

Ю. И. Мышляев, канд. техн. наук, доц., uimysh@mail.ru, Тар Яр Мьо, аспирант, brightxstar@gmail.com, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, Калужский филиал

Алгоритмы скоростного биградиента с модифицированной эталонной моделью в задаче управления вибрационным гироскопом¹

Рассматривается задача адаптивного управления одноосным вибрационным гироскопом с модифицированной моделью желаемой динамики механической подсистемы. В целях повышения астатизма системы и обеспечения гладкости управляющих сил по входам вводятся дополнительные интеграторы. Для системы с интеграторами методом скоростного биградиента синтезируется семейство гладких, релейных и комбинированных алгоритмов с настраиваемым многообразием. Рассмотрены схема синтеза алгоритмов, условия применимости, выполнен анализ устойчивости адаптивной системы управления, робастности и приводятся результаты моделирования системы.

Ключевые слова: метод скоростного биградиента, настраиваемый скользящий режим, одноосный вибрационный гироскоп, устойчивость, функция Ляпунова, робастность, модифицированная эталонная модель

Введение

В работе [1] приведены результаты синтеза системы управления одноосным вибрационным гироскопом с подсистемой приводов первого порядка. Синтез алгоритма управления осуществлялся методом скоростного биградиента (МСБГ). МСБГ [5] включает в себя три этапа: на первом этапе в условиях полной априорной информации об объекте синтезируется "идеальное" виртуальное управление конечным каскадом (механической подсистемы), обеспечивающее достижение цели управления при полной априорной информации. На втором этапе неизвестные параметры "идеального" виртуального управления заменяются настраиваемыми, и синтезируется алгоритм адаптации. На третьем этапе формируется многообразие пересечения гиперповерхностей в виде невязки между выходным сигналом входного каскада и виртуальным управлением, и синтезируется управление, обеспечивающее достижение пересечения многообразий гиперповерхностей.

Особенностью задачи управления вибрационным гироскопом является наличие эталонной модели колебаний чувствительного тела в форме линейной системы с двумя парами мнимых полюсов. В работе [1] виртуальное управление для механической подсистемы строилось в форме компенсации динамики модели ошибки слежения за траекторией эталонной модели и модальной обратной связи по ошибке и ее производной. Это обеспечивало устойчивость модели ошибки при движении системы по пересечению многообразий.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Калужской области (грант № 14-48-03115).

В данной работе предлагается подход к синтезу алгоритмов управления, основанный на использовании дополнительной модифицированной эталонной модели для ошибки слежения за траекторией эталонной модели. Модифицированная модель строится в виде линейной гурвицевой системы с входным воздействием, пропорциональным невязке между выходом входного каскада и виртуальным управлением. Целью модификации является улучшение идентифицирующих свойств и снижение энергетических затрат на управление за счет улучшения структурного соответствия модели ошибки и модифицированной эталонной модели не только на многообразии пересечений гиперповерхностей (невязка тождественно равна нулю), но и при движении вне этого многообразия. Заметим, что введение невязки в неустойчивую эталонную модель колебаний чувствительного тела или в виртуальный закон управления не позволяет достичь заданной цели.

Отметим также, что в отличие от многих работ [1, 4, 11] нами рассматривается более общая модель механической подсистемы, в которой масса чувствительного элемента считается неопределенной. При этом модифицированная эталонная модель имеет элемент самонастройки.

Постановка задачи

Математическая модель механической подсистемы одноосного вибрационного гироскопа S_1 в векторной форме с моделью приводов 1-го порядка S_2 (интеграторами) имеет вид

$$\begin{aligned} S_1: \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_b\mathbf{q} + 2\Omega\dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{B}\mathbf{u}; \\ S_2: \dot{\mathbf{u}} &= \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (1)$$

Синтез алгоритмов управления

Проведем синтез алгоритма управления методом скоростного биградиента [5].

Этап 1. Решим задачу управления конечным каскадом. Введем невязку между каналами входа выходного каскада и виртуальным управлением в форме

$$\sigma_i = u_i - u_i^{virt}, \quad i \in \{x, y\}, \quad (6)$$

где u_i^{virt} — синтезируемые в ходе 1-го и 2-го этапов виртуальные управления каналами конечного каскада.

В соответствии с моделью подсистемы S_1 и эталонной моделью (2) запишем модели ошибок по каналам в виде

$$\dot{\varepsilon}_i = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_i \\ -\theta_*^T \mu_i + (\omega_i^*)^2 z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} u_i, \quad i \in \{x, y\}, \quad (7)$$

где $\mu_x = (\dot{x} \mid \dot{y} \mid 0 \mid -2\dot{y} \mid x \mid y \mid 0)^T$; $\mu_y = (0 \mid \dot{x} \mid \dot{y} \mid 2\dot{x} \mid 0 \mid x \mid y)^T$, $z_x \triangleq x_m$, $z_y \triangleq y_m$.

Введем желаемую динамику стабилизации положений $\varepsilon_i = 0$ в виде дополнительной модифицированной эталонной модели конечного каскада:

$$\dot{\varepsilon}_{\varepsilon i} = \mathbf{A}_{\varepsilon i} \varepsilon_{\varepsilon i} + \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i, \quad i \in \{x, y\}, \quad (8)$$

где $\mathbf{A}_{\varepsilon i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_{0i} & -\lambda_{1i} \end{pmatrix}$ — гурвицевы матрицы

($\lambda_{jx} > 0$, $\lambda_{jy} > 0$, $j = 0, 1$); \hat{m} — оценка массы m чувствительного элемента.

Введем векторы отклонений по ошибкам слежения $\mathbf{e}_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{\varepsilon i}$. Потребуем достижения ЦУ (3) с динамикой, заданной модифицированной эталонной моделью (8), таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\|\mathbf{e}_i\| \leq \Delta_{\varepsilon_i}, \quad i \in \{x, y\}, \quad \Delta_{\varepsilon_i} > 0 \quad \text{при } t \geq t_*. \quad (9)$$

Замечание 1. При ограниченности σ_i , \hat{m}^{-1} ($\|\sigma_i\| \leq C_1$, $\hat{m}^{-1} \leq C_2$), в силу BIBO-устойчивости (по входу-выходу) модифицированной модели (8) следует, что $\|\varepsilon_{\varepsilon i}\| \leq \Delta_{\varepsilon_i}$ при $t \geq t_*$ и некотором $\Delta_{\varepsilon_i}(C_1, C_2) > 0$. Из неравенства треугольника имеем $\|\varepsilon_i\| \leq \|\mathbf{e}_i\| + \|\varepsilon_{\varepsilon i}\|$ и, следовательно, $\|\varepsilon_i\| \leq \|\mathbf{e}_i\| + \|\varepsilon_{\varepsilon i}\| \leq \Delta_{\varepsilon_i} + \Delta_{\varepsilon_i}$ при $t \geq t_*$.

Условие (3) выполняется, если $\Delta_{\varepsilon_i} + \Delta_{\varepsilon_i} \leq \Delta_{\varepsilon_i}$, $i \in \{x, y\}$. Очевидно, что при ограниченности \hat{m}^{-1} и движении замкнутой системы на пересечении многообразий $\sigma_i \equiv 0$ при $t \geq t_*$ и (или) выполнении условия $\mathbf{e}_i \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ также можно добиться выполнения условия (3) соответствующим выбором

где $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = m^{-1} \mathbf{I}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z \\ \Omega_z & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{xy} & d_{yy} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}_b = \begin{pmatrix} \omega_x^2 & \omega_{xy} \\ \omega_{xy} & \omega_y^2 \end{pmatrix};$$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k_{xx}}{m}}, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{k_{yy}}{m}}, \quad \omega_{xy} = \frac{k_{xy}}{m}; \quad d_{xx} = m^{-1} d_{xx}^*,$$

$$d_{xy} = m^{-1} d_{xy}^*, \quad d_{yy} = m^{-1} d_{yy}^*; \quad \mathbf{I} — \text{единичная матрица;}$$

x, y — перемещение массы чувствительного тела вдоль ортогональных осей Bx, By ; m — масса чувствительного элемента; k_{xx}, k_{xy}, k_{yy} — коэффициенты упругости подвеса; $d_{xx}^*, d_{xy}^*, d_{yy}^*$ — коэффициенты демпфирования подвеса; Ω_z — угловая скорость вращения основания вибрационного гироскопа; \mathbf{v} — вектор управляющих воздействий; $\boldsymbol{\eta} = (\eta_x \ \eta_y)^T$ — вектор возмущения.

Предполагается, что $\boldsymbol{\theta}_* = (d_{xx} \ d_{xy} \ d_{yy} \ \Omega_z \ \omega_x^2 \ \omega_{xy} \ \omega_y^2)^T \in \Xi$ — вектор неизвестных параметров объекта управления; m — неизвестная масса; вектор возмущения ограничен так, что $\|\boldsymbol{\eta}(t)\| \leq C_{\eta}$, $\forall t \geq 0$.

Желаемые автоколебания для подсистемы S_1 с частотами ω_x^* , ω_y^* соответственно вдоль осей Bx и By зададим с помощью явной эталонной модели механической подсистемы гироскопа:

$$\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_m \mathbf{q}_m = 0, \quad \mathbf{q}_m(0) \neq 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{q}_m = (x_m \ y_m)^T$, $\mathbf{q}_m(0)$ — вектор желаемых амплитуд; $\mathbf{K}_m = \text{diag}\{(\omega_x^*)^2 \ (\omega_y^*)^2\}$.

Выходной каскад S_1 представляет собой двухканальную систему с перекрестными связями, поэтому сформулируем цель управления (ЦУ) для каждого каскада в виде требований ограниченности траекторий замкнутой системы и достижения целевых неравенств вида

$$\|\varepsilon_i\| \leq \Delta_{\varepsilon_i}, \quad i \in \{x, y\} \quad \text{при } t \geq t_*, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_x^T = (\varepsilon_x \ \dot{\varepsilon}_x) = (x - x_m \mid \dot{x} - \dot{x}_m)$; $\boldsymbol{\varepsilon}_y^T = (\varepsilon_y \ \dot{\varepsilon}_y) = (y - y_m \mid \dot{y} - \dot{y}_m)$; $\Delta_{\varepsilon_i} > 0$ — требуемая точность; t_* — время достижения ЦУ.

Требуется синтезировать адаптивную систему управления, обеспечив ограниченность траекторий системы, достижение цели управления (ЦУ) (3) в условиях параметрической неопределенности и идентификацию параметров гироскопа:

$$\boldsymbol{\theta} \rightarrow \boldsymbol{\theta}_* \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$\hat{m} \rightarrow m \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\theta}$ — оценки вектора параметров подсистемы S_1 ; \hat{m} — оценка массы.

быстродействия модифицированной эталонной модели (8).

В соответствии с условием (9) сформируем целевое неравенство вида

$$Q(\mathbf{e}) \leq \Delta_{\mathbf{e}} \text{ при } t \geq t_*, \quad (10)$$

где $Q(\mathbf{e}) = 0,5(\mathbf{e}_x^T \mathbf{H}_x \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{H}_y \mathbf{e}_y)$ — целевой функционал; $\mathbf{e}^T = (\mathbf{e}_x^T \ \mathbf{e}_y^T)$; $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^T > 0, i \in \{x, y\}$; $\Delta_{\mathbf{e}} > 0$ — точность, согласованная с $\Delta_{\mathbf{e}_i}$ и матрицами \mathbf{H}_i . С учетом (6)—(8) уравнение отклонений по ошибке слежения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_i &= \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_i \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + \omega_i^{*2} z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} u_i^{virt} - \\ &- \mathbf{A}_{\varepsilon i} \boldsymbol{\varepsilon}_{\varepsilon i} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} - \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i, \quad i \in \{x, y\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим задачу достижения целевого условия (10) при полной априорной информации о параметрах подсистемы S_1 и гипотетической возможности непосредственного управления выходным каскадом. Введем в рассмотрение $\mathbf{u}_*^{virt} = (u_{x*}^{virt} \ u_{y*}^{virt})^T$ — "идеальное" виртуальное управление, подчеркивая его зависимость от параметров выходного каскада S_1 . Выберем $\hat{m} = m$ и u_{i*}^{virt} в форме алгоритмов модального управления с компенсацией

$$u_{i*}^{virt} = m(\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i), \quad (12)$$

где $v_x = -\omega_x^{*2} x_m - \lambda_{0x} \varepsilon_x - \lambda_{1x} \dot{\varepsilon}_x$,

$v_y = -\omega_y^{*2} y_m - \lambda_{0y} \varepsilon_y - \lambda_{1y} \dot{\varepsilon}_y$.

Вычислим производную по времени $\omega(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}_*, m)$ от целевого функционала $Q(\mathbf{e})$ при $u_i^{virt} = u_{i*}^{virt}$, $\hat{m} = m$. Имеем

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}_*, m) &= \mathbf{e}_x^T \mathbf{H}_x \dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{H}_y \dot{\mathbf{e}}_y = \\ &= \mathbf{e}_x^T \mathbf{A}_{\varepsilon x} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y^T \mathbf{A}_{\varepsilon y} \mathbf{e}_y \leq \\ &\leq -\rho_x 0,5 \mathbf{e}_x^T \mathbf{H}_x \mathbf{e}_x - \rho_y 0,5 \mathbf{e}_y^T \mathbf{H}_y \mathbf{e}_y \leq -\rho Q(\mathbf{e}), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mathbf{A}_{\varepsilon x}$, $\mathbf{A}_{\varepsilon y}$ — гурвицевы матрицы, $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_i^T > 0$, удовлетворяющие уравнениям Ляпунова

$$\mathbf{H}_i \mathbf{A}_{\varepsilon i} + \mathbf{A}_{\varepsilon i}^T \mathbf{H}_i = -\mathbf{G}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{G}_i^T > 0, \quad i \in \{x, y\}; \quad (14)$$

$$\rho_i = \lambda_{\min}(\mathbf{G}_i) / \lambda_{\max}(\mathbf{H}_i), \quad \rho = \min\{\rho_x, \rho_y\} > 0.$$

Следовательно, $Q(\mathbf{e}(t)) \leq Q(\mathbf{e}(0)) \exp(-\rho t)$, $Q(\mathbf{e}(t)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, и, в силу квадратичной формы $Q(\mathbf{e})$, получаем $\mathbf{e} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, при $u_i^{virt} = u_{i*}^{virt}$, $\hat{m} = m$ и любом отклонении траектории системы от многообразия $\boldsymbol{\sigma} \equiv 0$ ЦУ (10) достигается.

Этан 2. Заменим в соотношении (12) неизвестные параметры $\boldsymbol{\theta}_*$ настраиваемыми $\boldsymbol{\theta}$, а также m на \hat{m} . Получим виртуальные управления вида

$$u_i^{virt} = \hat{m}(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i). \quad (15)$$

Вычислим $\omega(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m})$ — скорость изменения по времени целевого функционала $Q(\mathbf{e})$ (от слагаемых $Q_i \triangleq 0,5 \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i, i \in \{x, y\}$ при $u_i = \sigma_i + u_i^{virt}$, где u_i^{virt} определяются из равенств (15))

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_i \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + (\omega_i^*)^2 z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} \hat{m}(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) - \right. \\ &\left. - \mathbf{A}_{\varepsilon i} \boldsymbol{\varepsilon}_{\varepsilon i} + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} - \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Проведем дополнительные преобразования с учетом (12), (13):

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_i \\ -\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + (\omega_i^*)^2 z_i \end{pmatrix} - \mathbf{A}_{\varepsilon i} \boldsymbol{\varepsilon}_{\varepsilon i} + \right. \\ &\left. + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} (\hat{m}(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) \pm u_{i*}^{virt}) + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} - \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i \right] = \\ &= \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{A}_{\varepsilon i} \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} (\hat{m}(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) - u_{i*}^{virt}) + \right. \\ &\left. + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} - \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i \right] \leq -\rho_i 0,5 \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i + \\ &+ \mathbf{e}_i^T \mathbf{H}_i \left[\begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{pmatrix} (\hat{m}(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) - m(\boldsymbol{\theta}_*^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i)) \pm \right. \\ &\left. \pm m(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) + \begin{pmatrix} 0 \\ m^{-1} - \hat{m}^{-1} \end{pmatrix} \sigma_i \right] = \\ &= -\rho_i Q_i + \delta_i m^{-1} [(\hat{m} - m)(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) + \\ &+ m(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \boldsymbol{\mu}_i] + \delta_i \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \sigma_i, \end{aligned}$$

где $\delta_i = e_i h_{12}^i + \dot{\varepsilon}_i h_{22}^i$, $\mathbf{H}_i = (h_{ij}^i), i \in \{x, y\}; j, k = 1, 2$ — матрицы, удовлетворяющие уравнениям Ляпунова (14).

Окончательно с учетом равенства (6) получаем

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &\leq -\rho_i Q_i + \delta_i (m \hat{m})^{-1} (\hat{m} - m) [\hat{m}(\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i)] + \\ &+ \delta_i (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \boldsymbol{\mu}_i + \delta_i \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \sigma_i = \\ &= -\rho_i Q_i + \delta_i \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) u_i^{virt} + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \delta_i \boldsymbol{\mu}_i + \\ &+ \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) \delta_i \sigma_i = -\rho_i Q_i + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) (\delta_i (u_i^{virt} + \sigma_i)) + \\ &+ (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \delta_i \boldsymbol{\mu}_i = -\rho_i Q_i + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}} \right) (\delta_i u_i) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \delta_i \boldsymbol{\mu}_i. \end{aligned}$$

Таким образом, производная от целевой функции $Q(\mathbf{e})$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m}) \leq -\rho_x Q_x - \rho_y Q_y + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \{\delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y\} + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}}\right) \{\delta_x u_x + \delta_y u_y\}, \quad (17)$$

в которую $\boldsymbol{\theta}$, \hat{m}^{-1} входят линейно. Вычисляя градиенты функции $\omega(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m})$ по настраиваемым параметрам, получаем алгоритмы адаптации в дифференциальной форме:

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\Gamma \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \omega(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}) = -\Gamma (\delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y), \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{m}}^{-1} &= -\gamma \nabla_{\hat{m}^{-1}} \omega(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m}) = \gamma (\delta_x u_x + \delta_y u_y) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dot{\hat{m}} = -\gamma (\delta_x u_x + \delta_y u_y) \hat{m}^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$ — (7×7) -мерная матрица коэффициентов усиления (в частности $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_i, i = \overline{1, 7}\}$, $\gamma_i > 0$), $\gamma > 0$, $\hat{m}(0) > 0$.

Эман 3. Введем дополнительный целевой функционал (ЦФ), характеризующий отклонение траектории системы от пересечения многообразий:

$$R(\boldsymbol{\sigma}) = 0,5 \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\sigma}, \quad (20)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_x \sigma_y)$.

Вычислим скорость изменения ЦФ (20):

$$\dot{R}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) \triangleq \dot{R}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{virt}) = \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}), \quad (21)$$

где $\boldsymbol{\tau}^T = (\tau_1 \tau_2)$, $\tau_i = \hat{m} (\boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\mu}_i + v_i) + \hat{m} (\boldsymbol{\theta}^T \dot{\boldsymbol{\mu}}_i + \dot{v}_i)$.

Семейство алгоритмов, обеспечивающее достижение целевого неравенства

$$R(\boldsymbol{\sigma}) \leq \Delta_{\boldsymbol{\sigma}} \text{ при } t \geq t_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (22)$$

имеет вид [8, 9]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - \gamma_m \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}), \quad (23)$$

где \mathbf{v}_0 — априорное заданное управление, которое может быть равно нулю, вектор-функция $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) \in R^m$ удовлетворяет условию усиленной псевдоградиентности: $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma})^T \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) \geq \beta \|\nabla_{\mathbf{v}} \mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})\|^\delta$, где $\beta > 0$, $\delta = 1, 2, \dots$ — некоторые числа, $\nabla_{\mathbf{v}} \mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma}$ — градиент по управлению \mathbf{v} .

Условию усиленной псевдоградиентности удовлетворяют, например, функции

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = \Gamma_m \text{sign} \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) \text{ при } \delta = 1, \beta = \frac{\lambda_{\min}(\Gamma_m)}{\sqrt{2}};$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = \Gamma_m \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) \text{ при } \delta = 2, \beta = \lambda_{\min}(\Gamma_m),$$

где $\Gamma_m = \Gamma_m^T > 0$ — (2×2) -мерной матрицы усилителя; $\lambda_{\min}(\Gamma_m)$ — минимальное собственное значение Γ_m .

При $\mathbf{v}_0 = 0$, $\Gamma_m = \gamma_m \mathbf{I}$ получаем гладкие и релейные алгоритмы вида

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \text{sign} \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = -\gamma_m \text{sign} \boldsymbol{\sigma}; \quad (24)$$

$$\mathbf{v} = -\gamma_m \nabla_{\mathbf{v}} \mu(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = -\gamma_m \boldsymbol{\sigma}. \quad (25)$$

Заметим, что алгоритм (24) относится к классу систем с настраиваемым скользящим режимом [6, 7].

Возвращаясь к исходному входному воздействию (силам), имеем

$$\mathbf{u}(t) = -\gamma_m \int_0^t \text{sign} \boldsymbol{\sigma}(\tau) d\tau,$$

$$\mathbf{u}(t) = -\gamma_m \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\tau) d\tau.$$

Структурная схема замкнутой системы представлена на рис. 1.

Теорема. Для системы (1), (2), (6), (8), (15), (18), (19), (23) справедливы утверждения:

1. При $\delta = 1$ существует $\bar{\gamma}_1 > 0$ такое, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_1$ цели управления (10), (22) достигаются при любых $\Delta_e > 0$, $\Delta_{\boldsymbol{\sigma}} > 0$, все траектории системы ограничены, $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$ ($\mathbf{e} \rightarrow 0$) при $t \rightarrow \infty$. Существует момент времени t^* такой, что $R(\boldsymbol{\sigma}) \equiv 0$ ($\boldsymbol{\sigma} \equiv 0$) при $t \geq t^*$.

2. При $\delta > 1$ для любого $\Delta = \min\{\Delta_e, \Delta_{\boldsymbol{\sigma}}\} > 0$ существуют $\bar{\gamma}_2(\Delta) > 0$ такое, что при $\gamma_m > \bar{\gamma}_2$ цели управления (10), (22) достигаются при любых $\Delta_e > 0$, $\Delta_{\boldsymbol{\sigma}} > 0$, все траектории системы ограничены. При $\gamma_m \rightarrow \infty$ справедливо: $R(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0$, $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

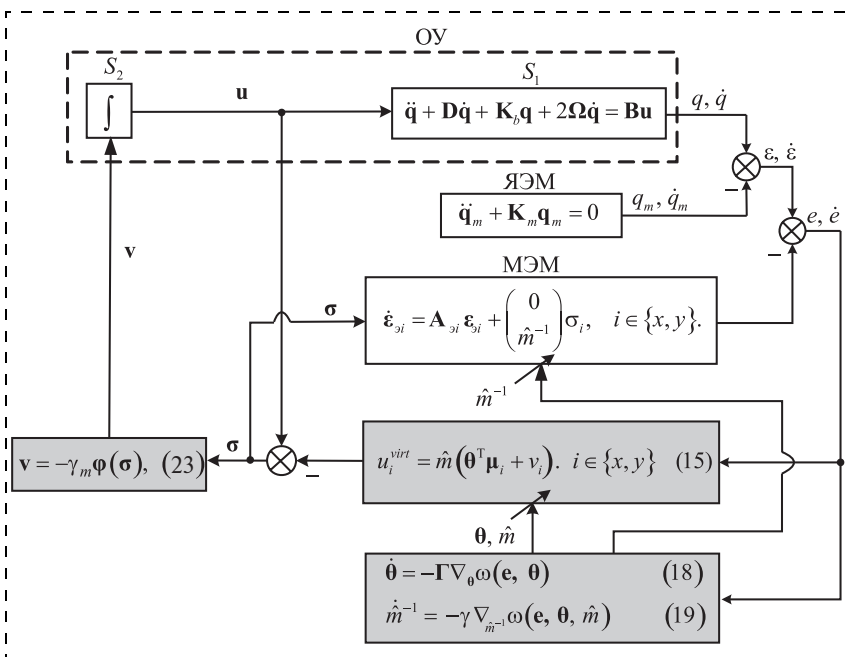


Рис. 1. Замкнутая адаптивная система управления

3. Существует функция Ляпунова вида

$$V(\mathbf{e}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m}) = Q(\mathbf{e}) + R(\boldsymbol{\sigma}) + 0,5\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + 0,5\gamma^{-1}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}}\right)^2, \quad (26)$$

где $\Gamma = \Gamma^T > 0$, $\gamma > 0$.

Достижение в силу теоремы целей управления (10), (22) с учетом замечания 1 означает достижения в замкнутой системе цели управления (3) при соответствующем выборе параметров ($\lambda_{jx} > 0$, $\lambda_{jy} > 0$, $j = 0, 1$) эталонной модели (8).

Доказательство теоремы. Определим производную по времени от функции Ляпунова (26) с учетом равенства (17), (21):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \omega(\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m}) + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \Gamma^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \\ &- \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}}\right) \gamma^{-1} \dot{\hat{m}}^{-1} + \boldsymbol{\sigma}^T (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}^{virt}) \leq \\ &\leq -\rho_x Q_x - \rho_y Q_y + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \{\delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y\} + \\ &+ \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}}\right) \{\delta_x u_x + \delta_y u_y\} + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \Gamma^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}} - \\ &- \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}}\right) \gamma^{-1} \dot{\hat{m}}^{-1} + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}) = \\ &= -\rho Q + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*)^T \{\delta_x \boldsymbol{\mu}_x + \delta_y \boldsymbol{\mu}_y + \Gamma^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}}\} + \\ &+ \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}}\right) \{\delta_x u_x + \delta_y u_y - \gamma^{-1} \dot{\hat{m}}^{-1}\} + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}). \end{aligned}$$

В силу алгоритмов адаптации (18), (19) получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\mathbf{e}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}) + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}. \quad (27)$$

Подставляя управление \mathbf{v} (23) в (27), получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\mathbf{e}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau} + \mathbf{v}_0) - \gamma_m \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\sigma}).$$

Положим $\mathbf{v}_* = -\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\tau} - 0,5\rho_R \boldsymbol{\sigma}$, где $\rho_R > 0$. Тогда с учетом условия усиленной псевдоградиентности имеем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*) - \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta, \quad \beta > 0, \delta = 1, 2, \dots \quad (28)$$

Рассмотрим два случая: $\delta = 1$ и $\delta > 1$.

Пусть $\delta = 1$. С учетом равенства $\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{2} \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})}$ (28) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*) - \gamma_0 \|\boldsymbol{\sigma}\| \leq \\ &\leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\gamma_m \beta = \gamma_1 \beta + \gamma_0$; $\gamma_0 > 0$; $\tilde{\gamma}_0 = \sqrt{2} \gamma_0 > 0$; γ_1 удовлетворяет равенству $\gamma_1 \beta = \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*\|$.

Интегрируя неравенство (29), получаем, что при любых ограниченных начальных условиях справедливо неравенство

$$\int_0^\infty \{-\rho Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})}\} dt \leq V(0) < \infty. \quad (30)$$

Докажем ограниченность траекторий замкнутой системы и равномерную ограниченность подынтегральной функции (30). Из неравенства (30) следует ограниченность $\mathbf{e}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m}^{-1}$. Из ограниченности траекторий эталонной модели $\mathbf{q}_m = (x_m \ y_m)^T$, $\dot{\mathbf{q}}_m, \boldsymbol{\varepsilon}_\varepsilon$ и $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\varepsilon$ следуют ограниченность $\mathbf{q} = (x \ y)^T$, $\dot{\mathbf{q}}$. Из ограниченности $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\theta}$ и \hat{m} (при $\hat{m}(0) > 0$) в силу соотношения (15) следует ограниченность u_i^{virt} . Из ограниченности u_i^{virt} и σ_i в силу формулы (6) следует ограниченность u_x, u_y . Тогда из ограниченности правой части системы (11) следует ограниченность $\dot{\mathbf{e}}$.

Из ограниченности $\dot{\mathbf{e}}$, с учетом ограниченности $\ddot{\mathbf{q}}_m$, следует ограниченность $\ddot{\mathbf{q}}$. Из анализа правой части уравнений (18), (19) следует ограниченность $\dot{\boldsymbol{\theta}}, \dot{\hat{m}}$. Из ограниченности $\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m, \boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}, \hat{m}, \dot{\hat{m}}$ следует ограниченность $\boldsymbol{\tau}$. Из ограниченности $\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}$ и $\|\boldsymbol{\eta}(t)\| \leq C_\eta$ следует ограниченность $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\tau}$.

Ограниченность $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\dot{\mathbf{e}}$ приводит к равномерной непрерывности $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и $\mathbf{e}(t)$ соответственно. Следовательно, подынтегральная функция в неравенстве (30) равномерно непрерывна. Тогда из леммы Барбалата [10] следует $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0, R(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Из квадратичного вида $Q(\mathbf{e})$ и $R(\boldsymbol{\sigma})$ следует $\mathbf{e}(t) \rightarrow 0, \boldsymbol{\sigma}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Из неравенства (29) вытекает возможность более быстрой сходимости $R(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0$ по отношению к $Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$. Рассмотрим вопрос о сходимости к пересечению гиперповерхностей $\boldsymbol{\sigma} \equiv 0$ более подробно. Вновь вернемся к равенству (21). При выбранном в неравенстве (29) коэффициенте усиления $\gamma_m \beta$ получаем

$$\dot{R} \leq -\rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) - \tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})} \leq -\tilde{\gamma}_0 \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma})}.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем

$\sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}(t))} \leq \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}(0))} - \frac{\tilde{\gamma}_0}{2} t$. В левой части неравенства — неотрицательная функция, в правой части — линейно убывающая функция, следовательно, существует момент времени t^* такой, что $R(\boldsymbol{\sigma}(t^*)) = 0$,

и справедлива оценка $t^* \leq \frac{2}{\tilde{\gamma}_0} \sqrt{R(\boldsymbol{\sigma}(0))}$. Таким образом, в замкнутой системе возникает настраиваемый скользящий режим и $\boldsymbol{\sigma}(t) \equiv 0$ при $t \geq t^*$. При этом в скользящем режиме справедливы оценки

$$Q(\mathbf{e}(t)) \leq Q(\mathbf{e}(t^*)) - \int_{t^*}^t \rho Q dt \text{ и } \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^{virt}(t) \text{ при } t \geq t^*.$$

Для случая $\delta = 1$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $\delta = 2$. Из неравенства (28) получаем

$$\dot{V} \leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \rho_R R(\boldsymbol{\sigma}) + d \|\boldsymbol{\sigma}\| - \gamma_m \beta \|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta, \quad (31)$$

где $d \triangleq \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_*\|$.

Для фиксированного Δ :

$$0 < \Delta < V_0 = Q(\mathbf{e}(0)) + R(\boldsymbol{\sigma}(0)) + \\ + 0,5\|\boldsymbol{\theta}(\mathbf{0}) - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + 0,5\gamma^{-1}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}}\right)^2$$

положим

$$\bar{\rho}_1(\Delta) = \inf_{Q(\mathbf{e}) > \Delta} \rho Q(\mathbf{e}), \\ \bar{\rho}_2(\Delta) = \inf_{R(\boldsymbol{\sigma}) > \Delta} \rho R(\boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{d} = \sup_{\Omega_0} d,$$

где

$$\Omega_0 = \cup((\mathbf{e}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}): Q(\mathbf{e}) + R(\boldsymbol{\sigma}) + \\ + 0,5\|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_*\|_{\Gamma^{-1}}^2 + 0,5\gamma_p^{-1}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{\hat{m}}\right)^2 \leq V_0).$$

Тогда из неравенства (31) получаем

$$\dot{V} \leq -\bar{\rho}_1(\Delta) - \bar{\rho}_2(\Delta) + \bar{d}\|\boldsymbol{\sigma}\| - \gamma_m\beta\|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta.$$

Максимизируя последние два слагаемых по $\|\boldsymbol{\sigma}\|$, получаем

$$\max_{\|\boldsymbol{\sigma}\|} (\bar{d}\|\boldsymbol{\sigma}\| - \gamma_m\beta\|\boldsymbol{\sigma}\|^\delta): \bar{d} - \delta\gamma_m\beta\|\boldsymbol{\sigma}\|^{\delta-1} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|\boldsymbol{\sigma}\| = \left(\frac{\bar{d}}{\delta\gamma_m\beta}\right)^{\frac{1}{\delta-1}}.$$

Тогда

$$\dot{V} \leq -\bar{\rho}_1(\Delta) - \bar{\rho}_2(\Delta) + \bar{d} \frac{\delta-1}{\delta} \left(\frac{\bar{d}}{\delta\gamma_m\beta}\right)^{\frac{1}{\delta-1}}. \quad (32)$$

В силу неравенства (32) для достаточно большого γ_m существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$ такие, что при $\gamma_m > \gamma_2$ неравенство $\dot{V} \leq -\varepsilon_0$ будет выполняться, если будут выполняться неравенства

$$\Delta - \varepsilon_1 \leq Q + R \leq V_0, \quad (33)$$

где Q, R — значения функционалов в момент времени t .

Левая часть неравенства (33) не может выполняться в течение времени, большего, чем V_0/ε_0 . Неравенство $Q + R \leq V_0$ не может нарушиться, так как $V \leq V_0$.

Поэтому существует такой момент времени $\tau > 0$, что

$$Q + R \leq \Delta - \varepsilon_1 \quad (34)$$

и, следовательно, при любом $t > \tau$ множество $G_t = \{s: s < t, Q + R \leq \Delta - \varepsilon_1\}$ непустое. Выберем $\tau_t = \sup G_t$. Функции $\rho Q > 0, \rho R > 0$ при любых $Q \neq 0, R \neq 0$, следовательно, $\bar{\rho}_1(\Delta) > 0, \bar{\rho}_2(\Delta) > 0$ при любом $\Delta > 0$. Выберем $\Delta = \min\{\Delta_e, \Delta_\sigma\}$. В силу (34) $Q(\mathbf{e}) \leq \Delta - \varepsilon_1 < \Delta_e, R(\boldsymbol{\sigma}) \leq \Delta - \varepsilon_1 < \Delta_\sigma$ при любом $t > \tau_t$. Заметим, что из соотношения (32) следует, что при $\gamma_m \rightarrow \infty$ послед-

ние два слагаемые правой части неравенства (31) стремятся к нулю и, как следствие, $R(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0, Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$ ($\boldsymbol{\sigma} \rightarrow 0, \mathbf{e} \rightarrow 0$) при $t \rightarrow \infty$.

Наконец, ограниченность траекторий $\mathbf{e}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}, \hat{m}^{-1}, \boldsymbol{\sigma}$ вытекает из условия $\dot{V} \leq 0$ (на траекториях системы, где не выполняются целевые неравенства (10), (22)).

В предельном случае ($\gamma_m \rightarrow \infty$) из неравенства (31) следует $\dot{V} \leq -\rho Q(\mathbf{e}) - \rho R(\boldsymbol{\sigma})$ и, как следствие, ограниченность траектории системы и достижение целей управления $R(\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow 0, Q(\mathbf{e}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для случая $\delta > 1$ теорема доказана.

Идентифицирующие свойства

Анализ идентифицирующих свойств показывает, что θ_4 — оценка угловой скорости (Ω_z) и \hat{m} линейно связаны (не отделимы при идентификации). Поэтому предполагается следующий алгоритм решения задачи:

1. Проведение стендовых испытаний на оборудовании, имитирующем заданную угловую скорость вращения основания виброгироскопа Ω_z на этапе завершения технологического цикла изготовления вибрационного гироскопа. При этом следует:

- в алгоритме виртуального управления (15) положить $\theta_4 = \Omega_z$;
- отключить алгоритм адаптации по параметру θ_4 в алгоритме (18);

- оценить в процессе стендовых испытаний массу чувствительного элемента виброгироскопа (\hat{m}) и, при необходимости контроля технологического разброса параметров изготовления, оценить $\theta_i, i = 1, 7, i \neq 4$.

2. На этапе эксплуатации гироскопа, руководствуясь законом сохранения массы, использовать в алгоритме виртуального управления ранее полученную оценку массы (\hat{m}) с отключением алгоритма адаптации (19) и с включением алгоритма адаптации (18) (с настройкой $\theta_i, i = 1, 7$).

Результаты математического моделирования

В работах [2—4] отмечалось, что основное влияние на точность измерения скорости вращения оказывают перекрестные связи вибрационного гироскопа. Поэтому будем проводить идентификацию по параметрам $\theta_2, \theta_4, \theta_6$ (оценивание $d_{xy}, \Omega_z, \omega_{xy}$) и \hat{m} .

Параметры $d_{xx}, d_{yy}, \omega_x^2, \omega_y^2$ считаются известными.

Моделирование проводили при $x_m = 0,3\cos\omega_x^*t, y_m = 0,5\sin\omega_y^*t, \boldsymbol{\eta}^T = (0,8\sin(20(2\pi t)) \ 0,8\cos(20(2\pi t)))$.

Параметры моделирования приведены в таблице.

Параметры объекта управления

m	$\omega_x^* = \omega_y^*$	d_{xx}	d_{xy}	d_{yy}	ω_x	ω_{xy}	ω_y	Ω_z
10^{-8} кг	1 кГц	0,05	0,005	0,06	1,05	0,01	0,97	5

Результаты математического моделирования системы управления с модифицированной эталонной моделью (8) и релейным алгоритмом управления (24) получены при $\gamma_m = 6$, $\gamma_2 = 4,5$, $\gamma_4 = 8$, $\gamma_6 = 3$, $\gamma = 0,1$.

Результаты математического моделирования 1-го этапа идентификации ($\theta_4 = \Omega_z^*$) представлены

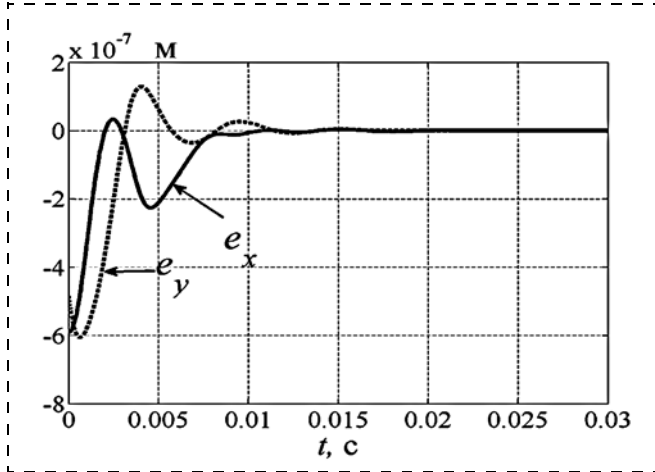


Рис. 2. Ошибки слежения с модифицированной эталонной моделью

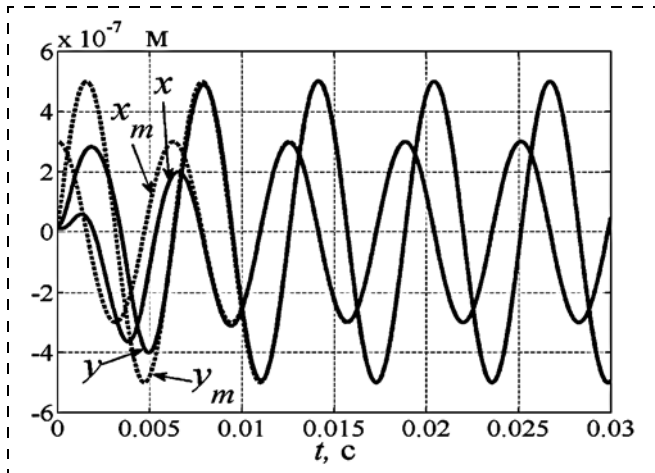


Рис. 3. Траектории объекта и эталонной модели

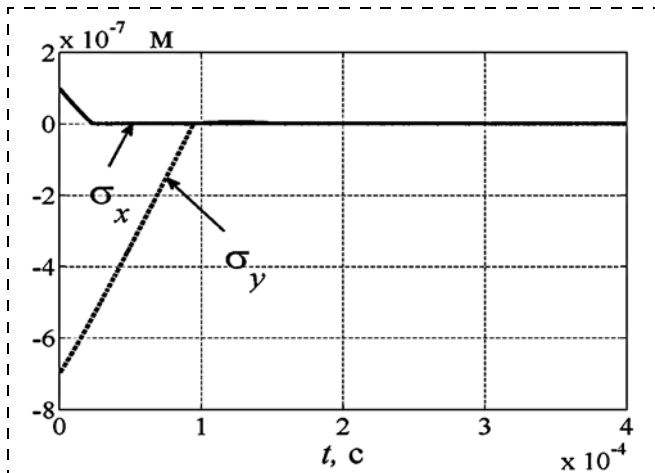


Рис. 4. Отклонения от многообразия скольжения

ны на рис. 2—8, где наблюдается хорошая сходимость траектории объекта управления к желаемым колебаниям чувствительного элемента, достаточно быстрый выход на многообразие скольжения, хорошие идентифицирующие свойства по \hat{m} , θ_2 , θ_6 .

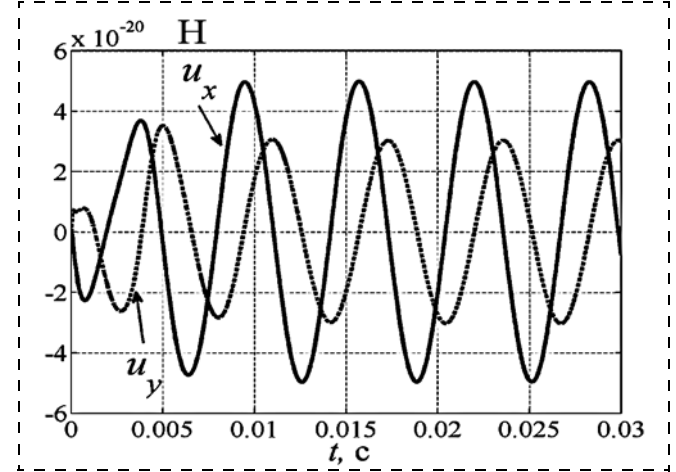


Рис 5. Входы выходного каскада

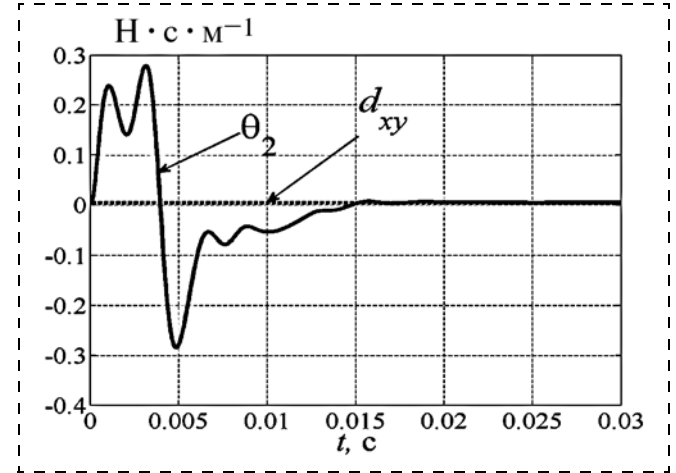


Рис. 6. Результаты идентификации параметра d_{xy}

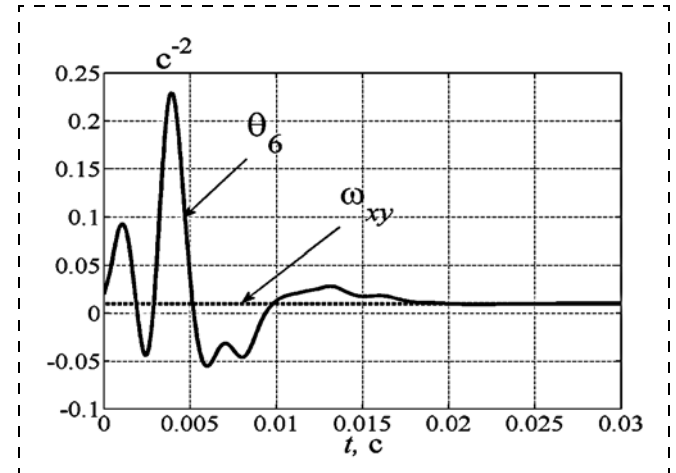


Рис. 7. Результаты идентификации параметра ω_{xy}

Результаты математического моделирования 2-го этапа идентификации ($\hat{m} = m$) представлены на рис. 9—15, где наблюдается хорошая сходимость траектории объекта управления к желаемым колебаниям чувствительного элемента, достаточно бы-

стрый выход на многообразие скольжения, хорошие идентифицирующие свойства по $\theta_2, \theta_4, \theta_6$.

По сравнению с алгоритмами адаптивного управления с эталонной моделью [1] алгоритмы с модифицированной эталонной моделью обеспечивают

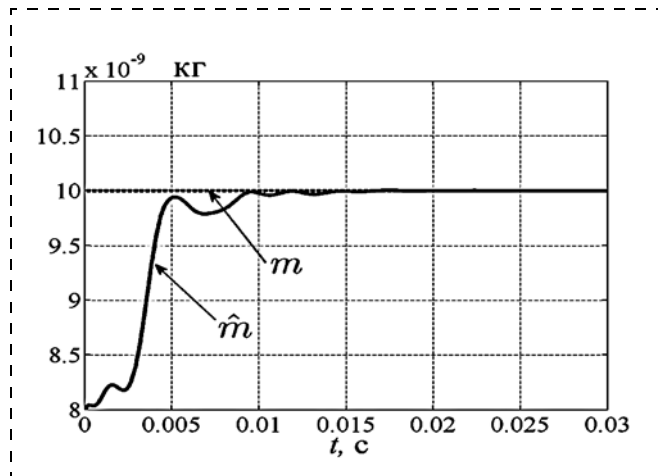


Рис. 8. Результаты идентификации параметра m

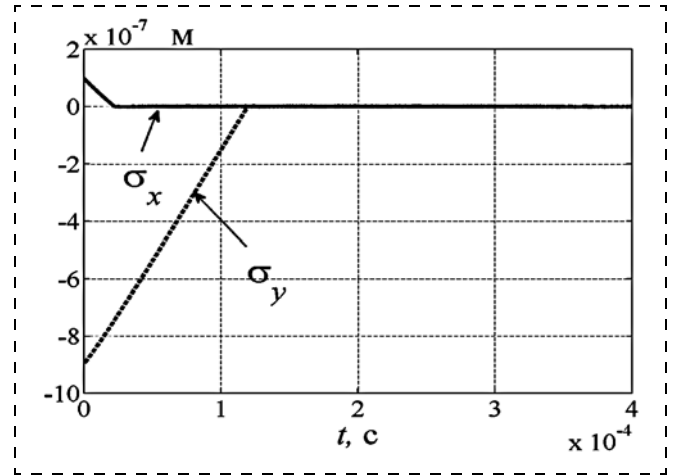


Рис. 11. Отклонения от многообразия скольжения

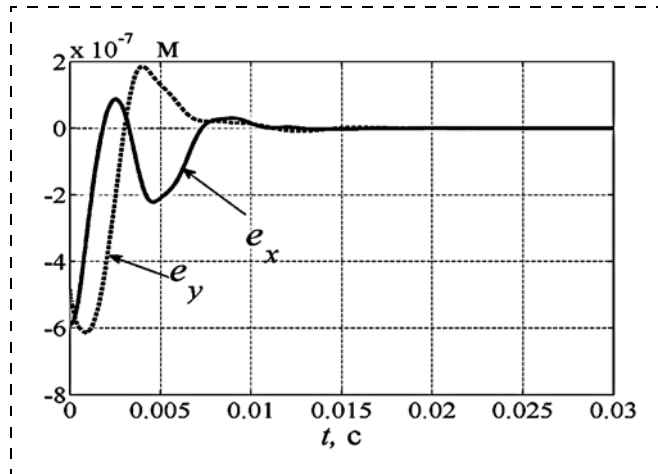


Рис. 9. Ошибки слежения с модифицированной эталонной моделью

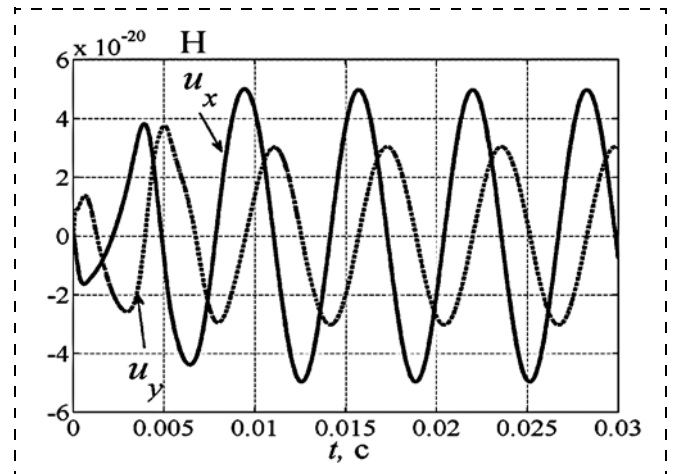


Рис. 12. Входы выходного каскада

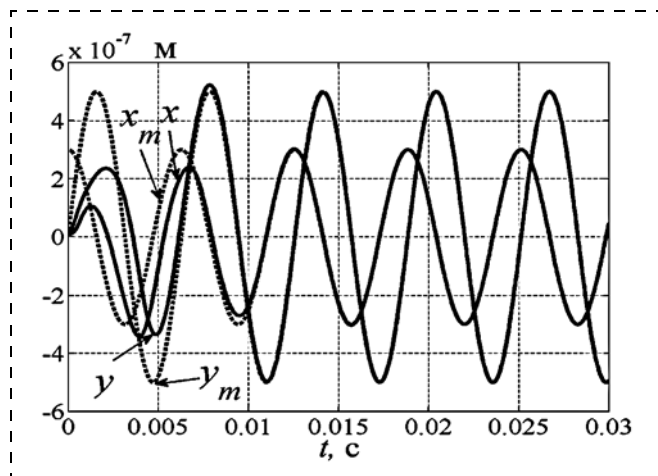


Рис. 10. Траектории объекта и эталонной модели

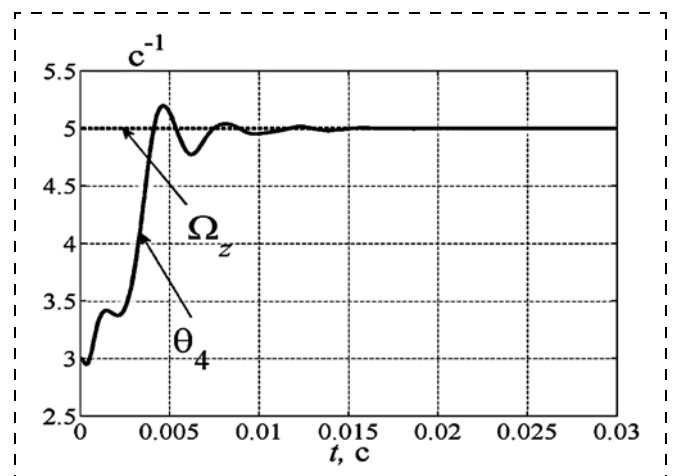


Рис. 13. Результаты идентификации угловой скорости Ω_z

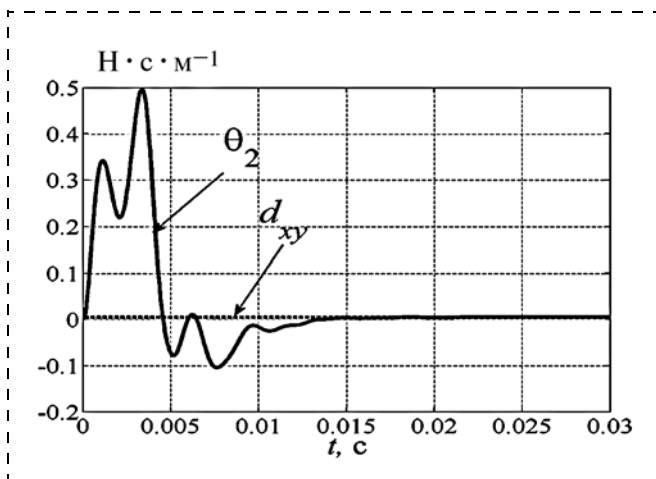


Рис. 14. Результаты идентификации параметра d_{xy}

сходные показатели качества движения чувствительного элемента и оценивания параметров при меньших коэффициентах усиления релейного управления (на 25 %) и коэффициентах усиления в алгоритме адаптации (18).

Заключение

В работе представлены результаты синтеза алгоритмов управления вибрационным гироскопом с модифицированной эталонной моделью. Анализ сходимости замкнутой системы показывает, что введение в эталонную модель слагаемого, пропорционального отклонению траектории системы от многообразия скольжения (невязки между входом механической подсистемы и адаптивным виртуальным управлением), позволяет снизить энергетические затраты на управление. Введение адаптации в модифицированную модель улучшает динамику идентификации неизвестных параметров вибрационного гироскопа и позволяет дополнительно оценивать массу чувствительного элемента.

Гладкий алгоритм адаптивного управления обеспечивает сколь угодно высокую точность по ошибке слежения за желаемой траекторией чувствительного элемента и предельное асимптотическое стремление к нулю при бесконечно большом коэффициенте усиления по каналам управления ($\gamma_m \rightarrow \infty$).

Релейный алгоритм адаптивного управления (настраиваемый скользящий режим) обеспечивает асимптотическое стремление ошибок к нулю при конечном коэффициенте усиления при релейных элементах по каналам управления. В основе синтеза гладкого и релейного алгоритма лежит единая функция Ляпунова. Поэтому алгоритмы легко комбинируются в виде их суммы или системы переменной структуры.

Одновременная оценка массы чувствительного элемента (\hat{m}) и скорости вращения основания гироскопа (θ_4) оказалась невозможной. Попытка улуч-

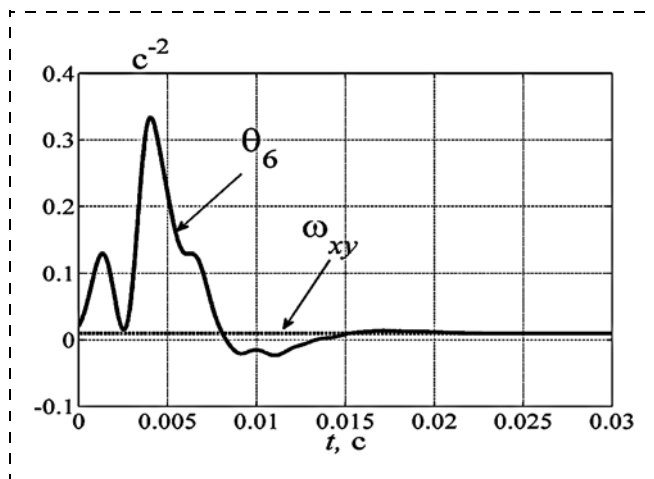


Рис. 15. Результаты идентификации параметра ω_{xy}

шения идентифицирующих свойств за счет обогащения спектра входного сигнала механической подсистемы и модифицированной модели не дала положительного эффекта. Поэтому в работе предложен вариант решения проблемы с предварительной оценкой массы чувствительного элемента на этапе заводских испытаний.

Список литературы

1. Мышляев Ю. И., Финошин А. В., Тар Яр Мьо. Метод скоростного биградиента в задаче управления вибрационным гироскопом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 11. С. 783–792.
2. Hameed S., Jagannathan. Adaptive force-balancing control of MEMS gyroscope with actuator limits // Proc. of the 2004 American Control Conference. 2004. Vol. 2. P. 1862–1867.
3. Fei J., Batur C. A novel adaptive sliding mode control for MEMS gyroscope // Proc. of 47th IEEE Conference on Decision and Control. 2007.
4. Мышляев Ю. И., Финошин А. В., Тар Яр Мьо. Адаптивное управление одноосным вибрационным гироскопом с интегратором // XII Всероссийское совещание по проблемам управления, Россия, Москва, ИПУ им. В. А. Трапезникова РАН, 16–19 июня 2014 г. С. 2246–2256.
5. Мышляев Ю. И. Метод бикоростного градиента // Известия ТулГУ. Технические науки. 2011. Вып. 5. Ч. 1. С. 168–178.
6. Мышляев Ю. И. Алгоритмы управления линейными объектами в условиях параметрической неопределенности на основе настраиваемого скользящего режима // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 2. С. 11–16.
7. Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V. Sliding mode with tuning surface in problem of synchronization of two-pendulum system motion // 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing. University of Caen Basse-Normandie, Caen, France, July 3–5, 2013. P. 221–226.
8. Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990.
9. Фрадков А. Л. Схема скоростного градиента в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. 1979. № 9. С. 90–101.
10. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000.
11. Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V., Tar Yar Myo. Sliding mode with tuning surface control for MEMS vibratory gyroscope // 6th Internat. Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), St. Petersburg, Russia, October 6–8, 2014. P. 360–365.

Speed Bigradient Algorithms with a Modified Reference Model in the Control Problem of a Vibratory Gyroscope

Yu. I. Myshlyayev, uimysh@mail.ru✉, Tar Yar Myo, brightxstar@gmail.com,
Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch, Kaluga, 248000, Russian Federation

Corresponding author: Myshlyayev Yury I., Ph. D., Associate Professor,
Bauman Moscow State Technical University, Kaluga Branch, Kaluga, 248000, Russian Federation,
e-mail: uimysh@mail.ru

Received on July 30, 2015

Accepted on August 07, 2015

The article is devoted to the task of adaptive control of a single-axis vibratory gyroscope with a modified reference model of the desired dynamics of the mechanical subsystem. In order to enhance the astaticism of the system and ensure smoothness of the controlling forces, additional integrators are connected to the gyroscope inputs. The smooth control algorithms and the algorithms of the sliding mode with a tuning surface for the system with integrator were designed by the speed bi-gradient method. Synthesis of the control algorithms based on employment of an additional modified reference model for the trajectory tracking error of the reference model was proposed. A modified model was selected in the form of a linear Hurwitz system with an input proportional to the discrepancy between the output of the input cascade and the virtual control of the gyroscope. The purposes of the modification were improvement of the identifying properties and reduction of the energy consumption for control. These goals were achieved by a structural correspondence of the model error and modified reference model not only on the intersections of the hypersurfaces (the discrepancy was identically equal to zero), but also outside of them. Note, that entry of a discrepancy either in the unstable reference model of oscillation or in a virtual control does not allow achievement of the specified goal. The design procedure, condition of the applicability, stability analysis of the adaptive control system and the robustness were presented. The theoretical results were proved by a closed-loop system simulation in MATLAB.

Keywords: high-speed bigradient method, tunable sliding mode, vibratory gyroscope, stability, Lyapunov function, robustness, modified reference model

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of Kaluga Region, project no. 14-48-03115.

For citation:

Myshlyayev Yu. I., Tar Yar Myo. Speed Bigradient Algorithms with a Modified Reference Model in the Control Problem of a Vibratory Gyroscope, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 17, no. 1, pp. 47–56.

DOI: 10.17587/mau/16.47-56

References

1. Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V., Tar Yar Myo. Metod skorostnogo bigradienta v zadache upravleniya vibratsionnym giroskopom (Speed bigradient method in the control problem of vibratory gyroscope), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 11, pp. 783–792 (in Russian).
2. Hameed S., Jagannathan. Adaptive force-balancing control of MEMS gyroscope with actuator limits, *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, 2004, vol. 2, pp. 1862–1867.
3. Fei J., Batur C. A novel adaptive sliding mode control for MEMS gyroscope, *Proceeding of 47th IEEE Conference on Decision and Control*, 2007.
4. Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V., Tar Yar Myo. Adaptivnoe upravlenie odnoosnym vibratsionnym giroskopom s integratorom (Adaptive control of a single-axis vibrating gyroscope with an integrator), *XII All-Russian Conference on Control Problems*, Russia, Moscow, Institute of Control of the VA Trapeznikova RAS, June 16–19, 2014. pp. 2246–2256 (in Russian).
5. Myshlyayev Y. I. Metod biskorostnogo gradienta (Speed bigradient method), *Proceedings of the TSU. Technical sciences*, 2011. vol. 5, part 1, pp. 168–178 (in Russian).
6. Myshlyayev Y. I. Algoritmy upravleniya lineinymi ob"ektami v usloviyakh parametriceskoi neopredelennosti na osnove nastraivaemogo skol'z'yashchego rezhima (Linear system control algorithms in the case of parameter variations by sliding mode with tuning surface), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2009, no. 2, pp. 11–16 (in Russian).
7. Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V. Sliding mode with tuning surface in problem of synchronization of two-pendulum system motion, *11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing*, University of Caen Basse-Normandie, Caen, France, July 3–5, 2013, pp. 221–226.
8. Fradkov A. L. Adaptivnoe upravlenie v slozhnykh sistemakh (Adaptive control in complex systems), Moscow, Nauka, 1990 (in Russian).
9. Fradkov A. L. Skhema skorostnogo gradienta v zadachakh adaptivnogo upravleniya (Speed-gradient scheme and its applications in adaptive control), *Automation and Remote Control*, 1979, 40 (9), pp. 1333–1342 (in Russian).
10. Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L. Nelineinoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinameshskimi sistemami (Nonlinear and adaptive control of complex dynamic systems), St. Petersburg, Nauka, 2000 (in Russian).
11. Myshlyayev Y. I., Finoshin A. V., Tar Yar Myo. Sliding mode with tuning surface control for MEMS vibratory gyroscope, *6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, St. Petersburg, Russia, October 6–8, 2014, pp. 360–365.