

**М. С. Лурье**, д-р техн. наук, проф., m-o-lur@yandex.ru,  
**О. М. Лурье**, канд. техн. наук, m-o-lur@yandex.ru,  
**А. С. Фролов**, канд. техн. наук, sibgtu-frolov@rambler.ru,  
Сибирский государственный университет науки и технологий  
имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск

## Исследование динамических режимов систем стабилизации тока мощных электромагнитов с широтно-импульсной модуляцией

*Настоящее исследование посвящено рассмотрению метода оценки устойчивости работы системы с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ), основанного на замене ее эквивалентной системой с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ). Проведено приближенное исследование динамических режимов работы систем с ШИМ с учетом устойчивости для системы автоматического регулирования тока питания электромагнитов в условиях действия внешних и внутренних помех. Представлены варианты выполнения схем широтно-импульсных регуляторов для питания электромагнита на основе однополярного и двухполярного элементов с ШИМ. Показана возможность линеаризации систем с ШИМ для последующей детальной оценки устойчивости таких систем. Показана перспективность применения функционально-дифференциальных уравнений для анализа устойчивости автоматических систем с ШИМ. Представлена оценка динамических режимов систем с ШИМ, основанная на принципе эквивалентности сигналов с ШИМ и АИМ, которая опирается на равенства площадей модулированных сигналов, на основе чего установлена связь между статическими коэффициентами передачи элементов с АИМ и ШИМ. Представлены выражения для исследования замкнутой одноконтурной схемы автоматического управления, содержащей идеальный импульсный элемент, экстраполятор нулевого порядка с коэффициентом передачи и непрерывной частью, имеющей линейную передаточную функцию. На примере системы стабилизации тока мощных электромагнитов с широтно-импульсным регулятором проанализированы частотные характеристики эквивалентной импульсной системы с учетом замены широтной модуляции на амплитудную. На основе проведенного анализа полученной передаточной функции предложены пути оценки устойчивости исходной системы с ШИМ с использованием критерия устойчивости Найквиста. Сделан вывод о преимуществе системы с ШИМ по сравнению с системой с АИМ в части устойчивости, а также даны рекомендации по применению полученных данных при анализе переходных процессов в таких системах.*

**Ключевые слова:** широтно-импульсная модуляция, линеаризация, нелинейная дискретная система, амплитудно-импульсная модуляция, устойчивость автоматической системы

### Введение

Для ряда физических исследований и технологических процессов, связанных с управлением электроприводом, требуются высокостабильные магнитные поля с широким диапазоном их изменения. Такие поля создаются мощными электромагнитами, как правило, имеющими кованый сердечник.

Источниками питания электромагнитов служат стабилизаторы тока мощностью до 100 кВт с широким диапазоном регулирования выходного тока. Особыми требованиями к ним является высокая точность поддержания заданного значения тока (до 0,01 %) при действии различных возмущений и малое значение длительной нестабильности (до 0,001 % за 6...8 ч работы).

Схема стабилизации тока включает, как правило, многофазный управляемый выпрямитель, охваченный обратной связью по напряжению, для предварительного регулирования напряжения и широтно-импульсный преобразователь для точного регулирования

тока, охваченный соответствующей обратной связью. Система автоматического регулирования напряжения здесь является подчиненной системой в контуре регулирования тока.

Необходимость высокой точности работы стабилизации тока предъявляет соответствующие требования к условиям устойчивости систем автоматического регулирования тока в условиях действия внешних и внутренних помех, поэтому в данной работе мы сделали попытку приближенного исследования динамических режимов работы систем с широтно-импульсной модуляцией (ШИМ).

Поскольку электромагнит является колебательным звеном, то анализ устойчивости системы управления здесь оказывается обязательным. Исследованиям устойчивости автоматических систем управления с ШИМ посвящено достаточно много работ [1—9]. Затруднения вызывает то обстоятельство, что такие системы являются не только дискретными, но и нелинейными и не описываются дискретными (разностными) уравнениями. Для описания таких

систем могут быть использованы функционально-дифференциальные уравнения, причем нелинейные операторы, моделирующие импульсные элементы, в ряде случаев являются разрывными. Принципы описания импульсных систем с ШИМ приведены в работах [1, 10].

### Постановка задачи исследования

Широтно-импульсный регулятор может быть выполнен по двум схемам, показанным на рис. 1.

В схеме на рис. 1, а относительная величина пульсаций напряжения первой гармоники на ЭМ  $U_1$  составляет  $U_1 = \frac{2 \sin \pi \gamma}{\pi \gamma} \cdot 100\%$  и достигает 127,3% при  $\gamma = 0$ , где  $\gamma = t_{и}/T$  — отношение длительности импульса  $t_{и}$  к его периоду  $T$ .

В схеме на рис. 1, б ключи работают с одной частотой и одинаковой относительной длительностью импульсов, но со сдвигом на полпериода частоты квантования. Для нее относительная величина первой гармоники пульсаций  $U_2$  будет равна

$$U_2 = \frac{2 \sin 2\pi\gamma}{2\pi\gamma} \cdot 100\%, \text{ при } 0 \leq \gamma \leq 0,5;$$

$$U_2 = \frac{\sin[2\pi(1-\gamma)]}{\pi\gamma} \cdot 100\% \text{ при } 0,5 \leq \gamma \leq 1,0.$$

При  $\gamma = 0,5$  пульсации в данной схеме отсутствуют. Частота квантования системы выбирается по минимуму пульсаций и должна, по меньшей мере, в два раза превосходить высшую частоту возмущающих воздействий, на которую рассчитан стабилизатор тока.

Системы с ШИМ представляют собой распространенную разновидность дискретных систем. Но в таких системах даже с линейной частью первого порядка возможны автоколебательные режимы при насыщении модулятора. В нашем случае передаточная функция электромагнита с кованым сердечником для медленно меняющихся токов имеет вид [11–13]

$$W(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{K_M(T_1s + 1)}{(T_3s + 1)(T_4s + 1)},$$

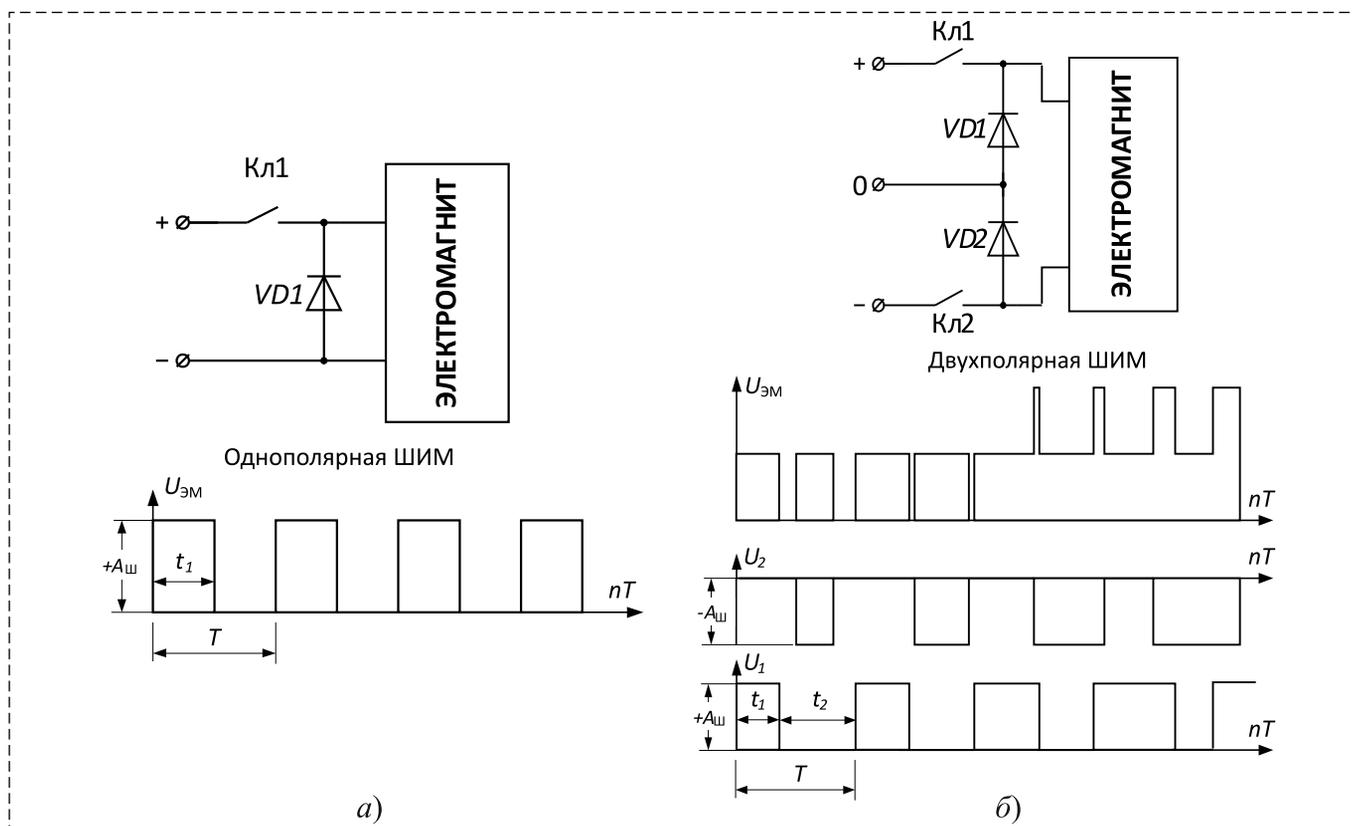


Рис. 1. Схемы широтно-импульсного регулятора

$t_1$  — длительность импульса;  $t_2$  — длительность паузы;  $T$  — период импульса;  $U_{ЭМ}$  — напряжение на ЭМ;  $U_1$  — напряжение с ключа Кл 1;  $U_2$  — напряжение с ключа Кл 2

Fig. 1. Pulse regulator circuits

$t_1$  — pulse duration;  $t_2$  — pause duration;  $T$  — pulse period;  $U_{EM}$  — voltage on EM;  $U_1$  — voltage from KL 1 key;  $U_2$  — voltage from KL 2 key

где

$$T_1 = \mu \sigma y_0^2 / 3; T_2 = L_S / R_M; T_M = \frac{3L_S}{4L_M} \mu \sigma y_0;$$

$$T_3 = \frac{2T_M T_S}{T_1 + T_2 + T_M + \sqrt{T_M^2 + 2T_M(T_1 + T_2) + (T_1 - T_2)^2}};$$

$$T_4 = \frac{2T_M T_S}{T_1 + T_2 + T_M - \sqrt{T_M^2 + 2T_M(T_1 + T_2) + (T_1 - T_2)^2}};$$

$I(s)$  — изображение выходного тока электромагнита;  $U(s)$  — изображение напряжения питания электромагнита;  $\mu$  — магнитная проницаемость материала;  $\sigma$  — полный коэффициент рассеяния;  $y_0$  — толщина сердечника;  $L_S, L_M$  — индуктивности рассеяния и обмотки электромагнита, соответственно;  $R_M$  — сопротивление обмотки постоянному току.

Задачей данной работы является исследование динамических режимов систем стабилизации тока с ШИМ в целях оценки устойчивости таких систем методом линеаризации.

### Линеаризация дискретной системы с ШИМ

Теория дискретных функций [10] позволяет достаточно полно аналитически исследовать системы с ШИМ при любом порядке линейной части, но требует решений, которые представляют сложную задачу даже для специалистов, владеющих аппаратом дискретных преобразований.

Начиная с 60-х годов прошлого века многие исследователи предлагали различные методы исследования динамики систем с ШИМ, основанные на допустимости применения того или иного математического аппарата, учитывающего информативные свойства ШИМ-сигнала [14].

Несколько специалистов (Р. Е. Andean [15], Р. Е. Nease [16]) предложили простую методику исследования динамических режимов систем с ШИМ, основанную на принципе эквивалентности сигналов с ШИМ и амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ) при равенстве их площадей. Этот приближенный метод несет погрешность в оценке поведения систем с ШИМ, но позволяет свести их исследование к классу достаточно изученных линейных систем с АИМ. Такой подход можно назвать линеаризацией нелинейной дискретной системы. Положим его в основу нижеприведенных оценок.

Прежде всего установим связь между статическими коэффициентами передачи элементов

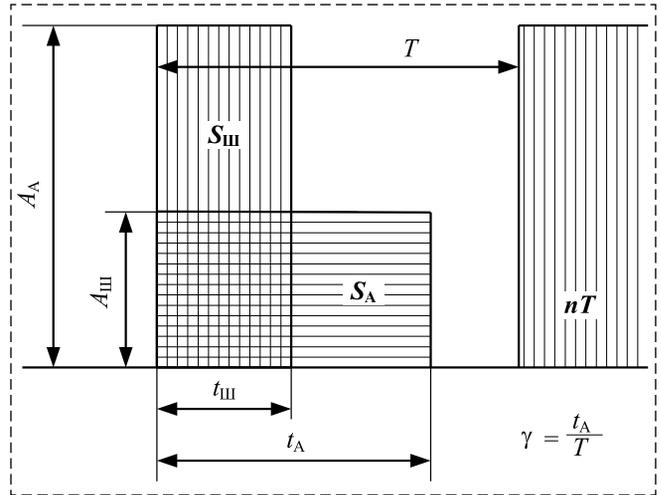


Рис. 2. Связь между статическими коэффициентами передачи систем с АИМ и ШИМ

Fig. 2. Communication between static coefficients Transmission of systems with AIM and PWM

с АИМ и ШИМ исходя из равенства площадей модулированных сигналов, представленных на рис. 2.

При этом можно записать такие известные соотношения:

$$K_A = A_A(x)/x; K_{Ш} = \psi(x)T/x,$$

где  $K_A$  и  $K_{Ш}$  — коэффициенты (крутизны) передачи элементов с АИМ и ШИМ;  $A_A(x)$  — амплитуда выходного сигнала элемента с АИМ;  $\psi(x)$  — относительная длительность импульсов элемента с ШИМ;  $T$  — период квантования.

Кроме того, принято:

- для однополярного элемента с ШИМ (см. рис. 1, а)

$$\psi = \gamma_1 = t_1 / T, \quad 0 < \gamma_1 < 1;$$

- для двухполярного элемента с ШИМ (см. рис. 1, б)

$$\psi = 2\gamma_1 - 1, \quad \gamma_1 = t_1 / T, \quad \gamma_2 = t_2 / T, \\ 0 < \gamma_1 < 1, \quad -1 < \psi < 1.$$

С учетом этих соотношений можно записать следующие формулы для площадей импульсов:

$$S_A = A_A(x)\gamma T; S_{Ш} = A_{Ш}\psi(x)T.$$

Отсюда, приравнявая площади импульсов  $S_A$  и  $S_{Ш}$ , после несложных преобразований получаем

$$K_{A,Ш} = \frac{A_{Ш}K_{Ш}}{\gamma T} = \frac{A_{Ш}\psi(x)}{\gamma x} = \frac{A_{A,Ш}(x)}{x},$$

где  $A_{A,Ш}(x) = A_{Ш}\psi(x)/\gamma$ ;  $\gamma = \text{const}$  — относительная длительность импульса при АИМ.

Таким образом, амплитуда  $A_{A,Ш}(x)$  становится таким же носителем информации о входном сигнале, как и при обычной АИМ.

Теперь будем исследовать обычную замкнутую одноконтурную схему системы автоматического управления, содержащую идеальный импульсный элемент, экстраполятор нулевого порядка с коэффициентом передачи  $K_{A,Ш}$  и непрерывной частью, имеющей передаточную функцию  $K_{H,T}(s)$ , являющейся отношением изображений выходного тока электромагнита  $I(s)$  и задающего сигнала системы стабилизации тока  $Uy(s)$ . Для получения достаточно общих выводов представим  $K_{H,T}(s)$  в виде суммы простых дробей:

$$K_{H,T}(s) = \frac{I(s)}{Uy(s)} = \frac{A}{s^v} + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{B_i}{s - s_i} + \sum_{j=1}^{j=l} \frac{C_j s + D_j}{s^2 + p_j s + q_j}, \quad (1)$$

где число корней знаменателя передаточной функции будет равно  $n = v + k + 2l$ , причем здесь  $v$  — нулевых корней;  $k$  — вещественных некрратных и  $l$  — число пар комплексно-сопряженных некрратных корней.

Далее можно воспользоваться изображением в плоскости  $z$  для смещенной передаточной функции разомкнутой системы с экстраполятором нулевого порядка и запоминанием на неполный интервал квантования  $\gamma T$ , которое запишем в следующем виде:

$$\overline{K}^*(z, \sigma) = K_{A,Ш} [\overline{Y}^*(z, \sigma) - Y_1^*(z, \varepsilon_1)], \quad (2)$$

где  $K_{A,Ш}$  — передаточный коэффициент экстраполятора;  $\overline{Y}^*(z, \sigma)$ ,  $Y_1^*(z, \varepsilon_1)$  — смещенные  $z$ -преобразования передаточных функций импульсной системы;  $\sigma$  и  $\varepsilon_1$  — относительные смещения. В свою очередь,

$$\overline{Y}^*(z, \sigma) = \overline{z}_\sigma \left\{ \frac{K_{H,T}(s)}{s} \right\} = \overline{z}_\sigma \{K'_{H,T}(s)\}, \quad (3)$$

где  $\overline{z}_\sigma$  обозначена операция определения смещенного  $z$ -преобразования передаточной функции  $K'_{H,T}(s)$ ;

$$\overline{Y}_1^*(z, \varepsilon_i) = \begin{cases} z^{-1} \overline{Y}^*(z, \varepsilon_1) & \text{при } \varepsilon_1 = 1 + \sigma - \gamma \text{ и } 0 \leq \sigma \leq \gamma, \quad (4a) \\ \overline{Y}^*(z, \sigma_2) & \text{при } \varepsilon_2 = \sigma - \gamma \text{ и } 0 \leq \gamma \leq \sigma \leq 1. \quad (4b) \end{cases}$$

В формуле (4) принято, что

$$\overline{Y}^*(z, \varepsilon_i) = \overline{z}_{\varepsilon_i} \{K'_{H,T}(s)\}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_i$  — относительное фиктивное смещение.

Все дальнейшие выводы получены нами при оперировании формулами (1)–(5) для различных типов модуляторов. Для однополярного модулятора (см. рис. 1, а) из формулы (1) получим

$$\overline{K}_0^*(z, \sigma) = K_{A,Ш} \left[ \overline{Y}^*(z, \sigma) - \frac{Y^*(z, \varepsilon_1)}{z} \right], \quad (6)$$

где  $\sigma < \gamma_1$  и  $\varepsilon_1 = 1 + \sigma - \gamma_1$ .

Если  $\sigma > \gamma_1$ , то для преобразования следует пользоваться выражением (4б) при вычислении выражения (2). Этот случай (однополярного модулятора) нами здесь не рассматривается.

Для двухполярного модулятора (см. рис. 1, б) из выражения (2) находим

$$\overline{K}_D^*(z, \sigma) = K_{A,Ш} [\overline{Y}^*(z, \sigma) - \overline{Y}_1^*(z, \varepsilon_1) - \overline{Y}^*(z, \sigma_2) + \overline{Y}_1^*(z, \varepsilon_2)]. \quad (7)$$

При этом примем следующие значения параметров относительных смещений:

а) для положительного импульса модулятора  $\sigma < \gamma_1$ ,  $\varepsilon_1 = 1 + \sigma - \gamma$ ; в случае  $\sigma > \gamma_1$  необходимо пользоваться выражением (4а), вычисляя составляющую  $Y_1^*(z, \varepsilon_1)$  в выражении (7);

б) для отрицательного импульса модулятора

$$\sigma_2 = \gamma_1 + \sigma; \quad \varepsilon_2 = \gamma_1 + \sigma - \gamma_2 - 2\gamma_1 + \sigma - 1 \quad \text{при } 0 \leq \gamma_2 < \gamma_1 + \sigma < 1; \quad (8)$$

$$\sigma_2 = \gamma_1 + \sigma; \quad \varepsilon_2 = 1 + \gamma_1 + \sigma - \gamma_2 - 2\gamma_1 + \sigma \quad \text{при } 0 \leq \gamma_1 + \sigma < \gamma_2 < 1. \quad (9)$$

Таким образом, при соблюдении условия (8) и  $\gamma_1 + \sigma \geq 0,5$ , после преобразований по формуле (7) получаем:

$$\overline{K}_D^*(z, \sigma) = K_{A,Ш} \left[ \overline{Y}^*(z, \sigma) - \overline{Y}^*(z, \sigma_2) + \overline{Y}^*(z, \varepsilon_2) + \frac{\overline{Y}^*(z, \varepsilon_1)}{z} \right]. \quad (10)$$

При  $\gamma_1 + \sigma \leq 0,5$ , учитывая (9), имеем

$$\overline{K}_D^*(z, \sigma) = K_{A, \text{Ш}}[\overline{Y}^*(z, \sigma) - \overline{Y}^*(z, \sigma_2) + z^{-1}\{\overline{Y}^*(z, \varepsilon_2) - \overline{Y}^*(z, \varepsilon_1)\}]. \quad (11)$$

В дальнейших исследованиях для упрощения выкладок положим  $\sigma = 0$ , т. е. будем определять несмещенные значения  $z$ -преобразований передаточных функций  $K^*(z, 0)$  по формулам (6), (10) и (11) для импульсной системы, непрерывная часть которой описана выражением (1).

Для однополярного модулятора при  $\nu = 1$  найдем

$$\overline{K}_0^*(z, 0) = K_{A, \text{Ш}}[\overline{K}_1^*(z, 0) + \overline{K}_2^*(z, 0) + \overline{K}_3^*(z, 0)], \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \overline{K}_1^*(z, 0) &= AT\gamma_1/(z-1); \\ \overline{K}_2^*(z, 0) &= \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{d_i^{1-\gamma_1} - d_i}{z - d_i}; \\ d_i &= e^{-\alpha_i T}; \quad \alpha_i = |s_i|; \quad b_i = B_i/\alpha_i; \\ \overline{K}_3^*(z, 0) &= \sum_{j=1}^{j=l} C_j \frac{a_{0j} z}{q_j} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{z} + \sec \varphi_j \frac{F_j(z, \lambda_1)/z - F_j(z, \lambda_0)}{N_j(z)} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь взаимосвязь параметров с элементами слагаемых формулы (1) будет следующей:

$$\begin{aligned} d_j &= e^{-\alpha_j T}; \quad a_{0j} = D_j/C_j; \quad a_j = p_j/2; \\ \operatorname{tg} \varphi_j &= (q_j - a_j a_{0j})/(a_{0j} \beta_j); \quad q_j = a_j^2 + \beta_j^2. \end{aligned}$$

Функции  $F_j(z, \lambda_0)$  и  $F_j(z, \lambda_1)$  вычисляются по единому выражению:

$$\begin{aligned} F_j(z, \lambda_i) &= d_j^{\lambda_i} \{z \cos(\lambda_i \beta_j T + \varphi_j) - \\ &- d_j \cos[(1 - \lambda_i) \beta_j T - \varphi_j]\}, \end{aligned}$$

со значениями  $\lambda_0 = 0$  и  $\lambda_1 = 1 - \gamma_1$ , а функция  $N(z)$  — по выражению

$$N(z) = z^2 - 2z d_j \cos \beta_j T + d_j^2.$$

Для двухполярного модулятора примем  $\gamma_1 \geq 0,5$  и, соблюдая условия (8), по формуле (12), оперируя выражениями (1) и (10), рассчитаем составляющие  $z$ -преобразованной несмещенной передаточной функции:

$$\overline{K}_1^*(z, 0) = \frac{1 - (1 - \gamma_1)(z + 1)}{z - d_j} AT; \quad (13)$$

$$\overline{K}_2^*(z, 0) = \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{z(d_i^{\lambda_3} - d_i^{\lambda_2}) + (d_i^{\lambda_1} - d_j)}{z - d_j}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \overline{K}_3^*(z, 0) &= \sum_{j=1}^{j=l} C_j \frac{a_{0j} z}{q_j} \left\{ \frac{1}{z} + \sec \varphi_j \times \right. \\ &\times \left. \frac{F_j(z, \lambda_3) - F_j(z, \lambda_0) - F_j(z, \lambda_2) + z^{-1} F_j(z, \lambda_1)}{N_j(z)} \right\}. \end{aligned}$$

Параметры полученных выражений находятся так же, как в формуле (12), но  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 1 - \gamma_1$ ,  $\lambda_2 = 2\gamma_1 - 1$  и  $\lambda_3 = \gamma_1$ . Аналогичным образом при  $\gamma_1 \leq 0,5$  по формуле (11) найдем:

$$\overline{K}_1^*(z, 0) = AT \frac{3\gamma_1 - \gamma_1 z - 1}{z - 1}; \quad (15)$$

$$\overline{K}_2^*(z, 0) = \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{z(d_i^{\lambda_3} - d_i^{\lambda_0}) + (d_i^{\lambda_1} - d_i^{\lambda_2})}{z - d_i}; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \overline{K}_3^*(z, 0) &= \sum_{j=1}^{j=l} C_j \frac{a_{0j} z}{q_j} \left\{ \cos \varphi_j \times \right. \\ &\times \left. \frac{F_j(z, \lambda_3) - F_j(z, \lambda_0) + z^{-1} F_j(z, \lambda_1) - z^{-1} F_j(z, \lambda_2)}{N_j(z)} \right\}. \end{aligned}$$

В этих выражениях  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 1 - \gamma_1$ ,  $\lambda_3 = \gamma_1$ , но  $\lambda_2 = 2\gamma_1$ .

### Устойчивость линеаризованной модели системы с ШИМ

Проанализируем частотные характеристики эквивалентной импульсной системы, в которой широтная модуляция заменена амплитудной. Кроме того, ограничим число корней выражения (1) одним нулевым и  $k$  вещественными. Тогда, используя  $w$ -преобразование для однополярного модулятора, имеем

$$\begin{aligned} \overline{K}_0(j\omega^*, 0) &= K_{A, \text{Ш}} \left[ A \left( -\frac{T\gamma_1}{2} - \frac{j\gamma_1}{\omega^x} \right) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{d_i^{1-\gamma_1} \left( 1 - \frac{T}{2} \tau_i \omega^{*2} \right) - j\omega^* \left( \tau_i + \frac{T}{2} \right)}{1 + (\tau_i \omega^*)^2} \right], \quad (17) \end{aligned}$$

где  $\tau_i = \frac{T}{2} \cdot \frac{1 + d_i}{1 - d_i}$ ;  $\omega^*$  — размерная псевдочастота.

Выполнив аналогичные преобразования в формуле (12), с учетом выражений (13) и (14) при  $\gamma_1 \geq 0,5$  найдем:

$$\begin{aligned} \overline{K}_D^*(j\omega^*, 0) = & K_{A,Ш} \left[ \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{m_1 + m_2}{1 - d_i} \times \right. \\ & \times \left. \frac{(1 + T_i \tau_i \omega^{*2}) + j\omega^*(T_i - \tau_i)}{1 + (\tau_i \omega^*)^2} \right] + \\ & + A \left( -\frac{T}{2} - j \frac{2\gamma_1 - 1}{\omega^*} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $m_1 = d_i^{\lambda_3} - d_i^{\lambda_2}$ ,  $m_2 = d_i^{\lambda_1} - d_i$ ,  $T_i = \frac{T}{2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$ .

Наконец, при  $\gamma_1 \leq 0,5$  для двухполярного модулятора, преобразуя (12) с учетом выражений (15) и (16), получим:

$$\begin{aligned} \overline{K}_D^*(j\omega^*, 0) = & K_{A,Ш} \left[ \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{n_1 + n_2}{1 - d_i} \times \right. \\ & \times \left. \frac{(1 + T_{li} \tau_i \omega^{*2}) + j\omega^*(T_{li} - \tau_i)}{1 + (\tau_i \omega^*)^2} \right] + \\ & + A \left( \frac{T}{2} (1 - 4\gamma_1) - j \frac{2\gamma_1 - 1}{\omega^*} \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $n_1 = d_i^{\lambda_3} - d_i^{\lambda_0}$ ,  $n_2 = d_i^{\lambda_2} - d_i^{\lambda_1}$ ;  $T_{li} = \frac{T}{2} \cdot \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ .

Передаточная функция линеаризованной замкнутой эквивалентной системы при нулевом смещении будет равна

$$\overline{\Phi}(\omega, 0) = \frac{\overline{K}(\omega, 0)}{1 + \overline{K}(\omega, 0)}.$$

Поскольку при заданном значении относительной длительности импульсов  $\gamma_1$  полюсы и нули передаточной функции остаются постоянными по величине и могут быть легко определены, то для исследования ее устойчивости можно воспользоваться аналогом критерия Найквиста [17].

Для удобства исследований амплитудно-фазовых характеристик вида (17)–(19) при вариациях  $\gamma_1$  и  $\omega^*$  запишем эти выражения следующим образом:

$$\overline{K}(j\omega^*, 0) = \overline{P}(\omega^*, 0) + j\overline{Q}(\omega^*, 0).$$

Сопоставление характеристик систем с АИМ (эквивалентной модуляцией) и ШИМ выполним по приращению вещественных частей выражения (18) при  $\gamma_1 = 1$  и при  $\gamma_1 < 1$  и получим

$$\begin{aligned} \Delta \overline{P}_0(\omega^*, 0) = \\ = K_{A,Ш} \left[ \sum_{i=1}^{i=k} b_i \frac{1 - d_i^{1-\gamma_1}}{1 - d_i} \cdot \frac{1 - \frac{T}{2} \tau_i \omega^{*2}}{1 + (\tau_i \omega^*)^2} - \frac{AT}{2} (1 - \gamma_1) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Из формулы (20) очевидно условие лучшей устойчивости системы с ШИМ, чем с АИМ, поскольку  $\Delta \overline{P}_0(\omega^*, 0) < 0$  при  $\omega^* \rightarrow \infty$ .

Таким же способом найдем приращение вещественных характеристик систем с АИМ и с ШИМ при  $\gamma_1 > 0,5$  и двухполярной модуляции. Вычитая из вещественной части выражения (17) при  $\gamma_1 = 1$  вещественную часть выражения (18) и проводя ряд преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} \Delta \overline{P}_D(\omega^*, 0) = \\ = K_{A,Ш} \sum_{i=1}^{i=k} \left[ (1 + d_i^{2\gamma_1 - 1}) - \frac{T}{2} \tau_i \omega^{*2} (1 - d_i^{2\gamma_1 - 1}) \right] \times \\ \times \frac{b_i (1 - d_i^{1-\gamma_1})}{(1 - d_i) [1 + (\tau_i \omega^*)^2]}. \end{aligned} \quad (21)$$

Из формулы (21) видно, что  $\Delta \overline{P}_D(\omega^*, 0) < 0$  при  $\omega^* \rightarrow \infty$ , но это условие начинает выполняться при больших значениях частот, чем в случае однополярного ШИМ.

Исследовать в общем виде приращение  $\Delta \overline{P}(\omega^*, 0)$  при наличии в линейной части системы колебательных звеньев из-за громоздкости выражений не удастся, но можно сделать вывод, что условия устойчивости для таких систем с ШИМ изменяются по сравнению с системами, имеющими амплитудную модуляцию, в зависимости от конкретных значений параметров колебательных звеньев. Поэтому устойчивость таких систем следует проверять по соотношениям (17)–(19) численным образом, что позволяет исследовать устойчивость систем с ШИМ практически при любом составе их непрерывной части [18].

## Заключение

1. Метод линеаризации систем с ШИМ путем замены последних на эквивалентную систему с АИМ может с успехом использоваться для аналитического исследования устойчивости при относительно несложной непрерывной части системы или для численного исследования при любом составе непрерывной части.

2. Можно утверждать, что условия устойчивости систем с ШИМ, содержащих в линейной части только интеграторы и апериодические звенья, будут лучше, чем в таких же системах с АИМ.

3. Если будут заданы качественные показатели переходного процесса, то можно установить пределы изменения относительной длительности импульсов ШИМ и с большей достоверностью оценить устойчивость эквивалентной системы с АИМ при фиксированных минимальных и максимальных значениях  $\gamma_1$  (если отсутствует насыщение широтно-импульсного модулятора).

4. При наличии насыщения в модуляторе эквивалентная система с АИМ должна рассматриваться как нелинейная, причем для оценки возможности возникновения автоколебаний могут быть использованы методы, разработанные для нелинейных систем с АИМ.

5. Для приближенной оценки переходных процессов в системе с ШИМ при заданных постоянных минимальных и максимальных значениях  $\gamma_1$  рассчитываются аналогичные режимы в эквивалентной системе с АИМ. Найденные показатели качества переходных процессов используются как предельные для системы, имеющей ШИМ.

#### Список литературы

1. **Якубович В. А.** Об импульсных системах управления с широтной модуляцией // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. С. 283–285.
2. **Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г.** К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем // Мехатроника, автоматизация, управление, 2017. Т. 18, № 6. С. 371–375.
3. **Дикусар Ю. Г., Кузнецова Н. И.** Исследование абсолютной устойчивости нелинейных дискретных систем автоматического управления // Энергетические установки и технологии, 2017. № 3. С. 20–25.

4. **Фалдин Н. В., Феофилов С. В., Козырь А. В.** Об одном методе линеаризации систем управления, работающих в режиме ШИМ // Известия ТулГУ. Технические науки. 2016. Вып. 12. Ч. 4. С. 61–64.
5. **Абрамов С. С.** Оценка устойчивости широтно-импульсной системы методом приближенного анализа // Вестник ТГТУ. 2010. Т. 16, № 3. С. 528–532.
6. **Гелиг А. Х., Чурилов, А. Н.** Частотные методы в теории устойчивости систем управления с импульсной модуляцией // Автомат. и телемех. 2006. № 11. С. 60–76.
7. **Mouton H. du T., Cox S. M., McGrath B., Risbo L., Putzeys V.** Small-Signal Analysis of Naturally-Sampled Single-Edge PWM Control Loops // Power Electronics IEEE Transactions on. 2018. Vol. 33, N. 11. P. 51–64.
8. **He Sh., Q. Chunjiang, Yunlei Z.** Analysis of a Chain of Integrators with Pulse-Width-Modulation Controller // American Control Conference (ACC). 2020. P. 3653–3658.
9. **Bordry F., Dupaquier A.** High Current, Low Voltage Power Converters for LHC. Present development Directions // Proc. of the EPAC-96. 1996. Vol. 3. P. 2314.
10. **Цыпкин Я. З., Попков Ю. С.** Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973. 416 с.
11. **Урман Е. Л.** О передаточной функции двигателя постоянного тока, управляемого изменением напряжения возбуждения // Автомат. и телемех. 1958. Т. 19, Вып. 6. С. 609–613.
12. **Жиц М. З.** Переходные процессы в машинах постоянного тока. М.: Энергия, 1974. 112 с.
13. **Merkel B., Thirumalai K., Tarlton J. E., Sch fer V. M., Balance C., Harty T. P., Lucas D. M.** Magnetic field stabilization system for atomic physics experiments // The Review of scientific instruments. 2019. Vol. 90, Iss. 4. P. 044702.
14. **Zhang Z., Han H., Zhao Q., Ye L.** Stability Analysis of Pulse-Width-Modulated Feedback Systems with Time-Varying Delays // Mathematical Problems in Engineering. 2014. Vol. 2014. Article ID 686389. 7 p.
15. **Andean P. E.** Analysis of pulse duration sampled data systems with linear elements // IRE Trans. Automat. Contr., 1960. Sept. Vol. 9. P. 17–22.
16. **Nease R. E.** Analysis and design of non linear sampled date control systems // Mars. Inst.Tech., Cambridge W. A. D.C., Techn. note, 1957. June. P. 57–162.
17. **Лурье М. С.** Исследование возможности линеаризации систем с широтно-импульсной модуляцией // Труды ЛПИ им. М. И. Калинина. Л.: Изд-во Ленинградского политехнического института, 1976. № 355. С. 28–32.
18. **Ковчин С. А., Лурье М. С.** Приближенное исследование динамических режимов систем автоматического управления с широтно-импульсной модуляцией // Автоматизация производства: Межвуз. сб. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1979. Вып. 2. С. 67–76.

## Study of Dynamic Modes of Current Stabilization Systems of Powerful Electromagnets with Pulse-Width Modulation

**M. S. Lur'e**, Dr. of Tech. Sc., Professor, m-o-lur@yandex.ru,  
**O. M. Lur'e**, Cand. of Tech.Sc., Associate Professor, m-o-lur@yandex.ru,  
**A. S. Frolov**, Cand. of Tech.Sc., Associate Professor, sibgtu-frolov@rambler.ru,  
Reshetnev Siberian State University of Science and Technology,  
Krasnoyarsk, 660037, Krasnoyarsk region, Russian Federation

*Corresponding author: Lur'e M. S., Dr. of Tech. Sci., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, 660037, Krasnoyarsk region, Russian Federation, e-mail: m-o-lur@yandex.ru*

*Accepted on March 19, 2021*

### Abstract

This study is devoted to the consideration of a method for assessing the stability of systems with pulse-width modulation, based on the linearization of its equivalent system with pulse-width modulation. An approximate study of the dynamic modes of operation of systems with pulse-width modulation, taking into account the stability for the system of automatic control of the supply current of electromagnets under the conditions of external and internal interference, is carried out. Variants of execution of schemes of pulse-width regulators for the power supply of an electromagnet based on a unipolar and bipolar element with pulse-width modulation are presented. The possibility of linearization of systems with pulse-width modulation for the subsequent detailed assessment of the stability of such systems is shown. The prospects of using functional differential equations for stability analysis of automatic systems with pulse-width modulation are shown. The frequency characteristics of an equivalent pulse system are analyzed using the example of a current stabilization system of high-power electromagnets with a pulse-width regulator, taking into account the replacement of the latitude modulation by the amplitude one. Based on the analysis of the resulting transfer function, which is a stable linearized equivalent open system, the ways of evaluating the stability of the original system with pulse-width modulation using the Nyquist stability criterion are proposed. The conclusion is made about the advantage of a system with PWM, in relation to a system with AIM, in terms of stability, and recommendations are given for the use of the obtained data in the analysis of transients in such systems.

**Keywords:** latitude and pulse modulation; linearization; nonlinear discrete system; Amplitude-impulse modulation, stability of the automatic system

For citation:

Lur'e M. S., Lur'e O. M., Frolov A. S. Study of Dynamic Modes of Current Stabilization Systems of Powerful Electromagnets with Pulse-Width Modulation, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 313–320.

DOI: 10.17587/mau.22.313-320

### References

1. Yakubovich V. A. About pulsed control systems with latitudinal modulation, *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*, 1968, vol. 180, pp. 283–285 (in Russian).
2. Vorotnikov V. I., Martysenko Yu. G. To Problem of Partial Stability of Nonlinear Discrete-Time Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 371–375 (in Russian).
3. Dikusar Yu. G., Kuznetsova N. I. The study of the absolute sustainability of nonlinear discrete automatic control systems, *Energy Installations and Technologies*, 2017, no. 3, pp. 20–25 (in Russian).
4. Faldin N. V., Feofilov S. V., Kozyr A. V. On a method of linearization of control systems operating in PWM, *Izvestiya Tulgu. Technical Science*, 2016, vol. 12, no. 4, pp. 61–64 (in Russian).
5. Abramov S. S. Assessment of the stability of the latitude and pulse system by the method of approximate analysis, *Bulletin of TSTU*, 2010, vol. 16, no. 3, pp. 528–532 (in Russian).
6. Helig A. Kh., Churilov A. N. Frequency methods in the theory of stability of control systems with pulse modulation, *Automatic. and Telemeh.*, 2006, vol. 11, no. 11, pp. 60–76 (in Russian).
7. Mouton H. du T., Cox S. M., McGrath B., Risbo L., Putzeys B. Small-Signal Analysis of Naturally-Sampled Single-Edge PWM Control Loops, *Power Electronics IEEE Transactions on*, 2018, vol. 33, no. 11, pp. 51–64.
8. He Sh., Chunjiang Q., Yunlei Z. Analysis of a Chain of Integrators with Pulse-Width-Modulation Controller, *American Control Conference (ACC)*, 2020, pp. 3653–3658.
9. Bordry F., Dupaquier A. High Current, Low Voltage Power Converters for LHC. Present development Directions, *Proc. of the EPAC-96*, 1996, vol. 3, pp. 2314.
10. Tsapkin Ya. Z. Theory of nonlinear impulse systems, Moscow, Nauka, 1973. 416 p (in Russian).
11. Urman E. L. On the transfer function of the DC motor controlled by a change in excitation voltage, *Avtomat. and Telemeh.*, 1958, vol. 6, no. 19, pp. 609–613 (in Russian).
12. Zhits M. Z. Transient processes in DC, Moscow, Energia, 1974, 112 p. (in Russian).
13. Merkel B., Thirumalai K., Tarlton J. E., Sch fer V. M., Balance C., Harty T. P., Lucas D. M. Magnetic field stabilization system for atomic physics experiments, *The Review of scientific instruments*, 2019, vol. 90, iss. 4, pp. 044702.
14. Zhang Z., Han H., Zhao Q., Ye L. Stability Analysis of Pulse-Width-Modulated Feedback Systems with Time-Varying Delays, *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, Vol. 2014, Article ID 686389, 7 p.
15. Andean P. E. Analysis of pulse duration sampled data systems with linear elements, *IRE Trans. Automat. Contr.*, 1960. Sept., vol. 9, pp. 17–22.
16. Nease R. E. Analysis and design of non linear sampled date control systems, *Mars. Inst. Techn. Cambridge W. A. D.C., Techn. note*, 1957, June, pp. 57–162.
17. Lur'e M. S. Research the possibility of linearization of systems with pulse modulation (PWM), *LPI works*, 1976, no. 355, pp. 28–32 (in Russian).
18. Kovachin S. A., Lur'e M. S. Approximate study of the dynamic modes of automatic control systems with pulse modulation, *Automation of production: Interunion. Sat*, 1979, vol. 2, pp. 67–76 (in Russian).