

И. Б. Фуртат, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., проф., cainenash@mail.ru,
Институт проблем машиноведения РАН, Университет ИТМО, Санкт-Петербург

Алгоритм робастного управления линейными объектами с векторными входами-выходами в условии насыщения сигнала управления*

Предложен алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами с векторными входами и выходами в условии параметрической неопределенности и внешних ограниченных возмущений. Рассмотрена задача слежения выхода объекта управления за эталонным сигналом. Предложенный алгоритм обобщен на случай заданных ограничений функции управления. Приведены условия на параметры объекта, эталонной модели и регулятора, при выполнении которых система управления будет работоспособной.

Ключевые слова: объект управления с векторными входами и выходами, робастное управление, насыщение сигнала управления, компенсация возмущений

Введение

Одной из ключевых проблем в теории управления является управление объектами в условии неопределенности, когда недоступны измерению производные выхода объекта управления. Об этом свидетельствует большое число публикаций на эту тему. Одним из эффективных способов управления объектами в условии неопределенности является робастное управление, для которого на сегодняшний день предложено достаточное число решений [1–6].

В работах [2, 3] для управления объектами в условиях параметрической неопределенности и внешних возмущений используются различные модификации наблюдателей с большим коэффициентом усиления (high-gain observer) для оценки производных выхода объекта. Наличие большого коэффициента необходимо для обеспечения робастной устойчивости замкнутой системы по отношению к данным неопределенностям. Однако при рассогласовании начальных условий объекта и системы управления увеличение коэффициента усиления в наблюдателе может привести к увеличению множества значений функции управления в начальный момент времени. В работе [4] на базе результатов статьи [3] получена простая схема управления, представленная последовательным соединением апериодических и форсирующих звеньев. В работе [5]

рассмотрено решение задачи компенсации возмущений с использованием динамического вспомогательного контура, подключенного параллельно объекту управления, и наблюдателя, представленного последовательным соединением реальных дифференцирующих звеньев. Результат статьи [5] позволил получить в работе [6] простой регулятор, представленный передаточной функцией, знаменатель которой содержит нулевой корень и малый параметр.

Анализ работ [2–6] показал, что представленные схемы управления отличаются лишь их частной реализацией. Поэтому возникает задача, связанная с получением нового способа управления, который бы позволил синтезировать новый класс регуляторов с учетом результатов работ [2–6].

Следующая проблема состоит в том, что при синтезе большинства алгоритмов управления в условии неопределенности, например в работах [1–6], требуется ограниченность функции управления, но границы множества ее возможных значений не фиксированы. Данное множество зависит от неизвестных начальных условий и параметров объекта управления, а также параметров системы управления. Однако на практике произвольное множество возможных значений функции управления может привести к неработоспособности системы управления из-за присутствия реальных ограничений.

В условиях определенности параметров объекта управления и внешних возмущений можно использовать в автоматических системах законы управления с введением ПИ или ПИД закона регулирования. Однако из-за насыщения управляющего сигнала переменные интегрирующего звена в ПИ и ПИД регуляторах могут быть неограниченными (windup), что приводит к невыполнению постав-

* Результаты разделов 3 и 5 получены при поддержке гранта Президента Российской Федерации (договор № 14.W01.16.6325-МД (МД-6325.2016.8)). Результаты раздела 2 получены в ИПМаш РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-29-00142). Другие исследования частично поддержаны грантом Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 14.Z50.31.0031) и грантом Правительства Российской Федерации (проект № 074-U01).

ленной цели или к потере устойчивости замкнутой системы [7]. В данном случае работоспособность системы управления с ПИ регулятором может достигаться введением контура, предотвращающего рост параметров в регуляторе (anti-windup, [8, 9]).

Впервые задача управления в условиях неопределенности и насыщения сигнала управления была рассмотрена в работе [10], однако результаты, касающиеся насыщения, не имеют строгого доказательства. Аналогичный результат был описан в работе [5], где на этапе моделирования системы с учетом известного множества возможных значений параметров объекта, предлагалась методика выбора параметров в регуляторе. В статье [11] для решения задачи функция насыщения сигнала управления заменялась гиперболическим тангенсом от сигнала управления. В работе [12] предложено адаптивное управление объектами в условиях неопределенности, где для частичной компенсации ограничений на сигнал управления параллельно ошибке слежения вводился вспомогательный контур с настраиваемым параметром. Заметим, что результаты работ [11, 12] справедливы, если доступен измерению вектор состояния объекта управления.

Таким образом, следующей задачей, рассматриваемой в статье, является обобщение алгоритма, синтезированного без учета насыщения сигнала управления, на случай заданных ограничений функции управления, когда не доступны измерению производные регулируемой переменной.

В статье решена задача управления линейными динамическими объектами с векторными входами и выходами в условиях параметрической неопределенности, внешних возмущений, заданных ограничений на сигнал управления и недоступности измерению производных входных и выходных сигналов. Вначале предложен алгоритм управления, обеспечивающий робастность замкнутой системы по отношению к параметрическим неопределенностям и внешним возмущениям без учета ограничений на функцию управления. Показано, что предложенный алгоритм обобщает известные результаты [2–6] и позволяет синтезировать новый класс алгоритмов. Далее полученный результат обобщается для управления в условиях заданных ограничений функции управления. Приведены условия на параметры модели объекта управления, эталонной модели и регулятора, при выполнении которых система управления будет работоспособной. Рассмотрены примеры моделирования, иллюстрирующие работоспособность предлагаемой схемы управления.

1. Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$Q(p)y(t) = R(p)u(t) + f(t), \quad (1)$$

где $y(t) \in R^l$ — вектор регулируемых переменных, $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_l(t)]^T \in R^l$ — вектор управления, $f(t) \in R^l$ — неконтролируемое ограниченное возмущение;

$$Q(p) = \begin{bmatrix} Q_{11}(p) & \dots & Q_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{l1}(p) & \dots & Q_{ll}(p) \end{bmatrix}, \quad R(p) = \begin{bmatrix} R_{11}(p) & \dots & R_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{l1}(p) & \dots & R_{ll}(p) \end{bmatrix},$$

$Q_{ij}(p), R_{ij}(p)$ — линейные дифференциальные операторы, $\deg Q_{ij}(p) = n_{ij}, \deg R_{ij}(p) = m_{ij}$, причем $n_{ii} > n_{ij}, m_{ii} \geq m_{ij}$ при $i \neq j, i = \overline{1, l}, j = \overline{1, l}, p = d/dt$ — оператор дифференцирования.

Цель управления состоит в синтезе непрерывного закона регулирования, обеспечивающего выполнение условия

$$|y(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t > T, \quad (2)$$

и нахождении сигналов $u_i(t)$ во множествах $|u_i(t)| \leq \bar{u}_i$,

$i = \overline{1, l}$, где $y_m(t)$ — эталонный сигнал такой, что

$$|y_m^{(j)}(t)| \leq \bar{y}_m^j, j = \overline{1, v}, v = \max_{i=\overline{1, l}} n_{ii}, \delta > 0$$

— точность регулирования, $T > 0$ — время, по истечении которого должно быть выполнено неравенство (2), $\bar{u}_i > 0$ — известная величина. Также необходимо, чтобы все переменные в замкнутой системе были бы ограниченными. Здесь и далее под $|s(t)|$ будем понимать евклидову норму вектора $s(t)$.

Сформулированную задачу будем решать при следующих **предположениях**:

1. Незвестные коэффициенты операторов $Q_{ij}(p), R_{ij}(p), i = \overline{1, l}, j = \overline{1, l}$, принадлежат известному ограниченному множеству Ξ .

2. Тривиальное решение уравнения $R(p)u(t) = 0$ является асимптотически устойчивым.

3. Известны числа \bar{f} и \bar{y}_m , где $|f(t)| \leq \bar{f}$ и $\bar{y}_m = \|\bar{y}_m^1, \bar{y}_m^2, \dots, \bar{y}_m^v\|^T$.

2. Синтез алгоритма без учета насыщения сигнала управления

Ради простоты рассмотрим сначала синтез алгоритма управления без учета насыщения регулируемой переменной. Представим операторы $Q_{ij}(p)$ и $R_{ij}(p)$ в виде следующих сумм:

$$Q_{ij}(p) = Q_{ij}^m(p) + \Delta Q_{ij}(p), R_{ij}(p) = R_{ij}^m(p) + \Delta R_{ij}(p), \quad i = \overline{1, l}, j = \overline{1, l}, \quad (3)$$

где $Q_{ij}^m(p), R_{ij}^m(p)$ — известные линейные дифференциальные операторы, $\deg Q_{ij}^m(p) \geq n_{ij}, \deg R_{ij}^m(p) \leq m_{ij}$; многочлены $Q_{ij}^m(\lambda), \det Q_m(\lambda), R_{ij}^m(\lambda)$ и $\det R_m(\lambda)$ — гурвицевы; λ — комплексная переменная;

$$Q_m(p) = \begin{bmatrix} Q_{11}^m(p) & \dots & Q_{1l}^m(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{l1}^m(p) & \dots & Q_{ll}^m(p) \end{bmatrix}, \quad R_m(p) = \begin{bmatrix} R_{11}^m(p) & \dots & R_{1l}^m(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{l1}^m(p) & \dots & R_{ll}^m(p) \end{bmatrix},$$

$\Delta Q_{ij}(p)$, $\Delta R_{ij}(p)$ — линейные дифференциальные операторы с неизвестными коэффициентами, $\deg \Delta Q_{ij}(p) \leq \deg Q_{ij}^m(p)$, $\deg \Delta R_{ij}(p) \leq m_{ij}$.

Подставим соотношения (3) в выражение (1) и составим уравнение для ошибки слежения $e(t) = y(t) - y_m(t)$ в виде

$$Q_m(p)e(t) = R_m(p)u(t) + \varphi(t), \quad (4)$$

где $\varphi(t) = D(p)f(t) - \Delta Q(p)y(t) + \Delta R(p)u(t) - Q_m(p)y_m(t)$ — функция, содержащая информацию о параметрической неопределенности и внешних возмущениях объекта (1); $\Delta Q(p) =$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_{11}(p) & \dots & \Delta Q_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta Q_{l1}(p) & \dots & \Delta Q_{ll}(p) \end{bmatrix},$$

$$\Delta R(p) = \begin{bmatrix} \Delta R_{11}(p) & \dots & \Delta R_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta R_{l1}(p) & \dots & \Delta R_{ll}(p) \end{bmatrix}.$$

Зададим закон управления в виде

$$u(t) = -\alpha^{-1}(p)R_m^{-1}(p)Q_m(p)e(t), \quad (5)$$

где матричный полином $\alpha(\lambda)$ порядка $l \times l$ выбирается таким, что многочлен $\det \alpha(\lambda)$ — гурвицев, и каждый элемент матричной передаточной функции $\alpha^{-1}(\lambda)R_m^{-1}(\lambda)Q_m(\lambda)$ имеет неотрицательную относительную степень.

Обозначим $P(\lambda) = \det \alpha(\lambda) \det R_m(\lambda) Q(\lambda) + R(\lambda) \alpha^*(\lambda) R_m^*(\lambda) Q_m(\lambda)$, где $\alpha^*(\lambda)$ и $R_m^*(\lambda)$ — присоединенные матрицы к $\alpha(\lambda)$ и $R_m(\lambda)$ соответственно. Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого алгоритм (5) обеспечит выполнение целевого условия (2).

Утверждение 1. Пусть выполнены условия предположений 1–3. Тогда существуют $\alpha(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$ такие, что многочлен $\det P(\lambda)$ — гурвицев для любых параметров (1) из класса Ξ , и регулятор (5) обеспечивает робастную устойчивость замкнутой системы, а также выполнение целевого условия (2).

Доказательство Утверждения 1 приведено в Приложении.

Замечание 1. Из соотношений (3) и (5) видно, что алгоритм (5) не требует точного знания порядков элементов матричных операторов $Q(p)$ и $R(p)$. Поэтому алгоритм (5) будет работоспособен для класса линейных структурно-неопределенных объектов (см., например, работы [13, 14]).

Замечание 2. Рассмотрим объект управления (1) при $u(t) \in R$ и $y(t) \in R$. Если в законе (5) $\alpha(p) = \text{const}$,

то получим результат, подобный результату работ [2, 3]; если $\alpha(p) = (Tp + 1)^\nu$, где $T > 0$, то получим результат, найденный в работе [4]. При $\alpha(p) = (\mu p + 1)^\nu - 1$, где $\mu > 0$ — достаточно малое число, получим результат, представленный в статье [6].

Таким образом, в настоящей статье получен алгоритм (5), устанавливающий связь между известными результатами [2–6] и позволяющий синтезировать новый класс алгоритмов за счет выбора структуры и параметров $\alpha(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$.

3. Структура закона управления в условиях насыщения входного сигнала

В условиях ограничения на функцию управления сформируем каждую компоненту вектора $u(t)$ в виде

$$u_i(t) = \frac{1}{1 + \sigma_i} \left(u_{ci}(t) + \sigma_i \tilde{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i} \right) \right), \quad i = \overline{1, l}, \quad (6)$$

где $\sigma_i > 0$, $0 < \tilde{u}_i < \bar{u}_i$, $u_{ci}(t)$ — новый сигнал управления, необходимый для компенсации неопределенностей объекта (1).

Замечание 3. Из соотношения (6) следует, что при $|u_{ci}(t)| \leq \tilde{u}_i$ $u_i(t) = u_{ci}(t)$, при $|u_{ci}(t)| > \tilde{u}_i$ $u_i(t) =$

$\frac{1}{1 + \sigma_i} (u_{ci}(t) + \sigma_i \tilde{u}_i \text{sgn}(u_{ci}(t)))$. Тогда при $\sigma_i < \infty$ величина $|u_i(t)|$ может принимать значения, большие, чем \tilde{u}_i . Однако при $\sigma_i \rightarrow \infty$ $u_i(t) \rightarrow \tilde{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i} \right)$. Зна-

чит, при достаточно больших σ_i величину \tilde{u}_i можно выбирать достаточно близкой к \bar{u}_i . Так, при $\tilde{u}_i = \bar{u}_i$

и $\sigma_i \rightarrow \infty$ $u_i(t) \rightarrow \bar{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\bar{u}_i} \right)$. В дальнейшем будет

получено условие выбора величины σ_i в соотношении (6) для обеспечения $|u_i(t)| \leq \bar{u}_i$.

Замечание 4. Из выражения (6) видно, что коэффициент σ_i можно выбирать из условия $\sigma_i \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$. Однако ради простоты синтеза системы управления положим в (6) $\sigma_i > 0$.

Принимая во внимание соотношение (5), зададим закон компенсации возмущений $u_c(t) = [u_{c1}(t), \dots, u_{cl}(t)]^T$ в виде

$$u_c(t) = -\alpha^{-1}(p)R_m^{-1}(p)Q_m(p)e(t). \quad (7)$$

Перед формулировкой утверждения введем следующие обозначения:

$$W_1 = \|Q_m^{-1}(\lambda)R_m(\lambda)\alpha(\lambda)\|, \quad W_2 = \|Q_m^{-1}(\lambda)\|,$$

$$W_3 = \sup_{\Xi} \|Q_m^{-1}(\lambda)\Delta Q(\lambda)\|, \quad W_4 = \sup_{\Xi} \|Q_m^{-1}(\lambda)Q(\lambda)\|,$$

$$W_5 = \sup_{\Xi} \|Q_m^{-1}(\lambda)R(\lambda)\|, \quad W_6 = \|\alpha^{-1}(\lambda)R_m^{-1}(\lambda)Q_m(\lambda)\|,$$

$$\varepsilon(t) = [e^T(t), \dot{e}^T(t), \dots, (e^{(v)}(t))^T]^T, \quad \bar{u} = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l]^T.$$

Здесь и далее под $\|W(\lambda)\|$ будем понимать H^∞ норму передаточной функции $W(\lambda)$, т.е. $\|W(\lambda)\| = \sup_{\text{Re} \lambda \geq 0} \|W(\lambda)\|_2$.

Сформулируем утверждение, при выполнении условий которого алгоритм (6), (7) обеспечит выполнение целевого условия (2) и ограниченность всех сигналов в замкнутой системе.

Утверждение 2. Пусть выполнены условия предположений 1–3 и Утверждения 1. Тогда при

$$|\varepsilon(0)| \leq W_1 \bar{u}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m &\leq (W_1 - W_3 W_1 - W_5) \bar{u}, \\ W_1 - W_3 W_1 - W_5 &> 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\sigma_i \geq \frac{\bar{u}_i + W_6 (W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u})}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i} \quad (10)$$

система управления (6), (7) обеспечит ограниченность сигналов в замкнутой системе и выполнение целевого условия (2) с точностью

$$\delta \leq W_2 \bar{f} + W_4 \bar{y}_m + (W_3 W_1 + W_5) \bar{u}. \quad (11)$$

Доказательство Утверждения 2 приведено в Приложении.

Стоит отметить, что оценки (8)–(11) достаточно грубые из-за использования грубых оценок в доказательстве Утверждения 2. Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим примеры.

4. Примеры управления объектом со скалярными входом и выходом

Рассмотрим объект управления со скалярным входом-выходом, динамические процессы в котором описываются уравнением

$$(p^3 - q_3 p^2 - q_2 p - q_1)y(t) = ru(t) + f(t). \quad (12)$$

Множество Ξ задано следующими неравенствами: $-1 \leq q_1 \leq 2$, $-4 \leq q_2 \leq -3$, $-0,5 \leq q_3 \leq 1$, $1 \leq r < 20$ и $\bar{f} = 0,4$. Цель управления состоит в обеспечении условия (2) и нахождении функции управления $u(t)$ во множестве $[-1; 1]$.

Выберем $Q_m(p) = (p + 1)^3$, $R_m(p) = 1$, $\alpha(p) = (0,01p + 1)^3 - 1$ и $\tilde{u} = 0,97$. Согласно выражениям (6) и (7) сформируем систему управления, представленную следующими уравнениями:

$$u_c(t) = -\frac{(p+1)^3}{(0,01p+1)^3 - 1} e(t),$$

$$u(t) = \frac{1}{1+\sigma} \left(u_c(t) + 0,97 \sigma \text{sat} \left(\frac{u_c(t)}{0,97} \right) \right). \quad (13)$$

Принимая во внимание множество Ξ , воспользуемся условиями (8)–(10): $|\varepsilon(0)| < 1,15 \cdot 10^{-2}$, $\bar{y}_m < 0,21$,

$\sigma > 2,3 \cdot 10^8$. Как отмечалось, эти условия достаточно грубые. Результаты моделирования показали, что система управления будет работоспособной, например, при $\bar{y}_m = 0,4$, $|\varepsilon(0)| \leq 0,1\sqrt{3}$ и $\sigma = 10^7$.

Положим $\sigma = 10^7$. Рассмотрим объект управления (12) со следующими параметрами: $q_1 = -1$, $q_2 = -4$, $q_3 = 1$, $r = 1$, $f(t) = 0,1 + 0,3 \sin t$, $y(0) = 0,1$, $\dot{y}(0) = 0,1$, $\ddot{y}(0) = 0,1$. Эталонный сигнал $y_m(t)$ изображен на рис. 1, а. На рис. 1, б представлены результаты моделирования по $e(t)$, на рис. 2 — по $u(t)$.

Анализ результатов моделирования показал, что замкнутая система робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса Ξ . В системе управления с начала ее функционирования динамическая ошибка не превышает значения 0,15. Из рис. 2 видно, что сигнал управления находится в заданном отрезке $[-1; 1]$, тогда как без использования алгоритма (13) (т.е. при $u(t) = u_c(t)$) сигнал управления $u(t)$ в начальный момент времени достигает значе-

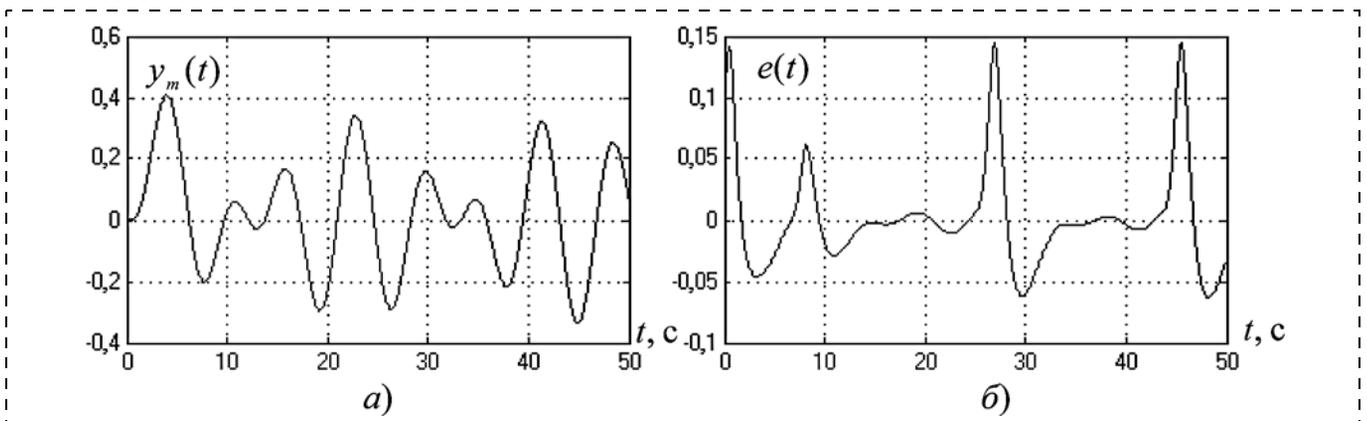


Рис. 1. Переходные процессы по $y_m(t)$ (а) и $e(t)$ (б)

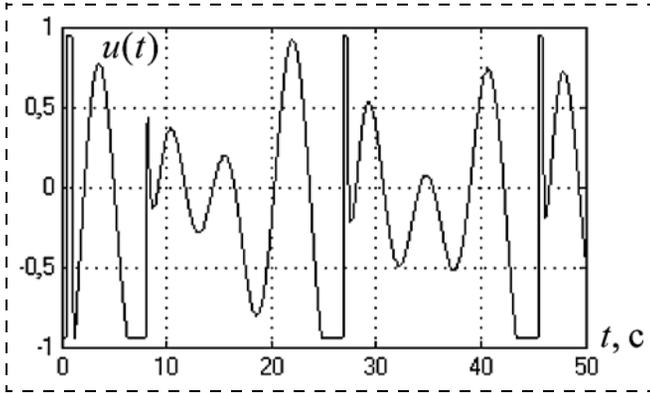


Рис. 2. График сигнала управления $u(t)$

ния -10^4 , и только на 0,2 с $u(t)$ входит в отрезок $[-1,12; 1,12]$, что недопустимо по условию задачи.

5. Пример управления объектом с векторным входом-выходом

Пусть модель объекта управления описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} (p^2 + q_1p + q_2)y_1(t) + q_3y_2(t) &= \\ = (r_1p + r_2)u_1(t) + r_3u_2(t) + f_1(t), \\ (p^2 + q_4p + q_5)y_2(t) + (q_6p + q_7)y_1(t) &= \\ = r_4u_2(t) + r_5u_1(t) + f_2(t). \end{aligned} \quad (14)$$

Множество Ξ определено в виде: $q_1 \in [-1; 1]$, $q_2 \in [-1; 1]$, $q_3 \in [1; 3]$, $q_4 \in [-0,5; 2]$, $q_5 \in [-0,5; 2]$, $q_6 \in [-1; 1]$, $q_7 \in [-1; 1]$, $r_1 \in [1; 3]$, $r_2 \in [1; 3]$, $r_3 \in [0; 2]$, $r_4 \in [1; 2]$, $r_5 \in [0; 1]$ и $\bar{f} = 2$. Цель управления состоит в обеспечении условия (2) и нахождения функций управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ во множестве $[-3,6; 3,6]$ и $[-30; 30]$ соответственно.

Выберем $Q_m(p) = (p + 1)^2 I_2$, $R_m(p) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Тогда

$$R_m^{-1}(p) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Положим } \alpha(p) = [(0,01p + 1)^2 - 1]I_2,$$

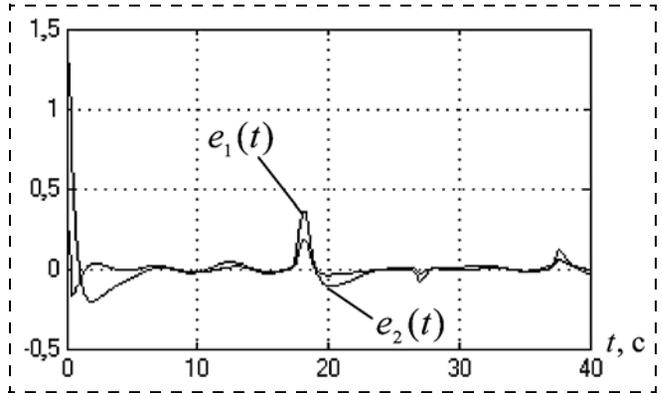


Рис. 3. Результаты моделирования по $e_i(t)$, $i = 1, 2$

$\tilde{u}_1 = 3,5$, $\tilde{u}_2 = 29,5$ и $\sigma_1 = \sigma_2 = 10^5$. Согласно выражениям (6) и (7) сформируем систему управления, представленную следующими уравнениями:

$$\begin{bmatrix} u_{c1}(t) \\ u_{c2}(t) \end{bmatrix} = - \frac{(p+1)^2}{(0,01p+1)^2 - 1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}; \quad (15)$$

$$u_1(t) = \frac{1}{1 + 10^5} \left(u_{c1}(t) + 3,5 \cdot 10^5 \text{sat} \left(\frac{u_{c1}(t)}{3,5} \right) \right);$$

$$u_2(t) = \frac{1}{1 + 10^5} \left(u_{c2}(t) + 29,5 \cdot 10^5 \text{sat} \left(\frac{u_{c2}(t)}{29,5} \right) \right). \quad (16)$$

Рассмотрим объект управления (14) со следующими параметрами: $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, $q_4 = 2$, $q_5 = 3$, $q_6 = q_7 = 1$, $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$, $r_5 = 0,1$, $f_1(t) = \sin 1,2t$, $f_2(t) = 2\sin t$, $y_1(0) = 0,5$, $\dot{y}_1(0) = 0,5$, $y_2(0) = 1$, $\dot{y}_2(0) = 1$. Пусть $y_{m1}(t) = 0,7 + 0,3\sin 0,7t$, $y_{m2}(t) = \sin 0,3t$. На рис. 3 представлены результаты моделирования по ошибкам $e_i(t) = y_i(t) - y_{mi}(t)$, на рис. 4 — по $u_i(t)$, $i = 1, 2$.

Результаты моделирования показали, что система управления робастна по отношению к внешним возмущениям и параметрической неопределенности из заданного класса Ξ . В системе управления через 1 с динамические ошибки не превышают зна-

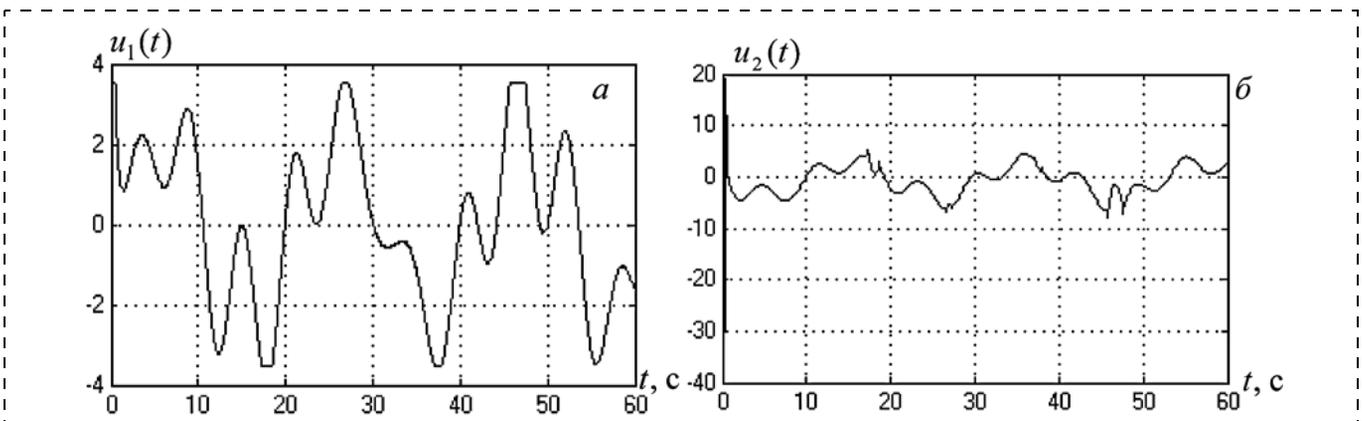


Рис. 4. Графики сигналов управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$

чения 0,4. Из рис. 4 видно, что сигналы управления находятся в заданных множествах, тогда как без использования алгоритма (16) сигналы $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в начальный момент времени достигают значений 12 000 и 5000 соответственно, а после 1 с сигнал $u_1(t)$ находится в отрезке $[-4,5; 4,5]$, что недопустимо по условию задачи.

Заключение

В статье приведен синтез системы управления для линейных динамических объектов с векторными входами-выходами в условиях параметрической неопределенности, внешних возмущений и заданных ограничений на функцию управления. Предложен робастный алгоритм, обобщающий известные результаты [2—6]. Разработана схема формирования сигнала управления и получены условия на параметры объекта управления, эталонной модели и регулятора, при выполнении которых система управления будет работоспособной в условиях ограничений на управление. При этом алгоритм (6), предложенный в условиях ограничений на управление, является независимым, т. е. им можно дополнить любой из существующих алгоритмов, разработанных без учета ограничений.

Приложение

Доказательство утверждения 1. Подставим выражение (5) в уравнение (4) и, принимая во внимание структуру функции $\varphi(t)$ и разложение (3), перепишем (4) в виде

$$Q(p)e(t) = R^{-1}(p)\alpha^{-1}(p)R_m^{-1}(p)Q_m(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + f(t).$$

Из последнего следует уравнение связи эталонного сигнала и внешнего возмущения с ошибкой слежения, которое определено следующим выражением:

$$e(t) = \frac{1}{\det P(p)} \det \alpha(p) \det R_m(p) P^*(p) (f(t) - Q(p)y_m(t)).$$

Очевидно, что для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы полином $\det P(\lambda)$ был гурвицевым для любых значений параметров объекта (1) из множества Ξ . Покажем, что существуют $\alpha(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ и $Q_m(\lambda)$ такие, что будет обеспечена гурвицевость полинома $\det P(\lambda)$. Для этого сформулируем вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть заданы многочлены $Q(\lambda)$, $T(\lambda)$ порядков n и m соответственно. Тогда существуют многочлены $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$ с порядками $k \geq 0$ и $g \geq n - 1$ такие, что может быть получен произвольный многочлен $M(\lambda)$ порядка $\mu = \max\{n + k, m + g\}$, который определен следующим соотношением:

$$M(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda) + R(\lambda)T(\lambda). \quad (\text{П.1})$$

Доказательство леммы 1. Рассмотрим многочлены $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ порядков $m + z + \mu$ и $n + z + \mu$

($z \geq 0$) соответственно, которые обеспечивают выполнение условия

$$Q(\lambda)A(\lambda) + B(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda). \quad (\text{П.2})$$

Представив многочлены $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в виде $A(\lambda) = \bar{A}(\lambda)M(\lambda)$ и $B(\lambda) = M(\lambda)\bar{B}(\lambda)$, где $\deg \bar{A}(\lambda) = m + z$, $\deg \bar{B}(\lambda) = n + z$, перепишем условие (П.2) в виде

$$Q(\lambda)\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + M(\lambda)\bar{B}(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda). \quad (\text{П.3})$$

Преобразуем $M(\lambda)\bar{B}(\lambda)$ как

$$M(\lambda)\bar{B}(\lambda) = Q(\lambda)N(\lambda) + R(\lambda), \quad (\text{П.4})$$

где $\deg N(\lambda) = \mu + z$. Подставив выражение (П.4) в (П.3), получим

$$Q(\lambda)[\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + N(\lambda)T(\lambda)] + R(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda). \quad (\text{П.5})$$

Поскольку $\deg \bar{A}(\lambda)M(\lambda) = \deg N(\lambda)T(\lambda) \geq \deg P(\lambda)$, то выберем $\bar{A}(\lambda)$, $\bar{B}(\lambda)$ такими, что $\bar{A}(\lambda)M(\lambda) + N(\lambda)T(\lambda) = P(\lambda)$. Следовательно, соотношение (П.1) выполнено. Лемма 1 доказана.

Лемма 1 является обобщением Утверждения 1 в работе [15] и Леммы 2 в работе [16]. В [15, 16] рассматриваются многочлены $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$ такие, что $\deg P(\lambda) = \deg R(\lambda) = n - 1$, что сужает класс разрабатываемых алгоритмов управления. Поскольку в Лемме 1 $\deg P(\lambda) = k \geq 0$ и $\deg R(\lambda) = g \geq n - 1$, то Лемму 1 можно применять к построению алгоритмов управления для структурно неопределенных объектов.

Опираясь на результаты Леммы 1, рассмотрим Лемму 2 для матричных многочленов.

Лемма 2. Рассмотрим матричные многочлены $Q(\lambda)$ и $T(\lambda)$ размерности $s \times s$, $\deg Q_{ij}(\lambda) = n_{ij}$, $\deg T_{ij}(\lambda) = m_{ij}$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, s}$. Тогда существуют матричные многочлены $P(\lambda)$ и $R(\lambda)$ размерности $s \times s$ и порядков $\deg P_{ij}(\lambda) = k_{ij} \geq 0$ и $\deg R_{ij}(\lambda) = g_{ij} \geq n_{ij} - 1$ такие, что может быть выполнено следующее соотношение:

$$Q(\lambda)P(\lambda) + R(\lambda)T(\lambda) = M(\lambda), \quad (\text{П.6})$$

где $M(\lambda)$ — произвольный матричный многочлен размерности $s \times s$ с порядком ij -элемента, равным $\mu_{ij} = \max_{r = \overline{1, s}} \{n_{ir} + k_{rj}, m_{rj} + g_{ir}\}$.

Доказательство леммы 2. Перепишем соотношение (П.6) в виде

$$\sum_{r=1}^s [Q_{ir}(\lambda)P_{rj}(\lambda) + R_{ir}(\lambda)T_{rj}(\lambda)] = M_{ij}(\lambda), \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, s}.$$

Рассмотрим операторы $A_{rj}(\lambda)$ и $B_{ir}(\lambda)$ порядков $m_{rj} + z_{ij} + \mu_{ij}$ и $n_{ir} + z_{ij} + \mu_{ij}$ ($z_{ij} \geq 0$) соответственно, такие, что выполнены следующие условия:

$$\sum_{r=1}^s [Q_{ir}(\lambda)A_{rj}(\lambda) + B_{ir}(\lambda)T_{rj}(\lambda)] = M_{ij}(\lambda), \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, s}. \quad (\text{П.7})$$

Представив $A_{rj}(\lambda)$ и $B_{ir}(\lambda)$ в виде

$$A_{rj}(\lambda) = \bar{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda) \quad \text{и} \quad B_{ir}(\lambda) = M_{ij}(\lambda)\bar{B}_{ir}(\lambda),$$

где $\deg \bar{A}_{rj}(\lambda) = m_{rj} + z_{ij}$, $\deg \bar{B}_{ir}(\lambda) = n_{ir} + z_{ij}$, пере-
пишем условие (П.7) в виде

$$\sum_{r=1}^s [Q_{ir}(\lambda)\bar{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda) + M_{ij}(\lambda)\bar{B}_{ir}(\lambda)T_{rj}(\lambda)] = M_{ij}(\lambda). \quad (\text{П.8})$$

Преобразуем $M_{ij}(\lambda)\bar{B}_{ir}(\lambda)$ к виду

$$M_{ij}(\lambda)\bar{B}_{ir}(\lambda) = Q_{ir}(\lambda)N_{ij}(\lambda) + R_{ir}(\lambda), \quad (\text{П.9})$$

где $\deg N_{ij}(\lambda) = \mu_{ij} + z_{ij}$. Подставив соотношение (П.9)
в выражение (П.8), получим

$$\sum_{r=1}^s [Q_{ir}(\lambda)(\bar{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda) + N_{ij}(\lambda)T_{rj}(\lambda)) + R_{ir}(\lambda)T_{rj}(\lambda)] = M_{ij}(\lambda).$$

Поскольку $\deg \bar{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda) = \deg N_{ij}(\lambda)T_{rj}(\lambda) \geq \deg P_{rj}(\lambda)$, то выберем $\bar{A}_{rj}(\lambda)$, $\bar{B}_{ir}(\lambda)$ такими, что $\bar{A}_{rj}(\lambda)M_{ij}(\lambda) + N_{ij}(\lambda)T_{rj}(\lambda) = P_{rj}(\lambda)$. Следовательно, соотношение (П.6) будет выполнено. Лемма 2 доказана.

Согласно Лемме 2 существуют $\alpha(\lambda)$, $Q_m(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ такие, что можно получить произвольный многочлен $P(\lambda)$, а следовательно, обеспечить гурвицевость многочлена $\det P(\lambda)$. Отметим, что соответствующим выбором $\alpha(\lambda)$, $Q_m(\lambda)$, $R_m(\lambda)$ можно обеспечить требуемое значение δ в целевом условии (2).

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что в процессе функционирования системы $|u_{ci}(t)| \leq \tilde{u}_i$. Тогда из выражения (6) $u_i(t) = u_{ci}(t)$, а значит, будут выполнены условия Утверждения 1. Выясним, при каких параметрах объекта и системы управления первый случай будет справедлив. Перепишем соотношение (7) в виде

$$e(t) = -Q_m^{-1}(p)R_m(p)\alpha(p)u_c(t). \quad (\text{П.10})$$

Оценим (П.10) как $|e(t)| \leq W_1|u_c(t)| \leq W_1\tilde{u}$, где $\tilde{u} = [|\tilde{u}_1|, \dots, |\tilde{u}_l|]^T$. Поскольку $|e(t)| \leq |\varepsilon(t)|$, потребуем, чтобы оценка на $\varepsilon(0)$ находилась во множестве

$$|\varepsilon(0)| \leq W_1\tilde{u}. \quad (\text{П.11})$$

Преобразуем уравнение (4) к виду

$$e(t) = Q_m^{-1}(p)[f(t) - \Delta Q(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + R(p)u(t)]. \quad (\text{П.12})$$

Оценим правую часть (П.12) как

$$Q_m^{-1}(p)[f(t) - \Delta Q(p)e(t) - Q(p)y_m(t) + R(p)u(t)] \leq W_2\bar{f} + W_3W_1\tilde{u} + W_4\bar{y}_m + W_5\tilde{u}. \quad (\text{П.13})$$

Принимая во внимание условия $|e(t)| \leq W_1\tilde{u}$ и (П.13), потребуем выполнение условия

$$W_2\bar{f} + W_3W_1\tilde{u} + W_4\bar{y}_m + W_5\tilde{u} \leq W_1\tilde{u}. \quad (\text{П.14})$$

Тогда из (П.14) следуют верхние оценки на \bar{f} и \bar{y}_m в виде

$$W_2\bar{f} + W_4\bar{y}_m \leq (W_1 - W_3W_1 - W_5)\tilde{u}, \\ W_1 - W_3W_1 - W_5 > 0. \quad (\text{П.15})$$

В результате, при $|u_{ci}(t)| \leq \tilde{u}_i$ и выполнении условий Утверждения 1, (П.11) и (П.15) целевое условие (2) будет выполнено.

2. Рассмотрим случай, когда

$$\tilde{u}_i < |u_{ci}(t)| \leq \bar{u}_i. \quad (\text{П.16})$$

Поскольку $|e(t)| \leq |\varepsilon(t)|$ и $|u_{ci}(t)| \leq \bar{u}_i$, то с учетом (П.10) потребуем, чтобы оценка на начальные условия находилась во множестве (8).

Оценим правую часть (П.12) как

$$Q_m^{-1}(p)[f(t) - Q(p)y_m(t) - \Delta Q(p)e(t) + R(p)u(t)] \leq W_2\bar{f} + W_4\bar{y}_m + (W_3W_1 + W_5)\bar{u}. \quad (\text{П.17})$$

Тогда из (П.17) следует оценка (11). Подставив (П.17) в условие $|e(t)| \leq W_1\bar{u}$, получим

$$W_2\bar{f} + W_4\bar{y}_m + (W_3W_1 + W_5)\bar{u} \leq W_1\bar{u}. \quad (\text{П.18})$$

Тогда из соотношения (П.18) следуют оценки (9).

В результате, при $|u_{ci}(t)| \leq \bar{u}_i$ и выполнении условий Утверждения 1, (8) и (9) будет выполнено целевое условие (2). Результирующие оценки (8), (9) следуют из того, что правые части (8) и (9) меньше, чем правые части (П.11) и (П.15) соответственно.

Теперь определим оценку для коэффициента σ_i , при котором $|u_{ci}(t)| \leq \bar{u}_i$. Для этого оценим выражение (6) как

$$\frac{1}{1 + \sigma_i} \left(u_{ci}(t) + \sigma_i \tilde{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i} \right) \right) \leq \bar{u}_i.$$

Разрешим последнее неравенство относительно σ_i :

$$\sigma_i \geq \frac{\bar{u}_i - u_{ci}(t)}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i} \right)}.$$

Оценим сверху правую часть последнего неравенства в виде

$$\frac{\bar{u}_i - u_{ci}(t)}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i \text{sat} \left(\frac{u_{ci}(t)}{\tilde{u}_i} \right)} \leq \frac{\bar{u}_i + |u_{ci}(t)|}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i} \leq \frac{\bar{u}_i + W_1|e(t)|}{\bar{u}_i - \tilde{u}_i}. \quad (\text{П.19})$$

С учетом соотношений (П.19) и (11) получим результирующую оценку для σ_i в виде (10).

Очевидно, что оценки (8)—(9) достаточно грубые, но из них видно, что существуют определенные значения параметров объекта, эталонной модели и регулятора, при которых в условиях ограничений на сигнал управления можно обеспечить выполнение целевого условия (2).

Список литературы

1. **Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.** Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
2. **Atassi A. N., Khalil H. K.** A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // *IEEE Trans. on Automat. Control*. 1999. V. 44. N. 9. P. 1672–1687.
3. **Бобцов А. А.** Синтез закона управления для стабилизации нелинейной системы по измерениям выхода // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2004. № 3. С. 40–45.
4. **Бобцов А. А., Шаветов С. В.** Управление по выходу линейным параметрически неопределенным объектом в условиях возмущающих воздействий и неучтенной динамики // *Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики*. 2011. № 1 (71). С. 33–39.
5. **Цыкунов А. М.** Алгоритм робастного управления нестационарным линейным объектом с компенсацией возмущений // *Изв. РАН. Теория и системы управления*. 2008. № 4. С. 33–40.
6. **Цыкунов А. М.** Алгоритм робастного управления линейными динамическими объектами по выходу // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2010. № 3. С. 9–14.
7. **Lozier J. C.** A steady-state approach to the theory of saturable servo systems // *IRE Trans. on Automatic Control*. 1956. May. P. 19–39.
8. **Kapasouris P., Athans M.** Multivariable Control Systems with Saturating Actuators Antireset Windup Strategies // *American Control Conf. Boston*, 2004. P. 1579–1584.
9. **Edwards C., Postlethwaite I.** Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes // *Automatica*. 1998. V. 34. N. 2. P. 199–210.
10. **Monopoli R.** Adaptive Control for Systems for Hard Saturation // *14th IEEE Conf. on Decision and Control*. Houston, TX, 1975. P. 841–842.
11. **Wen C., Zhou J., Liu Z., Su H.** Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2011. V. 56. N. 7. P. 1672–1678.
12. **Schwager M., Annaswamy A. M.** Direct Adaptive Control of Multi-Input Plants with Magnitude Saturation Constraints // *44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, Spain*, 2005. P. 783–788.
13. **Фуртат И. Б., Цыкунов А. М.** Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // *Проблемы управления*. 2008. № 5. С. 2–7.
14. **Фуртат И. Б., Цыкунов А. М.** Адаптивное управление объектами с неизвестной относительной степенью // *Автоматика и телемеханика*. 2010. № 6. С. 109–118.
15. **Feuer A., Morse A. S.** Adaptive control of single-input, single-output linear systems // *IEEE Trans. on Automat. Control*. 1978. V. AC-23. N. 4. P. 557–569.
16. **Narendra K. S., Valavani L. S.** Stable Adaptive Controller Design — Direct Control // *IEEE Trans. on Automat. Control*. 1978. V. AC-23. N. 4. P. 570–583.

Robust Control Algorithm for Linear MIMO Plants in Conditions of Saturation of the Control Signal

I. B. Furtat, cainenash@mail.ru✉, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: Furtat Igor' B., D. Sc., Professor, Leading Researcher, Institute of Problems of Mechanical Engineering, Russian Academy of Sciences, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation, e-mail: cainenash@mail.ru

Received on April 26, 2016

Accepted on May 16, 2016

The paper describes the robust control algorithm for the linear dynamic multi input multi output plants in the conditions of parametric uncertainties, external bounded disturbances and saturation of the input signal. Firstly, the author proposed the disturbance compensation algorithm, which ensured tracking of a plant output to the reference signal with a given accuracy without constraints in the control signal. It is shown that the structure of the control law does not depend on the dynamical order of the plant model. Therefore, the proposed algorithm can be used for the structural uncertainty plants. Besides, the proposed result generalizes some control algorithms, such as the consecutive compensator designed by A. A. Bobtsov, the algorithm based on a high gain observer proposed by H. Khalil and the auxiliary loop algorithm designed by A. M. Tsykunov. Secondly, the proposed algorithm is generalized for the case, when a control signal belongs to the given bounded set. The approximation algorithm of saturation of nonlinearity and the disturbance compensation algorithm for the design of the control law are used. The conditions depending on the parameters of the plant, the reference model and the algorithm for implementation of the control system under perturbations and control constraints are presented. The author considers two examples for the single input single output plant and the multi input multi output plant. The simulation results illustrate the efficiency of the proposed algorithm and confirm the analytical results. The theorem of the sum of the stable polynomials proposed by A. Feuer, A. S. Morse, K. S. Narendra and L. S. Valavani is generalized on the structural uncertainty polynomials and matrix polynomials for the proof of the closed-loop stability.

Keywords: MIMO plant, robust control, saturation control signal, disturbance compensation

Acknowledgements: The results of Sections 3 and 5 were obtained with support of the Russian President's grant (№ 14.W01.16.6325-MD (MD-6325.2016.8)). Section 2 results were obtained by IPME RAS with support of the Russian Science Foundation (Project № 14-29-00142). Other studies were supported in part by a grant from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Project № 14.Z50.31.0031) and a grant from the Government of the Russian Federation (project number 074-U01).

For citation:

Furtat I. B. Robust Control Algorithm for Linear MIMO Plants in Conditions of Saturation of the Control Signal, *Мехатроника, Автоматизация, Управление*, 2016, vol. 17, no. 9, pp. 579–587.

DOI: 10.17587/mau.17.579-587

References

1. **Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.** *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*, Dordrecht, Kluwer, 1999.
2. **Atassi A. N., Khalil H. K.** A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1999, vol. 44, no. 9, pp. 1672–1687.
3. **Bobtsov A. A.** *Sintez zakona upravleniya dlja stabilizacii nelinejnoj sistemy po izmerenijam vyhoda* (Synthesis of control law for stabilization of a nonlinear system based on measurements of output), *Изв. РАН. Теория и Системы Управления*, 2004, no. 3, pp. 40–45

(Boltsov A. A. Synthesis of control law for stabilization of a nonlinear system based on measurements of output, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2004, vol. 43, no. 3, pp. 363–368).

4. Boltsov A. A., Shavetov S. V. *Upravlenie po vyhodu lineynym parametricheski neopredelennym objektom v usloviyah vozmushhajushhih vozdeystvij i neuchtennoj dinamiki* (Output control of linear parametrically uncertain plant under disturbances and unaccounted dynamics), *Nauchno-tehnicheskij vestnik Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki*, 2011, no. 1 (71), pp. 33–39.

5. Tsykunov A. M. *Algoritm robustnogo upravlenija nestacionarnym lineynym objektom s kompensaciej vozmushhenij* (An algorithm of robust control of a non-stationary linear plant with perturbation compensation), *Izv. RAN. TiSU*, 2008, no. 4, pp. 33–40 (Tsykunov A. M. An algorithm of robust control of a non-stationary linear plant with perturbation compensation, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, vol. 47, no. 4, pp. 527–534).

6. Tsykunov A. M. *Algoritm robustnogo upravlenija lineynymi micheskimi objektami po vyhodu* (Algorithm for linear robust control of chemical facilities to overcome), *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie*, 2010, no. 3, pp. 9–14.

7. Lozier J. C. A steady-state approach to the theory of saturable servo systems, *IRE Trans. on Automatic Control*, 1956, May, pp. 19–39.

8. Kapasouris P., Athans M. Multivariable Control Systems with Saturating Actuators Antireset Windup Strategies, *American Control Conf. Boston*, 2004, pp. 1579–1584.

9. Edwards C., Postlethwaite I. Anti-windup and Bumpless-transfer Schemes, *Automatica*, 1998, vol. 34, no. 2, pp. 199–210.

10. Monopoli R. Adaptive Control for Systems for Hard Saturation, *14th IEEE Conf. on Decision and Control*. Houston, TX, 1975, pp. 841–842.

11. Wen C., Zhou J., Liu Z., Su H. Robust Adaptive Control of Uncertain Nonlinear Systems in the Presence of Input Saturation and External Disturbance, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2011, vol. 56, no. 7, pp. 1672–1678.

12. Schwager M., Annaswamy A. M. Direct Adaptive Control of Multi-Input Plants with Magnitude Saturation Constrains, *44th IEEE Conf. on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville*, Spain, 2005, pp. 783–788.

13. Furtat I. B., Tsykunov A. M. *Robustnoe upravlenie nestacionarnymi nelineynymi strukturno neopredelennymi objektami* (Robust control of unsteady nonlinear structurally undefined objects), *Problemy Upravlenija*, 2008, no. 5, pp. 2–7.

14. Furtat I. B., Tsykunov A. M. *Adaptivnoe upravlenie objektami s neizvestnoj otnositel'noj stepen'ju* (Adaptive control of plants of unknown relative degree), *Avtomatika i Telemekhanika*, 2010, no. 6, pp. 109–118. (Furtat I. B., Tsykunov A. M. Adaptive control of plants of unknown relative degree, *Automation and Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 6, pp. 1076–1084).

15. Feuer A., Morse A. S. Adaptive control of single-input, single-output linear systems, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1978, vol. AC-23, no. 4, pp. 557–569.

16. Narendra K. S., Valavani L. S. Stable Adaptive Controller Design — Direct Control, *IEEE Trans. on Automat. Control*, 1978, vol. AC-23, no. 4, pp. 570–583.

УДК 681.51

DOI: 10.17587/mau.17.587-598

А. Ж. Атамуратов, канд. техн. наук, вед. спец., goofydog@mail.ru,

ООО Пепсико Холдинг,

И. Е. Михайлов, д-р физ.-мат. наук, проф., вед. науч. сотр., mikh_igor@mail.ru,

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН,

Л. А. Муравей, д-р физ.-мат. наук, проф., l_muravey@mail.ru,

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Проблема моментов в задачах управления упругими динамическими системами¹

Рассматривается классическая проблема моментов, возникающая в задачах управления упругими динамическими системами, моделируемыми уравнениями в частных производных четвертого порядка, гиперболическими по Петровскому. Задача управления заключается в нахождении минимального времени, за которое можно погасить колебания, возникающие в системах вследствие начальных возмущений. Доказывается существование минимального значения времени и оптимального управления на примере гашения колебаний балок и пластин, являющихся типичными элементами различных механических конструкций, таких как трубопроводы, антенны и несущие элементы космических платформ. При этом время гашения колебаний и оптимальное управление найдено в явном виде. Для получения приближенных решений введены так называемые точечные движущиеся демпферы и стационарные узкие демпферы, упрощающие разработку вычислительных алгоритмов на основе метода редукции и координатного спуска.

Ключевые слова: гашение колебаний, тригонометрическая проблема моментов, ортогональные системы и базис Рисса, асимптотическая проблема моментов, стационарные и движущиеся демпферы, метод редукции, метод координатного спуска

Введение

Методы гашения колебаний элементов сложных механических систем, таких как струны и мембраны, начали интенсивно развиваться в 70-х годах прошлого столетия. Наиболее значимой была работа Д. Лагнесса [1], в которой исследовалась возможность гашения поперечных колебаний струны

¹ Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-01-00425).

$u(t, x)$, описываемых следующей начально-краевой задачей:

$$\frac{1}{2} u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = g(t, x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t; \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = h_0(x), \quad u_t|_{t=0} = h_1(x), \quad 0 \leq x \leq l; \quad (1.2)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad 0 < t, \quad (1.3)$$

где начальные данные $h_0(x)$, $h_1(x)$ рассматриваются как начальные возмущения, а функция $g(t, x)$ — как