

**Н. Е. Зубов**<sup>1, 2</sup>, д-р техн. наук, проф., nikolay.zubov@rsce.ru,  
**М. В. Ли**<sup>2</sup>, аспирант, marat.li@rsce.ru, **Е. К. Ли**<sup>1</sup>, аспирант, elen.k.lee@student.bmstu.ru,  
**Е. А. Микрин**<sup>1, 2</sup>, д-р техн. наук, акад. РАН, eugeny.mikrin@rsce.ru,  
**В. Н. Рябченко**<sup>1, 2</sup>, д-р техн. наук, проф., rvp@mes-centra.ru

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

<sup>2</sup>ОАО "Ракетно-космическая корпорация "Энергия" им. С. П. Королева

## Алгоритм синтеза терминального управления выставкой космического аппарата в инерциальную систему координат<sup>1</sup>

*Получен алгоритм синтеза терминального управления выставкой космического аппарата в инерциальную систему координат. Алгоритм основан на определении программных значений компонент вектора угловой скорости и решении задач их стабилизации, а также достижения требуемой конечной ориентации космического аппарата. Приведены в детерминированной постановке результаты математического моделирования, показывающие успешную работу предлагаемого алгоритма и высокую точность терминального управления для широкого диапазона начальных условий выполнения маневра.*

**Ключевые слова:** инерциальная ориентация, математическая модель космического аппарата, терминальное управление, синтез программных значений угловой скорости

### Введение

Управление выставкой космического аппарата (КА) является одним из основополагающих маневров при управлении его угловым движением. В ходе этого процесса, именуемого в дальнейшем построением ориентации, происходит совмещение связанной системы координат (ССК) КА с заданной системой координат или, в рассматриваемом случае, с инерциальной системой координат (ИСК).

При терминальном построении инерциальной ориентации КА управление изменяется в зависимости от участка маневра: разгон, движение с постоянной скоростью, торможение. Используя кинематическую постановку задачи, можно достаточно легко получить в реальном масштабе времени программную траекторию построения инерциальной ориентации КА для участков разгона и движения с постоянной скоростью, а также построить алгоритм ее стабилизации. Синтез управления на участке торможения рассматривается отдельно ввиду необходимости стабилизации требуемой конечной ориентации КА.

Таким образом, в зависимости от участков совершения маневра задача терминального построения инерциальной ориентации может быть сведена к синтезу программных значений вектора угловой скорости, обеспечивающих процесс построения ориентации за заданное время (в кинематической постановке), расчету значений вектора управляющего момента и его стабилизации для участков разгона и движения с постоянной скоростью, а также к синтезу тормозных управляющих моментов с последующей стабилизацией требуемой ориентации для участка торможения.

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского национального фонда (проект № 14-11-00046).

Решению данной задачи построения ориентации КА за заданное время в ИСК и посвящена данная статья.

### Кинематические уравнения вращательного движения КА

Для описания процесса управления ориентацией КА будем использовать кинематические уравнения вращательного движения в параметрах Родрига — Гамильтона [1, 2]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{bmatrix} = 0,5 \begin{bmatrix} -\lambda_1 \omega_x - \lambda_2 \omega_y - \lambda_3 \omega_z \\ \lambda_0 \omega_x + \lambda_2 \omega_z - \lambda_3 \omega_y \\ \lambda_0 \omega_y + \lambda_3 \omega_x - \lambda_1 \omega_z \\ \lambda_0 \omega_z + \lambda_1 \omega_y - \lambda_2 \omega_x \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — компоненты угловой скорости КА относительно инерциального пространства;  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — компоненты кватерниона.

Аналитическое решение системы (1) при постоянных значениях  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  имеет следующий "спиральный" вид [2]:

$$\begin{bmatrix} \lambda_0(t_k) \\ \lambda_1(t_k) \\ \lambda_2(t_k) \\ \lambda_3(t_k) \end{bmatrix} = \left( \cos \frac{\omega T}{2} \mathbf{I}_4 + \frac{1}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} \mathbf{A} \right) \begin{bmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_x^2(t) + \omega_y^2(t) + \omega_z^2(t)}$ ;  $t \in (t_k - t_0)$  — текущее время  $T = t_k - t$ ,  $t_0, t_k$  — время начала и окончания переориентации;  $\mathbf{I}_4$  — единичная матрица 4-го порядка;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}.$$

### Синтез программных значений вектора угловой скорости

Введем обозначение  $\mathbf{x}(\tau) = [\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$  и запишем выражение (2) следующим образом в матричной форме:

$$\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{G}(t, \boldsymbol{\omega}, t_k) \mathbf{x}_x(t). \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{G}(t, \boldsymbol{\omega}, t_k) = \cos \frac{\omega T}{2} \mathbf{I}_4 + \frac{1}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} \mathbf{A}$ ;  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]$ .

Построим (условную) дискретную систему следующего вида:

$$\mathbf{x}_p^D(\tau + 1) = \mathbf{A}_p^D \mathbf{x}_p^D(\tau), \mathbf{y}(\tau) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_p^D(\tau), \quad (4)$$

где  $\tau = 0, 1, 2, \dots, N$  — дискретное время, определяемое на основе ввода на отрезке времени управления  $t \in [t_0, t_k]$  равномерной сетки из  $N$  интервалов с шагом  $h = (t_k - t_0)/N$ , так что  $t_\tau = t_0 + \tau h$  и  $t_N = t_k$ . Прогнозируемый расширенный вектор  $\mathbf{x}_p^D(\tau)$  включает векторы  $\mathbf{x}(\tau)$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , при этом матрицы в соотношении (4) имеют вид

$$\mathbf{A}_p^D = \mathbf{I}_{(n+m) \times (n+m)}, \mathbf{C}_p = [\mathbf{I}_n \times n \mid 0_n \times m]. \quad (5)$$

Построим для системы (4) наблюдатель состояния полного ранга. В общем виде он определяется уравнением [3]

$$\hat{\mathbf{x}}_p^D(\tau + 1) = (\mathbf{A}_p^D - \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p) \hat{\mathbf{x}}_p^D(\tau) + \mathbf{L}_p \mathbf{y}(\tau), \quad (6)$$

Оценка  $\hat{\mathbf{x}}(t_k)$  запишется следующим образом:

$$\hat{\mathbf{x}}(t_k) = \mathbf{G}(t, \boldsymbol{\omega}, t_k) \mathbf{x}(t). \quad (7)$$

Линеаризуем функцию  $\mathbf{G}(t, \boldsymbol{\omega}, t_k)$  в окрестности  $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ , используя разложение в ряд Тейлора. В результате будем иметь

$$\mathbf{G}(t, \boldsymbol{\omega}, t_k) = \mathbf{G}(t, \hat{\boldsymbol{\omega}}, t_k) + \frac{\partial \mathbf{G}(t, \hat{\boldsymbol{\omega}}, t_k)}{\partial \boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (8)$$

где  $\frac{\partial \mathbf{G}(t, \hat{\boldsymbol{\omega}}, t_k)}{\partial \boldsymbol{\omega}}$  — матрица Якоби,  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \hat{\boldsymbol{\omega}}$ . Вы-

числяя далее вектор невязок  $\tilde{\mathbf{x}}$ , получим

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tau + 1) = \frac{\partial \mathbf{G}(t, \hat{\boldsymbol{\omega}}, t_k)}{\partial \boldsymbol{\omega}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\tau). \quad (9)$$

Объединим  $\tilde{\mathbf{x}}$  и  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  в единый вектор и, используя (6), с учетом (4) получим дискретную модель уравнения невязок

$$\tilde{\mathbf{x}}_p(\tau + 1) = (\mathbf{A}_p^D - \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p) \tilde{\mathbf{x}}_p(\tau), \quad (10)$$

где

$$\mathbf{A}_p^D = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} & \frac{\partial \mathbf{G}(t, \hat{\boldsymbol{\omega}}, t_k)}{\partial \boldsymbol{\omega}} \\ 0 & \mathbf{I}_{m \times m} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

При выполнении условия полной наблюдаемости Калмана

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p \\ \mathbf{C}_p \mathbf{A}_p^D \\ \vdots \\ \mathbf{C}_p (\mathbf{A}_p^D)^{n+m-1} \end{bmatrix} = n + m \quad (12)$$

выбором матрицы коэффициентов  $\mathbf{L}_p$  при известных матрицах  $\mathbf{A}_p^D$  и  $\mathbf{C}_p$  всегда можно обеспечить любое заданное размещение внутри круга единичного радиуса на комплексной плоскости  $\mathbb{C}^{stab}$  корней характеристического полинома (полюсов) [4]

$$\det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_p^D + \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p) \quad (13)$$

или, что эквивалентно, собственных значений (eig) матрицы наблюдателя состояния

$$\begin{aligned} \text{eig}(\mathbf{A}_p^D - \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p) &= \\ &= \{\lambda_i \in \mathbb{C}^{stab} : \det(\lambda \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_p^D + \mathbf{L}_p \mathbf{C}_p) = 0\}. \end{aligned} \quad (14)$$

В этом случае можно рассмотреть вспомогательную дискретную МИМО-систему следующего вида [3]:

$$\mathbf{v}(\tau + 1) = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{v}(\tau) + \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\eta}(\tau), \boldsymbol{\eta}(\tau) = -\mathbf{L}_p^T \mathbf{v}(\tau), \quad (15)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор, имеющий размерность расширенного вектора  $\mathbf{x}_p$ ;  $\boldsymbol{\eta}$  — вектор входа (управления);  $\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}_p^D)^T$ ,  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{C}_p^T$ .

Поиск матрицы  $\mathbf{L}_p$  в соотношении (15), обеспечивающей заданное размещение полюсов (собственных значений), относится к классической задаче модального управления, а в данном случае, по сути, к задаче терминального управления. Это объясняется тем, что в рассматриваемой постановке задача терминального управления, фактически, заключается в идентификации (наблюдении) требуемого вектора угловой скорости.

Условия полной наблюдаемости здесь являются необходимыми и достаточными для существования решения терминального управления. Для поиска собственно решения, в принципе, можно применять

любой из методов модального управления [4–9]. Поступим так же, как это сделано в работе [6], воспользовавшись методом, приведенным в работе [9].

Составим идентификационную модель вида (6). В этом случае матрица  $\mathbf{A}_p^D$ , входящая в уравнение невязок (10), будет равна

$$\mathbf{A}_p^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{41} & b_{42} & b_{43} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_p^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= (\omega_x a_{11} p_1 - \lambda_{01} p_2 - \omega_x a_{11} p_3 - \lambda_{00} \omega_x p_4); \\ b_{21} &= (-\omega_x a_{21} p_1 + \lambda_{00} p_2 + \omega_x a_{21} p_3 - \lambda_{01} \omega_x p_4); \\ b_{31} &= (-\omega_x a_{31} p_1 + \lambda_{03} p_2 + \omega_x a_{31} p_3 - \lambda_{02} \omega_x p_4); \\ b_{41} &= (-\omega_x a_{41} p_1 - \lambda_{02} p_2 + \omega_x a_{41} p_3 - \lambda_{03} \omega_x p_4); \\ b_{12} &= (\omega_y a_{12} p_1 - \lambda_{02} p_2 - \omega_y a_{12} p_3 - \lambda_{00} \omega_y p_4); \\ b_{22} &= (-\omega_y a_{22} p_1 - \lambda_{03} p_2 + \omega_y a_{22} p_3 - \lambda_{01} \omega_y p_4); \\ b_{32} &= (-\omega_y a_{32} p_1 + \lambda_{00} p_2 + \omega_y a_{32} p_3 - \lambda_{02} \omega_y p_4); \\ b_{42} &= (-\omega_y a_{42} p_1 + \lambda_{01} p_2 + \omega_y a_{42} p_3 - \lambda_{03} \omega_y p_4); \\ b_{13} &= (\omega_z a_{31} p_1 - \lambda_{03} p_2 - \omega_z a_{31} p_3 - \lambda_{00} \omega_z p_4); \\ b_{23} &= (-\omega_z a_{23} p_1 + \lambda_{02} p_2 + \omega_z a_{23} p_3 - \lambda_{01} \omega_z p_4); \\ b_{33} &= (-\omega_z a_{33} p_1 - \lambda_{01} p_2 + \omega_z a_{33} p_3 - \lambda_{02} \omega_z p_4); \\ b_{43} &= (-\omega_z a_{43} p_1 + \lambda_{00} p_2 + \omega_z a_{43} p_3 - \lambda_{03} \omega_z p_4), \end{aligned}$$

$$p_1 = \frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega^3}, p_2 = \frac{\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{\omega},$$

$$p_3 = \frac{t \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{2\omega^2}, p_4 = \frac{t \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)}{2\omega}.$$

Применим изложенный в работе [10] подход к решению задачи идентификации вектора угловой скорости. Для этого сначала определим число уровней декомпозиции. В рассматриваемом случае размерность подпространства состояний, описывающих вспомогательную систему (10), равна  $n = 7$ , размерность векторов управления  $m = 4$ , при этом число уровней декомпозиции определяется функцией

$$J = \text{ceil}\left(\frac{N}{r}\right) - 1 = \text{ceil}\frac{7}{4} - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Здесь  $\text{ceil}(\ast)$  — операция округления числа ( $\ast$ ) в сторону большего значения.

Отсюда получаем два уровня декомпозиции: нулевой и первый.

В соответствии с соотношением (15) и на основании выражения (4) имеем

$$\bar{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}_p^D)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} & 1 & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} & 0 & 1 & 0 \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{C}_p^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Согласно алгоритму нулевой уровень декомпозиции для рассматриваемой системы имеет вид  $\mathbf{A}_0 = \bar{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{B}_0 = \bar{\mathbf{B}}$ .

Для нахождения первого уровня декомпозиции вычислим матрицу-аннулятор и 2-полуобратную матрицу [9]. Имеем

$$\mathbf{B}_0^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_0^{\perp-} = \mathbf{B}_0^{\perp T}.$$

Далее получим матрицы первого уровня

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & b_{42} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & b_{43} \end{bmatrix}.$$

Анализ матрицы  $\mathbf{B}_1$  показывает, что ее ранг по строкам превышает ранг по столбцам ( $4 > 3$ ). Выполнение ее "скелетного" разложения дает

$$\widehat{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} \end{bmatrix},$$

$$\text{где } l_{11} = \frac{b_{22} b_{33} - b_{23} b_{32}}{c}; l_{12} = -\frac{b_{21} b_{33} - b_{23} b_{31}}{c};$$

$$l_{13} = \frac{b_{21} b_{32} - b_{22} b_{31}}{c}; l_{21} = -\frac{b_{12} b_{33} - b_{13} b_{32}}{c};$$

$$l_{22} = \frac{b_{11} b_{33} - b_{13} b_{31}}{c}; l_{23} = -\frac{b_{11} b_{32} - b_{12} b_{31}}{c};$$

$$l_{31} = \frac{b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}}{c}; l_{32} = -\frac{b_{11}b_{23} - b_{13}b_{21}}{c};$$

$$l_{33} = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}}{c}; l_{41} = l_{42} = l_{43} = 0;$$

$$c = b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31}.$$

Зададим далее матрицу собственных значений  $\Phi_1$  в следующем (диагональном) виде:

$$\Phi_1 = \text{diag}(f_{11} f_{12} f_{13}).$$

Тогда, выполняя вычисления для матрицы регулятора первого уровня [9], получим

$$\widehat{\mathbf{L}}_1 = \Phi_1 - \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} f_{11} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_{12} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & f_{13} - 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1 = \widehat{\mathbf{B}}_1 \widehat{\mathbf{L}}_1 = \begin{bmatrix} l_{11}(f_{11} - 1) & l_{12}(f_{12} - 1) & l_{13}(f_{13} - 1) \\ l_{21}(f_{11} - 1) & l_{22}(f_{12} - 1) & l_{23}(f_{13} - 1) \\ l_{31}(f_{11} - 1) & l_{32}(f_{12} - 1) & l_{33}(f_{13} - 1) \\ l_{41}(f_{11} - 1) & l_{42}(f_{12} - 1) & l_{43}(f_{13} - 1) \end{bmatrix}.$$

Для нулевого уровня декомпозиции при задании  $\Phi_0$  в виде

$$\Phi_0 = \text{diag}(f_{01} f_{02} f_{03} f_{04})$$

будем иметь

$$\mathbf{B}_0^- = \mathbf{B}_0^+ - \mathbf{L}_0 \mathbf{B}_0^+ =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0; & -l_{11}(f_{11} - 1) & -l_{12}(f_{12} - 1) & -l_{13}(f_{13} - 1) \\ 0 & 1 & 0 & 0; & -l_{21}(f_{11} - 1) & -l_{22}(f_{12} - 1) & -l_{23}(f_{13} - 1) \\ 0 & 0 & 1 & 0; & -l_{31}(f_{11} - 1) & -l_{32}(f_{12} - 1) & -l_{33}(f_{13} - 1) \\ 0 & 0 & 0 & 1; & -l_{41}(f_{11} - 1) & -l_{42}(f_{12} - 1) & -l_{43}(f_{13} - 1) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_0 = \Phi_0 \mathbf{B}_0^- - \mathbf{B}_0^- \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} \end{bmatrix},$$

где

$$k_{11} = f_{01} + b_{11}l_{11}(f_{11} - 1) + b_{12}l_{12}(f_{12} - 1) + b_{13}l_{13}(f_{13} - 1) - 1;$$

$$k_{12} = b_{21}l_{11}(f_{11} - 1) + b_{22}l_{12}(f_{12} - 1) + b_{23}l_{13}(f_{13} - 1);$$

$$k_{13} = b_{31}l_{11}(f_{11} - 1) + b_{32}l_{12}(f_{12} - 1) + b_{33}l_{13}(f_{13} - 1);$$

$$k_{14} = b_{41}l_{11}(f_{11} - 1) + b_{42}l_{12}(f_{12} - 1) + b_{43}l_{13}(f_{13} - 1);$$

$$k_{15} = -l_{11}(f_{01} - 1)(f_{11} - 1);$$

$$k_{16} = -l_{12}(f_{01} - 1)(f_{12} - 1);$$

$$k_{17} = -l_{13}(f_{01} - 1)(f_{13} - 1);$$

$$k_{21} = -b_{11}l_{21}(f_{11} - 1) + b_{12}l_{22}(f_{12} - 1) + b_{13}l_{23}(f_{13} - 1);$$

$$k_{22} = f_{02} + b_{21}l_{21}(f_{11} - 1) + b_{22}l_{22}(f_{12} - 1) + b_{23}l_{23}(f_{13} - 1) - 1;$$

$$k_{23} = b_{31}l_{21}(f_{11} - 1) + b_{32}l_{22}(f_{12} - 1) + b_{33}l_{23}(f_{13} - 1);$$

$$k_{24} = b_{41}l_{21}(f_{11} - 1) + b_{42}l_{22}(f_{12} - 1) + b_{43}l_{23}(f_{13} - 1);$$

$$k_{25} = -l_{21}(f_{02} - 1)(f_{11} - 1);$$

$$k_{26} = -l_{22}(f_{02} - 1)(f_{12} - 1);$$

$$k_{27} = -l_{23}(f_{02} - 1)(f_{13} - 1);$$

$$k_{31} = b_{11}l_{31}(f_{11} - 1) + b_{12}l_{32}(f_{12} - 1) + b_{13}l_{33}(f_{13} - 1);$$

$$k_{32} = b_{21}l_{31}(f_{11} - 1) + b_{22}l_{32}(f_{12} - 1) + b_{23}l_{33}(f_{13} - 1);$$

$$k_{33} = f_{03} + b_{31}l_{31}(f_{11} - 1) + b_{32}l_{32}(f_{12} - 1) + b_{33}l_{33}(f_{13} - 1) - 1;$$

$$k_{34} = b_{41}l_{31}(f_{11} - 1) + b_{42}l_{32}(f_{12} - 1) + b_{43}l_{33}(f_{13} - 1);$$

$$k_{35} = -l_{31}(f_{03} - 1)(f_{11} - 1);$$

$$k_{36} = -l_{32}(f_{03} - 1)(f_{12} - 1);$$

$$k_{37} = -l_{33}(f_{03} - 1)(f_{13} - 1);$$

$$k_{41} = b_{11}l_{41}(f_{11} - 1) + b_{12}l_{42}(f_{12} - 1) + b_{13}l_{43}(f_{13} - 1);$$

$$k_{42} = b_{21}l_{41}(f_{11} - 1) + b_{22}l_{42}(f_{12} - 1) + b_{23}l_{43}(f_{13} - 1);$$

$$k_{43} = b_{31}l_{41}(f_{11} - 1) + b_{32}l_{42}(f_{12} - 1) + b_{33}l_{43}(f_{13} - 1);$$

$$k_{44} = f_{04} + b_{41}l_{41}(f_{11} - 1) + b_{42}l_{42}(f_{12} - 1) + b_{43}l_{43}(f_{13} - 1);$$

$$k_{45} = -l_{41}(f_{04} - 1)(f_{11} - 1);$$

$$k_{46} = -l_{42}(f_{04} - 1)(f_{12} - 1);$$

$$k_{47} = -l_{43}(f_{04} - 1)(f_{13} - 1);$$

Тогда уравнение оценки компонент вектора  $\omega$  запишутся следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\omega}_x \\ \widehat{\omega}_y \\ \widehat{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\omega}_{x0} \\ \widehat{\omega}_{y0} \\ \widehat{\omega}_{z0} \end{bmatrix} + \mathbf{L}_\omega^T \begin{bmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{x}_3 \\ \widetilde{x}_4 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Здесь

$$\mathbf{L}_\omega^T = \begin{bmatrix} k_{15} & k_{25} & k_{35} & k_{45} \\ k_{16} & k_{26} & k_{36} & k_{37} \\ k_{17} & k_{27} & k_{37} & k_{47} \end{bmatrix},$$

а индексом "0" обозначены значения предыдущего такта вычислений.

### Синтез значений вектора управляющего момента

Динамические уравнения вращательного движения КА запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_x; \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z &= M_y; \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_z. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $J_x, J_y, J_z$  — моменты инерции КА относительно осей  $Ox, Oy, Oz$ ;  $M_x, M_y, M_z$  — управляющие моменты по осям ССК, действующие на КА.

Для синтеза значений вектора управляющего момента на первых двух участках ориентации перепишем уравнения динамики вращательного движения (18) в следующем виде:

$$\dot{\omega} = \mathbf{A}_{\omega}\omega + \mathbf{B}_{\omega}\mathbf{u}_{\omega}, \quad (19)$$

где  $\dot{\omega} = [\dot{\omega}_x \ \dot{\omega}_y \ \dot{\omega}_z]^T$ ,  $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ ,  $\mathbf{u}_{\omega} = [M_x \ M_y \ M_z]^T$ ,

$$\mathbf{A}_{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J_y - J_z}{J_x} \omega_z & \frac{J_y - J_z}{J_x} \omega_y \\ \frac{J_z - J_x}{J_y} \omega_z & 0 & \frac{J_z - J_x}{J_y} \omega_x \\ \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_y & \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\omega} = \begin{bmatrix} J_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Соотношение (19) представляет собой нелинейную нестационарную систему уравнений. Для синтеза значений компонент вектора управляющего момента предлагается на каждом отдельном такте БЦВМ использовать систему (19), линеаризованную в окрестности значения вектора состояния на начало каждого такта работы БЦВМ.

После проведения процедуры линеаризации система (19) запишется следующим образом:

$$\Delta \dot{\omega} = \mathbf{A}_{\omega 0} \Delta \omega + \mathbf{B}_{\omega 0} \Delta \mathbf{u}_{\omega}, \quad (20)$$

где  $\Delta \dot{\omega} = [\Delta \dot{\omega}_x \ \Delta \dot{\omega}_y \ \Delta \dot{\omega}_z]^T$ ,  $\Delta \omega = [\Delta \omega_x \ \Delta \omega_y \ \Delta \omega_z]^T$ ,

$\Delta \mathbf{u}_{\omega} = [\Delta M_x \ \Delta M_y \ \Delta M_z]^T$ .

Для нахождения закона управления  $\Delta \mathbf{u}_{\omega} = -\mathbf{K}_{\omega 0} \Delta \omega$  также можно воспользоваться алгоритмом многоуровневой декомпозиции, описанным в работе [7].

В этом случае имеет место трехмерное пространство состояний и трехмерный вектор управления, откуда следует, что максимальный уровень используемой декомпозиции — нулевой. Нулевой уровень декомпозиции для системы (20) имеет вид

$$\mathbf{A}_{\omega 0} = \bar{\mathbf{A}}_{\omega}, \quad \mathbf{B}_{\omega 0} = \bar{\mathbf{B}}.$$

Как и прежде, зададим матрицу  $\Phi_0$  в диагональном виде:

$$\Phi_{\omega 0} = \text{diag}(n_{01} \ n_{02} \ n_{03}).$$

Тогда матрица обратной связи будет иметь вид

$$\mathbf{K}_{\omega 0} = \Phi_{\omega 0} \mathbf{B}_{\omega 0}^{-1} - \mathbf{B}_{\omega 0}^{-1} \mathbf{A}_{\omega 0} = \begin{bmatrix} J_x n_{01} & -\omega_z (J_y - J_z) & -\omega_y (J_y - J_z) \\ \omega_z (J_x - J_z) & J_y n_{02} & \omega_x (J_x - J_z) \\ -\omega_y (J_x - J_y) & -\omega_x (J_x - J_y) & J_z n_{03} \end{bmatrix},$$

$$\text{где } \mathbf{B}_{\omega 0}^{-1} = \mathbf{B}_{\omega 0}^{+} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}.$$

Для синтеза значений вектора управляющего момента на последнем участке построения ориентации необходимо определить момент начала торможения. Рассчитать момент переключения алгоритмов можно различными способами, в данном случае в качестве условия перехода будем использовать следующее соотношение:

$$\sqrt{\psi^2 + \vartheta^2 + \gamma^2} \leq \frac{t_{\text{tor}}}{2} \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2},$$

где  $t_{\text{tor}}$  — время, отводимое на торможение, принимается в размере 10 % от задаваемого времени на построение ориентации, но не менее 10 с (алгоритм прогнозирования также будет использовать уменьшенный интервал времени для выполнения прогноза);  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\gamma$  — углы Крылова, описывающие рассогласование между текущим и конечным положениями, связаны с кватернионами следующими соотношениями [1]:

$$\sin \psi = 2(\lambda_0 \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_3);$$

$$\text{tg} \vartheta = \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3)}{2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1};$$

$$\text{tg} \gamma = \frac{2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1)}{2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1}$$

или приближенно:

$$\psi \approx 2\lambda_0 \lambda_2, \quad \vartheta \approx 2\lambda_0 \lambda_3, \quad \gamma \approx 2\lambda_0 \lambda_1.$$

Линеаризованная математическая модель вращательного движения КА в отклонениях выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{24} & 0 & g_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & 0 & 0 & g_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{62} & 0 & g_{64} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ J_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где  $g_{24} = \frac{J_y - J_z}{J_x} \omega_z$ ,  $g_{26} = \frac{J_y - J_z}{J_x} \omega_y$ ,  $g_{42} = \frac{J_z - J_x}{J_y} \omega_z$ ,

$g_{46} = \frac{J_z - J_x}{J_y} \omega_x$ ,  $g_{62} = \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_y$ ,  $g_{64} = \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_x$ ,

$J_x, J_y, J_z$  — главные центральные моменты инерции КА;

$x_1 = \gamma, x_2 = \omega_x, x_3 = \psi, x_4 = \omega_y, x_5 = \vartheta, x_6 = \omega_z$ ;  
 $\gamma, \vartheta, \psi$  — углы крена, рыскания и тангажа;  $M_x, M_y, M_z$  — управляющие моменты.

Рассмотрим синтез значений компонент вектора управляющего момента на участке торможения. Для системы (21) размерность пространства состояний  $n = 6$ , размерность вектора управления  $m = 3$ . В результате применяемая декомпозиция содержит два уровня (нулевой и первый).

Для нахождения первого уровня декомпозиции вычислим матрицу-аннулятор и 2-полуобратную матрицу. Имеем

$$\mathbf{B}_{\tau 0}^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\tau 0}^{\perp-} = \mathbf{B}_{\tau 0}^{\perp T};$$

$$\mathbf{B}_{\tau 0}^{+} = \begin{bmatrix} 0 & J_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}.$$

Далее вычислим матрицы первого уровня

$$\mathbf{A}_{\tau 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\tau 1} = \begin{bmatrix} J_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & J_z^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\tau 1}^{+} = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}.$$

Зададим матрицы  $\Phi_{\tau 0}, \Phi_{\tau 1}$  в следующем (диагональном) виде:

$$\Phi_{\tau 1} = \text{diag}(c_{11} \ c_{12} \ c_{13}), \quad \Phi_{\tau 0} = \text{diag}(c_{01} \ c_{02} \ c_{03}),$$

где  $c_{ij}$  — некоторые вещественные числа.

Тогда

$$\mathbf{L}_{\tau 1} = \begin{bmatrix} -J_x c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -J_y c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -J_z c_{13} \end{bmatrix}.$$

Для нулевого уровня декомпозиции

$$\mathbf{B}_{\tau 0}^{-} = \begin{bmatrix} -J_x c_{11} & J_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_y c_{12} & J_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_z c_{13} & J_z \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{K}_{\tau 0} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & q_{14} & 0 & q_{16} \\ 0 & q_{22} & q_{23} & q_{24} & 0 & q_{26} \\ 0 & q_{32} & 0 & q_{34} & q_{35} & q_{36} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} q_{11} &= J_x c_{01} c_{11}; & q_{12} &= -J_x(c_{01} + c_{11}); & q_{14} &= J_x g_{24}; \\ q_{16} &= J_x g_{26}; & q_{22} &= J_y g_{42}; & q_{23} &= J_y c_{02} c_{12}; \\ q_{24} &= -J_y(c_{02} + c_{12}); & q_{26} &= J_y g_{46}; & q_{32} &= J_z g_{62}; \\ q_{34} &= J_z g_{64}; & q_{35} &= J_z c_{03} c_{13}; & q_{36} &= -J_z(c_{03} + c_{13}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{24} &= \frac{J_y - J_z}{J_x} \omega_z; & g_{26} &= \frac{J_y - J_z}{J_x} \omega_y; & g_{42} &= \frac{J_z - J_x}{J_y} \omega_z; \\ g_{46} &= \frac{J_z - J_x}{J_y} \omega_x; & g_{62} &= \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_y; & g_{64} &= \frac{J_x - J_y}{J_z} \omega_x. \end{aligned}$$

## Моделирование режима построения ориентации КА

Рассмотрим в детерминированной постановке пример серии испытаний терминального построения ориентации КА в инерциальной системе координат с варьированием значений начальной ориентации КА с шагом 0,4 рад по углам  $\vartheta, \gamma$  и 0,2 рад по углу  $\psi$ :

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,0..3,0 \\ -1,5..1,5 \\ -3,0..3,0 \end{bmatrix} \text{ рад.}$$

Время построения ориентации было задано 60 с. Выделим на торможение  $t_{\text{тор}} = 10$  с, так как 10 % от времени поворота меньше этого значения.

Считаем, что матрица моментов инерции КА равна

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 7800,77 & 0 & 0 \\ 0 & 6200,348 & 0 \\ 0 & 0 & 5900,55 \end{bmatrix} \text{ (кг} \cdot \text{м}^2\text{)}.$$

Предположим, что реализация управляющего момента осуществляется с использованием двигателей с дросселируемой тягой или с использованием инерционных исполнительных органов. При этом серьезных ограничений на максимальный управляющий момент не накладывается.

Значения всех полюсов  $f_{01}, f_{02}, f_{03}, f_{11}, f_{12}, f_{13}$  алгоритма оценки угловой скорости  $\hat{\omega}$  примем равными 0,4.

Значения полюсов в алгоритме синтеза управляющего момента на участке разгона и движения с постоянной скоростью примем равными

$$n_{01} = n_{02} = n_{03} = -0,5.$$

Значения полюсов на участке торможения примем следующими:

$$c_{01} = c_{02} = c_{03} = c_{11} = c_{12} = c_{13} = -0,4.$$

Полученные результаты моделирования, которые определяли значения компонент вектора угловой скорости КА и значения углов в момент заданного завершения процесса терминального построения ориентации, представлены на рис. 1–6.

Математические ожидания и среднеквадратические отклонения имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} M[\omega_x] &= -4,6202 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}; & M[\omega_y] &= 2,2365 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}; \\ M[\omega_z] &= -1,1582 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}; \\ \sigma_{\omega_x} &= 1,138 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}; & \sigma_{\omega_y} &= 5,4221 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}; \\ \sigma_{\omega_z} &= 1,1185 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}; \end{aligned}$$

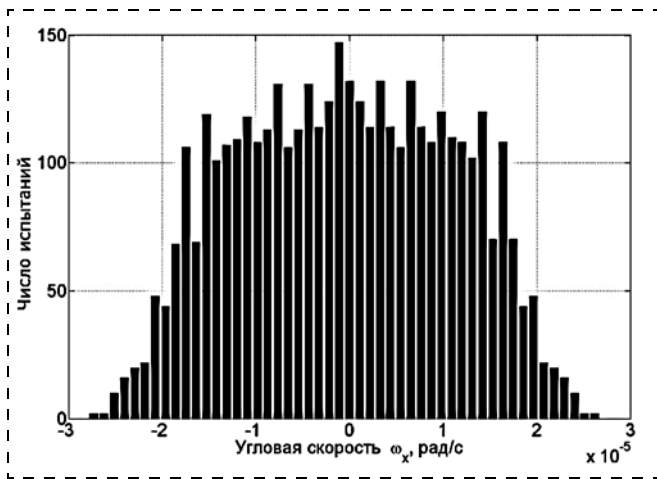


Рис. 1. Распределение значений угловой скорости по оси  $OX$  на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения углов)

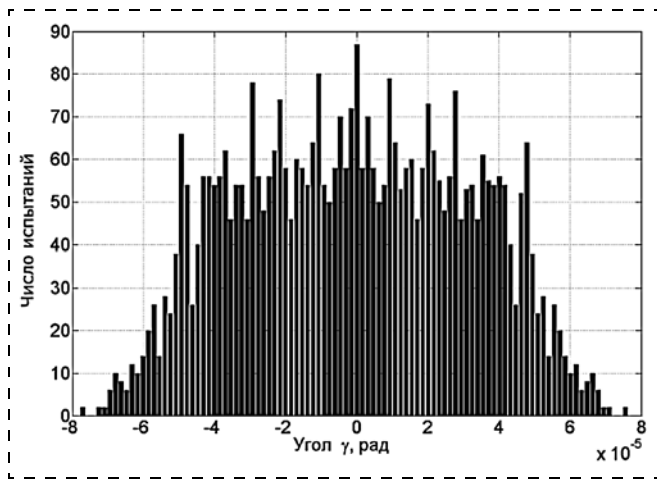


Рис. 4. Распределение значений углов крена на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения углов)

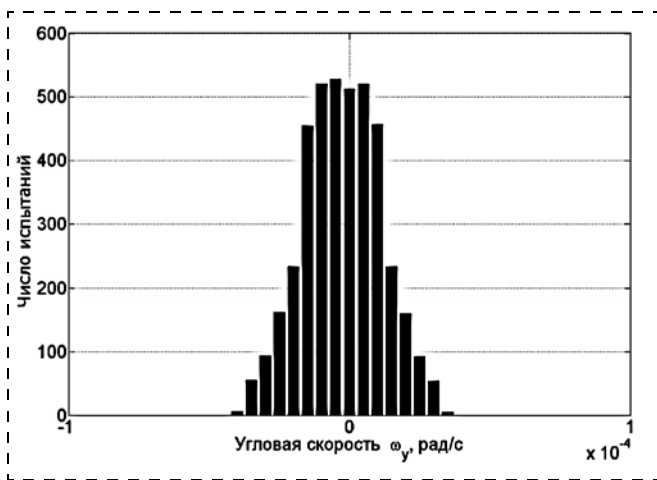


Рис. 2. Распределение значений угловой скорости по оси  $OY$  на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения углов)

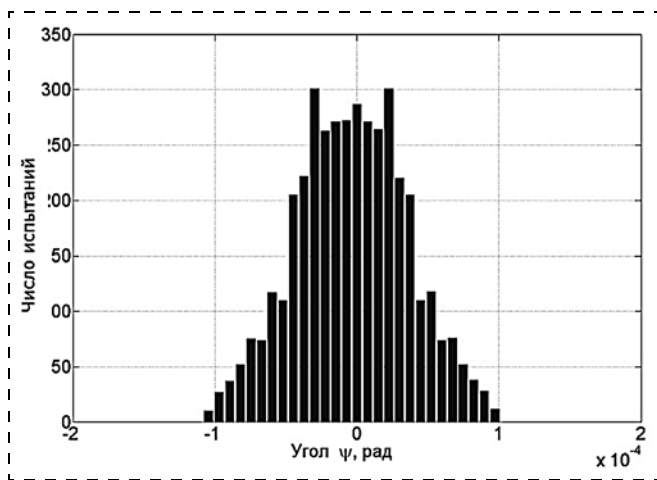


Рис. 5. Распределение значений углов рыскания на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения углов)

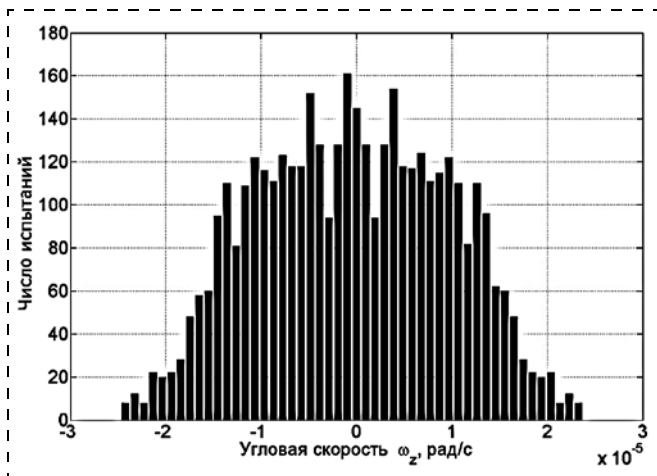


Рис. 3. Распределение значений угловой скорости по оси  $OZ$  на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения углов)

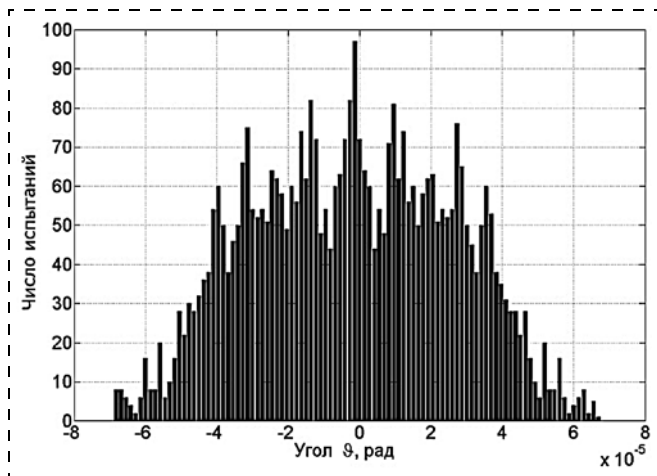


Рис. 6. Распределение значений углов тангажа на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения углов)

$$M[\gamma] = 1,1728 \cdot 10^{-5} \text{ рад}; M[\psi] = -6,9224 \cdot 10^{-7} \text{ рад};$$

$$M[\vartheta] = 3,2286 \cdot 10^{-6} \text{ рад};$$

$$\sigma_\gamma = 1,0322 \cdot 10^{-4} \text{ рад}; \sigma_\psi = 1,5707 \cdot 10^{-6} \text{ рад};$$

$$\sigma_\vartheta = 3,1303 \cdot 10^{-6} \text{ рад}.$$

Также было проведено моделирование серии испытаний с изменением требуемого времени построения ориентации при неизменных параметрах начального положения:

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \psi \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,13 \\ -0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} \text{ рад или } \Lambda_0 = \begin{bmatrix} 0,0083 \\ 0,9975 \\ 0,0502 \\ 0,0496 \end{bmatrix}, \Lambda_{pr} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Время изменялось от 50 до 150 с с шагом 0,01 с.

При этом остальные условия построения ориентации были оставлены прежними. Полученные результаты моделирования, которые определяли

значения компонент вектора угловой скорости КА и значения углов в момент заданного завершения процесса терминального построения ориентацией, представлены на рис. 7–12.

Математические ожидания и среднеквадратичские отклонения в этом случае имеют следующие значения:

$$M[\omega_x] = 4,4475 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}; M[\omega_y] = -3,9974 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1};$$

$$M[\omega_z] = 2,4375 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1};$$

$$\sigma_{\omega_x} = 1,138 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}; \sigma_{\omega_y} = 2,3910 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1};$$

$$\sigma_{\omega_z} = 9,9975 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1};$$

$$M[\gamma] = -1,2455 \cdot 10^{-7} \text{ рад}; M[\psi] = 1,1443 \cdot 10^{-7} \text{ рад};$$

$$M[\vartheta] = -6,6185 \cdot 10^{-8} \text{ рад};$$

$$\sigma_\gamma = 3,2028 \cdot 10^{-5} \text{ рад}; \sigma_\psi = 7,0416 \cdot 10^{-5} \text{ рад};$$

$$\sigma_\vartheta = 2,8195 \cdot 10^{-6} \text{ рад}.$$

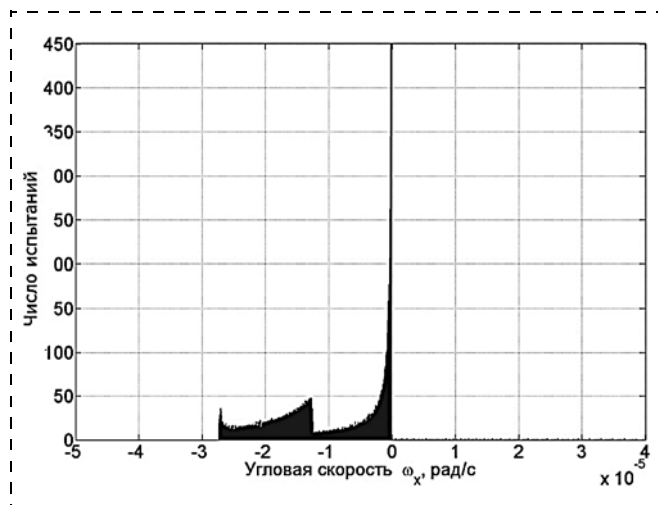


Рис. 7. Распределение значений угловой скорости по оси  $OX$  на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения времени)

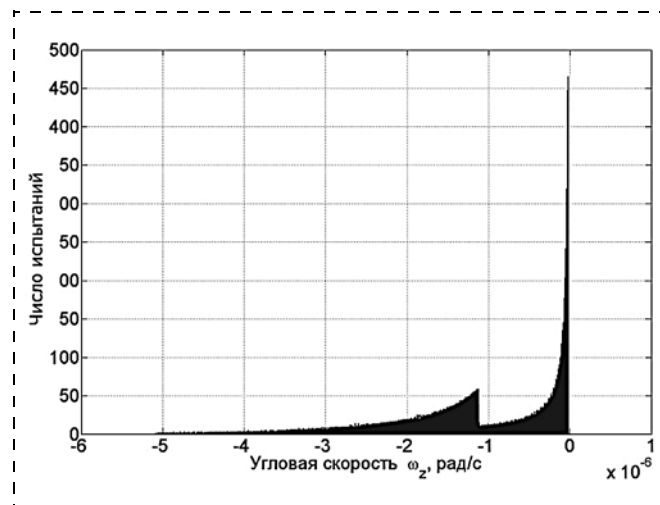


Рис. 9. Распределение значений угловой скорости по оси  $OZ$  на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения времени)

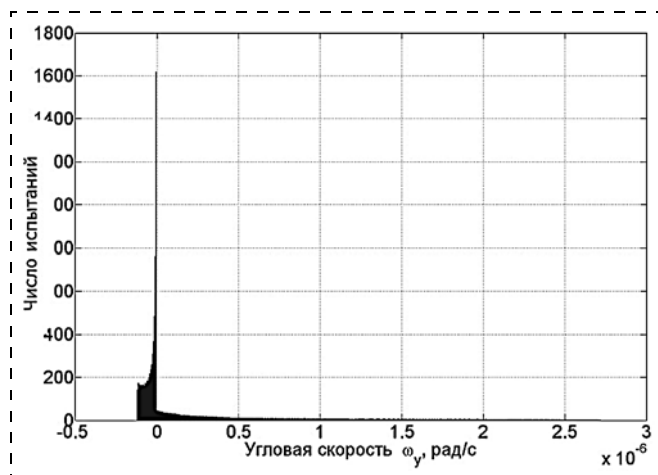


Рис. 8. Распределение значений угловой скорости по оси  $OY$  на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения времени)

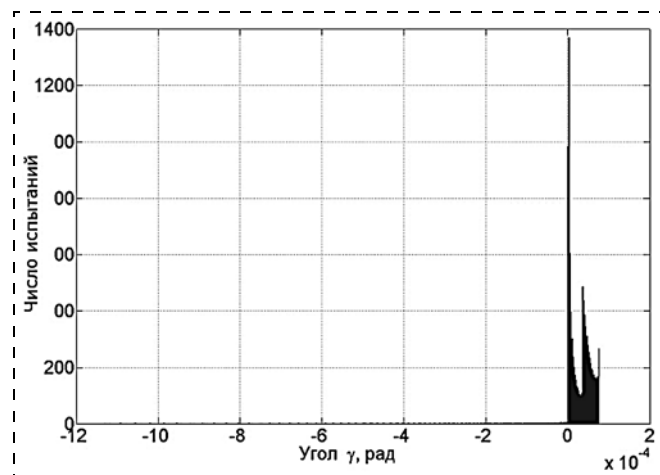


Рис. 10. Распределение значений углов крена на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения углов)



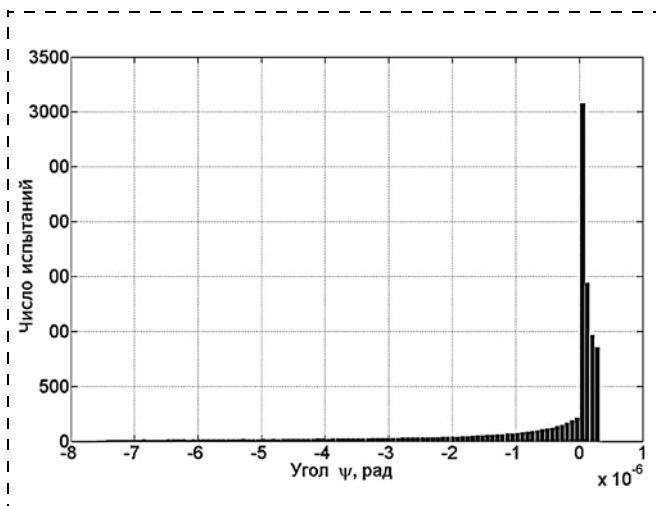


Рис. 11. Распределение значений углов рыскания на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения времени)

Как показали результаты моделирования, с использованием предложенных алгоритмов построение терминальной ориентации КА в инерциальной системе координат успешно завершается за заданный временной интервал, при этом обеспечивается высокая точность управления.

### Заключение

В работе предложен алгоритм синтеза терминального управления построением инерциальной ориентации космического аппарата. Алгоритм основан на аналитическом решении задачи определения программных значений компонент вектора угловой скорости при пространственном развороте космического аппарата в инерциальной системе координат. Данное аналитическое решение получено с применением ранее предложенного авторами метода решения краевой задачи, основанного на идентификации параметров дискретной модели с использованием модального управления и стабилизации как программных значений компонент вектора управления, так и требуемого углового положения космического аппарата. Приведены результаты моделирования, демонстрирующие работоспособность предложенного подхода и высокую точность управления на момент окончания режима построения инерциальной ориентации.

### Список литературы

1. Голубев Ю. Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2013. № 39. 23 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprmt.asp?iv=2013-39>

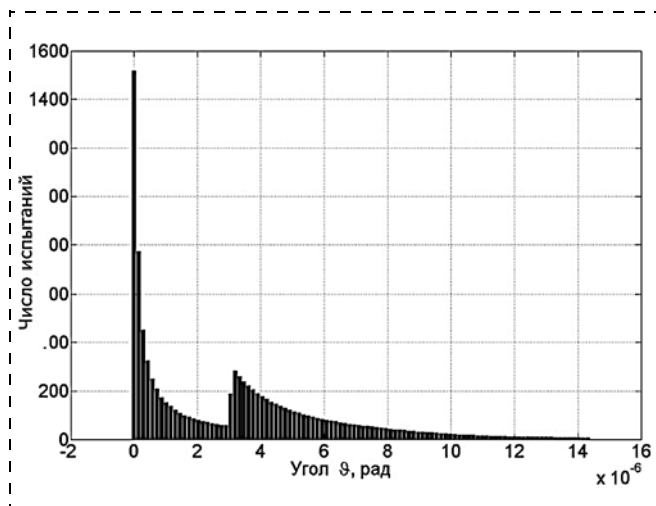


Рис. 12. Распределение значений углов тангажа на момент окончания процесса построения ориентации (случай изменения времени)

2. Zubov N. E. Оптимальное управление терминальной переориентации КА на основе алгоритма с прогнозирующей моделью // Космические исследования. 1991. Т. 29. № 3. С. 340—350.

3. **Справочник** по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 712 с.

4. Воробьева Е. А., Zubov N. E., Микрин Е. А. и др. Синтез стабилизирующего управления космическим аппаратом на основе обобщенной формулы Аккермана // Изв. РАН. ТиСУ. 2011. № 1. С. 96—106.

5. Zubov N. E., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш. и др. Идентификация положения равновесной ориентации международной космической станции как задача матричного пополнения с устойчивостью // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 2. С. 130—144.

6. Zubov N. E., Микрин Е. А., Рябченко В. Н., Олейник А. С., Ефанов Д. Е. Оценка угловой скорости космического аппарата в режиме орбитальной стабилизации по результатам измерений датчика местной вертикали // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2014. № 5. С. 3—17.

7. Zubov N. E., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш., Рябченко В. Н. Синтез законов управления космическим аппаратом, обеспечивающих оптимальное размещение полюсов замкнутой системой управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 3. С. 98—111.

8. Zubov N. E., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш. и др. Применение алгоритма точного размещения полюсов при решении задач наблюдения и идентификации в процессе управления движением космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 1. С. 135—151.

9. Zubov N. E., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш. и др. Модификация метода точного размещения полюсов и его применение в задачах управления движением космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2013 г. № 2. С. 118—132.

10. Zubov N. E., Микрин Е. А., Мисриханов М. Ш., Олейник А. С., Рябченко В. Н. Терминальное релейно-импульсное управление линейными стационарными динамическими системами // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 3. С. 134—149.

# Terminal Inertial Attitude Control for a Spacecraft

**N. E. Zubov**<sup>1,2</sup>, nikolay.zubov@rsce.ru✉, **M. V. Li**<sup>2</sup>, marat.li@rsce.ru,  
**E. K. Li**<sup>1</sup>, elen.k.lee@student.bmstu.ru, **E. A. Mikrin**<sup>1,2</sup>, eugeny.mikrin@rsce.ru, **V. N. Ryabchenko**<sup>1,2</sup>,  
<sup>1</sup> Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russian Federation,  
<sup>2</sup> Energia Rocket and Space Corporation, Moscow Region, Korolev, 141070, Russian Federation

Corresponding author: **Zubov Nikolay E.**, D. Sc., Professor, Deputy and Scientific Director of the Research and Development Centre of Energia Corporation named after S. P. Korolev, Professor of the Automatic Control System Department of Moscow State Technical University named after N. E. Bauman, e-mail: nikolay.zubov@rsce.ru

Received on August 03, 2015

Accepted on August 17, 2015

This paper addresses a terminal control scheme for a basic attitude maneuver of a spacecraft, formation of an "inertial attitude" mode in the finite time bounds. The algorithm is based on determination of the angular velocity program values. This determination uses the analytical expressions obtained by means of the boundary solution proposed in the authors' previous works. The solution assumes discrete model parameters' identification by the modal control decomposition method in the observer synthesis. The further stabilization of the attitude and angular velocity parameters is necessary. The angular motion control process is described by the kinematic equations in Rodrigues-Hamilton parameters and Euler's dynamic equations. Analytical solution of the kinematic equations with the constant values of the angular velocity is used to determine the program values of the angular velocity. This allows us to obtain new values of the program angular velocity in every onboard computer cycle. These values ensure forming up of the inertial attitude for the given time. The next step is to calculate an appropriate momentum control values. Linearized Euler's equations are used to get the control values. Linearization is performed at every cycle of the onboard computer. It gives a high degree approximation to the nonlinear model of a spacecraft angular motion. All the synthesized control laws and observer feedback coefficient matrices have simple analytic forms and can be implemented on the onboard digital computer for a real-time execution to form-up the inertial attitude mode. Numerical examples are presented to demonstrate the successful work of the developed control algorithms for a wide variety of the initial conditions (initial attitude, maneuver time) in the inertial coordinate system.

**Keywords:** inertial attitude, mathematical model of spacecraft, finite-time control, synthesis of the angular velocity program values

**Acknowledgements:** The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 14-11-00046.

For citation:

Zubov N. E., Li M. V., Li E. K., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N. Terminal Inertial Attitude Control for a Spacecraft, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 1, pp. 57–66.

DOI: 10.17587/mau/17.57-66

## References

1. **Golubev Ju. F.** Algebra kvaternionov v kinematike tverdogo tela (Quaternion algebra in rigid body kinematics), *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha*, 2013, no. 39 (in Russian), available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-39> (date of accessed 20.07.2015).
2. **Zubov N. E.** Optimal'noe upravlenie terminal'noi pereorientatsii KA na osnove algoritma s prognoziruyushchei model'yu (Optimal control of spacecraft terminal orientation on the basis of an algorithm with a predicting model), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1991, vol. 29, no. 3, pp. 340–350 (in Russian).
3. **Aleksandrov A. G., Artem'ev V. M., Afanas'ev V. I., Ashimov A. A., Beloglazov I. I., Bukov V. N., Zemljakov S. N., Kazakevich V. V., Krasovskij A. A., Medvedev G. A., Rastrigip L. A., Rutkovskij V. Ju., Jusupov R. M., Jadykin I. B., Jakubovich. V. A.** *Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniya* (Automatic control theory reference book), Moscow, Science, 1987, 712 p. (in Russian).
4. **Zubov N. E., Vorob'eva E. A., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N., and Timakov S. N.** Sintez stabiliziruyushchego upravleniya kosmicheskim apparatom na osnove obobshchennoi formuly Akkermana (Synthesis of Stabilizing Spacecraft Control Based on Generalized Ackermann's Formula), *J. of Computer and Systems Sciences International*, 2011, vol. 50, pp. 93–103 (in Russian).
5. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N., Timakov S. N., and Cheremnykh E. A.** Identifikatsiya polozheniya ravnovesnoi orientatsii mezhdunarodnoi kosmicheskoi stantsii kak zadacha matrichnogo popolneniya s ustoychivost'yu (Identification of the Position of an Equilibrium Attitude of the International Space Station as a Problem of Stable Matrix Completion), *J. Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, pp. 291–305 (in Russian).
6. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N., Olejnik A. S., Efanov D. E.** Otsenka uglovoi skorosti kosmicheskogo apparata v rezhime orbital'noi stabilizatsii po rezul'tatam izmerenii datchika mestnoi vertikali (The Spacecraft Angular Velocity Estimation in the Orbital Stabilization Mode by The Results of the Local Vertical Sensor Measurements), *Vestnik MGTU im. N. Je. Baumana. Seriya "Priborostroenie"*, 2014, no. 5, pp. 3–17. (in Russian)
7. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N.** Sintez zakonov upravleniya kosmicheskim apparatom, obespechivayushchikh optimaVnoe razmeshchenie polyusov zamknutoi sistemoi upravleniya (Synthesis of Controls for a Spacecraft That Optimize the Pole Placement of the Closed Loop Control System), *J. Computer and Systems Sciences International*, 2012, vol. 51, pp. 431–444 (in Russian).
8. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N.** et al. *Primeneniya algoritma tochnogo razmeshcheniya polyusov pri reshenii zadach nablyudeniya i identifikatsii v protsesse upravleniya dvizheniem kosmicheskogo apparata* (The Use of an Adaptive Bandpass Filter as an Observer in the Control Loop of the International Space Station), *J. Computer and Systems Sciences International*. 2012, vol. 51, pp. 560–572 (in Russian).
9. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Ryabchenko V. N.** Modifikatsiya metoda tochnogo razmeshcheniya polyusov i ego primenenie v zadachakh upravleniya dvizheniem kosmicheskogo apparata (Modification the Exact Pole Placement Method and Its Application for the Control of Spacecraft Motion), *J. of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, pp. 279–292 (in Russian).
10. **Zubov N. E., Mikrin E. A., Misrikhanov M. Sh., Oleinik A. S., Ryabchenko V. N.** TerminaVnoe releino-impul'snoe upravlenie lineinymi statsionarnymi dinamicheskimi sistemami (Terminal bang-bang impulsive control of linear time invariant dynamic systems), *J. of Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, pp. 480–490 (in Russian).