

А. А. Кабанов, канд. техн. наук, доц., kabanovaleksey@gmail.com,

С. А. Дубовик, д-р техн. наук, проф., duboviksa@gmail.com,

Севастопольский государственный университет

## Численные методы контроля редких событий в нелинейных стохастических системах\*

Рассматриваются вопросы разработки численных методов анализа больших отклонений для контроля редких событий в нелинейных стохастических системах. Большие отклонения управляемого процесса от некоторого штатного состояния являются основой прогнозирования наступления критической ситуации (редкого события). Задача прогнозирования сводится к задаче оптимального управления Лагранжа—Понтрягина. Представленный в статье подход для решения задачи Лагранжа—Понтрягина отличается от подхода, использованного ранее для линейных и нелинейных систем, тем, что он использует управление в форме обратной связи. При этом в нелинейном случае используются приближенные методы расчета, основанные на представлении модели системы в форме пространства состояний, где коэффициенты матриц зависят от состояния системы (методы State-Dependent Coefficients, SDC). В статье использованы два SDC-метода — метод зависящего от состояния уравнения Риккати (state-dependent Riccati equation, SDRE) и метод асимптотической последовательности уравнений Риккати (asymptotic sequence of Riccati equations, ASRE). В рассматриваемой постановке эти методы позволяют получить численно-аналитическое решение, удобное для реализации в режиме реального времени. На основе разработанных методов анализа больших отклонений представлены алгоритмы оценки вероятности наступления редкого события для нелинейной стохастической системы. Численная применимость разработанного подхода в настоящей работе показана на примере модели ФитцХью—Нагумо (ФХН) для анализа переключения между режимами возбудимости. Результаты моделирования вскрыли дополнительную проблему, связанную с так называемой задачей параметризации SDC-матриц системы. Действительно, можно было бы ожидать, что различные SDC-матрицы приводят к одному и тому же результату, но практические примеры показывают, что это не так. Поскольку использование разных представлений для SDC-матриц дает разные результаты в терминах траектории системы и функционала качества, то выбор матриц предложено осуществлять на каждой итерации алгоритма так, чтобы обеспечить условия разрешимости задачи Лагранжа—Понтрягина.

**Ключевые слова:** большие отклонения, редкое событие, нелинейная система, оптимальное управление, зависящий от состояния коэффициент

### Введение

Динамические системы, даже когда они рассматриваются как детерминированные, обычно испытывают воздействие небольших случайных возмущений. При этом малый шум может в какой-то момент существенно повлиять на динамику, например, переводя штатный процесс в неустойчивый. Такие редкие события, как отклонения от номинально устойчивых состояний или переходы между метастабильными состояниями, актуальны в прикладных задачах анализа и управления. Поэтому важно обеспечить непрерывный мониторинг этих событий в режиме реального времени с выдачей вероятностных оценок их наступления.

Для численного определения подобных событий можно использовать управляемое движение системы, которое делает редкие события более вероятными [1, 2]. Этот подход используется совместно с инструментами теории больших отклонений (ТБУ) и оптимального управления для оценки вероятности того, что наблюдаемые в динамической системе состояния через некоторое время превысят заданный порог (наступит редкое событие). Детерминированную систему, соответствующую такому управляемому движению к редкому нежелательному событию, при-

нято называть системой путей [3]. Ее роль состоит в том, чтобы возможные пути к рассматриваемому состоянию различать по затраченной на это энергии управления. Метод больших отклонений позволяет установить асимптотическую связь минимального значения определенного функционала энергии (функции действия) с вероятностью наступления события. Таким образом, система путей дает возможность провести оценку вероятности больших отклонений, определяя некоторую задачу оптимального управления и ее предельное решение как профиль развития критической ситуации (А-профиль [3]).

В линейном случае указанный подход особенно эффективен, поскольку позволяет получить аналитическое решение соответствующей задачи оптимального управления, что особенно важно для систем реального времени. Например, в работе [4] показано решение в форме программного управления, а в статье [5] приведены некоторые результаты по решению в форме обратной связи. В нелинейном случае все существенно сложнее именно в силу того, что приходится искать предельную экстремаль как единственное ограниченное решение на всей прямой [4]. Поэтому в данной работе предлагаются итерационные численные схемы, где выполняется некоторая форма приближения к решению. Одной из групп таких приближенных методов являются методы с использованием параметров, зависящих от состояния (State-Dependent Coefficients) [6—9].

\* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФН, грант № 21-11-00202.

Широко известный метод зависящего от состояния уравнения Риккати (SDRE) является достаточно простым и эффективным, особенно для задач на бесконечном интервале времени [6, 7]. Этот метод рассматривает исходную нелинейную задачу оптимального управления поточно в виде задачи о линейно-квадратичном регуляторе (LQR). В результате набор задач LQR решается последовательно в каждый момент времени, на которые дискретизируется вся временная область. Однако нестационарность управления для задач на конечном интервале времени приводит к следующей проблеме: точное решение задачи невозможно без знания будущих состояний системы, которые неизвестны в текущий момент времени. В работе [10] предложено приближенный алгоритм, использующий гипотезу о слабом изменении вектора состояния (гипотеза "замороженных" коэффициентов).

Другой подход для синтеза нелинейного оптимального управления на конечном интервале времени представлен методом аппроксимированной последовательности уравнений Риккати (ASRE) [8, 9]. Этот метод приводит к итерационному решению ряда LQR-задач. Для каждой текущей LQR-задачи матрицы системы оцениваются с помощью решения на предыдущей итерации. Важно, что при этом не возникает ситуации, требующей использовать "замораживание" коэффициентов, что является преимуществом метода. Вероятно, для задач на конечном интервале времени метод ASRE превосходит метод SDRE с точки зрения оптимальности решения (см. например, [8]). Данные результаты подтверждают эффективность обоих методов и актуальность исследований в области их развития и практического применения.

В настоящей работе рассматриваются вопросы разработки численных методов анализа больших уклонений для контроля редких событий динамических систем на основе решения соответствующих задач оптимального управления. Особенность постановки задачи оптимального управления как задачи точного терминального приведения на конечном интервале времени при отсутствии штрафа на состояние системы в функционале действия позволяет получить численно-аналитическое решение задачи, что особенно актуально для реализации в режиме реального времени.

Данный подход к анализу больших уклонений становится естественным инструментом для получения количественной информации о редких событиях, представляющих интерес. Его численная применимость в настоящей работе показана на примере модели ФитцХью—Нагумо (ФХН) [11]. Решению задач моделирования, управления и анализа режимов модели ФХН

посвящены работы многих исследователей. Так, в работе [1] показан пример анализа влияния возмущений в начальных условиях на возникновение больших уклонений, уводящих модель ФХН из состояния равновесия. Применение метода стохастической функции чувствительности для анализа возбудимости для модели ФХН показано в статье [12]. Этот метод был предложен для вероятностного описания стохастических аттракторов в контексте техники квазипотенциалов ТБУ. Анализ времени выхода на основе ТБУ для редуцированной одномерной модели ФХН приведен в работе [13]. В настоящей работе будет рассмотрено применение разработанных численных методов для анализа переключения возбудимых режимов модели ФХН.

### Теория больших уклонений и постановка задачи

Рассматривается замкнутая нелинейная динамическая система

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

возмущенная добавлением небольшого шума

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\dot{\mathbf{w}} \in R^r$  — вектор "белого шума";  $\varepsilon > 0$  — малый параметр;  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  — гладкие матричные функции,  $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = 0$ ,  $\forall t \in R$ .

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  с вероятностью, стремящейся к 1, траектории возмущенной системы приближаются к траекториям невозмущенной системы на любом конечном интервале времени. При малом, но фиксированном  $\varepsilon$  интерес представляют траектории системы (2), которые далеки от траекторий (1). Это события, вероятности которых близки к нулю, но при этом можно выделить те из них, которые в подавляющем большинстве случаев более вероятны, чем другие. Оценка вероятностей таких редких событий, называемых большими уклонениями, включает вариационную постановку, тесно связанную с динамикой возмущенной системы.

Затратность движения вдоль некоторого заданного пути  $\bar{\varphi}$  измеряется квадратичным критерием  $S_{t_0, t_f}$  от управляющих воздействий  $\mathbf{v} \in R^r$ , заменяющих шумы в исходной системе (2) при переходе к системе путей:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}) \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3)$$

где  $S_{t_0, t_f}$  является функционалом действия:

$$S_{t_0, t_f}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \mathbf{v}^T \mathbf{v} dt. \quad (4)$$

Таким образом, глобальные свойства системы (2) описываются с помощью системы путей (3), учитывая, прежде всего, возможность отклонений состояния системы (2) от нуля в направлении границы  $\partial_D$  эксплуатационной области  $D \subset O_\chi$  ( $D$  — открытое множество,  $O_\chi$  — область притяжения аттрактора,  $\chi$  — состояние устойчивого равновесия (аттрактор) невозмущенной системы (1)).

Для множества  $D$  и системы (3) справедливо равенство [14]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P\{\mathbf{x} \in R^n / D\} = -\min_{\boldsymbol{\varphi} \in D} S_{t_0, t_f}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}), \quad (5)$$

где функционал  $S_{t_0, t_f}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v})$  определен соотношением (4) на решениях управляемой системы (3), для которой указывается еще граничное условие выхода в критическое состояние к моменту времени  $t_f$ :

$$\mathbf{y}(t_f) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}(t_f) \in \partial_D, \quad (6)$$

где  $\mathbf{C}$  — матрица полного ранга.

Вероятность в равенстве (5) можно оценить через решение задачи оптимального управления (задача Лагранжа—Понтрягина): на решениях системы путей (3) минимизировать функционал действия (4) при граничном условии (6).

### Решение задачи Лагранжа—Понтрягина

**Случай линейной системы.** В линейном случае

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{B}$$

система путей (3) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_0. \quad (7)$$

Сформулируем для нее задачу минимизации критерия (4) в условиях ограничений (6).

Решение задачи (7), (4), (6) в форме обратной связи можно получить по аналогии с работой [15] с учетом небольшой модификации:

$$\mathbf{v} = -\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T \mathbf{C}^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{W}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}(t_f)), \quad (8)$$

где

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W} = -\mathbf{W}\mathbf{A}, \quad \mathbf{W}(t_f) = \mathbf{I}, \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M} = -\mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T \mathbf{C}^T, \quad \mathbf{M}(t_f) = 0. \quad (10)$$

Для данной линейной задачи матрицы  $\mathbf{W}(t)$  и  $\mathbf{M}(t)$  можно представить в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(t) &= \mathbf{e}^{\mathbf{A}(t_f - t)}, \\ \mathbf{M}(t) &= \mathbf{C}(\mathbf{W}(t)\mathbf{D}\mathbf{W}^T(t) - \mathbf{D})\mathbf{C}^T, \end{aligned} \quad (11)$$

где матрица  $\mathbf{D}$  является решением алгебраического уравнения Ляпунова

$$\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}\mathbf{B}^T = 0. \quad (12)$$

Соотношение (11) для  $\mathbf{M}(t)$  следует из равенства

$$\begin{aligned} & -\int_{t_f}^t \mathbf{W}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T d\tau = \\ & = \int_{t_f}^t \frac{d}{d\tau} \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^T d\tau = \mathbf{W}(t)\mathbf{D}\mathbf{W}^T(t) - \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Последнее выражение можно проверить, взяв производную:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{W}^T &= \frac{d}{dt} \mathbf{W} \cdot \mathbf{D}\mathbf{W}^T + \mathbf{W}\mathbf{D} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{W}^T = \\ &= -\mathbf{W}(\mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T)\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T. \end{aligned}$$

Минимальное значение функционала (4) — нормализованный функционал действия:

$$S_{t_0, t_f} = (\mathbf{C}\mathbf{W}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}(t_f))^T \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{C}\mathbf{W}\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{y}(t_f)) \Big|_{t=t_0}. \quad (13)$$

Применим управление (8) к системе (7):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{A}_{CL}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{G}\mathbf{y}(t_f), \quad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_0, \\ \mathbf{A}_{CL} &= \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}\mathbf{W}, \\ \mathbf{G} &= \mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{W}^T \mathbf{C}^T \mathbf{M}^{-1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Решение уравнения (14) определяет  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ :

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{CL}t} \boldsymbol{\varphi}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{e}^{\mathbf{A}_{CL}(t-\tau)} \mathbf{G}\mathbf{y}(t_f) d\tau.$$

Решение данной линейной задачи дает аналитические выражения для управления в форме обратной связи, для профиля развития критической ситуации (А-профиль) и для минимального значения критерия качества, а следовательно, и для оценки вероятности. Условие существования этого решения — управляемость пары  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  и гурвицевость матрицы  $\mathbf{A}$ .

Опишем кратко алгоритм оценки вероятности наступления редкого события на базе описанного решения линейной задачи.

### Алгоритм 1 (линейный случай)

Шаг 1. Решить уравнение (12) для  $\mathbf{D}$ .

Шаг 2. Вычислить  $\mathbf{W}(t)$  и  $\mathbf{M}(t)$  с помощью соотношений (11).

Шаг 3. Вычислить управление  $\mathbf{v}$  с использованием (8).

Шаг 4. Применить управление  $\mathbf{v}$  к системе путей (7) и определить  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ .

Шаг 5. Вычислить функционал действия  $S_{t, t_f}$  через (13) и получить вероятностную меру из (5):  $\ln P^*\{\mathbf{x} \in R^n / D\} = -\varepsilon^{-2} S_{t, t_f}$ .

Шаг 6. Если вектор  $\mathbf{x}(t)$  состояния системы (2) находится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  системы путей, то в случае  $P^* > \rho$ , где  $\rho$  — заданное пороговое значение вероятности наступления редкого события, приходим к выводу, что редкое событие произойдет.

**Случай нелинейной системы. SDRE-техника.** В нелинейном случае рассматриваем систему путей (3), которую представляем в SDC-форме:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad (15)$$

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}).$$

Решение задачи (15), (4), (6) в форме обратной связи, полученное с помощью SDRE-метода и "замораживания" коэффициентов, имеет вид уравнений (8)–(10), в которых, следуя гипотезе "замороженных" коэффициентов [10],  $\forall \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ , обозначим  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$ ,  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})$ .

Заметим, что для расчета матриц  $\mathbf{W}(t)$  и  $\mathbf{M}(t)$  можно использовать аналитические соотношения (11), (12), которые рассчитываются при текущих значениях вектора состояния от текущего времени  $t$  до конечного времени  $t_f$  на каждом шаге. Условие существования этого решения — поточечная управляемость пары  $(\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}))$  и гурвицевость матрицы  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$   $\forall \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

Таким образом, шаги, перечисленные ниже в алгоритме 2, должны быть выполнены для анализа вероятности больших отклонений в режиме реального времени на основе метода SDRE.

## Алгоритм 2 (нелинейный случай, SDRE-техника)

На каждом временном шаге повторить следующие шаги.

Шаг 1. Измерить  $\boldsymbol{\varphi}$  и оценить  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$  и  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})$ .

Шаг 2. Решить уравнение (12) для  $\mathbf{D}$ .

Шаг 3. Вычислить  $\mathbf{W}(t)$  и  $\mathbf{M}(t)$  с помощью соотношения (11).

Шаг 4. Вычислить управление  $\mathbf{v}$  по формуле (8).

Шаг 5. Применить управление  $\mathbf{v}$  к системе путей (15) и определить  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ .

Шаг 6. Вычислить функционал действия  $S_{t,t_f}$  и получить вероятностную меру из соотношения (5):  $\ln P^*\{\mathbf{x} \in R^n/D\} = -\varepsilon^{-2} S_{t,t_f}$ .

Шаг 7. Если вектор  $\mathbf{x}(t)$  состояния системы (2) находится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\boldsymbol{\varphi}(t)$  системы путей, то в случае  $P^* > \rho$ , где  $\rho$  — заданное пороговое значение вероятности наступления редкого события, приходим к выводу, что редкое событие произойдет.

Функционал действия также можно определить на основе выражения (13), но нужно понимать, что это будет субоптимальное решение, которое не даст точную вероятностную оценку, а позволит лишь качественно судить о приближении к критической ситуации.

**Случай нелинейной системы. ASRE-техника.** Решение задачи (15), (4), (6) методом ASRE состоит из нескольких этапов. Первая итерация состоит в решении задачи 0, определенной в виде:

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}^{(0)}}{dt} = \mathbf{A}^{(0)}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{B}^{(0)}\mathbf{v}^{(0)},$$

$$\mathbf{y}(t_f) = \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}^{(0)}(t_f) \in \partial_K,$$

$$S_{t_0,t_f}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{v}^{(0)})^T \mathbf{v}^{(0)} dt \rightarrow \min_{\mathbf{v}}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}_0)$ ,  $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}_0)$ .

Задача (16) является линейной стационарной, так как все аргументы матриц заданы и являются постоянными. Решение этой задачи приведено выше.

В общем случае для некоторой итерации  $k$  задача формулируется следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\varphi}^{(k)} = \mathbf{A}^{(k)}(t)\boldsymbol{\varphi}^{(k)} + \mathbf{B}^{(k)}(t)\mathbf{v}^{(k)},$$

$$S_{t_0,t_f}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{v}^{(k)})^T \mathbf{v}^{(k)} dt, \quad (17)$$

где  $\mathbf{A}^{(k)}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}^{(k-1)}(t))$ ,  $\mathbf{B}^{(k)}(t) = \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}^{(k-1)}(t))$ .

По сути, (17) — это нестационарная линейная задача (где  $\boldsymbol{\varphi}^{(k-1)}(t)$  и  $\mathbf{v}^{(k-1)}(t)$  — решения задачи на шаге  $k-1$ ). Ее решение имеет вид (8)–(10). Решая задачу  $k$ , получим  $\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(t)$  и  $\mathbf{v}^{(k)}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

**Замечание.** Нестационарная задача (17) может быть решена также с помощью переходной матрицы системы. Пример можно увидеть в работе [9].

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено условие сходимости. Сходимость достигается путем задания требуемой нормы ошибки между последовательностью решений:

$$\delta = \|\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(t) - \boldsymbol{\varphi}^{(k-1)}(t)\| \leq \mu, \quad (18)$$

где  $\mu > 0$  — некоторая константа. В работе [8] доказано, что последовательность решений  $\boldsymbol{\varphi}^{(k)}(t)$ ,  $\mathbf{v}^{(k)}(t)$  сходится к решению исходной задачи (15), (4), (6) при условии, что  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$  и  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi})$  непрерывны по Липшицу по своим аргументам, пара  $(\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}))$  поточно управляема и матрица  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi})$  — гурвицева  $\forall \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$ .

На основе метода ASRE можно предложить следующий алгоритм анализа вероятности больших отклонений в режиме реального времени.

## Алгоритм 3 (нелинейный случай, ASRE-техника)

Задать  $k = 0$  и параметр сходимости  $\mu$ .

Шаг 1. Задать  $\mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\varphi}_0)$ ,  $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\varphi}_0)$ . Решить задачу 0, используя алгоритм 1.

Шаг 2. Определить ошибку  $\delta$  по формуле (18). Если  $\delta > \mu$ , то перейти к шагу 2, иначе принять  $\varphi(t) \approx \varphi^{(0)}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}^{(0)}(t)$  и перейти к шагу 6.

Шаг 3. Увеличить  $k = k + 1$ , задать  $\mathbf{A}^{(k)}(t)$ ,  $\mathbf{B}^{(k)}(t)$  и решить задачу  $k$ , используя (8)–(10).

Шаг 4. Применить управление  $\mathbf{v}^{(k)}(t)$  к системе (17) и определить  $\varphi^{(k)}(t)$ .

Шаг 5. Определить ошибку  $\delta$  по формуле (18). Если  $\delta > \mu$ , то перейти к шагу 3, иначе  $\varphi(t) \approx \varphi^{(k)}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}^{(k)}(t)$ .

Шаг 6. Вычислить функционал действия  $S_{t,t_f}$  и получить вероятностную меру из соотношения (5):  $\ln P^*\{\mathbf{x} \in R^n/D\} = -\varepsilon^{-2} S_{t,t_f}$ .

Шаг 7. Если вектор  $\mathbf{x}(t)$  состояния системы (2) находится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $\varphi(t)$  системы путей, то в случае  $P^* > \rho$ , где  $\rho$  — заданное пороговое значение вероятности наступления редкого события, приходим к выводу, что редкое событие произойдет.

### Анализа переключения возбуждаемых режимов модели ФХН

Модель ФХН представляет собой двумерную нейрноподобную модель осциллятора с кубической нелинейностью, одной быстрой и одной медленной переменными. Двумерная модель ФХН является результатом упрощения четырехмерной модели Ходжкина—Хаксли [11, 16]. Эта модель может использоваться как для описания динамики нейронов, так и в других системах, в том числе для описания электронных схем [17], сердечнососудистых тканей [18] и климатических систем [19]. Модель ФХН описывается уравнениями в следующей форме [1, 20]:

$$\begin{aligned} \lambda \dot{u}(t) &= u(t) - \frac{u^3(t)}{3} - v(t); \\ \dot{v}(t) &= u(t) - bv(t) + a. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $u$  воспроизводит трансмембранный потенциал, а восстанавливающая переменная  $v$  — активацию исходящего тока (будем также называть их активатором и ингибитором соответственно);  $\lambda$  — малый параметр, характеризует разнотемповость переменных;  $a$ ,  $b$  — постоянные параметры системы.

В частном случае при  $b = 0$  параметр  $a$  является пороговым параметром системы. Значениям  $|a| > 1$  соответствует возбуждаемый режим, при котором траектории системы стремятся к точке  $(-a; a^3/3 - a)$ , а значениям  $|a| < 1$  — автоколебательная динамика (рис. 1, *a*, см. вторую сторону обложки, где штриховой линией обозначен возбуждаемый режим, а сплошной линией — колебательный режим) [1, 20]. Во втором случае нейрон испускает спайки, т. е. автоколебания

(сплошная линия), тогда как в первом случае он находится в покое, т. е. колебания отсутствуют (рис. 1, *б*, см. вторую сторону обложки — штриховая линия).

Основной интерес состоит в том, чтобы отслеживать возможную генерацию колебаний системы при нахождении в устойчивом состоянии  $(-a; a^3/3 - a)$  для различных значений параметра  $a$  (в том числе для  $|a| > 1$ ) под действием стохастического возмущения.

Рассмотрим стохастическое возмущение одномерным винеровским процессом модели (19):

$$\begin{aligned} \lambda \dot{u}(t) &= u(t) - \frac{u^3(t)}{3} - v(t) + \varepsilon \dot{w}(t), \\ \dot{v}(t) &= u(t) - bv(t) + a. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай 1, когда  $|a| < 1$ , и система находится в точке устойчивого равновесия. При этом случайные возмущения выводят систему из области притяжения аттрактора и приводят переменную состояния  $u(t)$  к амплитудному значению режима автоколебаний  $y(t_f)$  за время  $t_f$ . Для первого примера, опираясь на рис. 1, *б* (см. вторую сторону обложки), примем  $a = 0,2$ ,  $t_f = 2,5$ ,  $y(t_f) = 2$ ,  $\lambda = 0,1$ . Результаты моделирования системы путей показаны на рис. 2, *a* (см. вторую сторону обложки). Для метода ASRE было выполнено пять итераций, траектории системы путей для задач 0, 2 и 4 показаны на рис. 2, *a*, соответственно в виде кривых  $P_0$ ,  $P_2$ ,  $P_4$ . Траектория выхода на автоколебания для метода SDRE показана синей сплошной линией. Видно, что при  $t > 2,083$  начинается стремительный рост амплитуды с выходом на критическое значение. Промасштабированное значение функционала действия для указанного примера показано на рис. 2, *б* (см. вторую сторону обложки). Из результатов видно, что методы SDRE и ASRE дают схожий результат.

Траекторию пути  $\varphi^*(t)$ , оптимального в смысле (4) выхода на амплитуду автоколебаний, можно сопоставить со свободным движением системы: это показано на рис. 3 (см. третью сторону обложки), где штриховой линией выделен путь  $\varphi^*(t)$  — оптимальная траектория выхода на режим автоколебаний.

Рассмотрим случай 2, когда  $|a| > 1$ , и система (1) имеет точку устойчивого равновесия  $(-a; a^3/3 - a)$ . При этом случайные возмущения выводят систему из области притяжения этого аттрактора и приводят активатор  $u(t)$  к амплитудному значению режима автоколебаний  $y(t_f)$  за время  $t_f$ . Примем  $a = 2,2$ ,  $t_f = 2,5$ ,  $y(t_f) = 2$ ,  $\lambda = 0,1$ . Результаты моделирования системы путей показаны на рис. 4, *a* (см. третью сторону обложки), промасштабированные значения функционала действия — на рис. 4, *б* (см. третью сторону об-

ложки). В данном случае уже вторая итерация метода ASRE показала неудовлетворительный результат. Это обусловлено тем, что на данной итерации не было выполнено условие гурвицевости матрицы  $A(\varphi) \forall \varphi(t), t \in [t_0, t_f]$ .

При уменьшении требуемого времени выхода в режим возбудимости до  $t_f = 0,5$  (случай 3) метод ASRE сохранил свою сходимост, было выполнено шесть итераций. Квазипотенциальная экстремаль и функционал действия для задачи 0, 4 и 5 показаны на рис. 5 (см. третью сторону обложки), соответственно, кривыми  $P_0, P_4, P_5$ . Видно, что решения методами ASRE и SDRE различаются. Рост вероятности выхода на возбудимый режим для задачи P5 наблюдается с момента  $t > 0,15$ , тогда как для метода SDRE рост вероятности начинается с  $t > 0,25$ .

**Замечание.** Неудачный пример 2 для метода ASRE демонстрирует ограничения метода, хотя подобная ситуация может складываться и для SDRE-метода в ходе расчетов на некотором временном шаге, поскольку важным аспектом применения SDC-методов является необходимость обеспечить определенное представление для динамики в форме системы с матрицами, зависящими от состояния. Эту задачу принято называть задачей параметризации или факторизации системы (см., например, [9]). Действительно, можно было бы ожидать, что различные SDC-матрицы приводят к одному и тому же результату, но на практике это не так. Кроме того, использование разных представлений для SDC-матриц дает разные результаты в терминах траектории системы и функционала качества.

Данный результат наталкивает на мысль о том, что можно модифицировать предложенные алгоритмы. По аналогии с линейным случаем можно предположить, что условие, которое требуется для представленных решений методами SDRE и ASRE, — это управляемость пары  $(A(\varphi), B(\varphi))$  и гурвицевость матрицы  $A(\varphi)$ . Поэтому SDC-матрицы должны выбираться так, чтобы эти условия выполнялись. При этом желательно выбрать факторизацию, которая обеспечивает максимальную управляемость, поскольку с этим строго связана производительность решения. Повышенная управляемость приводит к снижению усилий управления и, вероятно, к снижению затрат возмущений. Учитывая нелинейную динамику, выбор матрицы  $A(\varphi)$ , зависящей от состояния, является степенью свободы, которую можно использовать для обеспечения наилучших характеристик с точки зрения сходимости алгоритма и усилия управления. Влияние способов факторизации на результаты анализа больших отклонений является предметом дальнейших исследований.

## Заключение

В статье предложен метод анализа больших отклонений, основанный на решении задачи оптимального управления Лагранжа—Понтрягина для нелинейных систем на основе SDC-подхода. В работе используются два наиболее распространенных и эффективных метода SDRE и ASRE. Предложенный способ анализа больших отклонений позволяет получить решение в форме обратной связи по состоянию, что упрощает решение задачи Лагранжа—Понтрягина, поскольку исключает необходимость вычисления граничных значений для сопряженных переменных. Предполагается, что эта особенность может быть использована при решении задач долгосрочного прогноза возникновения критических ситуаций на основе анализа больших отклонений.

## Список литературы

1. Grafke T., Vanden-Eijnden E. Numerical computation of rare events via large deviation theory // *Chaos*. 2019. Vol. 29. Paper no. 063118.
2. Sapsis T. P. New perspectives for the prediction and statistical quantification of extreme events in high-dimensional dynamical systems // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. 2018. Vol. 376. Paper no. 20170133.
3. Dubovik S., Kabanov A. Profiles of critical states in diagnostics of controlled processes // *MATEC Web of Conferences*. 2018. Vol. 224. Paper no. 04024.
4. Дубовик С. А. Асимптотическая семантизация данных в системах управления // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2019. Т. 20, № 8. С. 461—471.
5. Kabanov A. A., Dubovik S. A. Methods of modeling and probabilistic analysis of large deviations of dynamic systems // *Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Vol. 1661. Paper no. 012044.
6. Cimen T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey // *IFAC Proceedings Volumes*. 2008. Vol. 41. P. 3761—3775.
7. Cimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2012. Vol. 35. P. 1025—1047.
8. Cimen T., Banks S. P. Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria // *Systems & Control Letters*. 2004. Vol. 53. P. 327—346.
9. Toppo F., Miani M., Bernelli-Zazzera F. Optimal selection of the coefficient matrix in state-dependent control methods // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2015. Vol. 38. P. 861—873. <https://doi.org/10.2514/1.G000136>.
10. Heydari A., Balakrishnan S. N. Closed-form solution to finite-horizon suboptimal control of nonlinear systems // *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2014. Vol. 25. P. 2687—2704. <https://doi.org/10.1002/rnc.3222>.
11. Izhikevich E. M. *Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting*. Cambridge: Computational neuroscience. MIT Press, 2007. 464 p.
12. Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of excitability for the FitzHugh-Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique // *Physical Review E*. 2011. Vol. 83. Paper no. 061109.
13. Doss C., Thieullen M. Oscillations and random perturbations of a FitzHugh-Nagumo system // *arXiv:0906.2671* 2009 (preprint).
14. Freidlin M. I., Wentzell A. D. *Random perturbations of dynamical systems*, 3. ed. Heidelberg: Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2012. 460 p.
15. Bryson A. E., Ho Y.-C. *Applied optimal control: optimization, estimation, and control*. New York: Taylor & Francis, 1975. 482 p.
16. Bachar M., Batzel J., Ditlevsen S. *Stochastic biomathematical models*, Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2013. 206 p.

17. Heinrich M., Dahms T., Flunkert V., Teitworth S. W., Schöll E. Symmetry-breaking transitions in networks of nonlinear circuit elements // *New Journal of Physics*. 2010. Vol. 12. paper no. 113030.
18. Nash M. P., Panfilov A. V. Electromechanical model of excitable tissue to study reentrant cardiac arrhythmias // *Progress in Biophysics and Molecular Biology*. 2004. Vol. 85. P. 501–522.

19. Ganopolski A., Rahmstorf S. Abrupt glacial climate changes due to stochastic resonance // *Physical Review Letters*. 2002. Vol. 88. Paper no. 038501.
20. Plotnikov S. A., Fradkov A. L. Controlled synchronization in two hybrid FitzHugh-Nagumo systems // *IFAC-PapersOnLine*. 2016. Vol. 49, Iss. 14. P. 137–141.

## Numerical Methods for Monitoring Rare Events in Nonlinear Stochastic Systems

A. A. Kabanov, kabanovaleksey@gmail.com, S. A. Dubovik, duboviksa@gmail.com,  
Sevastopol State University, Sevastopol, 299053, Russian Federation

Corresponding author: Kabanov Aleksey A., Ph.D., Associate Professor, Sevastopol State University,  
Sevastopol, 299053, Russian Federation, e-mail: kabanovaleksey@gmail.com

Accepted on April, 23, 2021

### Abstract

In this article, we consider the development of numerical methods of large deviations analysis for rare events in nonlinear stochastic systems. The large deviations of the controlled process from a certain stable state are the basis for predicting the occurrence of a critical situation (a rare event). The rare event forecasting problem is reduced to the Lagrange-Pontryagin optimal control problem. The presented approach for solving the Lagrange-Pontryagin problem differs from the approach used earlier for linear systems in that it uses feedback control. In the nonlinear case, approximate methods based on the representation of the system model in the state-space form with state-dependent coefficients (SDC) matrixes are used: the state-dependent Riccati equation (SDRE) and the asymptotic sequence of Riccati equations (ASRE). The considered optimal control problem allow us to obtain a numerical-analytical solution that is convenient for real-time implementation. Based on the developed methods of large deviations analysis, algorithms for estimating the probability of occurrence of a rare event in a dynamical system are presented. The numerical applicability of the developed methods is shown by the example of the FitzHugh-Nagumo model for the analysis of switching between excitable modes. The simulation results revealed an additional problem related to the so-called parameterization problem of the SDC matrices. Since the use of different representations for SDC matrices gives different results in terms of the system trajectory, the choice of matrices is proposed to be carried out at each algorithm iteration so as to provide conditions for the solvability of the Lagrange-Pontryagin problem.

**Keywords:** large deviations, rare event, nonlinear system, optimal control, state-dependent coefficient, FitzHugh-Nagumo model

**Acknowledgements:** The reported study was funded by the Russian Science Foundation (Project No. 21-22-00202).

For citation:

Kabanov A. A., Dubovik S. A. Numerical Methods for Monitoring Rare Events in Nonlinear Stochastic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 291–297.

DOI: 10.17587/mau.22.291-297

### References

1. Grafke T., Vanden-Eijnden E. Numerical computation of rare events via large deviation theory, *Chaos*, 2019, vol. 29, paper no. 063118.
2. Sapsis T. P. New perspectives for the prediction and statistical quantification of extreme events in high-dimensional dynamical systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 2018, vol. 376, paper no. 20170133.
3. Dubovik S. A., Kabanov A. A. Profiles of critical states in diagnostics of controlled processes, *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 224, paper no. 04024.
4. Dubovik S. A. Asymptotic semantization of data in control systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 8, pp. 461–471 (In Russian).
5. Kabanov A. A., Dubovik S. A. Methods of modeling and probabilistic analysis of large deviations of dynamic systems, *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1661, paper no. 012044.
6. Çimen T. State-dependent Riccati equation (SDRE) control: a survey, *IFAC Proceedings Volumes*, 2008, vol. 41, pp. 3761–3775.
7. Çimen T. Survey of state-dependent Riccati equation in nonlinear optimal feedback control synthesis, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, vol. 35, pp. 1025–1047.
8. Çimen T., Banks S. P. Global optimal feedback control for general nonlinear systems with nonquadratic performance criteria, *Systems & Control Letters*, 2004, vol. 53, pp. 327–346.
9. Toppo F., Miani M., Bernelli-Zazzera F. Optimal selection of the coefficient matrix in state-dependent control methods, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, vol. 38, pp. 861–873.

10. Heydari A., Balakrishnan S. N. Closed-form solution to finite-horizon suboptimal control of nonlinear systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, vol. 25, pp. 2687–2704.
11. Izhikevich E. M. Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting, Cambridge, Computational neuroscience, MIT Press, 2007, 464 p.
12. Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of excitability for the FitzHugh-Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique, *Physical Review E*, 2011, vol. 83, paper no. 061109.
13. Doss C., Thieullen M. Oscillations and random perturbations of a FitzHugh-Nagumo system, *Preprint, arXiv:0906.2671v1*, 2009.
14. Freidlin M. I., Wentzell A. D. Random perturbations of dynamical systems, 3. ed., Heidelberg, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, 2012, 460 p.
15. Bryson A. E., Ho Y.-C. Applied optimal control: optimization, estimation, and control, New York, Taylor & Francis, 1975, 482 p.
16. Bachar M., Batzel J., Ditlevsen S. Stochastic biomathematical models, Lecture Notes in Mathematics, Berlin, Springer Berlin Heidelberg, 2013, 206 p.
17. Heinrich M., Dahms T., Flunkert V., Teitworth S. W., Schöll E. Symmetry-breaking transitions in networks of nonlinear circuit elements, *New Journal of Physics*, 2010, vol. 12, paper no. 113030.
18. Nash M. P., Panfilov A. V. Electromechanical model of excitable tissue to study reentrant cardiac arrhythmias, *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 2004, vol. 85, pp. 501–522.
19. Ganopolski A., Rahmstorf S. Abrupt glacial climate changes due to stochastic resonance, *Physical Review Letters*, 2002, vol. 88, paper no. 038501.
20. Plotnikov S. A., Fradkov A. L. Controlled synchronization in two hybrid FitzHugh-Nagumo systems, *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49, iss. 14, pp. 137–141.