, 2009, 760 p. (in Russian).
7. **Soldatkin V. M., Efremova E. S.** Features of construction and analysis of static accuracy of the vortex system of air signals of a subsonic aircraft, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 7, pp. 443–448. (in Russian).
8. **Soldatkin V. M., Soldatkin V. V., Krylov D. L.** Theoretical foundations of construction of the air data system aircraft's with the fixed flush-mounted flow receiver, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 7, pp. 495–502 (in Russian).
9. **Kremlevsky P. P.** Flowmeters and quantity counters, Leningrad, Mechanical Engineering, 1973, 776 p. (in Russian).
10. **Soldatkin V. M., Soldatkin V. V., Efremova E. S., Miftakhov B. I.** Models of formation and signal processing of panoramic sensor of aerodynamic angle and true airspeed, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, vol. 22, 2021, no. 7, pp. 442–448 (in Russian).
11. **GOST 4401–81.** The atmosphere of standards. Parameters, Moscow, Publishing House of Standards, 1981, 179 p. (in Russian).
12. **Braslavsky D. A., Logunov S. S., Pelpo D. S.** Aviation devices and automata, Moscow, Mechanical Engineering, 1970, 432 p. (in Russian).
13. **Zalmanzon L. A.** Flow elements of pneumatic control and control devices, Moscow, Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1961, 249 p. (in Russian).

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Матросская тишина, 23с2

Телефон редакции журнала: **+7(499) 270 16 52**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *М. Ю. Безменова*.

Сдано в набор 25.04.2022. Подписано в печать 14.06.2022. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная. Заказ МН722. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз". 119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: www.aov.ru



Modern Network Technologies (MoNeTec-2022)

27—29 октября 2022

<https://www.monetec.ru>

Международная научно-техническая конференция «Современные сетевые технологии» собирает представителей международного научного сообщества, исследовательских подразделений корпораций, стартапов, промышленности и бизнеса, институтов развития и органов государственной власти для обсуждения перспективных и актуальных технологий в сфере компьютерных сетей, виртуализации сетевых ресурсов и облачных вычислений, использования методов искусственного интеллекта.

Сети передачи данных являются основой современной цивилизации. Области телекоммуникации вбирают в себя и постоянно порождают все новые и новые технологии, которые открывают возможности, повышают качество сервиса, безопасности в современных сетях. Технологии программного управления в сетях, виртуализации сервисов, периферийные облачные вычисления стали ключевыми элементами построения современных сетей передачи данных и информационных инфраструктур в целом. В настоящее время в мире (и в России, в частности) начато их применение на практике. Однако творческая мысль не останавливается на достигнутом. Сегодня мы уже говорим о реконфигурируемых по требованию сетях (Intent Based Network), информационно-ориентированных сетях (Information Centric Network), контент-ориентированных сетях (Content Centric Network). Возникает много новых проблем и направлений для исследований.

На конференции планируется выступление с пленарными докладами ряда зарубежных и отечественных ученых по перспективным направлениям развития современных сетей передачи данных и их приложений.

Предполагается участие крупных зарубежных специалистов в области программно-конфигурируемой инфраструктуры как со стороны науки, так и промышленности.

ПРИГЛАШЕННЫЕ СПИКЕРЫ

Serge Fdida, Sorbonne University, France
Pradeeban Kathiravelu, Emory University, USA
Jason Liu, Florida International University, USA

Glenn Ricart, US Ignite, USA
Manoj Shakya, Kathmandu University, Nepal
Hagen Woesner, Technische Universitt, Germany

Программа конференции также предусматривает проведение нескольких школ по сетевым технологиям и применению отечественных решений по тематике конференции для молодых ученых, студентов старших курсов и аспирантов, что будет способствовать расширению профессионального круга специалистов, способных поддерживать и развивать эти технологии и решения.

НАПРАВЛЕНИЯ РАБОТЫ MoNeTec-2022

- ✓ *Data Communication Infrastructure*
- ✓ *QoS control in Data Communication*
- ✓ *Cloud Computing*
- ✓ *Optimization Methods, Tools, and Technologies in Cloud Computing*
- ✓ *Network Function Virtualization and Services*
- ✓ *Edge Computing*
- ✓ *5/6G Wireless Technologies, Applications and Services*
- ✓ *Future Networking*

ПОДАЧА ДОКЛАДОВ

Доклад должен представлять собой оригинальный, ранее не опубликованный результат. Информация о требованиях к докладам и процедуре подачи докладов размещена на сайте конференции <https://www.monetec.ru>.

Материалы для публикации - доклады объемом до 12 страниц в формате pdf на английском или русском языке представляются через систему EasyChair. Подробная информация о типах докладов представлена на сайте.

Для оформления статей необходимо использовать стандартный шаблон IEEE для материалов международных конференций (формат — A4).

Все доклады на русском языке, допущенные на конференцию, будут опубликованы в издании РИНЦ.

Принятые доклады на английском языке будут опубликованы в IEEE Xplore и проиндексированы в библиографических системах Web of Science и Scopus.

Информация об оргвзносе для докладчиков размещена на сайте конференции.

СРОКИ ПОДАЧИ МАТЕРИАЛОВ

- 01 июля** Подача текста доклада
01 августа Сообщение о принятии доклада в форме короткого сообщения/стендового доклада (постера) (текст либо на русском, либо на английском)
01 сентября Сообщение о принятии доклада в развернутой форме (на английском)
15 сентября Окончательная версия для публикации
01 октября Подача плакатов для стендовых докладов

СТЕНДОВЫЕ ДОКЛАДЫ

В форме стендовых докладов могут быть представлены, в том числе, незавершённые исследования. Стендовые доклады – хорошая возможность для студентов и молодых учёных показать свою работу широкой аудитории опытных исследователей. Докладчику предоставляется место размером 85x110 см для размещения самостоятельно изготовленного плаката.

Для прохождения отбора необходимо представить текст стендового доклада (но не плакат!), как и для обычного доклада. Текст должен содержать описание задачи, обоснование её актуальности, подходы к решению и текущие результаты.

Программный комитет конференции примет решение о допуске доклада в качестве стендового по итогам рецензирования.

ШКОЛЫ ПО СЕТЕВЫМ И ОБЛАЧНЫМ ТЕХНОЛОГИЯМ

Перед началом конференции планируется проведение нескольких школ по сетевым и облачным технологиям. Цель этих школ – познакомить слушателей с современными технологиями, показать их преимущества и возможности. Регистрация для участия в каждой школе будет открыта на сайте конференции. Число мест в каждой из школ ограничено.

ФОРМАТ И МЕСТО ПРОВЕДЕНИЯ

Формат конференции: смешанный (очный и дистанционный)

Место проведения: Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), Конгресс-центр МТУСИ, Москва, Авиамоторная, 8а.

Контакты Организационного комитета:

e-mail: info@monetec.ru

тел: +7 (495) 9394671

ГЕНЕРАЛЬНЫЙ СПОНСОР



СПОНСОРЫ КОНФЕРЕНЦИИ

