

А. Р. Гайдук, д-р техн. наук, проф., gaiduk_2003@mail.ru,
ФГАОУ ВО Южный федеральный университет, г. Таганрог

Численный метод синтеза квазилинейных моделей нелинейных объектов*

Большинство современных методов синтеза нелинейных систем управления нелинейными объектами предполагают преобразование исходной модели объекта к некоторым специальным формам. При этом целесообразно использовать квазилинейные модели, так как они могут быть синтезированы при условии лишь дифференцируемости нелинейностей исходных моделей объектов. Эти модели позволяют найти управление аналитически, т. е. в результате решения некоторой системы уравнений, если объект, естественно, удовлетворяет условию управляемости. Традиционно квазилинейные модели нелинейных объектов синтезируются аналитически путем взятия частных производных от нелинейностей исходной модели и последующего интегрирования этих производных по вспомогательной переменной с применением известных формул дифференцирования и интегрирования. Однако во многих случаях нелинейности объекта имеют настолько сложный характер, что операции дифференцирования и, в особенности, интегрирования довольно трудно выполнить указанным способом.

Эта сложность может быть преодолена путем применения нового численного метода синтеза квазилинейных моделей, который исключает необходимость аналитического дифференцирования и интегрирования, но требует выполнения значительного числа арифметических операций. Однако в настоящее время это не является большой проблемой, так как современные многопроцессорные контроллеры могут выполнить все необходимые операции за короткое время. Разработанный метод позволяет получить достаточно точную приближенную кусочно-постоянную квазилинейную модель объектов со сложными нелинейностями. Такие модели удобно применять при цифровом управлении нелинейными объектами. Эффективность численного метода показана путем сравнения фазовых портретов кусочно-постоянной квазилинейной и нелинейной моделей простого объекта, а также путем сравнения значений переменных состояния этих моделей. Предложенный метод может применяться при синтезе нелинейных систем управления нелинейными, обладающими сложными характеристиками объектами в кораблестроительной, авиационной, химической, сельскохозяйственной и других отраслях.

Ключевые слова: нелинейный объект, сложная нелинейность, квазилинейная модель, функциональный коэффициент, аналитический метод синтеза, численный метод синтеза

Введение

Математические модели нелинейных объектов очень часто являются системами нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, т. е. имеют форму Коши [1–3]. Ввиду очень большого разнообразия нелинейностей синтез систем управления на основе этих моделей сильно затруднен даже в тех случаях, когда нелинейности являются дифференцируемыми по всем своим аргументам. Значительное разнообразие нелинейностей привело к разработке ряда методов синтеза систем управления нелинейными объектами. Как правило, эти методы являются аналитическими, т. е. искомые математические модели нелинейных устройств управления находятся с применением некоторых преобразований исходных нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ) объектов

управления [4–12]. Некоторые из этих методов рассмотрены в работе [13]. При этом каждый из методов синтеза, как правило, ориентирован на преобразование исходных ДУ объекта управления (ОУ) к определенной форме, что требует соответствующего нелинейного, взаимобратного преобразования переменных состояния. Основной трудностью применения большинства этих методов является сложность как проверки условий существования решения задачи синтеза тем или иным методом, так и поиска подходящего нелинейного преобразования.

Одним из наиболее простых, аналитических методов синтеза нелинейных систем управления является метод квазилинейных моделей [11, 13]. Условиями возможности его применения являются управляемость модели ОУ, дифференцируемость ее правых частей по всем переменным и измеримость всех переменных состояния с помощью датчиков. Естественно, если последнее условие не выполняется, то, как обычно, применяются наблюдатели переменных состояния [1, 14].

*Работа выполнена в ЮФУ при поддержке РФФИ, проект № 19-08-01226.

Известный аналитический метод создания квазилинейных моделей (КЛМ) нелинейных объектов на основе их нелинейных ДУ предполагает определение первых частных производных от правых частей этих уравнений и последующее интегрирование этих производных по вспомогательной переменной [11, 13]. Однако в некоторых случаях нелинейности объектов управления описываются очень сложными выражениями, так что определение их частных производных с использованием известных формул дифференцирования представляет собой достаточно сложную задачу. Еще более сложной задачей в этих случаях оказывается интегрирование полученных выражений по вспомогательной переменной.

Разработка нового метода синтеза КЛМ, исключаящего необходимость дифференцирования и интегрирования сложных нелинейных функций с использованием известных формул, является целью данной работы.

Постановка задачи

Чтобы полнее показать основные особенности синтеза КЛМ известным аналитическим методом, рассмотрим подробнее его основные этапы [13]. Эти модели одномерных (SISO) нелинейных объектов в векторно-матричной форме имеют вид

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u, \quad y = c^T(x)x + d(x)u, \quad (1)$$

где $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ — вектор состояния, u — управление, y — управляемая переменная; $A(x)$ и $b(x)$, $c(x)$ — функциональные матрица и векторы:

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$b(x) = \begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{bmatrix}, \quad c(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{bmatrix},$$

$d(x)$ — скаляр.

Функциональные коэффициенты матрицы и векторов (2) и скаляр $d(x)$ определяются по нелинейным моделям объектов, которые в общем случае имеют вид

$$\dot{x}_i = \varphi_i(x; u), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad y = \psi(x; u). \quad (3)$$

Подчеркнем, что основным условием существования квазилинейных моделей типа (1), (2) нелинейных объектов (3) является диффе-

ренцируемость нелинейных функций $\varphi_i(x, u)$ и $\psi(x, u)$ по всем аргументам.

Таким образом, для достижения цели работы необходимо найти способы определения коэффициентов матрицы $A(x)$, векторов $b(x)$, $c(x)$ и скаляра $d(x)$ КЛМ нелинейных объектов, заданных уравнениями (3) с существенно сложными нелинейными правыми частями. При этом не должны использоваться известные формулы дифференцирования и интегрирования.

Аналитический метод синтеза КЛМ

В данном случае в соответствии с работой [13] определяются с применением известных формул дифференцирования [15, 16] частные производные

$$\varphi'_{ij}(x; u) = \frac{\partial \varphi_i(x; u)}{\partial x_j}, \quad i, j = \overline{1, n}; \quad (4)$$

$$\varphi'_{iu}(x; u) = \frac{\partial \varphi_i(x; u)}{\partial u}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\psi'_j(x; u) = \frac{\partial \psi(x; u)}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (5)$$

$$\psi'_u(x; u) = \frac{\partial \psi(x; u)}{\partial u}.$$

При этом очень часто могут выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} \varphi'_{iu}(x, u) &= \varphi'_{iu}(x, 0), \quad i = \overline{1, n}; \\ \psi'_u(x, u) &= \psi'_u(x, 0). \end{aligned} \quad (6)$$

Как видно, при выполнении условий (6) производные по управлению функций $\varphi_i(x, u)$ и $\psi(x, u)$ из соотношений (3) не зависят от управления u . Этот момент важен с точки зрения решения задачи синтеза нелинейных САУ для объектов (3).

Далее определяются функциональные коэффициенты $a_{ij}(x)$ и $c_j(x)$ матрицы $A(x)$ и вектора $c(x)$ из уравнения (1) по следующим формулам:

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 \varphi'_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \theta x_j, 0, \dots, 0; 0) d\theta, \quad (7)$$

$$i, j = \overline{1, n};$$

$$c_j(x) = \int_0^1 \psi'_j(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \theta x_j, 0, \dots, 0; 0) d\theta, \quad (8)$$

$$j = \overline{1, n}.$$

Здесь и ниже при $j = 1$ переменные x_0 и $\tilde{x}_0$ опускаются из соответствующих выражений.

Порядок определения коэффициентов $b_j(x)$ и скаляра $d(x)$ зависит от того, выполняются условия (6) или не выполняются. Если эти условия не выполняются, то используются выражения

$$b_i(x) = \int_0^1 \varphi'_{iu}(x; \theta u) d\theta, \quad i = \overline{1, n};$$

$$d(x) = \int_0^1 \psi'_u(x; \theta u) d\theta. \quad (9)$$

При выполнении условий (6) вектор $b(x)$ и скаляр $d(x)$ оказываются не зависящими от управления u и находятся значительно проще:

$$b_i(x) = \varphi'_{iu}(x; 0), \quad i = \overline{1, n}; \quad d(x) = \psi'_u(x, 0). \quad (10)$$

Определение коэффициентов $b_i(x)$ и скаляра $d(x)$ по соотношениям (9) или (10) на свойствах КЛМ (1), (2) не сказывается: и в том, и в другом случае квазилинейная модель (1), (2), (7)–(10) является точным представлением нелинейной модели (3).

Для большей ясности идеи и особенностей численного метода синтеза КЛМ сначала покажем порядок применения аналитического метода синтеза КЛМ на примере следующей скалярной функции:

$$\varphi(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1^3x_2^2 + 5x_2^2 + 6\sin x_1 + 7. \quad (11)$$

В данном случае функция имеет два аргумента, поэтому ее квазилинейная модель типа (1) имеет вид

$$\varphi_{\text{КЛМ}}(x) = [a_1(x) \quad a_2(x)] \cdot x + \varphi(0), \quad (12)$$

где $x = [x_1 \quad x_2]^T$ — вектор столбец; $\cdot$ — здесь и далее знак скалярного произведения векторов.

Для получения КЛМ (12), очевидно, достаточно найти два функциональных коэффициента $a_1(x)$ и $a_2(x)$. В соответствии с приведенными выше выражениями, прежде всего, находятся частные производные от функции (11) по ее аргументам:

$$\begin{aligned} \varphi'_1(x) &= 6x_1 + 12x_1^2x_2^2 + 6\cos x_1; \\ \varphi'_2(x) &= 8x_1^3x_2 + 10x_2 = (8x_1^3 + 10)x_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, опустим в выражении (7) индекс i , положим $j = 1$ и подставим первое выражение (13) в (7) с заменой переменной x_1 на θx_1 , а переменной x_2 — на 0. В результате, интегрируя по переменной θ , имеем:

$$\begin{aligned} a_1(x) &= \int_0^1 (6\theta x_1 + 6\cos \theta x_1) d\theta = \\ &= 6x_1 \frac{\theta^2}{2} \Big|_0^1 + 6 \frac{\sin \theta x_1}{x_1} \Big|_0^1 = 3x_1 + 6 \frac{\sin x_1}{x_1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналогично, подставив второе выражение (13) в соотношение (7) при $j = 2$, т. е. не изменяя x_1 , заменим переменную x_2 на θx_2 и, интегрируя по переменной θ , получим:

$$\begin{aligned} a_2(x) &= \int_0^1 (8x_1^3 + 10)\theta x_2 d\theta = \\ &= (8x_1^3 + 10)x_2 \frac{\theta^2}{2} \Big|_0^1 = 4x_1^3x_2 + 5x_2. \end{aligned} \quad (15)$$

В данном случае $\varphi(0) = 7$, поэтому из выражения (12) с учетом (14) и (15) вытекает следующая квазилинейная модель нелинейной функции (11):

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{КЛМ}}(x) &= \\ &= \left[3x_1 + 6 \frac{\sin x_1}{x_1} \quad 4x_1^3x_2 + 5x_2 \right] \cdot x + 7. \end{aligned} \quad (16)$$

Выполнив в (16) скалярное умножение векторов, мы получим точное выражение рассматриваемой функции (11), за исключением порядка записи слагаемых. Это подтверждает, что любая КЛМ, построенная аналитическим методом [3, 11, 13], является точным представлением соответствующей нелинейной дифференцируемой функции.

Численный метод синтеза КЛМ

Как видно, в основе аналитического метода синтеза КЛМ лежит необходимость, прежде всего, дифференцирования нелинейных функций уравнений нелинейных объектов. Далее будем иметь в виду случаи, когда эти нелинейности настолько сложны, что найти производные (4), (5), с применением известных формул, а затем выполнить интегрирование в выражениях (7)–(9), также с применением известных формул [15, 16], очень трудно. Именно в случае таких объектов с существенно сложными нелинейностями рекомендуется применять предлагаемый в данной работе численный метод. Его основная особенность состоит в том, что определяются не сами частные производные (4), (5) нелинейностей, а дискретные значения этих производных в том виде, в котором они используются в выражениях (7)–(10).

Применительно к уравнениям (3) значения соответствующих частных производных, следуя Л. Эйлеру, можно найти по формулам

$$\begin{aligned} \varphi'_{ij}(x) &\approx [\varphi_i(x_1, \dots, x_{(j-1)}, x_j + \Delta x, 0, \dots, 0; 0) - \\ &- \varphi_i(x_1, \dots, x_{(j-1)}, x_j, 0, \dots, 0; 0)] / \Delta x; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\varphi'_{iu}(x; u) \approx \frac{\varphi_i(x; u + \Delta u) - \varphi_i(x; u)}{\Delta u}; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \psi'_j(x) &\approx [\psi(x_1, \dots, x_{(j-1)}, x_j + \Delta x, 0, \dots, 0; 0) - \\ &- \psi(x_1, \dots, x_{(j-1)}, x_j, 0, \dots, 0; 0)] / \Delta x; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\psi'_u(x, u) \approx \frac{\psi(x, u + \Delta u) - \psi(x, u)}{\Delta u}. \quad (20)$$

Здесь $i, j = \overline{1, n}$; $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_u \neq 0$ — малые приращения.

Отметим, что если по выражениям (17)–(20) осуществлять вычисления при $\Delta_x \rightarrow 0$ и $\Delta_u \rightarrow 0$, то, как известно, результаты будут приближаться к точным значениям частных производных [15]. Конечно, реализация вычислений при $\Delta_x \rightarrow 0$, $\Delta_u \rightarrow 0$ является достаточно затруднительной. Однако на практике это и не требуется, так как обычно достаточно найти значения некоторой величины с необходимой точностью. В настоящее время, когда решение нелинейных дифференциальных уравнений осуществляется с помощью ЭВМ, вполне возможно получать достаточно точные приближенные значения производных по формулам (17)–(20) при малых приращениях Δ_x и Δ_u . В этом случае выражения (1), (2) будут представлять, конечно, КЛМ с некоторыми погрешностями.

Найдем теперь коэффициенты $a_1(x)$ и $a_2(x)$ из КЛМ (12) численным методом, т.е. с применением соотношений (17)–(20). Так как функция $\varphi(x)$ (11) скалярная, то для этой цели достаточно воспользоваться формулой (17), опуская i и полагая $n = 2$. Приближенное значение производной $\varphi'_1(x_1, 0)$ по этой формуле имеет вид

$$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0) \approx [3(x_1 + \Delta_x)^2 + 6 \sin(x_1 + \Delta_x) - 3x_1^2 - 6 \sin x_1] / \Delta_x$$

или

$$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0) \approx 6x_1 + 3\Delta_x + 6[\sin(x_1 + \Delta_x) - \sin x_1] / \Delta_x. \quad (21)$$

Воспользовавшись разложением в ряд функции $\sin(x_1 + \Delta_x)$ [16, с. 79; 415.07]:

$$\sin(x_1 + \Delta_x) = \sin x_1 + \Delta_x \cos x_1 - (\Delta_x^2 \sin x_1 / 2! + \Delta_x^3 \cos x_1 / 3!) + \dots$$

и ограничиваясь в этом ряде четырьмя слагаемыми, из выражения (21) получим

$$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0) \approx 6(x_1 + \cos x_1) + 3\Delta_x(1 - \sin x_1) - \Delta_x^2 \cos x_1. \quad (22)$$

Совершенно аналогично по формуле (17) при $j = 2$ находится выражение для производной

$$\tilde{\varphi}'_2(x_1, x_2) \approx (8x_1^3 + 10)(x_1 + \Delta_x / 2). \quad (23)$$

Из первого выражения (13) при $x_2 = 0$ следует: $\varphi'_1(x_1, 0) = 6(x_1 + \cos x_1)$. Сравнив это выражение с (22), а второе выражение (13) — с (23), придем к заключению, что погрешности соотношения (17) и аналогичных ему соотношений (18)–(20) уменьшаются с уменьшением приращений Δ_x и Δ_u . Для количественной оценки по-

Значения производных
Derivatives values

x_1	$\varphi'_1(x_1, 0)$	Δ_x		
		0,1	0,01	0,001
		$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0)$	$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0)$	$\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0)$
0	6	6	6	6
0,5	8,2655	8,1229	8,2511	8,2641
1,0	9,2418	8,9940	9,2166	9,2393
1,25	9,3919	9,1141	9,2166	9,3891
$\pi/2$	9,4248	9,1348	9,2166	9,4218

грешности и влияния на нее приращений Δ_x в табл. 1 приведены значения точной производной $\varphi'_1(x_1, 0)$ (13) и ее приближенные значения $\tilde{\varphi}'_1(x_1, 0)$, вычисленные по формуле (21), с помощью MATLAB при некоторых значениях x_1 и Δ_x . Из приведенных в этой таблице данных следует очевидный вывод: для получения достаточно точных значений производных необходимо приращения Δ_x и Δ_u выбирать малыми. В данном случае при $\Delta_x = 0,001$ ошибка $\delta_\varphi = |\varphi'_1(x_1, 0) - \tilde{\varphi}'_1(x_1, 0)| / \varphi'_1(x_1, 0) \cdot 100\%$ не превышает 0,032 %, а при $\Delta_x = 0,01$ не превышает 0,32 %.

Для определения коэффициентов $a_i(x)$, $i = 1, 2$, из КЛМ (12), как видно из выражений (7) или (14), (15), необходимо заменить переменную x_i на θx_i и проинтегрировать полученные выражения по θ в пределах от 0 до 1. Учитывая, что по формулам (17)–(20) вычисляются дискретные значения производных, логично операцию интегрирования заменить суммированием [15]. В результате при $\Delta_\theta = \Delta_x = 1/N$ из выражений (7), (11) и (17), как и выше, опуская i и полагая $j = 1, 2$, получим при $x_i \neq 0$, $i = 1, 2$:

$$a_1(x) \approx \frac{1}{x_1} \times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[\varphi\left(\frac{(\mu+1,5)}{N} x_1, 0\right) - \varphi\left(\frac{(\mu+0,5)}{N} x_1, 0\right) \right]; \quad (24)$$

$$a_2(x) \approx \frac{1}{x_2} \times$$

$$\sum_{\mu=0}^{N-1} \left[\varphi\left(x_1, \frac{(\mu+1,5)}{N} x_2\right) - \varphi\left(x_1, \frac{(\mu+0,5)}{N} x_2\right) \right].$$

Здесь N — число подынтервалов $\Delta_\theta = 1/N$, на которые разбивается интервал интегрирования в соотношениях (7)–(9). Отметим, что при $x_i = 0$, $a_i(x) = 0$, $i = 1, 2$, что допустимо в соответствии с определением КЛМ.

Подставив выражения (24) в (12), получим приближенную КЛМ нелинейной функции (11), найденную численным методом, без "взя-

тия" частных производных и интегрирования по формулам дифференцирования и интегрирования. Подробный вывод выражений (24) приведен в Приложении.

Вернемся к синтезу квазилинейных моделей (1), (2) нелинейных объектов (3) предлагаемым численным методом. По аналогии с построением выражений (24), заменяя в равенствах (7)–(10) частные производные их приближенными выражениями (17)–(20), а операцию интегрирования — суммированием [15] при $\Delta_0 = \Delta_x = \Delta_u = 1/N$, придем к следующим выражениям:

$$a_{ij}(\tilde{x}) = \frac{1}{\tilde{x}_j} \times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[\varphi_i \left(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{(j-1)}, \frac{(\mu+1,5)}{N} \tilde{x}_j, 0, \dots, 0; 0 \right) - \right. \quad (25)$$

$$\left. - \varphi_i \left(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{(j-1)}, \frac{(\mu+0,5)}{N} \tilde{x}_j, 0, \dots, 0; 0 \right) \right];$$

$$c_j(\tilde{x}) = \frac{1}{\tilde{x}_j} \times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[\psi \left(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{(j-1)}, \frac{(\mu+1,5)}{N} \tilde{x}_j, 0, \dots, 0; 0 \right) - \right. \quad (26)$$

$$\left. - \psi \left(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{(j-1)}, \frac{(\mu+0,5)}{N} \tilde{x}_j, 0, \dots, 0; 0 \right) \right].$$

Здесь $\tilde{x}_j \neq 0$, $j = \overline{1, n}$. При $\tilde{x}_j = 0$ $a_{ij}(\tilde{x}) = c_j(\tilde{x}) = 0$, $i, j = \overline{1, n}$. Определение коэффициентов $b_i(\tilde{x})$ и скаляра $d(\tilde{x})$, как и в случае аналитического метода, зависит от выполнения условий (6). Если эти условия *не выполняются*, то используются выражения

$$b_i(\tilde{x}) = \frac{1}{u_{-1}} \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[\varphi_i \left(\tilde{x}, \frac{(\mu+1,5)}{N} u_{-1} \right) - \right. \quad (27)$$

$$\left. - \varphi_i \left(\tilde{x}, \frac{(\mu+0,5)}{N} u_{-1} \right) \right];$$

$$d(\tilde{x}) \approx \frac{1}{u_{-1}} \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[\psi \left(\tilde{x}, \frac{(\mu+1,5)}{N} u_{-1} \right) - \right. \quad (28)$$

$$\left. - \psi \left(\tilde{x}, \frac{(\mu+0,5)}{N} u_{-1} \right) \right],$$

где $i = \overline{1, n}$, $u_{-1} \neq 0$;
при $u_{-1} = 0$ $b_i(\tilde{x}) = d(\tilde{x}) = 0$.

Если же условия (6) *выполняются*, то вместо (27), (28) используются выражения

$$b_i(\tilde{x}) \approx [\varphi_i(\tilde{x}; u_{-1} + \Delta_u) - \varphi_i(\tilde{x}; u_{-1})] / \Delta_u, \quad i = \overline{1, n}; \quad (29)$$

$$d(\tilde{x}) = [\psi(\tilde{x}, u_{-1} + \Delta_u) - \psi(\tilde{x}, u_{-1})] / \Delta_u, \quad \Delta_u \neq 0.$$

Примечание. В выражениях (25)–(29) $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ — вектор состояния КЛМ, коэффициенты которой найдены численным методом.

Этот вектор, как отмечалось выше, отличается от вектора $x(t)$ исходной нелинейной модели; u_{-1} — это значение управления, предшествующее его текущему значению u_k . Возможность его использования обусловлена тем, что при использовании ЭЦВМ формируются только дискретные значения управления: $u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, \dots$

Полученные соотношения (25)–(29) являются расчетными соотношениями численного метода синтеза КЛМ (1), (2) нелинейных объектов с существенно сложными нелинейностями. Формально модель (1), (2), (25)–(29) является непрерывной, так как ее функциональные коэффициенты определены при всех значениях вектора $\tilde{x}$. Однако практически эти коэффициенты могут быть вычислены только лишь при дискретных значениях вектора $\tilde{x}$. Поэтому КЛМ этого типа, фактически, могут использоваться только как кусочно-постоянные, в том смысле, что, если их коэффициенты вычисляются с периодом T_b , то на интервалах времени $t \in [kT_b, (k+1)T_b]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, эти коэффициенты являются постоянными. Их значения в этом случае определяются значениями вектора состояния КЛМ $\tilde{x}(kT_b)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. При этом, если ее вектор состояния $\tilde{x}(t)$ квантуется по времени тоже с периодом T_b , а время вычисления коэффициентов КЛМ (1), (2), (25)–(29) меньше T_b , то эти модели оказываются дискретными квазилинейными моделями нелинейных объектов (3) следующего вида:

$$\tilde{x}_{k+1} = A(\tilde{x}_k) \tilde{x}_k + b(\tilde{x}_k) u_k, \quad (30)$$

$$\tilde{y}_k = c^T(\tilde{x}_k) \tilde{x}_k + d(\tilde{x}_k) u_k,$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ Такие модели являются очень удобными при цифровом управлении.

Для оценки эффективности предложенного численного метода синтеза КЛМ рассмотрим нелинейный объект второго порядка (исключительно для наглядности) с одной нелинейностью [17], который описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2 = \varphi_1(x_2);$$

$$\dot{x}_2 = u - x_2^3 - (1 + |x_2|) \sin x_1 = \varphi_2(x, u); \quad (31)$$

$$y = x_1,$$

где $x = [x_1 \ x_2]^T$. В данном случае нелинейной является лишь функция $\varphi_2(x, u)$, а управление входит в нее линейно, поэтому КЛМ объекта (31), построенная численным методом, имеет вид

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}(\tilde{x}) & a_{22}(\tilde{x}) \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \ 0] \tilde{x}, \quad (32)$$

т. е. для определения КЛМ достаточно найти лишь коэффициенты $a_{21}(\tilde{x})$ и $a_{22}(\tilde{x})$. В соответствии с формулой (25) при $n = 2$, $i = 2$ и $\tilde{x}_j \neq 0$, $j = 1, 2$ получаем:

$$a_{21}(\tilde{x}) \approx \frac{1}{\tilde{x}_1} \times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[-\sin\left(\frac{\mu+1,5}{N} \tilde{x}_1\right) + \sin\left(\frac{\mu+0,5}{N} \tilde{x}_1\right) \right]; \quad (33)$$

$$a_{22}(\tilde{x}) = \frac{1}{\tilde{x}_2} \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[-\left(\frac{\mu+1,5}{N} \tilde{x}_2\right)^3 + \left(1 + \left|\frac{\mu+1,5}{N} \tilde{x}_2\right|\right) \sin \tilde{x}_1 + \left(\frac{\mu+0,5}{N} \tilde{x}_2\right)^3 + \left(1 + \left|\frac{\mu+0,5}{N} \tilde{x}_2\right|\right) \sin \tilde{x}_1 \right]. \quad (34)$$

Как и выше, при $\tilde{x}_j = 0$ $a_{2j}(\tilde{x}) = 0$, $j = 1, 2$. Подставив выражения (33) и (34) в первое равенство (32), получим КЛМ объекта (31).

Моделирование моделей (31) и (32)—(34), некоторые результаты которого приведены на рисунке (см. вторую сторону обложки) и в табл. 2, проводилось в среде MATLAB в целях сравнения фазовых траекторий и значений выходной величины при различных значениях N . Приведенная на рисунке непрерывная фазовая траектория построена по нелинейным уравнениям (31), а звездочками обозначены точки также непрерывной траектории, построенной по квазилинейной модели (32)—(34) при начальных условиях $x_{10} = \tilde{x}_{10} = x_{20} = \tilde{x}_{20} = 0, 1$. Коэффициенты КЛМ вычислялись через каждые $T_b = 0,01$ с при $N = 1000$ и $u = 0$, но на рисунке для наглядности фиксировалась только каждая сотая точка этой траектории, т. е. звездочки на рисунке соответствуют моментам времени $t = 0, 1, 2, \dots, 20$ с. Очевидно, в данном случае КЛМ (32)—(34) является кусочно-постоянной, так как ее коэффициенты на интервалах времени $t \in 0,01(k, k+1)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ являются постоянными. Интегрирование уравнений (31) и (32)—(34) на каждом из этих интервалов осуществлялось функцией ODE 45 при соответствующих начальных условиях: $\tilde{x}_{10}^{k+1} = \tilde{x}_1(0,01k)$, $\tilde{x}_{20}^{k+1} = \tilde{x}_2(0,01k)$.

Как видно на рисунке (см. вторую сторону обложки), точки траектории КЛМ (32)—(34)

достаточно близки к соответствующим точкам траектории непрерывной системы (31).

Для количественного сравнения КЛМ (32)—(34) с нелинейной моделью (31) вычислялись отклонения переменной $\tilde{x}_1$ квазилинейной модели от переменной x_1 нелинейной модели на интервале времени в 20 с. Эти переменные и их отклонения являются колебательными, поэтому в табл. 2 приведены значения отклонений $\delta(t) = |x_1(t) - \tilde{x}_1(t)|/x_1(t) \cdot 100\%$ в процентах от текущего значения $x_1(t)$, соответствующие моментам времени $t = 3k_1$, $k_1 = 1, 2, 3, \dots$, при которых эти отклонения близки к максимальным значениям.

На основе результатов моделирования можно заключить, что численный метод, в отличие от аналитического, приводит к приближенным КЛМ, однако отклонения их траекторий от траекторий исходных нелинейных моделей достаточно малы. При этом значения приращения $\Delta_{\tilde{x}} = \Delta_u = 1/N$, с которым происходит приближенное вычисление частных производных и их интегрирование, мало влияет на эти отклонения.

Однако время расчета значений переменных состояния по КЛМ существенно зависит от N . Так, интегрирование нелинейной модели (31) при $0 \leq t \leq 20$ с в среде MATLAB составляет 0,66 с, в то время как интегрирование КЛМ (32)—(34) при $N = 100$ составляет 6,33 с. Увеличение времени расчета обусловлено необходимостью расчетов функциональных коэффициентов КЛМ по формулам (25)—(29), однако его не трудно уменьшить до приемлемых значений за счет применения многопроцессорных микроконтроллеров, ориентированных на параллельные вычисления.

Заключение

Таким образом, полученные выражения (25)—(29) позволяют численным путем найти достаточно точную КЛМ нелинейных объектов, заданных уравнениями (3), которые содержат существенно сложные нелинейности. Сложность указанных нелинейностей обусловлена трудностью взятия их частных производных и интегрирования этих производных по известным формулам дифференцирования и интегрирования.

В соответствии с выражениями (25)—(29) разработанный численный метод синтеза КЛМ позволяет привести математические модели объектов (3) с неаддитивным управлением, т. е. при невыполнении условий (6), к приближенной КЛМ, аддитивной по управлению. Это позволяет очень простой аналитический метод синтеза гурвицевых систем управления нелинейными объектами, разработанный для аддитивных по управлению нелинейных объ-

Таблица 2
Table 2

Отклонения переменных, %
Deviations of variables, %

N	t, с					
	3	6	9	12	15	18
250	0,08	0,16	0,26	0,37	0,49	0,64
500	0,17	0,18	0,28	0,40	0,53	0,70
750	0,09	0,18	0,29	0,41	0,55	0,62

ектов [13], применять и в случае неаддитивных по управлению нелинейных объектов кораблестроительной, авиационной, химической, сельскохозяйственной и других отраслей.

Приложение

Вывод формул численного синтеза КЛМ. Для большей ясности рассмотрим функцию $\varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, x_2)$, аналогичную функции (11), но при $\varphi_i(0) = 0$. В этом случае $n = 2$, поэтому, как и выше, необходимо найти два коэффициента $a_{ij}(x)$, $j = 1, 2$. Тогда по формуле (7) при $j = 1$ имеем

$$a_{i1}(x) = \int_0^1 \varphi'_i(x_1, 0) \Big|_{x_1=\theta x_1} d\theta = \int_0^1 \varphi'_i(\theta x_1, 0) d\theta, \quad (\text{П.1})$$

где $\varphi'_i(x_1, 0) = \partial \varphi_i(x_1, 0) / \partial x_1$. Для взятия интеграла в (П.1) проведем замену, полагая $x_1 \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_{i1}(x) &= \int_0^1 \varphi'_i(\theta x_1, 0) d\theta = \left| \theta x_1 = z, \right. \\ &\quad \left. d\theta = dz/x_1 \right| = \\ &= \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1} \varphi'_i(z, 0) dz \approx \frac{1}{x_1} \sum_{\mu=0}^{N-1} \varphi'_i(z_\mu, 0) \Delta z. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Здесь N — число отрезков шириной Δ_θ , на которое разбит интервал интегрирования по θ , равный 1, а z_μ — середины соответствующих отрезков по переменной z . Пусть $\Delta_\theta = 1/N$, тогда заменяя x_1 на $\tilde{x}_1$, получим $\Delta_z = \tilde{x}_1 \Delta_\theta = \tilde{x}_1 / N$. Выберем $z_\mu = (\mu + 0,5) \Delta_z$, тогда $z_\mu = (\mu + 0,5) \tilde{x}_1 / N$. Следовательно, из выражения (П.2) вытекает равенство

$$a_{i1}(\tilde{x}) = \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} \varphi'_i(z_\mu, 0). \quad (\text{П.3})$$

Значения частной производной $\varphi'_i(z, 0)$ в точках z_μ будем определять по формуле

$$\varphi'_i(z_\mu, 0) \approx \frac{\varphi_i(z_\mu + \Delta_z, 0) - \varphi_i(z_\mu, 0)}{\Delta_z}.$$

Отсюда, с учетом приведенных выше выражений для z_μ и Δ_z , имеем

$$\begin{aligned} &\varphi'_i(z_\mu, 0) \approx \\ &\approx \left[\varphi_i \left(\frac{\mu + 1,5}{N} \tilde{x}_1, 0 \right) - \varphi_i \left(\frac{\mu + 0,5}{N} \tilde{x}_1, 0 \right) \right] \frac{N}{\tilde{x}_1}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Подставляя (П.4) в (П.3), по-прежнему при $\tilde{x}_1 \neq 0$, получим

$$\begin{aligned} a_{i1}(\tilde{x}) &= \frac{1}{\tilde{x}_1} \times \\ &\times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[\varphi_i \left(\frac{\mu + 1,5}{N} \tilde{x}_1, 0 \right) - \varphi_i \left(\frac{\mu + 0,5}{N} \tilde{x}_1, 0 \right) \right]. \end{aligned}$$

По аналогии при $\tilde{x}_2 \neq 0$, очевидно, можно записать

$$\begin{aligned} a_{i2}(\tilde{x}) &= \frac{1}{\tilde{x}_2} \times \\ &\times \sum_{\mu=0}^{N-1} \left[\varphi_i \left(\tilde{x}_1, \frac{\mu + 1,5}{N} \tilde{x}_2 \right) - \varphi_i \left(\tilde{x}_1, \frac{\mu + 0,5}{N} \tilde{x}_2 \right) \right]. \end{aligned}$$

При $n > 2$ вывод проводится аналогично.

Список литературы

1. **Isidori A.** Nonlinear control systems II. Berlin, Springer, 1999.
2. **Lantos B., Marton L.** Nonlinear control of vehicles and robots. London, Springer-Verlag, 2011.
3. **Neydorf R. A., Gaiduk A. R., Kudinov N. V.** Application of cut-glu approximation in analytical solution of the problem of nonlinear control design // Cyber-Physical systems: Industry 4.0 Challenges. Studies in Systems, Decision and Control. 2020. Vol. 260. P. 117–132.
4. **Zhu Y., Zhongsheng H.** Controller dynamic linearisation-based model-free adaptive control framework for a class of nonlinear system // IET Control Theory & Applications. 2015. Vol. 9, N. 7. P. 1162–1172.
5. **Sun H., Li S., Yang J., Zheng W.** Global output regulation for strict-feedback nonlinear systems with mismatched nonvanishing disturbances // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. Vol. 25, N. 15. P. 2631–2645.
6. **Lanzon A., Chen H.-J.** Feedback stability of negative imaginary systems // IEEE Transactions on automatic control. 2017. Vol. 62, N. 11. P. 5620–5633.
7. **Xia M., Antsaklis P., Gupta V., Zhu F.** Passivity and dissipativity analysis of a system and its approximation // IEEE Transactions on automatic control. 2016. Vol. 62, N. 2. P. 620–635.
8. **Rahnama A., Xia M., Antsaklis P. J.** Passivity-based design for event-triggered networked control systems // IEEE Transactions on automatic control. 2018. Vol. 63, N. 9. P. 2755–2770.
9. **Фуртат И. Б., Туличин Е. А.** Модифицированный алгоритм бэкстеппинга для нелинейных систем // АиТ. 2016. № 9. С. 70–83.
10. **Ascencio P., Astolfi T., Parisini T.** Backstepping PDE Design: A convex optimization approach // IEEE Transactions on automatic control. 2018. Vol. 63, N. 7. P. 1943–1958.
11. **Гайдук А. Р.** Полиномиальный синтез нелинейных систем управления // АиТ. 2003. № 10. С. 144–148.
12. **Пшихонов В. Х., Медведев М. Ю.** Синтез систем управления подводными аппаратами с нелинейными характеристиками исполнительных органов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2010. № 3(104). С. 147–156.
13. **Gaiduk A. R.** Nonlinear control systems design by transformation method // Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie. 2018. Vol. 19, N. 12. P. 755–761.
14. **Гайдук А. Р.** Оценивание переменных состояния нелинейных систем // АиТ. 2004. № 1. С. 3–13.
15. **Фихтенгольц Г. М.** Дифференциальное и интегральное исчисление. Том 1, 2. М.: Наука, 1969.
16. **Двайт Г. Б.** Таблицы интегралов и другие формулы: пер. с англ. Н. В. Леви / Под ред. К. А. Семендяева. М.: Наука. 1978.
17. **Топчеев Ю. И., Цыпलाков А. П.** Задачник по теории автоматического регулирования. Учеб. Пособ. для вузов. М.: Машиностроение, 1977.

Numerical Design Method of Quasilinear Models for Nonlinear Objects

A. R. Gaiduk, gaiduk_2003@mail.ru,
Southern Federal University, Taganrog, 347922, Russian Federation

Corresponding author: **Gaiduk Anatoly R.**, Dr. of Sci., Professor, Southern Federal University,
Taganrog, 347922, Russian Federation, e-mail: gaiduk_2003@mail.ru

Accepted on March 09, 2021

Abstract

Design modern methods of nonlinear control systems of nonlinear objects in the majority assume transformation of initial object model to some special forms. In these cases, it is reasonable to use quasilinear models as they can be designed on condition only of differentiability of the nonlinearities of the initial objects models. These models allow to find control analytically, i.e. as a result of the solution of some equations system, if the object, naturally, meets the controllability condition. The quasilinear models are synthesized traditionally analytically, by transformation of initial nonlinear models using operation of the taking of partial derivatives from the nonlinearities of the initial objects models and the subsequent integration of these derivatives on the auxiliary variable with application of the known formulas of differentiation and integration. However, in many cases, the objects nonlinearities have so complicated character, that the operations of the differentiation and, in particular, the integration are executed very difficult by shown way. This complexity can be overcome by application of the new numerical design method of the quasilinear models, which excludes need of the analytical differentiation and integration, but demands considerable number of the arithmetic operations. But now it is not the big problem since the modern multiprocessor controllers can carry out all the necessary operations for a short time. The developed method allows to receive rather exact, approximate piecewise-constant quasilinear models for the objects with the complicated nonlinearities. It is convenient to apply such models at numerical control of the nonlinear objects. The efficiency of a numerical method is shown by comparison of phase portraits of piecewise constant quasilinear and nonlinear models of a simple object and also by comparison of the state variables values of these models. The offered method can be applied to nonlinear control systems design for the nonlinear, characterized by complicated characteristics objects ship, aviation, chemical, agricultural and other industries.

Keywords: nonlinear object, complicated nonlinearity, quasilinear model, functional coefficient, analytical design method, numerical design method

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-08-01226.

For citation:

Gaiduk A. R. Numerical Design Method of Quasilinear Models for Nonlinear Objects, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 6, pp. 283—290.

DOI: 10.17587/mau.22.283-290

References

1. **Isidori A.** Nonlinear control systems II, Berlin, Springer, 1999.
2. **Lantos B., Marton L.** Nonlinear control of vehicles and robots, London, Springer-Verlag, 2011.
3. **Neydorf R. A., Gaiduk A. R., Kudinov N. V.** Application of cut-glue approximation in analytical solution of the problem of nonlinear control design, *Cyber-Physical systems: Industry 4.0 Challenges. Studies in Systems, Decision and Control*, 2020, vol. 260, pp. 117—132.
4. **Zhu Y., Zhongsheng H.** Controller dynamic linearisation-based model-free adaptive control framework for a class of non-linear system, *IET Control Theory & Applications*, 2015, vol. 9, no. 7, pp. 1162—1172.
5. **Sun H., Li S., Yang J., Zheng W.** Global output regulation for strict-feedback nonlinear systems with mismatched nonvanishing disturbances, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2015, vol. 25, no. 15, pp. 2631—2645.
6. **Lanzon A., Chen H.-J.** Feedback stability of negative imaginary systems, *IEEE Transactions on automatic control*, 2017, vol. 62, no. 11, pp. 5620—5633.
7. **Xia M., Antsaklis P., Gupta V., Zhu F.** Passivity and dissipativity analysis of a system and its approximation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, vol. 62, no. 2, pp. 620—635.
8. **Rahnama A., Xia M., Antsaklis P. J.** Passivity-based design for event-triggered networked control systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, vol. 63, no. 9, pp. 2755—2770.
9. **Furtat I. B., Tupichin E. A.** The modified backstepping algorithm for nonlinear systems, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2016, no. 9, pp. 70—83 (in Russian).
10. **Ascencio P., Astolfi T., Parisini T.** Backstepping PDE design: a convex optimization approach, *IEEE Transactions On Automatic Control*, 2018, vol. 63, no. 7, pp. 1943—1958.
11. **Gaiduk A. R.** Polynomial design of nonlinear control systems, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2003, no. 10, pp. 144—148 (in Russian).
12. **Pshikhopov V. H., Medvedev M. Yu.** Control systems design of submarine ship with nonlinear characteristics of executive units, *Izvestiya YUFU. Tekhnicheskie Nauki*, 2010, no. 3(104), pp. 147—156 (in Russian).
13. **Gaiduk A. R.** Nonlinear control systems design by transformation method, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 12, pp. 755—761.
14. **Gaiduk A. R.** Estimation of nonlinear systems state variables, *Avtomatika i Telemekhanika*, 2004, no. 1, pp. 3—13 (in Russian).
15. **Fikhtengolts G. M.** Differential and integral calculus, vol. 1,2, Moscow, Nauka, 1969.
16. **Dvait G. B.** Integral tables and other formulas: translation from English N. V. Levi, Under editorship of K. A. Semendyaev, Moscow, Nauka, 1978 (in Russian).
17. **Topcheev Yu. I., Tsyplakov A. P.** Book of problems according to automatic control theory. Manual for higher education institutions, Moscow, Mashinostroenie, 1977 (in Russian).