

А. С. Андреев, д-р физ.-мат. наук, проф., декан, AndreevAS@ulsu.ru,
О. А. Перегудова, д-р физ.-мат. наук, доц., проф., peregudovaoa@sv.ulsu.ru,
 Ульяновский государственный университет

Синтез робастных алгоритмов стабилизации программных движений мобильного робота с омни-колесами методом вектор-функций Ляпунова¹

Решена задача стабилизации нестационарного программного движения мобильного робота с четырьмя роликонесущими колесами и с неточно известной матрицей инерции при учете проскальзывания колес. На основе метода вектор-функций Ляпунова обоснованы разрывный и непрерывный законы управления, получены оценки области начальных отклонений и неизвестной части матрицы инерции.

Ключевые слова: колесный мобильный робот, управление, проскальзывание, стабилизация, программное движение, омни-колесо, вектор-функция Ляпунова, динамическая модель, система сравнения

Введение

В настоящее время вопросам, связанным с исследованием динамики мобильных колесных роботов и управлением их движением, уделяется много внимания в связи с развитием робототехники и автоматизации. Мобильные роботы, имеющие колеса всенаправленного типа, так называемые омни-колеса, имеют преимущество перед мобильными роботами с обычными типами колес. Высокая маневренность мобильного робота с такими колесами обеспечивается особенностями конструкции колес, на которых закреплены ролики с осями вращения, лежащими в плоскости колес. Благодаря наличию омни-колес возможно осуществлять движение робота в любом направлении без предварительного разворота. В работах [1–4] построены кинематические и динамические модели, описывающие движения робота с омни-колесами, рассмотрены задачи стабилизации стационарных движений. В работах [5, 6] исследованы вопросы управления для кинематических моделей робота. Законы управления, применяемые для динамических моделей, должны обеспечивать вывод робота на заданную траекторию и стабилизацию движения вдоль нее в условиях неполной информации о массоинерционных характеристиках системы и действия сил трения скольжения вдоль поверхности движения колес. В работах [7, 8] построена нелинейная модель четырехколесного мобильного робота с учетом действия сил сухого и вязкого трения, и предложен закон управления с прогнозирующими моделями. В работе [9] для решения задачи стабилизации программного движения четырехколесного робота

был получен закон управления для динамической модели с учетом трения скольжения на основе метода вычисляемого момента, называемого также методом линеаризации обратной связью. Такой закон управления содержит моменты всех сил, действующих на систему, слагаемое, представляющее собой произведение матрицы инерции системы на программное ускорение, и ПД регулятор, что позволяет получить линейную асимптотически устойчивую стационарную систему в отклонениях от программного движения. Отметим, что применение данного метода помимо громоздких вычислительных работ, проводимых в режиме реального времени, требует также полной информации о параметрах динамической модели системы.

Актуальными являются вопросы разработки методов и алгоритмов управления мобильными роботами с омни-колесами на основе динамических моделей с неизвестными массоинерционными характеристиками при учете действующих сил трения скольжения. Эти методы и алгоритмы должны быть робастными, т. е. должны обеспечивать решение задачи управления для целого класса динамических моделей робота, параметры которых удовлетворяют заданным ограничениям. В работе [10] на основе процедуры бэкстепинга с применением скалярной функции Ляпунова построен адаптивный закон управления, решающий задачу стабилизации программного движения робота с тремя омни-колесами с неизвестными массоинерционными параметрами и действующими силами трения скольжения. Отметим, что релейный закон управления, полученный в работе [10], имеет весьма сложную структуру и требует нахождения оценок неизвестных параметров в режиме он-лайн. Такой подход не оправдан из-за громоздкости и сложности алгоритмов по-

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

строения законов управления, если параметры системы известны с некоторой заданной погрешностью.

В настоящей работе построен релейный закон управления, обеспечивающий стабилизацию нестационарного программного движения мобильного робота с четырьмя роликонесущими колесами при условии, что действуют силы трения скольжения, и масса платформы известна неточно. Применение непрерывного закона управления с функцией насыщения позволило обосновать свойство предельной ограниченности решений системы в отклонениях от программного движения. На основе метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова получены ограничения на параметры системы и оценка области начальных отклонений, носящие робастный характер. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие теоретические расчеты.

1. Особенности динамики робота с омни-колесами

Рассмотрим модель робота с четырьмя омни-колесами, движущегося по горизонтальной поверхности под действием моментов, развиваемых четырьмя электродвигателями постоянного тока, установленными в осях колес (рис. 1). Как отмечено в работе [9], независимое управление вращением каждого из четырех колес приводит к тому, что неизбежно возникает трение скольжения вдоль поверхности движения колес, которое необходимо учитывать при построении динамической модели робота. При движении омни-колеса трение скольжения возникает как в направлении вдоль поверхности колеса, так и перпендикулярно ему, за счет проскальзывания роликов.

Уравнения движения робота с учетом трения скольжения имеют вид [9]

$$GT^{-1}\ddot{X}_t + ET^{-1}\dot{X}_t + m_0 \begin{pmatrix} -V_y \\ V_x \\ 0 \end{pmatrix} \omega = H^T U. \quad (1)$$

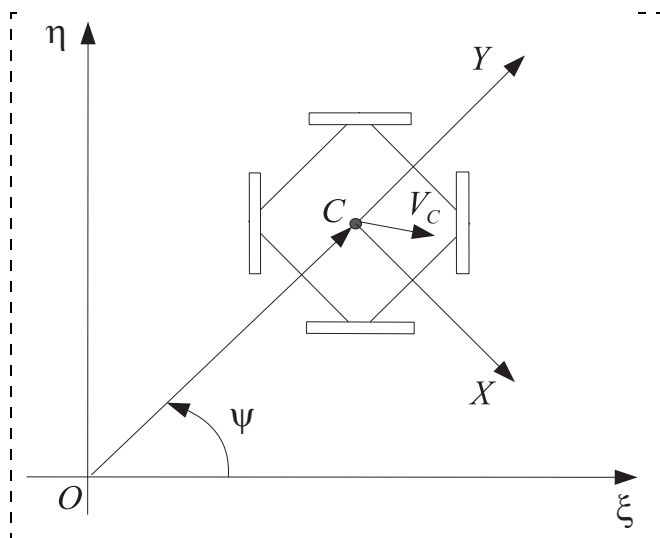


Рис. 1. Модель робота с четырьмя омни-колесами

Здесь $X_t = (\xi, \eta, \psi)^T$, ξ и η — координаты центра платформы робота в неподвижной декартовой системе координат $O\xi\eta\zeta$, ψ — угол поворота платформы вокруг вертикали, отсчитываемый от оси ξ ; V_x, V_y — проекции вектора скорости центра масс C робота на связанные с телом оси CX, CY соответственно; $\omega = \dot{\psi}$ — угловая скорость платформы; $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)^T$ — вектор управляющих напряжений, подаваемых на электродвигатели;

$$G = \frac{n^2 J_0}{R^2} HJ + A; \quad E = \frac{n^2 k_2 k_3}{R^2 R_a} HJ + \frac{n}{R} H(\mu_T H_T + \mu_F H_F);$$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ L & L & L & L \end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & L \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & L \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & L \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & L \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}; \quad H_T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & L \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & L \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & L \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & L \end{pmatrix};$$

$$H_F = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad T = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

m_0 — масса робота; I_z — момент инерции робота относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс; R — радиус колес; L — расстояние от центра масс робота до центра колеса; n — передаточное число; J_0 — суммарный момент инерции двигателя, коробки передач и колеса относительно оси ротора электродвигателя; R_a — сопротивление в цепи электродвигателя; k_2 — постоянная момента двигателя; k_3 — постоянная электродвижущей силы; μ_T — коэффициент трения скольжения, возникающего в направлении плоскости колеса; μ_F — коэффициент трения скольжения, возникающего в направлении, перпендикулярном плоскости колеса, за счет вращения роликов.

Уравнения (1) с неточно известными массоинерционными характеристиками можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} (m + \Delta m)\ddot{\xi} + h\dot{\xi} + \left(m_d\dot{\psi} - \frac{2n}{R}\mu_F\right)\dot{\eta} = \\ = \cos\psi u_1 - \sin\psi u_2; \\ (m + \Delta m)\ddot{\eta} + h\dot{\eta} - \left(m_d\dot{\psi} - \frac{2n}{R}\mu_F\right)\dot{\xi} = \\ = \sin\psi u_1 + \cos\psi u_2; \\ (I + \Delta I)\ddot{\psi} + 2L^2h\dot{\psi} = u_3. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $u = (u_1, u_2, u_3)^T = H'U$; m , I и m_d — известные составляющие массоинерционных параметров системы,

$$m = \frac{2n^2 J_0}{R^2} + m_0, \quad h = \frac{2n}{R}\mu_T + \frac{2n^2 k_2 k_3}{R^2 R_a},$$

$$m_d = \frac{2n^2 J_0}{R^2}, \quad I = \frac{4n^2 J_0}{R^2} L^2 + I_z;$$

Δm и ΔI — неизвестные составляющие массы платформы и ее момента инерции соответственно, удовлетворяющие ограничениям: $|\Delta m| < \Delta m_0 = \text{const}$, $|\Delta I| < \Delta I_0 = \text{const}$, причем будем предполагать, что $\Delta m_0 < m$, $\Delta I_0 < I$.

Пусть имеются три функции $\xi_0(t)$, $\eta_0(t)$, $\psi_0(t)$, ограниченные и дважды непрерывно дифференцируемые при всех $t \geq 0$, и пусть существуют положительные постоянные ξ_{\max}^1 , η_{\max}^1 , ψ_{\max}^1 , ξ_{\max}^2 , η_{\max}^2 и ψ_{\max}^2 , такие, что для всех $t \geq 0$ выполняются следующие неравенства:

$$\|\dot{\xi}_0(t)\| \leq \xi_{\max}^1, \quad |\dot{\eta}_0(t)| \leq \eta_{\max}^1, \quad |\dot{\psi}_0(t)| \leq \psi_{\max}^1;$$

$$\|\ddot{\xi}_0(t)\| \leq \xi_{\max}^2, \quad |\ddot{\eta}_0(t)| \leq \eta_{\max}^2, \quad |\ddot{\psi}_0(t)| \leq \psi_{\max}^2.$$

Рассмотрим постановку задачи стабилизации программного движения

$$\xi = \xi_0(t), \quad \eta = \eta_0(t), \quad \psi = \psi_0(t) \quad (3)$$

робота (2).

Введем отклонения от программного движения (3):

$$x_1 = \xi - \xi_0(t), \quad x_2 = \eta - \eta_0(t), \quad x_3 = \psi - \psi_0(t). \quad (4)$$

Требуется найти управление по принципу обратной связи

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3); \\ u_2 &= u_2(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3); \\ u_3 &= u_3(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \end{aligned} \quad (5)$$

и указать ограничения на параметры системы и траектории, при которых выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

если в начальный момент времени $t = t_0 \geq 0$ значения $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, $x_3(t_0)$ и $\dot{x}_1(t_0)$, $\dot{x}_2(t_0)$, $\dot{x}_3(t_0)$ принадлежат некоторой заданной окрестности нулевой точки $x_1 = x_2 = x_3 = \dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$.

2. Метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова

Широкой базой решения задач исследования устойчивости и управления движениями механических систем является прямой метод Ляпунова и его развитие — метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова [11]. Рассмотрим кратко основные идеи этого метода.

В теории устойчивости в классических теоремах прямого метода Ляпунова условия вида $\dot{V} \leq 0$, $V \geq \lambda V$, налагаемые на производные функции Ляпунова, представляют собой простейшие дифференциальные неравенства. Естественными являются попытки построить критерии устойчивости с использованием более сложных дифференциальных неравенств, что может облегчить решение проблемы построения функции типа Ляпунова. С. А. Чаплыгин ввел и исследовал скалярные дифференциальные неравенства общего вида $\dot{V} \leq f(t, V)$. На основе применения дифференциальных неравенств к функциям Ляпунова при решении задач устойчивости возник метод сравнения. Первые шаги в развитии этого метода, сделанные в 50—60-х годах XX века, связаны с именами Г. И. Мельникова, Г. А. Антосиевича, З. Опяль, К. Кордуняну, Ж. Ласалля, С. Лефшеца, В. Лакшмикантама, М. А. Красносельского и др. Совместное развитие идеи векторной функции Ляпунова Р. Беллмана и метода сравнения, предложенное В. М. Матросовым [11], привело к созданию метода вектор-функций Ляпунова, базирующегося на теории векторных дифференциальных неравенств типа Чаплыгина—Важевского, развитой в работах Я. Шарского, Т. Важевского, С. Олеха и других ученых.

Рассмотрим применение метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова в задаче об устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \quad X(t, 0) \equiv 0, \quad (6)$$

где $x \in R^n$, $X(t, x) = (X^1(t, x), \dots, X^n(t, x))^T$ (индекс T означает транспонирование), вещественные функции $X^i(t, x)$ ($i = 1, \dots, n$) определены и непрерывны в области

$$\Gamma = R^+ \times G = \{(t, x): t \geq 0, |x| < v\}$$

($v = \text{const} > 0$ или $v = +\infty$, символ $|\cdot|$ означает некоторую векторную норму в R^n) и имеют в ней не-

прерывные частные производные по x , ограниченные в каждой области

$$\bar{\Gamma}_0^1 = \{(t, x) \in \Gamma : t \dots 0, |x|, v_0^1\}, 0 < v_0^1 < v.$$

Эти условия обеспечивают существование, единственность решений системы (6), их нелокальную продолжимость и непрерывную зависимость от начальных данных и времени t в области Γ .

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую вектор-функцию $V(t, x)$, $V(t, x) = (v^1(t, x), \dots, v^k(t, x))^T$, $V: \Gamma \rightarrow R^k$. Определим для нее производную по времени в силу системы (6):

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} X(t, x).$$

Пусть имеют место следующие условия:

$$\dot{V}(t, x) \leq f(t, V(t, x)) \quad \forall (t, x) \in \Gamma;$$

$$f \in W(\Omega), f(t, 0) \equiv 0,$$

$$\Omega = \{(t, y) \in R^+ \times R^k : t \geq 0, |y| < K\},$$

$$K = +\infty \wedge \sup_{(t, x) \in \Gamma} |V(t, x)| = k_1 < K < +\infty.$$

Здесь $W(\Omega)$ — класс функций, удовлетворяющих в области Ω условию Важевского [11]. Имеет место следующая теорема сравнения с вектор-функцией Ляпунова.

Теорема 2.1 [11]. Для устойчивости (соответственно, устойчивости, равномерной по t_0) невозмущенного движения $x = 0$ системы (6) необходимо и достаточно, чтобы для некоторых $\bar{\Gamma}_0^1$ и l ($1 \leq l \leq k$) существовала вектор-функция Ляпунова $V(t, x)$, обладающая в $\bar{\Gamma}_0^1$ следующими свойствами:

$$1) \text{ функция } \bar{V}(t, x) = \max_{1 \leq i \leq k} v^i(t, x) \text{ — определенно-}$$

положительная (соответственно и $v^1(t, x), \dots, v^k(t, x)$ допускают бесконечно малый высший предел);

2) нулевое решение системы сравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), y \in R^k,$$

устойчиво (соответственно, устойчиво равномерно по t_0) относительно y^1, \dots, y^l при условии $y_0 = V(t_0, x_0)$ для $(t_0, x_0) \in \bar{\Gamma}_0^1$ (в частности, устойчиво при условии $y_0^1 \geq 0, \dots, y_0^l \geq 0$, если $v^1(t, x) \geq 0, \dots, v^l(t, x) \geq 0$ при $(t, x) \in \bar{\Gamma}_0^1$).

В настоящее время теоремы метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова применяются для выявления различных динамических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений: асимптотической устойчивости, притяжения и др. Однако возможности метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова в задачах стабилизации программных нестационарных движений механических

систем далеко не исчерпаны. В следующих разделах представлены результаты по применению этого метода в решении задачи стабилизации программного движения мобильного робота с омни-колесами.

3. Синтез алгоритмов стабилизации с помощью релейных законов управления

Для решения задачи стабилизации программного движения (3) вначале будем искать закон управления (5) в виде релейной функции

$$\begin{aligned} u_1(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= \\ &= -\sigma_1 \text{sign}(vx_1 + \mu_1 \dot{x}_1) \cos(\psi_0(t) + x_3) - \\ &- \sigma_2 \text{sign}(vx_2 + \mu_1 \dot{x}_2) \sin(\psi_0(t) + x_3); \\ u_2(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= \\ &= \sigma_1 \text{sign}(vx_1 + \mu_1 \dot{x}_1) \sin(\psi_0(t) + x_3) - \\ &- \sigma_2 \text{sign}(vx_2 + \mu_1 \dot{x}_2) \cos(\psi_0(t) + x_3); \\ u_3(t, x_3, \dot{x}_3) &= -\sigma_3 \text{sign}(vx_3 + \mu_2 \dot{x}_3), \end{aligned} \quad (7)$$

где $v > 0$, $\mu_i > 0$ ($i = 1, 2$), $\sigma_j > 0$ ($j = 1, 2, 3$) — некоторые постоянные.

Имеет место следующая теорема о стабилизации программного движения (3) робота.

Теорема 3.1. Пусть найдутся постоянные $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $v > 1$, $\mu_i > 0$ ($i = 1, 2$), $\sigma_j > 0$ ($j = 1, 2, 3$), такие что имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} (v\mu_2(m + \Delta m_0) - h\mu_1\mu_2 + v|v\mu_2(m \pm \Delta m_0) - h\mu_1\mu_2| + \\ + m_d\mu_1[(1 + v)^2\delta_2 + \mu_2(1 + v)\psi_{\max}^1] + \\ + 2n\mu_1\mu_2(1 + v)\mu_F/R)\delta_1 + \mu_1^2 m_d(1 + v)\eta_{\max}^1 \delta_2 + \\ + \mu_1^2 \mu_2((m + \Delta m_0)\xi_{\max}^2 + h\xi_{\max}^1 + \\ + (m_d\psi_{\max}^1 + 2n\mu_F/R)\eta_{\max}^1 - \sigma_1) \leq -\varepsilon_1 = \text{const} < 0; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (v\mu_2(m + \Delta m_0) - h\mu_1\mu_2 + v|v\mu_2(m \pm \Delta m_0) - h\mu_1\mu_2| + \\ + m_d\mu_1[(1 + v)^2\delta_2 + \mu_2(1 + v)\psi_{\max}^1] + \\ + 2n\mu_1\mu_2(1 + v)\mu_F/R)\delta_1 + \mu_1^2 m_d(1 + v)\xi_{\max}^1 \delta_2 + \\ + \mu_1^2 \mu_2((m + \Delta m_0)\eta_{\max}^2 + h\eta_{\max}^1 + \\ + (m_d\psi_{\max}^1 + 2n\mu_F/R)\xi_{\max}^1 - \sigma_2) \leq -\varepsilon_2 = \text{const} < 0; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (v(I + \Delta I_0) - 2a^2 h\mu_2 + v|v(I \pm \Delta I_0) - 2a^2 h\mu_2|)\delta_2 + \\ + \mu_2^2((I + \Delta I_0)\psi_{\max}^2 + 2a^2 h\psi_{\max}^1 - \sigma_3) \leq \\ \leq -\varepsilon_3 = \text{const} < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда управление (7) решает задачу стабилизации программного движения (3) системы (2), т. е. отклонения от программного движения асимптотически

стремятся к нулю: $x_1(t) \rightarrow 0$, $x_2(t) \rightarrow 0$, $x_3(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Множество начальных возмущений

$$x_1(0), x_2(0), x_3(0), \dot{x}_1(0), \dot{x}_2(0), \dot{x}_3(0) \quad (11)$$

удовлетворяет следующим ограничениям:

$$\begin{aligned} \max\{|\nu x_1(0) + \mu_1 \dot{x}_1(0)|, |\nu x_2(0) + \mu_1 \dot{x}_2(0)|, \\ |x_1(0)|, |x_2(0)|\} < \delta_1; \\ \max\{|\nu x_3(0) + \mu_2 \dot{x}_3(0)|, |x_3(0)|\} < \delta_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Доказательство. Введем переменные

$$z_1 = \nu x_1 + \mu_1 \dot{x}_1, z_2 = \nu x_2 + \mu_1 \dot{x}_2, z_3 = \nu x_3 + \mu_2 \dot{x}_3. \quad (13)$$

Тогда в отклонениях (4) при использовании обозначений (13) система (2) с учетом (7) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{\nu}{\mu_1} x_1 + \frac{1}{\mu_1} z_1, \dot{x}_2 = -\frac{\nu}{\mu_1} x_2 + \frac{1}{\mu_1} z_2, \\ \dot{x}_3 = -\frac{\nu}{\mu_2} x_3 + \frac{1}{\mu_2} z_3; \\ \dot{z}_1 = \left(-\frac{\nu^2}{\mu_1} + \frac{h\nu}{m + \Delta m}\right) x_1 + \frac{m_d \nu}{m + \Delta m} \times \\ \times \left(-\frac{\nu}{\mu_2} x_3 + \frac{1}{\mu_2} z_3 + \dot{\psi}_0(t)\right) x_2 - \frac{2\nu\mu_F}{(m + \Delta m)R} x_2 + \\ + \frac{\mu_1 m_d \nu \dot{\eta}_0(t)}{\mu_2(m + \Delta m)} x_3 + \left(\frac{\nu}{\mu_1} - \frac{h}{m + \Delta m}\right) z_1 - \\ - \frac{m_d}{m + \Delta m} \left(-\frac{\nu}{\mu_2} x_3 + \frac{1}{\mu_2} z_3 + \dot{\psi}_0(t)\right) z_2 + \frac{2\nu\mu_F}{(m + \Delta m)R} z_2 - \\ - \frac{\mu_1 m_d \nu \dot{\eta}_0(t)}{\mu_2(m + \Delta m)} z_3 - \frac{\mu_1 \sigma_1}{m + \Delta m} \text{sign} z_1 - \mu_1 \ddot{\xi}_0(t) - \\ - \frac{\mu_1 h}{m + \Delta m} \dot{\xi}_0(t) - \frac{\mu_1(m_d \dot{\psi}_0(t) - 2\nu\mu_F/R)}{m + \Delta m} \dot{\eta}_0(t); \quad (14) \\ \dot{z}_2 = -\frac{m_d \nu}{m + \Delta m} \left(-\frac{\nu}{\mu_2} x_3 + \frac{1}{\mu_2} z_3 + \dot{\psi}_0(t)\right) x_1 + \\ + \frac{2\nu\mu_F}{(m + \Delta m)R} x_1 + \left(-\frac{\nu^2}{\mu_1} + \frac{h\nu}{m + \Delta m}\right) x_2 - \frac{\mu_1 m_d \nu \dot{\xi}_0(t)}{\mu_2(m + \Delta m)} x_3 + \\ + \frac{m_d}{m + \Delta m} \left(-\frac{\nu}{\mu_2} x_3 + \frac{1}{\mu_2} z_3 + \dot{\psi}_0(t)\right) z_1 - \frac{2\nu\mu_F}{(m + \Delta m)R} z_1 + \\ + \left(\frac{\nu}{\mu_1} - \frac{h}{m + \Delta m}\right) z_2 + \frac{\mu_1 m_d \dot{\xi}_0(t)}{\mu_2(m + \Delta m)} z_3 - \frac{\mu_1 \sigma_1}{m + \Delta m} \text{sign} z_2 - \\ - \mu_1 \ddot{\eta}_0(t) - \frac{\mu_1 h}{m + \Delta m} \dot{\eta}_0(t) + \frac{\mu_1(m_d \dot{\psi}_0(t) - 2\nu\mu_F/R)}{m + \Delta m} \dot{\xi}_0(t); \\ \dot{z}_3 = \left(-\frac{\nu^2}{\mu_2} + \frac{2a^2 h \nu}{I + \Delta I}\right) x_3 + \left(\frac{\nu}{\mu_2} - \frac{2a^2 h}{I + \Delta I}\right) z_3 - \\ - \frac{\mu_2 \sigma_3}{I + \Delta I} \text{sign} z_3 - \mu_2 \ddot{\psi}_0(t) - \frac{2a^2 h \mu_2}{I + \Delta I} \dot{\psi}_0(t). \end{cases}$$

Возьмем для системы (14) вектор-функцию Ляпунова $V = V(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3)$, $V = (V_1, V_2)^T$ с компонентами в виде

$$V_1 = \max\{|x_1|, |x_2|, |z_1|, |z_2|\}, V_2 = \max\{|x_3|, |z_3|\}. \quad (15)$$

Оценим правостороннюю производную по времени вектор-функции Ляпунова (15) в силу системы (14):

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq \max \left\{ \frac{1-\nu}{\mu_1} V_1, \frac{1}{\mu_1 \mu_2 (m + \Delta m)} ((\nu \mu_2 (m + \Delta m) - \right. \\ \left. - h \mu_1 \mu_2 + \nu |\nu \mu_2 (m + \Delta m) - h \mu_1 \mu_2| + \right. \\ \left. + m_d \mu_1 [(1 + \nu)^2 V_2 + \mu_2 (1 + \nu) \psi_{\max}^1] + \right. \\ \left. + 2(1 + \nu) \mu_1 \mu_2 \mu_F / R) V_1 + \mu_1^2 m_d (1 + \nu) \eta_{\max}^1 V_2 + \right. \\ \left. + \frac{\mu_1}{m + \Delta m} ((m + \Delta m) \xi_{\max}^2 + h \xi_{\max}^1 + \right. \\ \left. + (m_d \psi_{\max}^1 + 2\nu \mu_F / R) \eta_{\max}^1 - \sigma_1), \right. \\ \left. \frac{1}{\mu_1 \mu_2 (m + \Delta m)} ((\nu \mu_2 (m + \Delta m) - h \mu_1 \mu_2 + \right. \\ \left. + \nu |\nu \mu_2 (m + \Delta m) - h \mu_1 \mu_2| + m_d \mu_1 [(1 + \nu)^2 V_2 + \right. \\ \left. + \mu_2 (1 + \nu) \psi_{\max}^1] + 2(1 + \nu) \mu_1 \mu_2 \mu_F / R) V_1 + \right. \\ \left. + \mu_1^2 m_d (1 + \nu) \xi_{\max}^1 V_2) + \frac{\mu_1}{m + \Delta m} ((m + \Delta m) \eta_{\max}^2 + \right. \\ \left. + h \eta_{\max}^1 + (m_d \psi_{\max}^1 + 2\nu \mu_F / R) \xi_{\max}^1 - \sigma_2) \right\}; \\ \dot{V}_2 \leq \max \left\{ \frac{1-\nu}{\mu_2} V_2, \frac{1}{\mu_2 (I + \Delta I)} (\nu (I + \Delta I) - \right. \\ \left. - 2L^2 h \mu_2 + \nu |\nu (I + \Delta I) - 2L^2 h \mu_2|) V_2 + \right. \\ \left. + \frac{\mu_2}{I + \Delta I} ((I + \Delta I) \psi_{\max}^2 + 2L^2 h \psi_{\max}^1 - \sigma_3) \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим поведение вектор-функции Ляпунова V вдоль решения системы (14), удовлетворяющего начальному условию (12), которое с учетом обозначений (13) имеет вид

$$\begin{aligned} \max\{|z_1(0)|, |z_2(0)|, |x_1(0)|, |x_2(0)|\} < \delta_1; \\ \max\{|z_3(0)|, |x_3(0)|\} < \delta_2. \end{aligned} \quad (16)$$

При выполнении неравенств (8)–(10) получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq \max \left\{ \frac{1-\nu}{\mu_1} V_1, -\frac{\varepsilon_1}{\mu_1 \mu_2 (m + \Delta m_0)}, -\frac{\varepsilon_2}{\mu_1 \mu_2 (m + \Delta m_0)} \right\}; \\ \dot{V}_2 \leq \max \left\{ \frac{1-\nu}{\mu_2} V_2, -\frac{\varepsilon_3}{\mu_2 (I + \Delta I_0)} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из неравенств (17) следует, что найдется момент времени $t^* > 0$, такой, что при всех $t \geq t^*$ будут иметь место неравенства

$$\dot{V}_1 \leq \frac{1-\nu}{\mu_1} V_1; \quad \dot{V}_2 \leq \frac{1-\nu}{\mu_2} V_2. \quad (18)$$

Из неравенств (18) получим экспоненциально устойчивую систему сравнения

$$\dot{u}_1 = \frac{1-\nu}{\mu_1} u_1, \quad \dot{u}_2 = \frac{1-\nu}{\mu_2} u_2.$$

Отсюда, используя теорему сравнения для асимптотической устойчивости [8], получаем, что $V_1 \rightarrow 0$, $V_2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Учитывая (15), получим, что отклонения (4) от программного движения асимптотически стремятся к нулю, т. е. $x_1 \rightarrow 0$, $x_2 \rightarrow 0$, $x_3 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Иными словами, управление (7) решает задачу стабилизации программного движения (3) системы (2), если множество начальных отклонений (11) удовлетворяет условию (12). Теорема доказана.

Замечание 3.1. Теорема 3.1 позволяет решать задачу стабилизации программного движения при достаточно легко проверяемых алгебраических условиях (8)–(10), не требующих вычислений собственных значений матриц, что сокращает время вычислений. Кроме того, условия (8)–(10) носят робастный характер, так как позволяют стабилизировать программное движение для целого класса систем, параметры которых удовлетворяют заданным ограничениям и могут быть заранее неизвестны.

Замечание 3.2. Управление (7) носит разрывный характер, вследствие чего при его практической реализации в системе возникает так называемый чаттер, т. е. высокочастотные колебания, обусловленные несовершенством систем переключения, влиянием возмущений, наличием малых задержек в передаче сигналов. В следующем разделе найден непрерывный аналог управления (7), позволяющий уменьшить эти колебания.

4. Синтез алгоритмов управления с помощью непрерывных законов

Будем искать закон управления (5) в виде непрерывной функции:

$$\begin{aligned} u_1(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= -\sigma_1 \text{sat}_1(\nu x_1 + \mu_1 \dot{x}_1) \times \\ &\times \cos(\psi_0(t) + x_3) - \sigma_2 \text{sat}_1(\nu x_2 + \mu_1 \dot{x}_2) \sin(\psi_0(t) + x_3); \\ u_2(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= \sigma_1 \text{sat}_1(\nu x_1 + \mu_1 \dot{x}_1) \times \\ &\times \sin(\psi_0(t) + x_3) - \sigma_2 \text{sat}_1(\nu x_2 + \mu_1 \dot{x}_2) \cos(\psi_0(t) + x_3); \quad (19) \\ u_3(t, x_3, \dot{x}_3) &= -\sigma_3 \text{sat}_2(\nu x_3 + \mu_2 \dot{x}_3). \end{aligned}$$

Здесь функция насыщения $\text{sat}_i(z)$ ($i = 1, 2$) имеет следующий вид:

$$\text{sat}_i(z) = \begin{cases} \text{sign}z, & |z| \geq \gamma_i; \\ \frac{z}{\gamma_i}, & |z| < \gamma_i, \gamma_i = \text{const} > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Функция насыщения (20) с большим углом наклона линии переключения (при достаточно малой постоянной γ_i) является непрерывной аппроксимацией релейной функции [12]. Тем самым, выбор закона управления в виде (19), с одной стороны, позволит по сравнению с релейным законом (7) уменьшить амплитуду колебаний, возникающих при практической реализации закона управления, а с другой стороны, обеспечит свойство робастности по отношению к вариациям параметров системы.

Выбор закона управления (19) не сможет гарантировать стабилизацию программного движения, а лишь свойство предельной ограниченности решений системы в отклонениях от программного движения [12].

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия теоремы 3.1, и, кроме того, найдутся числа γ_1, γ_2 , такие что $0 < \gamma_i < \delta_i$ ($i = 1, 2$), и имеют место неравенства

$$\begin{aligned} &(\nu \mu_2(m + \Delta m_0) - h \mu_1 \mu_2 + \nu |\nu \mu_2(m \pm \Delta m_0) - h \mu_1 \mu_2| + \\ &+ m_d \mu_1 [(1 + \nu)^2 \gamma_2 + \mu_2 (1 + \nu) \psi_{\max}^1] + \\ &+ 2n \mu_1 \mu_2 (1 + \nu) \mu_F / R + \mu_1^2 m_d (1 + \nu) \eta_{\max}^1) \gamma_1 + \\ &+ \mu_1^2 \mu_2 ((m + \Delta m_0) \xi_{\max}^2 + h \xi_{\max}^1 + \\ &+ (m_d \psi_{\max}^1 + 2n \mu_F / R) \eta_{\max}^1 - \sigma_1) \leq 0; \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\nu \mu_2(m + \Delta m_0) - h \mu_1 \mu_2 + \nu |\nu \mu_2(m \pm \Delta m_0) - h \mu_1 \mu_2| + \\ &+ m_d \mu_1 [(1 + \nu)^2 \gamma_2 + \mu_2 (1 + \nu) \psi_{\max}^1] + \\ &+ 2n \mu_1 \mu_2 (1 + \nu) \mu_F / R + \mu_1^2 m_d (1 + \nu) \xi_{\max}^1) \gamma_1 + \\ &+ \mu_1^2 \mu_2 ((m + \Delta m_0) \eta_{\max}^2 + h \eta_{\max}^1 + \\ &+ (m_d \psi_{\max}^1 + 2n \mu_F / R) \xi_{\max}^1 - \sigma_2) \leq 0; \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\nu(I + \Delta I_0) - 2L^2 h \mu_2 + \nu |\nu(I \pm \Delta I_0) - 2L^2 h \mu_2|) \gamma_2 + \\ &+ \mu_2^2 ((I + \Delta I_0) \psi_{\max}^2 + 2L^2 h \psi_{\max}^1 - \sigma_2) \leq 0. \quad (23) \end{aligned}$$

Тогда для системы (2) с управлением (19) найдется момент времени $t^* = t^*(\gamma_1, \gamma_2) > 0$, такой что при всех $t \geq t^*$ будут иметь место неравенства

$$\max\{|x_1(t)|, |x_2(t)|\} < \gamma_1, \quad |x_3(t)| < \gamma_2. \quad (24)$$

При этом множество начальных возмущений (11) удовлетворяет ограничениям (12).

Доказательство.

Вводя переменные (13), получим с учетом (19) систему уравнений в отклонениях (4), аналогич-

ную системе (14), где функции знака заменены на соответствующие функции насыщения (20):

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -\frac{v}{\mu_1} x_1 + \frac{1}{\mu_1} z_1, \quad \dot{x}_2 = -\frac{v}{\mu_1} x_2 + \frac{1}{\mu_1} z_2, \\
 \dot{x}_3 &= -\frac{v}{\mu_2} x_3 + \frac{1}{\mu_2} z_3; \\
 \dot{z}_1 &= \left(-\frac{v^2}{\mu_1} + \frac{hv}{m + \Delta m} \right) x_1 + \frac{m_d v}{m + \Delta m} \times \\
 &\times \left(-\frac{v}{\mu_2} x_3 + \frac{1}{\mu_2} z_3 + \dot{\psi}_0(t) \right) x_2 - \frac{2n\mu_F}{(m + \Delta m)R} x_2 + \\
 &+ \frac{\mu_1 m_d v \dot{\eta}_0(t)}{\mu_2(m + \Delta m)} x_3 + \left(\frac{v}{\mu_1} - \frac{h}{m + \Delta m} \right) z_1 - \\
 &- \frac{m_d}{m + \Delta m} \left(-\frac{v}{\mu_2} x_3 + \frac{1}{\mu_2} z_3 + \dot{\psi}_0(t) \right) z_2 + \frac{2n\mu_F}{(m + \Delta m)R} z_2 - \\
 &- \frac{\mu_1 m_d \dot{\eta}_0(t)}{\mu_2(m + \Delta m)} z_3 - \frac{\mu_1 \sigma_1}{m + \Delta m} \text{sat}_1 z_1 - \mu_1 \ddot{\xi}_0(t) - \\
 &- \frac{\mu_1 h}{m + \Delta m} \dot{\xi}_0(t) - \frac{\mu_1(m_d \dot{\psi}_0(t) - 2n\mu_F/R)}{m + \Delta m} \dot{\eta}_0(t); \quad (25) \\
 \dot{z}_2 &= -\frac{m_d v}{m + \Delta m} \left(-\frac{v}{\mu_2} x_3 + \frac{1}{\mu_2} z_3 + \dot{\psi}_0(t) \right) x_1 + \\
 &+ \frac{2nv\mu_F}{(m + \Delta m)R} x_1 + \left(-\frac{v^2}{\mu_1} + \frac{hv}{m + \Delta m} \right) x_2 - \frac{\mu_1 m_d v \dot{\xi}_0(t)}{\mu_2(m + \Delta m)} x_3 + \\
 &+ \frac{m_d}{m + \Delta m} \left(-\frac{v}{\mu_2} x_3 + \frac{1}{\mu_2} z_3 + \dot{\psi}_0(t) \right) z_1 - \frac{2n\mu_F}{(m + \Delta m)R} z_1 + \\
 &+ \left(\frac{v}{\mu_1} - \frac{h}{m + \Delta m} \right) z_2 + \frac{\mu_1 m_d \dot{\xi}_0(t)}{\mu_2(m + \Delta m)} z_3 - \frac{\mu_1 \sigma_1}{m + \Delta m} \text{sat}_1 z_2 - \\
 &- \mu_1 \ddot{\eta}_0(t) - \frac{\mu_1 h}{m + \Delta m} \dot{\eta}_0(t) + \frac{\mu_1(m_d \dot{\psi}_0(t) - 2n\mu_F/R)}{m + \Delta m} \dot{\xi}_0(t); \\
 \dot{z}_3 &= \left(-\frac{v^2}{\mu_2} + \frac{2a^2 hv}{I + \Delta I} \right) x_3 + \left(\frac{v}{\mu_2} - \frac{2a^2 h}{I + \Delta I} \right) z_3 - \\
 &- \frac{\mu_2 \sigma_3}{I + \Delta I} \text{sat}_2 z_3 - \mu_2 \ddot{\psi}_0(t) - \frac{2a^2 h \mu_2}{I + \Delta I} \dot{\psi}_0(t).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор-функцию Ляпунова $V = V(x_1, x_2, x_3, z_1, z_2, z_3)$, $V = (V_1, V_2)^T$ с компонентами (15) вдоль решений системы (25), удовлетворяющих начальному условию (16). В начальный момент $t = 0$ будем иметь неравенства $V_1 < \delta_1$, $V_2 < \delta_2$. При выполнении неравенств (20)–(22) для значений V_1, V_2 , таких что $\gamma_1 < V_1 < \delta_1$, $\gamma_2 < V_2 < \delta_2$, получим оценку:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &\leq \max \left\{ \frac{1-v}{\mu_1} V_1, -\frac{\varepsilon_1}{\mu_1 \mu_2 (m + \Delta m_0)}, \right. \\
 &\left. -\frac{\varepsilon_2}{\mu_1 \mu_2 (m + \Delta m_0)} \right\} \leq -\varepsilon = \text{const} < 0; \\
 \dot{V}_2 &\leq \max \left\{ \frac{1-v}{\mu_2} V_2, -\frac{\varepsilon_3}{\mu_2 (I + \Delta I_0)} \right\} \leq -\varepsilon = \text{const} < 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, для всех моментов времени, таких что $\gamma_1 < V_1(t, x_1(t), x_2(t), z_1(t), z_2(t)) < \delta_1$, $\gamma_2 < V_2(t, x_3(t), z_3(t)) < \delta_2$, получим неравенства

$$\begin{aligned}
 V_1(t, x_1(t), x_2(t), z_1(t), z_2(t)) &< \delta_1 - \varepsilon t, \\
 V_2(t, x_3(t), z_3(t)) &< \delta_2 - \varepsilon t.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что найдется момент времени $t^* = t^*(\gamma_1, \gamma_2) > 0$, такой что при всех $t \geq t^*$ будут иметь место неравенства

$$V_1(t, x_1(t), x_2(t), z_1(t), z_2(t)) < \gamma_1, \quad V_2(t, x_3(t), z_3(t)) < \gamma_2.$$

Отсюда для всех $t \geq t^*$ будут выполнены неравенства (24). Теорема доказана.

5. Численная апробация метода

Найденные законы (7) и (19) были применены при численном моделировании движения робота со следующими параметрами [9]:

$$\begin{aligned}
 m &= 20 \text{ кг}, \quad I_z = 0,301 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad R = 0,08 \text{ м}, \quad L = 0,2125 \text{ м}, \\
 n &= 14, \quad \mu_T = 0,38, \quad \mu_F = 0,21, \quad R_a = 1,1 \Omega, \\
 k_2 &= 36,4 \text{ мН} \cdot \text{м/А}, \quad k_3 = 0,0038 \text{ В} \cdot \text{с}, \\
 J_0 &= 70,7 \cdot 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,
 \end{aligned}$$

при этом неизвестные части массоинерционных характеристик были ограничены следующими значениями: $\Delta m = 5$ кг, $\Delta I = 0,1$ кг \cdot м² для программного движения

$$\begin{aligned}
 \xi_0(t) &= r \sin(\omega t) \text{ м}, \quad \eta_0(t) = -r \cos(\omega t) \text{ м}, \\
 \psi_0(t) &= \varpi t + \psi_0 \text{ рад}, \quad (26)
 \end{aligned}$$

где $r = 0,5$ м, $\omega = 0,8$ рад/с, $\varpi = \pi/6$ рад/с, $\psi_0 = 0$ рад.

На рис. 2, 3 показаны графики программной траектории и действительной траектории при

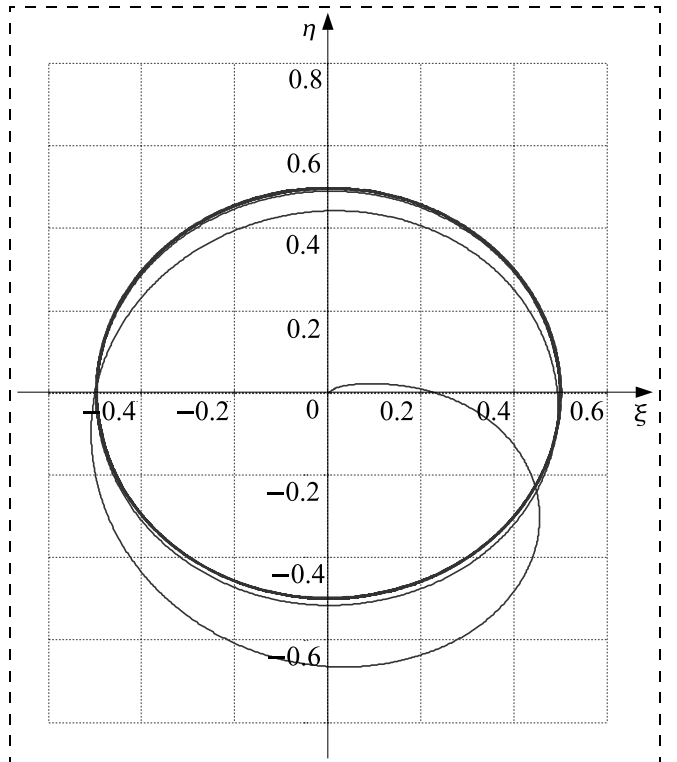


Рис. 2. Траектория центра масс робота при управлении (7)

управлениях (7) и (19) соответственно. С использованием условий теорем 3.1 и 4.1 подобраны следующие параметры управления:

$$\mu_1 = 3,5 \text{ с}, \mu_2 = 2 \text{ с}, \nu = 1, \sigma_1 = 30 \text{ Н}, \sigma_2 = 30 \text{ Н} \cdot \text{м}, \\ \sigma_3 = 5 \text{ Н}, \gamma_1 = 0,3 \text{ м}$$

при любом сколь угодно малом значении γ_2 для начальных отклонений $\delta_1 = 1 \text{ м}$, $\delta_2 = 1 \text{ рад}$.

Из рис. 2 и 3 видно, что центр масс робота при управлении (7) асимптотически приближается к программной траектории, а при управлении (19) —

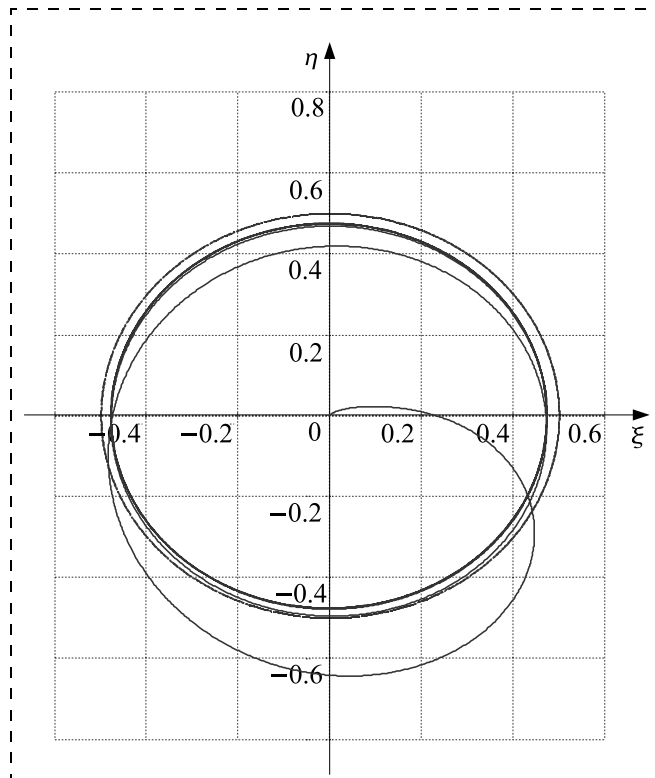


Рис. 3. Траектория центра масс робота при управлении (19)

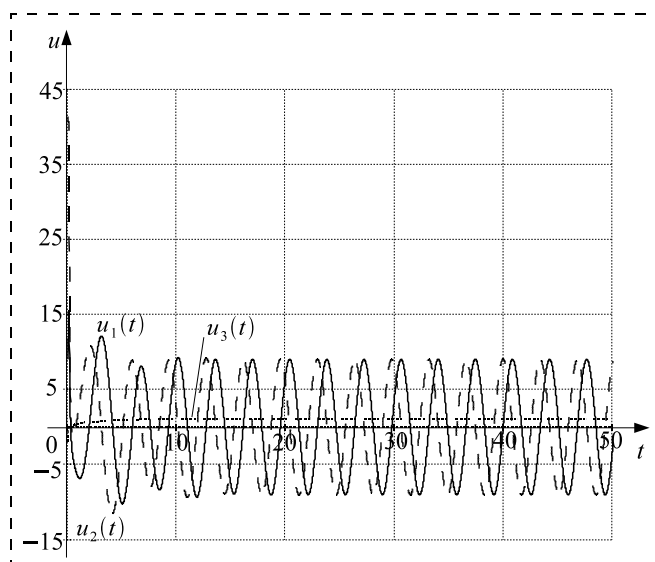


Рис. 4. Графики зависимости от времени составляющих управления (19)

входит за конечное время в окрестность программной траектории, определяемую значением γ_1 .

Преимущество управления (19) перед (7) состоит в том, что при непрерывном законе (19) уменьшаются энергозатраты на реализацию этого воздействия по сравнению с релейным законом (7). На рис. 4 представлены графики зависимости от времени управляющих воздействий (19). Анализируя графики на рис. 4, можно убедиться, что по истечении времени $t = 6 \text{ с}$ с управляющие воздействия u_1, u_2 будут ограничены по модулю значением $9,25 \text{ Н}$, а составляющая u_3 ограничена значением $1,08 \text{ Н} \cdot \text{м}$. При этом расчеты показали, что составляющие управления (7) u_1, u_2 ограничены по модулю значением $42,43 \text{ Н}$, а составляющая u_3 ограничена значением $2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ на всем интервале интегрирования, равном 50 с .

Заключение

В работе рассмотрена динамическая модель мобильного робота с четырьмя омни-колесами, управляемого независимыми электродвигателями, установленными в осях колес. Анализ динамики такой системы приводит к необходимости учитывать неизбежно возникающее трение скольжения при движении омни-колес, а также неточность самой модели — практическую невозможность точного определения массоинерционных параметров системы. В работе решены задачи: стабилизации программного движения робота; о предельной ограничении отклонений координат от программных значений с учетом неточно известных массоинерционных характеристик и трения скольжения. Применением вектор-функции Ляпунова обоснованы релейный и непрерывный с функцией насыщения робастные законы управления по обратной связи. Полученные законы управления отличаются простотой их практической реализации по сравнению с адаптивными законами.

Список литературы

1. Маргынченко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 142—149.
2. Маргынченко Ю. Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // ПММ. 2010. Т. 74, Вып. 4. С. 610—619.
3. Зобова А. А., Татаринцов Я. В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // ПММ. 2009. Т. 73, Вып. 1. С. 13—22.
4. Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Тележка с омни-колесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 785—801.
5. Караваев Ю. Л., Трефилов С. А. Дискретный алгоритм управления по отклонению мобильного робота с омни-колесами // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 1. С. 91—100.
6. Килин А. А., Караваев Ю. Л., Клековкин А. В. Кинематическая модель управления высокоманевренным мобильным сферороботом с внутренней омни-колесной платформой // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 1. С. 113—126.
7. André S. Conceição, A. Paulo Moreira, Paulo J. Costa. A Practical approach of Modeling and Parameters Estimation for Omnidirectional Mobile Robots // IEEE-ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS. 2009. Vol. 14, N. 3. P. 377—381.
8. Lins Barreto S. J. C., Scolari Conceicao A. G., Dorea C. E. T., Martinez L., De Pieri E. R. Design and Implementation of Model-Predictive Control With Friction Compensation on an Omnidirectional

tional Mobile Robot // IEEE-ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS. 2014. N. 2. P. 467–476.

9. **Yanwen Huang, Qixin Cao and Chuntao Leng.** The Path-Tracking Controller Based on Dynamic Model with Slip for One Four-Wheeled OMR // *Industrial Robot: An International Journal*. 2010. Vol. 37, N. 2. P. 193–201.

10. **Huang H. C., Tsai C. C.** Adaptive Trajectory Tracking and Stabilization for Omnidirectional Mobile Robot with Dynamic Effect and Uncertainties // *Proc. of the 17th World Congress The Interna-*

tional Federation of Automatic Control Seoul, Korea, July 6–11, 2008. 2008. P. 5383–5388.

11. **Метод** векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А. А. Воронова и В. М. Матросова. М.: Наука, 1987. 312 с.

12. **Халил Х. К.** Нелинейные системы. М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2009. 832 с.

Synthesis of Robust Algorithms of Program Motion Stabilization for an Omni-Wheel Mobile Robot by the Method of Lyapunov Vector Functions

A. S. Andreev, AndreevAS@ulsu.ru,

O. A. Peregodova, peregodovaoa@sv.ulsu.ru✉,
Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation

Corresponding author: **Peregodova Olga A.**, D. Sc., Professor,
Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432017, Russian Federation,
e-mail: peregodovaoa@gmail.ru

Received on July 08, 2015

Accepted on July 17, 2015

In recent years the problem of a mobile wheeled robot control has received great attention and lots of solutions have been found. The dynamical model of a mobile wheeled robot includes the mass-inertial parameters, which are customary, as a rule, unknown and time varying. It is difficult to select an exact dynamical model of a wheeled mobile robot for the design of a model-based control. In order to handle such unknown parameters many control strategies were proposed, including sliding-model control and adaptive control. The problem of dynamics of the controlled motion of the mobile robots with omni-directional wheels is of interest to many researches. Such mobile robots are characterized by a full omni-directionality with simultaneous and independently rotational and translation motion capabilities. Therefore, such types of the wheeled robots can implement complicated tasks in a narrow space. An independent control of the rotation of each omni-wheel leads to the inevitable slipping in motion along the motion surface. Therefore, considering slipping between the wheels and the motion surface, a dynamic model of an omnidirectional wheeled mobile robot is of great interest to many researches. The sliding friction occurs both in the direction along the surface of the wheel and transversely to it. It is important to design a motion control, which has no hard performance and allows us to take into account the sliding friction and the inaccuracy of the dynamical model. The aim of this paper is to solve the problem of a non-stationary trajectory tracking control of a mobile robot with four omni-wheels and inaccurately known inertia matrix, taking into account the wheel slip. On the basis of Lyapunov vector functions the discontinuous and continuous control laws were obtained. The results of the numerical simulation are presented.

Keywords: wheeled mobile robot, control, slip, stabilization, program motion, omni-wheel, Lyapunov vector function, dynamical model, comparison system

Acknowledgements: The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 15-01-08482.

For citation:

Andreev A. S., Peregodova O. A. Synthesis of Robust Algorithms of Program Motion Stabilization for an Omni-Wheel Mobile Robot by the Method of Lyapunov Vector Functions, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 12, pp. 813–821.

DOI: 10.17587/mau/16.813-821

References

1. **Martynenko Yu. G., Formalskii A. M.** On the Motion of a Mobile Robot with Roller-Carrying Wheels, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, no. 6, pp. 976–983.

2. **Martynenko Ju. G.** *Ustojchivost' stacionarnyh dvizhenij mobil'nogo robota s rolíkonesushhimi kolesami i smeshennym centrom mass* (Stability of steady motions of mobile robot with omniwheels and displacement of the center of mass), *PMM*, 2010, vol. 74, iss. 4, pp. 610–619 (in Russian).

3. **Zobova A. A., Tatarinov Ja. V.** *Dinamika jekipazha s rolíkonesushhimi kolesami* (Dynamics of the omniwheel vehicle), *PMM*, 2009, vol. 73, iss. 1, pp. 13–22 (in Russian).

4. **Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.** An Omni-Wheel Vehicle on a Plane and a Sphere, *Nonlinear Dynamics & Mobile Robotics*, 2013, vol. 1, no. 1, pp. 33.

5. **Karavaev Ju. L., Trefilov S. A.** *Diskretnyj algoritm upravlenija po otkloneniju mobil'nym robotom s omnikolesami* (Deviation based discrete control algorithm for omni-wheeled mobile robot), *Nelinejnaja Dinamika*, 2013, vol. 9, no. 1 pp. 91–100 (in Russian).

6. **Kilin A. A., Karavaev Ju. L., Klekovkin A. V.** *Kinematicheskaja model' upravlenija vysokomanevrennym mobil'nym sferorobotom s vnutrennej omni-kolesnoj platformoj* (Kinematic control of a high manoeuvrable mobile spherical robot with internal omni-wheeled platform), *Nelinejnaja Dinamika*, 2014, vol. 10, no. 1, pp. 113–126 (in Russian).

7. **André S. Conceição, A. Paulo Moreira, Paulo J. Costa.** A Practical approach of Modeling and Parameters Estimation for Omnidirectional Mobile Robots, *IEEE Asme Transactions on Mechatronics*, 2009, vol. 14, no. 3, pp. 377–381.

8. **Lins Barreto S. J. C., Scolari Conceicao A. G., Dorea C. E. T., Martinez L., De Pieri E. R.** Design and Implementation of Model-Predictive Control With Friction Compensation on an Omnidirectional Mobile Robot, *IEEE Asme Transactions on Mechatronics*, 2014, no. 2, pp. 467–476.

9. **Yanwen Huang, Qixin Cao and Chuntao Leng.** The path-tracking controller based on dynamic model with slip for one four-wheeled OMR, *Industrial Robot: An International Journal*, 2010, vol. 37, no. 2, pp. 193–201.

10. **Huang H. C., Tsai C. C.** Adaptive Trajectory Tracking and Stabilization for Omnidirectional Mobile Robot with Dynamic Effect and Uncertainties, *Proc. of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control*, Seoul, Korea, July 6–11, 2008, pp. 5383–5388.

11. **Abdulin R. Z., Anapolski L. Y., Kozlov R. I.** ed. *Metod vektornykh funktsij Lyapunova v teorii ustojchivosti* (Vektor Lyapunov Functions in Stability Theory), Moscow, World Federation Publishers Company, 1996, 394 p. (in Russian).

12. **Hassan K. Khalil.** *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, 2002, 750 p.