

**М  
А  
У****ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И ПРИКЛАДНОЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
МЕХАТРОНИКА,  
АВТОМАТИЗАЦИЯ,  
УПРАВЛЕНИЕ**

Издается с 2000 года

ISSN 1684-6427 (Print)

ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Том 23  
2022  
№ 3****СОДЕРЖАНИЕ****Главный редактор:**  
ФИЛИМОНОВ Н. Б., д.т.н.**Заместители главного редактора:**  
БОЛЬШАКОВ А. А., д.т.н.  
ПОДУРАЕВ Ю. В., д.т.н.  
ЮЩЕНКО А. С., д.т.н.**Ответственный секретарь:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.**Редакционный совет:**  
АНШАКОВ Г. П., чл.-корр. РАН  
БОЛОТНИК Н. Н., чл.-корр. РАН  
ВАСИЛЬЕВ С. Н., акад. РАН  
ЖЕЛТОВ С. Ю., акад. РАН  
КАЛЯЕВ И. А., акад. РАН  
КУЗНЕЦОВ Н. А., акад. РАН  
КУРЖАНСКИЙ А. Б., акад. РАН  
ПЕШЕХОНОВ В. Г., акад. РАН  
РЕЗЧИКОВ А. Ф., чл.-корр. РАН  
СЕБРЯКОВ Г. Г., чл.-корр. РАН  
СИГОВ А. С., акад. РАН  
СОЙФЕР В. А., акад. РАН  
СОЛОМЕНЦЕВ Ю. М., чл.-корр. РАН  
ФЕДОРОВ И. Б., акад. РАН  
ЧЕНЦОВ А. Г., чл.-корр. РАН  
ЧЕРНОУСЬКО Ф. Л., акад. РАН  
ЩЕРБАТИЮК А. Ф., чл.-корр. РАН  
ЮСУПОВ Р. М., чл.-корр. РАН**Редколлегия:**  
DORANTES D. J., PhD, Турция  
GROUMPOS P. P., PhD, Греция  
ISIDORI A., PhD, Италия  
KATALINIC B., PhD, Австрия  
LIN CH.-Y., PhD, Тайвань  
MASON O. J., PhD, Ирландия  
ORTEGA R. S., PhD, Франция  
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, США  
STRZELECKI R. M., PhD, Польша  
SUBUDHI B. D., PhD, Индия  
АЛИЕВ Т. А., д.т.н., Азербайджан  
ГАРАЩЕНКО Ф. Г., д.т.н., Украина  
БОБЦОВ А. А., д.т.н.  
БУКОВ В. Н., д.т.н.  
ЕРМОЛОВ И. Л., д.т.н.  
ЖУКОВ И. А., д.т.н.  
ИЛЬЯСОВ Б. Г., д.т.н.  
КОРОСТЕЛЕВ В. Ф., д.т.н.  
ЛЕБЕДЕВ Г. Н., д.т.н.  
ЛОХИН В. М., д.т.н.  
МАГОМЕДОВ М. Х., д.ф.-м.н.  
ПУТОВ В. В., д.т.н.  
ПШИХОПОВ В. Х., д.т.н.  
РАПОПОРТ Э. Я., д.т.н.  
СЕРГЕЕВ С. Ф., д.п.с.н.  
ФИЛАРЕТОВ В. Ф., д.т.н.  
ФРАДКОВ А. Л., д.т.н.  
ФУРСОВ В. А., д.т.н.**Редакция:**  
БЕЗМЕНОВА М. Ю.**Директор издательства:**  
АНТОНОВ Б. И.**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ****Ловчаков В. И.** Аналитический синтез квазипотимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов на основе условно адекватных моделей низкого порядка. Часть 2 ..... 115**Нгуен Хак Тунг, Власов С. М., Пыркин А. А.** Алгоритм идентификации параметров синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой ..... 125**АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ****Алиев Т. А., Гулуев Г. А., Рзаев Ас. Г., Пашаев Ф. Г., Рзаева Н. Э.** Технология Noise-контроля нефтяных скважин по ваттметрограмме электродвигателя глубинно-насосной установки ..... 132**РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ****Hoang Duc Long, Dudarenko N. A.** Analysis of a Cart-Inverted Pendulum System with Harmonic Disturbances Based on its Criterion Matrix ..... 146**Абишев К. К., Касенов А. Ж., Балтабекова А. Н.** Измерительные устройства неинвазивной формы для исследования психофизиологического состояния водителя автотранспортных средств ..... 152**ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА,  
УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ****Ду Чунжуй, Старинова О. Л.** Оптимальное управление при перелетах с малой тягой на вертикальные орбиты с орбиты Ляпунова ..... 158

*Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук; журнал включен в систему Российской индекса научного цитирования, а также в МНБД Scopus и RSCI (на платформе Web of Science).*

**Информация о журнале доступна по сети Internet по адресу:**  
<http://novtex.ru/mech>, e-mail: [mech@novtex.ru](mailto:mech@novtex.ru)

# MECHATRONICS, AUTOMATION, CONTROL

Vol. 23  
2022  
No. 3

## MEKHATRONIKA, AVTOMATIZATSIIA, UPRAVLENIE

Published since 2000

ISSN 1684-6427 (Print) ISSN 2619-1253 (Online)

DOI 10.17587/issn.1684-6427

**Editor-in-Chief**  
FILIMONOV N. B.

**Deputy Editors-in-Chief:**  
BOLSHAKOV A. A.  
PODURAEV Yu. V.  
YUSCHENKO A. S.

**Responsible Secretary:**  
BEZMENOVA M. Yu.

**Editorial Board:**  
ANSHAKOV G. P.  
BOLOTNIK N. N.  
CHENTSOV A. G.  
CHERNOUSKO F. L.  
FEDOROV I. B.  
KALYAEV I. A.  
KURZHANSKI A. B.  
KUZNETSOV N. A.  
PESHEKHONOV V. G.  
REZCHIKOV A. F.  
SCHERBATYUK A. F.  
SEBRYAKOV G. G.  
SIGOV A. S.  
SOJFER V. A.  
SOLOMENTSEV Yu. M.  
VASSILYEV S. N.  
YUSUPOV R. M.  
ZHELTOV S. Yu.

**Editorial Council:**  
ALIEV T. A., Azerbaijan  
DORANTES D. J., PhD, Turkey  
GARASCHENKO F. G., Ukraine  
GROUMPOS P. P., PhD, Greece  
ISIDORI A., PhD, Italy  
KATALINIC B., PhD, Austria  
LIN CH.-Y., PhD, Taiwan  
MASON O. J., PhD, Ireland  
ORTEGA R. S., PhD, France  
SKIBNIEWSKI M. J., PhD, USA  
STRZELECKI R. M., PhD, Poland  
SUBUDHI B. D., PhD, India  
BOBTSOV A. A.  
BUKOV V. N.  
ERMOLOV I. L.  
FILARETOV V. F.  
FRADKOV V. L.  
FURSOV V. A.  
ILYASOV B. G.  
KOROSTELEV V. F.  
LEBEDEV G. N.  
LOKHIN V.M.  
MAGOMEDOV M. Kh.  
PUTOV V. V.  
PSHIKHOPOV V. Kh.  
RAPOPORT E. Ya.  
SERGEEV S. F.  
ZHUKOV I. A.

**Editorial Staff:**  
BEZMENOVA M. Yu.

**Director of the Publishing House:**  
ANTONOV B. I.

The mission of the Journal is to cover the current state, trends and prospects development of *mechatronics*, that is the priority field in the technosphere as it combines mechanics, electronics, automatics and informatics in order to improve manufacturing processes and to develop new generations of equipment. Covers topical issues of development, creation, implementation and operation of mechatronic systems and technologies in the production sector, power economy and in transport.

## CONTENTS

### SYSTEM ANALYSIS, CONTROL AND INFORMATION PROCESSING

- Lovchakov V. I.** Analytical Synthesis of Quasi-Optimal Regulators for Linear Objects Based on Conditionally Adequate Low-Order Models. Part 2 ..... 115  
**Nguyen Khac Tung, Vlasov S. M., Pyrkin A. A.** Algorithm for Identification of Parameters Sinusoidal Signal with the Exponentially Damping Amplitude ..... 125

### AUTOMATION AND CONTROL TECHNOLOGICAL PROCESSES

- Aliyev T. A., Guluyev G. A., Rzayev As. H., Pashyev F. H., Rzayeva N. E.** Technology for the NOISE Control of Oil Wells by Wattmeter Card of the Electric Motor of Sucker Rod Pumping Units ..... 132

### ROBOT, MECHATRONICS AND ROBOTIC SYSTEMS

- Hoang Duc Long, Dudarenko N. A.** Analysis of a Cart-Inverted Pendulum System with Harmonic Disturbances Based on its Criterion Matrix ..... 146  
**Abishev K. K., Kasenov A. Zh., Baltabekova A. N.** Measuring Devices of Non-Invasive Form for the Study of the Psychophysiological State of the Driver of Motor Vehicles ..... 152

### DYNAMICS, BALLISTICS AND CONTROL OF AIRCRAFT

- Du Chongrui, Starinova O. L.** Optimal Control of Transfer to Vertical Orbits from Lyapunov Orbits Using Low-Thrust Engine ..... 158

Information about the journal is available online at:  
<http://nvtex.ru/mech.html>, e-mail: mech@nvtex.ru

В. И. Ловчаков, д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru,  
Тульский государственный университет

## Аналитический синтез квазиоптимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов на основе условно адекватных моделей низкого порядка. Часть 2\*

Для линейных объектов высокого порядка ( $n \geq 4$ ) практически неизвестны аналитические (точные) алгоритмы управления в форме обратной связи, оптимальные по критерию быстродействия, и для них остается актуальной задача синтеза приближенно быстродействующих законов управления. В этой части работы развивается подход к синтезу быстродействующих систем высокого порядка, предложенный в первой части статьи, использующий идею преобразования исходной задачи быстродействия к аналогичной задаче управления объектами, описываемыми моделями первого или второго порядка, для которых известны оптимальные по быстродействию алгоритмы управления. Данные алгоритмы лежат в основе исследуемого подхода к синтезу быстродействующих систем, который предполагает нахождение специальных функций, описывающих связь фазовых координат моделей объекта низкого порядка (они по аналогии с работами А. А. Колесникова называются агрегированными переменными или макропеременными) с фазовыми координатами исходного объекта высокого порядка, а также расчет параметров используемых моделей низкого порядка, которые обеспечивают в определенном смысле их адекватность исходному объекту и, соответственно, высокое быстродействие синтезируемых систем. В данной части работы, в отличие от первой ее части, при синтезе используются две модели объекта не первого, а второго порядка, которые характеризуются условной и приближенной адекватностью по отношению к исходной модели объекта высокого порядка. В случае условной адекватности параметры модели низкого порядка находятся точно с использованием собственных чисел и векторов исходного объекта, а при приближенной адекватности — с применением метода наименьших квадратов. На основе указанных двух моделей второго порядка разрабатываются две методики синтеза квазиоптимальных регуляторов, которые отличаются использованием нелинейных обратных связей, обеспечивающих повышенное быстродействие конструируемой системы управления, достаточно близкое к предельным значениям. В частности, в примере показано, что при наличии небольшого допустимого перерегулирования время регулирования синтезированной системы может быть меньше, чем в оптимальной системе управления. Таким образом, основное содержание работы посвящено результатам сравнительного анализа свойств указанных быстродействующих регуляторов, а также анализу особенностей и условий применимости предложенных методик синтеза.

**Ключевые слова:** линейный объект управления, быстродействие, перерегулирование, релейный регулятор, аналитическое конструирование системы

### Введение

Для повышения эффективности работы многих производственных агрегатов, в частности электромеханических систем, желательно, чтобы системы управления, входящие в их состав, отвечали критерию оптимальности по быстродействию, который непосредственно определяет производительность агрегата. Однако строгое решение задач оптимального управления по критерию быстродействия в форме обратной связи представляет серьезную теоретическую проблему даже для линейных объектов относи-

тельно невысокого порядка ( $n = 4, 5$ ) [1–7]. Действительно, задача быстродействия полностью решена для объектов второго порядка методом фазовой плоскости [2–4]. Для объектов третьего порядка быстродействующее управление точно (аналитически) найдено только в отдельных случаях, в частности, для трех последовательно соединенных интеграторов [2, 3], соединения двух интеграторов и апериодического звена [2], соединения интегратора и двух апериодических звеньев [2]. Для объектов высокого порядка ( $n \geq 4$ ) применение геометрических методов, используемых при  $n \leq 3$ , существенно затруднено и, как следствие, для них практически неизвестны аналитические решения задач оптимального быстродействия [6, 7].

\*Первая часть статьи опубликована в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление", 2022, Т. 23, №2.

Реализация строго оптимальных по быстродействию законов управления, отличающихся математической сложностью, серьезно затруднена и требует многократно больших технико-экономических затрат в сравнении, например, с линейными алгоритмами управления. В связи с этим многие работы по синтезу быстродействующих систем [9–12], как правило, направлены на определение различных аппроксимаций функции переключения оптимального релейного регулятора. Получаемые при этом регуляторы называются *квазиоптимальными*.

Необходимо подчеркнуть, что сложность решения задачи быстродействия стремительно возрастает с увеличением порядка  $n$  объекта управления — это известная проблема порядка задачи быстродействия. Например, для объекта первого порядка такой алгоритм управления имеет предельно простую форму

$$u(t) = -\text{sign}[x(t)],$$

где  $x(t)$  — регулируемая переменная объекта. Описание аналогичного алгоритма для объекта второго порядка занимает одну-две строки, а для объекта третьего порядка — уже около и более страницы текста (если он существует). Для объектов четвертого порядка уже неизвестны аналитические законы оптимального управления за исключением модельного объекта, представляющего последовательное соединение четырех интеграторов [6, 8]. В связи с этим в целях получения аналитических алгоритмов управления быстродействующих систем высокого порядка предлагается подход к синтезу квазиоптимальных регуляторов с использованием преобразования исходной задачи быстродействия к аналогичной задаче управления объектом низкого порядка. Он базируется на использовании известных оптимальных законов обратной связи для объектов первого или второго порядков и состоит, во-первых, в нахождении функций  $\psi_i(t) = F_i[X(t)]$ ,  $i = 1, 2$ , описывающих зависимость фазовых координат  $\psi_i(t)$  моделей объекта низкого порядка (они по аналогии с работой А. А. Колесникова [13] называются агрегированными переменными или макропеременными) с компонентами вектора состояния  $X(t)$  исходного объекта высокого порядка, и, во-вторых, в расчете параметров используемых моделей 1-го или 2-го порядков, которые обеспечивают в определенном смысле их адекватность исходному объекту и, соответственно, высокое быстродействие синтезиру-

емых систем. Таким образом, основная задача работы состоит в выработке и обосновании рациональных вариантов (методик) определения функций  $\psi_i(t) = F_i[X(t)]$ , обеспечивающих хорошее приближение квазиоптимальных управлений к строго оптимальным по быстродействию алгоритмам управления. В первой части работы были исследованы две методики аналитического синтеза квазиоптимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов, основанные на использовании условно и приближенно адекватных моделей объекта первого порядка [15]. Вторая часть работы посвящена анализу следующих двух методик синтеза, использующих условно и приближенно адекватные модели объекта второго порядка.

### Постановка задач управления

Исследуемые одномерные объекты в линейном приближении описываются векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где  $X(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$  — вектор состояния объекта, координаты которого имеют физический смысл отклонений от заданного режима работы (здесь и далее " $T$ " — символ транспонирования вектора или матрицы);  $u(t)$  — управляющее воздействие, ограниченное величиной  $U_m$  ( $|u(t)| \leq U_m$ );  $A$ ,  $B$  — матрицы параметров объекта размерности  $n \times n$  и  $n \times 1$ .

Для объектов (1) исследуется классическая задача конструирования регулятора, оптимального по критерию быстродействия [3, 14]: требуется определить функцию переключения  $f(X)$  релейного регулятора

$$u(t) = -U_m \text{sign}[f(X(t))], \quad (2)$$

обеспечивающего перевод объекта из начального состояния  $X_0 \in \Omega$ , принадлежащего заданной области  $\Omega$  фазового пространства, в начало координат этого пространства за минимальное время.

Еще раз подчеркнем, что данная задача быстродействия полностью аналитически решена только для объектов первого и второго порядка. В текущей части работы для приближенного определения искомого управления (2) используется тот известный факт, что для объекта

$$\dot{\psi}_1(t) = \alpha_{11}\psi_1(t) + \alpha_{12}\psi_2(t) + \beta_1 u(t); \quad (3a)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = \alpha_{21}\psi_1(t) + \alpha_{22}\psi_2(t) + \beta_2 u(t) \quad (3b)$$

( $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_i$  — параметры модели объекта второго порядка, записанной в наиболее общей форме) оптимальный по быстродействию закон управления относительно несложно определить [2, 3, 14]. Для нахождения функции переключения  $f(\psi_1, \psi_2) = \psi_1 - \phi(\psi_2)$ , определяющей управление (2) для объекта (3), который не имеет комплексных корней (для него выполняется теорема А. А. Фельдбаума о "n интервалах управления"), достаточно рассчитать две фазовые траектории этого объекта, проходящие через начало координат  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . Первую траекторию  $\psi_1 = \phi_1(\psi_2)$  при действии управления  $u(t) = +U_m$  можно найти аналитическим или численным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi_1}{d\psi_2} = \frac{\alpha_{11}\psi_1 + \alpha_{12}\psi_2 + \beta_1 U_m}{\alpha_{21}\psi_1 + \alpha_{22}\psi_2 + \beta_2 U_m}, \quad \phi_1(0) = 0.$$

Вторая фазовая траектория  $\psi_1 = \phi_2(\psi_2)$  объекта (3), соответствующая действию управления  $u(t) = -U_m$ , определяется решением аналогичного дифференциального уравнения, в котором вместо слагаемых  $+\beta_i U_m$ ,  $i = 1, 2$ , присутствуют слагаемые  $-\beta_i U_m$ . Соответственно, искомая функция  $\phi(\psi_2)$  находится объединением функций  $\phi_1(\psi_2)$  и  $\phi_2(\psi_2)$  [2, 3].

Развиваемый подход к аналитическому синтезу быстродействующих алгоритмов управления объектами высокого порядка (1) базируется на использовании закона обратной связи

$$u(t) = -U_m \text{sign}[\psi_1(t) - \phi(\psi_2(t))] \quad (4)$$

и в его основе лежат следующие две процедуры:

1) определение специальных функций  $\psi_i(t) = F_i[X(t)]$ ,  $i = 1, 2$ , и

2) расчет параметров модели (3), которые обеспечивают высокое быстродействие синтезируемых систем, имеющих управление следующей структуры:

$$u(t) = -U_m \text{sign}\{F_1[X(t)] - \phi[F_2[X(t)]]\}. \quad (5)$$

Структура (5) вытекает из управления (4) при замене  $\psi_i(t) \rightarrow F_i[X(t)]$ . Соответственно, основная задача данной работы состоит в выработке и обосновании рациональных вариантов (методик) выполнения указанных двух процедур, которые обеспечивают в некотором, определенном смысле адекватность моделей (1) и (3) объекта и, соответственно, хорошее приближение управлений структуры (5) к строго оптимальным по быстродействию управлениям.

## Методики синтеза систем управления

Далее, ограничившись анализом линейных функций  $F_i[X(t)] = D_i^T X(t)$ , будем исследовать две методики синтеза квазиоптимальных по быстродействию регуляторов, которые отличаются по типу используемой модели (3) объекта второго порядка — условно адекватной и приближенно адекватной по отношению к исходной модели (1) объекта управления (эти понятия введены в первой части работы [15]).

Параметры модели (3) для объекта (1) найдем в соответствии с подходом, аналогичным используемому в первой части работы при построении модели объекта первого порядка, в котором вместо одного вектора  $\Lambda$  [15] определяются два линейно независимых вектора

$$\Lambda_1^T = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n), \quad \Lambda_2^T = (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_n) \quad (6)$$

со свойствами, подобными  $\Lambda$ , — они, как минимум, должны обеспечивать устойчивость синтезируемой системы управления. Векторам (6) отвечают агрегированные переменные

$$\psi_1(t) = \Lambda_1^T X(t), \quad \psi_2(t) = \Lambda_2^T X(t)$$

— фазовые координаты модели (3). С их использованием рассмотрим следующую задачу: для объекта (1) найти линейную модель второго порядка (3), которая в смысле работы [15] была бы адекватна исходному объекту.

Предварительно определим условия, которым должны удовлетворять векторы (6), чтобы для объекта (1) было возможно построение хотя бы одного описания (3). Умножением слева модели объекта (1) на вектор  $\Lambda_1^T$  получаем

$$\psi_1(t) = \Lambda_1^T A X(t) + \Lambda_1^T B u(t). \quad (7)$$

Для производной  $\dot{\psi}_1(t)$  на основе уравнения (3a) записываем соотношение

$$\dot{\psi}_1(t) = \alpha_{11}\Lambda_1^T X(t) + \alpha_{12}\Lambda_2^T X(t) + \beta_1 u(t). \quad (8)$$

Для равенства производных (7) и (8) должны выполняться соотношения

$$\beta_1 = \Lambda_1^T B; \quad (9a)$$

$$\alpha_{11}\Lambda_1^T + \alpha_{12}\Lambda_2^T = \Lambda_1^T A. \quad (9b)$$

Применительно к функции  $\psi_2(t)$  получаем аналогичные соотношения

$$\beta_2 = \Lambda_2^T B, \quad (10a)$$

$$\alpha_{21}\Lambda_1^T + \alpha_{22}\Lambda_2^T = \Lambda_2^T A. \quad (10b)$$

Уравнения (9a), (10a) однозначно определяют параметры  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , если известны векторы  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ . В свою очередь, искомые векторы  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  должны удовлетворять уравнениям (9b), (10b), которые после транспонирования принимают вид

$$\alpha_{11}\Lambda_1 + \alpha_{12}\Lambda_2 = A^T \Lambda_1; \quad (11a)$$

$$\alpha_{21}\Lambda_1 + \alpha_{22}\Lambda_2 = A^T \Lambda_2. \quad (11b)$$

Соотношения (11), определяющие совместно с уравнениями (9a), (10a) параметры модели объекта (3), будем рассматривать как условия адекватности модели (3) исходной модели объекта (1). Эти условия определяют так называемую условную адекватность моделей объекта. Если эти условия выполняются приближенно, то они определяют приближенную адекватность указанных моделей объекта.

Система  $2n$  линейных алгебраических уравнений (11) содержит  $2n + 4$  неизвестных ( $2n$  неизвестных компонент векторов  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  и 4 параметра  $\alpha_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , модели объекта) и поэтому имеет бесконечно большое число решений. Соответственно, на первом этапе анализа необходимо установить множество решений системы уравнений (11), обеспечивающих устойчивость синтезируемой системы управления. Как показано в первой части статьи [15], таким множеством является множество векторов  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  со всеми положительными компонентами, значения которых определяют коэффициенты некоторых гурвицевых полиномов. На втором этапе из этих допустимых решений выделяется одно, обеспечивающее максимальное быстродействие системы управления.

Приведем анализ двух способов (методик) определения такого решения. Изложим вначале методику синтеза более простую в вычислительном плане и применимую к более широкому классу объектов управления.

### Методика 3 синтеза с приближенно адекватной моделью объекта

Методика 3 во многом аналогична методике 2, изложенной в первой части работы [15] и основана не на определении, а на априорном задании компонентов векторов  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ , которые обеспечивают желаемые свойства системы по

показателям устойчивости и быстродействия. Опишем ее основные этапы, сопроводив их соответствующими пояснениями.

1. Вектор  $\Lambda_1$  задается или аналогично тому, как это делается в методике 2 на основе модифицированного полинома Баттерворса ( $n - 1$ )-го порядка [15], или на основе гурвицева полинома  $G(s) = (1 + \mu_1 s)^{n-1}$ :

$$\Lambda_1^T = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n) = (1 (n-1)\mu_1 \dots \mu_1^{n-1}) \quad (12)$$

с компонентами, равными коэффициентам указанного полинома. Этот полином обеспечивает линейной системе управления с передаточной функцией  $W(s) = 1/G(s)$  максимальное быстродействие в классе систем с вещественными корнями (собственными числами) [14, 16]. Отметим, что модифицированный полином Баттерворса обеспечивает аналогичное быстродействие в классе систем управления с комплексными корнями при заданном ограничении на перерегулирование  $\sigma_z = \Delta$  системы, где  $\Delta$  — значение "трубки", используемой для оценки времени переходных процессов динамической системы.

Параметр  $\mu_1$  выбирается в процессе моделирования системы из условия ее максимально-го быстродействия при допустимом значении перерегулирования.

2. Вектор  $\Lambda_2$  определяется подобным образом, но с другим коэффициентом преобразования  $\mu_2 \neq \mu_1$ :

$$\Lambda_2^T = (\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 \dots \bar{\lambda}_n) = (1 (n-1)\mu_2 \dots \mu_2^{n-1}). \quad (13)$$

3. При известных векторах (12), (13) с использованием уравнений (11) рассчитываются параметры модели (3).

С этой целью матричное уравнение (11a) записываем в виде

$$\Lambda \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} = A^T \Lambda_1, \quad \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2) \quad (14)$$

с известной матрицей  $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$ . Находим приближенное решение переопределенной системы уравнений (14) с использованием метода наименьших квадратов (МНК) [17]:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} = (\Lambda^T \Lambda)^{-1} \Lambda^T A^T \Lambda_1. \quad (15)$$

Аналогичным решением уравнения (11b) определяем параметры

$$\begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = (\Lambda^T \Lambda)^{-1} \Lambda^T A^T \Lambda_2. \quad (16)$$

4. Для объекта второго порядка (3) с параметрами (15), (16) и  $\beta_1 = \Lambda_1^T B$ ,  $\beta_2 = \Lambda_2^T B$  известным методом [2, 3] определяется функция переключения оптимального по быстродействию регулятора.

5. С использованием векторов (12), (13) и результата п. 4 для объекта с каноническим вектором состояния формируется искомое быстродействующее управление структуры (5):

$$u(t) = -U_m \operatorname{sign}\{\Lambda_1^T X(t) - \phi[\Lambda_2^T X(t)]\}.$$

6. Если описание объекта (1) представлено в неканоническом фазовом пространстве, то известными способами [2, 16] находится линейное преобразование фазовых координат объекта  $X(t) = CZ(t)$  с невырожденной матрицей  $C$ , при которой описание объекта принимает каноническую форму Фробениуса. С использованием результата п. 5 и матрицы  $C^{-1}$  искомое управление структуры (5) объектом с неканоническим вектором состояния определяется выражением вида

$$u(t) = -U_m \operatorname{sign}\{\Lambda_1^T C^{-1} X(t) - \phi[\Lambda_2^T C^{-1} X(t)]\}. \quad (17)$$

Исследуем особенности данной методики синтеза на примере решения задачи быстродействия для объекта третьего порядка.

**Пример 1.** Применим методику 3 к конструированию быстродействующей системы управления объектом

$$\begin{aligned} \gamma T^2 \ddot{x}_1(t) + (1 + \gamma) T \ddot{x}_1(t) + \dot{x}_1(t) &= k u(t); \\ |u(t)| &\leq U_m \end{aligned} \quad (18)$$

с параметрами  $T > 0$ ,  $k > 0$ ,  $0 < \gamma < 1$ ,  $U_m = 1$ . Этот объект рассматривался в первой части работы, и его выбор связан с тем, что для него известно строго оптимальное по быстродействию управление [18]:

$$u(t) = -U_m \operatorname{sign}[\sigma(X(t))]; \quad \sigma(X) = \gamma^2 \frac{x_3 - x_{1K}}{k} - \left\{ \begin{aligned} &\ln \left\{ 1 - \gamma[(1 - \gamma)x_1 + \gamma x_2 - x_3] \frac{\operatorname{sign}(W)}{k} \right\} - \\ &- \ln \left\{ 2 \left\{ 1 + \sqrt{1 - [1 + (\gamma/k)(x_2 - x_3)\operatorname{sign}(W)] \times \exp(-(\gamma/k)(x_3 - x_{1K})\operatorname{sign}(W))} \right\}^\gamma - \right. \\ &\left. - \left\{ 1 + \sqrt{1 - [1 + (\gamma/k)(x_2 - x_3)\operatorname{sign}(W)] \times \exp(-(\gamma/k)(x_3 - x_{1K})\operatorname{sign}(W))} \right\}^{2\gamma} \right\}, \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

где

$$W = \{1 - [1 - (\gamma/k)(x_2 - x_3)\operatorname{sign}(x_3 - x_{1K})] \times \exp(-(\gamma/k)(x_3 - x_{1K}))\} \operatorname{sign}(x_3 - x_{1K}),$$

$x_{1K}$  — конечное значение первой фазовой координаты объекта, при этом предполагается  $x_{2K} = x_{3K} = 0$ . Управление (19) записано с использованием следующих фазовых координат объекта (18):

$$x_2(t) = T \dot{x}_1(t) + x_1(t), \quad x_3(t) = \gamma T \dot{x}_2(t) + x_2(t).$$

Знание оптимального управления (19) позволяет оценить степень приближения к нему синтезируемых приближенных алгоритмов управления.

При применении методики 3 объект (18) удобнее описывать в каноническом фазовом пространстве ( $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ ,  $x_3(t) = \dot{x}_2(t)$ ) уравнением

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t), \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$a_2 = -\frac{1}{\gamma T^2}, \quad a_3 = -\frac{1 + \gamma}{\gamma T}, \quad b_3 = \frac{k}{\gamma T^2}$$

Последовательно выполняем процедуры методики синтеза.

1. Вектор  $\Lambda_1$  задаем на основе соотношения (12) при  $n = 3$ :

$$\Lambda_1^T = (1 \quad 2\mu_1 \quad \mu_1^2), \quad \mu_1 = 1,15.$$

2. Вектор  $\Lambda_2$  определяем аналогично, но с коэффициентом  $\mu_2 = 0,9$ :

$$\Lambda_2^T = (1 \quad 2\mu_2 \quad \mu_2^2).$$

3. Находим параметры модели (3) с использованием уравнений (15), (16):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1,136 \\ 1,144 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,610 \\ 0,620 \end{pmatrix}, \\ \beta_1 &= 0,405, \quad \beta_2 = 0,661. \end{aligned} \quad (21)$$

4. Для объекта второго порядка (3) с параметрами (21) определяем функцию переключения оптимального по быстродействию регулятора.

Так как этот объект имеет вещественные корни  $p_1 = -0,528$ ,  $p_2 = 0,013$ , то синтез опти-

мального регулятора проведем с использованием результата работы [2]. Для этого осуществим преобразование координат  $\Psi(t) = PZ(t)$  объекта (3) с матрицей

$$P = M \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,883 & -0,706 \\ -0,469 & -0,708 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} -1,156 & 0 \\ 0 & -106,523 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,021 & 75,182 \\ 0,542 & 75,465 \end{pmatrix},$$

где  $M$  — матрица, составленная из собственных векторов матрицы параметров объекта (3);  $k_1, k_2$  — масштабирующие коэффициенты, обеспечивающие в преобразованных уравнениях объекта равенство параметров его корням:

$$\dot{z}_1(t) = p_1 z_1(t) + p_1 u(t); \quad (22a)$$

$$\dot{z}_2(t) = p_2 z_2(t) + p_2 u(t). \quad (22b)$$

Для объекта (22) оптимальное по быстродействию управление согласно работе [2] описывается уравнениями

$$u(t) = -U_m \text{sign}[z_2(t) - \varphi(z_1(t))]; \quad (23)$$

$$\varphi(z_1) = \text{sign}(z_1)[(1 + |z_1|)^\alpha - 1], \alpha = p_2/p_1.$$

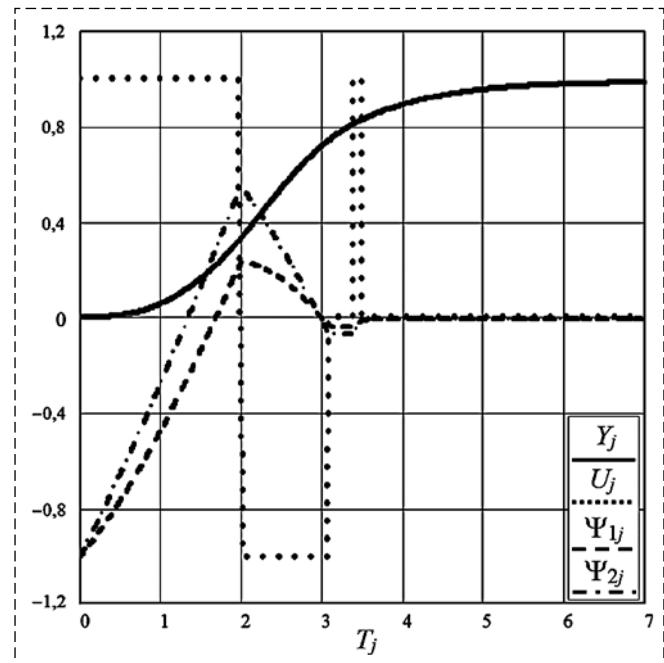
5. С использованием результатов предыдущих пунктов формируется квазиоптимальное по быстродействию управление. Оно получается заменой в алгоритме управления (23) компонент вектора  $Z$  соотношениями

$$Z(t) = P^{-1}\Psi(t) = \begin{pmatrix} 2,081 & -2,073 \\ -0,015 & 0,028 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1^T X(t) \\ \Lambda_2^T X(t) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

т. е. искомое управление описывается совокупностью уравнений (23), (24).

Переходные процессы системы с данным управлением при отработке задания  $X_z = 1$  представлены на рисунке. Необходимо отметить, что при моделировании системы использовался релейный элемент с небольшой зоной нечувствительности 0,0001. На рисунке приняты следующие обозначения: компоненты вектора  $Y_j$  равны значениям фазовой координаты  $x_1(t)$  в дискретные моменты времени  $T_j = \Delta T j$ ,  $\Delta T = 0,007$  с,  $j = 0, 1, \dots, 1000$ , системы с управлением (23), (24), значения которого в те же моменты времени обозначены как компоненты вектора  $U_j$ ; соответственно, компоненты векторов  $\Psi_{1j}, \Psi_{2j}$  отвечают аналогичным значениям макропеременных  $\psi_1(t), \psi_2(t)$  системы.

Анализ графиков на рисунке показывает, что исследуемая система управления в сравнении с системами, рассмотренными в первой части статьи [15], имеет не один и не два, а три интервала с максимальным значением управления ( $+U_m$  или  $-U_m$ ) — это качественно ближе к строго оптимальной системе. Однако она отличается относительно большим временем регулирования  $t_p = 5,00$  в сравнении с оптимальной системой ( $t_3 = 4,412$ ). Это время не удалось уменьшить за счет дальнейших вариаций коэффициентов преобразования  $\mu_1, \mu_2$  в векторах  $\Lambda_1, \Lambda_2$ . Минимальное время регулирования было получено изменением в данных векторах параметра  $d = 2$  до значения  $d = 1,58$ . При указанных параметрах система управления приобретает комплексные корни и допустимое перерегулирование  $\sigma = 4,11\%$  — меньшее, чем заданное  $\sigma_z = 4,321\%$ . При этом система имеет моменты переключения  $t_1 = 2,256, t_2 = 4,056, t_3 = 4,712$ , достаточно близкие к моментам  $t_1 = 2,188, t_2 = 3,864, t_3 = 4,412$  строго оптимальной системы управления. Интересно отметить, что время переходных процессов сравниваемых систем, определяемое с использованием "трубки"  $\Delta = \sigma_z = 4,321\%$ , соответственно равно 3,50 и 3,64. Меньшее время регулирования квазиоптимальной системы объясняется наличием в ней принятого допустимого перерегулирования.



Переходные процессы системы с алгоритмом управления (23), (24)

Transient processes of systems with control algorithm (23), (24)

## Методика 4 синтеза с условно адекватной моделью объекта

Данная методика в отличие от методики 3 предполагает точное определение параметров модели (3) с использованием известных методов нахождения собственных чисел и векторов матриц [17].

Из уравнения (11a) выражаем вектор

$$\Lambda_2 = \frac{1}{\alpha_{12}}(A^T - \alpha_{11}E)\Lambda_1 \quad (25)$$

и подставляем в уравнение (11b):

$$\begin{aligned} \alpha_{21}\Lambda_1 &= (A^T - \alpha_{22}E)\Lambda_2 = \\ &= (A^T - \alpha_{22}E) \frac{1}{\alpha_{12}}(A^T - \alpha_{11}E)\Lambda_1. \end{aligned}$$

Записав это уравнение в форме

$$(A^T - \alpha_{22}E)(A^T - \alpha_{11}E)\Lambda_1 = \alpha_{12}\alpha_{21}\Lambda_1, \quad (26)$$

сводим исходную задачу синтеза к решению задачи определения собственных чисел  $\alpha = \alpha_{12}\alpha_{21}$  и собственных векторов матрицы

$$A_2 = (A^T - \alpha_{22}E)(A^T - \alpha_{11}E). \quad (27)$$

Соответственно, предлагаемая методика 4 синтеза предполагает выполнение следующих процедур.

1. С использованием, например, стандартной программы *eigenvals(A)* математической системы MathCAD определяем все собственные числа (корни)  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , матрицы  $A_2$  и все ее собственные векторы  $\Lambda_1$ .

2. На основе результатов п. 1 с использованием соотношения (25) рассчитываем возможные значения вектора  $\Lambda_2$ .

3. С использованием утверждений 1 и 2 [15] для каждого вектора  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  в отдельности выбираем единственное значение вектора и соответствующее им собственное число  $\alpha$ , определяющие быстродействующее управление объектом (1).

4. На основе результатов п. 3 определяем искомое управление структуры (17).

Исследуем особенности предложенной методики на примере синтеза системы управления объектом третьего порядка.

**Пример 2.** С использованием методики 4 проведем синтез быстродействующей системы управления объектом (20). При синтезе дополнительно предположим, что последняя компонента вектора  $\Lambda_1$  нулевая ( $\lambda_3 = 0$ ), это в соответ-

ствии с выражением  $\beta_1 = \Lambda_1^T B = 0$  упрощает модель объекта (3), которая будет представлять типовое апериодическое звено второго порядка. Для этого звена непосредственно применим алгоритм оптимального управления работы [2].

Синтез осуществим в аналитической форме в целях выявления общих особенностей методики синтеза и, в частности, покажем, что для объекта (20) существует множество допустимых значений векторов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  (оно определяется значениями двух непрерывных параметров), при которых система управления устойчива.

Последовательно выполняем процедуры методики синтеза.

1. Определяем собственные числа и векторы матрицы (27):

$$\begin{aligned} A_2 &= (A^T - \alpha_{22}E)(A^T - \alpha_{11}E) = \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha_{22} & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha_{22} & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 - \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_{11} & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha_{11} & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 - \alpha_{11} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{11} - \alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{22} + a_2 & -\alpha_{22}a_2 + a_2(a_3 - \alpha_{11}) \\ 1 & -\alpha_{11} - \alpha_{22} + a_3 & a_2 + (a_3 - \alpha_{11})(a_3 - \alpha_{22}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

С учетом вида матрицы (28) для искомого вектора  $\Lambda_1 = (\lambda_1 \lambda_2 0)^T$  уравнение (26) принимает вид системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{22} & 0 \\ -\alpha_{11} - \alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{22} + a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \alpha_{12}\alpha_{21} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}; \quad (29)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2(-\alpha_{11} - \alpha_{22} + a_3) = 0.$$

Задача (29) на собственные значения параметра  $\alpha = \alpha_{12}\alpha_{21}$  имеет решение, если

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha & 0 \\ -\alpha_{11} - \alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{22} + a_2 - \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (30)$$

т. е.  $(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha)(\alpha_{11}\alpha_{22} + a_2 - \alpha) = 0$ .

Квадратное уравнение (30) относительно переменной  $\alpha$  имеет два решения

$$\alpha_1 = \alpha_{11}\alpha_{22}, \quad \alpha_2 = \alpha_{11}\alpha_{22} + a_2, \quad (31)$$

которые являются искомыми собственными числами матрицы (28).

Теперь найдем собственные векторы этой матрицы вида  $\Lambda_1 = (\lambda_1 \lambda_2 0)^T$ . Если положить  $\alpha = a_2 = \alpha_{11}\alpha_{22} + a_2$ , то из уравнений (29) следует  $\lambda_1 = 0$ , что неприемлемо (в дальнейшем система управления получается неустойчивой). Поэтому полагаем собственное значение

$\alpha = \alpha_2 = \alpha_{11}\alpha_{22}$ , для которого уравнения (29) принимают вид

$$\begin{aligned}\lambda_1(-\alpha_{11} - \alpha_{22}) + \lambda_2 a_2 &= 0; \\ \lambda_1 + \lambda_2(-\alpha_{11} - \alpha_{22} + a_3) &= 0.\end{aligned}\quad (32)$$

Эта система однородных уравнений имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$(-\alpha_{11} - \alpha_{22})(-\alpha_{11} - \alpha_{22} + a_3) - a_2 = 0. \quad (33)$$

Квадратное уравнение (33) относительно переменной  $\chi = -(\alpha_{11} + \alpha_{22})$  имеет два решения

$$\chi_{1,2} = -0,5a_3 \pm \sqrt{0,25a_3^2 + a_2}. \quad (34)$$

Подставляя в (34) значения параметров объекта (20), получаем

$$\chi_{1,2} = \frac{1+\gamma}{2\gamma T} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\gamma}{2\gamma T}\right)^2 - \frac{1}{\gamma T^2}} = \frac{1+\gamma}{2\gamma T} \pm \frac{1-\gamma}{2\gamma T}.$$

Отсюда следует, что переменная  $\chi = -(\alpha_{11} + \alpha_{22})$  может принимать два значения

$$\chi_1 = 1/\gamma T, \quad \chi_2 = 1/T. \quad (35)$$

Они согласно уравнениям (32) определяют значения собственного вектора

$$\Lambda_1^T = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ 0), \quad \lambda_2 = -\lambda_1 \chi / a_2, \quad (36)$$

где  $\lambda_1 = \text{var}$  — свободный параметр, подлежащий выбору.

2. На основе результата (36) с использованием соотношения (25) рассчитываем значения вектора

$$\begin{aligned}\Lambda_2 &= \frac{1}{\alpha_{12}} \begin{pmatrix} -\alpha_{11} & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha_{11} & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 - \alpha_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\alpha_{12}} \begin{pmatrix} -\alpha_{11}\lambda_1 \\ \lambda_1 - \alpha_{11}\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1}{\alpha_{12}} \begin{pmatrix} -\alpha_{11} \\ 1 + \alpha_{11}\chi/a_2 \\ -\chi/a_2 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (37)$$

для двух возможных значений (35) параметра  $\chi$ .

3. Для каждого вектора  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  выбираем единственное значение вектора, определяющее быстродействующее управление объектом (20).

Во-первых, для устойчивости синтезируемой системы обеспечим положительные значения компонентам векторов. Для вектора (36) это можно сделать простым выбором значений свободного параметра  $\lambda_1 > 0$ , так как  $a_2 < 0$  согласно уравнениям объекта (20).

Компоненты вектора (37) определяются параметрами, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_{12}\alpha_{21} = \alpha_{11}\alpha_{22}; \\ \chi &= -(\alpha_{11} + \alpha_{22}) = 1/\gamma T.\end{aligned}\quad (38)$$

В этих и последующих уравнениях указывается одно первое значение переменной (35), так как из него просто получается второе значение переменной при  $\gamma = 1$ . В уравнениях (38) параметр  $\alpha$  — это свободный параметр, подлежащий выбору.

Рассматривая (38) как систему уравнений относительно неизвестных  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ , находим

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= -1/2\gamma T + \sqrt{(1/2\gamma T)^2 - \alpha}; \\ \alpha_{22} &= -1/2\gamma T - \sqrt{(1/2\gamma T)^2 - \alpha}.\end{aligned}\quad (39)$$

В выражениях (39) полагаем значение параметра  $\alpha \leq (1/2\gamma T)^2$ , так как коэффициенты  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$  модели (3) должны быть вещественными.

Рассмотрим граничное значение  $\alpha = (1/2\gamma T)^2$ , при котором получается вариант модели (3) с параметрами

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \alpha_{22} = -1/(2\gamma T) < 0; \\ \alpha_{21} &= 1/(4\gamma^2 T^2 \alpha_{12}) > 0.\end{aligned}\quad (40)$$

При данных значениях параметров (40) и свободного параметра  $\lambda_1 > 0$  компоненты вектора (37) принимают положительные значения, обеспечивающие устойчивость синтезируемой системы управления. При значениях  $\alpha \leq (1/2\gamma T)^2$  из (39) можно найти параметры

$$\alpha_{11} \neq \alpha_{22} < 0, \quad \alpha_{21} = \alpha/\alpha_{12} > 0,$$

при которых с учетом  $\lambda_1 > 0$  компоненты вектора (37) принимают также положительные значения. Таким образом, множество допустимых значений векторов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ , при которых система управления устойчива, задается двумя свободными параметрами со значениями  $\alpha \leq (1/2\gamma T)^2$  и  $\lambda_1 > 0$ .

В последующем моделировании системы можно определить значения  $\alpha$  и  $\lambda_1$ , при которых она имеет максимальное быстродействие.

4. С использованием векторов (36) и (37), имеющих указанные допустимые значения, находим искомое управление структуры (17). Данный этап полностью совпадает с аналогичным этапом примера 1.

Моделирование синтезированной системы управления объектом (20) с параметрами  $T = 2$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $k = 1$ ,  $U_m = 1$  показало ее работоспособность, но время переходных процессов в ней не удалось получить менее, чем в системе примера 1, что согласуется с результатами первой части статьи [15].

## Выводы

1. В работе развивается подход к синтезу квазиоптимальных по быстродействию алгоритмов управления линейными объектами высокого порядка, предложенный в первой части работы, на основе применения известных оптимальных алгоритмов управления объектами второго порядка. Он предполагает разработку способов (методик) преобразования модели объекта высокого порядка к моделям второго порядка. В работе предложены и исследованы две методики синтеза, использующие условно и приближенно адекватные модели объекта второго порядка.

2. Алгоритмы управления, синтезированные по методике 3, являются более сложными в сравнении с алгоритмами, полученными с применением методик 1 и 2 первой части работы (они используют не только линейные обратные связи), но позволяют, как показывает моделирование, получить время переходных процессов системы управления, практически не отличающееся от времени регулирования оптимальной системы. Более того, при наличии небольшого допустимого перерегулирования ( $\sigma \leq 4,3\%$ ) время регулирования может быть даже меньше, чем в оптимальной системе. Так как реализация данных алгоритмов управления с применением цифровой техники не вызывает принципиальных затруднений, то методика 3, как и методики 1, 2 синтеза, рекомендуется к применению.

3. Реализация методики 4 отличается относительной сложностью и требует конкретизации способа выбора наилучшего управления из множества допустимых управлений.

4. Предложенный подход и методики синтеза квазиоптимальных регуляторов применимы при использовании также других функционалов качества управления, в частности, критерия энергосбережения, а также комбинированного критерия энергосбережения—быстродействия.

## Список литературы

1. Понtryгин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкrelidze Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 302 с.
2. Athans M., Falb P. L. Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications. New York: McGraw-Hill, 1966.
3. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
4. Клюев А. С., Колесников А. А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
5. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Гибридная схема решения задачи линейного быстродействия на основе формализма полиэдральной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 3—9.
6. Каюмов О. Р. Глобально управляемые механические системы. М.: Физматлит, 2007. 168 с.
7. Weinberg L. Network Analysis and Synthesis. New York: McGraw-Hill, 1962.
8. Ловчаков В. И. Функции переключения оптимального по быстродействию регулятора для четырехкратного интегратора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 9. С. 3—6.
9. Сурков В. В., Сухинин Б. В., Ловчаков В. И., Соловьев А. Э. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов по критериям точности, быстродействию, энергосбережению. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. 300 с.
10. Нейдорф Р. А. Эффективная аппроксимация кусочных функций в задачах квазиоптимального по быстродействию управления // Сб. трудов междунар. науч. конф. "Математические методы в технике и технологиях ММТТ—2000". СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. № 2. С. 18—22.
11. Нейдорф Р. А. Рекуррентно-диффеоморфный синтез квазионтимальных по быстродействию ограниченных законов управления // Информатика и системы управления. 2006. № 2. С. 119—128.
12. Крючков В. В., Козлов Д. В., Шопин А. С. Аппроксимация поверхности переключения релейного регулятора с использованием уравнения в частных производных и нейросетей // Известия ТулГУ. Технические науки. 2010. № 1. С. 198—205.
13. Колесников А. А. Основы теории синергетического управления. М.: Фирма "Испо-Сервис", 2000. 264 с.
14. Пупков К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. 736 с.
15. Ловчаков В. И. К аналитическому синтезу приближенно оптимальных по быстродействию регуляторов для линейных объектов. Ч. 1. Использование модели объекта первого порядка // Мехатроника, автоматизация, управление. 2022. Т. 23, № 2. С. 68—78.
16. Ловчаков В. И. Синтез линейных систем управления с максимальным быстродействием и заданным перерегулированием // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 9. С. 499—510.
17. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
18. Техническая кибернетика. Теория автоматического управления. Книга 3. Часть II. / Под ред. В. В. Соловьева. М.: Машиностроение, 1969. 368 с.

# Analytical Synthesis of Quasi-Optimal Regulators for Linear Objects Based on Conditionally Adequate Low-Order Models. Part 2

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru,  
Tula State University, Tula, 300600, Russian Federation

Corresponding author: Lovchakov Vladimir I., Full Professor, Tula State University, Department of Electrical Engineering and Electrical Equipment, Tula, 300600, Russian Federation e-mail: lovvi50@mail.ru

Accepted on November 3, 2021

## Abstract

For linear high-order plants ( $n \geq 4$ ), analytical (exact) control algorithms in the form of feedback that are optimal in terms of the rapid response criterion are practically unknown, and for them the problem of synthesizing approximately rapid response control laws remains relevant. In this part of the work, an approach to the synthesis of rapid response high-order systems is developed, proposed in its first part, using the idea of transforming the original rapid response problem to a similar problem of controlling objects described by models of the first or second order, for which the optimal control algorithms in terms of rapid response are known. These algorithms underlie the investigated approach to the synthesis of rapid response control systems, which involves finding special functions that describe the relationship between the phase coordinates of models of a low-order object (by analogy with the works of A. A. Kolesnikov, they are called aggregated or macro-variables) with the phase coordinates of the original high-order object as well as the calculation of the parameters of the low-order models used, which in a certain sense ensure their adequacy to the original object and, accordingly, the rapid response of the synthesized systems. In this part of the work, in contrast to its first part, the synthesis uses two models of an object, not of the first, but of the second order, which are characterized by conditional and approximate adequacy in relation to the original model of a high-order object. In the case of conditional adequacy, the parameters of the low-order model are found exactly using the eigenvalues and vectors of the original object, and with approximate adequacy, using the least squares method. On the basis of these two second-order models, two methods for the synthesis of quasi-optimal controllers are developed, which differ in the use of nonlinear feedbacks that provide an increased rapid response of the designed control system that is sufficiently close to the limiting values. In particular, by the example of modeling, it is shown that Accordingly, the main content of the work is devoted to the results of a comparative analysis of the properties of these rapid response controllers, as well as the analysis of the features and conditions of applicability of the proposed synthesis methods.

**Keywords:** linear control object, rapid response, overshoot, relay controller, analytical design of the system

For citation:

Lovchakov V. I. Analytical Synthesis of Quasi-Optimal Regulators for Linear Objects Based on Conditionally Adequate Low-Order Models. Part 2, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 115–124.

DOI: 10.17587/mau.23.115-124

## References

1. Pontriagin L. S., Bol'tianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. Mathematical theory of optimal processes, Moscow, Fizmatlit, 1961, 302 p (in Russian).
2. Athans M., Falb P. L. Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications, McGraw-Hill, New York, 1966.
3. Ivanov V. A., Faldin N. V. The theory of optimal control systems, Moscow, Nauka, 1981, 336 p (in Russian).
4. Kliuev A. S., Kolesnikov A. A. The optimization of control systems by time-optimality, Moscow, Energoizdat, 1982, 240 p (in Russian).
5. Filimonov A. B., Filimonov N. B. The hybrid scheme of the task solution of linear time-optimality based on the formalism of the polyhedral optimization, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 7, pp. 3–9 (in Russian).
6. Kayumov O. R. Globally controlled mechanical systems, Moscow, Fizmatlit, 2007, 168 p (in Russian).
7. Weinberg L. Network Analysis and Synthesis, New York, McGraw-Hill, 1962.
8. Lovchakov V. I. The functions of switching optimal time-optimality controller for the quadruple integrator, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no. 9, pp. 3–5 (in Russian).
9. Surkov V. V., Suhinin B. V., Lovchakov V. I., Solov'ev A. Je. Analytical design of optimal controllers according to the criteria of accuracy, speed, energy saving, Tula, Publishing house of TULGU, 2005, 300 p. (in Russian).
10. Nejdford R. A. Effective approximation of piecewise functions in problems of quasi-optimal control in terms of speed, *Sb. trudov mezhdunar. nauch. konf. "Matematicheskie metody v tekhnike i tehnologijah MMTT—2000"*, 2000, no. 2, pp. 18–22 (in Russian).
11. Nejdford R. A., Chan N. N. Recurrent-diffeomorphic synthesis of bounded control laws that are quasi-optimal in speed, *Informatika i Sistemy Upravlenija*, 2006, no. 2, pp. 119–128 (in Russian).
12. Krjuchkov V. V., Kozlov D. V., Shopin A. S. Approximation of the switching surface of a relay controller using partial differential equations and neural networks, *Izvestiya TulGU. Tehnicheskie nauki*, 2010, no. 1, pp. 198–205 (in Russian).
13. Kolesnikov A. A. Fundamentals of the theory of synergetic control, Moscow, Firma "Ispo-Servis", 2000, 264 p (in Russian).
14. Pupkov K. A. Methods of classical and modern control theory: 3 volumes, Moscow, Publishing house of MGTU im. N. E. Baumana, 2000 (in Russian).
15. Lovchakov V. I. Analytical Synthesis of Quasi-Optimal Regulators for Linear Objects Based on Conditionally Adequate Low-Order Models. Part 1, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 2, pp. 68–78 (in Russian).
16. Lovchakov V. I. Synthesis of linear control systems with maximum speed and given overshoot, *Mekhatronika, avtomatizacija, upravlenie*, 2020, no. 9, pp. 499–510 (in Russian).
17. Korn G., Korn T. A guide to mathematics for scientists and engineers, Moscow, Nauka, 1974, 832 p (in Russian).
18. Solodovnikov V. V. ed. Technical cybernetic. Theory of automatic control. Book 3. Part II. Theory of nonstationary, nonlinear, self-tuning systems of automatic control, Moscow, Mashinostroenie, 1969, 368 p (in Russian).

**Нгуен Хак Тунг**, аспирант, ngyuenkhactunghvhq1994@gmail.com,  
**С. М. Власов**, канд. техн. наук, доц., smvlasov@itmo.ru, **А. А. Пыркин**, д-р тех. наук, проф., pyrkin@itmo.ru,  
 Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург

## Алгоритм идентификации параметров синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой

Предлагается новый метод оценки параметров несмещенного синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. Сигналы данного типа могут наблюдаться в широком диапазоне природных явлений, таких как распространение акустических волн, а также могут характеризовать сложное взаимодействие между компонентами энергосистем. Поэтому, на взгляд авторов, задача оценивания параметров синусоидальных сигналов с экспоненциально затухающей амплитудой является актуальной в настоящее время. Предполагается, что фаза, частота, коэффициент затухания амплитуды сигнала являются неизвестными функциями времени. Предлагается новый метод для параметризации синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. На первом этапе сигнал представлен как выход линейного генератора, параметры затухающего синусоидального сигнала (амплитуда, фаза, коэффициент затухания и частота) неизвестны. Далее применяется жорданова форма матрицы и запаздывания для преобразования измеряемого сигнала, затем выводится линейная регрессионная модель, которая зависит от частоты и коэффициента затухания. На последнем этапе неизвестные параметры (частота, коэффициент затухания) рассчитываются из полученных моделей линейной регрессии. Численное моделирование демонстрирует эффективность предложенного алгоритма.

**Ключевые слова:** синусоидальные сигналы, идентификация, жорданова форма матрицы, частота, коэффициент затухания, линейная регрессионная модель

### Введение

Задача идентификации параметров синусоидальных сигналов для случая стационарных амплитуд хорошо изучена, например в работах [1–10]. В статьях [3, 4] представлены методы идентификации частот сигнала, содержащего известное число гармоник. Эти методы обеспечивают глобальную асимптотическую сходимость настраиваемых параметров к истинным значениям.

В данной работе представлен метод идентификации параметров синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. Такой сигнал может наблюдаться в широком диапазоне природных явлений, таких как распространение акустических волн, но может также характеризовать поведение искусственных систем, возникающее, например, как следствие сложного взаимодействия между компонентами энергосистем. Оценивание параметров экспоненциально затухающего синусоидального сигнала является актуальной задачей в настоящее время, поскольку синусоидальные параметры описывают качественное поведение связанной системы. Например, колебания с изменяющейся во времени амплитудой в энергосистемах могут быть предвестником нестабильности из-за неисправностей оборудования или других неисправностей. В этом контексте точная и быстрая

идентификация этих колебаний требует значительных исследований.

Классические методы оценивания частот затухающих синусоидальных сигналов предложены в работах [10–12]. В работе [13] представлен адаптивный алгоритм, основанный на принципе внутренней модели с дискретным временем, для идентификации экспоненциально затухающих синусоидальных сигналов. В работе [14] предложен метод оценки параметров затухающего синусоидального сигнала: частоты, коэффициента затухания, смещения, амплитуды и фазы. Схема состоит из двух частей. На первом этапе оцениваются частота, коэффициент затухания и смещение. На втором этапе проводят оценки амплитуды и фазы: для параметризации сигнала применяют блоки запаздывания и используют метод динамического расширения и смещения регрессоров для оценивания неизвестных параметров регрессионной модели. Алгоритм оценивания частоты на основе скользящего режима был предложен в работе [15] для экспоненциально затухающего синусоидального сигнала без смещения.

В настоящей работе предложен новый алгоритм идентификации частоты и коэффициента затухания синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. В предположении, что частота, амплитуда и фаза синусоидального сигнала являются по-

стоянными и неизвестными параметрами, синтезируется алгоритм идентификации, который обеспечивает сходимость настроенной оценки частоты к истинному значению.

### Постановка задачи

Рассмотрим измеряемый сигнал

$$y(t) = Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi), \quad (1)$$

где  $A \in \mathbb{R}$  — амплитуда;  $\omega \in \mathbb{R}$  — частота;  $\phi \in \mathbb{R}$  — фаза;  $\gamma$  — коэффициент затухания;  $A, \omega, \phi, \gamma$  — неизвестные постоянные параметры.

Требуется синтезировать алгоритм оценивания частоты  $\hat{\omega}(t)$ ,  $\hat{\gamma}(t)$ , обеспечивающий выполнение условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\omega(t) - \hat{\omega}(t)) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} (\gamma(t) - \hat{\gamma}(t)) = 0. \quad (2)$$

Введем следующее

**Допущение 1:** известны минимальная частота  $\underline{\omega}$  и максимальная частота  $\bar{\omega}$ , причем  $0 < \underline{\omega} \leq \omega \leq \bar{\omega}$ .

### Параметризация затухающего синусоидального сигнала

Рассмотрим задачу построения модели линейной регрессии с измеряемыми переменными и вектором постоянных параметров, зависящих от неизвестной частоты  $\omega$  и коэффициента затухания  $\gamma$ .

Сигнал  $y(t)$  может быть представлен как выходы линейных генераторов [16]:

$$y(t) = \mathbf{H}^T \xi(t); \quad (3)$$

$$\dot{\xi}(t) = \Gamma \xi(t), \quad (4)$$

где  $\xi \in \mathbb{R}^q$  — вектор состояния генератора с начальным значением  $\xi(0)$ ;  $\Gamma \in \mathbb{R}^{q \times q}$  — матрица постоянных коэффициентов;  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^q$  — вектор соответствующей размерности.

### Построение генератора сигнала $y(t)$

Выберем в качестве первой координаты вектора состояния генератора сам сигнал  $\xi_1 = y$ . Дифференцируя  $\xi_1$ , получим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi); \\ \dot{\xi}_1 &= \dot{y}(t) = -\gamma Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) + \\ &+ Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)\omega = -\gamma \xi_1 + \dot{\xi}_1 + \gamma \xi_1 = \dot{\xi}_1. \end{aligned}$$

Выберем в качестве первой координаты вектора состояния генератора производную синусоидального сигнала  $\xi_2 = \dot{y}$ . Дифференцируя  $\xi_2$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \ddot{y}(t) = \gamma^2 Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi) - \\ &- \gamma Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi)\omega - \gamma Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi) - \\ &- Ae^{-\gamma t} \sin(\omega t + \phi)\omega^2; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \gamma^2 \xi_1 - 2\gamma(\dot{\xi}_1 + \gamma \xi_1) - \omega^2 \xi_1 = \\ &= -2\gamma \dot{\xi}_1 - \gamma^2 \xi_1 - \omega^2 \xi_1. \end{aligned}$$

Для векторно-матричной формы (3)–(4) имеем

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \gamma^2 & -2\gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Преобразовав уравнение (4), получим

$$\dot{\xi}(t) = \Gamma \xi(t) \Rightarrow \xi(t) = e^{\Gamma t} \xi(0). \quad (7)$$

Подставляя соотношение (7) в уравнение (3), получим

$$y(t) = \mathbf{H}^T e^{\Gamma t} \xi(0). \quad (8)$$

Рассмотрим запаздывающий сигнал

$$y(t-d) = \mathbf{H}^T e^{\Gamma(t-d)} \xi(0) = \mathbf{H}^T e^{\Gamma t} e^{-\Gamma d} \xi(0). \quad (9)$$

**Замечание 1.** Введем ограничения на выбранную величину запаздывания из соотношения (9):

$$d < \frac{\pi}{\bar{\omega}}.$$

На основе уравнения (7) и (9) получим

$$y(t-d) = \mathbf{H}^T e^{-\Gamma d} \xi(t). \quad (10)$$

**Утверждение 1.** Для сигнала  $y(t-d)$  справедливо соотношение

$$y(t-d) = \mathbf{H}^T e^{\gamma d} \times \begin{bmatrix} \cos \omega d + \gamma \omega^{-1} \sin \omega d & -\omega^{-1} \sin \omega d \\ (\omega^2 + \gamma^2) \omega^{-1} \sin \omega d & \cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d \end{bmatrix} \xi(t).$$

*Доказательство утверждения 1:*

Применим жорданову форму для преобразователя  $e^{-\Gamma d}$ .

Вычислим собственные значения матрицы  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \det(\Gamma - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\omega^2 - \gamma^2 & -2\gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda\gamma + \omega^2 + \gamma^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -\gamma + i\omega, \lambda_2 = -\gamma - i\omega. \end{aligned}$$

Для каждого из собственных значений найдем собственные векторы. Для числа  $\lambda_1 = -\gamma + i\omega$  получим

$$\begin{bmatrix} \gamma - i\omega & 1 \\ -\omega^2 - \gamma^2 & -\gamma - i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (\gamma - i\omega)x_1 + y_1 = 0; \\ (-\omega^2 - \gamma^2)x_1 + (-\gamma - i\omega)y_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1 = (i\omega - \gamma)x_1.$$

Полагая  $x_1 = 1$ , находим собственный вектор  $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)^T$ :

$$x_1 = 1, \Rightarrow y_2 = -\gamma + i\omega, \Rightarrow \mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\gamma + i\omega \end{bmatrix}.$$

Аналогично находим собственный вектор  $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)^T$ , ассоциированный с собственным значением  $\lambda_2 = -\gamma - i\omega$ :

$$\begin{bmatrix} \gamma + i\omega & 1 \\ -\omega^2 - \gamma^2 & -\gamma + i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (\gamma + i\omega)x_2 + y_2 = 0; \\ -\omega^2 x_2 + i\omega y_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_2 = -(\gamma + i\omega)x_2.$$

Полагая  $x_2 = 1$ , находим собственный вектор  $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)^T$ :

$$x_2 = 1, \Rightarrow y_2 = -\gamma - i\omega, \Rightarrow \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\gamma - i\omega \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу  $\mathbf{V}$  из найденных собственных векторов  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$ :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (i\omega - \gamma) & -(\gamma + i\omega) \end{bmatrix}.$$

Запишем жорданову форму  $J_\Gamma$  для заданной матрицы  $\Gamma$ , используя форму

$$\mathbf{J}_\Gamma = \mathbf{V}^{-1} \Gamma \mathbf{V} = \frac{1}{-2i\omega} \begin{bmatrix} -(\gamma + i\omega) & -1 \\ -(i\omega - \gamma) & 1 \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \gamma^2 & -2\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (i\omega - \gamma) & -(\gamma + i\omega) \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{-2i\omega} \begin{bmatrix} \gamma^2 + \omega^2 & \gamma - i\omega \\ -\gamma^2 - \omega^2 & -\gamma - i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega - \gamma & -\gamma - i\omega \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} i\omega - \gamma & 0 \\ 0 & -i\omega - \gamma \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу  $e^{\mathbf{J}_\Gamma d}$  в следующей виде [17]:

$$e^{\mathbf{J}_\Gamma d} = e^{-\gamma d} \begin{bmatrix} e^{i\omega d} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega d} \end{bmatrix}.$$

Вычислим матричную экспоненту  $e^{\Gamma d}$ :

$$\begin{aligned} e^{\Gamma d} &= \mathbf{V} e^{\mathbf{J}_\Gamma d} \mathbf{V}^{-1} = e^{-\gamma d} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega - \gamma & -i\omega - \gamma \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} e^{i\omega d} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega d} \end{bmatrix} \frac{1}{-2i\omega} \begin{bmatrix} -i\omega - \gamma & -1 \\ i\omega - \gamma & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{e^{-\gamma d}}{-2i\omega} \begin{bmatrix} e^{i\omega d} & e^{-i\omega d} \\ (i\omega - \gamma)e^{i\omega d} & (-i\omega - \gamma)e^{-i\omega d} \end{bmatrix} \times \\ &\times \begin{bmatrix} -i\omega - \gamma & -1 \\ -i\omega + \gamma & 1 \end{bmatrix}, \\ e^{\Gamma d} &= e^{-\gamma d} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \frac{e^{i\omega d} + e^{-i\omega d}}{2} + \gamma \omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} & \omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} \\ -(\omega^2 + \gamma^2) \omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} & \frac{e^{i\omega d} + e^{-i\omega d}}{2} - \gamma \omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Экспоненциальные функции  $e^{i\omega d}$ ,  $e^{-i\omega d}$  разложим по формуле Эйлера:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\omega d} + e^{-i\omega d}}{2} &= \cos \omega d, \\ \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} &= \sin \omega d. \end{aligned}$$

Получаем  $e^{\Gamma d}$  в виде

$$\begin{aligned} e^{\Gamma d} &= e^{-\gamma d} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \cos \omega d + \gamma \omega^{-1} \sin \omega d & \omega^{-1} \sin \omega d \\ -(\omega^2 + \gamma^2) \omega^{-1} \sin \omega d & \cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d \end{bmatrix}; \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma d} &= e^{\gamma d} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d & -\omega^{-1} \sin \omega d \\ (\omega^2 + \gamma^2) \omega^{-1} \sin \omega d & \cos \omega d + \gamma \omega^{-1} \sin \omega d \end{bmatrix}. \quad (12) \end{aligned}$$

Из уравнения (8) и уравнения (12) получим соотношение вида

$$\begin{aligned} y(t-d) &= \mathbf{H}^T e^{\gamma d} \times \\ &\times \begin{bmatrix} \cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d & -\omega^{-1} \sin \omega d \\ (\omega^2 + \gamma^2) \omega^{-1} \sin \omega d & \cos \omega d + \gamma \omega^{-1} \sin \omega d \end{bmatrix} \xi(t), \quad (13) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Аналогично для запаздывающего сигнала  $2d$  имеем:

$$\begin{aligned} y(t-2d) &= \\ &= e^{2d\gamma} [\cos 2\omega d + \gamma \omega^{-1} \sin 2\omega d \quad -\omega^{-1} \sin 2\omega d] \xi(t). \quad (14) \end{aligned}$$

Из уравнений (13) и (14) построим следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} y(t-d) \\ y(t-2d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} & (-\omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \\ (\cos 2\omega d - \gamma \omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (-\omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} \end{bmatrix} \xi(t). \quad (15)$$

**Алгоритм оценивания параметров  $\theta$  модели (25)**

Рассмотрим следующую систему:

$$\mathbf{Y} = \Phi \xi, \quad (16)$$

$$\text{где } \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(t-d) \\ y(t-2d) \end{bmatrix};$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} (\cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} & (-\omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \\ (\cos 2\omega d - \gamma \omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (-\omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} \end{bmatrix}.$$

Из выражения (16) имеем:

$$\Phi^{-1} \mathbf{Y} = \xi \Rightarrow \text{adj}(\Phi) \mathbf{Y} = \det(\Phi) \xi. \quad (17)$$

Умножая уравнение (17) на  $\mathbf{H}^T$ , получим

$$\mathbf{H}^T \text{adj}(\Phi) \mathbf{Y} = \det(\Phi) y(t), \quad (18)$$

$$\text{adj} \Phi = \begin{bmatrix} (-\omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (\omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \\ (\cos 2\omega d - \gamma \omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (\cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\det \Phi = -\frac{1}{\omega} e^{3\gamma d} \cos \omega d \sin 2\omega d + \frac{1}{\omega} e^{3\gamma d} \cos 2\omega d \sin \omega d = -\frac{1}{\omega} e^{3\gamma d} \sin \omega d. \quad (20)$$

Из выражений (18)–(20) получим

$$\begin{aligned} [1 \ 0] \begin{bmatrix} (-\omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (\omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \\ (\cos 2\omega d - \gamma \omega^{-1} \sin 2\omega d) e^{\gamma 2d} & (\cos \omega d - \gamma \omega^{-1} \sin \omega d) e^{\gamma d} \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} y(t-d) \\ y(t-2d) \end{bmatrix} = -\omega^{-1} e^{3\gamma d} \sin(\omega d) y(t). \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} -\omega^{-1} e^{2\gamma d} 2 \sin(\omega d) \cos(\omega d) y(t-d) + \\ + \omega^{-1} e^{\gamma d} \sin(\omega d) y(t-2d) = \\ = -\omega^{-1} e^{3\gamma d} \sin(\omega d) y(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Разделив обе части уравнения (22) на  $-\omega^{-1} e^{\gamma d} \sin(\omega d)$ , имеем

$$2e^{\gamma d} \cos(\omega d) y(t-d) - y(t-2d) = e^{2\gamma d} y(t); \quad (23)$$

$$y(t-2d) = 2e^{\gamma d} \cos(\omega d) y(t-d) - e^{2\gamma d} y(t). \quad (24)$$

Построим регрессионную модель из уравнения (24) в виде

$$\chi(t) = \Phi(t) \theta, \quad (25)$$

где

$$\chi(t) = y(t-2d),$$

$$\Phi(t) = [2y(t-d) \ -y(t)] = [\phi_1(t) \ \phi_2(t)],$$

$$\theta = \begin{bmatrix} e^{\gamma d} \cos(\omega d) \\ e^{2\gamma d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что модель регрессора (25) не удовлетворяет условию незатухающего возбуждения. Для решения этой проблемы используется метод, описанный в работе [18].

Следуя процедуре DREM [19], применим оператор запаздывания  $\tau$  к (25) и получим

$$\begin{bmatrix} \chi(t) \\ \chi(t-\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1(t-\tau) & \phi_2(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Умножая уравнение (26) на вектор  $[\phi_2(t-\tau) \ -\phi_2(t)]$ , получаем регрессионную модель, включающую  $\theta_1(t)$ , в следующем виде:

$$\Psi_1(t) = \Phi_1(t) \theta_1(t), \quad (27)$$

$$\text{где } \Phi_1(t) = \phi_2(t-\tau) \phi_1(t) - \phi_2(t) \phi_1(t-\tau); \\ \Psi_1(t) = \phi_2(t-\tau) \chi(t) - \phi_2(t) \chi(t-\tau).$$

Для оценивания параметра  $\theta_1(t)$  используется уравнение

$$\dot{\hat{\theta}}_1(t) = K_1 \Phi_1(t) (\Psi_1(t) - \Phi_1(t) \hat{\theta}_1(t)), \quad (28)$$

где  $K_1 > 0$  — любое положительное число.

Умножая уравнение (26) на вектор  $[\phi_1(t-\tau) \ -\phi_1(t)]$ , получаем регрессионную модель, включающую  $\theta_2(t)$ ,

в следующем виде:

$$\Psi_2(t) = \Phi_2(t) \theta_2(t), \quad (29)$$

$$\text{где } \Phi_2(t) = \phi_1(t-\tau) \phi_2(t) - \phi_1(t) \phi_2(t-\tau); \\ \Psi_2(t) = \phi_1(t-\tau) \chi(t) - \phi_1(t) \chi(t-\tau).$$

Для оценивания параметра  $\theta_2(t)$  используется уравнение

$$\dot{\hat{\theta}}_2(t) = K_2 \Phi_2(t) (\Psi_2(t) - \Phi_2(t) \hat{\theta}_2(t)), \quad (30)$$

где  $K_2 > 0$  любое положительное число.

### Оценивание частоты и коэффициента затухания

Запишем оценки частоты  $\omega$  и коэффициента затухания  $\gamma$  гармонического сигнала (1) на основе  $\hat{\theta}_{1,2}$  из (28) и (30):

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{d} \ln \sqrt{\hat{\theta}_2(t)}, \hat{\theta}_2 < 0; \\ \gamma = \frac{1}{d} \ln \sqrt{\nu}, \hat{\theta}_2 \geq 0, \end{cases} \quad (31)$$

где  $\nu > 0$  некоторая малая величина;

$$\hat{\omega}(t) = \frac{1}{d} \arccos \left( \frac{\hat{\theta}_1(t)}{\sqrt{\hat{\theta}_2(t)}} \right). \quad (32)$$

Согласно **допущению 1** значение функции  $\hat{\theta}_1$  должно удовлетворять неравенству

$$\hat{\kappa}(t) \cos \bar{\omega} d \leq \hat{\theta}_1(t) \leq \hat{\kappa}(t) \cos \underline{\omega} d, \quad (33)$$

где

$$\hat{\kappa}(t) = \begin{cases} \sqrt{-\hat{\theta}_2(t)}, \hat{\theta}_1(t) < 0; \\ \nu, \hat{\theta}_1(t) \geq 0, \end{cases} \quad (34)$$

где  $\nu > 0$  — некоторая малая величина.

### Математическое моделирование

В данном разделе представлены результаты численного моделирования, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма оценивания частоты несмешенного гармонического сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. Моделирование выполнено с использованием программной среды MATLAB Simulink.

В качестве примера рассмотрим сигнал вида

$$y(t) = e^{-0.3t} \sin(5t - 1). \quad (35)$$

Приведем значения параметров для предложенного метода:  $d = 0,1$ ;  $K_1 = 100$ ;  $K_2 = 100$ ;  $\tau = 0,1$ .

На рис. 1, 2 показаны переходные процессы для оценки частоты и коэффициента затухания сигнала (35).

Рассмотрим сигнал

$$y(t) = 3e^{-3t} \sin\left(4t - \frac{\pi}{4}\right). \quad (36)$$

Значения параметров предложенного метода:  $d = 0,05$ ;  $K_1 = 1000$ ;  $K_2 = 1000$ ;  $\tau = 0,2$ .

На рис. 3, 4 показаны переходные процессы для оценки частоты и коэффициента затухания сигнала (36).

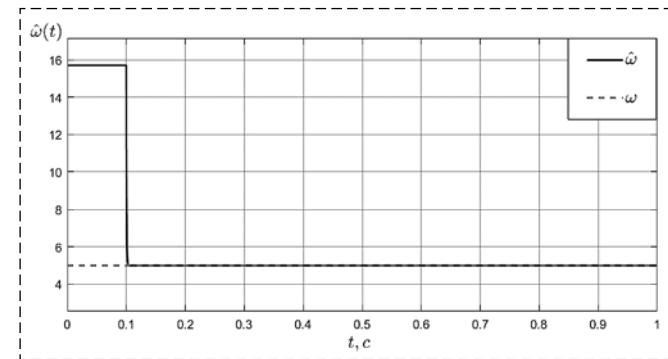


Рис. 1. График оценки частоты  $\hat{\omega}(t)$ ,  $\omega = 5$   
Fig. 1. Graph frequency estimation  $\hat{\omega}(t)$ ,  $\omega = 5$

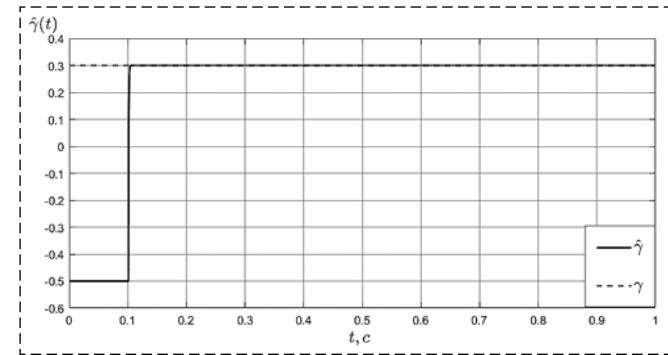


Рис. 2. График оценки коэффициента затухания  $\hat{\gamma}(t)$ ,  $\gamma = 0,3$   
Fig. 2. Graph damping factor estimate  $\hat{\gamma}(t)$ ,  $\gamma = 0,3$

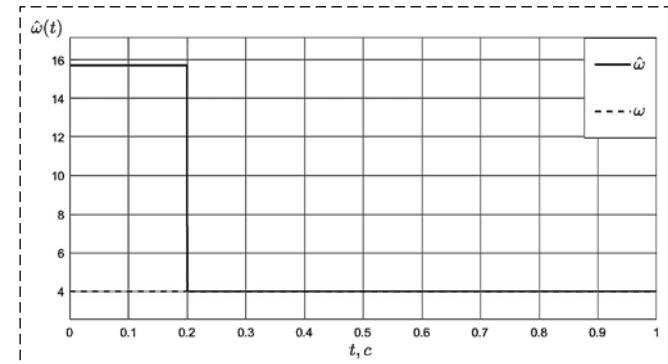


Рис. 3. График оценки частоты  $\hat{\omega}(t)$ ,  $\omega = 4$   
Fig. 3. Graph frequency estimation  $\hat{\omega}(t)$ ,  $\omega = 4$

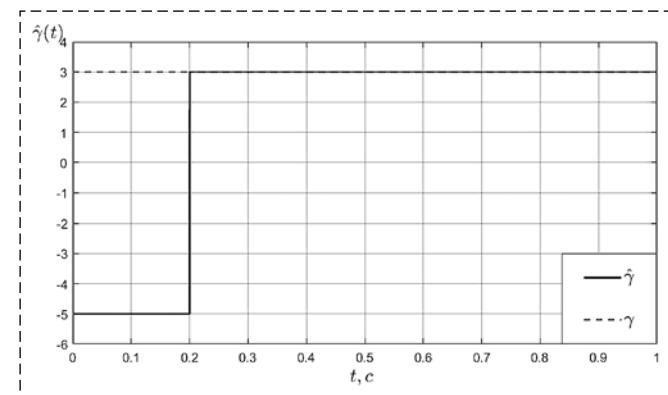


Рис.4. График оценки коэффициента затухания  $\hat{\gamma}(t)$ ,  $\gamma = 3$   
Fig.4. Graph damping factor estimate  $\hat{\gamma}(t)$ ,  $\gamma = 3$

Как видно из графиков, предложенный алгоритм оценивания обеспечивает экспоненциальную сходимость к истинными значениями оценивания параметров сигнала  $y(t)$ .

## Заключение

В работе предложен алгоритм идентификации параметров синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой. Предложен новый подход для параметризации затухающего синусоидального сигнала. Результаты моделирования подтверждают сходимость ошибок оценивания частоты и коэффициента затухания к истинным значениям. Для регрессоров, не удовлетворяющих условию незатухающего возбуждения, был предложен метод, который позволяет построить новые модели линейной регрессии и обеспечить для них выполнение необходимых условий экспоненциальной сходимости. В дальнейшем планируется расширить область применения алгоритма на случай мультисинусоидальных сигналов с экспоненциально затухающими амплитудами.

## Список литературы

1. Пиркин А. А., Бобцов А. А., Ведяков А. А., Колюбин С. А. Оценивание параметров полигармонического сигнала // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 94–114.
2. Aranovskiy S., Bobtsov A., Kremlev A., Nikolaev N., Slita O. Identification of frequency of biased harmonic signal // European Journal of Control. 2010. Vol. 16, N 2. P. 129–139. doi: 10.3166/ejc.16.129-139.
3. Marino R., Tomei P. Frequency estimation of periodic signals // Proc. European Control Conference. Strasbourg, France. 2014. P. 7–12. DOI: 10.1109/ecc.2014.
4. Hou M. Parameter identification of sinusoids // IEEE Transactions on Automatic Control. 2012. Vol. 57, N 2. P. 467–472. DOI: 10.1109/TAC.2011.2164736.
5. Khac T., Vlasov S. M., Iureva R. A. Estimating the Frequency of the Sinusoidal Signal using the Parameterization based on the Delay Operators // ICINCO 2021 — Proceedings of the 18th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. 2021. P. 656–660.
6. Vlasov S. M., Margun A. A., Kirsanova A. S., Vakhvinova P. D. Adaptive controller for uncertain multi-agent system under disturbances // ICINCO 2019 — 16th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. 2019. Vol. 2. P. 198–205.
7. Vlasov S. M., Kirsanova A. S., Dobriborsci D., Borisov O. I., Gromov V. S., Pyrkin A. A., Maltsev M. V., Semenov A. N. Output Adaptive Controller Design for Robotic Vessel with Parametric and Functional Uncertainties // 26th Mediterranean Conference on Control and Automation. MED 2018. 2018. P. 547–552.
8. Севастеева Е. С., Чернов В. А., Бобцов А. А. Алгоритм увеличения скорости идентификации частоты синусоидального сигнала // Изв. вузов. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 9. С. 767–771.
9. Bobtsov A., Lyamin A., Romashova D. Algorithm of parameter's identification of polyharmonic function // IFAC Proceedings Volumes. 2002. Vol. 35, N. 1. P. 439–443.
10. Marino R., Tomei R. Global Estimation of Unknown Frequencies // IEEE Transactions on Automatic Control. 2002. Vol. 47. P. 1324–1328.
11. Osborne M., Smyth G. K. A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing. 1991. Vol. 12, N. 2. P. 362–382.
12. Osborne M., Smyth G. K. A modified prony algorithm for exponential function fitting // SIAM Journal on Scientific Computing. 1995. Vol. 16, N. 1. P. 119–138.
13. Jin Lu, Brown Lyndon J. Identification of Exponentially Damped Sinusoidal Signals // IFAC Proceedings Volumes. 2008. Vol. 41, Iss. 2.
14. Vediakova A., Vedyakov A., Bobtsov A., Pyrkin A. DREM-based Parametric Estimation of Bias-affected Damped Sinusoidal Signals\* // 2020 European Control Conference (ECC). 2020. P. 214–219. DOI: 10.23919/ECC51009.2020.9143821
15. Wang Y., Chen B., Pin G., Parisini T. Estimation of damped sinusoidal signals: an observer-based approach // IFAC-Papers Online. 2017. Vol. 50, N. 1. P. 3811–3816.
16. Nikiforov V. O. Adaptive servomechanism controller with an implicit reference model // Intern. Journal of Control. 1997. Vol. 68, N. 2. P. 277–286.
17. Umari Amjad M. J., Gorelick Steven M. Evaluation of the matrix exponential for in ground-water-flow and solute-transport simulation: theoretical framework. U. S. Geological Survey, 1986. DOI: 10.3133/wri864096.
18. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing\* // IEEE Transactions on Automatic Control. July 2017. Vol. 62, N. 7. P. 3546–3550. DOI: 10.1109/TAC.2016.2614889.
19. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Parameters estimation via dynamic regressor extension and mixing // 2016 American Control Conference (ACC). 2016. P. 6971–6976. DOI: 10.1109/ACC.2016.7526771.

## Algorithm for Identification of Parameters Sinusoidal Signal with the Exponentially Damping Amplitude

Nguyen Khac Tung, nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com,  
S. M. Vlasov, smvlasov@itmo.ru, A. A. Pyrkin, pyrkin@itmo.ru  
ITMO University, Saint Peterburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: Nguyen Khac Tung, Postgraduate Student, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation, e-mail: nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com

Accepted on December 5, 2021

## Abstract

The paper proposes a new method for estimating the parameters of an unbiased sinusoidal signal with the exponentially damping amplitude: frequency, damping coefficient. A sinusoidal signal with exponentially damping amplitude is an important class that can be observed in a wide range of natural phenomena, such as the propagation of acoustic waves, and can also characterize the behavior of artificial systems, arising, for example, as a result of complex interactions between the components of power systems, therefore the task of estimating parameters is sinusoidal. signal with exponentially decaying amplitude is relevant at the present time. It is assumed that the phase, frequency, damping factor and amplitude of a sinusoidal signal with exponentially decaying amplitude are unknown functions of time. In the present work, a new method is proposed for parameterizing a sinusoidal signal with exponentially decaying amplitude. First, a sinusoidal signal with exponentially decaying amplitude is presented as the output of a linear generator, the parameters of the decaying sinusoidal signal (amplitude, phase, damping factor and frequency) are unknown. Then the Jordan form of the matrix and the delay are applied to transform the measured signal, then a linear regression model is obtained, which depends on the frequency and the attenuation coefficient. At the last stage, unknown parameters (frequency, attenuation coefficient) are calculated from the obtained linear regression model. Numerical modeling demonstrates the effectiveness of the proposed methodology.

**Keywords:** sinusoidal signal, identification, Jordan form of the matrix, frequency, damping factor, linear regression model

For citation:

Nguyen Khac Tung, Vlasov S. M., Pyrkin A. A. Algorithm for Identification of Parameters Sinusoidal Signal with the Exponentially Damping Amplitude, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 125–131.

DOI: 10.17587/mau.23.125-131

## References

1. Pyrkin A. A., Bobtsov A. A., Vedyakov A. A., Kolyubin S. A. Estimation of parameters of a polyharmonic signal, *Automation and Telemechanics*, 2015, no. 8, pp. 94–114 (in Russian).
2. Aranovskiy S., Bobtsov A., Kremlev A., Nikolaev N., Slita O. Identification of frequency of biased harmonic signal, *European Journal of Control*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 129–139, DOI: 10.3166/ejc.16.129-139.
3. Marino R., Tomei P. Frequency estimation of periodic signals, *Proc. European Control Conference*, Strasbourg, France, 2014, pp. 7–12, DOI: 10.1109/ecc.2014.
4. Hou M. Parameter identification of sinusoids, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, vol. 57, no. 2, pp. 467–472, DOI: 10.1109/TAC.2011.2164736.
5. Khac T., Vlasov S. M., Iureva R. A. Estimating the Frequency of the Sinusoidal Signal using the Parameterization based on the Delay Operators, *ICINCO 2021 — Proceedings of the 18th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 2021, pp. 656–660.
6. Vlasov S. M., Margun A. A., Kirsanova A. S., Vakhvinova P. D. Adaptive controller for uncertain multi-agent system under disturbances, *ICINCO 2019 — 16th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, 2019, vol. 2, pp. 198–205.
7. Vlasov S. M., Kirsanova A. S., Dobriborsci D., Borisov O. I., Gromov V. S., Pyrkin A. A., Maltsev M. V., Semenov A. N. Output Adaptive Controller Design for Robotic Vessel with Parametric and Functional Uncertainties, *26th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2018*, 2018, pp. 547–552.
8. Sevasteeva E., Chernov V., Bobtsov A. Algorithm for increasing the speed of identification of the frequency of a sinusoidal signal, *Izv. universities. Instrumentation*, 2019, vol. 62, no. 9, pp. 767–771 (in Russian).
9. Bobtsov A., Lyamin A., Romasheva D. Algorithm of parameter's identification of polyharmonic function, *IFAC Proceedings Volumes*, 2002, vol. 35, no. 1, pp. 439–443.
10. Marino R., Tomei R. Global Estimation of Unknown Frequencies, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, vol. 47, pp. 1324–1328.
11. Osborne M., Smyth G. K. A modified Prony algorithm for fitting functions defined by difference equations, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1991, vol. 12, no. 2, pp. 362–382.
12. Osborne M., Smyth G. K. A modified prony algorithm for exponential function fitting, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1995, vol. 16, no. 1, pp. 119–138.
13. Jin Lu, Brown Lyndon J. Identification of Exponentially Damped Sinusoidal Signals, *IFAC Proceedings Volumes*, 2008, vol. 41, iss. 2.
14. Vediakova A., Vedyakov A., Bobtsov A., Pyrkin A. DREM-based Parametric Estimation of Bias-affected Damped Sinusoidal Signals\*, *2020 European Control Conference (ECC)*, 2020, pp. 214–219, DOI: 10.23919/ECC51009.2020.9143821
15. Wang Y., Chen B., Pin G., Parisini T. Estimation of damped sinusoidal signals: an observer-based approach, *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 3811–3816.
16. Nikiforov V. O. Adaptive servomechanism controller with an implicit reference model, *Intern. Journal of Control*, 1997, vol. 68, no. 2, pp. 277–286.
17. Umari Amjad M. J., Gorelick Steven M. Evaluation of the matrix exponential for in ground-water-flow and solute-transport simulation: theoretical framework, U. S. Geological Survey, 1986, DOI 10.3133/wri864096.
18. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing\*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, July 2017, vol. 62, no. 7, pp. 3546–3550, DOI: 10.1109/TAC.2016.2614889.
19. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Parameters estimation via dynamic regressor extension and mixing, *2016 American Control Conference (ACC)*, 2016, pp. 6971–6976, DOI: 10.1109/ACC.2016.7526771.

# АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

УДК 681.58

DOI: 10.17587/mau.23.132-145

Т. А. Алиев, д-р техн. наук, ст. науч. сотр., director@cyber.az,

Г. А. Гулуев, д-р техн. наук, зав. лаб., scb\_06@mail.ru,

Ас. Г. Рзаев, д-р техн. наук, зав. лаб., asifrzayev48@gmail.com,

Ф. Г. Пашаев, д-р техн. наук, зав. лаб., pasha.farhad@gmail.com,

Н. Э. Рзаева, канд. техн. наук, науч. сотр., nikanel1@gmail.com,

Национальная академия наук Азербайджана,

Институт систем управления, Институт информационных технологий, г. Баку

## Технология Noise-контроля нефтяных скважин по ваттметрограмме электродвигателя глубинно-насосной установки

Рассматривается возможность использования измерительной информации о потребляемой мощности (ваттметрограммы) электродвигателем глубинно-насосной установки для диагностики технического состояния оборудования нефтяных скважин. Показано, что одним из возможных путей при этом может быть применение Noise-технологии к обработке сигналов ваттметрограмм.

Предложена технология формирования множества комбинаций эталонных и текущих информативных признаков из оценок нормированных корреляционных функций полезного сигнала ваттметрограммы и показано, что они эквивалентны информативным признакам динамограммы, получаемой от датчика усилия, установленного на подвеске штанговой глубинно-насосной установки. Показано, что они в одинаковой степени отражают техническое состояние скважины и ее оборудования, благодаря чему информативные признаки по ваттметрограмме могут быть использованы для решения задач контроля, идентификации и управления процессом добычи нефти со штанговой глубинно-насосной установкой.

Предложены варианты уменьшения погрешности результатов корреляционного анализа ваттметрограммы и вариант применения нормированных корреляционных функций полезного сигнала ваттметрограммы для решения задач идентификации технического состояния оборудования ШГНУ. Для повышения эффективности систем контроля предложено дублирование функции диагностики системы с применением спектральной технологии Noise-контроля начала и динамики развития неисправностей.

Приведены особенности реализации на промыслах. Рассмотрены возможные варианты применения нормированных корреляционных функций полезного сигнала ваттметрограммы для решения задач идентификации технического состояния скважин в процессе ее эксплуатации. Приводится упрощенная структурная схема дистанционной системы контроля и управления ШГНУ по сигналам ваттметрограммы, которая внедрена на скважинах нефтедобывающего управления "Биби-Эйбатнефть" в Азербайджане. Показано, что предложенные в работе алгоритмы и технологии анализа помехи ваттметрограмм, в принципе, могут найти широкое применение во многих областях экономики, где применяются электродвигатели.

**Ключевые слова:** скважина, техническое состояние, контроль, сигнал, динамограмма, ваттметрограмма, информативный признак, помеха, корреляционная функция, нормирование

### Введение

В настоящее время в мировой практике механизированного способа добычи нефти наиболее широкое распространение получили штанговые глубинно-насосные установки (ШГНУ), которые в США охватывают более 85 % общего действующего фонда [1, 2]. Этот способ пока еще является основной насосной системой, которая обеспечивает механическую энергию для добычи нефти [3–5]. Однако при применении механизированной добычи из-за ненормальных условий работы основного оборудования и неэффективного управления

ими эксплуатационные расходы при производстве резко увеличиваются [6, 7] и, следовательно, производственные выгоды становятся все более низкими [8–10].

Производственные выгоды снижаются за счет простоев скважин из-за невозможности обеспечения адекватной идентификации технического состояния оборудования, и в результате рентабельность добычи нефти ШГНУ существенно падает. Поэтому повышение адекватности идентификации технического состояния ШГНУ является основной проблемой в обеспечении рентабельности длительно

эксплуатируемых нефтяных месторождений. Решение этой задачи позволит обеспечить необходимый уровень стабилизации добычи нефти. В течение последних десятилетий были предложены различные методы и средства контроля технического состояния и управления ШГНУ [11–17]. В этих работах показано, что информация об усилии в точке подвеса штанг глубинных насосов содержит достаточно полные и наименее искаженные данные о состоянии подземного насосного оборудования. Поэтому динамометрирование, т. е. определение зависимости усилия штанг на подвеску от хода полированного штока, считается общепринятым способом контроля технического состояния ШГНУ.

В известных системах управления ШГНУ информация о динамограмме поступает от датчиков усилия и хода в виде электрического сигнала усилия и хода  $U_S(t) = Y(t)$  во времени через канал связи. С использованием сочетания этих двух переменных строится динамограмма  $U_P = f(U_S)$ , график которой для нормально работающей установки описывает параллелограмм [1, 11–13]. Специалист-технолог путем визуального анализа искажений, формы полученных текущих динамограмм определяет более 20 видов технического состояния ШГНУ [11].

В работах [11, 13–15] подробно описаны результаты многих исследований, которые долгие годы проводились в этом направлении. На основе этих работ были сформированы научные основы и созданы различные системы контроля и управления ШГНУ по динамограммам, получаемым на устье скважины.

Один из основных недостатков динамометрирования связан с тем, что в этом случае для формирования динамограммы необходимо использование дорогостоящего датчика усилия, который в полевых трудных климатических условиях часто меняет свои метрологические характеристики. Из-за этого требуется постоянный контроль и настройка функционирования датчика усилия высококвалифицированным обслуживающим персоналом.

Недостатком всех этих способов также является тот факт, что они не позволяют осуществить автоматическую идентификацию динамограммы в реальном масштабе времени с достаточной адекватностью. По этой причине в большинстве реальных случаев идентификация динамограммы осуществляется путем ее интерпретации в полуавтоматическом режиме.

Это в конечном итоге сводится к визуальному анализу полученной динамометрической информации специалистом-технологом. При этом результат диагностики зависит от квалификации специалиста-технолога, и процессы диагностики, т. е. идентификации технического состояния скважин, занимают достаточно долгое время. Кроме того, даже специалист высокой квалификации иногда затрудняется точно определить техническое состояние глубинного насоса визуально по динамограммам, особенно для глубоких скважин. Поэтому для повышения рентабельности нефтяных скважин необходимо создание новых способов, не требующих сложных датчиков контроля технического состояния ШГНУ. Таким способом может быть съем и анализ потребляемой мощности электродвигателя ШГНУ, т. е. ваттметrogramma.

Однако на потребляемую мощность электродвигателя, в отличие от усилия на полированый шток, оказывают влияние факторы от механических трений в редукторе и клиновременной передаче, а также балансирующий груз. От качественного учета влияния указанных факторов во многом зависит успех диагностирования по ваттметrogramme. Это обстоятельство обуславливает новые жесткие требования к разработке технологий анализа и идентификации технического состояния скважины в реальном масштабе времени с применением современных надежных и недорогих контроллеров для анализа ваттметrogramмы.

В настоящей работе рассматривается методология диагностики технического состояния ШГНУ по ваттметrogramme электродвигателя с использованием Nose-технологии обработки сигналов, получившей развитие в работах [18–21].

## Постановка задачи

Исследования показывают, что отсутствуют технологии, позволяющие обеспечить адекватность идентификации сигнала ваттметrogramмы  $U_Y(t) = X(t)$  в реальном масштабе времени, так как погрешность полученных результатов от влияния шума  $\varepsilon_1(t)$ , сопровождающего полезный сигнал ваттметrogramмы  $U_P(t)$ , в условиях эксплуатации меняется в достаточно большом диапазоне. Это связано с тем, что объект контроля, представляющий собой ШГНУ, функционирует в полевых условиях (при сильных перепадах температуры и влажности, ветрах и

т. д.), и в процессе функционирования насоса в результате возникновения различных неисправностей также формируется помеха  $\varepsilon_2(t)$ , которая имеет корреляцию с полезным сигналом  $X(t)$  ваттметрограммы  $U_V(t)$  [22]. Следовательно, помеха  $\varepsilon(t)$ , сопровождающая полезный сигнал ваттметрограммы  $X(t)$   $U_p(t)$ , формируется под влиянием двух факторов:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t), \quad (1)$$

где  $\varepsilon_1(t)$  — формируется от влияния изменений окружающей среды (перепады температур, влажности и т. д.);  $\varepsilon_2(t)$  — формируется при эксплуатации объекта от возникновения различных дефектов в механических узлах насоса (износ, изгиб, трещина, усталость и т. д.).

Таким образом, на вход системы вместо полезного сигнала  $U_V(t) = X(t)$  поступает сигнал  $g(t)$ , зашумленный помехой  $\varepsilon(t)$ . При этом анализируемый сигнал в аналоговой форме имеет вид

$$g(t) = U_V(t) + \varepsilon(t) = X(t) + \varepsilon(t), \quad (2)$$

в цифровой форме имеет вид

$$g(i\Delta t) = U_V(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t) = X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t), \quad (3)$$

где  $\Delta t$  — шаг дискретизации сигнала при аналого-цифровом преобразовании;  $i$  — порядковый номер измерения.

Из-за указанных причин как амплитуда, так и спектр помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$  меняются в довольно большом диапазоне. При этом погрешность измерительного сигнала  $g(i\Delta t)$  с течением времени также меняется в большом диапазоне из-за вышеуказанных причин. Поэтому исключить зависимость полученных результатов от влияния помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$  в реальном масштабе времени не удается. Это, в свою очередь, затрудняет решение задач идентификации ваттметрограммы с применением известных методов. Следовательно, для обеспечения адекватности идентификации требуется устранение влияния указанных факторов на погрешность полученных результатов.

Поэтому для решения рассматриваемой задачи очевидна целесообразность устранения необходимости применения датчика усилия в системе контроля нефтяных скважин и создания технологий идентификации технического состояния объекта на основе ваттметрограммы, которые лишены указанных трудностей.

Анализ возможных вариантов решения этой задачи показал, что изменение нагрузки насоса, которое отражается в показаниях датчика

усилия  $U_p(t)$ , также отражается на ваттметрограмме электродвигателя  $U_V(t)$ , с помощью которого функционирует штанговая глубинно-насосная установка [16]. В связи с этим очевидна возможность осуществления контроля ШГНУ путем анализа ваттметрограммы. Рассмотрим один из возможных вариантов решения этой задачи.

### Решение задачи

В работе [1] показано, что при анализе ваттметрограммы  $U_V(i\Delta t) = g(i\Delta t)$  с применением традиционных технологий корреляционного анализа возникают большие погрешности, которые снижают степень адекватности ее идентификации. В связи с этим сначала рассмотрим возможные варианты уменьшения погрешности результатов анализа ваттметрограммы  $U_V(t)$ :

$$U_V(i\Delta t) = g(i\Delta t) = X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t); \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R_{gg}(\mu) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t)g((i+\mu)\Delta t) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(i\Delta t)\varepsilon((i+\mu)\Delta t) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon((i+\mu)\Delta t). \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, что погрешность оценки  $R_{gg}(\mu)$  можно определить по выражению

$$\begin{aligned} \lambda_{gg}(\mu) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(i\Delta t)\varepsilon((i+\mu)\Delta t) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon((i+\mu)\Delta t) = \\ &= 2R_{X\varepsilon}(\mu) + R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu). \end{aligned} \quad (6)$$

где  $R_{gg}(\mu)$  — взаимокорреляция зашумленного сигнала;  $R_{X\varepsilon}(\mu)$  — корреляция между полезным сигналом  $X$  и помехой  $\varepsilon$ ;  $R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu)$  — взаимокорреляция помехи с шагом  $(\mu = 1, 2, 3, \dots)$ .

Экспериментальные исследования показали, что в процессе эксплуатации штанговых глубинно-насосных скважин ваттметрограммы электромоторов сопровождаются ощущимыми помехами  $\varepsilon(i\Delta t)$ , т. е.

$$\begin{cases} R_{X\varepsilon}(\mu) \gg 0; \\ R_{\varepsilon\varepsilon}(\mu) \gg 0; \\ \lambda_{gg}(\mu) \gg 0, \end{cases} \quad (7)$$

и поэтому в оценке  $R_{gg}(\mu)$  имеет место значительная погрешность  $\lambda_{gg}(\mu)$ .

Из-за этого снижается степень адекватности результатов контроля работы скважины по ваттметограмме. Именно этот фактор препятствует использованию ваттметограммы для контроля ШГНУ. В связи с этим необходимо создание эффективных технологий анализа ваттметограммы, позволяющих за счет извлечения достаточной полезной информации обеспечить уменьшение погрешностей от влияния помех  $\varepsilon_1(i\Delta t)$  и  $\varepsilon_2(i\Delta t)$  и обеспечить адекватность идентификации технического состояния ШГНУ по ваттметограмме.

Для этого, в первую очередь, целесообразно привести оценки  $R_{gg}(i\Delta t)$  к единой безразмерной величине путем применения процедуры нормирования.

С учетом соответствующих известных выражений нормирования [14, 17, 22] формулу определения нормированной оценки автокорреляционной функции ваттметограммы можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} r_{gg}(\mu = 0) &\approx \frac{R_{gg}(\mu = 0)}{D_g} = 1; \\ r_{gg}(\mu \neq 0) &\approx \frac{R_{gg}(\mu \neq 0)}{D_g - D_\varepsilon} \approx \frac{R_{XX}(\mu \neq 0)}{D_g - D_\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Как было указано выше, для реальных нефтяных скважин в процессе эксплуатации характерен переход в скрытый период зарождения различных дефектов [14, 15, 17, 22]. Обычно все это отражается на сигналах, получаемых от датчика усилия, и на ваттметограмме в виде шума, который в большинстве случаев имеет корреляцию с полезными сигналами  $X(i\Delta t)$  [14, 17]. Следовательно, суммарная помеха формируется из помехи  $\varepsilon_1(i\Delta t)$ , возникающей в результате влияния внешних факторов, и из шума  $\varepsilon_2(i\Delta t)$ , вызванного зарождением различных неисправностей. При этом дисперсия ваттметограммы имеет вид

$$\begin{aligned} D_g &\approx R_{gg}(0) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g^2(i\Delta t) \approx \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X^2(i\Delta t) + 2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X(i\Delta t) \varepsilon(i\Delta t) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^2(i\Delta t) \approx R_{XX}(0) + 2R_{X\varepsilon}(0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(0), \end{aligned} \quad (9)$$

суммарная помеха

$$\varepsilon(i\Delta t) = \varepsilon_1(i\Delta t) + \varepsilon_2(i\Delta t) \quad (10)$$

имеет корреляцию с полезным сигналом  $X(i\Delta t)$ , а ее дисперсия  $D_\varepsilon$  определяется выражением

$$D_\varepsilon = 2R_{X\varepsilon}(0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(0), \quad (11)$$

где  $R_{X\varepsilon}(0)$  — взаимно корреляционная функция между полезным сигналом  $X(i\Delta t)$  и помехой  $\varepsilon(i\Delta t)$ .

При этом дисперсия суммарной помехи  $D_\varepsilon$  представляет собой сумму дисперсии помехи  $R_{\varepsilon\varepsilon}(0)$ , возникающей в результате влияния внешних факторов, и взаимно корреляционной функции между полезным сигналом и помехой  $2R_{X\varepsilon}(0)$ , возникающей из-за зарождения различных неисправностей в самом объекте [1, 2, 11–13].

В связи с этим в этом случае формулу определения оценки  $R_{gg}(\mu)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_{gg}(\mu) &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t)g((i+\mu)\Delta t) \approx \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X(i\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t))(X((i+\mu)\Delta t) + \\ &+ \varepsilon((i+\mu)\Delta t)) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [X(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t) + \\ &+ \varepsilon(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t) + \\ &+ X(i\Delta t)\varepsilon((i+\mu)\Delta t) + \varepsilon(i\Delta t)\varepsilon((i+\mu)\Delta t)] \approx \\ &\approx R_{XX}(\mu) + R_{\varepsilon X}(\mu) + R_{X\varepsilon}(\mu) + R_\varepsilon(\mu) \approx \\ &\approx \begin{cases} R_{XX}(0) + 2R_{X\varepsilon}(0) + R_{\varepsilon\varepsilon}(0), & \text{при } \mu = 0; \\ R_{XX}(\mu) + 2R_{X\varepsilon}(\mu), & \text{при } \mu \neq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, из выражений (9) и (12) очевидно, что при наличии корреляции между полезным сигналом и помехой оценки корреляционной функции  $R_{XX}(\mu)$  полезного сигнала ваттметограммы  $X(i\Delta t)$  можно определить по выражению

$$R_{XX}(\mu) = \begin{cases} R_{gg}(0) - 2R_{X\varepsilon}(0) - R_{\varepsilon\varepsilon}(0) = \\ = R_{gg}(0) - D_\varepsilon, & \text{при } \mu = 0; \\ R_{gg}(\mu) - 2R_{X\varepsilon}(\mu), & \text{при } \mu \neq 0. \end{cases} \quad (13)$$

В работе [1] показано, что оценки  $D(\varepsilon)$  и  $R_{X\varepsilon}(\mu)$  можно определять по выражениям

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [g^2(i\Delta t) + g(i\Delta t)g((i+2)\Delta t) - \\ &- 2g(i\Delta t)g((i+1)\Delta t)], \end{aligned} \quad (14)$$

$$R_{Xe}(\mu) \approx \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [g(i\Delta t)g((i+(\mu+1))\Delta t) - 2g(i\Delta t)((i+(\mu+1))\Delta t) + g(i\Delta t)g((i+(\mu+2))\Delta t)]. \quad (15)$$

Таким образом, наличие алгоритмов и технологий определения оценок дисперсии помехи  $D(\varepsilon)$  и взаимно корреляционной функции между полезным сигналом и помехой  $R_{Xe}(\mu)$  открывает возможность для уменьшения погрешности традиционных алгоритмов определения оценок корреляционных функций ваттметограммы.

Проведенные эксперименты показали, что путем анализа полезного сигнала  $X(i\Delta t)$  ваттметограммы можно решать задачи контроля нефтяных скважин. Эквивалентность технологий контроля по динамограмме и по ваттметограмме обеспечивается тем, что имеется возможность устранения погрешности в результате влияния помех ваттметограммы. Благодаря этому обеспечивается достаточная точность оценок ее нормированных корреляционных функций  $r_{XX}(\mu \neq 0)$  по формуле:

$$r_{XX}(\mu) = \frac{R_{XX}(\mu)}{D_X}, \quad (16)$$

где  $D_X = R_{XX}(0)$ .

Кроме того, оценки  $D_{ee}(0)$  и  $R_{Xe}(\mu)$  позволяют получить дополнительную информацию о техническом состоянии объекта в реальном масштабе времени. Обычно при нормальном ее состоянии они не превосходят максимальной эталонной величины, которая устанавливается экспериментально в процессе ее эксплуатации.

### Особенности реализации

Теперь рассмотрим возможные варианты применения нормированных корреляционных функций  $r_{gg}(\mu)$  полезного сигнала  $X(i\Delta t)$  ваттметограммы для решения задач идентификации технического состояния скважин в процессе ее эксплуатации. Анализ возможных вариантов решений этой задачи показал, что при этом можно использовать комбинации разности оценок нормированных корреляционных функций ваттметограммы в качестве информативных признаков для определения технического состояния ШГНУ:

$$\begin{aligned} \Delta r_{XX}(\mu = 1) &= r_{XX}(\mu = 0) - r_{XX}(\mu = 1), \\ \Delta r_{XX}(\mu = 2) &= r_{XX}(\mu = 1) - r_{XX}(\mu = 2), \dots, \\ \Delta r_{XX}(\mu = m) &= r_{XX}(\mu = m - 1) - r_{XX}(\mu = m); \\ \Delta r_{XX}(\mu = 1), \Delta r_{XX}(\mu = 2), \dots, \Delta r_{XX}(\mu = m). \end{aligned} \quad (17)$$

Эксперименты на реальных нефтяных промыслах показали, что предлагаемая процедура позволяет вычислить оценки нормированной корреляционной функции  $R_{XX}(\mu)$  полезного сигнала  $X(i\Delta t)$  ваттметограммы, т.е.  $X(i\Delta t)$ .

При опытной эксплуатации с применением указанной технологии и системы управления было установлено, что по нормированным корреляционным функциям  $r_{XX}(\mu)$  полезного сигнала  $X(i\Delta t)$  ваттметограммы  $g(i\Delta t)$ , которые вычисляются по выражениям (13)–(16), можно формировать до одиннадцати информативных признаков. Благодаря этому появляется возможность идентификации технического состояния ШГНУ с использованием процедуры вычисления информативных признаков по ваттметограмме. Для этого, в первую очередь, период качания  $T_{ST}$  ШГНУ разбивается на восемь равных временных интервалов:

$$\Delta T_{ST} = \frac{T_{ST}}{8}. \quad (18)$$

Например, если за период качания ШГНУ снято  $T_{ST} = 1024$  отсчетов дискретных значений ваттметограммы, тогда  $\Delta T_{ST}$  будет равно 128 отсчетам.

После этого по формулам (13), (14) вычисляются оценки  $r_{XX}(\mu = 0)$ ,  $r_{XX}(\mu = 1\Delta T_{ST})$ ,  $r_{XX}(\mu = 2\Delta T_{ST})$ , ...,  $r_{XX}(\mu = 7\Delta T_{ST})$  и их разности

$$\begin{aligned} \Delta r_{XX}(\mu = 1\Delta T_{ST}) &= \\ &= r_{XX}(\mu = 0) - r_{XX}(\mu = 1\Delta T_{ST}); \\ \Delta r_{XX}(\mu = 3\Delta T_{ST}) &= \\ &= r_{XX}(\mu = 2\Delta T_{ST}) - r_{XX}(\mu = 3\Delta T_{ST}); \\ \Delta r_{XX}(\mu = 5\Delta T_{ST}) &= \\ &= r_{XX}(\mu = 4\Delta T_{ST}) - r_{XX}(\mu = 5\Delta T_{ST}); \\ \Delta r_{XX}(\mu = 7\Delta T_{ST}) &= \\ &= r_{XX}(\mu = 6\Delta T_{ST}) - r_{XX}(\mu = 7\Delta T_{ST}). \end{aligned} \quad (19)$$

Затем вычисляются минимальное значение нормированной корреляционной функции ваттметограммы  $\Delta r_{XX\min}(\mu)$  и соответствующее ему значение  $\mu_{\min}$ . После этого определяются информативные признаки в виде следующих коэффициентов:

$$\begin{aligned} K_{N1} &= \Delta r_{XX}(\mu = 1\Delta T_{ST}); \\ K_{N2} &= \Delta r_{XX}(\mu = 3\Delta T_{ST}); \\ K_{N3} &= \Delta r_{XX}(\mu = 5\Delta T_{ST}); \\ K_{N4} &= \Delta r_{XX}(\mu = 7\Delta T_{ST}); \end{aligned} \quad (20)$$

$$K_{N5} = \frac{\Delta r_{XX}(\mu = 1\Delta T_{ST})}{\Delta r_{XX}(\mu = 3\Delta T_{ST})};$$

$$K_{N6} = \frac{\Delta r_{XX}(\mu = 1\Delta T_{ST})}{\Delta r_{XX}(\mu = 5\Delta T_{ST})};$$

$$K_{N7} = \frac{\Delta r_{XX}(\mu = 1\Delta T_{ST})}{\Delta r_{XX}(\mu = 7\Delta T_{ST})};$$

$$K_{N8} = \frac{\Delta r_{XX}(\mu = 3\Delta T_{ST})}{\Delta r_{XX}(\mu = 5\Delta T_{ST})};$$

$$K_{N9} = \frac{\Delta r_{XX}(\mu = 3\Delta T_{ST})}{\Delta r_{XX}(\mu = 7\Delta T_{ST})};$$

$$K_{N10} = \frac{\Delta r_{XX}(\mu = 5\Delta T_{ST})}{\Delta r_{XX}(\mu = 7\Delta T_{ST})};$$

$$K_{N11} = \Delta r_{XX} \min(\mu).$$

Ниже будет показана возможность использования коэффициентов  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$  в качестве информативных признаков для идентификации технического состояния ШГНУ. Они были использованы в комплексе контроля, диагностики и управления для нефтяных скважин, эксплуатирующихся ШГНУ в неф-

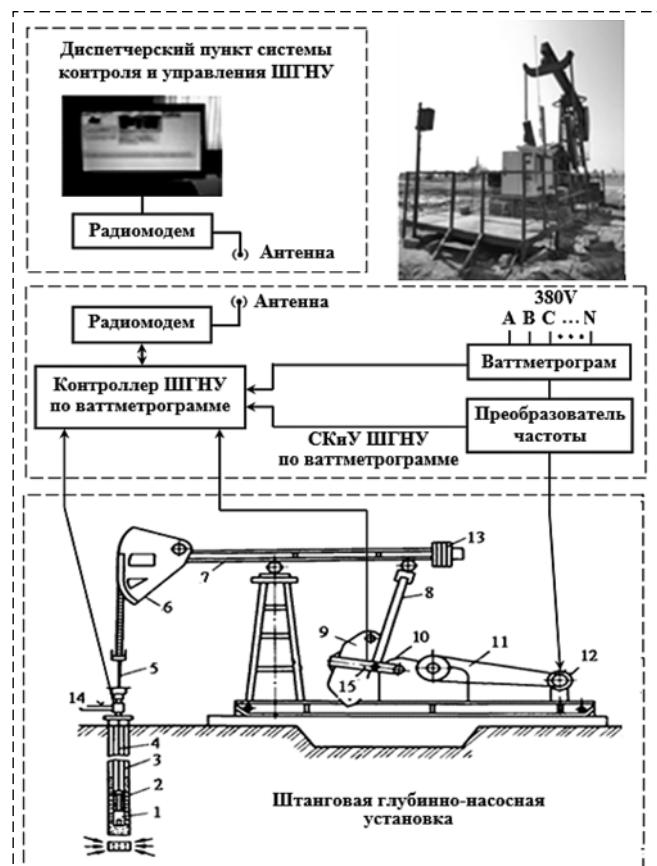


Рис. 1. Структурная схема дистанционной системы контроля и управления ШГНУ по ваттметрограмме

Fig. 1. Block diagram of the remote system of wattmeter card-based SRPU control and management

тегазодобывающем управлении "Бибиэйбат-нефть" [1, 24].

Простота вычислений этих коэффициентов позволяет реализовать предлагаемую технологию идентификации с помощью недорогих современных промышленных контроллеров (в нашем случае применен контроллер LPC 2148 FBD64).

На рис. 1 приведена структурная схема дистанционной системы управления ШГНУ по ваттметрограмме и станция контроля и управления ШГНУ по ваттметрограмме (СК и У ШГНУ по ваттметрограмме) в эксплуатации на станке-качалке. Структурная схема состоит из трех уровней:

1. Уровень глубинно-насосной установки, состоящей из плунжерного глубинного насоса 1; плунжера 2; насосных труб 3; штанг 4; полированного штока 5; головки балансира 6; балансира 7; шатуна 8; кривошипного противовеса 9; редуктора 10; клиноременной передачи 11; электродвигателя 12; балансирного противовеса 13; датчика устьевого давления 14; датчика угла поворота 15.

2. Уровень станции контроля и управления (СК и У), состоящей из контроллера для сбора информации от датчиков усилия 14, устьевого давления 15 и угла поворота 16; преобразователя частоты для управления скоростью электродвигателя; радиомодема с антенной для осуществления информационного обмена СК и У с централизованным диспетчерским пунктом по протоколу MODBUS-RTU.

3. Уровень централизованного диспетчерского пункта нефтяного промысла состоит из промышленного компьютера и радиомодема с антенной и обслуживает до 200 скважин.

В системе управления вместо технологии контроля на основе анализа динамограммы использована технология идентификации технического состояния ШГНУ по оценкам нормированных корреляционных функций  $R_{XX}(\mu)$  ваттметрограммы. При этом для их реализации, прежде всего исходя из длительности интервала периода качания  $T_{ST}$ , был определен шаг дискретизации сигнала. Для большинства нефтяных скважин длительность времени  $T_{ST}$  меняется в диапазоне 5...20 с.

Экспериментально было установлено, что для получения оценок нормированной корреляционной функции  $r_{XX}(\mu)$  с необходимой точностью целесообразно дискретизировать ваттметрограммы с частотой  $f = 50 \dots 100$  Гц. Экспериментально было установлено, что за период качания любое незначительное изменение техническо-

го состояния ШГНУ отражается на значениях оценок нормированных корреляционных функций  $R_{XX}(\mu)$  ваттметрограммы  $g(i\Delta t)$ , что, в свою очередь, приводит к изменению информативных признаков  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$ . В результате процесса эксплуатации ШГНУ для ее различных технических состояний формируются и запоминаются соответствующие эталонные комбинации информативных признаков  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$  (см. таблицу). Эксперименты показали, что они позволяют осуществить надежную идентификацию ваттметрограммы  $g(i\Delta t)$ , т. е. технического состояния ШГНУ в реальном масштабе времени. Идентификация технического состояния ШГНУ сводится к формированию комбинаций текущих информативных признаков и их сравнению с соответствующими комбинациями эталонных информативных признаков  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$ . Благодаря этому отпадает необходимость визуальной интерпретации динамограммы для определения текущего технического состояния ШГНУ. Для иллюстрации возможности рассматриваемого варианта идентификации в реальной промысловой практике на рис. 2–4 при-

Комбинации информативных признаков  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$

Combinations of informative attributes  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$

Признаки	Нормальная работа скважины	Виды неисправностей	
		Откачка газа и утечка нагнетательной части насоса	Прихват плунжера
$K_{N1}$	−0,59 −0,74	−0,82 −0,54	−0,81
$K_{N2}$	0,03 0,09	0,04 −0,03	0,00
$K_{N3}$	−0,46 −0,38	−0,09 −0,36	0,05
$K_{N4}$	0,62 0,40	0,34 0,68	−0,07
$K_{N5}$	−25,8 −6,51	22,55 17,98	583,58
$K_{N6}$	1,62 1,56	8,88 1,49	−16,13
$K_{N7}$	−1,20 −1,46	−2,43 −0,80	12,07
$K_{N8}$	−0,06 −0,24	−0,39 0,08	0,03
$K_{N9}$	0,05 0,22	0,14 −0,04	−0,02
$K_{N10}$	−0,74 −0,94	−0,27 −0,53	−0,75
$K_{N11}$	0,62 0,40	0,34 0,68	0,05

ведены сигналы ваттметрограммы  $U_{\mu}(i\Delta t)$  для нормально функционирующей ШГНУ (рис. 2), а также для наиболее часто встречающихся видов неисправностей: неисправностей типа "Откачка газа и утечка нагнетательной части глубинного насоса" (рис. 3, 4) и неисправности типа "прихват плунжера" (рис. 5). Здесь на оси ординат показан уровень измеряемого сигнала, соответствующий потребляемой мощности электродвигателя, а на оси абсцисс — число измерений с  $i$ -м шагом дискретизации  $\Delta t$ , соответствующих текущему моменту времени измерения за период качания ШГНУ. В таблице приведены комбинации информативных признаков  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$ .

В процессе функционирования системы в полевых условиях по полученным текущим ваттметрограммам вычисляются комбинации информативных признаков  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$  в реальном масштабе времени за период качания ШГНУ.

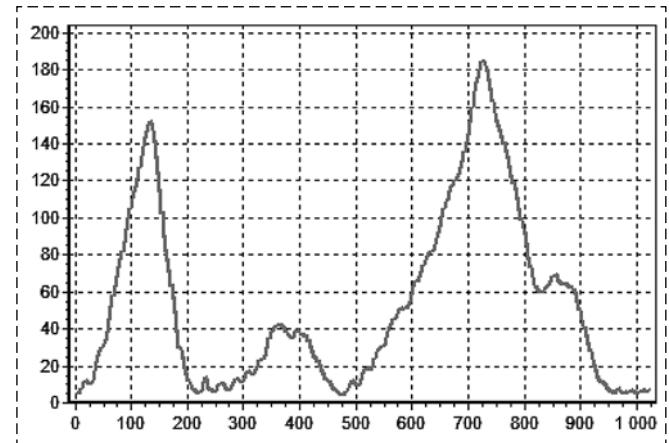


Рис. 2. Сигналы ваттметрограммы нормально функционирующей ШГНУ

Fig. 2. Signals of wattmeter signals of a normally functioning SRPU

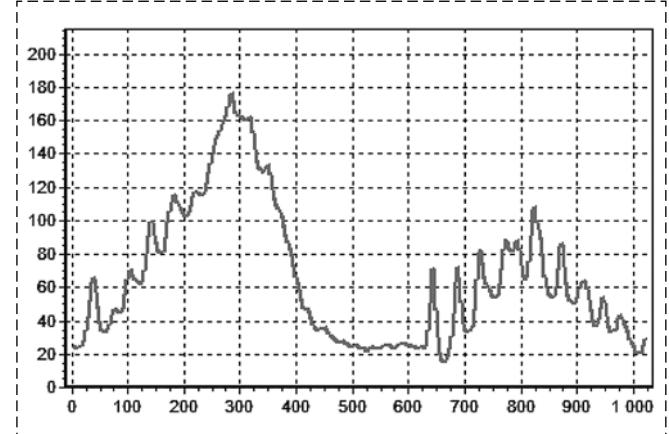


Рис. 3. Сигналы ваттметрограммы при неисправности ШГНУ в виде откачки газа нагнетательной части насоса

Fig. 3. Signals of wattmeter in case of malfunction of the SRPU in the form of pumping out the gas of the discharge part of the pump

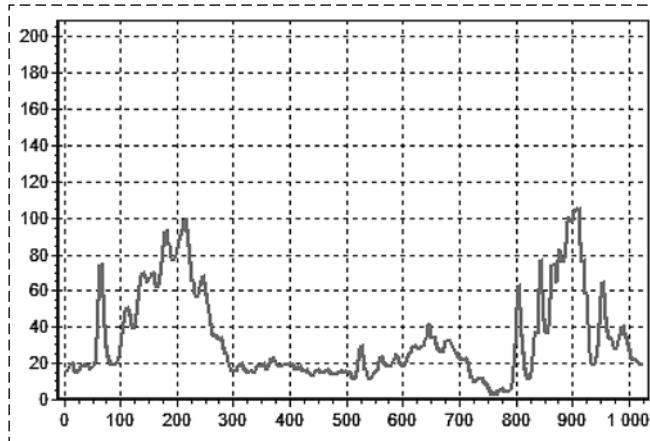


Рис. 4. Сигналы ваттметрограммы при неисправности ШГНУ в виде утечки нагнетательной части насоса

Fig. 4. Signals of wattmeterogram in case of malfunction of the SRPU in the form of leakage of the discharge part of the pump

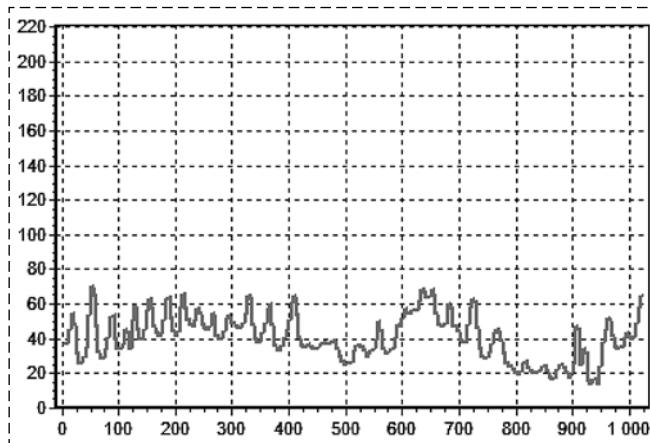


Рис. 5. Сигналы ваттметрограммы при неисправности ШГНУ в виде прихвата плунжера

Fig. 5. Signals of wattmeterogram in case of in the form of plunger tack

Эти коэффициенты сравниваются с заранее определенными эталонами. Наиболее близкие к эталонным значения коэффициентов определяют текущее техническое состояние ШГНУ. Благодаря этому при функционировании ШГНУ по полученным результатам идентификации формируются команды управления объектом, например, меняется длительность времени периода качания.

При внедрении предложенных технологий на нефтяных промыслах с большим числом скважин поочередно для каждой из них при всевозможных технических состояниях ШГНУ в процессе эксплуатации вычисляются и запоминаются комбинации соответствующих эталонных коэффициентов.

Это реализовывается с участием специалиста-технолога, который путем интерпретации ваттметрограммы определяет техническое состояние и регистрирует в блоке идентификации системы

его соответствие комбинациям информативных признаков  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$ . Таким образом, в процессе эксплуатации при появлении на каждой скважине различных технических состояний в блоке идентификации каждой системы формируется комбинация соответствующих эталонных оценок коэффициентов. Благодаря этому через определенный промежуток времени эксплуатации на узлах идентификации систем управления ШГНУ всех скважин формируются и запоминаются комбинации эталонных коэффициентов соответствующих технических состояний. По истечении некоторого времени эксплуатации, когда в блоках идентификации формируются и запоминаются эталоны всевозможных состояний ШГНУ, она переводится в автоматический режим идентификации и управления.

Как известно, каждой ваттметрограмме соответствует только одна комбинация оценок ваттметрограммы  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$ . Также очевидно, что при наличии комбинаций информативных признаков  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$  однозначно определяются те же самые технические состояния, которые обычно специалистом-технологом по динамограмме определяются визуально. Следовательно, комбинации коэффициентов, полученных путем анализа сигналов ваттметрограммы, позволяют автоматически осуществить идентификацию технического состояния ШГНУ. Благодаря этому отпадает необходимость в использовании датчика усилия и анализа динамограммы для визуальной идентификации состояния ШГНУ в полуавтоматическом режиме.

Таким образом, экспериментально установлено, что с помощью нормированных корреляционных функций ваттметрограммы возможно определить нормированные коэффициенты  $K_{N1}, K_{N2}, \dots, K_{N11}$ , на которые указанные помехи никакого влияния практически не оказывают. Преимущество применения этих коэффициентов заключается в том, что для их определения не требуется датчик усилия, их можно вычислить из сигналов ваттметрограммы с использованием современных контроллеров (например, LPC 2148 FBD64). Вследствие этого появляется возможность диагностики в реальном масштабе времени. Простота реализации этих технологий позволяет создавать простую, надежную и недорогую систему управления ШГНУ, которая была реализована на реальных объектах в Азербайджане. Опыт эксплуатации системы на скважинах Бибиэйбатского месторождения показал надежность функционирования этих

систем. При этом улучшение диагностики и управления ШГНУ позволило эксплуатировать скважины в адекватном режиме и за счет экономии электрической энергии и увеличения межремонтного периода значительно повысить их рентабельность. Например, на Бибиэйбатском нефтяном промысле экономия электроэнергии составила до 50 % и межремонтный период был продлен более чем на 30 %.

Отметим, что на основе опыта эксплуатации вышеуказанных систем было установлено, что на каждом промысле для скважин с одинаковой глубиной диапазон изменения одних и тех же коэффициентов  $K_{N1}, \dots, K_{N11}$  при одних и тех же технических состояниях незначителен (не более 5...10 %). Таким образом, определяя комбинации этих эталонных коэффициентов при соответствующих состояниях для одной скважины, можно их использовать в системах управления ШГНУ других скважин с приблизительно той же глубиной. Если учесть, что в большинстве случаев для каждого старого месторождения характерны приблизительно одинаковые глубины спуска насоса, становится очевидным, что формирование эталонной базы комбинаций коэффициентов в системах управления ШГНУ не займет много времени.

### Спектральная технология Noise-контроля начала неисправностей наземного оборудования нефтяных скважин

В реальной жизни при эксплуатации нефтяных скважин кроме идентификации технического состояния объекта также требуется решить актуальную задачу контроля неисправностей как подземной, так и наземной аппаратуры.

Анализ неисправностей наземного оборудования нефтяных скважин показал, что при зарождении соответствующих дефектов ваттметрограмма несет в себе информацию в виде помехи. Следовательно, для контроля начала этих неисправностей целесообразно создание дополнительных технологий анализа помех [17, 22, 23].

Анализ статистики неисправностей наземного оборудования нефтяных скважин показал, что зарождение неисправностей и динамика их развития сопровождаются появлением помехи  $\varepsilon_2(i\Delta t)$ , коррелированной с полезным сигналом  $X(i\Delta t)$ . При этом, как это было отмечено выше, помеха  $\varepsilon_2(i\Delta t)$  складывается с помехой  $\varepsilon_1(i\Delta t)$ , в результате чего формируется суммарная помеха

$\varepsilon(i\Delta t)$ , которая в скрытом периоде аварий коррелирует с полезным сигналом. При этом для повышения надежности и достоверности результата решения задачи контроля начала зарождения и динамики развития неисправностей целесообразно также применение оценки спектральных характеристик суммарной помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$  в качестве информативных признаков  $\varepsilon'(i\Delta t)$ . Анализ возможных вариантов решения этой задачи показал [2, 11–13], что для этого целесообразно заменить неподдающиеся измерению отсчеты помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$  их приближенными эквивалентными величинами  $\varepsilon^e(i\Delta t)$ . При этом использование технологии вычисления оценки дисперсии помехи  $D_\varepsilon$  можно представить в виде

$$D_\varepsilon \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^2(i\Delta t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t)]. \quad (21)$$

Используя обозначения

$$\varepsilon'(i\Delta t) \approx g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t)], \quad (22)$$

$$\operatorname{sgn}(\varepsilon'(i\Delta t)) = \begin{cases} +1 & \text{при } \varepsilon'(i\Delta t) > 0; \\ 0 & \text{при } \varepsilon'(i\Delta t) = 0; \\ -1 & \text{при } \varepsilon'(i\Delta t) < 0, \end{cases} \quad (23)$$

формулу вычисления эквивалентных величин отсчетов помехи  $\varepsilon^e(i\Delta t)$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(i\Delta t) &\approx \varepsilon^e(i\Delta t) \approx \operatorname{sgn}(\varepsilon'(i\Delta t)) \times \\ &\times \sqrt{g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t)]} = (24) \\ &= \operatorname{sgn}(\varepsilon'(i\Delta t)) \sqrt{|\varepsilon'(i\Delta t)|}. \end{aligned}$$

При этом, допуская справедливость выражения

$$\begin{aligned} D_\varepsilon &\approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^2(i\Delta t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e(i\Delta t) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t)[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t)] \quad (25) \end{aligned}$$

формулу вычисления средней величины  $\varepsilon(i\Delta t)$  отсчетов помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$  можно свести к вычислению средней величины эквивалентных отсчетов помехи  $\varepsilon^e(i\Delta t)$ , т. е.

$$\bar{\varepsilon}(i\Delta t) = \bar{\varepsilon}^e(i\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e(i\Delta t) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon(i\Delta t). \quad (26)$$

Многочисленные эксперименты показали что, несмотря на возможные отклонения при-

ближенных величин эквивалентных отсчетов  $\varepsilon^e(i\Delta t)$  от их истинных значений  $\varepsilon(i\Delta t)$  на величину  $\Delta\varepsilon(i\Delta t) = \varepsilon^e(i\Delta t) - \varepsilon(i\Delta t)$ , между их оценками имеет место равенство

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^{e2}(i\Delta t) > \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^2(i\Delta t)\right\} &\approx \\ \approx P\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^{e2}(i\Delta t) < \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^2(i\Delta t)\right\} &= 1; \\ P\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e(i\Delta t) > \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon(i\Delta t)\right\} &\approx \\ \approx P\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e(i\Delta t) < \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon(i\Delta t)\right\} &= 1, \end{aligned}$$

где  $P$  — знак вероятности.

Как равенства (23)–(26), так и проведенные экспериментальные исследования подтвердили, что с помощью эквивалентных отсчетов помехи  $\varepsilon^e(i\Delta t)$  по формуле

$$\begin{aligned} X^e(i\Delta t) &\approx g(i\Delta t) - \varepsilon^e(i\Delta t) \approx \\ &\approx g(i\Delta t) - \varepsilon(i\Delta t) = X(i\Delta t) \end{aligned} \quad (27)$$

можно определить эквивалентные отсчеты  $X^e(i\Delta t)$  полезного сигнала  $X(i\Delta t)$ .

Благодаря этому формулу вычисления средней величины  $\varepsilon(i\Delta t)$  отсчетов помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$  можно свести к вычислению средней величины эквивалентных отсчетов помехи  $\varepsilon^e(i\Delta t)$ , т. е.

$$\bar{\varepsilon}(i\Delta t) = \bar{\varepsilon}^e(i\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e(i\Delta t). \quad (28)$$

Эти исследования также подтвердили, что при этом, несмотря на определенные погрешности отсчетов  $X_i^e(i\Delta t)$  по сравнению с отчетами полезных сигналов  $X(i\Delta t)$ , при достаточной длительности времени наблюдения  $T$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} P[X_1(i\Delta t) \geq X_1^e(i\Delta t)] &= P[X_1(i\Delta t) \leq X_1^e(i\Delta t)]; \\ P[X_2(i\Delta t) \geq X_2^e(i\Delta t)] &= P[X_2(i\Delta t) \leq X_2^e(i\Delta t)]; \\ \dots & \\ P[X_n(i\Delta t) \geq X_n^e(i\Delta t)] &= P[X_n(i\Delta t) \leq X_n^e(i\Delta t)]; \\ P[X_1((i+\mu)\Delta t) \geq X_1^e((i+\mu)\Delta t)] &= \\ = P[X_1((i+\mu)\Delta t) \leq X_1^e((i+\mu)\Delta t)] & \quad (29) \\ P[X_2((i+\mu)\Delta t) \geq X_2^e((i+\mu)\Delta t)] &= \\ = P[X_2((i+\mu)\Delta t) \leq X_2^e((i+\mu)\Delta t)]; \\ \dots & \\ P[X_n((i+\mu)\Delta t) \geq X_n^e((i+\mu)\Delta t)] &= \\ = P[X_n((i+\mu)\Delta t) \leq X_n^e((i+\mu)\Delta t)]. & \end{aligned}$$

Поэтому выражение для определения оценок спектральных характеристик помехи можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{n_e} &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon(i\Delta t) \cos(n\omega(i\Delta t)) \approx \\ &\approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e(i\Delta t) \cos(n\omega(i\Delta t)); \\ b_{n_e} &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon(i\Delta t) \sin(n\omega(i\Delta t)) \approx \\ &\approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e(i\Delta t) \sin(n\omega(i\Delta t)). \end{aligned} \quad (30)$$

Легко можно убедиться, что, принимая во внимание обозначения (21) и (25), формулы определения оценок спектральных характеристик помехи можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{n_e} &\approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(\varepsilon'(i\Delta t)) \times \\ &\times \sqrt{[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t)]} \times \\ &\times \cos(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(\varepsilon'(i\Delta t)) \sqrt{|\varepsilon'(i\Delta t)|} \cos(n\omega(i\Delta t)); \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} b_{n_e} &\approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(\varepsilon'(i\Delta t)) \times \\ &\times \sqrt{[g(i\Delta t) + g((i+2)\Delta t) - 2g((i+1)\Delta t)]} \times \\ &\times \sin(n\omega(i\Delta t)) = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(\varepsilon'(i\Delta t)) \sqrt{|\varepsilon'(i\Delta t)|} \sin(n\omega(i\Delta t)). \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, применение алгоритмов (31), (32) открывает возможность для регистрации начала скрытого периода неисправностей, так как только в начале аварийного состояния оценки  $a_{n_e}$  и  $b_{n_e}$  будут отличаться от эталонных информативных признаков. Таким образом, применение этих выражений позволит повысить надежность и достоверность контроля начала скрытого периода зарождения неисправностей оборудования нефтяных скважин.

Исследования показали, что динамика развития неисправностей влияет на изменение степени корреляции между отсчетами помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$ . Это, в свою очередь, отражается также на изменении корреляции между отсчетами эквивалентной помехи  $\varepsilon^e(i\Delta t)$ , и по результатам спектрального анализа эквивалента  $\varepsilon^e(i\Delta t)$  помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$  при  $\mu = 1\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, m\Delta t$ ,

т. е.  $\varepsilon^e((i+1)\Delta t)$ ,  $\varepsilon^e((i+2)\Delta t)$ ,  $\varepsilon^e((i+3)\Delta t)$ , ...,  $\varepsilon^e((i+m)\Delta t)$ , можно контролировать динамику развития аварий по выражениям

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1\varepsilon}^* \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e((i+1)\Delta t) \cos(n\omega(i\Delta t)); \\ b_{1\varepsilon}^* \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e((i+1)\Delta t) \sin(n\omega(i\Delta t)); \\ a_{2\varepsilon}^* \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e((i+2)\Delta t) \cos(n\omega(i\Delta t)); \\ b_{2\varepsilon}^* \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e((i+2)\Delta t) \sin(n\omega(i\Delta t)); \\ \dots \\ a_{n\varepsilon}^* \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e((i+n)\Delta t) \cos(n\omega(i\Delta t)); \\ b_{n\varepsilon}^* \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon^e((i+n)\Delta t) \sin(n\omega(i\Delta t)). \end{array} \right. \quad (33)$$

Если неисправность стабильна, тогда эти оценки будут стабильными. Однако при наличии динамики развития неисправностей оценки  $a_{1\varepsilon}^*, b_{1\varepsilon}^*, a_{2\varepsilon}^*, b_{2\varepsilon}^*, \dots, a_{n\varepsilon}^*$  будут меняться, а в случае высокой динамики развития степени дефекта их отличия будут значительными.

### Спектральная технология Noise-сигнализации начала скрытого периода неисправностей

Анализ технологий спектрального Noise-контроля показал, что при эксплуатации скважины также важна сигнализация начала скрытого периода неисправностей [1, 2, 11–13]. Для этой цели в качестве информативных признаков кроме вышеуказанных оценок также целесообразно использование оценок  $a_{n\varepsilon}^*$  и  $b_{n\varepsilon}^*$  релейных спектральных характеристик помехи  $\varepsilon(i\Delta t)$  зашумленных сигналов  $g(i\Delta t)$ , которые можно вычислить по выражениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{n\varepsilon}^{**} \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(\varepsilon^e(i\Delta t)) \cos(n\omega(i\Delta t)); \\ b_{n\varepsilon}^{**} \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(\varepsilon^e(i\Delta t)) \sin(n\omega(i\Delta t)). \end{array} \right. \quad (34)$$

Исследования также показали, что для сигнализации начала зарождения неисправностей также может быть использована технология знакового спектрального анализа помехи с помощью выражений

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_{n\varepsilon} \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(\varepsilon^e(i\Delta t)) \operatorname{sgn}(\cos(n\omega(i\Delta t))); \\ b'_{n\varepsilon} \approx \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(\varepsilon^e(i\Delta t)) \operatorname{sgn}(\sin(n\omega(i\Delta t))). \end{array} \right. \quad (35)$$

Целесообразность применения технологии релейного и знакового спектрального анализа для сигнализации начала скрытого периода аварий связана с тем, что она аппаратурно легко реализуется. При этом надежность сигнализации неисправностей целесообразно обеспечить дублированием их технологией релейного корреляционного анализа  $R_{X\varepsilon}^*(\mu)$  по формуле

$$R_{X\varepsilon}^*(\mu) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(i\Delta t) [\operatorname{sgn}(g((i+1)\Delta t)) + \\ + \operatorname{sgn}(g((i+3)\Delta t)) - 2\operatorname{sgn}(g((i+2)\Delta t))], \quad (36)$$

где  $R_{X\varepsilon}^*(\mu)$  — оценка релейной взаимно корреляционной функции между полезным сигналом  $X(i\Delta t)$  и помехой  $\varepsilon(i\Delta t)$ .

В этом случае, если полученные оценки при  $\mu = 1\Delta t$  будут больше эталонной, динамику развития неисправностей можно считать медленной. Если оценки будут больше эталонной при  $\mu = 2\Delta t$ , то динамика умеренная. В случае отличия от эталонных информативных признаков при  $\mu = 3\Delta t$  и выше динамику развития можно считать ускоренной.

При этом из-за чрезвычайной важности обеспечения безаварийной эксплуатации нефтяных скважин контроль начала и динамики развития неисправностей целесообразно осуществить дублированием нескольких технологий Noise-контроля и Noise-сигнализации. При этом эталонное множество из оценок Noise-характеристик зашумленных сигналов в сочетании с текущими информативными признаками будет представлять собой основу информационного обеспечения решения задачи контроля.

### Заключение

Отметим, что в настоящее время из-за влияния различных факторов затрудняется обеспечение безаварийной эксплуатации нефтяных скважин. Применяемые технологии и системы не обеспечивают удовлетворительный контроль их функционирования. Традиционные технологии не позволяют извлекать диагностическую информацию, достаточную для идентификации начала скрытого периода

зарождения дефектов в оборудовании нефтяных скважин, а это, в свою очередь, влияет на задержку времени регистрации начала неисправностей, что иногда приводит к неизбежным авариям с нежелательными последствиями. Следовательно, для повышения надежности безаварийной эксплуатации и организации своевременного технического обслуживания скважин необходимо создание новых более эффективных технологий анализа зашумленных сигналов, позволяющих провести раннее обнаружение начала зарождения неисправностей. Из-за чрезвычайной важности контроля текущего состояния основных оборудованияй нефтяных скважин целесообразно хотя бы дублирование традиционных алгоритмов контроля с алгоритмами Noise-контроля начала и динамики развития неисправностей. Применением алгоритмов и технологий Noise-контроля в сочетании с традиционными алгоритмами и технологиями можно существенно повысить эффективность и надежность обеспечения безаварийной эксплуатации ШГНУ нефтяных скважин.

Важность исключения из системы контроля датчика усилия, кроме нестабильности их метрологических характеристик и трудности их эксплуатации, связана еще и с тем, что в глубоких скважинах динамограммы приобретают бесформенную картину, и с увеличением глубины скважины этот процесс продолжается. При этом ваттметрограммы более четко отражают техническое состояние объекта. Следовательно, с увеличением глубины скважины снижается необходимость использования динамограммы.

Кроме того, в последние годы для добычи нефти широко применяются погружные центробежные насосы, и основным показателем ее технического состояния становятся ваттметрограммы. Поэтому для нефтяных промыслов, где используются погружные насосы, анализ ваттметрограммы для формирования информативных признаков контроля и управления скважин становится чрезвычайно важным.

Кроме того, в ирригационных системах широко используются насосные станции и артезианские скважины, в которых изменение их технического состояния также отражается на ваттметрограммах. Для их контроля, диагностики, профилактики также необходимо формирование соответствующих информативных признаков путем анализа ваттметрограммы.

Наконец, во многих отраслях, например, в объектах энергетики, отопительных системах, в транспорте и т. д., которые функционируют с помощью соответствующих электромоторов, для обеспечения эффективности контроля начала и динамики изменения неисправностей целесообразно формирование и использование соответствующих эталонных и текущих информативных признаков. Следовательно, предложенные в работе алгоритмы и технологии анализа помехи, в принципе, могут найти широкое применение во многих областях экономики.

#### Список литературы

1. Aliev T. A., Rzayev A. H., Guluyev G. A. et al. Robust technology and system for management of sucker rod pumping units in oil wells // Mechanical Systems and Signal Processing. 2018. Vol. 99. P. 47–56. DOI: 10.1016/j.ymssp.2017.06.010.
2. Neely A. B., Tolbert H. E. (1988) Experience with Pump-Off Control in the Permian Basin // SPE Paper No. 14345. SPE Technical Conference and Journal of Petroleum Technology. 1988. P. 645–648.
3. Li K., Han Y., Wang T. 2018. A novel prediction method for down-hole working conditions of the beam pumping unit based on 8-directions chain codes and online sequential extreme learning machine // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2018. N. 160. P. 285–301.
4. Chen D., Zhang R., Meng H. The study and application of dynamic liquid lever calculation model based on dynamometer card of oil wells // Science Technology and Engineering. 2015. N. 15(32). P. 32–35.
5. Yu D., Li Y., Sun H. et al. A fault diagnosis method for oil well pump using radial basis function neural network combined with modified genetic algorithm // Journal of Controlence and Engineering. 2017. N. 2. P. 1–7.
6. Zhang R., Wang Z., Wang X. et al. 2018. Integrated Diagnostics Method and Application of Ground and Downhole Working Condition in Rod Pumping Well // Journal of Applied Science and Engineering. 2018. Vol. 24, N. 4. P. 615–624.
7. Xing M. M., Dong S. M. A New Simulation Model for a Beam-Pumping System Applied in Energy Saving and Resource-Consumption Reduction. SPE. Prod. Oper. 2015. Vol. 30, N. 02. P. 130–40.
8. Sun Z., Lin C., Du D. et al. 2019 Application of seismic architecture interpretation in enhancing oil recovery in late development stage taking meandering river reservoir in dongying depression as an example // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2019. N. 10. P. 67–69.
9. Han D. 2010. Discussions on concepts, countermeasures and technical routes for the secondary development of high water-cut oil fields // Petroleum Explorationand Development. 2010. 37(5), 583–591.
10. Галимов И. Ф., Губайдуллин Ф. А., Вахин А. В., Исаев П. В. Анализ эффективности гидроразрыва терригенных коллекторов Южно-Ромашкинской площади Ромашкинского месторождения на поздней стадии разработки // Журнал нефтяной промышленности. 2018. № 01. С. 52–54.
11. Алиев Т. М. и др. Автоматический контроль и диагностика скважинных штанговых насосных установок. М.: Недра, 1988. 232 с.
12. Gibbs S. G., Neely A. B. Computer diagnosis of down-hole conditions in sucker rod pumping wells // Journal of Petroleum Technology. 1966. Vol. 8, N. 01. P. 91–94. DOI:10.2118/1165-PA.

13. **Aliev T. A.** Noise Control of the Beginning and Development Dynamics of Accidents. Springer, 2019.
14. **Aliev T. A., Guluyev G. A., Pashayev F. H.** et al. Noise monitoring technology for objects in transition to the emergency state // Mechanical Systems and Signal Processing. 2012. Vol. 27. P. 755–762. DOI: 10.1016/j.ymssp.2011.09.005.
15. **Fasel T. R., Todd M. D.** Chaotic insonification for health monitoring of an adhesively bonded composite stiffened panel. Mechanical Systems and Signal Processing. 2010. Vol. 24, N. 5. P. 1420–1430.
16. **Guluyev G., Pashayev A., Pashayev F.** et al. Building the dynamometer card of sucker rod pump using power consumption of the electric motor of pumping unit // IV international conference "Problems of cybernetics and informatics". September 12–14, 2012, Baku, Azerbaijan. Vol. III. P. 19–21.
17. **Tang H., Liao Y. H., Cao J. Y., Xie H.** Fault diagnosis approach based on Volterra models // Mechanical Systems and Signal Processing. 2010. Vol. 24, N. 4. P. 1099–1113.
18. **Алиев Т. А., Нусратов О. Г., Гулуев Г. А., Рзаев А. Г., Пашаев Ф. Г., Резван М. Г., Керимов А. Б.** Алгоритмы диагностики неисправностей штанговых глубинно-насосных установок // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 5. С. 314–320.
19. **Алиев Т. А., Рзаев А. Г., Гулуев Г. А., Ализаде Т. А., Саттарова У. Э., Рзаева Н. Э.** Система диагностики и управ- ления штанговых глубинно-насосных установок нефтяных скважин с использованием робастной noise-технологии // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 10. С. 686–698.
20. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф., Сулейманова М. Т., Газызаде Б. И.** Чувствительные алгоритмы выявления степени развития неисправности штанговой глубинной насосной установки // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 2. С. 91–102.
21. **Алиев Т. А., Мусаева Н. Ф., Газызаде Б. И.** Технологии мониторинга динамики развития повреждений на буровых установках с использованием моментов высоких порядков помех // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 4. С. 213–223.
22. **Bendat J. S., Piersol A. G.** Random Data, Analysis & Measurement Procedures. Wiley, New York, 2000.
23. **Bendat J. S., Piersol A. G.** Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis. Wiley, New York, 1993.
24. **Алиев Т. А., Искендеров Д. А., Гулуев Г. А. и др.** Результаты внедрения комплекса контроля, диагностики и управления для нефтяных скважин, эксплуатирующихся штанговыми глубинными насосами в нефтегазодобывающем управлении "Бибиэйбатнефть" // Азербайджанское Нефтяное Хозяйство. 2014. № 6. С. 37–41.

## Technology for the NOISE Control of Oil Wells by Wattmeter Card of the Electric Motor of Sucker Rod Pumping Units

**T. A. Aliyev**, director@cyber.az,  
**G. A. Guluyev**, scb\_06@mail.ru,  
**As. H. Rzayev**, asifrzayev48@gmail.com,  
**F. H. Pashayev**, pasha.farhad@gmail.com,  
**N. E. Rzayeva**, nikanel1@gmail.com,

Institute of Control Systems (Azerbaijan National Academy of Sciences), Az-1141, Baku, Azerbaijan,  
Institute of Information Technology (Azerbaijan National Academy of Sciences), Az-1141, Baku, Azerbaijan

*Corresponding author: Guluyev Gambar A., Dr. Sci., Head of Laboratory, Institute of Control Systems, Az-1141, Baku, Azerbaijan, e-mail: scb\_06@mail.ru*

*Accepted on August 20, 2021*

### Abstract

The possibility of using measuring information on the power consumption (watt-metrogram) by the electric motor of a sucker rod pumping unit for diagnosing the technical condition of oil well equipment is considered. It is shown that one of the possible ways in this case can be the application of Noise technology to the processing of wattmetrogram signals. A technology is proposed for forming a set of combinations of reference and current informative attributes from the estimates of the normalized correlation functions of the useful signal of a wattmeter card; it is shown that they are equivalent to informative attributes of a dynamometer card received from a force transducer installed on the hanger of a sucker rod pumping unit. It is also shown that they equally reflect the technical condition of the well, due to which the informative attribute of the wattmeter card can be used to solve the problems of control, identification and management the oil production process with a sucker rod pumping unit. Variants of decreasing the error in the results of correlation analysis of the watt-metrogram and a variant of using the normalized correlation functions of the useful signal of the watt-metrogram for solving problems of identifying the technical state of the equipment of sucker rod pumping stations are proposed. To increase the effectiveness of monitoring systems, it is proposed to duplicate the system diagnostic function using the spectral technology for the control of the onset and dynamics of development of faults. The features of implementation in the fields are given. Possible options for using the normalized correlation functions of the useful signal of the wattmetrogram for solving the problems of identifying the technical state of wells during its operation are considered. A simplified structural diagram of the remote monitoring and control system of the sucker rod pumping unit based on the wattmetrogram signals, which has been introduced at the wells of the oil production department "Bibiheybatneft" in Azerbaijan, is presented. It is shown that the algorithms and technologies for analyzing the interference of wattmetograms proposed in the work, in principle, can be widely used in many areas of the economy where electric motors are used.

**Keywords:** Well, technical condition, control, signal, dynamometer card, wattmeter card, informative attribute, noise, correlation function, normalization

For citation:

**Aliyev T. A., Guluyev G. A., Rzayev As. H., Pashyev F. H., Rzayeva N. E.** Technology for the NOISE Control of Oil Wells by Wattmeter Card of the Electric Motor of Sucker Rod Pumping Units, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 132–145.

DOI: 10.17587/mau.23.132-145

## References

1. **Aliev T. A., Rzayev A. H., Guluyev G. A.** et al. Robust technology and system for management of sucker rod pumping units in oil wells, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, vol. 99, pp. 47–56, DOI: 10.1016/j.ymssp.2017.06.010.
2. **Neely A. B., Tolbert H. E.** Experience with Pump-Off Control in the Permian Basin, *SPE Paper No. 14345. SPE Technical Conference and Journal of Petroleum Technology*, 1988, pp. 645–648.
3. **Li K., Han Y., Wang T.** A novel prediction method for down-hole working conditions of the beam pumping unit based on 8-directions chain codes and online sequential extreme learning machine, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2018, no. 160, pp. 285–301.
4. **Chen D., Zhang R., Meng H.** The study and application of dynamic liquid lever calculation model based on dynamometer card of oil wells. *Science Technology and Engineering*, 2015, no. 15(32), pp. 32–35.
5. **Yu D., Li Y., Sun H.** et al. A fault diagnosis method for oil well pump using radial basis function neural network combined with modified genetic algorithm. *Journal of Control ence and Engineering*, 2017, no. 2, pp. 1–7.
6. **Zhang R., Wang Z., Wang X.** et al. Integrated Diagnostics Method and Application of Ground and Downhole Working Condition in Rod Pumping Well, *Journal of Applied Science and Engineering*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 615–624.
7. **Xing M. M., Dong S. M.** A New Simulation Model for a Beam-Pumping System Applied in Energy Saving and Resource-Consumption Reduction, *SPE. Prod. Oper.*, 2015, vol. 30, no. 02, pp. 130–40.
8. **Sun Z., Lin C., Du D.** et al. Application of seismic architecture interpretation in enhancing oil recovery in late development stage taking meandering river reservoir in dongying depression as an example, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2019, no. 10, pp. 67–69.
9. **Han D.** Discussions on concepts, countermeasures and technical routes for the secondary development of high water-cut oil fields, *PetroleumExplorationandDevelopment*, 2010, vol. 37, no. 5, pp. 583–591.
10. **Galimov I. F., Gubaidullin F. A., Vakhin A. V., Isaev P. V.** Analyzing effectiveness of the terrigenous reservoirs hydrofracturing at South-Romashkinskaya area of Romashkinskoe oil field at the late stage of development, *Oil Industry Journal*, 2018, no. 01, pp. 52–54 (in Russian).
11. **Aliev T. M.** et al. Automated control and diagnostics of SRPU, Moscow, Nedra, 1988 (in Russian).
12. **Gibbs S. G., Neely A. B.** Computer diagnosis of down-hole conditions in sucker rod pumping wells, *Journal of Petroleum Technology*, 1966, vol. 8, no. 01, pp. 91–94, DOI: 10.2118/1165-PA.
13. **Aliev T. A.** Noise Control of the Beginning and Development Dynamics of Accidents, Springer, 2019.
14. **Aliev T. A., Guluyev G. A., Pashayev F. H.** et al. Noise monitoring technology for objects in transition to the emergency state, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, vol. 27, pp. 755–762, DOI: 10.1016/j.ymssp.2011.09.005.
15. **Fasel T. R., Todd M. D.** Chaotic insonification for health monitoring of an adhesively bonded composite stiffened panel, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2010, vol. 24, no. 5, pp. 1420–1430.
16. **Guluyev G., Pashayev A., Pashayev F.** et al. Building the dynamometer card of sucker rod pump using power consumption of the electric motor of pumping unit, *IV international conference "Problems of cybernetics and informatics"*, September 12–14, 2012, Baku, Azerbaijan, vol. III, pp. 19–21.
17. **Tang H., Liao Y. H., Cao J. Y., Xie H.** Fault diagnosis approach based on Volterra models, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2010, vol. 24, no. 4, pp. 1099–1113.
18. **Aliev T. A., Nusratov O. G., Guluyev G. A., Rzayev A. G., Pashaev F. G., Rezvan M. G., Kerimov A. B.** Algorithms for diagnostics of malfunctions of sucker rod pumping units, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 5, pp. 314–320 (in Russian).
19. **Aliev T. A., Rzaev A. H., Guluyev G. A., Alizade T. A., Sattarova U. E., Rzayeva N. E.** Diagnostic and control system for sucker rod pumping units of oil wells using robust noise technology, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 10, pp. 686–698 (in Russian).
20. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Suleymanova M. T., Gazizade B. I.** Sensitive algorithms for detecting the degree of development of a sucker rod pumping unit malfunction. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 2, pp. 91–102 (in Russian).
21. **Aliev T. A., Musaeva N. F., Gazizade B. I.** Technologies for monitoring the dynamics of damage development on drilling rigs using the moments of high orders of interference, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 213–223 (in Russian).
22. **Bendat J. S., Piersol A. G.** Random Data, Analysis & Measurement Procedures, Wiley, New York, 2000.
23. **Bendat J. S., Piersol A. G.** Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis, Wiley, New York, 1993.
24. **Aliev T. A., Iskenderov D. A., Guluev G. A.** et al. Results of the implementation of a monitoring, diagnostics and management complex for oil wells operated by sucker rod pumps in the oil and gas production department "Bibeybatneft", *Azerbaijan Oil Industry*, 2014, no. 6, pp. 37–41 (in Russian).

# РОБОТЫ, МЕХАТРОНИКА И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

УДК 681.51

DOI: 10.17587/mau.23.146-151

**Hoang Duc Long**, Ph.D. Student, longhd@mta.edu.vn,  
**N. A. Dudarenko**, Cand. of Sc., Associate Professor, dudarenko@mail.ifmo.ru,  
ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

*Corresponding author: Hoang Duc Long*, Ph.D. Student, Faculty of Control Systems and Robotics, ITMO University, Saint-Petersburg, 197101, Russian Federation, e-mail: longhd@mta.edu.vn

Accepted on November 8, 2021

## Analysis of a Cart-Inverted Pendulum System with Harmonic Disturbances Based on its Criterion Matrix

### Abstract

The control of an inverted pendulum is a classical benchmark control problem. Its dynamics resemble that of many real-world systems of interest like pendulous, missile launchers, segways, and many more. The control of this system is challenging as it is a highly unstable, highly non-linear, non-minimum phase system, and underactuated. Furthermore, the physical constraints on the track position also pose complexity in its control design. A great deal of nonlinearity is present inherently and as well as affected by the surrounding external disturbances. The paper presents an approach for analysis of a cart-inverted pendulum system with harmonic disturbances. The approach is based on the index of the criterion matrix of the system named a degeneration factor. The degeneration factor is constructed with the singular values of the criterion matrix of the system and allows us to find frequency range, where the system operates as a whole. A linear-quadratic regulator is used to control the cart-inverted pendulum system. The results are supported with an example.

**Keywords:** cart-inverted pendulum, criterion matrix, Sylvester equation, degeneration factor, harmonic disturbance, linear-quadratic regulator

For citation:

**Hoang Duc Long, Dudarenko N. A.** Analysis of a Cart-Inverted Pendulum System with Harmonic Disturbances Based on its Criterion Matrix, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 146–151.

DOI: 10.17587/mau.23.146-151

УДК 681.51

DOI: 10.17587/mau.23.146-151

**Хоанг Дык Лонг**, аспирант, longhd@mta.edu.vn,  
**Н. А. Дударенко**, канд. техн. наук, доц., dudarenko@yandex.ru,  
Университет ИТМО, г. Санкт-Петербург

## Анализ системы "маятник—тележка" при внешнем гармоническом воздействии на основе критериальной матрицы системы

Управление перевернутым маятником на тележке является классической задачей теории управления. Динамика перевернутого маятника схожа с динамикой многих реальных систем, представляющих практический интерес, таких как маятниковые системы, ракетные пусковые установки, сегвеи и многие другие. Управление такой системой является сложной задачей в силу неустойчивости и нелинейности системы. Кроме того, физические ограничения, накладываемые на систему, также усложняют процесс проектирования системы управления. Большая часть нелинейностей обусловлена как самой конструкцией системы, так и влиянием внешних возмущений различного характера. В статье представлен подход к анализу системы "маятник—тележка", функционирующей в условиях внешних гармонических воздействий. Предлагаемый подход основан на исследовании характеристического показателя критериальной матрицы системы, имеющего функционал вырождения. Функционал вырождения, сконструированный на спектре сингулярных чисел критериальной матрицы системы, используется как качественный показатель, позволяющий определить диапазон частот гармонического воздействия, на котором система функционирует как единое целое. Для управления системой перевернутого маятника на тележке используется линейно-квадратичный регулятор. Предлагаемый подход иллюстрируется примером.

**Ключевые слова:** перевернутый маятник на тележке, критериальная матрица, уравнение Сильвестра, функционал вырождения, гармоническое возмущение, линейно-квадратичный регулятор

## Introduction

An inverted pendulum on a cart is an unstable nonlinear system that is often used to test the performance and effectiveness of control algorithms [1–9]. Many algorithms have been successfully applied to this model such as PID control [1, 2, 8], fuzzy logic control [3, 4], neural network [5], sliding mode control [6, 7], and linear–quadratic regulator (LQR) control [8, 9]. In these papers, the authors only presented the inverted pendulum is affected by the random noise or moved from the initial position to the equilibrium position without mentioning the effects of harmonic disturbances. Harmonic disturbances are common signals in practice [10, 11], they have great influences on the working process of MIMO systems [12]. During the working process of the MIMO system, there are many harmonic disturbances that cause instability and degeneration [12, 13]. For example, when the system moves on an undulating or vibrating surface.

In this paper, the authors present an approach for analysis of a cart-inverted pendulum system with harmonic disturbances. The approach is based on the index of the criterion matrix of the system named a degeneration factor [14–16]. The degeneration factor is constructed with the singular values of the criterion matrix of the system and allows us to find frequency range, where the system operates as a whole. A linear-quadratic regulator is used to control the cart-inverted pendulum system. The proposed approach consists of two steps. The first step is the criterion matrix construction. The second step is degeneration factor calculation with the further analysis.

The paper is laid out as follows. The problem formulation with the description of the researched model is given in Section 1. Then, the control design procedure for the inverted pendulum on a cart system is described and the methodology for the criterion matrix constructing is presented in Section 2. Thereafter, simulation results of the designed control system with harmonic disturbances are depicted. The cases of harmonic disturbances of different frequencies are considered. The researched system is analyzed with the degeneration factor of its criterion matrix. As the result, a frequency range, where the system operates as a whole, is defined. The paper is finished with some concluding remarks.

### 1. Problem formulation

The inverted pendulum is easily destabilized under the impact of disturbances on the position of cart and the angle of pendulum. Firstly, we consider

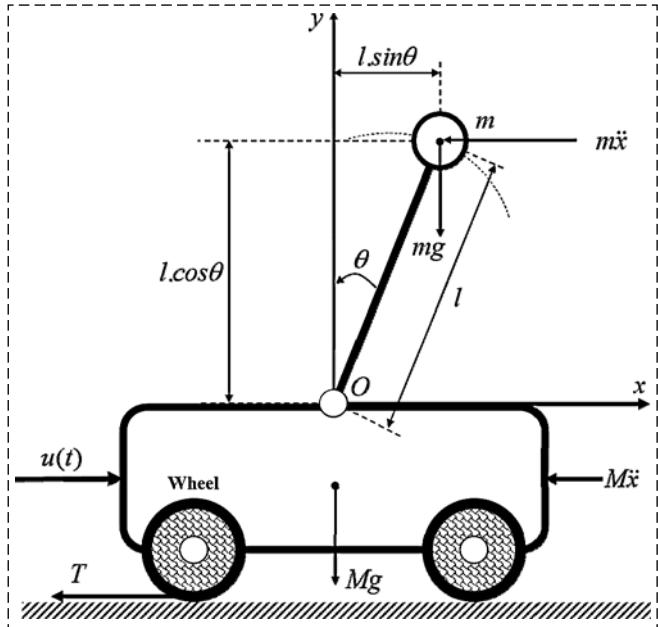


Fig. 1. Inverted pendulum on a cart

the mathematical model that describes the inverted pendulum. The inverted pendulum model consists of a cart and a pendulum (Fig. 1). The position of the cart and the angle of the pendulum are able to be controlled. It supposes that frictions and moments of inertia are ignored. The nonlinear model of the Inverted Pendulum is constructed by using the Euler–Lagrange equation.

The kinetic energy of the pendulum can be calculated as

$$T_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2. \quad (1)$$

The kinetic energy of the cart satisfies the following expression:

$$T_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2. \quad (2)$$

Then, the kinetic energy of the system is given by

$$T = T_c + T_p = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2. \quad (3)$$

The potential energy of the system is described by the following expression

$$U = m g l \cos(\theta). \quad (4)$$

Then, the energy of the inverted pendulum:

$$L = T - U = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + m l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l \cos(\theta). \quad (5)$$

Consider the Euler-Lagrange equation:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= u - k\dot{x}; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Combination of (5) and (6) results in:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta} = u - k\dot{x}; \\ ml^2 \ddot{\theta} - mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta. \end{cases} \quad (7)$$

Then, the state-space model representation of the inverted pendulum can be described in the following form:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{ml \sin x_3 x_4^2 - mg \cos x_3 \sin x_3 + u - kx_2}{M + m(\sin x_3)^2}; \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = \frac{ml \sin x_3 \cos x_3 x_4^2 - (M+m)g \sin x_3 + u \cos x_3 - kx_2 \cos x_3}{-(M+m(\sin x_3)^2)}, \end{cases} \quad (8)$$

where  $x_1 = x$ ;  $x_2 = \dot{x}$ ;  $x_3 = \theta$ ;  $x_4 = \dot{\theta}$ .

Equations (8) get the balance point  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 0$ ;  $x_4 = 0$ . The linearized state equation of the Inverted Pendulum has the form as follows:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u, \quad (9)$$

where  $x$  — distance (m);  $\dot{x}$  — velocity (m/s);  $\ddot{x}$  — acceleration ( $\text{m/s}^2$ );  $\theta$  — angular (rad);  $\dot{\theta}$  — angular velocity ( $\text{rad/s}$ );  $\ddot{\theta}$  — angular acceleration ( $\text{rad/s}^2$ );  $F$  — force (N);  $k$  — friction coefficient ( $\text{Nm/A}$ );  $g$  — gravity acceleration ( $\text{m/s}^2$ );  $M$  — mass of the cart (kg);  $m$  — mass of pendulum (kg);  $l$  — length of the pendulum (m).

From the differential equations describing the inverted pendulum (8), if a disturbance signal acts on the position of the cart or the angle of the pendulum, it will lead to instability or degeneration of the system. Then, the aim of the paper is to analyze the system behavior for the case of harmonic disturbances of different frequencies

and find a frequency range, where the system operates as a whole.

In the next section, we will design the control law and describe the methodology for the criterion matrix constructing.

## 2. Control design method

### A. Control law design for inverted pendulum on a cart

The idea of control law design for MIMO systems with harmonic disturbances is proposed in the works [14—16]. The algorithm will be applied to the researched inverted pendulum system. Consider a state-space model representation of the system in the following form:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (10)$$

$$\text{where } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix};$$

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  are control input, state vector, and output, respectively;  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T \in R^4$ ;  $\mathbf{u}, \mathbf{y} \in R^2$ .

We assume that the harmonic disturbances affected on the inverted pendulum is given as

$$\mathbf{g}(t) = \psi \sin \omega t, \quad (11)$$

where  $\psi$  and  $\omega$  are the amplitudes and the frequencies of harmonics disturbance, respectively. The control diagram of the inverted pendulum on a cart system is shown in Fig. 2.

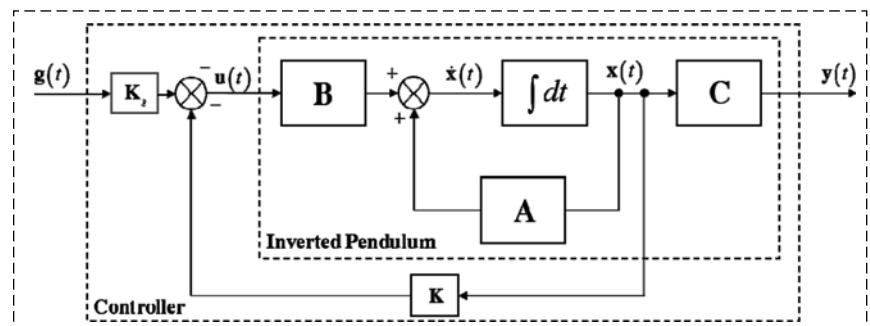


Fig. 2. The controller of the inverted pendulum on a cart

The control algorithm is proposed in the following form:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_g \mathbf{g}(t) - \mathbf{K} \mathbf{x}(t), \quad (12)$$

where  $\mathbf{K}_g$  is the feedforward scaling factor, and  $\mathbf{K}$  is the gain of negative feedback.

The combination of dynamic model (10) and the control algorithm (12) allows us to get the closed-loop system:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{g}(t); \mathbf{x}(0), \mathbf{y}(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (13)$$

where  $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{K}_g$ . The resulting matrices of the system are used to obtain the criterion matrix of the inverted pendulum on a cart system.

### B. Criterion matrix constructing

The state-space model representation for the inverted pendulum on a cart system with controller is given by:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{g}(t); \mathbf{x}(0); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (14)$$

where  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{y}$  are the state vector, the input vector, and the output vector, respectively;  $\mathbf{x} \in R^4$ ,  $\mathbf{g}, \mathbf{y} \in R^2$ ;  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{C}$  are the state matrix, the input matrix, and the output matrix respectively, where  $\mathbf{F} \in R^{4 \times 4}$ ,  $\mathbf{G}, \mathbf{C}^T \in R^{2 \times 4}$ .

An exogenous disturbance  $\mathbf{g}(t)$  is considered in the following form

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{z}(t); \mathbf{z}(0); \mathbf{g}(t) = \mathbf{P}\mathbf{z}(t), \quad (15)$$

where  $\mathbf{z} \in R^2$  is the state vector of the disturbance model;  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$  are the state matrix and the output matrix, the matrix  $\mathbf{P}$  satisfies the condition  $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$ , here  $\mathbf{I}$  is the identity matrix ( $\mathbf{I} \in R^{4 \times 4}$ ).

Assume, the exogenous disturbance (15) be a harmonic disturbance with the frequency  $\omega$ . Then, we have representation of matrix  $\mathbf{E}$  in the following form

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

The criterion matrix of the system with harmonic disturbance [16] can be given by

$$\mathbf{N} = \mathbf{C}\mathbf{T}(\omega), \quad (17)$$

where  $\mathbf{T}$  is the similarity matrix, that satisfies the Sylvester matrix equation [14-15] as

$$\mathbf{T}\mathbf{E} - \mathbf{F}\mathbf{T} = \mathbf{G}\mathbf{P}. \quad (18)$$

The singular value decomposition (SVD) [17-19] of the criterion matrix of the system is used to calculate its degeneration factor [14] in the following form

$$J_{D_1} = \frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad (19)$$

where  $\alpha_{\min}$  and  $\alpha_{\max}$  are the minimum and the maximum singular values of the criterion matrix respectively. The degeneration factor reflects the behavior of the system and allow us to find frequency range, where the system operates as a whole.

### Example

Consider the inverted pendulum on a cart system with the following parameters:  $M = 2(\text{kg})$ ,  $m = 1(\text{kg})$ ,  $l = 0.5(\text{m})$ ,  $g = 9.81(\text{m/s}^2)$ . In the simulation, we use Linear—quadratic regulator (LQR) controller. The block diagram of the system with external harmonic disturbance is shown in Fig. 3. We can change the frequencies of inputs on two channels: the position of the card and the angle of the pendulum.

The degeneration factor for the inverted pendulum on a cart system with LQR controller is illustrated in Fig. 4. Obviously, the system operates as a whole, when the frequency of harmonic disturbances more than  $35\text{s}^{-1}$ .

Fig. 5 shows the behavior of the inverted pendulum with LQR controller without harmonic disturbances. The inverted pendulum moves from the

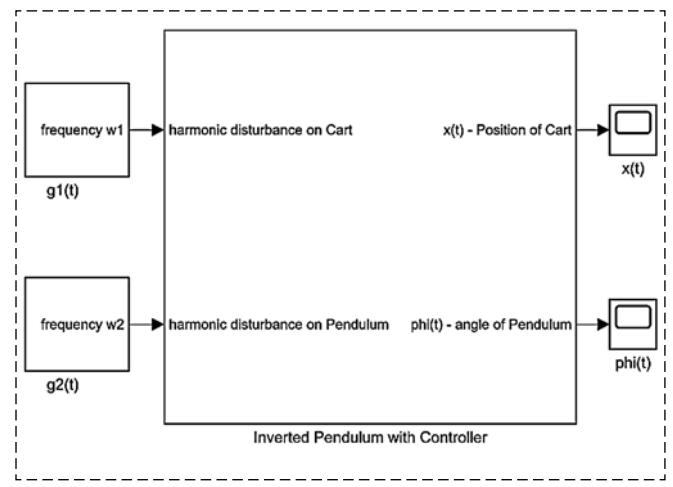


Fig. 3. The simulation model of the inverted pendulum on a cart

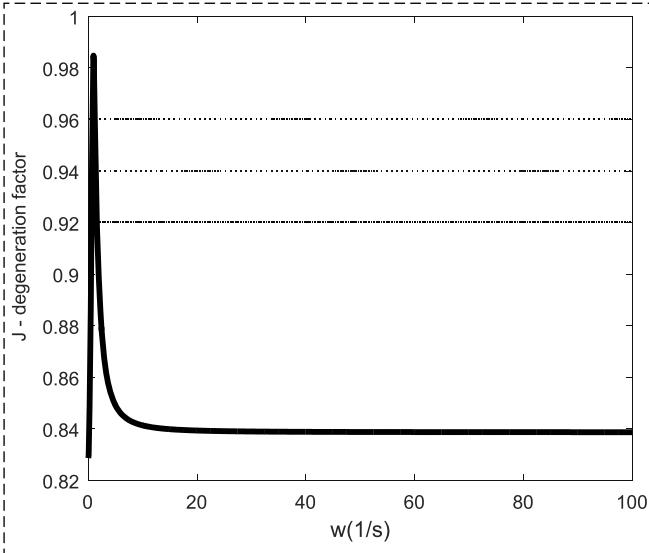


Fig. 4. Degeneration factor of the Inverted Pendulum

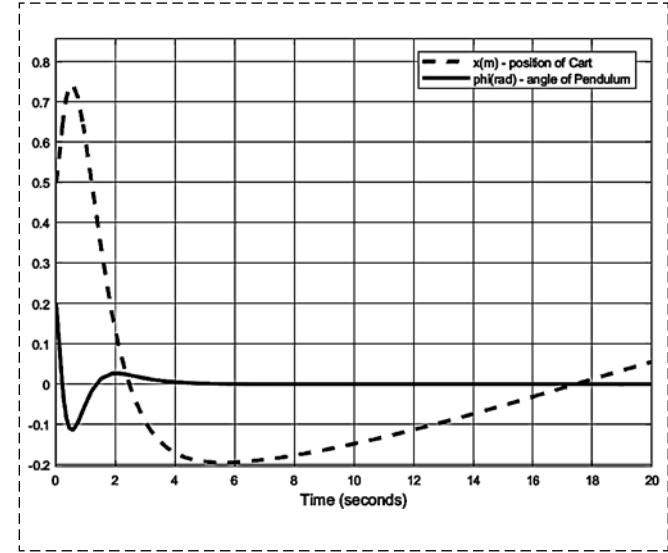


Fig. 6. The behavior of the system with the frequency of harmonic disturbance  $\omega = 0.1s^{-1}$

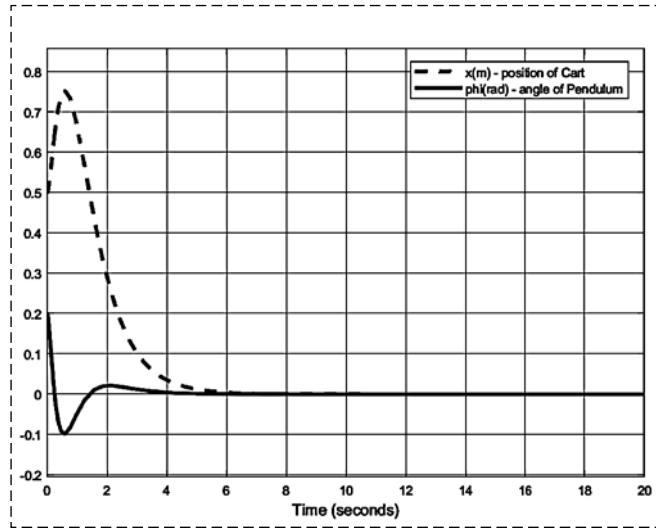


Fig. 5. The behavior of the system without harmonic disturbance

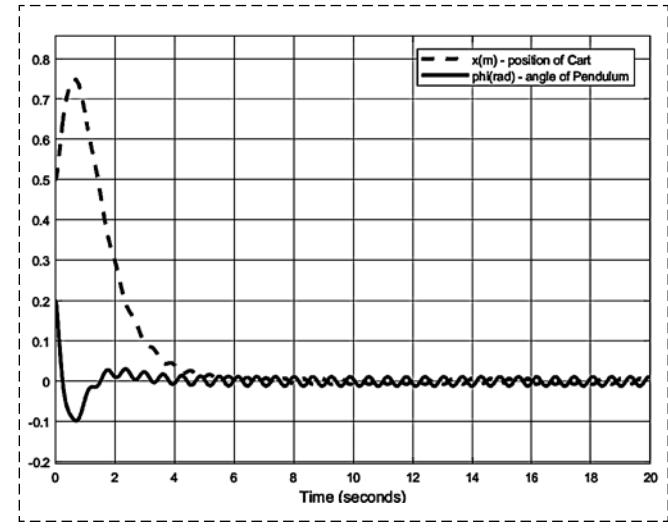


Fig. 7. The behavior of the system with the frequency of harmonic disturbance  $\omega = 10s^{-1}$

initial point ( $x = 0.5$ ;  $\theta = 0.2$ ) to the equilibrium point ( $x = 0$ ;  $\theta = 0$ ) with no setting error.

Fig. 6–8 show the inverted pendulum on a cart system with harmonic disturbances affected on the position of the cart and the angle of the pendulum. Fig. 6 illustrates the case frequencies of harmonic disturbances  $\omega = 0.1s^{-1}$ , the pendulum and the cart have big oscillations at the equilibrium point ( $\theta = 0$ ). When we change frequencies of harmonic inputs to  $\omega = 10s^{-1}$ , then the oscillations are decreased (Fig. 7). When frequencies of harmonic disturbances are  $\omega = 100s^{-1}$  (Fig. 8) the inverted pendulum and the cart operates as a whole at equilibrium point ( $x = 0$ ;  $\theta = 0$ ). The results correspond to the degeneration factor data.

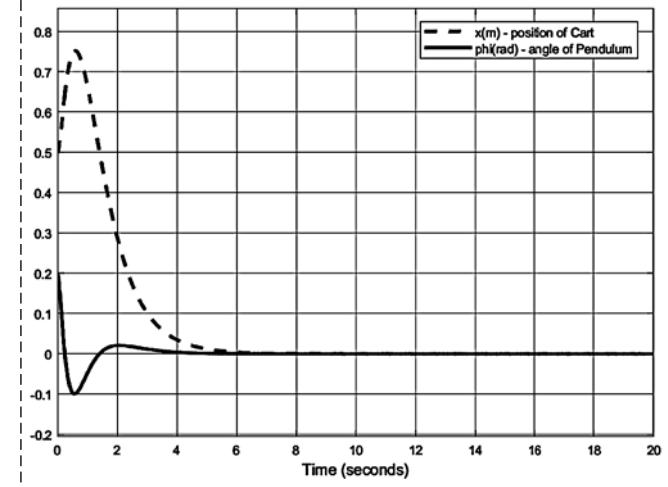


Fig. 8. The behavior of the system with the frequency of harmonic disturbance  $\omega = 100s^{-1}$

## Conclusion

The paper presents an approach for analysis of an inverted pendulum on a cart system with harmonic disturbances. It is proposed to use the degeneration factor of the criterion matrix of the system as a tool for analysis. The degeneration factor is constructed with the singular values of the criterion matrix of the system and allows us to find frequency range, where the system operates as a whole. Also, the approach can be applied to the linear multidimensional systems with harmonic disturbances.

In the future, the authors are going to expand the results to the case of double inverted pendulum system.

## References

1. **Sandeep D. Hanwate, Yogesh V. Hote.** Design of PID controller for inverted pendulum using stability boundary locus, *2014 Annual IEEE India Conference*, 2014, pp. 1–6.
2. **Yon Yaw Lim, Choon Lih Hoo, Yen Myan Felicia Wong.** Stabilising an Inverted Pendulum with PID Controller, *MATEC Web of Conferences* 152, ID 02009 (2018).
3. **Liang Zhang, Xiaoheng Chang, Hamid Reza Karimi.** Fuzzy Modeling and Control for a Class of Inverted Pendulum System, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, vol. 2014, ID 936868.
4. **Patel N., Nigam M. J.** Design of Fuzzy PD Controller for Inverted Pendulum in Real Time, *Proceedings of International Conference on Advances in Computing*, 2013, pp. 955–962.
5. **Mladenov V., Tsenov G., Ekonomou L., Harkiolakis N., Karampelas P.** Neural Network Control of an Inverted Pendulum on a Cart, *Proceedings of the 9th WSEAS International Conference on Robotics, Control and Manufacturing Technology*, 2009, pp. 112–120.
6. **Olfa Jedda, Jalel Ghabi, Ali Douik.** Sliding Mode Control of an Inverted Pendulum, *Applications of Sliding Mode Control*, 2017, pp. 105–118.
7. **Zhao Jie, Ren Sijing.** Sliding mode control of inverted pendulum based on state observer, *Sixth International Conference on Information Science and Technology*, 2016, pp. 322–326.
8. **Lal Bahadur Prasad, Barjeev Tyagi, Hari Om Gupta.** Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input, *International Journal of Automation and Computing*, 2014, vol. 11, pp. 661–670.
9. **Indrazno Sirajuddin, Budhy Setiawan, Ahmad Fahmi, Zakiya Amalia and Erfan Rohadi.** State space control using LQR method for a cart-inverted pendulum linearised model, *International Journal of Mechanical & Mechatronics Engineering*, 2017, vol. 17, no. 01, pp. 119–126.
10. **Pyrkin A. A., Bobtsov A. A.** Cancelation of Unknown Multiharmonic Disturbance for Nonlinear Plant with Input Delay, *Adaptive Control Signal Proc.*, 2012, vol. 26, no. 4, pp. 302–315.
11. **Pyrkin A. A., Bobtsov A. A., Nikiforov V. O., Vedyakov A. A., Kolyubin S. A., Borisov O. I.** Output Control Approach for Delayed Linear Systems with Adaptive Rejection of Multiharmonic Disturbance, *IFAC Proc. Volumes*, 2014, vol. 47. no. 3, pp. 12110–12115.
12. **Akunova A., Akunov T. A., Ushakov A. V.** Degeneration of Complex Systems under Multifrequent Input Signal, *Control of Oscillations and Chaos, IEEE Transactions on*, 2000, vol. 1, pp. 101–104.
13. **Dudarenko N., Ushakov A.** Performance Evaluation of MIMO Discrete Dynamic Systems with Periodic Disturbances Using Degeneration Factors, *4<sup>th</sup> IFAC Workshop on Periodic Control Systems*, 2010, vol. 43, iss. 11, pp. 122–127.
14. **Dudarenko N., Vunder N.** A priori control of potential degeneration of continuous multichannel dynamic systems, *Tr. SPIIRAN*, 2020, vol. 1, iss. 19, pp. 104–127 (in Russian).
15. **Dudarenko N. A., Ushakov A. V.** Analysis of multidimensional dynamical systems: technology of degeneration control, Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011, 232 p. (in Russian).
16. **Dudarenko N. A., Ushakov A. V.** Technology of degeneration control of complex dynamic systems with frequency separate conditioning values, *Modern technologies: Collection papers*, Saint-Petersburg, IFMO, 2003, pp. 245–252 (in Russian).
17. **Moghaddari M., Zamiri-Jafarian H.** Algorithms of channel SVD estimation in MIMOOFDM systems: evaluation and comparison, *International Symposium on Telecommunications*, 2008, pp. 399–403.
18. **Hu J., Xie X., Feng S., Lu J.** Adaptable channel decomposition for time-varying MIMO system with QoS constraints, *International Conference on Wireless Communications, Networking and Mobile Computing*, 2008, no. 4678434, pp. 1–5.
19. **Wael Abu Shehab, Zouhair Al-qudah.** Singular Value Decomposition: Principles and Applications in Multiple Input Multiple Output Communication system, *International Journal of Computer Networks & Communications*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 13–21

К. К. Абишев, канд. техн. наук, ассоц. проф., a.kairatolla@mail.ru,  
 А. Ж. Касенов, канд. техн. наук, ассоц. проф., asylbek\_kasenov@mail.ru,  
 А. Н. Балтабекова, докторант, almagul\_bn@mail.ru,  
 НАО "Торайгыров университет", г. Павлодар, Республика Казахстан

## Измерительные устройства неинвазивной формы для исследования психофизиологического состояния водителя автотранспортных средств

*Обоснована необходимость проведения психофизиологического отбора водителя автотранспортного средства. Среди видов профессионального отбора психофизиологический отбор занимает особое место. Это связано с тем, что психофизиологические исследования позволяют достаточно быстро и объективно измерять большое число психофизиологических свойств. Психофизиологические характеристики человека могут количественно выражать профессионально важные качества и для профессий системы "человек—машина" обладают достаточно высокой прогностичностью. Также обоснована необходимость применения измерительных устройств неинвазивной формы для определения степени надежности водителя автотранспортного средства. Анализ статистики дорожно-транспортных происшествий дает основание считать, что наибольшее число происшествий наблюдается на участках дорог, где водитель испытывает большое нервно-психическое напряжение. Это подтверждает то, что надежность работы водителя согласуется с одной из основных закономерностей психофизиологии — успешностью выполнения работы в зависимости от психического напряжения. Согласно этой закономерности имеется оптимальный уровень эмоциональной напряженности человека, при котором он выполняет работу на наибольшей эффективностью.*

Превышение этого оптимального уровня, как и снижение его, сопровождается ухудшением показателей работы. В психофизиологических исследованиях критериями оценки влияния различных дорожных условий на водителя являются значения психофизиологических показателей, соответствующие оптимальному уровню эмоционального напряжения. Исходя из этого определяется степень надежности действий водителя. При проведении эксперимента в целях определения психофизиологических характеристик водителя применение измерительных устройств неинвазивной формы дает возможность оценить степень надежности водителя.

Приведен обзор измерительных устройств для психофизиологических измерений неинвазивной формы. Дано описание наиболее популярных измерительных устройств, таких как электроэнцефалография, электрокардиография, электромиография, отслеживание глаз. Подробно рассмотрен принцип работы каждого измерительного устройства неинвазивной формы, описаны преимущества и недостатки каждого метода.

Предложено синхронизировать эти измерительные устройства и использовать их комплексно с использованием функциональной мощности универсальных вычислительных средств для более точной оценки психофизиологического состояния водителя автотранспортного средства.

**Ключевые слова:** психофизиология, электроэнцефалография, электрокардиография, электромиография, отслеживание глаз

### Введение

Проблема надежности профессиональной деятельности водителя сложна своей многообразностью. Она охватывает не только чисто технические вопросы, связанные с конструкционными особенностями автомобилей и дорог, но и вопросы из других областей: психологии и физиологии человека. Выявление лиц с пониженной надежностью с использованием профессионального отбора по психофизиологическим качествам позволит снизить уровень рисков и, тем самым, повысить безопасность транспортного процесса.

Психофизиологический отбор — это составляющая профессионального отбора, целью которого является выявление психофизиологических способностей и качеств, соответ-

ствующих требованиям определенных профессий, характеризующихся значительным нервно-психическим напряжением, гиподинамией, нарушением естественного режима сна — бодрствованием, повышенными требованиями к анализаторным системам, возможностью возникновения стрессовых ситуаций и другими стрессовыми факторами.

### Изучение измерительных устройств неинвазивной формы для исследования психофизиологического состояния водителя

В психофизиологических исследованиях критериями оценки влияния различных дорожных условий на водителя являются значения психофизиологических показателей, соответству-

ющие оптимальному уровню эмоционального напряжения. Исходя из этого определяется степень надежности действий водителя [1–3].

Психофизиологические характеристики показывают способность водителя воспринимать дорожную информацию, осмысливать ее, принимать решения и своевременно реагировать на изменения в дорожной ситуации. Психофизиологические свойства человека определяют особенности психических и физиологических процессов его организма. К этим свойствам относятся восприятие, внимание, мышление, память, эмоции, воля, а также личностные качества [4].

Для экспериментов, которые фокусируются на выявлении уровня внимания, комфорта (или дискомфорта) или влияния стрессовых факторов, обычно проводятся психофизиологические измерения неинвазивной формы [5–8]. Среди наиболее популярных необходимо выделить следующие:

- электроэнцефалография;
- электрокардиография;
- электромиография;
- отслеживание движения глаз.

Электроэнцефалография (ЭЭГ) — метод регистрации электрических потенциалов от кожи головы человека, возникающих как результат электрической активности нейронов мозга (рис. 1) [9, 10].

Сигнал ЭЭГ тесно связан с уровнем сознания человека. В связи с этим оборудование ЭЭГ широко используется для изучения состояния водителя, например, усталости, сонливости и времени реакции.

Обычно ЭЭГ-системы состоят из колпачка с электродами, специальной чувствительной аппаратуры, которая преобразует аналоговые сигналы от электродов. Компьютер отвечает за визуализацию и предварительный анализ сигнала.

Основными преимуществами данного метода являются:

- неинвазивность и полная безвредность;
- очень хорошее временное разрешение (порядка миллисекунд);
- регистрация активности мозга, связанная именно с выполнением задания, что достигается за счет усреднения;
- отсутствие акустического шума;
- относительно низкая цена прибора;
- портативность современных приборов.

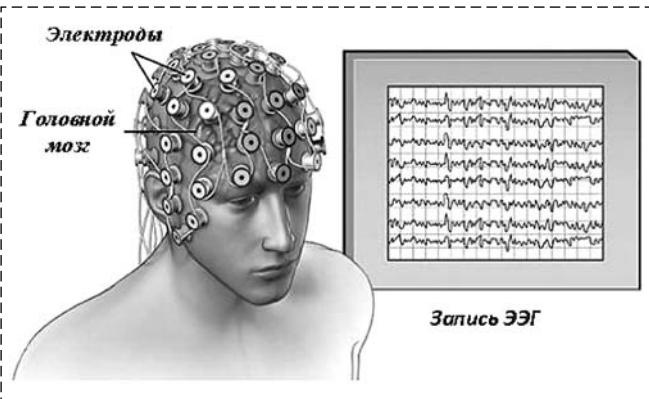


Рис. 1. Метод электроэнцефалографии

Fig. 1. Electroencephalography method

Основным недостатком этого метода являются тот факт, что электроды должны быть расположены на черепе водителя [11, 12].

Электрокардиография (ЭКГ) — это метод исследования и регистрации электрической деятельности сердца (рис. 2).

Результатом электрокардиографии является получение электрокардиограммы, которая регистрирует электрическую активность сердца. Сердце производит крошечные электрические импульсы, которые распространяются через сердечную мышцу, заставляя сердце сокращаться. Эти импульсы могут быть обнаружены с помощью ЭКГ и проанализированы с использованием специальных алгоритмов [13, 14].

Данные, полученные из ЭКГ, могут быть использованы для понимания состояния водителя во время эксперимента [15, 16].

Электромиография (ЭМГ) — это метод оценки и регистрации электрической активности, производимой скелетными мышцами. ЭМГ выполняется с использованием специальных инструментов (рис. 3) для создания записи, называемой электромиограммой. Электромиограф обнаруживает электрический потенциал, генерируемый мышечными клетками, когда эти клетки электрически или неврологически активированы. Сигналы могут быть проанализированы, чтобы обнаружить начало движения [17].

Устройство излучает инфракрасный лазерный луч, который проходит через неповрежденную кожу головы и диплоидную кость в мозг на глубину 4 см. Специальный технический датчик регистрирует отраженный свет и затем предоставляет информацию об окислении коры и околоподкорковых структур. Со-

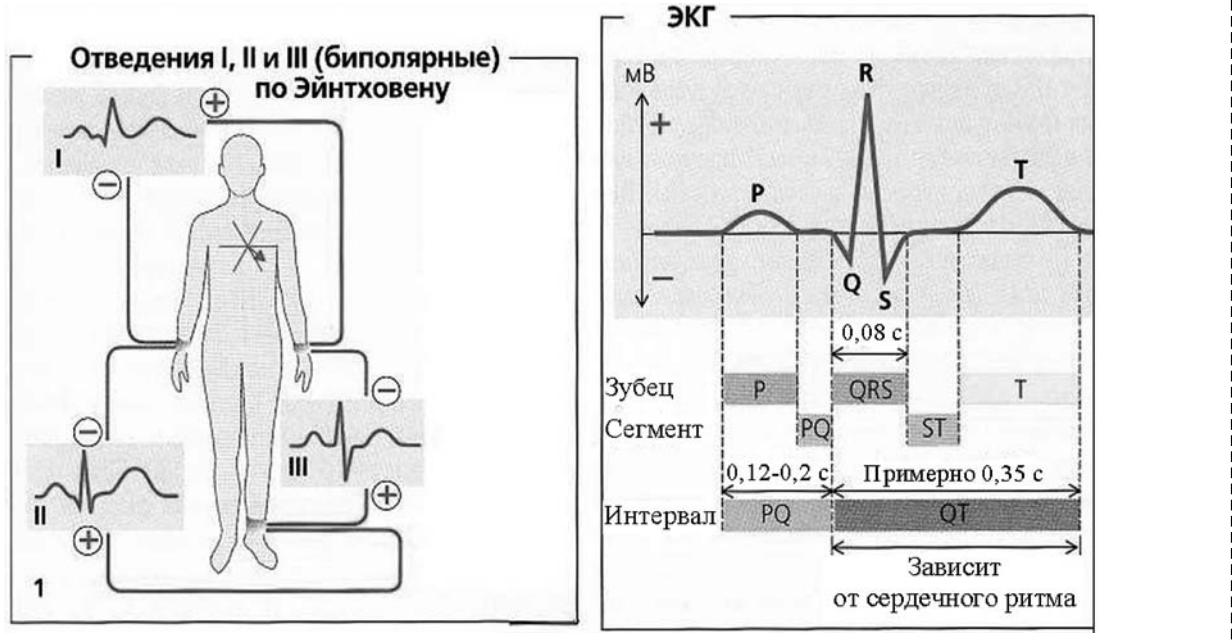


Рис. 2. Электроэнцефалография

Fig. 2. Electroencephalography

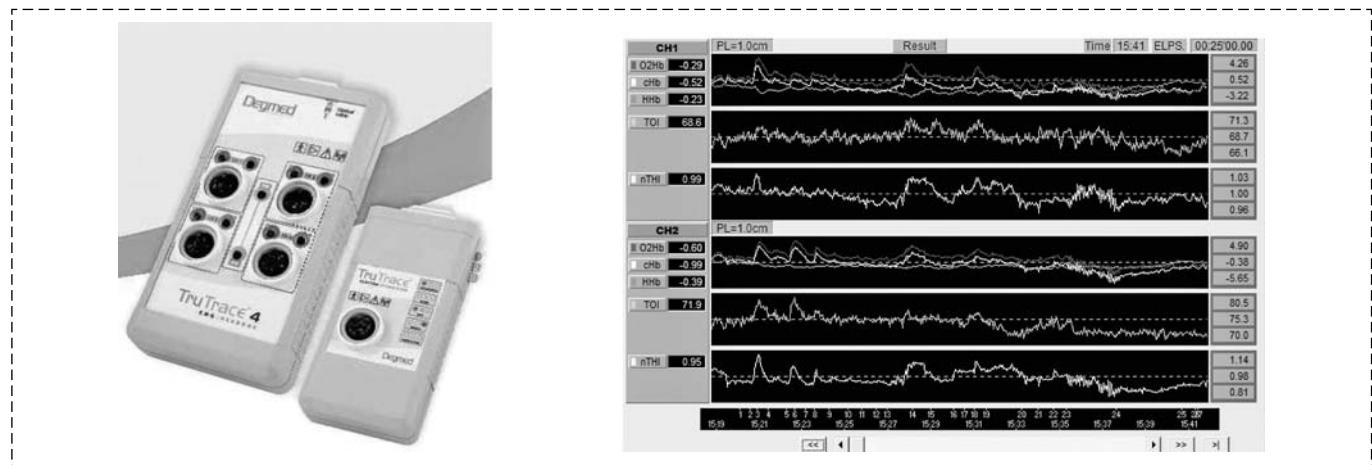


Рис. 3. Устройства для измерения ЭМГ (TruTrace 4 EMG)

Fig. 3. Devices for measuring EMG (TruTrace 4 EMG)

стояние окисления мозговой ткани косвенно указывает на ее метаболический уровень.

Измерения ЭЭГ и окисления в определенной степени являются взаимодополняющими методами.

Отслеживание глаз (*Eye tracking*) — это технология отслеживания движений глаз вокруг наблюдаемого объекта или сцены. Для того чтобы ощутить эти движения, не повреждая глаза, используются неинвазивные технологии, использующие инфракрасный свет. Движения сканируются специальными камерами, которые передают движения глаз на компьютер через файлы набора данных [18].

Системы слежения за глазами играют важную роль в оценке не только времени реакции водителя, но также могут использоваться для анализа состояния водителя.

Все системы слежения за глазами можно условно разделить на два типа — надеваемые и дистанционные. Рассмотрим последовательно основные характеристики *Eye-tracker* каждого типа.

1. Надеваемые *Eye-tracker*. *Eye-tracker* данного типа надеваются на голову респондента и имеют вид специальных очков либо "рамок на шапочке". Их конструкция состоит из мини-видеокамеры, фиксирующей обстановку перед



Рис. 4. Головной Eye-tracker

Fig. 4. Head Eye-tracker

респондентом, а также источника инфракрасного излучения, которое через оптические световоды подводится к глазам человека, а отраженный от них блик "замешивается" в сигнал от видеокамеры. Соответственно, направление взгляда человека имеет вид небольшого светового пятна, перемещающегося по объектам внешней обстановки (рис. 4).

2. Второй тип *Eye-tracker* можно отнести к дистанционным. Один из конструктивных вариантов дистанционных *Eye-tracker* использует несколько отдельных видеокамер с инфракрасными источниками, расположенные перед человеком, для максимального увеличения

возможностей по регистрации движений глаз при перемещении человека в рабочем пространстве. При этом число видеокамер может меняться от 2 до 8 (рис. 5). Преимущество заключается в том, что испытуемый не должен носить какое-либо дополнительное оборудование на голове.

К сожалению, существуют недостатки в применении систем слежения за глазами. Анализ, который имеет дело с реакцией зрачка, трудно применять в практическом контексте, потому что глаз реагирует на различные условия освещения, которые почти невозможно предвидеть и трудно рассчитать за пределами контролируемой среды [10, 11, 18].

## Заключение

Для проведения экспериментальных исследований в целях определения психофизиологического состояния водителя необходимо рассмотренные измерительные устройства синхронизировать и использовать их комплексно. Используя функциональную мощность универсальных вычислительных средств (в настоящее время — персональных компьютеров) в сочетании с высокоэргономичными специализированными психофизиологическими измерительными устройствами, можно добиться более точной оценки психофизиологического состояния водителя автотранспортного средства.

Психофизиологическое состояние водителя автотранспортного средства напрямую оказывает влияние на безопасность дорожного движения. Поэтому научные исследования,



Рис. 5. Eye-tracker Smart Eye

Fig. 5. Eye-tracker Smart Eye



направленные на обеспечение безопасности движения с учетом психофизиологического состояния водителя, приобретают первостепенное значение и их необходимо форсировать.

### Список литературы

1. Усольцева И. В. Психофизиологические основы деятельности водителя. М.: Изд. центр "Академия", 2019. 292 с.
2. Голубихина Ю. Ю., Гончарова Н. А. Сравнение психофизиологических показателей надежности деятельности водителей женского и мужского пола // Фундаментальные исследования. 2015. № 2—4. С. 815—819.
3. Исхандарова Г. К., Шатунова О. В. Учет психофизиологических особенностей будущих водителей как средство повышения их надежности // Научно-методический электронный журнал "Концепт". 2016. Т. 11. С. 2921—2925.
4. Саданова Д. А., Саданова В. Н. Анализ зарубежных систем поддержки водителей на основе измерения психофизиологических показателей // Научный вестник Невиномысского государственного гуманитарно-технического института. 2019. № 3. С. 16—19.
5. Игнатов Н. А., Мишурин В. М., Мушегян Р. Т., Сергеев В. А. Приборы и методики психофизиологического обследования водителей автомобилей. М.: Транспорт, 1978. 88 с.
6. Дятлов М. Н. Приборы психофизиологического обследования водителей // Молодой ученый. 2013. № 4(51). С. 59—61.
7. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Интеллектуальная поддержка человека-оператора в эргатических системах управления // В сборнике: Человеческий фактор в сложных технических системах и средах (Эрго-2016). Труды Второй Международной научно-практической конференции. СПб., 2016. С. 117—124.
8. Богомолов А. В., Филимонов Н. Б. Разработка компьютерной системы мониторинга состояния оператора эргатической системы управления подвижными объектами на основе современных методов теории распознавания образов // Информационные технологии в современном мире.
9. Герус С. В., Дементиенко В. В., Шахнарович В. М. Системы мониторинга состояния водителя и безопасность на автомобильном транспорте // Биомедицинские технологии и радиоэлектроника. 2002. № 8. С. 46—52.
10. Разработка интерактивного симулятора для подготовки водителей автотранспортных средств: отчет о НИР (заключительный). / Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова; руков. Абишев К. К. Павлодар, 2017. 46 с. Исполн. Касенов А. Ж., Муканов Р. Б., Балтабекова А. Н., Қайролла Б.Қ. № ГР 0117PKU0381. Инв. № 5.3-14/670 от 14.07.2017 г.
11. Абишев К. К., Балтабекова А. Н., Сәрсенқызы А. Интерактивный симулятор для подготовки водителей автотранспортных средств // Сейфуллинские чтения — 14: Молодежь, наука, инновации: цифровизация — новый этап развития. Т. I, Ч. 2. Астана, 2018. С. 14—16.
12. Bouchner P., Došek J., Janda M. et al. Professional vehicle drivers training and performance measurements with use of advanced driving simulator laboratory // Publ. by Czech Technical University in Prague, 2013.
13. Орлов В. Н. Руководство по электроэнцефалографии. М.: ООО "МИА", 1997.
14. Ложников П. С., Сулавко А. Е., Толкачева Е. В., Жумажанова С. С. Распознавание водителей и их функциональных состояний по обычному и тепловому изображениям лица // Тр. конф. кластера пензенских предприятий, обеспечивающих безопасность информационных технологий. Пенза, 2016. Т. 10. С. 63—65.
15. Епифанцев Б. Н. Скрытая идентификация психофизиологического состояния человека-оператора в процессе профессиональной деятельности. Омск: Изд-во СибАДИ, 2013. 198 с.
16. Сидоренко Г. И. Психофизиологические аспекты кардиологических исследований. Минск: Беларусь, 1983. 142 с.
17. Николаев С. Г. Атлас по электромиографии. Иваново: ПресСто, 2015. 487 с.
18. Айтреинг в психологической науке и практике / Отв. ред. В. А. Барабанщикова. М.: Когито-Центр, 2015. 410 с.

## Measuring Devices of Non-Invasive Form for the Study of the Psychophysiological State of the Driver of Motor Vehicles

K. K. Abishev, a.kairatolla@mail.ru, A. Zh. Kasenov, asylbek\_kasenov@mail.ru,

A. N. Baltabekova, almagul\_bn@mail.ru,

Toraighyrov University, Pavlodar, 140008, Republic of Kazakhstan

Corresponding author: Baltabekova A. N., Doctoral Student, Toraighyrov University, Pavlodar, 140008, Republic of Kazakhstan, e-mail: almagul\_bn@mail.ru

Accepted on December 06, 2021

### Abstract

The necessity of psychophysiological selection of a motor vehicle driver is substantiated. Among the types of professional selection, psychophysiological selection has a special place due to the fact that psychophysiological studies make it possible to quickly and objectively measure a large number of psychophysiological properties. Psychophysiological characteristics of a person can be a quantitative measure of professionally important qualities, and have a sufficiently high prognostic value for occupations related to "man-machine" systems. The necessity of using non-invasive measuring devices to determine the degree of reliability of a motor vehicle driver is justified. Analysis of the statistics of road accidents gives reason to believe that the biggest number of accidents is observed on road sections where the drivers experience biggest tense anxiety and mental stress. This confirms that the reliability of the driver's work is consistent with one of the main laws of psychophysiology: the outcome of the work correlates with mental stress. According to this pattern, there is optimal level of emotional tension of a person, at which he or she performs the work with the greatest efficiency. Exceeding this optimal level, as well as reducing it, is accompanied by deterioration in performance. In psychophysiological studies, the assessment criteria of the impact of various road conditions on the driver are the values of psychophysiological indicators corresponding to the optimal

level of emotional stress. Based on this, one can determine the degree of reliability of the driver's actions. When conducting an experiment to determine the psychophysiological characteristics of the driver, the use of non-invasive measuring devices makes it possible to assess the degree of reliability of the driver. The review of measuring devices for psychophysiological measurements of noninvasive form is given. The article also describes the most popular measuring methods, such as electroencephalography, electrocardiography, electromyography, eye tracking. The principle of operation of each non-invasive measuring methods is considered in detail, the advantages and disadvantages of each method are described. It is proposed to synchronize the measuring devices and use them comprehensively regarding the functional power of universal computing tools for a more accurate assessment of the psychophysiological condition of the driver of the vehicle.

**Keywords:** psychophysiology, electroencephalography, electrocardiography, electromyography, eye tracking

For citation:

**Abishev K. K., Kasenov A. Zh., Baltabekova A. N.** Measuring Devices of Non-Invasive Form for the Study of the Psychophysiological State of the Driver of Motor Vehicles, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 152–157.

DOI: 10.17587/mau.23.152-157

## References

1. **Usoltseva I. V.** Psychophysiological foundations of the driver's activity, Moscow, "Academia" publishing center, 2019, 292 p. (in Russian).
2. **Golubikhina Yu. Yu., Goncharova N. A.** Comparison of psychophysiological indicators of reliability of female and male drivers, *Fundamental research*, 2015, no. 2–4, pp. 815–819 (in Russian).
3. **Iskandarova G. K., Shatunova O. V.** Consideration of psychophysiological features of future drivers as means of increasing their reliability, "Concept" *Scientific and methodological electronic journal*, 2016, vol. 11, pp. 2921–2925 (in Russian).
4. **Sadanova D. A., Sadanova V. N.** Analysis of foreign driver support systems based on the measurement of psychophysiological indicators, *Scientific Bulletin of the Nevinnomyssk State Humanitarian and Technical Institute*, 2019, no. 3, pp. 16–19 (in Russian).
5. **Ignatov N. A., Mishurin V. M., Mushegian R. T., Sergeev V. A.** Devices and methods of psychophysiological examination of car drivers, Moscow, Transport, 1978, 88 p. (in Russian).
6. **Dyatlov M. N.** Devices of psychophysiological examination of drivers, *Young scientist*, 2013, no. 4(51), pp. 59–61 (in Russian).
7. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Intellectual support of a human operator in ergatic control systems, *The human factor in complex technical systems and environments (Ergo-2016). Digest of the 2<sup>nd</sup> International Scientific and Practical Conference*, St. Petersburg, 2016, pp. 117–124 (in Russian).
8. **Bogomolov A. V., Filimonov N. B.** Development of a computer system for monitoring the state of an operator of an ergatic control system for moving objects based on modern methods of pattern recognition theory, *Information technologies in the modern world. Digest of the International scientific and practical conference*, Moscow, MSOU, 2016, pp. 69–72 (in Russian).
9. **Gerus S. V., Dementienko V. V., Shakhnarovich V. M.** Driver condition monitoring systems and safety in road transport, *Biomedical technologies and radioelectronics*, 2002, no. 8, pp. 46–52 (in Russian).
10. **Development** of an interactive simulator for training drivers of motor vehicles: research report (final), S. Toraighyrov Pavlodar State University; scientific supervisor Abishev K. K., Pavlodar, 2017, p. 46, Performers: Kasenov A. Zh., Mukanov R. B., Baltabekova A. N., Kairolla B. K., № ГР 0117PKU0381, Inventory number 5.3-14/670 from 14.07.2017 (in Russian).
11. **Abishev K. K., Baltabekova A. N., Sarsenkyzy A.** Interactive simulator for training drivers of motor vehicles, *Seifullin Readings – 14: Youth, science, innovation: digitalization – a new stage of development*, vol. I. part 2, Astana, 2018, pp. 14–16 (in Russian).
12. **Bouchner P., Došek J., Janda M. et al.** Professional vehicle drivers training and performance measurements with use of advanced driving simulator laboratory, Publ. by Czech Technical University in Prague, 2013.
13. **Orlov V. N.** *Electrocardiography Handbook*, Moscow, 1997 (in Russian).
14. **Lozhnikov P. S., Sulavko A. E., Tolkacheva E. V., Zhumazhanova S. S.** Recognition of drivers and their functional states by conventional and thermal facial images, *Digest of the conference of the cluster of Penza enterprises providing information technology security*, Penza, 2016, vol. 10, pp. 63–65 (in Russian).
15. **Epifantsev B. N.** Hidden identification of the psychophysiological state of a human operator in the process of professional activity, Omsk, The Siberian State Automobile and Highway University, 2013, p. 198 (in Russian).
16. **Sidorenko G. I.** Psychophysiological aspects of cardiological research, Minsk, Belarus, 1983, p. 142 (in Russian).
17. **Nikolaev S. G.** *Atlas of electromyography*, Ivanovo, PresS-то, 2015, p. 487 (in Russian).
18. **Eyetracking** in psychological science and practice, Responsible editor V. A. Barabanshchikov, Moscow, Kogito-Center, 2015, 410 p. (in Russian).

# ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 629.786

DOI: 10.17587/mau.23.158-167

Ду Чунжуй<sup>1</sup>, аспирант, ducrui@yandex.ru,

О. П. Станинова<sup>1, 2</sup>, д-р техн. наук, проф., solleo@mail.ru,

<sup>1</sup> Самарский университет им. академика С. П. Королева, г. Самара,

<sup>2</sup> Нанкинский университет науки и технологий, г. Нанкин, Китай

## Оптимальное управление при перелетах с малой тягой на вертикальные орбиты с орбит Ляпунова\*

В системе Земля—Луна существует множество различных семейств периодических орбит, такие как орбиты Ляпунова, гало-орбиты, вертикальные орбиты и т. д. Создание лунной космической станции требует, чтобы космический корабль имел возможность перелетать между этими орбитами. Орбиты Ляпунова использовались некоторыми миссиями и являются хорошо изученными орбитами, а периодические вертикальные орбиты могут обеспечивать большие амплитуды движения космического аппарата вне плоскости движения Луны, что позволяет избегать затенения орбит и использовать их как опорные для окололунных спутниковых систем связи. Современные исследователи в основном рассматривают использование двигателей большой тяги для перелета. По мере развития технологий электроракетных двигателей применение малой, но длительно действующей тяги для исследования дальнего космоса стало особенно актуальным. Это связано с высокими удельными характеристиками двигательных систем такого типа. В данной статье разработан алгоритм определения оптимального управления с двигателем малой тяги для перелета с орбиты Ляпунова на вертикальную орбиту. В качестве критерия оптимальности используется минимальное время перелета или минимальные затраты рабочего тела. В расчете для решения двухточечной краевой задачи теории оптимального управления используется алгоритм продолжения по параметру, который позволяет постепенно получать переход от некоторых простых результатов к конечной траектории перелета. Полученные результаты позволяют утверждать, что использование промежуточных осевых орбит позволяет использовать двигательные установки с меньшими уровнями тяги. При этом несколько увеличивается длительность перелета при практически неизменном расходе рабочего тела. Более того, использование метода гомотопии позволяет получить управление с уменьшенным расходом рабочего тела, при этом управление дросселированием двигателя становится дискретным. Результаты данного исследования и алгоритмы, предложенные в этой статье, могут быть использованы для определения оптимального программного управления и баллистического проектирования лунных миссий.

**Ключевые слова:** задача трех тел, система Земля—Луна, двигатель малой тяги, оптимальное управление, вертикальная орбита

### Введение

В системе Земля—Луна существует множество периодических и квазипериодических орбит, которые можно использовать в качестве рабочих орбит для исследования Луны. Лунные миссии требуют, чтобы космический аппарат (КА) мог перемещаться между различными орбитами.

Современные стратегии перелетов в рамках задачи трех тел могут использовать один из трех подходов: прямые импульсные перелеты (обычно с двумя импульсами); перелеты с низкими энергетическими затратами, построенные на основе теории инвариантных многообразий и теории границ слабой устойчивости; перелеты

с двигателями малой тяги (электроракетными или солнечным парусом) [1]. По мере развития технологии малой тяги применение двигателей малой, но длительно действующей тяги для исследования дальнего космоса стало особенно актуальным [2].

Известны исследования [3—5], изучающие периодические орбиты, включая плоские орбиты Ляпунова, осевые орбиты, вертикальные орбиты и способы определения оптимального программного управления для их изменения в рамках задачи трех тел.

Плоская периодическая орбита, лежащая в плоскости движения Луны, названа в честь русского математика Ляпунова [6]. Плоская орбита Ляпунова может грубо рассматриваться как суперпозиция траекторий Лиссажу, которые резонируют вдоль оси Земля—Луна [7]. Орбиты

\*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-29-01092, <http://rscf.ru/project/22-29-01092/>

Ляпунова широко используются для построения классификации других периодических орбит из-за их простой орбитальной структуры.

Оевые орбиты являются семейством трехмерных орбит, являющихся пространственным продолжением орбит Ляпунова в задаче трех тел. В соответствии с расположением относительно вертикальной оси системы Земля—Луна семейство оевых орбит делится на северо-восточное и северо-западное, симметричные относительно точки либрации [8]. Можно рассматривать семейство оевых орбит как промежуточное между орбитами Ляпунова и вертикальными орбитами [9].

Вертикальные орбиты — это еще одно семейство периодических орбит в задаче трех тел, которое является продолжением семейства оевых орбит [8, 9]. Они могут одновременно обеспечивать большие амплитуды вне плоскости в положительном и отрицательном направлениях оси  $z$ , что позволяет избегать затенения КА на этих орбитах и позволяет наблюдать северный и южный полюса и экватор Луны на одном витке орбиты. Поэтому периодическая вертикальная орбита является перспективной рабочей орбитой для построения лунной космической станции. Целью данной статьи является разработка алгоритма формирования программы управления для перелета КА с малой тягой с орбит Ляпунова относительно точки либрации  $L_2$  в системе Земля—Луна на вертикальные орбиты.

Исследователи в области оптимизации перелетов с малой тягой в задаче трех тел отмечают плохую сходимость традиционных алгоритмов оптимизации и низкую вычислительную эффективность [10]. В. Г. Петухов в работе [11] предложил использовать метод продолжения по параметру для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой. М. К. Файн и О. Л. Станинова [12] использовали модифицированный метод Ньютона с переменным шагом для решения задач о перелетах с малой тяги из точки  $L_1$  в точку  $L_2$  в околоволновом пространстве.

В работе М. Г. Широбокова и С. П. Трофимова [13] реализованы расчеты перелетов с гало-орбит на околоволновые орбиты. Pérez-Palau and Erenou [14] используют для расчета перелетов с Земли на гало-орбиту уменьшение размерности пространства поиска с использованием адаптированных переменных, что привело к сокращению времени вычислений. Zhang [15] впервые применил метод пристрелки и процесс гомотопии для решения задачи перелета с Зем-

ли на гало-орбиту с малой тягой с точки зрения критериев минимального времени перелета и затрат топлива на его осуществление.

Можно сделать вывод, что для решения задачи оптимального управления используются итерационные методы. Эти методы требуют определения достаточно хорошего начального приближения для законов управления. В данной статье в качестве итерационного метода используется метод коллокации [16], а для выбора начальных приближений предлагается набор алгоритмов, которые позволяют использовать метод продолжения по параметру для постепенного перехода от некоторых простых результатов к конечной траектории перелета. Такой подход был предложен и успешно использован О. Л. Станиновой [25] для оптимизации межпланетных перелетов. Эти алгоритмы просты и имеют высокую вероятность успеха, что позволяет использовать его для решения задач о перелетах между орбитами на этапе планирования будущих лунных миссий. Проектные параметры КА, используемые в вычислительных примерах в данной статье, соответствуют современной технологии двигателей малой тяги, и результаты имеют определенное практическое значение.

## Динамики периодических орбит в околоволновом пространстве

В проблеме трех тел безразмерное уравнение движения КА во вращающейся системе координат имеет вид [17]

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = U_x, \dot{y} + 2\dot{x} = U_y, \ddot{z} = U_z, \quad (1)$$

где псевдопотенциал  $U$  определяется как  $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$ ;  $U_x$ ,  $U_y$  и  $U_z$  являются частными производными от  $U$  по координатным переменным;  $r_1$  и  $r_2$  представляют собой безразмерные расстояния от КА до Земли и Луны соответственно,  $r_1^2 = (x + \mu)^2 + y^2 + z^2$ ,  $r_2^2 = (x - 1 + \mu)^2 + y^2 + z^2$ ; для системы Земля—Луна  $\mu = 0,01215$ .

Используя симметрию задачи трех тел, в зависимости от выбора различных плоскостей симметрии можно получить разные семейства периодических орбит [8]. Основное внимание в этой статье уделяется орбитам Ляпунова, гало-орбитам, вертикальным орбитам и оевым орбитам относительно точки  $L_2$  в системе Земля—Луна.

Все семейства перечисленных орбит показаны на рис. 1 (см. вторую сторону обложки).

Гало-орбиты происходят от орбит Ляпунова А (далее —  $\mathbf{L}_A$ ) [18], а осевые орбиты — от орбит Ляпунова Б (далее —  $\mathbf{L}_B$ ). Вертикальные орбиты эволюционируют от осевых орбит. В соответствии с направлением эволюции осевая орбита делится на семейства северо-восточных и северо-западных орбит. В данной статье рассчитываются оптимальные траектории перелетов с  $\mathbf{L}_A$  на вертикальные орбиты В (далее —  $\mathbf{B}_B$ ). Для реализации процесса расчета перелета используется структура северо-восточных осевых орбит. Этот подход позволяет получить оптимальные траектории перелета с точки зрения минимизации времени перелета и расхода рабочего тела.

### Постановка задачи оптимального управления

Уравнения движения КА можно переписать в следующей векторной форме для двигателя малой тяги с учетом его массового расхода и возможности регулирования [19]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, u) \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + u T_{\max} \boldsymbol{\alpha} / m \\ -u T_{\max} / c \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$  и  $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]^T$  — положение и скорость КА;  $m$  — масса КА;  $T_{\max}$  — максимальное значение тяги;  $c = I_{sp} g_0$  — скорость истечения рабочего тела ( $I_{sp}$  — удельный импульс двигателя;  $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$  — стандартное ускорение свободного падения на уровне моря);  $u \in [0, 1]$  — коэффициент дросселирования тяги;  $\boldsymbol{\alpha}$  — единичный вектор направления тяги. Кроме того, функции  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{h}(\mathbf{v})$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\left[ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right]^T; \\ \mathbf{h}(\mathbf{v}) = [2v_y, -2v_x, 0]^T. \end{cases} \quad (3)$$

#### 1. Задача об оптимальном по быстродействию управлении

Будем искать оптимальное управление, доставляющее минимум времени перелета, согласно критерию

$$J_t = \int_{t_0}^{t_f} 1 dt. \quad (4)$$

После введения сопряженных векторов ( $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_r, \lambda_v, \lambda_m]^T$ ) гамильтониан системы определяется выражением

$$H = \boldsymbol{\lambda}_r^T \mathbf{v} + \boldsymbol{\lambda}_v^T \left[ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \frac{T_{\max} u}{m} \boldsymbol{\alpha} \right] - \lambda_m \frac{T_{\max} u}{c} + 1, \quad (5)$$

где  $\boldsymbol{\lambda}_r = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z]^T$  и  $\boldsymbol{\lambda}_v = [\lambda_{v_x}, \lambda_{v_y}, \lambda_{v_z}]^T$ .

Согласно теории оптимального управления для сопряженных векторов имеем:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = -\left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_v; \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v = -\boldsymbol{\lambda}_r - \left( \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right)^T \boldsymbol{\lambda}_v; \\ \dot{\lambda}_m = \frac{u T_{\max}}{m^2 \boldsymbol{\lambda}_v} \boldsymbol{\alpha}; \\ \lambda_m(t_f) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Применяя принцип максимума Понтрягина для минимизации гамильтониана (5), можно определить управляющие переменные  $\boldsymbol{\alpha}^*$  и  $u^*$ :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}^* = -\frac{\boldsymbol{\lambda}_v}{\|\boldsymbol{\lambda}_v\|}; \\ u^* = -\text{sign} S, \end{cases} \quad (7)$$

где  $S = -\|\boldsymbol{\lambda}_v\| \frac{c}{m} - \lambda_m$  — функция переключения  $S$ .

Поскольку функция переключения  $S < 0$ , управляющая переменная  $u^* \equiv 1$ . Таким образом, получается 14-мерная система уравнений управляемого движения КА:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = \mathcal{F}(\Phi) \Rightarrow & \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{m} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_v \\ \dot{\lambda}_m \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) - (\lambda_v / \lambda_v) u T_{\max} / m \\ -u T_{\max} / c \\ -\partial \mathbf{g}(\mathbf{r}) / \partial \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\lambda}_v \\ -\boldsymbol{\lambda}_r - \partial \mathbf{h}(\mathbf{v}) / \partial \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\lambda}_v \\ -\lambda_v u T_{\max} / m^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $u = 1$ ;  $\Phi$  — вектор состояния, включающий вектор фазовых координат, массы КА и сопряженного вектора:  $\Phi = [\mathbf{x}, m, \boldsymbol{\lambda}]^T$ ,  $\mathbf{x} = [\mathbf{r}, \mathbf{v}]$ .

Для двух заданных точек начала и конца движения  $M(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0)$  и  $N(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f)$ , которые расположены на орбитах вылета (ОВ) и прибытия (ОП), условия трансверсальности имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{начальные: } & \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, m(t_0) = m_0; \\ \text{конечные: } & \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \lambda_m(t_f) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, задача перелета преобразуется в следующую двухточечную краевую задачу:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_f} 1 dt \rightarrow \min; \\ & \text{найти } \lambda_0 \text{ и } t_f \Rightarrow \\ & \Rightarrow s.t. \begin{cases} \dot{\Phi} = \mathcal{F}(\Phi); \\ \Phi_0 = [\mathbf{x}_0, m_0, \lambda_0], \Phi_f = [\mathbf{x}_f, m_f, \lambda_f]; \\ M(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \text{ОВ}, N(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f) \in \text{ОП}; \\ \lambda_m(t_f) = 0, H(t_f) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

## 2. Задача о минимальном расходе рабочего тела

В этом разделе будем искать оптимальное управление, доставляющее минимум расходу рабочего тела, согласно критерию

$$J_f = \frac{T_{\max}}{c} \int_{t_0}^{t_f} u dt. \quad (11)$$

Для того чтобы избежать разрывов непрерывных функций из-за дихотомии параметра  $u$ , используется метод продолжения по параметру [15] для сглаживания профиля управления. С учетом введения гомотопического параметра  $\varepsilon$  задача оптимального энергопотребления и задача оптимального расхода топлива связаны между собой соотношением [20]

$$J_{ef} = \frac{T_{\max}}{I_{sp}g_0} \int_0^{t_f} [u - \varepsilon u(1-u)] dt, \quad \varepsilon \in [0, 1]. \quad (12)$$

Гомотопический метод, по сути, является одной из модификаций метода продолжения по параметру [11]. Для поиска оптимального с точки зрения расхода рабочего тела управления мы следовали следующей методике: сначала получается решение задачи о минимизации энергетических затрат при  $\varepsilon = 1$   $\left( J_e = \frac{T_{\max}}{I_{sp}g_0} \int_0^{t_f} u^2 dt \right)$ , затем с использованием алгоритма продолжения параметр  $\varepsilon$  постепенно уменьшается от 1 до 0, и получается требуемая орбита с минимальным расходом рабочего тела.

Введем вектор сопряженных переменных  $\lambda = [\lambda_r, \lambda_v, \lambda_m]^T$ , тогда гамильтониан системы (2) и критерия (12) задается следующим образом:

$$\begin{aligned} H = & \lambda_r^T \mathbf{v} + \lambda_v^T \left[ \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{h}(\mathbf{v}) + \frac{T_{\max}u}{m} \boldsymbol{\alpha} \right] - \\ & - \lambda_m \frac{T_{\max}u}{c} + \frac{T_{\max}}{c} [u - \varepsilon u(1-u)], \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\lambda_r = [\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z]^T$  и  $\lambda_v = [\lambda_{v_x}, \lambda_{v_y}, \lambda_{v_z}]^T$ .

Согласно теории оптимального управления получаем следующую систему для сопряженных переменных:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_r = - \left( \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \right)^T \lambda_v; \\ \dot{\lambda}_v = - \lambda_r - \left( \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \right)^T \lambda_v; \\ \dot{\lambda}_m = \frac{u T_{\max}}{m^2 \lambda_v} \boldsymbol{\alpha}. \end{cases} \quad (14)$$

Применяя принцип максимума Понтрягина, получим следующие оптимальные выражения для функций управления  $\boldsymbol{\alpha}^*$  и  $u^*$  [15]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^* &= - \frac{\lambda_v}{\|\lambda_v\|}; \\ u^* &= \begin{cases} 0, & S > \varepsilon; \\ (\varepsilon - S)/2\varepsilon, & -\varepsilon \leq S \leq \varepsilon; \\ 1, & S < -\varepsilon, \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

где  $S = 1 - \frac{\|\lambda_v\|c}{m} - \lambda_m$  — функция переключения.

Будем считать, что решение некоторой задачи об оптимальном по быстродействию перелете получено и известно минимальное время перелета  $t_{f_{\min}}$ , тогда постановка задачи об оптимальном по расходу рабочего тела перелете с длительностью  $t_f \geq t_{f_{\min}}$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{\max}}{c} \int_{t_0}^{t_f} u dt \rightarrow \min; \\ & \text{найти } \lambda_0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow s.t. \begin{cases} \dot{\Phi} = \mathcal{F}(\Phi); \\ \Phi_0 = [\mathbf{x}_0, m_0, \lambda_0], \Phi_f = [\mathbf{x}_f, m_f, \lambda_f]; \\ M(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) \in \text{ОВ}, N(\mathbf{r}_f, \mathbf{v}_f) \in \text{ОП}; \\ \lambda_m(t_f) = 0, t_f > t_{f_{\min}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

## Стратегия численного решения при использовании алгоритмов оптимизации

### 1. Метод решения

Метод продолжения по параметру (непрерывный алгоритм или метод гомотопии) является одним из эффективных средств решения серии сложных задач. Обычно определяется непрерывный параметр, и существует известное решение задачи при одном из его значений, затем при изменении параметра этот метод позволяет перейти от проблемы с известным решением к новому решению. Например, в работе [21] применяется метод продолжения по параметру (ньютоновская гомотопия), чтобы постепенно обеспечить требуемые краевые условия.

Метод коллокации [22] — это метод, используемый для интегрирования и обновления начальных приближений для генерируемой орбиты. Он обеспечивает альтернативный метод формирования орбит, который доказывает большую надежность даже для случаев крайне неудачных начальных приближений, в которых схема дифференциальной коррекции дает сбой [16]. В отличие от метода Ньютона, который должен обеспечивать только начальные приближения сопряженных векторов, метод коллокации определяет значения вектора состояния и сопряженного вектора в каждой точке дискретизации. В данной статье в качестве начального приближения решения используется орбита, удовлетворяющая определенному условию, а затем используется метод продолжения по параметру для постепенного перехода к окончательному решению. Именно на этом этапе краевая задача на каждом шаге решается методом коллокации.

MATLAB предоставляет функцию *bvp4c*, которая использует схему коллокации на основе формулы коллокации Lobatto IIIA. Многочлен коллокации дает C1-непрерывное решение, которое имеет высокий порядок точности равномерно в диапазоне интегрирования. Выбор сетки и контроль ошибок основаны на результатах работы [23]. В методе коллокации используется сетка точек для разделения диапазона интегрирования на подинтервалы. Данный метод позволяет определить численное решение как решение системы глобальных алгебраических уравнений [23, 24], полученных из граничных условий и условий, обеспечивающих требуемую конфигурацию орбиты.

Затем решающая программа оценивает ошибку численного решения на каждом подинтервале. Если решение не удовлетворяет требованиям точности, решающая программа корректирует сетку и повторяет процесс.

### 2. Схема алгоритма

Параметры КА, рассматриваемого в данной статье, представлены ниже:

Начальная масса КА $m^*$ , кг	1500
Удельный импульс $I_{sp}$ , с	2000
Максимальная тяга $T_{max}$ , Н	до 0,2

Решение задач об оптимальном управлении сформулированных в предыдущем разделе, фактически является решением двухточечной краевой задачи. Мы предлагаем следующую стратегию расчета траектории перелета (**ТП**) по минимальному времени с орбиты  $L_A$  на вертикальную орбиту  $B_B$ .

i. Сначала устанавливаем обе орбиты ОВ и ОП как  $L_A$ , а обе точки  $M$  и  $N$  — как точки на орбите, наиболее удаленные от Луны. Движение КА по орбите  $L_A$  интегрируется на несколько витков  $n$  и называется траекторией перелета 0-й итерации (**ТП0**). Применяя очень небольшую тягу  $T_1$  (порядка  $10^{-2}$  Н) с использованием **ТП0** в качестве начального приближения, все сопряженные векторы устанавливаем на 0, положения точек  $M$  и  $N$  остаются неизменным, используем метод коллокации для решения задачи в постановке . Полученная траектория называется траекторией перелета первой итерации **ТП1**. Примерный перелет **ТП1** показан на рис. 2 (см. вторую сторону обложки).

ii. Затем постепенно меняем точку прибытия так, чтобы точка  $N$  переходила в положение, показанное на рис. 3 (см. вторую сторону обложки), что соответствует перелету (**ТП2**) между орбитами  $L_A$  и  $L_B$ . В этом процессе используется технология гомотопии по тяге, чтобы увеличивать тягу до определенного уровня  $T_2$  ( $T_2 = 0,11$  Н). Пример перелета показан на рис. 3 ( $\theta_1$  представляет угол управления в горизонтальном направлении,  $\theta_2$  — угол управления в вертикальном направлении).

Гомотопический процесс по значению тяги, упомянутый в работе [19], применяется для проведения моделирования с учетом различных значений тяги  $T$ :

$$T = (1 - \kappa)T_B + \kappa T_M. \quad (17)$$

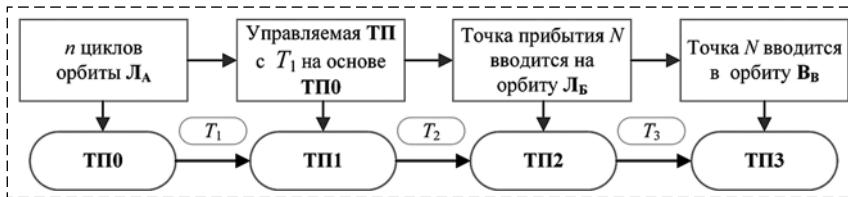


Рис. 5. Схема алгоритма  
Fig. 5. Algorithm diagram

Уравнение показывает, что когда гомотопический параметр  $\kappa$  изменяется от 1 до 0, значение тяги может увеличиваться от меньшей тяги  $T_M$  до большей тяги  $T_B$  и наоборот.

iii. В соответствии с направлением отклонений семейства осевых орбит от семейства орбит Ляпунова конечная точка  $N$  постепенно перемещается вдоль структуры семейства осевых орбит в конечное положение, что показано на рис. 4 (см. третью сторону обложки), т. е. осуществляется перелет с  $L_A$  на  $B_B$ , обозначенную как ТП3. При этом уровень тяги также увеличивается до  $T_3$  ( $T_3 = 0,135$  Н).

iv. ТП3 является траекторией перелета с  $L_A$  на  $B_B$ . Затем используется непрерывный алгоритм для постепенного изменения положения точки вылета  $M$  и точки прибытия  $N$  вдоль ОВ и ОП для получения серии ТП между орбитами  $L_A$  и  $B_B$ . Также гомотопическая технология с уравнением (12) применяется для минимизации расхода рабочего тела.

Общая схема алгоритма поиска оптимального управления и соответствующая траектория перелета описывается схемой на рис. 5.

## Результаты моделирования

Этот раздел в основном посвящен подробному анализу шага iv стратегии расчета ТП, упомянутой выше, которая позволяет найти глобальное оптимальное решение.

### 1. Оптимальный по быстродействию перелет

Траектория ТП3, полученная на этапе iii, которая используется в качестве начального приближения для последующих расчетов, получена для уровня тяги 0,135 Н и времени перелета (ВП) 64,78 дней. Нас интересует ОП, поэтому для облегчения анализа в этой статье фиксируется начальная точка в точке  $M$ . Пусть точка  $N$  движется по целевой орбите  $B_B$ , так что будут получены все локальные оптимальные перелеты, начиная с точки  $M$ , на целевую орбиту  $B_B$ .

Чтобы указать положение точки на вертикальной орбите, обозначим  $\tau = t/T_0$  — отношение времени полета КА от точки  $O$  до текущего положения по орбите к орбитальному периоду (рис. 6).

Из-за движения точки  $N$  создается серия ТП между  $L_A$  и  $B_B$ .

Из этих локальных оптимальных решений выбирается решение с наименьшим ВП в качестве глобального оптимального по времени решения при текущем уровне тяги.

На самом деле глобальное оптимальное по времени решение является решением с наименьшим соответствующим значением  $\tau$  (рис. 7). Это легко понять, поскольку  $u \equiv 1$ , двигатель всегда находится в рабочем состоянии, и по мере увеличения  $\tau$  необходимое ВП для достижения этой точки КА также увеличивается.

ТП3 нарисована в пункте 2 на рис. 7. Когда точка прибытия  $N$  на орбите  $B_B$  (см. рис. 4) движется по направлению распространения

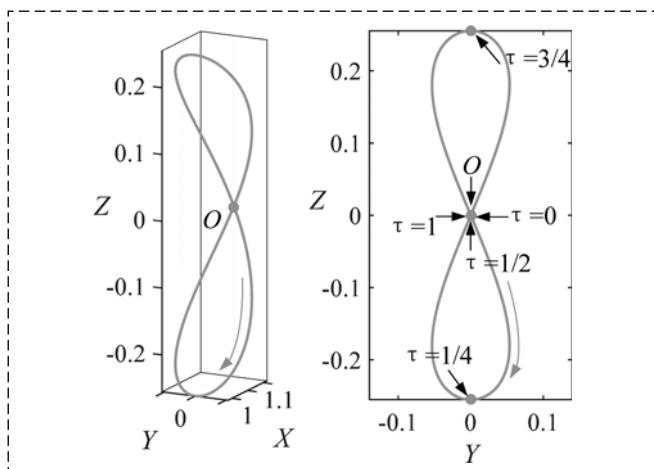


Рис. 6. Определение  $\tau$   
Fig. 6. The definition of  $\tau$

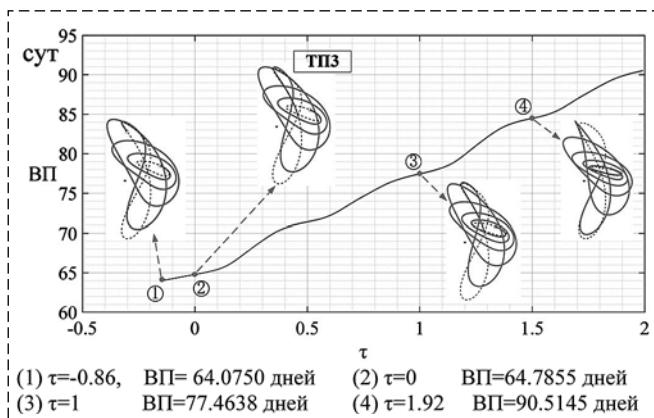


Рис. 7. Семейство ТП с точки  $M$  на вертикальную орбиту  $B_B$   
Fig. 7. The TP family from point  $M$  to vertical orbit  $B_B$

орбиты, это приводит к увеличению  $\tau$ ; движение против направления распространения приводит к уменьшению  $\tau$ . Из-за периодичности орбиты два значения  $\tau$  с разницей в 1 представляют собой одну и ту же точку на орбите.

Для практических задач главное внимание на этапе проектирования орбиты должно быть уделено определению достижимых значений тяги и ВП. Перелет с меньшей тягой требует большего ВП, что вносит большие трудности в решение задачи оптимального управления.

При одном и том же уровне тяги значение  $\tau$  в точке прибытия может быть увеличено соответствующим образом. Большее значение  $\tau$  соответствует большему ВП и более длинной траектории, которая может использоваться в качестве начального приближения для ТП с меньшей тягой. При этом расход рабочего тела снижается. Большее значение  $\tau$  означает, что траектория в большей степени использует структуру осевой орбиты, тем самым получая меньшую допустимую тягу.

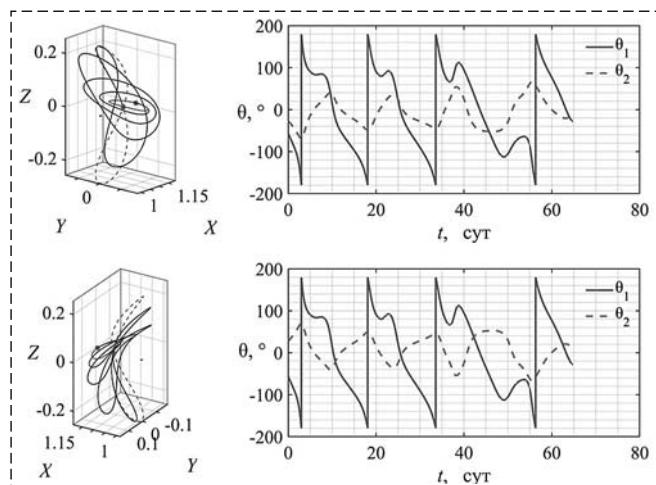


Рис. 8. Другой тип ТП получается непосредственно за счет использования центральной симметрии орбиты

Fig. 8. Another type of TP is obtained directly by using the central symmetry of the orbit

#### Сопряженные векторы для ТПЗ

#### Conjugate vectors for TP3

Сопряженные векторы	Северо-восточная орбита	Северо-западная орбита
$\lambda_x$	-10,19776	-10,19776
$\lambda_y$	18,81918	18,81918
$\lambda_z$	-9,92351	9,92351
$\lambda_{vx}$	-10,01574	-10,01574
$\lambda_{vy}$	15,26534	15,26534
$\lambda_{vz}$	9,39810	-9,39810
$\lambda_m$	0,00595	0,00595

Далее обсудим центральную симметрию орбиты. Начальные сопряженные векторы ТПЗ показаны в таблице. Северо-восточная осевая орбита и северо-западная осевая орбита имеют противоположные компоненты координаты  $z$  и скорости  $v_z$ . Следовательно, для получения симметричных орбит можно брать противоположные значения сопряженных векторов  $\lambda_z$  и  $\lambda_{vz}$  как новые начальные условия для моделирования.

Из-за симметрии осевой орбиты эти две разные ТП достигают одного и того же положения на вертикальной орбите В, но разница значений  $\tau$  составляет 0,5. Из рис. 8 также видно, что угол оптимального управления в горизонтальном направлении для симметричных орбит остается неизменным, а в вертикальном направлении изменяется противоположным образом.

#### Перелет с минимальным расходом рабочего тела

Рассмотрим приведенный выше ТПЗ в качестве примера для решения задачи оптимизации расхода рабочего тела. Для ТПЗ ВП составляет 64,78 дней, а расход рабочего тела составляет 38,60 кг. Принимая эту траекторию в качестве начального приближения, ВП устанавливаем в данном случае равным 66,84 дней и решаем задачу оптимизации топлива с уравнением гомотопии (16). Результаты решения показаны на рис. 9 (см. третью сторону обложки).

Рис. 9 демонстрирует процесс гомотопии: когда  $\varepsilon$  постепенно изменяется от 1 до 0, задача оптимизации энергии переходит к задаче оптимизации топлива.

На рис. 10 показана ТП с минимальным расходом рабочего тела, происходящая из ТПЗ при

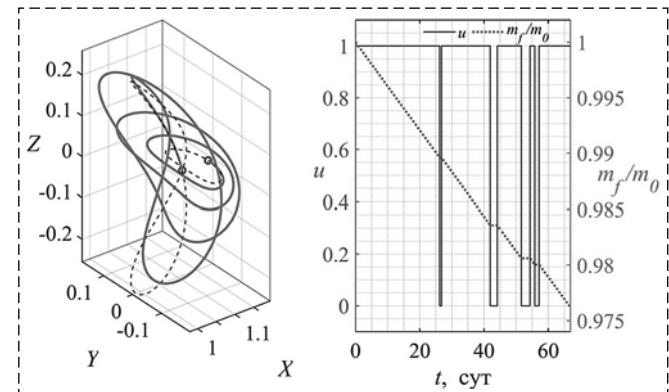


Рис. 10. Траектория перелета с минимальным расходом рабочего тела

Fig. 10. Transfer trajectory with minimal consumption of the working body

фиксированном ВП, равном 66,84 дней. По сравнению с **ТП3** ВП увеличивается на 2,05 суток, а расход рабочего тела уменьшается на 2,89 кг.

## Заключение

В статье описан алгоритм решения задачи об оптимизации перелетов между орбитами в системе Земля—Луна с учетом текущих требований миссий по исследованию Луны и построению лунной космической станции. Орбитой вылета является плоская орбита Ляпунова, из которой разветвляется гало-орбита, а орбитой прибытия является вертикальная орбита, образовавшаяся из осевой орбиты. Предлагается непрерывный алгоритм в сочетании с методом коллокации для решения задачи оптимизации. В процессе перелета **ТП** постепенно переходит на целевую орбиту с помощью структуры осевой орбиты, которая реализует быстрое решение двухточечной краевой задачи.

Результаты решения показывают, что в случае фиксированной точки старта разные **ТП** соответствуют разным минимально допустимым тягам и разному времени перелета. Минимальное время перелета КА с тягой примерно 100 мН составляет около двух месяцев. Время перелета может превышать три месяца с дальнейшим уменьшением тяги. При уменьшении значения тяги время перелета увеличивается, общий расход топлива снижается. Для КА массой 1500 кг расход топлива на полный перелет с орбиты Ляпунова **Л<sub>А</sub>** на вертикальную орбиту **В<sub>В</sub>** составляет менее 40 кг. Для оптимальной по быстродействию траектории перелета использование метода гомотопии может эффективно снизить расход топлива, если время перелета соответствующим образом увеличено. В соответствии с центральной симметрией орбиты для изменения направления движения КА на противоположное по требуемой вертикальной орбите нужно взять противоположные значения  $\lambda_z$  и  $\lambda_{vz}$  в начальном сопряженном векторе. В этом случае полученная **ТП** также центральносимметрична исходной **ТП**, пространственное положение орбиты прибытия (орбита **В<sub>В</sub>**) остается неизменным, а направление движения противоположно.

## Список литературы

1. Parker J. S., Anderson R. L. Low-energy lunar trajectory design // *JPL Deep-Space Communications and Navigation Series*. Wiley, 2014. P. 103—106.
2. Zeng H., Zhang J. Modeling low-thrust transfers between periodic orbits about five libration points: Manifolds and hierarchical design // *Acta Astronautica*. 2018. Vol. 145. P. 408—423.
3. Аксенов С. А., Бобер С. А. Управление движением космического аппарата на гало-орбите при наличии ограничений на направления корректирующих маневров // Некоторые аспекты современных проблем механики и информатики. 2018. С. 166—174.
4. Шайхутдинов А. Р., Костенко В. И. Перспективы использования гало-орбиты в окрестности точки либрации L2 системы Солнце—Земля для наземно-космического радиоинтерферометра Миллиметрон // Космические исследования. 2020. Т. 58, № 5. С. 434—442.
5. Richardson D. L. Analytic construction of periodic orbits about the collinear points // *Celestial mechanics*. 1980. Vol. 22, N. 3. P. 241—253.
6. Rogov K. Computation of Libration point orbits and manifolds using collocation methods: дис. Universitat Politècnica de Catalunya, 2016.
7. Richardson D. L. A note on a Lagrangian formulation for motion about the collinear points // *Celestial Mechanics*. 1980. Vol. 22, N. 3. P. 231—236.
8. Grebow D. Generating periodic orbits in the circular restricted three-body problem with applications to lunar south pole coverage. MSAA Thesis, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University. 2006. P. 1—165.
9. Calleja R. C. et al. Boundary-value problem formulations for computing invariant manifolds and connecting orbits in the circular restricted three body problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2012. Vol. 114, N. 1. P. 77—106.
10. Xiangyu L., Dong Q., Yu C. Progress of three-body orbital dynamics study // *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2021. Vol. 53, N. 5. P. 1223—1245.
11. Петухов В. Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космические исследования. 2012. Т. 50, № 3. С. 258—258.
12. Fain M. K., Starinova O. L. Ballistic optimization of the L1-L2 and L2-L1 low thrust transfers in the Earth-Moon system // 2015 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST). IEEE, 2015. P. 95—98.
13. Широбоков М. Г., Трофимов С. П. Перелеты с малой тягой на окололунные орбиты с гало-орбит вокруг лунных точек либрации L 1 и L 2 // Космические исследования. 2020. Т. 58, № 3. С. 223—234.
14. Pérez-Palau D., Epenoy R. Fuel optimization for low-thrust Earth—Moon transfer via indirect optimal control // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2018. Vol. 130, N. 2. P. 1—29.
15. Zhang C. et al. Low-thrust minimum-fuel optimization in the circular restricted three-body problem // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2015. Vol. 38, N. 8. P. 1501—1510.
16. Pritchett R., Howell K., Grebow D. Low-thrust transfer design based on collocation techniques: applications in the restricted three-body problem // *Astroynamics Specialist Conference*. Columbia River Gorge, Stevenson, Washington, August 21—24. 2017. P. 1—92.
17. Ильин И. С., Сазонов В. В., Тучин А. Г. Траектории перелета с низкой околоземной орбиты на многообразие ограниченных орбит в окрестности точки либрации L2 системы Солнце—Земля // Препринты Института прикладной математики им. МВ Келдыша РАН. 2012. № 66. 25 с.
18. Luo T., Xu M., Dong Y. Natural formation flying on quasi-halo orbits in the photogravitational circular restricted three-body problem // *Acta Astronautica*. 2018. Vol. 149. P. 35—46.
19. Pan X., Pan B., Li Z. Bounding Homotopy Method for Minimum-Time Low-Thrust Transfer in the Circular Restricted Three-Body Problem // *The Journal of the Astronautical Sciences*. 2020. Vol. 67. P. 1220—1248.

20. **Saghamanesh M., Baoyin H.** A robust homotopic approach for continuous variable low-thrust trajectory optimization // *Advances in Space Research*. 2018. Vol. 62. N. 11. P. 3095–3113.
21. **Петухов В. Г., Чжоу Ж.** Расчет возмущенной импульсной траектории перелета между околоземной и окололунной орбитами методом продолжения по параметру // *Вестник Московского авиационного института*. 2019. Т. 26, № 2. С. 155–165.
22. **Mingotti G., Topputto F., Bernelli-Zazzera F.** Combined Optimal Low-Thrust and Stable-Manifold Trajectories to the Earth-Moon Halo Orbits // *AIP Conference Proceedings*. American Institute of Physics, 2007. Vol. 886, N. 1. P. 100–112.
23. **Shampine L. F. et al.** Solving boundary value problems for ordinary differential equations in MATLAB with bvp4c // *Tutorial notes*. 2000. Vol. 2000. P. 1–27.
24. **Higham D. J., Higham N. J.** *MATLAB guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005.
25. **Старинова О. Л.** Расчет межпланетных перелетов космических аппаратов с малой тягой. Самара: Самарский научный центр РАН, 2007. 196 с.

## Optimal Control of Transfer to Vertical Orbits from Lyapunov Orbits Using Low-Thrust Engine

**Du Chongrui<sup>1</sup>**, ducrui@yandex.ru, **O. L. Starinova<sup>1,2</sup>**, solleo@mail.ru,

<sup>1</sup>Samara National Research University, Samara, 443086, Russian Federation,

<sup>2</sup>Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, 210094, China

*Corresponding author: Starinova Olga L., Dr. Sci., Professor, Samara National Research University, Samara, 443086, Russian Federation, e-mail: solleo@mail.ru*

*Accepted on December 05, 2021*

### Abstract

There are many different families of periodic orbits in the Earth-Moon system, such as Lyapunov orbits, halo orbits, vertical orbits, etc. The establishment of a lunar space station requires a spacecraft to be able to transfer among these orbits. Lyapunov orbits have been used by some missions and are well-studied orbits, while periodic vertical orbits can provide large amplitudes of spacecraft motion outside the plane of the Moon's motion, which makes it possible to avoid shadowing of the orbits and use them as relay satellite in cislunar space. Modern researchers mainly consider the use of high-thrust engines for transfer. With the development of electric propulsion technology, the use of low, but long-acting thrust for deep space exploration has become especially relevant. This is due to the high specific characteristics of the propulsion systems of this type. In this article, an algorithm has been developed for determining the optimal control with a low-thrust engine for a transfer from Lyapunov orbit to a vertical orbit. The minimum time of flight or the minimum costs of the working body are used as criteria for optimality. In the calculation for solving the two-point boundary value problem of the optimal control theory, the parameter continuation algorithm is used, which allows to gradually get the transfer from some simple results to the final transfer trajectory. The results obtained make it possible to assert that the use of intermediate axial orbits allows the use of propulsion systems with lower thrust levels. In this case, the duration of the flight increases slightly with an almost unchanged consumption of the working body. Moreover, the homotopy method makes it possible to reduce the consumption of working body, while the control of the engine throttling becomes discrete. The results of this study and the algorithms proposed in this article can be used to determine the optimal program control and ballistic design of lunar missions.

**Keywords:** three-body problem, the Earth-Moon system, low-thrust engine, optimal control, vertical orbit

**Acknowledgements:** The research was carried out at the expense of a Russian Science Foundation Grant No. 22-29-01092 from the Russian Science Foundation, <http://rscf.ru/project/22-29-01092/>

**For citation:**

**Du Chongrui, Starinova O. L.** Optimal Control of Transfer to Vertical Orbits from Lyapunov Orbits Using Low-Thrust Engine, *Mekhanika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 158–167.

DOI: 10.17587/mau.23.158-167

### References

1. **Parker J. S., Anderson R. L.** Low-energy lunar trajectory design, *JPL Deep-Space Communications and Navigation Series*, Wiley, 2014. P. 103–106.
2. **Zeng H., Zhang J.** Modeling low-thrust transfers between periodic orbits about five libration points: Manifolds and hierarchical design, *Acta Astronautica*, 2018, vol. 145, pp. 408–423.
3. **Aksenov S. A., Beaver S. A. Aksenov S. A., Beaver S. A.** Control of a Spacecraft Motion on a Halo-Orbit with Restricted Maneuver Directions, *Nekotorye aspekty sovremennoy problem mekhaniki i informatiki*, 2018, pp. 166–174 (in Russian).
4. **Shaykhutdinov A. R., Kostenko V. I.** Prospects for Using the Halo-Orbit in the Vicinity of the L 2 Libration Point of the Sun–Earth System for the Ground-Space Millimetron Radio Interferometer, *Cosmic Research*, 2020, vol. 58(5), pp. 434–442 (in Russian).
5. **Richardson D. L.** Analytic construction of periodic orbits about the collinear points, *Celestial mechanics*, 1980, vol. 22(3), pp. 241–253.
6. **Rogov K.** Computation of Libration point orbits and manifolds using collocation methods, Thesis Universitat Polit@cnica de Catalunya, 2016.
7. **Richardson D. L.** A note on a Lagrangian formulation for motion about the collinear points, *Celestial Mechanics*, 1980, vol. 22(3), pp. 231–236.
8. **Grebow D.** Generating periodic orbits in the circular restricted three-body problem with applications to lunar south pole

coverage, *MSA Thesis, School of Aeronautics and Astronautics*, Purdue University, 2006.

9. **Calleja R. C.** et al. Boundary-value problem formulations for computing invariant manifolds and connecting orbits in the circular restricted three body problem, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2012, vol. 114(1), pp. 77–106.

10. **Xiangyu L., Dong Q., Yu C.** Progress of three-body orbital dynamics study, *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, vol. 53(5), pp. 1223–1245.

11. **Petukhov V. G.** Method of continuation for optimization of interplanetary low-thrust trajectories, *Cosmic Research*, 2012, vol. 50(3), pp. 258–258 (in Russian).

12. **Fain M. K., Starinova O. L.** Ballistic optimization of the L1-L2 and L2-L1 low thrust transfers in the Earth-Moon system, *2015 7th International Conference on Recent Advances in Space Technologies (RAST)*, IEEE, 2015, pp. 95–98.

13. **Shirobokov M. G., Trofimov S. P.** Low-Thrust Transfers to Lunar Orbits from Halo Orbits Around Lunar Libration Points L1 and L2, *Cosmic Research*, 2020, vol. 58(3), pp. 181–191 (in Russian).

14. **Pérez-Palau D., Epenoy R.** Fuel optimization for low-thrust Earth–Moon transfer via indirect optimal control, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2018, vol. 130(2). pp. 1–29.

15. **Zhang C.** et al. Low-thrust minimum-fuel optimization in the circular restricted three-body problem, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, vol. 38(8), pp. 1501–1510.

16. **Pritchett R., Howell K., Grebow D.** Low-thrust transfer design based on collocation techniques: applications in the restricted three-body problem, *Astrodynamic Specialist Conference*, Columbia River Gorge, Stevenson, Washington, August 21–24, 2017, pp. 1–92.

17. **Hyin I. S., Sazonov V. V., Tuchin A. G.** Transfer trajectories from low Earth orbit to a variety of restricted orbits in the vicinity of the libration point L2 of the Sun-Earth system, *Preprinty Instituta prikladnoj matematiki im. MV Keldysha RAN*, 2012, vol. 66, 25 p. (in Russian).

18. **Luo T., Xu M., Dong Y.** Natural formation flying on quasi-halo orbits in the photogravitational circular restricted three-body problem, *Acta Astronautica*, 2018, vol. (149), pp. 35–46.

19. **Pan X., Pan B., Li Z.** Bounding Homotopy Method for Minimum-Time Low-Thrust Transfer in the Circular Restricted Three-Body Problem, *The Journal of the Astronautical Sciences*, 2020, vol. 67, pp. 1220–1248.

20. **Saghamaresh M., Baoyin H.** A robust homotopic approach for continuous variable low-thrust trajectory optimization, *Advances in Space Research*, 2018, vol. 62(11), pp. 3095–3113.

21. **Petukhov V. G., Zhou J.** Computation of the Perturbed Two-Impulse Trajectory between the Earth and Lunar orbits by the Continuation Method, *Vestnik Moskovskogo aviatcionnogo instituta*, 2019, vol. 26(2), pp. 155–165 (in Russian).

22. **Mingotti G., Toppo F., Bernelli-Zazzera F.** Combined Optimal Low-Thrust and Stable-Manifold Trajectories to the Earth-Moon Halo Orbits, *AIP Conference Proceedings*, American Institute of Physics, 2007, vol. 886(1), pp. 100–112.

23. **Shampine L. F.** et al. Solving boundary value problems for ordinary differential equations in MATLAB with bvp4c, Tutorial notes, 2000, vol. 2000, pp. 1–27.

24. **Higham D. J., Higham N. J.** MATLAB guide, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2005.

25. **Starinova O. L.** Calculation of interplanetary flights of low-thrust spacecraft, Samara, Samarskij nauchnyj centr RAN, 2007, 196 p. (in Russian).

**Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"**

107076, Москва, Матrossкая тишина, 23с2

Телефон редакции журнала: **+7(499) 270 16 52**

Технический редактор **E. B. Конова**. Корректор **M. Ю. Безменова**.

Сдано в набор 27.12.2021. Подписано в печать 14.02.2022. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН322. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,  
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".  
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: [www.aov.ru](http://www.aov.ru)



**4-6 октября 2022 г. в Санкт-Петербурге  
на базе АО "Концерн" ЦНИИ "Электроприбор" состоится**

## **15-я мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2022)**

Председатель президиума мультиконференции — академик РАН В. Г. Пешехонов

Мультиконференция включает пять локальных конференций:

- XXXIII конференция памяти выдающегося конструктора  
гироскопических приборов Н.Н. Острякова**

Председатель программного комитета - акад. РАН В. Г. Пешехонов

- Конференция "Информационные технологии в управлении" (ИТУ-2022)**

Сопредседатели программного комитета: член-корр. РАН В. Н. Васильев,  
д.т.н. проф. В. Н. Шелудько, член-корр. РАН Р. М. Юсупов

- Конференция "Математическая теория управления и ее приложения" (МТУиП-2022)**

Сопредседатели программного комитета: член-корр. РАН Д. А. Новиков  
и д.ф.-м.н. проф. Н. В. Кузнецов

- Конференция "Управление в аэрокосмических системах"  
имени академика Е. А. Микрина (УАКС-2022)**

Сопредседатели программного комитета: акад. РАН С. Ю. Желтов,  
член-корр. РАН В.А. Соловьев, член-корр. РАН М. В. Сильников

- Конференция "Управление в морских системах" (УМС-2022)**

Сопредседатели программного комитета: акад. РАН Е. И. Якушенко,  
акад. РАН С. Н. Васильев, член-корр. РАН А. Ф. Щербатюк

**В рамках мультиконференции пройдет Семинар по закрытой тематике**

### **Информация для связи:**

ГНЦ РФ АО "Концерн" ЦНИИ "Электроприбор",  
Тел.: +7 (812) 499-82-10 — Истомина Елена Анатольевна  
+7 (812) 499 82 67 — Тарановский Дмитрий Олегович  
Факс: +7 (812) 232 33 76      E-mail: [icins@eprib.ru](mailto:icins@eprib.ru)