ДИНАМИКА, БАЛЛИСТИКА, УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 629.7.05 DOI: 10.17587/mau.22.217-224

Ю. Н. Челноков, д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр., iptmuran@san.ru,
А. В. Молоденков, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., iptmuran@san.ru,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

Кватернионный алгоритм начальной выставки БИНС с использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова*

Рассматривается задача начальной выставки бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) на основе метода векторного согласования. Сущность его состоит в определении взаимной ориентации приборного (Y) (связанного с блоком чувствительных элементов БИНС) и опорного (X) трехгранников по результатам измерений проекций не менее чем двух неколлинеарных векторов на оси обоих трехгранников. В статье сформулировано определение начальной ориентации объекта с помощью метода гирокомпасирования, являющегося разновидностью метода векторного согласования. Этот способ начальной выставки основан на использовании информации о проекциях векторов кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости объекта в системах координат X и Y. Вдоль осей связанной системы координат Y установлены три одноосных акселерометра и три гироскопа (вообще говоря, три измерителя абсолютной угловой скорости любой физической природы), измеряющие проекции векторов кажущегося ускорения и абсолютной угловой скорости объекта. Если при этом будут известны проекции этих же векторов на оси системы координат X, то можно установить взаимную ориентацию трехгранников X и Y. В статье решается задача начальной выставки БИНС в случае неподвижного основания, когда акселерометры измеряют проекции вектора ускорения силы тяжести, а гироскопы измеряют проекции вектора угловой скорости вращения Земли на связанные с объектом оси. Проекции этих же векторов на оси нормальной географической системы координат X также определяются по известным формулам. Связь между проекциями векторов в системах координат X и Y устанавливается известными кватернионными соотношениями. В этих соотношениях неизвестной величиной является кватернион ориентации объекта в системе координат X.

Задача начальной выставки БИНС математически сводится к решению неоднородной системы линейных алгебраических уравнений, матрица коэффициентов которой может быть плохо обусловлена. С использованием метода регуляризации А. Н. Тихонова решения некорректных задач предложен кватернионный алгоритм начальной выставки БИНС. Приводятся примеры расчетов и проведен анализ полученных результатов.

Ключевые слова: *БИНС, кватернион начальная выставка, метод гирокомпасирования, метод регуляризации А. Н. Тихонова*

Введение

Для функционирования алгоритмов инерциальной ориентации и навигации бесплатформенной инерциальной навигационной системы (БИНС) непосредственно перед работой этих алгоритмов требуется проводить математическую начальную выставку БИНС. Эффективным методом математической начальной выставки (не калибровки!) БИНС считается метод векторного согласования. Сущность его состоит в определении взаимной ориентации приборного (*Y*) (связанного с блоком чувствительных элементов БИНС) и опорного (*X*) трехгранников по результатам измерений проекций не менее чем двух неколлинеарных векторов на оси обоих трехгранников. В статье рассматривается определение начальной ориентации объекта с помощью метода гирокомпасирования [1, 2], являющегося разновидностью метода векторного согласования. Этот способ начальной выставки основан на использовании информации о проекциях векторов кажущегося ускорения **a** и абсолютной угловой скорости **ω** объекта в системах координат *X* и *Y*. Считается, что вдоль осей связанной системы координат *Y* установлены три одноосных акселерометра и три гироскопа (вообще говоря, три измерителя абсолютной угловой скорости любой физической природы), измеряющие проекции векторов **a** и **ω**. Если при этом будут известны проекции этих же векторов

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00205).

на оси базовой системы координат X, то можно установить взаимную ориентацию трехгранников X и Y.

В статье решается задача начальной выставки БИНС в случае неподвижного основания, когда акселерометры измеряют проекции вектора ускорения силы тяжести **g**, а гироскопы измеряют проекции u_i вектора **u** угловой скорости вращения Земли на связанные с объектом оси. Проекции этих же векторов на оси нормальной географической системы координат (НГСК) X также определяются по известным формулам. Связь между проекциями векторов **u** и **g** в системах координат Y и X устанавливается известными кватернионными соотношениями. В этих соотношениях неизвестной величиной является кватернион ориентации объекта в системе координат X.

Выделяя в уравнениях скалярную и векторную части, получаем переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), где неизвестной величиной является вектор конечного поворота $\boldsymbol{\theta}$, совмещающего системы координат X и Y (отметим, что при получении уравнений предполагается отсутствие полуоборота системы координат X относительно Y). Таким образом, математическая постановка задачи начальной выставки БИНС на основе гирокомпасирования заключается в нахождении неизвестного вектора $\boldsymbol{\theta}$ из полученной переопределенной СЛАУ.

При нахождении вектора $\boldsymbol{\theta}$ непосредственно из СЛАУ ("алгоритм 1") и на основе данных, содержащих погрешности измерений, компоненты вектора $\boldsymbol{\theta}$ находятся также с погрешностями (в особенности компонента вектора $\boldsymbol{\theta}$, отвечающая за курс объекта ψ). В зависимости от априорно заданных в ходе численных экспериментов значений углов курса ψ, крена ϑ, тангажа γ объекта и погрешностей данных задачи (показаний гироскопов и акселерометров) погрешность нахождения угла курса объекта $\Delta\psi$ может отличаться в целом ряде случаев от погрешностей нахождения углов крена $\Delta\vartheta$ и тангажа $\Delta\gamma$ на два-три (в основном) и более порядков. Это объясняется тем, что матрица коэффициентов СЛАУ плохо обусловлена, а сама система неустойчива. Поэтому, чтобы сгладить эти эффекты, к задаче применялся метод регуляризации А. Н. Тихонова [3] ("алгоритм 2"), который заключается в умножении левой и правой частей СЛАУ на транспонированную матрицу коэффициентов этой СЛАУ и прибавлении к элементам главной диагонали матрицы коэффициентов вновь полученной СЛАУ (в случае необходимости, в зависимости от значения определителя этой матрицы) параметра регуляризации системы. Ранее этот подход был успешно применен авторами при юстировке космического манипуляционного комплекса [4]. Альтернативные подходы к решению подобных задач представлены, например, в работе [5].

Анализ результатов численных экспериментов по начальной выставке показал, что погрешности нахождения углов ориентации объекта $\Delta\psi$, $\Delta\vartheta$, $\Delta\gamma$ с применением алгоритма 2 стали носить между собой сопоставимый по порядку (более регулярный) характер.

В статье получены алгоритмы 1 и 2 начальной выставки БИНС для мгновенной входной информации, когда известны проекции векторов $\boldsymbol{\omega}$ и **a** (**u** и **g**) на связанные оси. Также решена задача начальной выставки на основе интегральной информации БИНС по приращениям интегралов от проекций на связанные координатные оси векторов абсолютной угловой скорости и кажущегося ускорения объекта.

1. Постановка задачи начальной выставки БИНС

Рассмотрим задачу начальной выставки БИНС на неподвижном основании, когда акселерометры измеряют проекции g_i $(i = 1, 2, 3)$ вектора ускорения силы тяжести **g** (точнее измеряют проекции $-g_i$ вектора **-g**), а гироскопы измеряют проекции u_i вектора **u** угловой скорости вращения Земли на связанные с объектом оси системы координат Y. Проекции этих же векторов g_i^*, u_i^* на оси НГСК X будем считать известными и равными

$$\begin{gathered} g_1^* = 0,\ g_2^* = -g,\ g_3^* = 0, \\ u_1^* = u\cos\varphi,\ u_2^* = u\sin\varphi,\ u_3^* = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где φ — географическая широта точки нахождения объекта, $u = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ \text{c}^{-1}$ — угловая скорость суточного вращения Земли, g — ускорение силы тяжести в этой точке, определяемое по показаниям акселерометров g_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$g = (g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)^{1/2}.$$

Связь между проекциями векторов **u** и **g** в системах координат Y и X устанавливается следующими кватернионными соотношениями:

$$\mathbf{u}_Y = \tilde{\mathbf{v}} \circ \mathbf{u}_X \circ \mathbf{v},\ \mathbf{g}_Y = \tilde{\mathbf{v}} \circ \mathbf{g}_X \circ \mathbf{v}, \quad (2)$$

где кватернион $\mathbf{v} = \nu_0 + \nu_1\mathbf{i}_1 + \nu_2\mathbf{i}_2 + \nu_3\mathbf{i}_3 = \nu_0 + \mathbf{v}_\nu$ определяет взаимную ориентацию базисов Y и X (компоненты этого кватерниона ν_j (j = 0, 1, 2, 3) — параметры Эйлера, характеризующие эту ориентацию); "$\circ$" означает кватернионное произведение; $\mathbf{u}_Y$, $\mathbf{g}_Y$ и $\mathbf{u}_X$, $\mathbf{g}_X$ — отображения векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{g}$ на базисы Y и X:

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_Y = u_1\mathbf{i}_1 + u_2\mathbf{i}_2 + u_3\mathbf{i}_3,\ \mathbf{g}_Y = g_1\mathbf{i}_1 + g_2\mathbf{i}_2 + g_3\mathbf{i}_3;\\ &\mathbf{u}_X = u\cos\varphi\mathbf{i}_1 + u\sin\varphi\mathbf{i}_2,\ \mathbf{g}_X = -g\mathbf{i}_2.\end{aligned} \quad (3)$$

В кватернионных уравнениях (2) неизвестной величиной является кватернион $\mathbf{v}$ ориентации объекта в системе координат X.

Выделяя в уравнениях (2) скалярную и векторную части (в соответствии с методом решения такого рода уравнений), получим

$$(\mathbf{u}^-, \boldsymbol{\theta}) = 0, \quad (4)$$

$$[\mathbf{u}^+, \boldsymbol{\theta}] = \mathbf{u}^-; \quad (5)$$

$$(\mathbf{g}^-, \boldsymbol{\theta}) = 0, \quad (6)$$

$$[\mathbf{g}^+, \boldsymbol{\theta}] = \mathbf{g}^-, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u}_Y - \mathbf{u}_X,\ \mathbf{u}^+ = \mathbf{u}_X + \mathbf{u}_Y,$$
$$\mathbf{g}^- = \mathbf{g}_Y - \mathbf{g}_X,\ \mathbf{g}^+ = \mathbf{g}_X + \mathbf{g}_Y.$$

Здесь $\boldsymbol{\theta} = (1/\nu_0)\mathbf{v}_\nu$ — вектор конечного поворота, совмещающего системы координат Y и X (отметим, что при получении уравнений (4) из (2) полагалось, что $\nu_0 \neq 0$, т.е. что отсутствует полуоборот системы координат Y относительно X); "[. , .]" и "(. , .)" означают векторное и скалярное произведения соответственно.

Математическая постановка задачи начальной выставки БИНС на основе гирокомпасирования заключается в нахождении неизвестного вектора $\boldsymbol{\theta}$ из СЛАУ (4)—(7).

2. Алгоритм 1 начальной выставки БИНС

Для определения $\boldsymbol{\theta}$ умножим обе части уравнения (7) векторным способом на вектор $\mathbf{u}^-$ и с учетом соотношения (4) получим

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{g}^-, \mathbf{u}^-]/(\mathbf{u}^-, \mathbf{g}^+). \quad (8)$$

Аналогично, если уравнение (5) умножить на вектор $\mathbf{g}^-$, то с учетом соотношения (6) получим

$$\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{u}^-, \mathbf{g}^-]/(\mathbf{u}^+, \mathbf{g}^-). \quad (9)$$

Решения (8) и (9) равнозначны, так как $(\mathbf{u}^+, \mathbf{g}^-) = -(\mathbf{u}^-, \mathbf{g}^+)$, и однозначно определяют вектор $\boldsymbol{\theta}$, если $(\mathbf{u}^+, \mathbf{g}^-) = -(\mathbf{u}^-, \mathbf{g}^+) \neq 0$. В скалярной форме решения (8), (9) имеют вид:

$$\theta_1 = \frac{g_2^- u_3^- - g_3^- u_2^-}{g_1^+ u_1^- + g_2^+ u_2^- + g_3^+ u_3^-};\quad \theta_2 = \frac{g_3^- u_1^- - g_1^- u_3^-}{g_1^+ u_1^- + g_2^+ u_2^- + g_3^+ u_3^-};\quad \theta_3 = \frac{g_1^- u_2^- - g_2^- u_1^-}{g_1^+ u_1^- + g_2^+ u_2^- + g_3^+ u_3^-}; \quad (10)$$

$$\theta_1 = \frac{u_2^- g_3^- - u_3^- g_2^-}{u_1^+ g_1^- + u_2^+ g_2^- + u_3^+ g_3^-};\quad \theta_2 = \frac{u_3^- g_1^- - u_1^- g_3^-}{u_1^+ g_1^- + u_2^+ g_2^- + u_3^+ g_3^-};\quad \theta_3 = \frac{u_1^- g_2^- - u_2^- g_1^-}{u_1^+ g_1^- + u_2^+ g_2^- + u_3^+ g_3^-}. \quad (11)$$

Скалярное произведение ($\mathbf{u}$, $\mathbf{g}$) является инвариантом относительно поворота системы координат. Инвариант можно использовать для нормировки данных от элементной базы БИНС при решении задачи начальной выставки.

Если $(\mathbf{u}^+, \mathbf{g}^-) = -(\mathbf{u}^-, \mathbf{g}^+) = 0$, то $[\mathbf{u}^-, \mathbf{g}^-] = 0$, так как системы линейных уравнений, решениями которых являются (8)—(11), являются совместными. В этом случае комбинируются проекции уравнений (5) и (7): из одного уравнения берутся две проекции, а из другого — одна. В результате перебора различных комбинаций систем уравнений можно получить три варианта формул для определения проекций вектора $\boldsymbol{\theta}$:

$$\theta_1 = \frac{u_3^- g_1^+ - u_1^+ g_3^-}{u_1^+ g_2^+ - u_2^+ g_1^+};\quad \theta_2 = \frac{u_3^- g_2^+ - u_2^+ g_3^-}{u_1^+ g_2^+ - u_2^+ g_1^+};\quad \theta_3 = \frac{u_3^- g_3^+ - u_3^+ g_3^-}{u_1^+ g_2^+ - u_2^+ g_1^+} = 0; \quad (12)$$

$$\theta_1 = \frac{u_2^- g_1^+ - u_1^+ g_2^-}{u_3^+ g_1^+ - u_1^+ g_3^+};$$
$$\theta_2 = \frac{u_2^- g_2^+ - u_2^+ g_2^-}{u_3^+ g_1^+ - u_1^+ g_3^+}; \qquad (13)$$
$$\theta_3 = \frac{u_2^- g_3^+ - u_3^+ g_2^-}{u_3^+ g_1^+ - u_1^+ g_3^+} = 0;$$

$$\theta_1 = \frac{u_1^- g_1^+ - u_1^+ g_1^-}{u_2^+ g_3^+ - u_3^+ g_2^+};$$
$$\theta_2 = \frac{u_1^- g_2^+ - u_2^+ g_1^-}{u_2^+ g_3^+ - u_3^+ g_2^+}; \qquad (14)$$
$$\theta_3 = \frac{u_1^- g_3^+ - u_3^+ g_1^-}{u_2^+ g_3^+ - u_3^+ g_2^+} = 0.$$

Знаменатели в формулах (12)—(14) являются проекциями векторного произведения $[\mathbf{u}^+, \mathbf{g}^+]$. Если хотя бы одна из проекций этого произведения отлична от нуля, то для определения вектора конечного поворота можно воспользоваться соответствующей формулой из соотношений (12)—(14).

Если $(\mathbf{u}^+, \mathbf{g}^-) = -(\mathbf{u}^-, \mathbf{g}^+) = 0$, $[\mathbf{u}^-, \mathbf{g}^-] = 0$ и $[\mathbf{u}^+, \mathbf{g}^+] = 0$, то для определения координат вектора конечного поворота из уравнений (5) и (7) с учетом того, что $\theta_3 = 0$, можно получить следующие сотношения:

$$\theta_1 = u_2^-/u_3^+;\ \ \theta_2 = -u_1^-/u_3^+;\ \ \theta_3 = 0; \qquad (15)$$
$$\theta_1 = g_2^-/g_3^+;\ \ \theta_2 = -g_1^-/g_3^+;\ \ \theta_3 = 0. \qquad (16)$$

Таким образом, для решения задачи начальной выставки получены формулы, определяющие координаты вектора конечного поворота θ при различных взаимных расположениях векторов $\mathbf{u}^+$, $\mathbf{u}^-$, $\mathbf{g}^+$, $\mathbf{g}^-$.

3. Алгоритм 2 начальной выставки БИНС

Как показали численные эксперименты (см. разд. 4 статьи), при нахождении вектора $\boldsymbol{\theta}$ непосредственно из СЛАУ (4)—(7) по алгоритму 1 и данным, заданным с погрешностями, одна из компонент вектора $\boldsymbol{\theta}$ (которая отвечает за курс объекта) находится также с существенной погрешностью (в сравнении с другими двумя искомыми компонентами вектора $\boldsymbol{\theta}$). Поэтому, чтобы сгладить эти эффекты, было решено применить к задаче начальной выставки БИНС метод регуляризации А. Н. Тихонова.

С учетом введенных обозначений метод регуляризации для переопределенной СЛАУ (4)—(7) имеет вид в векторно-матричной форме

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \alpha\mathbf{E})\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}; \qquad (17)$$

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \alpha\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}, \qquad (18)$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица размерности 3×3; $\alpha \geqslant 0$ — некоторый малый параметр (параметр регуляризации);

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = [0\ \ 0\ \ u_1^-\ \ u_2^-\ \ u_3^-\ \ g_1^-\ \ g_2^-\ \ g_3^-];$$
$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} u_1^- & g_1^- & 0 & -u_3^+ & u_2^+ & 0 & -g_3^+ & g_2^+ \\ u_2^- & g_2^- & u_3^+ & 0 & -u_1^+ & g_3^+ & 0 & -g_1^+ \\ u_3^- & g_3^- & -u_2^+ & u_1^+ & 0 & -g_2^+ & g_1^+ & 0 \end{bmatrix},$$

"т" обозначает транспонирование матрицы, "−1" — обращение матрицы.

Следует отметить, что матрица коэффициентов в СЛАУ (17) получается симметрической. Окончательно, после всех проведенных преобразований СЛАУ (17) принимает в безразмерной форме следующий вид:

$$\begin{pmatrix} Z + Q/2 + \alpha & M & N \\ M & F + Q/2 + \alpha & H \\ N & H & K + Q/2 + \alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ -N \\ L \end{pmatrix}; \qquad (19)$$

$$Z = \frac{g_2 g}{g_{\text{мск}}^2} - \frac{u_1}{u}\cos\varphi + \frac{u_2}{u}\sin\varphi;$$

$$M = -\frac{g_1 g}{g_{\text{мск}}^2} - \frac{u_1}{u}\sin\varphi - \frac{u_2}{u}\cos\varphi;$$

$$F = -\frac{g_2 g}{g_{\text{мск}}^2} + \frac{u_1}{u}\cos\varphi - \frac{u_2}{u}\sin\varphi;$$

$$H = -\frac{g_3 g}{g_{\text{мск}}^2} - \frac{u_3}{u}\sin\varphi;$$

$$K = \frac{g_2 g}{g_{\text{мск}}^2} + \frac{u_1}{u}\cos\varphi + \frac{u_2}{u}\sin\varphi;$$

$$N = -\frac{u_3}{u}\cos\varphi;$$

$$L = \frac{g_1 g}{g_{\text{мск}}^2} + \frac{u_1}{u}\sin\varphi - \frac{u_2}{u}\cos\varphi;$$

$$Q = -\frac{\|\mathbf{g}\|}{g_{\text{мск}}^2} + \frac{\|\mathbf{u}\|}{u^2} + \frac{g^2}{g_{\text{эо}}^2} + 1;$$

$$\|\mathbf{u}\| = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \|\mathbf{g}\| = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2,$$

где $g_{\text{мск}} = 9{,}8154$ м/с^2 — ускорение силы тяжести в районе г. Москвы. Относительно параметра регуляризации α отметим, что если элементы матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{B}$ заданы с некоторым ε-приближением, то параметр регуляризации может быть вычислен (см., например [6]), по формуле $\alpha = 0{,}5\sqrt{n\varepsilon}$, где n — порядок итоговой квадратной матрицы коэффициентов СЛАУ (17). Выражения (18), (19) образуют алгоритм начальной выставки БИНС на основе мгновенной информации, получаемой от чувствительных элементов БИНС.

Следует отметить, что на основе выражений (18), (19) можно получить алгоритм начальной выставки БИНС на основе интегральной информации. Для этого проинтегрируем (4)—(7). При этом $\boldsymbol{\theta}$ = const, $\mathbf{u}_y \to \mathbf{u}_y h$, $\mathbf{g}_y \to \mathbf{g}_y h$; $\mathbf{u}_x = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{u}dt = \boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{g}_x = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{g}dt = \boldsymbol{\eta}$ $h = t_k - t_{k-1}$ — шаг съема информации с чувствительных элементов БИНС. Тогда для СЛАУ (19) получим:

$$\begin{pmatrix} h\hat{Z} + \hat{Q}/2 & h\hat{M} & h\hat{N} \\ h\hat{M} & h\hat{F} + \hat{Q}/2 & h\hat{H} \\ h\hat{N} & h\hat{H} & h\hat{K} + \hat{Q}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\hat{H} \\ -h\hat{N} \\ h\hat{L} \end{pmatrix}; \quad (20)$$

$$\hat{Z} = \frac{\eta_2 g}{g_{\text{мск}}^2} - \frac{\nu_1}{u}\cos\varphi + \frac{\nu_2}{u}\sin\varphi;$$

$$\hat{M} = -\frac{\eta_1 g}{g_{\text{мск}}^2} - \frac{\nu_1}{u}\sin\varphi - \frac{\nu_2}{u}\cos\varphi;$$

$$\hat{K} = \frac{\eta_2 g}{g_{\text{мск}}^2} + \frac{\nu_1}{u}\cos\varphi + \frac{\nu_2}{u}\sin\varphi;$$

$$\hat{H} = -\frac{\eta_3 g}{g_{\text{мск}}^2} - \frac{\nu_3}{u}\sin\varphi;$$

$$\hat{L} = \frac{\eta_1 g}{g_{\text{мск}}^2} + \frac{\nu_1}{u}\sin\varphi - \frac{\nu_2}{u}\cos\varphi;$$

$$\hat{N} = -\frac{\nu_3}{u}\cos\varphi;$$

$$Q = \frac{\|\boldsymbol{\eta}\|}{g_{\text{мск}}^2} + \frac{\|\boldsymbol{\nu}\|}{u^2} + h^2\left(\frac{g^2}{g_{\text{мск}}^2} + 1\right).$$

Вектор $\boldsymbol{\theta}$ из соотношения (20) находится по формуле (18).

Формулы (18), (20) образуют алгоритм начальной выставки БИНС на основе интегральной информации, получаемой от чувствительных элементов БИНС.

4. Численные примеры

Ниже приводятся результаты численного эксперимента, проведенного по алгоритмам 1 и 2 начальной выставки БИНС на неподвижном основании, выбранные из большого массива проведенных вычислений. Расчеты проводились для следующих значений местоположения объекта: долгота 37,57°, широта 55,7945° и высота над уровнем моря 1000 м.

В ходе численного эксперимента из СЛАУ (19) по заданным элементам матрицы коэффициентов и вектора правой части находили вектор $\boldsymbol{\theta}$, из которого далее определяли углы ориентации объекта. При этом элементы матрицы коэффициентов и вектора правой части СЛАУ (19) строили по априорно задаваемым углам ориентации объекта и известным проекциям векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{g}$ в НГСК.

При нахождении вектора $\boldsymbol{\theta}$ непосредственно из (4)—(7) по алгоритму 1 (табл. 1), в зависимости от априорно заданных значений углов ориентации объекта ψ, θ, γ и вносимых погрешностей данных задачи (показаний гироскопов и акселерометров объекта), погрешность нахождения угла курса объекта $\Delta\psi$ может отличаться в целом ряде случаев от погрешностей нахождения других углов ориентации объекта $\Delta\theta$, $\Delta\psi$ на два—три (в основном) и более порядков.

Анализ результатов численного эксперимента показал, что погрешности нахождения углов ориентации объекта $\Delta\psi$, $\Delta\theta$, $\Delta\gamma$ с применением метода регуляризации по алгоритму 2 (табл. 2) стали носить между собой сопоставимый по порядку (более регулярный) характер.

Отметим подробнее некоторые особенности алгоритмов.

1. При наличии погрешностей в показаниях акселерометров и гироскопов в обоих алгоритмах хуже двух других углов находится угол курса объекта ψ.

2. С учетом детерминированных погрешностей в показаниях гироскопов 0,01 °/ч и отсутствии погрешностей акселерометров угол курса объекта ψ находится по алгоритму 2 с погрешностями, лежащими в интервале (0,01...0,087)°.

3. При наличии детерминированных погрешностей в показаниях гироскопов 0,01 °/ч (одинаковая погрешность для всех гироскопов) и наличии детерминированных акселерометров 0,00005 м/с^2 или 0,0001 м/с^2 (одинаковая погрешность для всех акселерометров) угол курса объекта ψ находится по алгоритму

Таблица 1
Table 1

Результаты начальной выставки БИНС по алгоритму 1

Results of the initial alignment of SINS according to algorithm 1

Углы ориентации, °			Погрешности гироскопов, °/ч			Погрешности акселерометров, м/с^2			Погрешности вычисления углов ориентации, °		
ψ	ϑ	γ	Прод. ось	Верт. ось	Попер. ось	Прод. ось	Верт. ось	Попер. ось	$\Delta\psi$	$\Delta\vartheta$	$\Delta\gamma$
0,1	0,2	0,3	—	—	—	0,001	0,001	0,001	0,024	0,014	0,0098
			0,001	0,001	0,001	—	—	—	0,014	10^{-10}	10^{-10}
			0,01	0,01	0,01	0,001	0,001	0,001	0,032	0,027	0,0149
2	0,3	20	0,01	0,01	0,01	0,001	0,001	0,001	1,83	0,008	0,2
1	3	2	0,01	0,01	0,01	0,0001	0,0001	0,0001	0,091	0,0014	0,00017
8	10	20	0,01	0,01	0,01	0,0001	0,0001	0,0001	0,145	0,0098	0,0007
20	30	2	0,01	0,01	0,01	0,0001	0,0001	0,0001	0,02	0,0009	0,0001
0,2	3	2	0,02	0,02	0,02	0,001	0,001	0,001	0,22	0,014	0,00006
1	1	20	0,02	0,02	0,02	0,0001	0,0001	0,0001	2,6	0,001	0,009

Таблица 2
Table 2

Результаты начальной выставки БИНС по алгоритму 2

Results of the initial alignment of SINS according to algorithm 2

Углы ориентации, °			Погрешности гироскопов, °/ч			Погрешности акселерометров, м/с^2			Погрешности вычисления углов ориентации, °		
ψ	ϑ	γ	Прод. ось	Верт. ось	Попер. ось	Прод. ось	Верт. ось	Попер. ось	$\Delta\psi$	$\Delta\vartheta$	$\Delta\gamma$
0,1	0,2	0,3	0,01	0,01	0,01	0,00005	0,00005	0,00005	0,00354	0,00143	0,00287
			0,005	0,005	0,005	0,0001	0,0001	0,0001	0,0297	0,00166	0,000585
			0,01	0,01	0,01	0,0001	0,0001	0,0001	0,00537	0,000567	0,000587
2	0,3	20	0,01	0,01	0,01	—	—	—	0,079	0,00684	0,000227
1	3	2	0,001	0,001	0,001	0,00005	0,00005	0,00005	0,006	0,0003	0,000296
			0,01	0,01	0,01	0,00005	0,00005	0,00005	0,006	0,0017	0,000278
8	10	20	—	—	—	—	—	—	$0{,}4\cdot10^{-11}$	$0{,}52\cdot10^{-11}$	$0{,}1\cdot10^{-10}$
20	30	20	0,01	0,01	0,01	0,00005	0,00005	0,00005	0,00388	0,000086	0,000086
			0,02	0,02	0,02	0,00005	0,00005	0,00005	0,086	0,00099	0,00046

2 с погрешностями, лежащими в интервале (0,0035...0,006) °. Во всех перечисленных случаях предыдущего и данного пунктов углы крена ϑ и тангажа γ находятся с меньшими погрешностями, лежащими в интервале (0,0001...0,001)°.

4. Отметим парадоксальный факт: если гироскопы объекта имеют погрешности равные 0,01 °/ч, то наличие малых погрешностей в показаниях акселерометров (0,00005 м/с^2 или 0,0001 м/с^2) положительно влияет на точность алгоритма 2 с методом регуляризации (это, видимо, можно объяснить тем, что входная информация алгоритма становится более сбалансированной).

5. В целом углы ориентации объекта находятся по алгоритму 2 лучше, чем по алгоритму 1.

6. Как было отмечено ранее, при получении уравнений (4)—(7) из выражения (2) полагалось, что $\nu_0 \neq 0$, т. е. что отсутствует полуоборот системы координат Y относительно X. Так как

$$\begin{aligned} \nu_0 = {} & \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\gamma/2) + \\ & + \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\gamma/2), \end{aligned} \tag{21}$$

то алгоритмы 1, 2 начальной выставки будут содержать особые точки (бесконечное число, но локализованные в определенных пределах). Возможные одновременные значения особых точек (углов) приведены в табл. 3.

Таблица 3
Table 3

Особые точки (углы) разворотов БИНС

Singular points (angles) of SINS reversals

Углы ориентации	Значения, °					
ψ	Любое	Любое	±180	0	±180	0
ϑ	±180	0	Любое	Любое	0	±180
γ	0	±180	0	±180	Любое	Любое

Таблица 4
Table 4

Особые точки (углы) разворотов БИНС — итог

Singular points (angles) of SINS reversals — finally

Углы ориентации	Значения, °	
ψ	±180	±180
ϑ	Любое	0
γ	0	Любое

Также из выражения (21) следует, что $\nu_0 = 0$ при значениях

$$\psi = \pm 90°,\ \theta - \gamma = \pm 180°,\ \theta = \pm 90°,$$
$$\psi - \gamma = \pm 180°,\ \gamma = \pm 90°,\ \psi - \theta = \pm 180°.$$

Так как начальную выставку БИНС, которая установлена на объекте, предполагается проводить на приблизительно горизонтальном (с той или иной степенью точности) неподвижном основании, то из физических соображений "допустимыми" получаются следующие значения особых точек (углов) курса, крена и тангажа объекта, которые сведены в табл. 4.

Таким образом, необходимо исключить попадание объекта в указанные точки и интервалы на этапе начальной выставки БИНС.

Список литературы

1. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М.: Физматлит, 2006. 512 с.
2. **Britting K. R.** Inertial navigation system analysis. John Wiley and Sons, 1971. 249 p.
3. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 222 с.
4. **Aleshin I. N., Baturin V. V., Molodenkov A. V., Peisakhovich G. A., Sadomtsev Y. V., Utkin G. V., Chelnokov Y. N.** Motion Control for a Space Platform Complex. V. Algorithms for Adjustment of the Complex // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2002. Vol. 41, N. 3. P. 462—469.
5. **Li J., Tao R.** Initial alignment technology of strapdown inertial navigation system based-on stationary base *// 2010 International Conference on Intelligent Control and Information Processing*, Dalian. 2010. P. 561—564.
6. **Дьяконов В. П.** Справочник по алгоритмам и программам для ЭВМ. М.: Наука, 1987. 240 с.

Quaternion Algorithm for Initial Alignment of Strapdown INS Using the A. N. Tikhonov Regularization Method

Yu. N. Chelnokov, A. V. Molodenkov, iptmuran@san.ru,
Precision Mechanics and Control Problems Institute, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation,

Corresponding author: **Molodenkov Aleksey V.,** Dr. of Tech. Sciences, Leading Researcher, Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Precision Mechanics and Control Problems Institute, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: iptmuran@san.ru

Accepted December 24, 2020

Abstract

For the functioning of algorithms of inertial orientation and navigation of strapdown inertial navigation system (SINS), it is necessary to conduct a mathematical initial alignment of SINS immediately before the operation of these algorithms. An efficient method of initial alignment (not calibration!) of SINS is the method of vector matching. Its essence is to determine the relative orientation of the instrument trihedron Y (related to the unit of SINS sensors) and the reference trihedron X according to the results of measuring the projections of at least two non-collinear vectors of the axes on both trihedrons. We address the estimation of the initial orientation of the object using the method of gyrocompassing, which is a form of vector matching method. This initial alignment method is based upon using the projections of the apparent acceleration vector ***a*** *and the absolute angular velocity vector* **ω** *of the object in the coordinate systems X and Y. It is assumed that the three single-axis accelerometers and the three gyroscopes (generally speaking, the three absolute angular velocity sensors of any type), which measure the projections of the vectors* ***a*** *and* **ω**, *are installed along the axes of the instrument coordinate system Y. If the projections of the same vectors on the axes of the base coordinate system X are known, then it is possible to estimate the mutual orientation of X and Y trihedrons. We are solving the problem of the initial alignment of SINS for the case of a fixed base, when the accelerometers measure the projection g_i (i = 1, 2, 3) of the gravity acceleration vector* ***g***, *and the gyroscopes measure the projections u_i of the vector* ***u*** *of angular velocity of Earth's rotation on the body-fixed* *axes. The projections of the same vectors on the axes of the normal geographic coordinate system X are also estimated using the known formulas. The correlation between the projections of the vectors **u** and **g** in X and Y coordinate system is given by known quaternion relations. In these relations the unknown variable is the orientation quaternion of the object in the X coordinate system. By separating the scalar and vector parts in the equations, we obtain an overdetermined system of linear algebraic equations (SLAE), where the unknown variable is the finite rotation vector* $\boldsymbol{\theta}$*, which aligns the X and Y coordinate systems (it is assumed that there is no half-turn of the X coordinate system with respect to the Y coordinate system). Thus, the mathematical formulation of the problem of SINS initial alignment by means of gyrocompassing is to find the unknown vector* $\boldsymbol{\theta}$ *from the derived overdetermined SLAE. When finding the vector* $\boldsymbol{\theta}$ *directly from the SLAE (algorithm 1) and data containing measurement errors, the components of the vector* $\boldsymbol{\theta}$ *are also determined with errors (especially the component of the vector* $\boldsymbol{\theta}$*, which is responsible for the course* $\boldsymbol{\psi}$ *of an object). Depending on the pre-defined in the course of numerical experiments values of heading* $\boldsymbol{\psi}$*, roll* $\boldsymbol{\vartheta}$*, pitch* $\boldsymbol{\gamma}$ *angles of an object and errors of the input data (measurements of gyroscopes and accelerometers), the errors of estimating the heading angle* $\Delta\psi$ *of an object may in many cases differ from the errors of estimating the roll* $\Delta\vartheta$ *and pitch* $\Delta\boldsymbol{\gamma}$ *angles by two-three (typically) or more orders. Therefore, in order to smooth out these effects, we have used the A. N. Tikhonov regularization method (algorithm 2), which consists of multiplying the left and right sides of the SLAE by the transposed matrix of coefficients for that SLAE, and adding the system regularization parameter to the elements of the main diagonal of the coefficient matrix for the newly derived SLAE (if necessary, depending on the value of the determinant of this matrix). Analysis of the results of the numerical experiments on the initial alignment shows that the errors of estimating the object's orientation angles* $\Delta\psi$*,* $\Delta\vartheta$*,* $\Delta\gamma$ *using algorithm 2 are more comparable (more consistent) regarding their order.*

Keywords: *SINS, quaternion, initial alignment, method of gyrocompassing, A. N. Tikhonov regularization method*

Acknowledgments: This article was prepared with the financial support of Russian Foundation for Basic Research (19-01-00205).

For citation:

Chelnokov Yu. N., Molodenkov A. V. Quaternion Algorithm for Initial Alignment of Strapdown INS Using the A. N. Tikhonov Regularization Method, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2021, vol. 22, no. 4, pp. 217—224.

DOI: 10.17587/mau.22.217-224

References

1. **Chelnokov Yu. N.** Quaternion and biquaternion models and methods of mechanics of solid bodies and its applications. Geometry and kinematics of Motion, Moscow, Fizmatlit, 2006, 511 p. (in Russian).
2. **Britting K. R.** Inertial navigation system analysis, John Wiley and Sons, 1971, 249 p.
3. **Tihonov A. N., Arsenin V. Ya.** Methods for Solving Non-Direct Problems, Moscow, Nauka, 1979. 222 p. (in Russian).
4. **Aleshin I. N., Baturin V. V., Molodenkov A. V., Peisakhovich G. A., Sadomtsev Y. V., Utkin G. V., Chelnokov Y. N.** Motion Control for a Space Platform Complex. V. Algorithms for Adjustment of the Complex, *Journal of Computer and Systems Sciences International,* 2002, vol. 41, no. 3, pp. 462—469.
5. **Li J., Tao R.** Initial alignment technology of strapdown inertial navigation system based-on stationary base*, 2010 International Conference on Intelligent Control and Information Processing*, Dalian, 2010, pp. 561—564.
6. **D'yakonov V. P.** Handbook of Algorithms and Computer Programs, Moscow, Nauka, 1987, 240 p. (in Russian).

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромынский пер., 4

Телефон редакции журнала: **(499) 269-5510, (499) 269-5397**

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *М. Ю. Безменова*.

Сдано в набор 27.01.2021. Подписано в печать 18.03.2021. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН421. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Адвансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Адвансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: **www.aov.ru**