

Я. Г. Сапунков, канд. физ.-мат. наук, доц.,  
 А. В. Молоденков, канд. техн. наук, ст. науч. сотр, iptmuran@san.ru,  
 Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

## Алгоритм оптимального по энергии разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях\*

*Рассматривается задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота космического аппарата как твердого тела произвольной динамической конфигурации, без ограничения на функцию управления при произвольных граничных условиях. В классе обобщенных конических движений проведена модификация задачи оптимального разворота, которая позволила получить аналитическое решение. Дается алгоритм оптимального разворота космического аппарата. Приводятся числовые примеры, показывающие, что решения модифицированной задачи хорошо аппроксимируют решение классической задачи оптимального разворота космического аппарата.*

**Ключевые слова:** оптимальное управление, космический аппарат, твердое тело, обобщенное коническое движение, произвольные граничные условия

### Введение

Построение управления пространственной переориентацией космического аппарата (КА) как твердого тела в традиционной постановке включает решение задач программного углового движения (разворота), программного управления и поиска управления, стабилизирующего программу углового движения в малом. Задача расчета программного углового движения и реализующего его управления во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления. Аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи (например, [1—8]); в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем, аналитическое решение задачи оптимального разворота КА (твердого тела) в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В данной статье (в разделах 1—3) в традиционной постановке рассматривается задача оптимального в смысле минимума энергозатрат разворота КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА без ограничения на функцию управления. С применением кватернионов на основании принципа максимума Л. С. Понтрягина получены выражения для структуры оптимального управления, функции Гамильтона—Понтрягина и сопряженной системы

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00165).

уравнений для исходной задачи. В разделах 4, 5 статьи представлено аналитическое решение модифицированной задачи оптимального по энергии разворота КА при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА, доведенное до алгоритма. В классе обобщенных конических движений проведена модификация классической задачи оптимального разворота, которая позволила получить аналитические решения для уравнений движения, содержащие произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача с квадратичным функционалом, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. Найденное аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное решение классической задачи оптимального разворота КА при произвольных граничных условиях. Получены явные выражения для вектора угловой скорости, управляющего момента и траектории движения КА. Следует отметить, что для случаев аналитической разрешимости традиционной задачи оптимального разворота при сферической симметрии КА, когда наложены ограничения на краевые условия задачи (плоский эйлеров разворот, коническое движение), решения традиционной и модифицированной задач полностью совпадают. В разделе 6 приводятся краткое описание процедуры численного решения традиционной задачи, ранее полученного в работах [9, 10], и численные примеры, показывающие близость решений традиционной и модифицированной задач оптимального разворота произвольного КА при произвольных граничных условиях. Отметим, что среди примеров рассматриваются развороты Международной космической станции (МКС) и КА "Спейс Шаттл".

Статья продолжает исследования, начатые в работах [10, 11].

## 1. Постановка традиционной задачи

Движение КА как твердого тела произвольной динамической конфигурации вокруг центра масс описывается уравнениями [2]

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega, \quad (1.1)$$

$$\dot{\omega} = \Gamma^{-1}\mathbf{M} - \Gamma^{-1}[\omega, \mathbf{I}\omega], \quad (1.2)$$

где  $\Lambda(t) = \lambda_0(t) + \lambda_1(t)i_1 + \lambda_2(t)i_2 + \lambda_3(t)i_3$  — кватернион поворота КА;  $\omega(t) = \omega_1(t)i_1 + \omega_2(t)i_2 + \omega_3(t)i_3$  — вектор угловой скорости;  $\mathbf{M}(t) = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T$  — вектор внешнего момента, действующего на КА; матрица

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

— тензор инерции. Фазовые координаты  $\Lambda$ ,  $\omega$  и управление  $\mathbf{M}$  удовлетворяют требованиям задачи оптимального управления [12] ( $\Lambda(t)$ ,  $\omega(t)$  — непрерывные функции,  $\mathbf{M}(t)$  — кусочно-непрерывная функция); кватернион  $\Lambda(t)$  нормирован, т. е.  $\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ ;  $i_1, i_2, i_3$  — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с осями трехмерного векторного пространства  $i_1, i_2, i_3$ ; символ "o" означает кватернионное умножение, а  $[\cdot, \cdot]$  — векторное произведение. В динамических уравнениях Эйлера (1.2)  $I_1, I_2, I_3$  — главные моменты инерции КА (твердого тела).

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \Lambda(T) = \Lambda_T \quad (1.3)$$

и угловой скорости КА

$$\omega(0) = \omega_0, \omega(T) = \omega_T. \quad (1.4)$$

Требуется определить оптимальное управление  $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$  системой (1.1), (1.2) при граничных условиях (1.3), (1.4), доставляющее минимум функционалу

$$J = \int_0^T (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt, \quad (1.5)$$

где время  $T$  произвольно и зафиксировано.

## 2. Переход к безразмерным переменным

Перейдем от размерных переменных задачи к безразмерным по формулам

$$I^{\text{масш}} = ((I_1^2 + I_2^2 + I_3^2)/3)^{1/2}, I_k^{\text{безраз}} = I_k/I^{\text{масш}}, \\ k = 1, 2, 3;$$

$$\omega^{\text{безраз}} = T\omega, t^{\text{безраз}} = T^{-1}t, \\ \mathbf{M}^{\text{безраз}} = (I^{\text{масш}})^{-1}T^2\mathbf{M}, J^{\text{безраз}} = (I^{\text{масш}})^{-2}T^3J,$$

при этом вид формул (1.1)—(1.4) не изменится, а функционал (1.5) запишется следующим образом:

$$J = \int_0^1 (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt. \quad (2.1)$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи (1.1)—(1.4) (где  $T = 1$ ), (2.1) в безразмерных переменных, и верхние индексы у них будут опущены.

## 3. Применение принципа максимума

Выполним процедуру принципа максимума Л. С. Понтрягина [1, 12]. Введем вспомогательные функции  $\Psi(t)$  (кватернион) и  $\phi(t)$  (вектор), сопряженные к фазовым переменным  $\Lambda(t)$ ,  $\omega(t)$ . Составим функцию Гамильтона—Понтрягина

$$H = -\psi^*(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\Psi, \Lambda \circ \omega)/2 + \\ + (\phi, \Gamma^{-1}\mathbf{M} - \Gamma^{-1}[\omega, \mathbf{I}\omega]), \quad (3.1)$$

где постоянная  $\psi^* \geq 0$ , а  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение векторов.

Будем рассматривать невырожденные решения краевой задачи принципа максимума, для которых  $\psi^* > 0$ . В силу однородности функции Гамильтона—Понтрягина  $H$  [12] в формуле (3.1) положим  $\psi^* = 1$ .

Сопряженная система имеет вид

$$\begin{cases} 2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega; \\ \dot{\phi} = -\text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi)/2 - [\Gamma^{-1}\phi, \mathbf{I}\omega] + \mathbf{I}[\Gamma^{-1}\phi, \omega], \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $\text{vect}(\cdot)$  обозначает векторную часть кватерниона, а  $\tilde{\cdot}$  — сопряжение кватерниона. Как видно, уравнения для переменных  $\Psi$  и  $\Lambda$  совпадают, а их решения различаются на кватернионную мультипликативную константу  $\mathbf{C}$ :

$$\Psi = \mathbf{C} \circ \Lambda. \quad (3.3)$$

Используя этот эффект и введя обозначение [1]

$$\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi) = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \quad (3.4)$$

сопряженную систему (3.2) запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda; \\ \dot{\phi} = -\mathbf{p}/2 - [\Gamma^{-1}\phi, \mathbf{I}\omega] + \mathbf{I}[\Gamma^{-1}\phi, \omega]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Следует отметить, что применение этого приема [1], основанного на самосопряженности дифференциальной кватернионной системы уравнений (1.1) (замена кватернионной сопряженной переменной  $\Psi$  на векторную переменную  $\mathbf{p}$  (3.4)) позволяет понизить размерность краевой задачи, получаемой после применения принципа максимума, на четыре.

Условие максимума функции Гамильтона—Понтрягина (3.1) дает следующую структуру оптимального управления:

$$\mathbf{M}^{\text{опт}} = \Gamma^{-1}\boldsymbol{\varphi}/2. \quad (3.6)$$

Как видно, вектор-функция управления в задаче носит непрерывный характер.

Функция Гамильтона—Понтрягина (3.1) с учетом новой переменной  $\mathbf{p}$  (3.4) примет вид

$$H = -(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + (\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})/2 + (\boldsymbol{\varphi}, \Gamma^{-1}\mathbf{M} - \Gamma^{-1}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}]). \quad (3.7)$$

#### 4. Модифицированная задача оптимального разворота КА

Движение КА по-прежнему описывается соотношениями (1.1)—(1.4), при этом начальное и конечное значения по угловому положению и угловой скорости КА произвольны.

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального разворота твердого тела (КА) является разрешимость классической задачи Дарбу — аналитического определения  $\Lambda(t)$  из уравнения (1.1) при известных  $\Lambda_0, \boldsymbol{\omega}(t)$ .

Для кватернионного дифференциального уравнения (1.1) при условии, что вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}(t)$  задается выражением

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{i}_1 \frac{df}{dt} \text{sing}(t) + \mathbf{i}_2 \frac{df}{dt} \text{cosg}(t) + \mathbf{i}_3 \frac{df}{dt}, \quad (4.1)$$

в котором  $f(t)$  и  $g(t)$  — произвольные функции времени, известно решение [13], удовлетворяющее начальному условию (1.3):

$$\Lambda(t) = \Lambda_0 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}, \quad (4.2)$$

где символ  $\exp\{\cdot\}$  обозначает кватернионную экспоненту [1]. Формулы (4.1), (4.2) включают в себя все известные точные аналитические решения традиционной задачи оптимального разворота КА при его сферической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения КА постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1—3, 5—8, 11].

Выражение (4.1) и решение (4.2) можно обобщить, добавив поворот на постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой поворот задается с помощью кватерниона  $\mathbf{K}$ ,  $\|\mathbf{K}\| = 1$ . Тогда вектор  $\boldsymbol{\omega}$  и кватернион  $\Lambda$  будут определяться соотношениями

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{K}} \circ \left( \mathbf{i}_1 \frac{df}{dt} \text{sing}(t) + \mathbf{i}_2 \frac{df}{dt} \text{cosg}(t) + \mathbf{i}_3 \frac{df}{dt} \right) \circ \mathbf{K}; \quad (4.3)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}. \quad (4.4)$$

Будем рассматривать вторые производные от функций  $f$  и  $g$  в качестве управляющих параметров. Тогда, если ввести обозначения

$$\frac{df}{dt} = f_1, \quad \frac{dg}{dt} = g_1, \quad (4.5)$$

то можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих управляемую систему:

$$\frac{df}{dt} = f_1, \quad \frac{dg}{dt} = g_1, \quad \frac{df_1}{dt} = u_1, \quad \frac{dg_1}{dt} = u_2, \quad (4.6)$$

где  $f, f_1, g, g_1$  — фазовые координаты;  $u_1, u_2$  — управляющие параметры.

Ограничимся случаем, когда кватернион  $\mathbf{K}$  представляется в виде произведения:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\}, \quad (4.7)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  — некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы  $\mathbf{K}_1$  и  $\mathbf{K}_2$  определяют поворот вектора  $\boldsymbol{\omega}$  (4.1) вокруг осей  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ . Поворот вокруг оси  $\mathbf{i}_3$  уже включен в формулу (4.3), если учесть, что в функцию  $g(t)$  входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион  $\tilde{\mathbf{K}}$  будет представляться следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\}. \quad (4.8)$$

Условия того, что выражения для  $\boldsymbol{\omega}, \Lambda$  (4.3), (4.4) удовлетворяют граничным условиям (1.3), (1.4), с учетом (4.7), (4.8) запишутся в виде

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \text{sing}(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \text{cosg}(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_0; \quad (4.9)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(T) \text{sing}(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \text{cosg}(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \boldsymbol{\omega}_T; \quad (4.10)$$

$$\Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(T) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \Lambda_T. \quad (4.11)$$

Тогда для управляемой системы (4.6) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления. Требуется найти оптимальные управления  $u_1(t), u_2(t)$ , которые переводят управляемую систему (4.6) из начального состояния

$$f = f(0), f_1 = f_1(0), g = g(0), g_1 = g_1(0) \quad (4.12)$$

в конечное состояние

$$f = f(T), f_1 = f_1(T), g = g(T), g_1 = g_1(T), \quad (4.13)$$

удовлетворяющие соотношениям (4.9)—(4.11), в которых  $\alpha_1, \alpha_2$  выступают как параметры, подлежащие определению, и доставляют минимум функционалу

$$J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt. \quad (4.14)$$

Соотношения (4.9)—(4.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 f_1(0) \text{sing}(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \text{cosg}(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0) = \\ = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \omega_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2; \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 f_1(T) \text{sing}(T) + \mathbf{i}_2 f_1(T) \text{cosg}(T) + \mathbf{i}_3 g_1(T) = \\ = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \omega_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2; \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(T) - f(0))/2\} \circ \\ \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(T)/2\} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Такую задачу оптимального управления будем называть модифицированной задачей оптимального разворота КА.

Управляющий момент, соответствующий решению модифицированной задачи оптимального разворота КА, определяется из (1.2) по формуле

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \dot{\omega} + [\omega, \mathbf{I} \omega]. \quad (4.18)$$

## 5. Решение задачи с помощью принципа максимума

Функция Гамильтона—Понтрягина для поставленной задачи оптимального управления имеет вид

$$H = -(u_1^2 + u_2^2) + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 u_1 + \psi_4 u_2, \quad (5.1)$$

где  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  — сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_1, \quad \frac{d\psi_4}{dt} = -\psi_2. \quad (5.2)$$

Общее решение уравнений (5.2), содержащее произвольные постоянные  $c_1, \dots, c_4$ , имеет вид

$$\psi_1 = c_1, \quad \psi_2 = c_2, \quad \psi_3 = -c_1 t + c_3, \quad \psi_4 = -c_2 t + c_4. \quad (5.3)$$

Из условия максимума для функции Гамильтона—Понтрягина (5.1) определяется оптимальное управление

$$\begin{aligned} u_1 = \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2, \\ u_2 = \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

После подстановки (5.4) в систему уравнений (4.6) находится общее решение для фазовых координат, содержащее восемь произвольных постоянных  $c_1, \dots, c_8$ :

$$\begin{aligned} f &= -c_1 t^3/12 + c_3 t^2/4 + c_5 t + c_6; \\ g &= -c_2 t^3/12 + c_4 t^2/4 + c_7 t + c_8; \\ f_1 &= -c_1 t^2/4 + c_3 t/2 + c_5; \\ g_1 &= -c_2 t^2/4 + c_4 t/2 + c_7. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В связи с тем, что  $c_6$  входит в функцию  $f$  как аддитивная постоянная, то из формул (4.4) видно, что эта постоянная не оказывает влияние; поэтому  $c_6$  можно положить равной нулю. Таким образом, для определения девяти неизвестных постоянных задачи  $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8$  и  $\alpha_1, \alpha_2$  служат девять уравнений из системы (4.15)—(4.17) (отметим, что в кватернионном уравнении (4.17) независимыми являются только три уравнения в скалярной форме из-за нормированности кватерниона  $\Lambda$ ). Если формулы (5.5) подставить в (4.3), (4.4), то будут получены аналитические выражения для определения законов изменения оптимальной угловой скорости и оптимальной траектории твердого тела. Эти выражения определяют оптимальный в смысле минимума функционала энергозатрат (4.14) разворот КА в классе обобщенных конических движений. Управляющий момент согласно (4.1), (4.18) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \mathbf{I} \dot{\omega} + [\omega, \mathbf{I} \omega] = \mathbf{I} (\tilde{\mathbf{K}} \circ ((\mathbf{i}_1(u_1 \text{sing} + f_1 g_1 \text{cosg}) + \\ + \mathbf{i}_2(u_1 \text{cosg} - f_1 g_1 \text{sing}) + \mathbf{i}_3 u_2) \circ \mathbf{K}) + \\ + [\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1 \text{sing} + \mathbf{i}_2 f_1 \text{cosg} + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \\ \circ \mathbf{K}, \mathbf{I} (\tilde{\mathbf{K}} \circ (\mathbf{i}_1 f_1 \text{sing} + \mathbf{i}_2 f_1 \text{cosg} + \mathbf{i}_3 g_1) \circ \mathbf{K})]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Формула (5.6) с учетом (5.4), (5.5) определяет аналитическое решение для управляющего момента, соответствующего решению модифицированной задачи. Модифицированная задача оптимального разворота КА тем самым решена полностью.

Следует отметить, что при сферической симметрии КА квадрат модуля управляющего момента выражается через управляющие параметры и фазовые координаты модифицированной задачи следующим образом:

$$\mathbf{M}^2 = u_1^2 + f_1^2 g_1^2 + u_2^2. \quad (5.7)$$

Если в задаче оптимального разворота сферически-симметричного КА векторы граничных условий по угловой скорости  $\omega_0, \omega_T$  положить параллельными  $\text{vect}(\tilde{\Lambda}_0 \circ \Lambda_T)$  (плоский эйлеров разворот КА), то решения задач в классической и модифицированной постановках полностью совпадут. То же самое можно сказать и о случае, когда решение классической задачи оптимального разворота сферически-симметричного КА получено в классе конических движений типа решения [11]. В этих случаях слагаемое  $f_1^2 g_1^2$  в (5.8) обращается в нуль, и функционал (4.14) полностью переходит в функционал (1.5) ((2.1)) классической задачи.

Приведем алгоритм решения задачи оптимального разворота КА (твердого тела) произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях в классе обобщенных конических движений в безразмерных переменных.

**Шаг 1.** По заданным граничным условиям по угловому положению  $\Lambda_0, \Lambda_T$  (1.3), угловой скорости

$\omega_0, \omega_T$  (1.4) и времени переориентации КА ( $T = 1$ ) из формул (4.7), (4.8) и девяти уравнений системы (4.15)–(4.17) определяются девять неизвестных постоянных задачи  $c_1, \dots, c_5, c_7, c_8, \alpha_1, \alpha_2$  и строятся функции  $f, f_1, g, g_1$ .

Шаг 2. Используя формулы (4.7), находим компоненты кватерниона  $\mathbf{K}$ .

Шаг 3. По формуле (4.3)

$$\omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ \left( \mathbf{i}_1 \frac{df}{dt} \text{sing}(t) + \mathbf{i}_2 \frac{df}{dt} \text{cosg}(t) + \mathbf{i}_3 \frac{dg}{dt} \right) \circ \mathbf{K}$$

вычисляется вектор угловой скорости КА.

Шаг 4. По формуле (4.4)

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 (f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}$$

вычисляется кватернион ориентации КА.

Шаг 5. По формуле (5.6) вычисляется вектор управляющего момента КА.

## 6. Численные примеры

В данном разделе приводятся примеры численного решения задачи оптимального разворота КА в традиционной и модифицированной постановках для трех вариантов динамической конфигурации: сферической симметрии, МКС [14] и КА "Спейс Шаттл" [15].

Численное решение традиционной задачи оптимального разворота КА (1.1)–(1.4), (2.1) на основании принципа максимума Л. С. Понтрягина сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \omega; \\ \dot{\omega} = \Gamma^{-1} \mathbf{M} - \Gamma^{-1} [\omega, \mathbf{I}\omega]; \\ \dot{\phi} = -\mathbf{p}/2 - [\Gamma^{-1} \phi, \mathbf{I}\omega] + \mathbf{I}[\Gamma^{-1} \phi, \omega]; \\ \mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_v \circ \Lambda, \mathbf{c}_v = \text{const}, \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\Lambda(0) = \Lambda_0, \omega(0) = \omega_0, \quad (6.2)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_T, \omega(T) = \omega_T, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{M}^{\text{опт}} = \Gamma^{-1} \phi/2, \quad (6.4)$$

откуда подлежат нахождению величины  $\mathbf{M}^{\text{опт}}, T^{\text{опт}}, \Lambda^{\text{опт}}, \omega^{\text{опт}}, \mathbf{c}_v$ .

Конечное условие (6.3) необходимо переписать в семимерном фазовом пространстве  $\Lambda \times \omega$  в виде

$$\begin{aligned} \text{vect}(\Lambda(T) \circ \tilde{\Lambda}_T) &= 0, \\ \omega(T) &= \omega_T. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для решения краевой задачи (6.1), (6.2), (6.4), (6.5) разработан итерационный численный метод [9], представляющий собой комбинацию методов Рунге–Кутты, Ньютона и градиентного спуска. Важно отметить, что условие совпадения кватерниона ориентации КА в конечный момент времени с кватернионом, определяющим заданную конечную ориентацию КА, (условие (6.3)) заменено условием

обращения в нуль векторной части кватернионного произведения  $\Lambda(T) \circ \tilde{\Lambda}_T$  (6.5). В [15, 16] авторы пытались выполнить условие  $\Lambda(T) = \tilde{\Lambda}_T$ , что приводило к вырождению матриц частных производных от невязок. В качестве первого приближения по недостающим начальным условиям при решении краевой задачи (6.1), (6.2), (6.4), (6.5) оптимального управления КА с произвольными граничными условиями по угловому положению и угловой скорости КА берутся начальные условия по переменным  $\phi, \mathbf{p}$ , полученные при решении задачи оптимального разворота сферически симметричного КА в классе плоских эйлеровых разворотов [8].

Численное решение модифицированной задачи оптимального разворота КА было построено по формулам разделов 4, 5.

Во всех примерах расчеты проводили для граничных условий:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= (0,7951, 0,2981, -0,3975, 0,3478); \\ \Lambda_T &= (0,8443, 0,3985, -0,3260, 0,1485); \\ \omega_0 &= (0,2739, -0,2388, -0,3); \omega_T = (0,0, 0,0, -0,59). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Решения традиционной и модифицированной задачи оказались близкими. Для примера, в табл. 1–3 приведем значения компонент вектора  $\mathbf{M}(t)$  на концах и в середине интервала времени движения КА  $[0, T]$  ( $T = 1$ ) в этих двух решениях.

Пример 1.  $I_1 = I_2 = I_3 = 1$  (случай сферической симметрии КА). Значения постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_6, c_8$ , входящих в аналитическое решение модифицированной задачи, таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -0,0421, \alpha_2 = -0,2226, c_1 = 3,2902, \\ c_2 &= -1,4885, c_3 = 2,2113, c_4 = -1,45, c_5 = -0,4156, \\ c_6 &= 0, c_7 = -0,2221, c_8 = -0,9216. \end{aligned}$$

Таблица 1

| $t$     | $M_1^{\text{традиц}}$ | $M_2^{\text{традиц}}$ | $M_3^{\text{традиц}}$ | $M_1^{\text{модиф}}$ | $M_2^{\text{модиф}}$ | $M_3^{\text{модиф}}$ |
|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0       | -0,9854               | 0,7259                | -0,4892               | -0,9647              | 0,7634               | -0,4932              |
| 0,5     | -0,2917               | 0,2087                | -0,2878               | -0,3103              | 0,1687               | -0,2847              |
| $T = 1$ | 0,5077                | -0,1272               | -0,0985               | 0,5350               | -0,0220              | -0,1024              |

Таблица 2

| $t$     | $M_1^{\text{традиц}}$ | $M_2^{\text{традиц}}$ | $M_3^{\text{традиц}}$ | $M_1^{\text{модиф}}$ | $M_2^{\text{модиф}}$ | $M_3^{\text{модиф}}$ |
|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0       | -0,2091               | 0,8349                | -0,6241               | -0,2182              | 0,9608               | -0,6892              |
| 0,5     | -0,0741               | 0,2697                | -0,3795               | -0,0725              | 0,1683               | -0,3630              |
| $T = 1$ | 0,1318                | -0,2804               | -0,1131               | 0,1261               | -0,0253              | -0,1307              |

Таблица 3

| $t$     | $M_1^{\text{традиц}}$ | $M_2^{\text{традиц}}$ | $M_3^{\text{традиц}}$ | $M_1^{\text{модиф}}$ | $M_2^{\text{модиф}}$ | $M_3^{\text{модиф}}$ |
|---------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0       | -0,1556               | 0,8793                | -0,5955               | -0,1897              | 1,0127               | -0,6669              |
| 0,5     | -0,0780               | 0,2846                | -0,3644               | -0,0610              | 0,1807               | -0,3459              |
| $T = 1$ | 0,1444                | -0,2897               | -0,1065               | 0,1052               | -0,2682              | -0,1246              |

Значения функционала оптимизации в традиционной и модифицированной задаче:  $J_{\text{традиц}} = 0,47824$ ,  $J_{\text{модиф}} = 0,47975$ . В рассматриваемом примере расхождение между значениями функционала (2.1) для традиционной и модифицированной задач составляет 0,315 %,

Пример 2 (МКС)  $I_1 = 4\,853\,000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $I_2 = 23\,601\,000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $I_3 = 26\,278\,000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  (размерные моменты инерции) или  $I_1 = 0,2358$ ,  $I_2 = 1,1466$ ,  $I_3 = 1,2766$  (безразмерные моменты инерции). Значения функционала оптимизации в традиционной и модифицированной задаче:  $J_{\text{традиц}} = 0,35522$ ,  $J_{\text{модиф}} = 0,36404$ . Расхождение между значениями функционала (2.1) для традиционной и модифицированной задач составляет 2,37 %,

Пример 3 (КА "Спейс Шаттл")  $I_1 = 3\,400\,648 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $I_2 = 21\,041\,672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ,  $I_3 = I_2 = 21\,041\,672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  (размерные моменты инерции) или  $I_1 = 0,1967$ ,  $I_2 = 1,2168$ ,  $I_3 = I_2 = 1,2168$  (безразмерные моменты инерции). Значения функционала оптимизации в традиционной и модифицированной задаче:  $J_{\text{традиц}} = 0,35797$ ,  $J_{\text{модиф}} = 0,36775$ . Расхождение между значениями функционала (2.1) для традиционной и модифицированной задач составляет 2,73 %.

Ниже для примера 2 (МКС) на рис. 1, 2 представлены графики изменения во времени компонент угловой скорости КА  $\omega_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , векторной части кватерниона ориентации КА  $\Lambda_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$ , и компонент вектора управляющего момента  $M_i(t)$ ,  $i = \overline{1,3}$  в традиционной и модифицированной задаче оптимального разворота.

Следует отметить, что в примере 1 (сферическая симметрия КА) значения функционала (2.1) и управляющие моменты в традиционной и модифицированной задачах практически совпали. Из примеров 2, 3 видно, что с возникновением существенной разницы между моментами инерции КА (твердого тела)  $I_1, I_2, I_3$  увеличивается расхождение между управляющими моментами, полученными при решении традиционной и модифицированной задач в зависимости от характера изменения моментов инерции КА между собой. Но в то же время различие между значениями функционала качества процесса управления (2.1), вычисленными при решении традиционной и модифицированной задач, приемлемо. Надо заметить, что значение функционала качества процесса управления — определяющая характеристика задачи.

На основе большого объема проведенных численных расчетов решения задачи об оптимальном

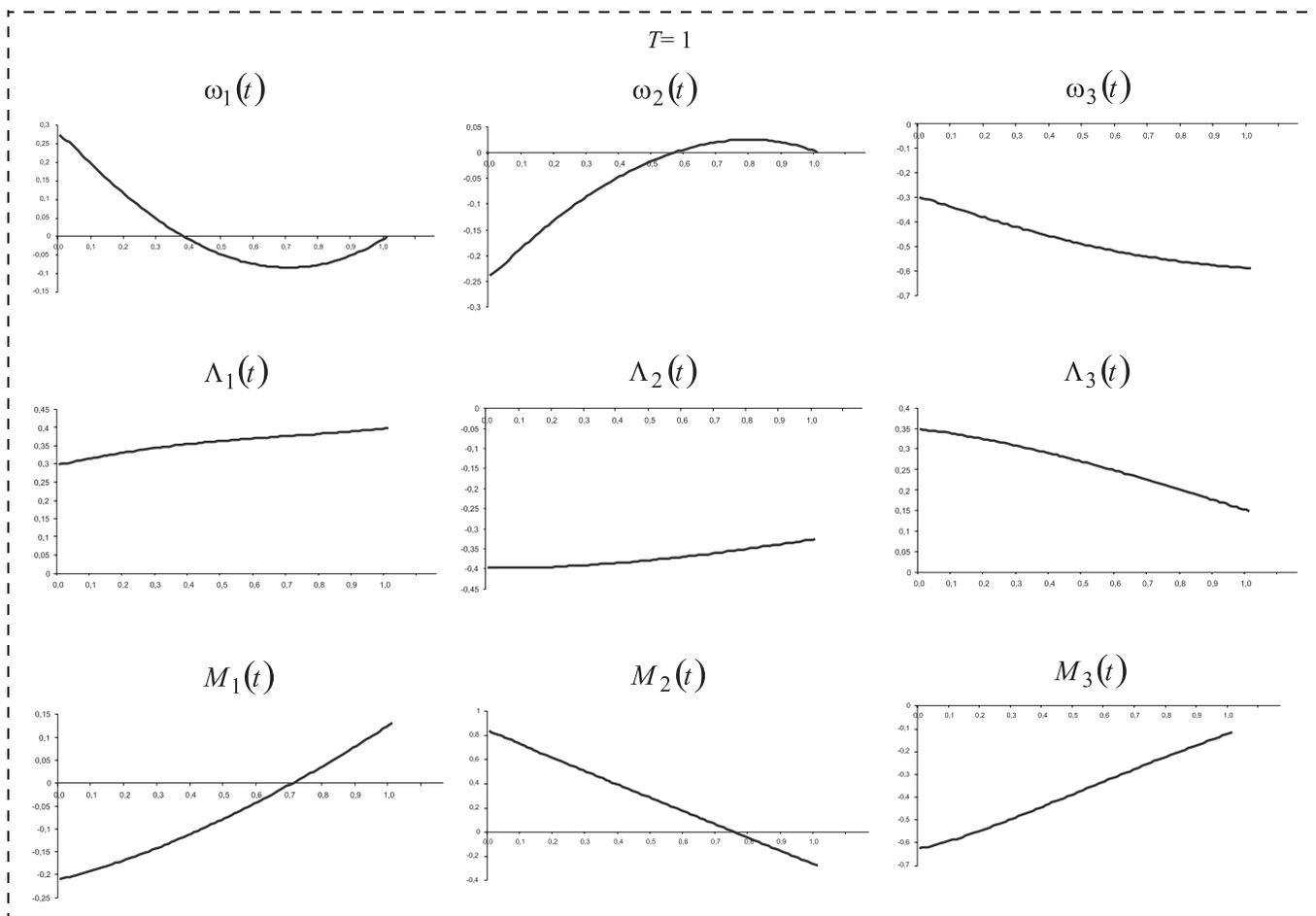


Рис. 1. Результаты решения традиционной задачи

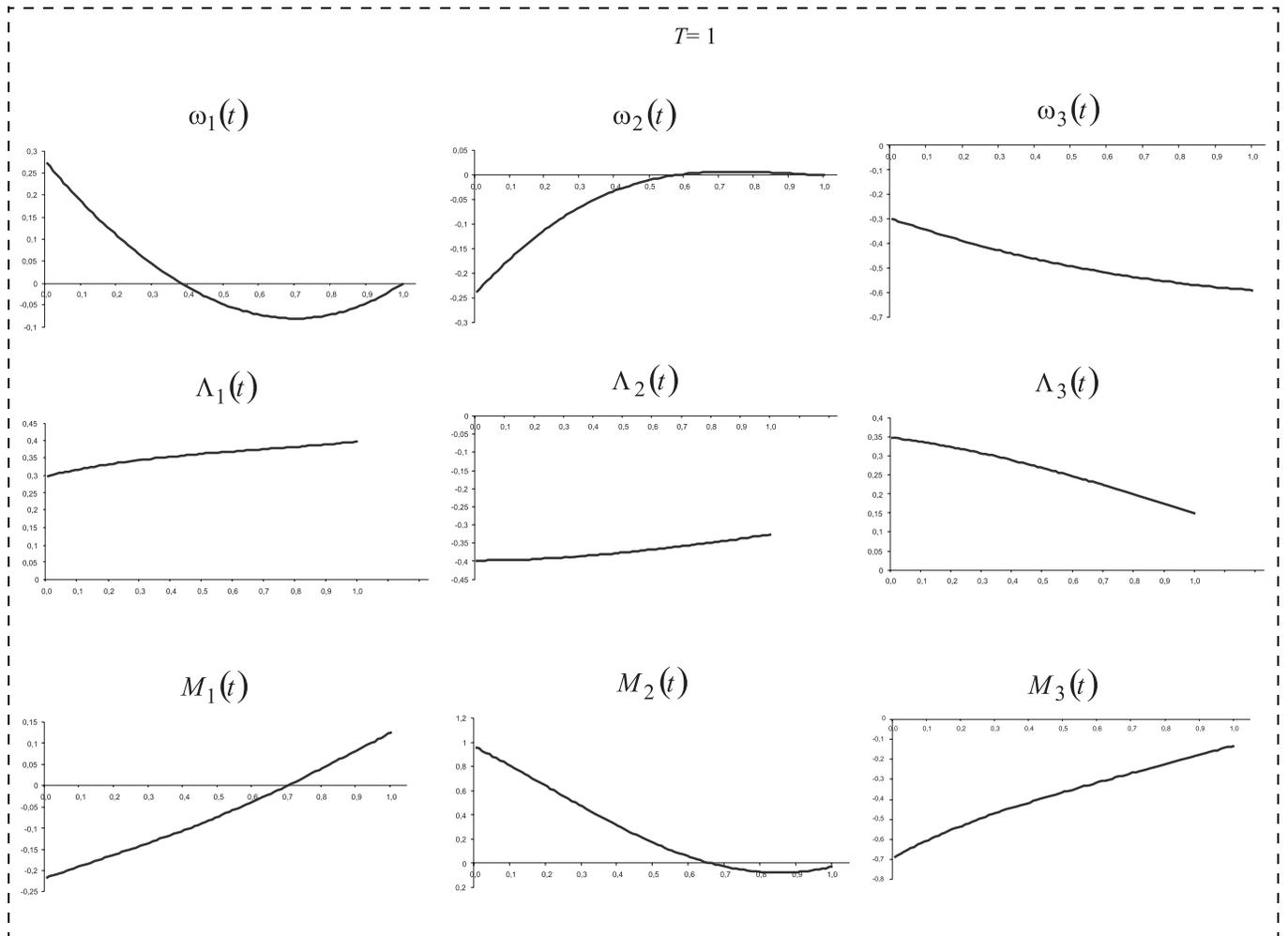


Рис. 2. Результаты решения модифицированной задачи

развороте КА (твёрдого тела) для различных граничных условий и для различных распределений масс в КА, что характеризуется значениями главных моментов инерции  $I_1, I_2, I_3$ , можно сделать следующие выводы:

1) кинематические характеристики разворота КА (кватернион ориентации  $\Lambda$  и вектор угловой скорости  $\omega$ ) в традиционной задаче слабо зависят от распределения масс в твёрдом теле (КА) и, в основном, определяются граничными условиями задачи, а в модифицированной задаче кинематические характеристики вращения КА зависят только от граничных условий задачи;

2) управляющий момент существенно зависит от распределения масс в КА и граничных условий и в традиционной, и в модифицированной постановках задачи.

Из сравнения результатов расчетов следует, что аналитическое решение модифицированной задачи представляет собой приближенное решение задачи об оптимальном развороте КА в традиционной постановке. В табл. 4 представлены значения компонент кватернионов ориентации КА рассмотренных выше динамических конфигураций в традици-

онной задаче и результаты решения модифицированной задачи в середине интервала времени движения ( $t = 0,5$ ) при граничных условиях (6.6). Различие в компонентах кватернионов ориентации КА в традиционной и модифицированной задачах наблюдается в третьем или четвертом знаке после запятой, причем различие в третьем знаке составляет не более трех единиц.

Также отметим, что кватернион ориентации твёрдого тела  $\Lambda(t)$  может быть двузначным [1], т. е.  $\Lambda$  и  $-\Lambda$  соответствуют одному и тому же угловому положению твёрдого тела в пространстве.

Таблица 4

| Конфигурация КА; традиционная задача | $\lambda_0$ | $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\lambda_3$ |
|--------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| КА "Спейс Шаттл"                     | 0,80773     | 0,36539     | -0,37727    | 0,26781     |
| МКС                                  | 0,80862     | 0,36344     | -0,37795    | 0,26683     |
| Сферически-симметричный КА           | 0,80959     | 0,36252     | -0,37679    | 0,26679     |
| Модифицированная задача              | 0,80987     | 0,36268     | -0,37564    | 0,26734     |

## Заклучение

Представленное в статье аналитическое приближенное решение задачи оптимального разворота КА (твердого тела) произвольной динамической конфигурации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА может найти свое применение при построении систем управления КА, как и известные аналитические решения задачи оптимальной переориентации сферически-симметричного КА в классе плоских эйлеровых разворотов.

## Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Scrivener S. L., Thompson R. C. Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1994. V. 17, N 2. P. 225–233.
3. Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б. Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 6. С. 1235–1238.
4. Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исслед. 1984. Т. 22. Вып. 3. С. 352–360.
5. Сиротин А. Н. Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 36–46.
6. Сиротин А. Н. Об оптимальной по быстродействию пространственной переориентации в положение покоя вращающегося сферически-симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3.
7. Молоденков А. В. Кватернионное решение задачи оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота

твердого тела // Проблемы механики и управления. Сб. научн. трудов. Пермь: ПГУ, 1995. С. 122–131.

8. Молоденков А. В. Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного космического аппарата для одного частного случая // Сб. трудов 6-й междунар. конф. "Системный анализ и управление космическими комплексами". Крым, Евпатория. М.: МАИ, 2001. С. 42.

9. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Численное решение задачи оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 6. Автоматическое и автоматизированное управление летательными аппаратами. 2008. № 6. С. 10–15.

10. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Решение модифицированной задачи оптимального разворота космического аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2012. № 11. С. 66–70.

11. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального разворота сферически-симметричного космического аппарата в классе конических движений // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 2. С. 163–172.

12. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. 384 с.

13. Молоденков А. В. К решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 3–13.

14. Банит Ю. Р., Беляев М. Ю., Добринская Т. А., Ефимов Н. И., Сазонов В. В., Стажков В. М. Определение тензора инерции международной космической станции по телеметрической информации. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2002. № 57. 19 с.

15. Li F., Bainum P. M. Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1990. V. 13, N 1. P. 38–45.

16. Lastman G. J. A Shooting Method for Solving Two-Point Boundary-Value Problems Arising from Non-Singular Bang-Bang Optimal Control Problems // Intern. J. Control. 1978. V. 27, N 4. P. 513–524.

## Algorithm for the Optimal Turn of a Spacecraft in the Sense of the Minimal Energy Loss under Arbitrary Boundary Conditions

Ya. G. Sapunkov, A. V. Molodenkov, iptmuran@san.ru ✉,  
Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov

Corresponding author: Molodenkov Aleksey V., Ph. D., Senior Researcher,  
Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control,  
Institute of Precision Mechanics and Control Problems, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation  
e-mail: iptmuran@san.ru

Received on April 08, 2015

Accepted April 24, 2015

*The problem of the optimal turn in the sense of minimal energy loss of a spacecraft as a rigid body with an arbitrary distribution of mass without constraint of a control action and under arbitrary boundary conditions is considered in the quaternion statement. In the class of the generalized conical motions a modification was made of the task of optimal rotation, which allowed to obtain analytical solution to the movement equations containing any constants and two any scalar functions (parameters of the generalized conic movement). Concerning these functions and their derivatives the optimizing problem with a square functionality, in which the second derivative of these two functions acts as control, was formulated and solved using Pontryagin maximum principle. Explicit expressions for the optimal angular velocity and the optimal control vectors of a spacecraft are presented. The motion trajectory of a spacecraft is generalized as a conical precession. Algorithm for the optimal turn of a spacecraft is given. The found analytical solution to the modified problem can be considered as an approximate solution to the classical problem of an optimal turn of a spacecraft under arbitrary boundary conditions. Numerical examples are presented showing that the solution of the modified problem well approximates the solution of the classical problem of a spacecraft optimal turn. These examples contain reorientations of the International Space Station and of the Space Shuttle.*

**Keywords:** optimal control, spacecraft, rigid body with an arbitrary distribution of mass, generalized conical motion, arbitrary boundary conditions

**Acknowledgements:** This work was supported by a grant from the Russian Foundation for Basic Research, project No. 12-01-00165.

For citation:

**Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.** Algorithm for the Optimal Turn of a Spacecraft in the Sense of the Minimal Energy Loss under Arbitrary Boundary Conditions, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 8, pp. 536–544.

DOI: 10.17587/mau.16.536-544

### References

1. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** *Primenenie kvaternionov v zadachax orientatsii tverdogo tela* (The Use of Quaternions in Problems of Orientation of Solid Bodies), Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).
2. **Scrivener S. L., Thompson R. C.** Survey of time-optimal attitude maneuvers, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 1994, vol. 17, no. 2, pp. 225–233.
3. **Petrov B. N., Bodner V. A., and Alekseev K. B.** *Analiticheskoe reshenie zadachi upravleniya prostranstvennym povorotnym manevrom* (Analytical Solution of the Spatial Slew Manuever), *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1970, vol. 192, no. 6, pp. 1235–1238 (in Russian).
4. **Branets V. N., Chertok M. B., and Kaznacheev Yu. V.** *Optimal'nyj razvorot tverdogo tela s odnoy osyu simmetrii* (Optimal Slew of a Solid Body with a Single Symmetry Axis), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1984, vol. 22, no. 3, pp. 352–360 (in Russian).
5. **Sirotin A. N.** *Optimal'noe upravlenie pereorientatsiej simmetrichnogo tverdogo tela iz polozheniya pokoya v polozhenie pokoya* (Optimal Reorientation of a Symmetric Solid Body from a State of Rest to Another State of Rest), *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1989, no. 1, pp. 36–46 (in Russian).
6. **Sirotin A. N.** *Ob optimal'noj po bystrodejstviyu prostranstvennoj pereorientatsii v polozhenie pokoya vrashhayushhegosya sfericheskii-simmetrichnogo tverdogo tela* (On the Time-Optimal Spatial Reorientation of a Rotating Spherically Symmetric Solid Body to a State of Rest), *Izvestiya Rossiyskoi Akademii Nauk. Mekh. Tverd. Tela*, 1997, no. 3, pp. 18–27 (in Russian).
7. **Molodenkov A. V.** *Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo v smysle minimuma energeticheskix zatrat razvorota tverdogo tela* (Quaternion-Based Solution of the Energy Optimal Slew of a Solid

Body), in *Collected Papers "Problems of Mechanics and Control"*, Perm Gos. Univ., 1995, pp. 122–131 (in Russian).

8. **Molodenkov A. V.** *Solution of the Optimal Slew Problem for a Spherically Symmetric Spacecraft for a Specific Case* (Reshenie zadachi optimal'nogo razvorota sfericheskii simmetrichnogo kosmicheskogo apparata dlya odnogo chastnogo sluchaya), in *Proc. of 6-th Int. Conf. on System Analysis and Control of Space Systems*, Evpatoriya, Ukraine, Moscow Institute of Aviation, 2001, pp. 42 (in Russian).

9. **Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.** *Chislennoe reshenie zadachi optimal'noj pereorientatsii vrashhayushhegosya kosmicheskogo apparata* (Numerical Solution of the Optimal Spacecraft Reorientation Problem), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2008, no. 6, pp. 10–15 (in Russian).

10. **Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.** *Reshenie modifitsirovannoj zadachi optimal'nogo razvorota kosmicheskogo apparata* (Solution of the Modified Problem of the Optimal Turn of a Spacecraft) *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2012, no. 11, pp. 66–70 (in Russian).

11. **Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.** *Analiticheskoe reshenie zadachi optimal'nogo razvorota sfericheskii-simmetrichnogo kosmicheskogo apparata v klasse konicheskix dvizhenij* (Analytical Solution of the Optimal Slew Problem of a Spherically Symmetric Spacecraft in the Class of Conical Motion), *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2013, vol. 52, no. 3, pp. 491–501 (in Russian).

12. **Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., and Mishchenko E. F.** *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh processov* (The Mathematical Theory of Optimal Processes). Moscow, Nauka, 1961, 384 p. (in Russian).

13. **Molodenkov A. V.** *K resheniyu zadachi Darbu* (On the Solution of the Darboux Problem), *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 167–176 (in Russian).

14. **Banit Yu. R., Belyaev M. Yu., Dobrinskaya T. A., Efimov N. I., Sazonov V. V., Stazhkov V. M.** *Opreделение tenzora inercii mezhdu-narodnoj kosmicheskoy stancii po telemetricheskoy informatsii* (Estimating the Inertia Tensor of the International Space Station on the Base of the Telemetry Information), *Preprint of the Inst. of Appl. Math. of RAS*, 2002, no. 57, 19 p. (in Russian).

15. **Li F., Bainum P. M.** Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, vol. 13, no. 1, pp. 38–45.

16. **Lastman G. J.** A Shooting Method for Solving Two-Point Boundary-Value Problems Arising from Non-Singular Bang-Bang Optimal Control Problems, *Intern. J. Control*, 1978, vol. 27, no. 4, pp. 513–524.

III ЕЖЕГОДНАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ ВЫСТАВКА

**ВУЗ  
ПРОМ  
ЭКСПО  
2015**

ОТ ИДЕИ К РЕАЛЬНОСТИ

**2-4 ДЕКАБРЯ 2015**

Федеральная площадка для демонстрации потенциала современных технологий и научных изобретений России  
Научный шаг в будущее России

• БОЛЕЕ 100 ВУЗОВ,  
а также:  
• ПРОМЫШЛЕННЫЕ ПРЕДПРИЯТИЯ  
• НАУЧНЫЕ ОРГАНИЗАЦИИ  
• МАЛЫЕ ИННОВАЦИОННЫЕ ПРЕДПРИЯТИЯ  
• ИНЖИНИРИНГОВЫЕ ЦЕНТРЫ  
• ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ПЛАТФОРМЫ  
• ГОСУДАРСТВЕННЫЕ КОРПОРАЦИИ  
• ТЕРРИТОРИАЛЬНЫЕ ИННОВАЦИОННЫЕ КЛАСТЕРЫ

**vuzpromexpo.ru**

организаторы:

стратегические партнеры:



организаторы:



стратегические партнеры:



Технополис «Москва» г. Москва, Волгоградский проспект 42/13