23. **Novikov S. P.** *Vtoraya polovina XX veka i ego itog: krizis fiziko-matematicheskogo soobschestva v Rossii i na Zapade* (The second half of the XX century and its outcome: the crisis of physico-mathematical community in Russia and in the West), Vestnik DVO RAN, 2006, iss. 4, pp. 3—22 (in Russian).
24. **Atsyukovskiy V. A.** *Nachala efirodinamicheskogo estestvoznaniya. Kn. 1. Metodologicheskiy krizis sovremennoy teoreticheskoy fiziki* (The beginnings of efiro-dynamic natural science. Book 1. The methodological crisis of modern theoretical physics), Moscow, Petit, 2009 (in Russian).
25. **Ginsberg K. S.** *Proektirovanie i teoriya avtomaticheskogo upravleniya: devyat tochek zreniya na teoriyu upravleniya kak nauki* (Design and automatic control theory: nine points of view on the control theory as a science: Nine points of view on the theory of management as a science), *Proc. of 12th Intern. conf. "Sistemyi proektirovaniya tehnologicheskoy podgotovki proizvodstva i upravleniya etapami zhiznennogo tsikla promyishlennogo produkta"*, Moscow, OOO "Analitik", 2012, pp. 87—92 (in Russian).
26. **Kolesnikov A. A.** *Sinergeticheskie metodyi upravleniya slozhnyimi sistemami: teoriya sistemnogo sinteza* (Synergetic methods of control by complex systems: the theory of sytem synthesis), Moscow, Editorial URSS, 2005(in Russian).

УДК 681.5:517.935 DOI: 10.17587/mau/17.301-307

С. А. Дубовик, д-р техн. наук, проф., duboviksa@gmail.com,
Севастопольский государственный университет

Использование квазипотенциалов для контроля больших уклонений управляемых процессов*

Получены соотношения для квазипотенциальных экстремалей задачи Лагранжа, возникающей в анализе больших уклонений диффузионных процессов. На этой основе предлагается алгоритм прогноза критических состояний слабо возмущенных динамических систем. Приводятся примеры применения метода в задачах управления морскими судами, летательными аппаратами, а также в финансовой математике — при моделировании двухкомпонентного рынка Блэка—Шоулса.

Ключевые слова: *асимптотический анализ, функционал действия, большие уклонения, экстремаль, оптимальное управление*

Введение

Роль асимптотических методов (АМ) возрастает вместе с ростом интереса к управлению в условиях неопределенности. Метод малого параметра широко и давно используется для упрощения алгоритмов: в асимптотическом анализе систем и задач управления известны работы по декомпозиции [1, 2], композитным регуляторам [2, 3], композиционному синтезу [4, 5]. Во многих случаях сингулярно возмущенную задачу управления удается с достаточной точностью представить как совокупность более простых частных задач, после чего синтез регулятора превращается в простую сборку. Именно с этим связана важнейшая роль АМ — этот последний этап синтеза (сборку или ее элементы) можно распространить на процесс управления, т. е. совершать (или завершать) его в режиме online. Необходимость в такой реконфигурации системы управления обычно связана с появлениями больших уклонений по тем или иным координатам состояния; понятно, что возможность решений online связана не только с малыми параметрами, но и со способностью АМ существенно обогатить "интеллект" таких управлений.

Не ставя перед собой целью анализ указанных процессов во всей их полноте, в данной работе основное внимание уделим ключевой проблеме — прогнозу больших уклонений (БУ), опираясь на фундаментальные результаты Д. Вентцеля и М. Фрейдлина [6, 7]. Для этого необходимо ввести некоторые базовые результаты анализа БУ в форме, более удобной для теории управления [8—10].

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 15-08-06859а.

Квазипотенциалы динамических систем

Пусть необходимо выбрать r-мерный вектор управления $U = U(t)$ объектом, движения которого описываются слабо возмущенным дифференциальным уравнением для n-мерного вектора состояния $x = x(t)$:

$$\dot{x} = \alpha(x, U) + \varepsilon\sigma(x)\mathrm{w}, \quad x(0) = x_0 \in E, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; w — k-мерный вектор возмущений типа "белого шума"; α, σ — гладкие матричные функции.

Управления $U(t)$ в соотношении (1) формируются в виде обратных связей

$$U = Kx \tag{2}$$

таким образом, чтобы обеспечить состояние равновесия χ (аттрактор) невозмущенной системы, которая получается из уравнения (1) при $\varepsilon = 0$:

$$\dot{x} = \alpha(x, U), \quad x(0) = x_0 \tag{3}$$

с областью притяжения O_χ. Далее будем считать, что $\chi = 0$, а качество стабилизирующего управления (2) определяется линеаризованной системой:

$$\dot{x} = Ax + BU, \tag{4}$$

где матрицы A, B — суть матрицы частных производных $\alpha(x, U)$ по аргументам (соответственно) в нуле. В результате замыкания исходной системы (1) таким стабилизирующим управлением получим автономную систему

$$\dot{\tilde{x}} = a(\tilde{x}) + \varepsilon\sigma(\tilde{x})w. \qquad (5)$$

Здесь важно отметить, что малый параметр в уравнении (5) означает не малость возмущений, а именно то, что существенные проявления возмущений в стабилизированной системе (5) являются редкими событиями и обнаруживают себя только на достаточно больших промежутках времени. Фактически это формальное свидетельство и следствие удовлетворительной стабилизации системы (5) — стабилизация уменьшает неприятные последствия от шума. Тем не менее, они фиксируются, хотя и в качестве редких событий (выходы из области, большие уклонения). В физике для оценки такого рода редких событий (например, в задачах о движении диффундирующей частицы против потока, о преодолении квантово-механической частицей потенциального барьера) используется ВКБ-метод [7]: искать решение обыкновенного дифференциального уравнения в виде $\exp\{-S/\varepsilon^2+...\}$, позволяющем выписать хотя бы главный член асимптотики (S не зависит от ε, а точки обозначают члены, малые по сравнению с первым). Для стохастического уравнения (5), возмущенного гауссовским шумом, вероятности выхода состояния из области имеют при $\varepsilon \to 0$ асимптотику вида $\exp\{-C/\varepsilon^2\}$ [7]. Оказывается, можно ввести функционал $S_{0T}(\varphi)$, определенный на функциях $\varphi \in R^n$, более гладких, чем траектории (5) на $[0, T]$, такой, что при достаточно малых ε, $\delta > 0$ $P\{\rho(\tilde{x}, \varphi) < \delta\} \approx \exp\{-S_{0T}(\varphi)/\varepsilon^2\}$, где ρ — расстояние в пространстве функций $C_{0T}(R^n)$, непрерывных на рассматриваемом отрезке $[0, T]$. Вероятность маловероятного события составляется из вкладов $\exp\{-S_{0T}(\varphi)/\varepsilon^2\}$, соответствующих окрестностям различных функций, из которых при $\varepsilon \to 0$ существенным остается лишь слагаемое с наименьшим $S_{0T}(\varphi)$. Это вполне аналогично оценкам интегралов методом Лапласа. Точные результаты содержатся в работах [6, 7], и применительно к уравнению (5) сформулируем их в терминах оптимального управления. Для этого наряду с системой (5) запишем обыкновенное дифференциальное уравнение [8, 9] — систему уклонений:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi) + \sigma(\varphi)v, \ \varphi(0) = x_0 \in E, \qquad (6)$$

функционал

$$S_{t_0 t_f}(\varphi, v) = \int_{t_0}^{t_f} v^{\mathrm{T}} v dt. \qquad (7)$$

Для того чтобы охватить все случаи, введем область D, такую что $E \subset D \subset O_{\chi}$, и условие принадлежности траектории множеству F_D (реализующему событие ∂_D, вероятность которого оценивается) из семейства функций, непрерывных на отрезке: $F_D = \{\varphi \in S_{t_0 t_f}(R^n)\colon \varphi_t \in D \cup \partial D \ \forall \ t \in [t_0, t_f]\}$. Для множества F_D и системы (6) справедливо равенство [6, 7]

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln P\{\tilde{x}_t \in D\} = -\min_{\varphi \in F_D} S_{t_0 t_f}(\varphi, v), \qquad (8)$$

где функционал $S_{t_0 t_f} = S_{t_0 t_f}(\varphi, v)$ определен в соответствии с соотношением (7) на решениях управляемой системы (6), для которой запишем еще граничное условие выхода в критическое состояние:

$$\varphi(t_f) \in \Delta \subset \partial D. \qquad (9)$$

Таким образом, для оценки вероятности события ∂_D, связанного с процессом (6), получаем задачу оптимального управления Лагранжа—Понтрягина (ЛП) (6), (7), (9) в отличие от соответствующей вариационной задачи, сформулированной в работах [6, 7]. Результатом решения задачи ЛП является тройка $(\hat{v}, \hat{\varphi}, \hat{t}_f)$, т. е. экстремаль $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(t, \Delta)$, $t \in [t_0, t_f]$, определяющая минимальное значение функционала (7) и функционала действия (ФД): $\hat{I} = I_{t_0 \hat{t}_f}(\hat{\varphi}, \hat{v}) = \varepsilon^{-2} \hat{S}_{t_0 \hat{t}_f}(\hat{\varphi}, \hat{v})$. По ФД определяется квазипотенциал [6, 7] системы (6) — функция точки x и состояния равновесия:

$$V(\chi, x) = \inf\{S_{t_0 t_f}(\varphi)\colon \varphi \in C_{t_0 t_f}(R^n), \ \varphi_{t_0} = \chi, \ \varphi_{t_f} = x\}.$$

Соответствующую экстремаль $\tilde{\varphi}$, удовлетворяющую уравнению (6) и ведущую из состояния равновесия χ, будем называть квазипотенциальной.

Примем следующую терминологию: пусть $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ — два решения задачи ЛП, соответствующие двум условиям (9): $\hat{\varphi}_i = \hat{\varphi}(t, \Delta_i)$, $i = 1, 2$, где $\Delta_2 \subset \Delta_1 \subset \partial D$. В силу оценки (8) соответствующие решения (6) будем называть прогнозом критического состояния системы (6). Если Δ — подмножество границы ∂D, то решение $\hat{\varphi}_2$ будем считать более слабым прогнозом по сравнению с $\hat{\varphi}_1$. Наконец, предельно слабому (или просто предельному) прогнозу будет соответствовать случай одноточечного множества $\Delta = \Delta_* = x_*$.

Большие уклонения диффузионного процесса, линейная устойчивая система

Пусть в уравнении (4) $a(x) = Ax$, $\sigma(x) = \sigma$, т. е. имеем

$$\dot{\varphi}_t = A\varphi_t + \sigma v_t. \qquad (10)$$

Пусть также $x_f \in \Delta$ означает, что некоторый выход системы $y = Cx_f$ достигает критического значения. Задача (7), (9), (10) в этом случае хорошо известна. Она лежит в основе конструктивного доказательства управляемости системы (10) при выполнении соответствующих условий ([11], стр. 47—50) и построения ее множества достижимости ([11], стр. 93—95). Другой способ ее решения представлен в работе [10]. Не останавливаясь на деталях, приведем результат, где через ψ обозначен n-мерный вектор сопряженных переменных для системы уклонений (10) и $\psi_f = \psi(t_f)$.

Теорема 1. При условии гурвицевости матрицы A и управляемости пары (A, σ) квазипотенциал системы (10) равен

$$V(0, x_f) = \psi_f^{\mathrm{T}} D\psi_f = x_f^{\mathrm{T}} D^{-1}x_f, \qquad (11)$$

где положительно определенная матрица D удовлетворяет уравнению Ляпунова:

$$\sigma\sigma^{\mathrm{T}} = -AD - DA^{\mathrm{T}}.$$

Квазипотенциал (11) достигается только на бесконечной экстремали, т. е. при $t_0 \to -\infty$. Более того, в условиях теоремы 1 система (10), где $v = \widehat{v}$, является конвергентной [12], т. е. имеет для каждого $x = x_f$ единственное ограниченное решение на прямой. Это единственное решение названо в работе [12] предельным, оно же определяет предельный прогноз. Последнее равенство в соотношении (11) показывает, что множество достижимости линейной системы (10), о котором шла речь выше, можно определить как совокупность векторов с квазипотенциалами, не превышающими 1 (иначе говоря, квазипотенциальный единичный шар). Соотношение (8) показывает, что ФД и предельное решение (ПР) позволяют для каждой точки этого множества оценивать вероятность ее достижения из состояния равновесия.

Прежде всего, необходимо учесть, что ПР соответствует одноточечное терминальное множество в (9), т. е. $\Delta = x_* = x_f$. Вместе с тем, ПР, как и любое другое решение (10), имеет вид

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(t, \Delta) &= \exp\{A(t - t_f)\}x_f + \\ &+ (D\exp\{A^{\mathrm{T}}(t_f - t)\} - \exp\{A(t - t_f)\}D)\psi_f = \\ &= \exp\{A(t - t_f)\}(x_f - D\psi_f) + D\exp\{A^{\mathrm{T}}(t_f - t)\}\psi_f, \qquad (12)\end{aligned}$$

откуда, в силу ограниченности этого решения на всей прямой (т. е. при $t \to -\infty$), получаем

$$x_f - D\psi_f = 0. \qquad (13)$$

В соответствии с принципом Лагранжа [13], в составе необходимых условий экстремума для ПР имеем задачу минимизации (11) при ограничениях (13) и $y = Cx_f$.

Лемма 1. Для положительно определенной матрицы D и матрицы C полного ранга решение задачи

$$x^{\mathrm{T}}Dx \to \min_x, \; CDx - y = 0$$

имеет вид

$$\widehat{x} = C^{\mathrm{T}}y(CDC^{\mathrm{T}})^{-1}. \qquad (14)$$

Суммируем изложенное в виде следующего результата.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 квазипотенциальная экстремаль для задачи (7), (9), (10) определяется равенством

$$\widetilde{\varphi}(t) = D\exp\{A^{\mathrm{T}}(t_f - t)\}C^{\mathrm{T}}y(CDC^{\mathrm{T}})^{-1}, \qquad (15)$$

а нормированный ФД (7) для системы (6) в линейном случае (10) равен

$$S_{t_0 t_f}(\widetilde{\varphi}) = V(0, x_f) - V(0, x_0). \qquad (16)$$

Доказательство. Достаточно заметить, что из соотношений (12),(13) следует

$$\widetilde{\varphi}(t) = D\exp\{A^{\mathrm{T}}(t_f - t)\}\psi_f, \qquad (17)$$

где для $x = \psi_f$ имеет место лемма 1. Подставляя решение (14) в (17), получим равенство (15). Еще раз учитывая соотношение (17), равенство (16) получим из соотношений

$$\begin{aligned}S_{t_0 t_f}(\widetilde{\varphi}) &= \int_{t_0}^{t_f} \psi_f^{\mathrm{T}} \exp\{A(t_f - \tau)\}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\exp\{A^{\mathrm{T}}(t_f - \tau)\}\psi_f d\tau = \\ &= \psi_f^{\mathrm{T}}[D - \exp\{A(t_f - t_0)\}DD^{-1}(D\exp\{A^{\mathrm{T}}(t_f - t_0)\}]\psi_f = \\ &= \psi_f^{\mathrm{T}} D\psi_f - \widetilde{\varphi}(t_0)D^{-1}\widetilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(t_0),\end{aligned}$$

где остается учесть теорему 1.

Задача Лагранжа—Понтрягина для билинейных систем

Другой важный частный случай анализа БУ связан с билинейными уравнениями. Часто такие системы оказываются в том или ином смысле близки к линейным, что и позволяет воспользоваться результатами предыдущего раздела. Рассмотрим на промежутке $[0, t_f]$ систему

$$\dot{x} = \gamma(x, u) = Ax + Bu + \{xM\}u, \qquad (18)$$

где

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}} \in R^n, \; u \in R^m, \; \{xM\} = \sum_{i=1}^{n} x_i M_i \text{ —}$$

в соответствии с обозначениями работы [14], и для данной системы — задачу приведения:

$$Cx(t_f) = y_f$$

при минимальном расходе управления

$$J = \int_0^{t_f} u^{\mathrm{T}}u dt.$$

Обозначим

$$f_i = M_i u \in R^n, \; F = \{f_1, f_2, ..., f_n\} \in R^{n \times n}. \qquad (19)$$

Тогда можно записать

$$\{xM\}u = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = Fx,$$

и для рассматриваемой задачи ЛП, вычисляя частные производные от $\dot{x} = \gamma(x, u)$ по аргументам $\gamma_x = A + F$, $\gamma_u = B + \{xM\}$, получим уравнения для сопряженных переменных

$$\dot{\psi} = -(A + F)^{\mathrm{T}}\psi,\ \psi(t_f) = \psi_f \tag{20}$$

и оптимального управления

$$\hat{u} = (B^{\mathrm{T}} + \{xM\}^{\mathrm{T}})\psi. \tag{21}$$

Рассмотрим простой пример, в котором система (6) оказывается билинейной, и для построения оптимального управления (контруправления, в данном случае) следует использовать соотношения (19)—(21).

Пример 1. Бортовая качка судна в условиях волнения и ветра может быть представлена системой (6) второго порядка, если не учитывать уравнения фильтров, формирующих ветроволновые возмущения заданных спектров из белых шумов. Для упрощения мы не будем учитывать формирующие фильтры, тем более что это линейные системы, а учтем здесь другой эффект, связанный с приращением плеч статической остойчивости на волне [15], в результате чего модель качки оказывается билинейной. Уравнение (6) в этом случае можно представить в виде (18), где $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} = (\vartheta, \omega_x)^{\mathrm{T}}$ — угол и угловая скорость крена:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2h \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix},\ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и в данном случае принято: $\omega_0^2 = 0{,}36$, $h = 0{,}0315$, $\gamma = \mu = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}001$. Задача состоит в прогнозе критического значения угла крена $y = Cx_f = \vartheta_f$, $\vartheta_f = 0{,}5$ рад.

Теоремами 1, 2 напрямую воспользоваться нельзя, но можно их использовать для численных расчетов. Так, для построения предельного прогноза из леммы 1 имеем оценку граничных условий для сопряженной системы:

$$\psi_f = C^{\mathrm{T}}\psi_{f1} = \begin{pmatrix} \psi_{f1} \\ 0 \end{pmatrix},\ \psi_{f1} = 0{,}5(CDC^{\mathrm{T}})^{-1}, \tag{22}$$

а для оценки матрицы ковариаций D на основе линейного приближения и уравнения Ляпунова получим

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix},\ D_3 \cong \frac{\gamma^2}{4h},\ D_1 \cong D_3/\omega_0^2.$$

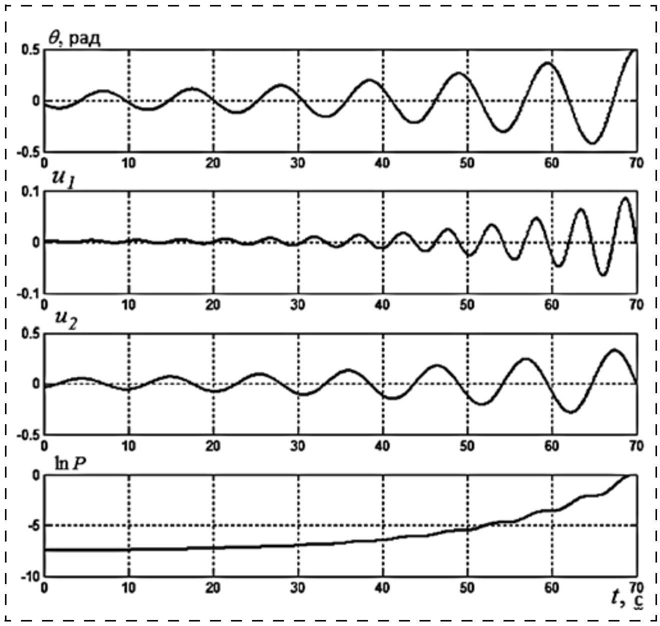

Рис. 1. Результаты расчетов для примера 1

Теперь в соотношении (22) имеем

$$\psi_{f1} = 0{,}5\,D_1^{-1} = 2h\left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2 \cong 2{,}27. \tag{23}$$

При моделировании, результаты которого приведены на рис. 1, окончательно выбрано значение $\psi_{f1} = 2{,}15$; в нелинейных задачах выбор граничных условий для сопряженных переменных — наиболее трудоемкая операция, поэтому оценка (22), (23) весьма полезна. На рис. 1 u_1, u_2 — соответственно возмущения от волнения и флуктуационного ветра. Выше уже отмечалось, что экстремали ЛП — существенно более гладкие функции, чем траектории и воздействия исходных стохастических систем, осциллограммы рис. 1 демонстрируют этот факт. Нижняя кривая — это функционал действия, дающий в силу (8) оценку логарифма вероятности критического крена.

Следующий пример позволяет проанализировать некоторые ситуации БУ, принципиально отличные от задач с гурвицевыми матрицами, рассмотренных выше.

Пример 2. Оценим возможности прогноза эффективности инвестиций в рамках двухкомпонентной модели рынка (рынок Блэка—Шоулса): B_t — банковский счет, S_t — цена акции [16, 17]. Пусть для (B_t, S_t)-рынка и самофинансируемого портфеля $\pi = (\beta, \gamma)$ соответствующий им капитал имеет вид

$$X_t^{\pi} = \beta B_t + \gamma S_t. \tag{24}$$

Для (B_t, S_t)-компонент имеют место стохастические уравнения

$$\dot{B}_t = rB_t + \varepsilon w_{1t},\ \dot{S}_t = \mu S_t + bS_t w_{2t} + \varepsilon w_{3t}, \tag{25}$$

где $w_t = (w_{1t}, w_{2t}, w_{3t})^{\mathrm{T}}$ — вектор независимых белых шумов; $\beta = 0,3$, $\gamma = 0,4$, $r = 0,1$, $\mu = 0,51$, $b = 0,005$, $\varepsilon = 10^{-5}$. Уравнения (24), (25) преобразуются к системе (6) для вектора $x_t = (X_t^{\pi}, B_t)^{\mathrm{T}}$, система уклонений для которой имеет вид (18). Терминальное событие — разорение до уровня $x_1(t_f) = X_{t_f}^{\pi} = -0,1$.

Матрица линейной части здесь не является гурвицевой:

$$A = \begin{pmatrix} \mu & \beta(r-\mu) \\ 0 & r \end{pmatrix},$$

и результат оказывается, на первый взгляд, несколько неожиданным: контруправление $v_t = (v_{1t}, v_{2t}, v_{3t})^{\mathrm{T}} \equiv 0$, т. е. вероятность кризиса $P_D \equiv 1$. Нетрудно показать при этом, что система уклонений в инвертированном времени с большой точностью представляется апериодическими звеньями первого порядка по второй координате (с постоянной времени $1/r$) и второго порядка по первой координате (с постоянными времени $1/r$ и $1/\mu$), а решения — их реакции на начальные (в обычном времени конечные) значения: $X_{t_f}^{\pi} = -0,1$ и $B_{tf} = 1$. Это и демонстрируют осциллограммы на рис. 2. Может быть, не зря в связи с такого рода кризисными явлениями говорят о "финансовых пузырях"?

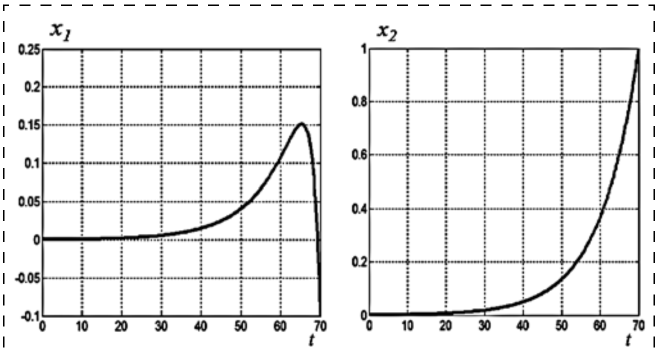

Рис. 2. Результаты расчетов для примера 2

Алгоритм прогноза

Как обычно, алгоритмы, основанные на асимптотических методах, оказываются зависящими от некоторого набора параметров, значения которых устанавливаются опытным путем. Не является исключением и предлагаемый алгоритм прогноза и принятия решений в условиях неопределенности, имеющей статистический характер.

Алгоритм основывается на понятии проекции на квазипотенциальную экстремаль текущего состояния x, т. е. такое значение $\tilde{\varphi}_X = \tilde{\varphi}(t_X)$ функции (15), при котором обеспечивается

$$\|x - \tilde{\varphi}(t_X)\| = \inf_{t \in (-\infty,\, t_f]} \|x - \tilde{\varphi}(t)\|.$$

Чем меньше $t_f - t_X$, тем больше вероятность кризиса: $t_X = t_X(P_D)$, поэтому проекция $\tilde{\varphi}(t_X) = \hat{\varphi}(t_X, P_D)$ также является функцией вероятности $P_D = \mathbf{e}^{-\varepsilon^{-2}\hat{S}}$.

Обозначив

$$x - \tilde{\varphi}(t_X) = \Delta_X, \qquad (26)$$

получаем, что в состоянии $X_t^{\varepsilon} = x$, определившись с проекцией x на $\tilde{\varphi}$ и, следовательно, с моментом $t_X = t_X(P_D)$, мы имеем также оценку вероятности критического события P_D и интервал доверия (26) этой оценке. Таким образом, параметры, которые необходимо выбрать в данном случае, это ε и значение Δ_X доверительного интервала оценки.

В итоге получаем следующий алгоритм контроля.

1. Определяется единственное положительно определенное решение уравнения Ляпунова.

2. Вычисляется квазипотенциальная экстремаль (15).

3. Определяется проекция на квазипотенциальную экстремаль текущего состояния системы (5), причем аргумент совмещается с текущим, так как квазипотенциальная экстремаль определяется с точностью до сдвига.

4. Вычисляется соответствующее моменту $t = t_X$ значение функционала действия (7) и оценка вероятности $P_D = \mathbf{e}^{-\varepsilon^{-2}\hat{S}}$ на уровне доверия Δ_X.

Основу алгоритма составляет вычисление квазипотенциалов и соответствующих экстремалей. Приведем еще один пример построения предельного прогноза в некоторой типичной ситуации, возникающей при управлении летательными аппаратами (ЛА).

Пример 3. Рассмотрим возможность применения указанного подхода в задаче контроля движений ЛА, близких к сваливанию. Такой режим, с одной стороны, характеризуется взаимосвязью продольного и бокового движений, с другой — возможностью его возникновения при весьма малых отклонениях координат состояния от равновесных значений. Задачу прогноза критических углов атаки рассмотрим на основе системы линейных уравнений пространственного движения ЛА [18] в режиме горизонтального полета с постоянной скоростью. Вектор состояния этой системы имеет вид

$$x = (\alpha, \omega_z, \theta, h, \omega_x, \varphi, \beta, \omega_y, \psi, z)^{\mathrm{T}} \in R^{10},$$

где элементами соответственно являются (отклонения от балансировочных значений): угол атаки, скорость и угол тангажа, вертикальное смещение (продольное движение), скорость и угол крена, угол скольжения, скорость и угол рыскания, боковое смещение (боковое движение).

В указанном номинальном режиме движение описывается уравнением (10) с гурвицевой матрицей $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, ..., 10$, для которой приведем только ненулевые элементы:

$$a_{11} = -0{,}915;\ a_{12} = 0{,}97;\ a_{13} = -0{,}117;\ a_{16} = 0{,}012;$$
$$a_{17} = -0{,}07;\ a_{19} = -0{,}07;\ a_{21} = 6{,}14;\ a_{22} = -4{,}07;$$
$$a_{23} = -19{,}65;\ a_{24} = 0{,}05;\ a_{25} = -0{,}007;\ a_{26} = 0{,}15;$$
$$a_{27} = -0{,}79;\ a_{28} = 0{,}25;\ a_{29} = -0{,}88;\ a_{2,10} = -0{,}003;$$
$$a_{32} = 1{,}0;\ a_{41} = 226{,}5;\ a_{43} = -226{,}5;\ a_{46} = 0{,}196;$$
$$a_{47} = -0{,}125;\ a_{4,\,10} = -0{,}07;\ a_{51} = 8{,}26;\ a_{52} = -0{,}025;$$
$$a_{53} = -12{,}86;\ a_{54} = 0{,}025;\ a_{55} = -6{,}27;\ a_{56} = 6{,}28;$$
$$a_{57} = -188;16,\ a_{58} = -71{,}0;\ a_{59} = -162{,}32;$$
$$a_{5,\,10} = -0{,}28;\ a_{65} = 1{,}0;\ a_{71} = 0{,}067;\ a_{73} = -0{,}067;$$
$$a_{75} = 0{,}187;\ a_{76} = 0{,}177;\ a_{77} = -0{,}176;\ a_{78} = -0{,}975;$$
$$a_{79} = 0{,}04;\ a_{81} = 0{,}4;\ a_{82} = -0{,}107;\ a_{83} = -0{,}61;$$
$$a_{84} = 0{,}001;\ a_{85} = -0{,}122;\ a_{86} = 0{,}4;\ a_{87} = -2{,}18;$$
$$a_{88} = -4{,}63;\ a_{89} = -8{,}4,\ a_{8,\,10} = -0{,}014;\ a_{98} = 1{,}0;$$
$$a_{10,\,4} = 0{,}07;\ a_{10,\,6} = -43{,}21;\ a_{10,\,7} = 230{,}7;\ a_{10,9} = 226{,}6.$$

В качестве возмущений рассмотрим флуктуации по углам атаки и скольжения, что в уравнениях (5), (6) и (10) приводит к матрице

$$\sigma = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 1, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon).$$

Малый параметр ε обеспечивает невырожденность матрицы диффузии и формальное требование метода ФД. Результаты моделирования системы уклонений, управляемой квазипотенциальной экстремалью, приведены на рис. 3. Характерно, что движения крена (φ) несколько опережают по фазе продольные вращения (θ), в чем, в частности, и проявляется оптимальность контруправлений.

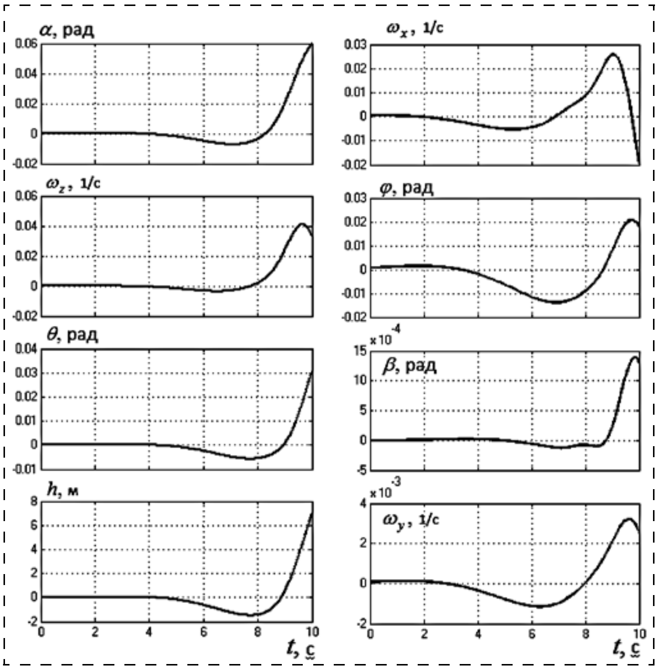

Рис. 3. Результаты расчетов для примера 3

Заключение

Полученные результаты показывают, что квазипотенциальные экстремали могут эффективно использоваться в задачах стабилизации как средство дополнительного контроля качества управления: попадание состояния стохастической системы в малую окрестность квазипотенциальной экстремали сигнализирует о нештатном развитии управляемого процесса. Более точные выводы о степени опасности и необходимости перехода на антикризисное управление могут быть сделаны по оценкам критической вероятности (8) и ФД, вычисляемым по квазипотенциалам на основании соотношения (16). В негурвицевых случаях вопрос может решаться проще — непосредственно по оценкам ФД, как это и демонстрирует пример с моделью из финансовой математики.

Список литературы

1. **Kokotovic P. V., Yackel R. A.** Singular perturbation of linear regulators: Basic theorem // IEEE Trans. on AC. 1972. Vol. 17. P. 29—37.
2. **Васильева А. Б., Дмитриев М. Г.** Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники, мат. анализ. 1982. Т. 20.
3. **Дмитриев М. Г., Макаров Д. А.** Композитный регулятор в линейной нестационарной системе управления // Изв. РАН, Теория и системы управления. 2014. № 6. С. 3—13.
4. **Дубовик С. А.** Композиционный синтез линейно-квадратических регуляторов // Проблемы управления и информатики. 1999. № 2. С. 50—62.
5. **Дубовик С. А.** Метод композиции в синтезе регуляторов для сингулярно возмущенных систем // Динамические системы. 2001. Вып. 17. С. 12—17.
6. **Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.** Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979. 424 с.
7. **Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И.** О малых случайных возмущениях динамических систем // УМН. 1970. Т. 25. Вып. 1 (151). С. 3—55.
8. **Zabczyk J.** Exit problem and control theory // Systems & Control Letters, North-Holland. 1985. V. 6. N. 3. P. 165—172.
9. **Нечаев Ю. И., Дубовик С. А.** Анализ устойчивости нелинейной стохастической модели динамики корабля на волнении с помощью функционала действия // Нелинейные краевые задачи мат. физики и их приложения. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. С. 101—103.
10. **Дубовик С. А.** О возможности прогноза и предотвращения критических состояний при управлении процессами диффузионного типа // Тр. XII Всеросс. совещ. по проблемам управления (ВСПУ XII). 2014. С. 1443—1454.
11. **Поляк Б. Т., Щербаков П. С.** Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
12. **Демидович Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
13. **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.
14. **Aganovic Z., Gajic Z.** Linear Optimal Control of Bilinear Systems. Springer-Verlag, 1995. 133 p.
15. **Нечаев Ю. И.** Моделирование устойчивости на волнении. Современные тенденции. Л.: Судостроение, 1989. 240 с.
16. **Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 614 с.
17. **Ширяев А. Н.** О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики // ТВП. 1994. Т. 39. Вып. 1. С. 5—22.
18. **Vukobratovic M., Stojic R.** Modern Aircraft Flight Control. Springer-Verlag, 1988. 288 с.

Use of Quasipotentials for Monitoring of Large Deviations in the Control Processes

S. A. Dubovik, duboviksa@gmail.com✉,
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Corresponding author: **Dubovik Sergey A.,** D. Sc., Professor,
Head of Department of Informatics and Control in Technical Systems,
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation
e-mail: duboviksa@gmail.com

Received on January 11, 2016
Accepted on January 20, 2016

The Lagrange problem arising in the analysis of large deviations in the states of dynamical systems was analyzed with the use of Wentzell-Freidlin method. For the linear case and Hurwitz state matrix of an unperturbed system the author obtained relations for quasipotential extremals, providing estimates of the probabilities of events for the initial conditions close to zero. On this basis, the author proposes an algorithm for prediction of the critical states of the dynamical systems, with the perturbed vector, "white noise", multiplied by a small parameter. Examples of application of the method to the task of controlling the angle of heel for a marine vessel in rough seas, and the angle of attack of an aircraft are presented. The case of lack of Hurwitz is analyzed on the example of the financial mathematics — instruments known as the Black-Scholes model The results show that the quasipotential extremals can be effectively used for the tasks of stabilization as a means of additional quality assurance management: passage of the stochastic system state through a small neighborhood of a quasipotential extremal signalizes about an abnormal movement of the controlled process. More accurate conclusions about the danger rate and the need to switch to the crisis management can be made with the estimated probability of a crisis and action functional, calculated on the basis of the quasipotential (equations included). In case of instability the question can be solved directly on the action functional, as an example of a financial mathematics model shows.

Keywords: *asymptotic analysis, action functional, large deviations, extremal, optimal control*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 15-08-06859a.

For citation:

Dubovik S. A. Use of Quasipotentials for Monitoring of Large Deviations in the Control Processes, *Mekhatronika, Avtomatizatsya, Upravlenie,* vol. 17, no. 5, pp. 301—307.

DOI: 10.17587/mau/17 .301-307

References

1. **Kokotovic P. V., Yackel R. A.** Singular perturbation of linear regulators: Basic theorem, IEEE TRANS. on AC, 1972, vol. 17, pp. 29—37.
2. **Vasil'eva A. B., Dmitriev M. G.** *Singuljarnye vozmushhenija v zadachah optimal'nogo upravlenija* (Singular perturbations in optimal control), Moscow, VINITI, *Itogi Nauki i Tehniki, Mat. Analiz,* 1982, vol. 20 (in Russian).
3. **Dmitriev M. G., Makarov D. A.** *Kompozitnyj reguljator v linejnoj nestacionarnoj sisteme upravlenija* (Composite regulator in a linear time variant control system), *Izv. RAN, Teorija i Sistemy Upravlenija*, 2014, no. 6, pp. 3—13 (in Russian).
4. **Dubovik S. A.** *Kompozicionnyj sintez linejno-kvadraticheskih reguljatorov* (Compositional synthesis of linear-quadratic regulator), *Problemy Upravlenija i Informatiki*, 1999, no. 2, pp. 50—62 (in Russian).
5. **Dubovik S. A.** *Metod kompozicii v sinteze reguljatorov dlja singuljarno vozmushhjonnyh sistem* (The method of composition in the synthesis of controllers for singularly perturbed systems), *Dinamicheskie Sistemy*, 2001, vol. 17, pp. 12—17 (in Russian).
6. **Wentzell A. D., Freidlin M. I.** Random Perturbations of Dynamical Systems. Springer-Verlag, 1998, 427 p.
7. **Wentzell A. D., Freidlin M. I.** *O malyh sluchajnyh vozmushhenijah dinamicheskih sistem* (On small random perturbations of dynamical systems), UMN, 1970, vol. 25, no. 1 (151), pp. 3—55 (in Russian).
8. **Zabczyk J.** Exit problem and control theory, *Systems & Control Letters*, North-Holland, 1985, vol. 6, no. 3, pp. 165—172.
9. **Nechaev Ju. I., Dubovik S. A.** *Analiz ustojchivosti nelinejnoj stohasticheskoj modeli dinamiki korablja na volnenii s pomoshh'ju funkcionala dejstvija* (Stability analysis of nonlinear stochastic dynamics model of the ship in rough seas with the help of the action functional), *Nelinejnye Kraevye Zadachi Mat. Fiziki i ih Prilozhenija*, Kiev, Published by Institute of Mathimatics of NAN Ukrainy, 1993, pp. 101—103 (in Russian).
10. **Dubovik S. A.** *O vozmozhnosti prognoza i predotvrashhenija kriticheskih sostojanij pri upravlenii processami diffuzionnogo tipa* (On the possibility of prediction and prevention of critical states in the management of the processes of diffusion type), *Trudy XII Vserossijskogo Soveshhanija po Probl. Upravlenija* (VSPU XII), Moscow, IPU RAN, 2014, pp. 1443—1454 (in Russian).
11. **Poljak B. T., Shherbakov P. S.** *Robastnaja ustojchivost' i upravlenie* (Robust stability and control), Moscow, Nauka, 2002, 303 p. (in Russian).
12. **Demidovich B. P.** *Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti* (Lectures on mathematical theory of stability), Moscow, Nauka, 1967, 472 p. (in Russian).
13. **Alekseev V. M., Tihomirov V. M., Fomin S. V.** *Optimal'noe upravlenie* (Optimal Control), Moscow, Nauka, 1979, 430 p. (in Russian).
14. **Aganovic Z., Gajic Z.** Linear Optimal Control of Bilinear Systems, Springer-Verlag, 1995, 133 p.
15. **Nechaev Ju. I.** *Modelirovanie ostojchivosti na volnenii. Sovremennye tendencii* (Modeling stability in rough seas. Modern tendencies), Leningrad. Sudostroenie, 1989, 240 p. (in Russian).
16. **Afanas'ev V. N., Kolmanovskij V. B., Nosov V. R.** *Matematicheskaja teorija konstruirovanija sistem upravlenija* (The mathematical theory of designing control systems), Moscow, Vyssh. shk., 2003, 614 p. (in Russian).
17. **Shiryaev A. N.** *O nekotoryh ponjatijah i stohasticheskih modeljah finansovoj matematiki* (Some concepts and stochastic models of financial mathematics), TVP, 1994, vol. 39, no. 1, pp. 5—22. (in Russian).
18. **Vukobratovic M., Stojic R.** Modern Aircraft Flight Control, Springer-Verlag, 1988, 288 p.