

4. **Nagin I. A., Shatilov A. Ju.** Algoritm kompleksirovaniya NAP SRNS i avtomobil'nyh datchikov skorostej vrashheniya koles (GNSS/Wheel Speed Sensor Integration Algorithm), *Radiotekhnika*, 2012, no. 6, pp. 126–131 (in Russian).
5. **Shatilov A. Ju., Nagin I. A.** *Tesno svyazannyj algoritm kompleksirovaniya NAP SRNS i mnogocелеvoj INS* (A Tightly-Coupled GNSS/IMU Integration Algorithm for Multi-Purpose INS), *Radiotekhnika*, 2012, no. 6, pp. 118–126 (in Russian).
6. **Gao J.** Development of a Precise GPS/INS/On-Board Vehicle Sensors Integrated Vehicular Positioning System: PhD Thesis, University of Calgary, 2007, 218 p.
7. **Han S., Wang J.** Integrated GPS/INS navigation system with dual-rate Kalman Filter, *GPS Solutions*, 2012, no. 3 (16), pp. 389–404.
8. **Langel S. E.** et al. Tightly coupled GPS/INS integration for differential carrier phase navigation systems using decentralized estimation, *Indian Wells: Position Location and Navigation Symposium (PLANS)*, 2010, pp. 397–409.
9. **Hide C.** et al. Adaptive Kalman filtering algorithms for integrating GPS and low cost INS, *Indian Wells: Position Location and Navigation Symposium, PLANS 2004*, 2004, pp. 227–233.
10. **He X.** et al. Analysis of INS Aided Signal Acquisition Based on Navigation Satellites Software Receivers, *Zhangjiajie, Hunan: International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, ICMTMA '09, 2009*, pp. 277–280.
11. **Zhu L.** et al. Fast fine acquisition algorithm of GPS receiver aided by INS information, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2011, no. 2 (22), pp. 300–305.
12. **Zhang Q.** et al. Research on GPS signal ambiguity resolution aided by INS, *Yantai: 3rd International Congress on Image and Signal Processing (CISP)*, 2010, vol. 9, pp. 4254–4257.
13. **Wang M., Gao Y.** An Investigation on GPS Receiver Initial Phase Bias and Its Determination, *San Diego: Proc. of the 2007 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*, 2007, pp. 873–880.
14. **New Civil Signals**, National Coordination Office for Space-Based Positioning, Navigation, and Timing. Washington, D. C., available at: <http://www.gps.gov/svsystems/gps/modernization/civilsignals/>
15. **Gorev P. A.** Metod povysheniya tochnosti opredeleniya koordinat podvizhnogo ob'ekta inercial'noj navigacionnoj sistemy (Method of increasing the accuracy of determining the coordinates of a mobile object inertial navigation system), *Nauchnyj Vestnik MGGU*, 2014, no. 3 (48), pp. 39–49 (in Russian).
16. **Perov A. I., Harisov V. N. (Ed)** *GLONASS. Principy postroeniya i funkcionirovaniya* (GLONASS. Principles of architecture and functioning), Moscow, *Radiotekhnika*, 2010, 800 p. (in Russian).
17. **IGS Products**, available at: <http://igsb.jpl.nasa.gov/components/prods.html>

УДК 531.383

DOI: 10.17587/mau.16.764-770

М. А. Барулина, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., marina@barulina.ru,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

Математическое обеспечение конечно-элементного моделирования микромеханических датчиков инерциальной информации в рамках неклассической теории изгиба

Полностью разработано математическое обеспечение трехмерного конечно-элементного балочного элемента для численного моделирования микромеханических датчиков инерциальной информации и их узлов, включающее в себя матрицу масс, матрицу жесткости, матрицу Кориолиса, центробежную матрицу. Разработанное математическое обеспечение четко обосновано использованием для его вывода вариационных принципов механики и уравнений Лагранжа 2-го рода и полностью учитывает неклассическую теорию изгиба Тимошенко и влияние гироскопического эффекта.

Ключевые слова: микромеханический гироскоп, микромеханический акселерометр, конечно-элементное моделирование, теория Тимошенко, вибрации, матрица масс, матрица жесткости, матрица Кориолиса, центробежная матрица

Введение

Микромеханические датчики инерциальной информации (ММДИИ), гироскопы и акселерометры остаются одними из самых перспективных и востребованных датчиков [1–3]. Исследование ММДИИ, повышение их точности и эффективности остаются актуальными задачами, решение которых требует глубокого, с достаточной степенью обобщения, исследования особенностей взаимного влияния различных по своей природе физических процессов, учета влияния внешней среды функционирования этих датчиков и, в частности, таких важнейших факторов, оказывающих влияние на точность и эффективность приборов инерциальной информации, как вибрационные воздействия.

При численном моделировании ММДИИ следует учитывать их специфику. Так, принцип действия микромеханического гироскопа основан на

наличии подвижной части (чувствительного элемента), вибрации которого возбуждаются на резонансной частоте, и возникновении вследствие гироскопического эффекта при вращении основания датчика вторичных колебаний, являющихся мерой угловой скорости вращения основания датчика [2, 3]. При эксплуатации в реальных условиях ММДИИ могут испытывать вибрации с амплитудами до 10 g и с частотами до 2 кГц.

Одним из методов, которыми можно осуществлять моделирование ММДИИ, является метод конечных элементов (МКЭ) [4], который получил широкое распространение с развитием вычислительной техники. К достоинствам метода МКЭ можно отнести его универсальность и возможность применимости к решению самых разных классов задач. Одними из базовых типов для построения и исследования конечно-элементных моделей в задачах механики твердого тела, на основе которого про-

ектируются современные ММГ и ММА, являются балочный и/или стержневой элементы [4, 5]. Поэтому в настоящей работе особое внимание уделено именно этому типу элементов.

В работах [6, 7] показано, что для исследования динамических процессов в ММДИИ и их компонентах целесообразно использовать конечные элементы, реализующие уточненную теорию изгиба — теорию Тимошенко, которая описывает изгиб конечной балки ближе к реальному изгибу, чем классическая теория Эйлера—Бернулли.

Теория Тимошенко, в отличие от теории Эйлера—Бернулли, предполагает следующее [8, 9]:

- 1) поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные оси стержня до деформации, во время изгиба остаются плоскими, но не обязательно перпендикулярными деформированной оси стержня;
- 2) продольные сечения при изгибе не оказывают влияния друг на друга;
- 3) учитывается инерция поперечного сечения стержня при изгибе.

Надо отметить, что вопросы применения теории Тимошенко для решения различных задач динамики привлекают внимание как зарубежных, так и российских ученых [10—12].

Хотя основные теоретические аспекты метода конечных элементов достаточно хорошо разработаны [4, 5, 13—15], тем не менее, существует потребность в совершенствовании математического аппарата для конечных элементов, которые могут использоваться для численного моделирования ММДИИ. Такие элементы должны учитывать теорию Тимошенко и гироскопический эффект. В настоящее время существует потребность в создании математического аппарата, описывающего такие конечные элементы.

Так, если аппроксимирующие функции и матрицы жесткости для трехмерных и двухмерных стержневых конечных элементов были ранее получены в работе [15], матрица масс, полностью соответствующая теории Тимошенко, была построена в статье [7], матричные уравнения для конечных элементов, учитывающих гироскопический эффект, в общем виде были получены в работе [14], то выражений для компонент матриц конечных элементов, учитывающих и теорию Тимошенко, и гироскопический эффект, до настоящего времени получено не было.

Целью настоящей работы является построение математического обеспечения трехмерного конечного элемента, полностью учитывающего теорию Тимошенко и гироскопический эффект, с помощью применения вариационных принципов механики и уравнений Лагранжа 2-го рода.

Под математическим обеспечением конечного элемента понимаются все описывающие его матрицы — матрица жесткости, матрица масс, матрицы, учитывающие влияние сил Кориолиса (матрица Кориолиса) и центробежных сил (центробежная матрица).

Уравнение движения трехмерного конечного элемента

Рассмотрим конечный элемент (КЭ) длины L (рис. 1). В данной работе рассматривается только элемент с постоянным прямоугольным поперечным сечением, хотя большинство выкладок может быть распространено на балки с произвольным постоянным поперечным сечением.

Определим два узла — в центре левого и правого торцов соответственно (рис. 1). Введем локальную систему координат (xyz) , начало которой поместим в первом узле. Ось x направим по оси балочного КЭ, оси y и z — по главным осям инерции поперечного сечения. Таким образом, в локальной системе координат координаты первого узла будут $(0, 0, 0)$, координаты второго узла — $(L, 0, 0)$. Также введем в рассмотрение инерциальную систему координат (XYZ) , в которой с угловой скоростью $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ вращается КЭ.

Уравнение движения, учитывающее вращение КЭ, записанное в подвижной системе координат (xyz) без учета демпфирования, было приведено в работе [14] в общем матричном виде, без учета формы КЭ и аппроксимирующих функций, заданных для него, и имеет вид

$$M^{(e)}\ddot{q} + C^{(e)}\dot{q} + (K^{(e)} - S^{(e)})q = F^{(e)}, \quad (1)$$

где $M^{(e)}$ — матрица масс КЭ; $C^{(e)}$ — матрица Кориолиса, отражающая влияние гироскопических сил; $K^{(e)}$ — матрица жесткости; $S^{(e)}$ — центробежная матрица, выражающая влияние центробежных сил на динамику КЭ; q — вектор узловых перемещений КЭ, имеющий вид

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11} \ q_{12}]^T, \quad (2)$$

где q_1, q_7 — продольное перемещение 1-го и 2-го узлов вдоль оси x ; q_2, q_8 и q_3, q_9 — поперечное перемещение узлов в направлении оси y и z соответственно; q_4, q_{10} — углы кручения вокруг оси x ; q_5, q_{11} и q_6, q_{12} — углы изгиба в плоскости (xz) и (xy) соответственно (рис. 1).

Отметим, что уравнение движения всей конечного-элементной модели имеет вид, аналогичный (1). Матрицы модели составляются по определенным правилам [4, 5, 13] из соответствующих матриц КЭ, составляющих ее.

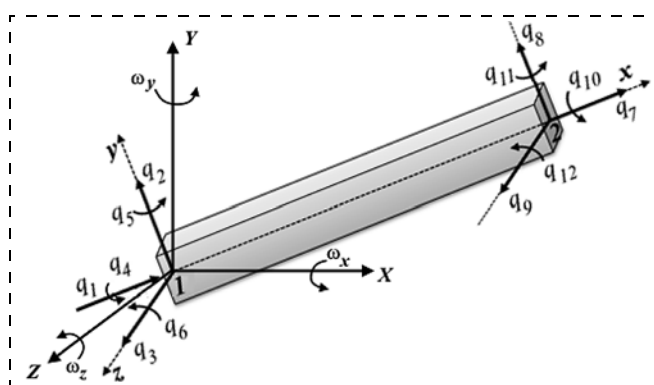


Рис. 1. Трехмерный элемент и узловые перемещения

Уравнения Лагранжа 2-го рода и матрицы КЭ

Рассматриваемый КЭ представляет собой консервативную механическую систему из деформируемого твердого тела, находящегося под воздействием внешней нагрузки, в том числе и гироскопических сил. Лангранжиан \mathcal{L} такой системы определяется следующей формулой [17]:

$$\mathcal{L} = T - \Pi,$$

где T и Π — кинетическая и потенциальная энергии соответственно.

Тогда, принимая узловые перемещения КЭ за обобщенные координаты и не учитывая демпфирование, уравнения Лагранжа 2-го рода можно записать в виде [18]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3)$$

где Q_i — обобщенные силы, $N = 12$ — число степеней свободы КЭ.

Известно [4], что потенциальную энергию Π системы без демпфирования можно представить в виде квадратичной формы по обобщенным координатам:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \kappa_{i,j} q_i q_j. \quad (4)$$

Кинетическую энергию рассматриваемой механической системы также можно представить в виде разложения по обобщенным скоростям и координатам. Покажем это.

Кинетическую энергию балки во вращающейся системе координат можно записать в виде следующего интеграла по объему V балки [18]:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V [(\dot{U}_x^*)^2 + (\dot{U}_y^*)^2 + (\dot{U}_z^*)^2] dV, \quad (5)$$

где ρ — плотность; $\dot{U}^* = [\dot{U}_x^* \ \dot{U}_y^* \ \dot{U}_z^*]^T$ — производная по времени от перемещения $U = [U_x \ U_y \ U_z]^T$ произвольной точки балки, взятая во вращающейся системе координат (xuz) , которая определяется следующим соотношением [18]:

$$\dot{U}^* = \dot{U} + \omega \times U, \quad (6)$$

где \dot{U} — так называемая относительная производная.

С учетом того что при учете теории Тимошенко компоненты вектора U представляются через перемещения центра поперечного сечения, углы его поворота записываются в виде [7]

$$\begin{aligned} U_x &= u_x(x, t) - \theta(x, t)y + \psi(x, t)z; \\ U_y &= u_y(x, t) - \varphi(x, t)z; \\ U_z &= u_z(x, t) + \varphi(x, t)y, \end{aligned} \quad (7)$$

где x, y, z — координаты точки в локальной системе координат (xuz) ; $u_x(x, t)$ определяет продольное перемещение центра сечения; $u_y(x, t)$, $u_z(x, t)$ — поперечные перемещения центра сечения в направлении осей y и z соответственно; $\varphi(x, t)$ — угол кручения вокруг оси x ; $\psi(x, t)$, $\theta(x, t)$ — углы изгиба в

плоскости (xz) и (xy) соответственно. Далее для краткости обозначения $u_x, u_y, u_z, \varphi, \psi, \theta$ как функций координаты x и времени t будет опущено.

В свою очередь, функции $u_x, u_y, u_z, \varphi, \psi, \theta$ можно выразить через компоненты вектора узловых перемещений q следующим образом [7, 15, 16]:

$$\begin{aligned} u_x &= (1 - \xi)q_1 + \xi q_7; \quad \varphi = (1 - \xi)q_4 + \xi q_{10}; \\ u_y &= -(\xi - 1)(\mu_z \xi - 2\mu_z \xi^2 + 1)q_2 + \\ &+ \frac{1}{2} [-\xi(\xi - 1)L(\mu_z - 2\mu_z \xi + 1)]q_6 - \xi(2\mu_z \xi^2 - 3\mu_z \xi + \\ &+ \mu_z - 1)q_8 + \frac{1}{2} [\xi(\xi - 1)L(2\mu_z \xi - \mu_z + 1)]q_{12}; \\ \theta &= 6\frac{1}{L} \xi(\xi - 1)\mu_z q_2 + (\xi - 1)(3\xi\mu_z - 1)q_6 - \\ &- 6\frac{1}{L} \xi(\xi - 1)\mu_z q_8 + \xi(3\mu_z \xi - 3\mu_z + 1)q_{12}; \\ u_z &= -(\xi - 1)(\mu_y \xi - 2\mu_y \xi^2 + 1)q_3 + \\ &+ \frac{1}{2} \xi(\xi - 1)L(\mu_y - 2\mu_y \xi + 1)q_5 - \xi(2\mu_y \xi^2 - 3\mu_y \xi + \\ &+ \mu_y - 1)q_9 - \frac{1}{2} [\xi(\xi - 1)L(2\mu_y \xi - \mu_y + 1)]q_{11}; \\ \psi &= -6\frac{1}{L} \xi(\xi - 1)\mu_y q_3 + (\xi - 1)(3\xi\mu_y - 1)q_5 + \\ &+ 6\frac{1}{L} \xi(\xi - 1)\mu_y q_9 + \xi(3\mu_y \xi - 3\mu_y + 1)q_{11}. \end{aligned} \quad (8)$$

В формулах (8) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}; \quad \mu_z = \frac{1}{1 + Y_z}; \quad \mu_y = \frac{1}{1 + Y_y}; \\ Y_z &= \frac{12EI_z}{kAGL^2}; \quad Y_y = \frac{12EI_y}{kAGL^2}, \end{aligned}$$

где E — модуль Юнга; G — модуль сдвига; A — площадь поперечного сечения; k — коэффициент сдвига, вводимый в теории Тимошенко и учитывающий нелинейность распределения нормальных продольных и поперечных напряжений в сечении; I_z, I_y — осевые моменты инерции поперечного сечения; L — длина элемента.

Подставляя (6) в (5), получаем, что кинетическую энергию можно представить в виде трех слагаемых:

$$T = T^{(0)} + T^{(1)} + T^{(2)}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} T^{(0)} &= \frac{\rho}{2} \int_V [(\dot{U}_x)^2 + (\dot{U}_y)^2 + (\dot{U}_z)^2] dV; \\ T^{(1)} &= \rho \int_V [\dot{U}_x(\omega_y U_z - \omega_z U_y) + \\ &+ \dot{U}_y(\omega_z U_x - \omega_x U_z) + \dot{U}_z(\omega_x U_y - \omega_y U_x)] dV; \\ T^{(2)} &= \frac{\rho}{2} \int_V [(\omega_y U_z - \omega_z U_y)^2 + \\ &+ (\omega_z U_x - \omega_x U_z)^2 + (\omega_x U_y - \omega_y U_x)^2] dV. \end{aligned} \quad (10)$$

Из формул (10) следует физический смысл $T^{(0)}$, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$. Так, $T^{(0)}$ определяет вклад в кинетическую энергию балки относительного движения; $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ появляются вследствие учета вращения системы координат, связанной с балкой, в глобальной инерциальной системе координат: $T^{(1)}$ определяет влияние силы Кориолиса, $T^{(2)}$ — центробежной силы.

Выражения (7) можно привести, учитывая (8), к линейным комбинациям узловых перемещений. Подставляя соотношения (7) в формулы (10), учитывая (8) и интегрируя, получаем, что $T^{(0)}$, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ могут быть представлены в виде следующих разложений по обобщенным координатам и скоростям ($N = 12$ — число степеней свободы конечного элемента):

$$T^{(0)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N m_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad T^{(1)} = \sum_{i,j=1}^N \tilde{c}_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j; \\ T^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N s_{i,j} q_i q_j. \quad (11)$$

Тогда, в соответствии с (4) и (9) и с учетом представлений (11), выражение для лагранжиана запишется в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N m_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i,j=1}^N \tilde{c}_{i,j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N s_{i,j} q_i q_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \kappa_{i,j} q_i q_j. \quad (12)$$

Подставляя полученное выражение (12) лагранжиана в уравнения Лагранжа 2-го рода (2), получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^N m_{i,j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N (\tilde{c}_{i,j} - \tilde{c}_{j,i}) \dot{q}_j + \\ + \sum_{j=1}^N (\kappa_{i,j} - s_{i,j}) q_j = Q_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (13)$$

Вычисление матриц конечного элемента

Записывая систему уравнений (13) в матричном виде и сравнивая с матричным уравнением движения КЭ (1), получаем, что компоненты матриц $M^{(e)}$, $C^{(e)}$, $K^{(e)}$, $S^{(e)}$ находятся приведением соответствующих выражений для кинетической и потенциальной энергий к разложению по узловым перемещениям и/или скоростям.

Для нахождения компонент матрицы масс $M^{(e)}$ нужно привести выражение для $T^{(0)}$ к соответствующей квадратичной форме (11) по обобщенным ускорениям. Для определения матрицы жесткости $K^{(e)}$ необходимо представить потенциальную энергию Π в виде (4). Компоненты центробежной матрицы $S^{(e)}$ будут равны коэффициентам разложения $T^{(2)}$ в квадратичную форму по обобщенным координатам. Чтобы определить компоненты матрицы Кориолиса $C^{(e)}$, необходимо привести вид $T^{(1)}$ к виду (11) и вычислить ее компоненты по формуле

$$c_{i,j} = \tilde{c}_{i,j} - \tilde{c}_{j,i},$$

где $c_{i,j}$ — компоненты матрицы Кориолиса, $\tilde{c}_{i,j}$ — коэффициенты в разложении $T^{(1)}$ по узловым координатам и скоростям.

Из образа формирования матриц $M^{(e)}$, $C^{(e)}$, $K^{(e)}$, $S^{(e)}$ вытекают некоторые их свойства. Так, матрицы $M^{(e)}$, $K^{(e)}$, $S^{(e)}$ будут симметричными; матрица $C^{(e)}$ — кососимметрической.

Матрицы масс $M^{(e)}$ и матрицы жесткости $K^{(e)}$, вычисленные по полученным формулам, совпадают с соответствующими матрицами, полученными ранее в работах [7, 15] с учетом теории Тимошенко.

Матрица Кориолиса будет иметь следующий вид:

$$C^{(e)} = \rho LA \begin{bmatrix} 0 & \hat{c}_{1,2} & -\hat{c}_{1,3} & 0 & \hat{c}_{1,5} & \hat{c}_{1,6} & 0 & \hat{c}_{1,8} & \hat{c}_{1,9} & 0 & \hat{c}_{1,11} & \hat{c}_{1,12} \\ -\hat{c}_{1,2} & 0 & -\hat{c}_{2,3} & \hat{c}_{2,4} & \hat{c}_{2,5} & 0 & \hat{c}_{2,7} & 0 & \hat{c}_{2,9} & \hat{c}_{2,10} & \hat{c}_{2,11} & 0 \\ -\hat{c}_{1,3} & -\hat{c}_{2,3} & 0 & \hat{c}_{3,4} & 0 & \hat{c}_{3,6} & \hat{c}_{3,7} & \hat{c}_{3,8} & 0 & \hat{c}_{3,10} & 0 & \hat{c}_{3,12} \\ 0 & -\hat{c}_{2,4} & -\hat{c}_{3,4} & 0 & \hat{c}_{4,5} & \hat{c}_{4,6} & 0 & \hat{c}_{4,8} & \hat{c}_{4,9} & 0 & \hat{c}_{4,11} & \hat{c}_{4,12} \\ -\hat{c}_{1,5} & -\hat{c}_{2,5} & 0 & -\hat{c}_{4,5} & 0 & \hat{c}_{5,6} & \hat{c}_{5,7} & \hat{c}_{5,8} & 0 & \hat{c}_{5,10} & 0 & \hat{c}_{5,12} \\ -\hat{c}_{1,6} & 0 & -\hat{c}_{3,6} & -\hat{c}_{4,6} & -\hat{c}_{5,6} & 0 & \hat{c}_{6,7} & 0 & \hat{c}_{6,9} & \hat{c}_{6,10} & \hat{c}_{6,11} & 0 \\ 0 & -\hat{c}_{2,7} & -\hat{c}_{3,7} & 0 & -\hat{c}_{5,7} & -\hat{c}_{6,7} & 0 & \hat{c}_{7,8} & \hat{c}_{7,9} & \hat{c}_{7,10} & \hat{c}_{7,11} & \hat{c}_{7,12} \\ -\hat{c}_{1,8} & 0 & -\hat{c}_{3,8} & -\hat{c}_{4,8} & -\hat{c}_{5,8} & 0 & -\hat{c}_{7,8} & 0 & \hat{c}_{8,9} & \hat{c}_{8,10} & \hat{c}_{8,11} & 0 \\ -\hat{c}_{1,9} & -\hat{c}_{2,9} & 0 & -\hat{c}_{4,9} & 0 & -\hat{c}_{6,9} & -\hat{c}_{7,9} & -\hat{c}_{8,9} & 0 & \hat{c}_{9,10} & 0 & \hat{c}_{9,12} \\ 0 & -\hat{c}_{2,10} & -\hat{c}_{3,10} & 0 & -\hat{c}_{5,10} & -\hat{c}_{6,10} & -\hat{c}_{7,10} & -\hat{c}_{8,10} & -\hat{c}_{9,10} & 0 & \hat{c}_{10,11} & \hat{c}_{10,12} \\ -\hat{c}_{1,11} & -\hat{c}_{2,11} & 0 & -\hat{c}_{4,11} & 0 & -\hat{c}_{6,11} & -\hat{c}_{7,11} & -\hat{c}_{8,11} & 0 & -\hat{c}_{10,11} & 0 & \hat{c}_{11,12} \\ -\hat{c}_{1,12} & 0 & -\hat{c}_{3,12} & -\hat{c}_{4,12} & -\hat{c}_{5,12} & 0 & -\hat{c}_{7,12} & 0 & -\hat{c}_{9,12} & -\hat{c}_{10,12} & -\hat{c}_{11,12} & 0 \end{bmatrix},$$

где компоненты определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \hat{c}_{1,2} = \hat{c}_{7,8} &= -\frac{\omega_z(\mu_z + 20)}{30}; \quad \hat{c}_{1,3} = \hat{c}_{7,9} = -\frac{\omega_y(\mu_y + 20)}{30}; \\ \hat{c}_{1,5} &= -\hat{c}_{7,11} = -\frac{L\omega_y(\mu_y + 5)}{60}; \\ \hat{c}_{1,6} &= -\hat{c}_{7,12} = -\frac{L\omega_z(\mu_z + 5)}{60}; \\ \hat{c}_{1,8} = -\hat{c}_{2,7} &= \frac{\omega_z(\mu_z - 10)}{30}; \quad \hat{c}_{1,9} = -\hat{c}_{3,7} = -\frac{\omega_y(\mu_y - 10)}{30}; \\ \hat{c}_{1,11} &= \hat{c}_{5,7} = -\frac{L\omega_y(\mu_y - 5)}{60}; \\ \hat{c}_{1,12} &= \hat{c}_{6,7} = -\frac{L\omega_z(\mu_z - 5)}{60}; \\ \hat{c}_{2,3} = \hat{c}_{8,9} &= -\frac{\omega_x(7\mu_z + 7\mu_y + 2\mu_y\mu_z + 140)}{210}; \\ \hat{c}_{2,4} = \hat{c}_{2,10} = \hat{c}_{4,8} &= -\hat{c}_{8,10} = \frac{p_z^2\omega_y\mu_z}{L}; \\ \hat{c}_{3,4} = \hat{c}_{3,10} = \hat{c}_{4,9} &= -\hat{c}_{9,10} = \frac{p_y^2\omega_z\mu_y}{L}; \\ \hat{c}_{2,5} = -\hat{c}_{8,11} &= \frac{L\omega_x(7\mu_y + 2\mu_y\mu_z + 35)}{420}; \\ \hat{c}_{2,9} = -\hat{c}_{3,8} &= \frac{\omega_x(7\mu_y + 7\mu_z + 2\mu_y\mu_z - 70)}{210}; \\ \hat{c}_{2,11} = \hat{c}_{5,8} &= \frac{L\omega_x(7\mu_y + 2\mu_y\mu_z - 35)}{420}; \\ \hat{c}_{3,6} = -\hat{c}_{9,12} &= \frac{L\omega_x(7\mu_z + 2\mu_y\mu_z + 35)}{420}; \\ \hat{c}_{4,6} = \hat{c}_{10,12} &= -\frac{p_z^2\omega_y(3\mu_z - 4)}{6}; \\ \hat{c}_{4,11} = -\hat{c}_{5,10} &= \frac{p_y^2\omega_z(3\mu_y - 2)}{6}; \\ \hat{c}_{3,12} = \hat{c}_{6,9} &= \frac{L\omega_x(7\mu_z + 2\mu_y\mu_z - 35)}{420}; \\ \hat{c}_{4,5} = \hat{c}_{10,11} &= \frac{p_y^2\omega_z(3\mu_y - 4)}{6}; \\ \hat{c}_{4,12} = -\hat{c}_{6,10} &= -\frac{p_z^2\omega_y(3\mu_z - 2)}{6}; \\ \hat{c}_{5,6} = \hat{c}_{11,12} &= -\frac{L^2\omega_x(\mu_z\mu_y + 7)}{420}; \\ \hat{c}_{5,12} = -\hat{c}_{6,11} &= -\frac{L^2\omega_x(\mu_z\mu_y - 7)}{420}; \end{aligned}$$

$p_y^2 = I_y/A$, $p_z^2 = I_z/A$ — квадраты радиусов инерции поперечного сечения.

Центробежная матрица и ее компоненты не приводятся вследствие ограниченного объема статьи.

Численные эксперименты

Для проверки разработанного математического обеспечения трехмерного КЭ был проведен численный расчет влияния гироскопического эффекта на простейшую модель вибрационного гироскопа. Разработанное математическое обеспечение алгоритмически было реализовано в программном модуле *TBElementlib* [19], с использованием которого был разработан специализированный программный комплекс. Полученные в процессе численного моделирования результаты сравнивались с результатами, полученными в широко известном универсальном комплексе ANSYS при конечно-элементном моделировании с помощью элементов, учитывающих теорию Тимошенко.

Рассмотрим простейший вибрационный гироскоп, моделью которого может служить консольная балка (рис. 2) постоянного квадратного сечения со следующими параметрами [3, 20]: плотность $\rho = 2228 \text{ кг/м}^3$, модуль Юнга $E = 190 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,266$, длина $L = 164 \text{ мкм}$, высота и ширина $h = 1 \text{ мкм}$.

Первая собственная частота такой балки составит $54\,913 \text{ Гц}$ согласно расчетам, проведенным как с помощью разработанного математического и программного аппарата, так и в ANSYS.

К незакрепленному торцу балки приложена сила $P(t)$ в направлении оси y , изменяющаяся по синусоидальному закону с амплитудой $A_p = 80 \text{ нН}$ и частотой вынужденных колебаний, равной первой собственной частоте: $f_p = 54\,914 \text{ Гц}$. Предположим, что рассматриваемый гироскоп вращается с переменной угловой скоростью $\omega_x = 100 \text{ рад/с}$.

Демпфирование задавали путем ввода в уравнение (1) матрицы демпфирования, представляющей собой линейную комбинацию матрицы масс и матрицы жесткости.

Коэффициент сдвига при численных расчетах вычислялся по формуле [8]

$$k = \frac{3}{2} - \frac{3}{10(1+\nu)} - \frac{3\nu}{4(1+\nu)},$$

где ν — коэффициент Пуассона.

На рис. 3 приведены результаты моделирования с помощью разработанного в данной работе математического и программного обеспечения.

Моделирование проводили с шагом $2 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, коэффициент при матрице жесткости при формировании матрицы демпфирования принимался равным $1 \cdot 10^{-6}$, так чтобы амплитуда первичных колебаний составляла примерно 20 мкм .

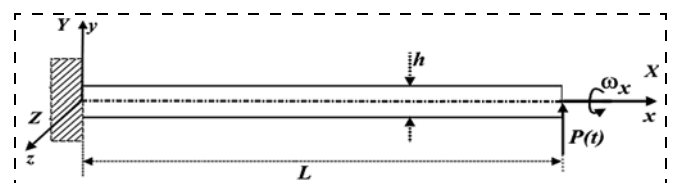


Рис. 2. Простейший вибрационный гироскоп

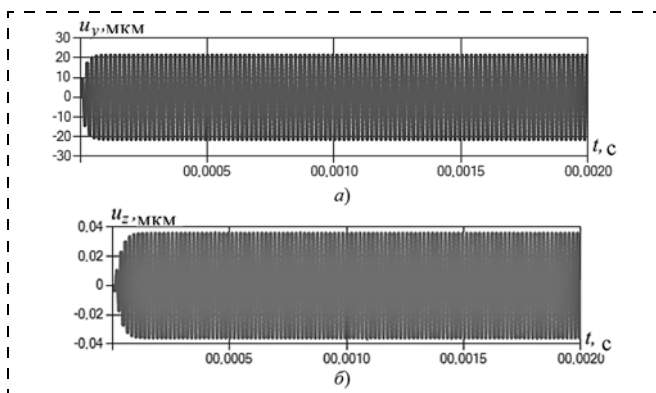


Рис. 3. Колебания по оси y первичных колебаний (а) и по оси вторичных колебаний (б) при наличии угловой скорости вращения $\omega_x = 100$ рад/с

На рис. 3, а показаны возникающие под действием вынуждающей силы $P(t)$ колебания в плоскости (xy). На рис. 3, б приведен график колебаний, возникающий в плоскости (zx) при наличии угловой скорости вращения $\omega_x = 100$ рад/с.

Максимальное значение прогиба u_y в плоскости (xy) составило 21,339 мкм, максимальное значение прогиба u_z в плоскости (xz) равно 0,0357 мкм.

Соответствующие значения, полученные при гармоническом анализе в ANSYS с аналогичными параметрами, равны 20,898 и 0,0339 мкм. Таким образом, отличие значений, полученных с помощью разработанного в данной работе математического и программного обеспечения, и значений, полученных в результате моделирования в ANSYS, составляет менее 5%. Подобное отличие можно объяснить неодинаковостью используемых элементов в ANSYS и в разработанном оригинальном программном обеспечении.

Надо отметить, что в результате гармонического анализа в ANSYS можно получить амплитудно-частотные характеристики, но нельзя рассчитать переходные процессы. Для построения графиков переходных процессов в ANSYS нужно использовать другой вид анализа (transient), расчет с помощью которого с шагом $2 \cdot 10^{-7}$ с занимает длительное время и ресурсы.

Заключение

В работе полностью разработано математическое обеспечение трехмерного КЭ, учитывающее как теорию Тимошенко, так и гироскопический эффект.

Использование при выводе матриц КЭ вариационных принципов механики — формализма Лагранжа и уравнений Лагранжа 2-го рода, обеспечивает прозрачность и обоснованность математических выводов.

Разработанное математическое обеспечение может быть использовано для создания специализированных программных комплексов, обеспечивающих, в отличие от универсальных программных комплексов с закрытым программным кодом типа

ANSYS, прозрачность реализации алгоритмов, полный контроль за ходом вычислений и существенно более низкую стоимость.

Таким образом, трехмерный КЭ на основе теории Тимошенко может быть использован для решения широкого круга задач статики и динамики, в том числе и при возникающем гироскопическом эффекте, например, в области разработки и исследования микромеханических датчиков инерциальной информации.

Список литературы

1. Пешехонов В. Г. Современное состояние и перспективы развития гироскопических систем // Гироскопия и навигация. 2011. № 1. С. 3—17.
2. Расопов В. Я. Микромеханические приборы. М.: Машиностроение, 2007. 400 с.
3. Джашитов В. Э., Панкратов В. М. Датчики, приборы и системы авиакосмического и морского приборостроения в условиях тепловых воздействий / Под общ. ред. акад. РАН В. Г. Пешехонова. С.-Петербург: ГНЦ РФ ЦНИИ "Электроприбор", 2005. 404 с.
4. Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высш. шк., 1985. 392 с.
5. Мяченков В. И., Мальцев В. П., Майборода В. П., Петров В. Б. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справочник / Под общ. ред. В. И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989. 520 с.
6. Барулина М. А. Частотные уравнения и собственные частоты элементов вибрационных микромеханических гироскопов на основе сдвиговой теории Тимошенко // Нано- и микросистемная техника. 2015. № 4. С. 21—31.
7. Барулина М. А. Построение матрицы масс трехмерного конечного элемента для моделирования динамики микромеханических датчиков инерциальной информации и их узлов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 5. С. 352—360.
8. Григолок Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер.: Мех. тверд. деформ. тел. М.: ВИНТИ, 1973. Т. 5. 272 с.
9. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
10. Белишев М. И., Пестов А. Л. Прямая динамическая задача для балки Тимошенко // Записки научных семинаров ПОМИ. 2009. Т. 369. С. 16—47.
11. Тулкина А. Н. Определение частот и форм колебаний стержневой системы, содержащей нанобъект, на основе теории С. П. Тимошенко // Вестник СПбГУ (Серия 1). 2011. Вып. № 1. С. 144—154.
12. Metin O. Kaya Free vibration analysis of rotating Timoshenko beam by differential transform method // Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal. 2006. Vol. 78 (3). P. 194—203.
13. Mircea Rades. Finite element analysis. Bucuresti: Printech, 2006. 274 p.
14. Kubba V. Use of the finite element method for the vibration analysis of rotation machinery. A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy. University of Nottingham, 1981.
15. Przemieniecki J. S. Theory of matrix structural analysis. Dover, 1985. 468 с.
16. Bazoune A., Knulief Y. A. Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element // Journal of Sound and Vibration. 2003. 259 (2). P. 473—480.
17. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 448 с.
18. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 824 с.
19. Барулина М. А. Свидетельство № 2015615559 от 20.05.2015 Федеральной службы по интеллектуальной собственности о государственной регистрации программ для ЭВМ: "Модуль для конечно-элементного моделирования на основе балочных элементов с учетом теории Тимошенко и гироскопических сил (TBElementlib)"
20. Джашитов В. Э., Панкратов В. М., Барулина М. А. Теоретические основы разработки и создания суперминиатюрного микромеханического многофункционального датчика инерциальной информации // Нано- и микросистемная техника. 2010. № 5 (118). С. 46—54.

Finite-Element Modeling of the Micromechanical Inertial Sensors Using Non-Classical Beam Theory

M. A. Barulina, marina@barulina.ru✉, Institute of Precision Mechanics and Control, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation

Corresponding author: Barulina Marina A., Ph. D., Senior Researcher, Institute of Precision Mechanics and Control, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: marina@barulina.ru

Received on June 22, 2015

Accepted on July 05, 2015

A complete mathematical support of the 3D finite beam element for modeling of the micromechanical inertial measurement sensors and their components has been developed. The mathematical support includes mass matrix, stiffness matrix, Coriolis matrix, and centrifugal matrix. The mathematical support takes full account of the gyroscopic effect and the theory of Timoshenko. Employing of the Variational principles of mechanics and Lagrange's equation makes the process of derivation of the mathematical support clear, accurate and well-founded. The developed software was verified by a numerical simulation of the influence of the gyroscopic effect on the dynamics of the simplest model of the vibrating gyro. The results obtained due to the numerical simulation by using the developed mathematical support were compared with the results obtained in ANSYS, well-known engineering simulation software. The difference between these results was less than 5%. This difference can be explained by the dissimilarity of the elements used in ANSYS and in the developed software. This paper shows that the developed mathematical support can be used for development of special software, which ensures, in contrast to the universal proprietary closed-source software such as ANSYS, a transparent implementation of the algorithms, a complete control of the progress of computing and significantly lower cost. Thus, the developed mathematical support for the three-dimensional finite element based on the theory of Timoshenko can be used to solve a wide range of problems of statics and dynamics, including the gyroscopic effect, e.g. in the area of research and development of the microelectromechanical sensors of the inertial information.

Keywords: micromechanical gyroscope, micromechanical accelerometer, finite element modeling, Timoshenko theory, vibration, mass matrix, stiffness matrix, Coriolis matrix, centrifugal matrix

For citation:

Barulina M. A. Finite-element Modeling of the Micromechanical Inertial Sensors Using Non-classical Beam Theory, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 11, pp. 764–770.

DOI: 10.17587/mau.16.764-770

References

1. Peshehonov V. G. *Sovremennoe sostojanie i perspektivy razvitiya giroskopicheskikh sistem* (Gyroscopic Systems: Current Status and Prospects), *Girokopija i Navigacija*, 2011, no. 1, pp. 3–17 (in Russian).
2. Raspopov V. Ja. *Mikromechanicheskie pribory* (Micromechanical sensors), Moscow, Mashinostroenie, 2007, 400 p. (in Russian).
3. Dzhashitov V. Je., Pankratov V. M. *Datchiki, pribory i sistemy aviakosmicheskogo i morskogo priborostroenija v uslovijah teplovyh vozdejstvij* (Sensors, devices and systems for aerospace and marine engineering in the conditions of thermal influence), St. Petersburg, GNC RF CNII "Jelektropribor", 2005, 404 p. (in Russian).
4. Obrazcov I. F., Savel'ev L. M., Hazanov H. S. *Metod konechnyh jelementov v zadachah stroitel'noj mehaniki letatel'nyh apparatov* (The finite element method in problems of structural mechanics of aircraft), Moscow, Vysshaya shkola, 1985, 392 p. (in Russian).
5. Mjachnikov V. I., Mal'cev V. P., Majboroda V. P., Petrov V. B. *Raschety mashinostroitel'nyh konstrukcij metodom konechnyh jelementov: Spravochnik*, Moscow, Mashinostroenie, 1989, 520 p. (in Russian).
6. Barulina M. A. *Chastotnye uravnenija i sobstvennye chastoty jelementov vibracionnyh mikromechanicheskikh giroskopov na osnove sdvigovoj teorii Timoshenko* (Frequency Equations and Self-Induced Vibrations of the Elements of the Vibratory Micromechanical Gyroscopes Based on Timoshenko Shift Theory), *Nano- i Mikrosistemnaja Tehnika*, 2015, no. 4, pp. 21–31 (in Russian).
7. Barulina M. A. *Postroenie matritsy mass trekhmernogo konechnogo elementa dlya modelirovaniya dinamiki mikromechanicheskikh datchikov inertzial'noi informatsii i ikh uzlov* (Development of a Mass Matrix of the 3D Finite Element for Modeling of the Dynamics of Micromechanical Inertial Sensor Data and their Components), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 5, pp. 352–360 (in Russian).
8. Grigoljuk Je. I., Selezov I. T. *Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, platin i obolochek* (Non-classical theory of vibrations of rods, plates and shells), *Itogi Nauki i Tehniki. Ser.: Meh. tverd. deform. tel*, Moscow, VINITI, 1973, vol. 5, 272 p. (in Russian).
9. Timoshenko S. P., Yang D. Kh., Uiver U. *Kolebaniya v inzhernom dele* (Fluctuations in engineering), Moscow, Mashinostroenie, 1985, 472 p.
10. Belishev M. I., Pestov A. L. *Pryamaya dinamicheskaya zadacha dlya balki Timoshenko* (Forward dynamical problems for the Timoshenko beam), *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 2009, vol. 369, pp. 16–47.
11. Tulkina A. N. *Opređenje chastot i form kolebanij sterzhnevoj sistemy, soderzhashhey nanoob'ekt, na osnove teorii S. P. Timoshenko* (Determination of frequencies and modes of vibration of bar system containing nano-object, based on the theory of Timoshenko), *Vestnik SPbGU (Seriya 1)*, 2011, iss. 1, pp. 144–154.
12. Metin O. *Kaya Free vibration analysis of rotating Timoshenko beam by differential transform method*, *Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal*, 2006, vol. 78 (3), pp. 194–203.
13. Mircea Rades. *Finite element analysis*, Bucuresti, Pritech, 2006, 274 p.
14. Kubba B. *Use of the finite element method for the vibration analysis of rotation machinery. A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy*, University of Nottingham, 1981.
15. Przemieniecki J. S. *Theory of matrix structural analysis*, Dover, 1985, 468 p.
16. Bazoune A., Knulief Y. A. *Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element*, *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 259 (2), pp. 473–480.
17. Berdichevskij V. L. *Variacionnye principy mehaniki sploshnoj sredy* (Variational principles of continuum mechanics), Moscow, Nauka, Glavnaja redakcija fiziko-matematicheskoy literatury, 1983, 448 p. (in Russian).
18. Lur'e A. I. *Analičeskaja mehanika* (Analytical mechanics), Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1961, 824 p. (in Russian).
19. Barulina M. A. *Svidetel'stvo № 2015615559 ot 20.05.2015 Federal'noj sluzhbe po intellektual'noj sobstvennosti o gosudarstvennoj registracii programm dlja JeVM: "Modul" dlja konechno-jelementnogo modelirovaniya na osnove balochnykh jelementov s uchetoj teorii Timoshenko i giroskopicheskikh sil (TBEelementlib)* (in Russian).
20. Dzhashitov V. Je., Pankratov V. M., Barulina M. A. *Teoreticheskie osnovy razrabotki i sozdaniya superminiatjurnogo mikromechanicheskogo mnogofunkcional'nogo datchika inertzial'noj informacii* (The Theoretical Bases of Development and Creation of the Superminiature Micro-mechanica/Multifunction Sensor of the Inertial Information), *Nano- i Mikrosistemnaja Tehnika*, 2010, no. 5 (118), pp. 46–54 (in Russian).