

И. П. Попов, ст. преподаватель, e-mail: ip.popov@yandex.ru,
Курганский государственный университет, г. Курган

Источники гармонических силы и скорости в мехатронных автоматических системах

Для исследования резонансных и околорезонансных явлений использован символический (комплексный) метод, позволяющий существенно повысить продуктивность, упростить и формализовать математические преобразования. Рассмотрены параллельное и последовательное соединения элементов механической системы с источником гармонической силы, либо источником гармонической скорости в качестве источника внешнего механического гармонического воздействия. Аналитические описания резонанса в курсах теоретической механики соответствуют параллельному соединению. Существуют устройства, в удовлетворительном приближении способные выполнять функции источников гармонической силы и источников гармонической скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра, диаметр которого неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания. Механические гармонические воздействия, описываемые в курсах теоретической механики, соответствуют источнику гармонической силы. Описаны четыре режима — резонансы и антирезонансы сил и скоростей. Использование символического (комплексного) метода существенно упростило исследование резонансных и околорезонансных явлений, в частности, позволило глубоко унифицировать и формализовать рассмотрение различных механических систем. Громоздкие и трудоемкие операции, связанные с составлением и решением дифференциальных уравнений, заменены простыми алгебраическими преобразованиями. В основе метода лежит механический аналог закона Ома в комплексном представлении и понятие о механических реактансе, резистансе, импедансе, сассептансе, кондактансе и адмитансе. Классическое рассмотрение доставляет одну амплитудно-частотную характеристику, символический (комплексный) метод — восемь при значительно большем числе характерных точек и характерных отношений. Определены резонанс и антирезонанс сил, резонанс и антирезонанс скоростей. Резонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения элементов и источника гармонической силы, либо последовательного соединения элементов и источника гармонической скорости. Антирезонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения элементов и источника гармонической скорости, либо последовательного соединения элементов и источника гармонической силы.

Ключевые слова: реактанс, резистанс, импеданс, сассептанс, кондактанс, адмитанс

Введение

Режимы вынужденных колебаний достаточно широко распространены в мехатронных системах [1–3]. Поэтому корректный учет резонансных и околорезонансных явлений представляет собой актуальную задачу.

Кроме того, одним из наиболее употребительных режимов, используемых для оценки точности систем автоматического регулирования, является движение по гармоническому закону. При этом для механических систем задающим воздействием может быть как синусоидальная сила, так и синусоидальная скорость, что предполагает использование, соответственно, источников силы и источников скорости.

В установившемся режиме при гармонических воздействиях удобно использовать комплексное представление величин [4, 5]. При этом символический (комплексный) метод существенно упрощает исследование резонансных и околорезонансных явлений [6–13]. В отличие от классического метода здесь не

возникает необходимость в составлении и решении дифференциальных уравнений.

По аналогии с электротехникой гармоническую величину можно представить в виде

$$a = A \sin(\omega t + \varphi) = \operatorname{Im}[Ae^{i(\omega t + \varphi)}],$$

где $Ae^{i(\omega t + \varphi)}$ — вращающийся в комплексной плоскости вектор, ω — циклическая частота, φ — начальная фаза.

Векторы в комплексной плоскости принято изображать для нулевого момента времени. При этом величина $Ae^{i(\omega t + \varphi)} = Ae^{i\varphi} = A$ называется *комплексной амплитудой*.

В основе исследования механических систем лежит дуально-инверсный аналог закона Ома для участка электрической цепи

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{\underline{z}} = \dot{F}\underline{y}, \quad (1)$$

где \dot{V} и \dot{F} — комплексные амплитуды скорости и силы; \underline{z} и \underline{y} — механические импеданс

(impedance) и адмитанс (admittance) в комплексном представлении [4, 5].

Над комплексными величинами, не являющимися изображениями синусоиды, точка не ставится, такие величины подчеркиваются.

Далее рассматриваются параллельное (рис. 1) и последовательное (рис. 2) соединения элементов механической системы [14].

Аналитические описания резонанса в курсах теоретической механики соответствуют параллельному соединению.

Источниками внешнего механического гармонического воздействия на систему выступают либо источник силы, либо источник скорости [14].

Существуют устройства, в удовлетворительном приближении способные выполнять функции источников силы и источников скорости. Источником гармонической скорости может выступать привод с кривошипно-кулисным механизмом и маховиком с большим моментом инерции. Источником гармонической силы может выступать шток пневмоцилиндра, полость которого сообщается с полостью другого пневмоцилиндра, диаметр которого неизмеримо выше, чем у первого, а поршень совершает гармонические колебания [14].

Источник силы характеризуется комплексной амплитудой силы

$$\dot{F} = Fe^{i0}. \quad (2)$$

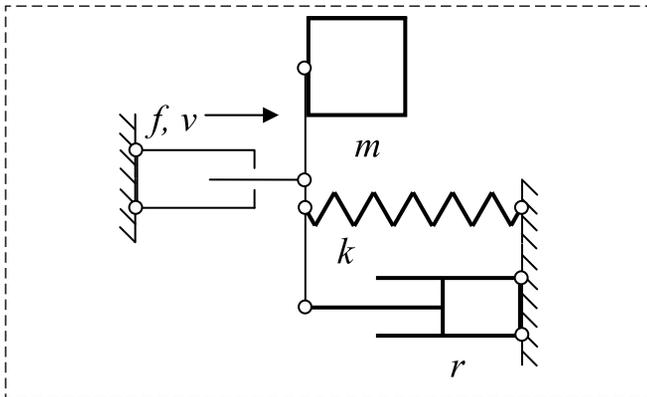


Рис. 1. Параллельное соединение
Fig. 1. Parallel connection

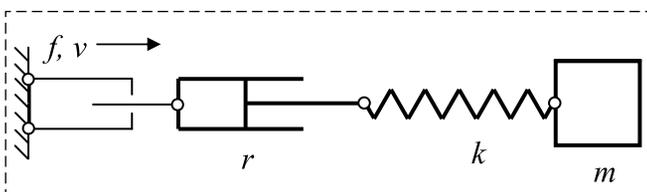


Рис. 2. Последовательное соединение
Fig. 2. Serial connection

Источник скорости характеризуется комплексной амплитудой скорости

$$\dot{V} = Ve^{i0}. \quad (3)$$

Механические гармонические воздействия, описываемые в курсах теоретической механики, соответствуют источнику силы.

Параллельное соединение характеризуется следующими величинами [4, 5]:

- инертный реактанс (reactance)

$$\underline{x}_m = \omega m e^{i\pi/2} = x_m e^{i\pi/2}; \quad (4)$$

- упругий реактанс

$$\underline{x}_k = \frac{k}{\omega} e^{-i\pi/2} = x_k e^{-i\pi/2}; \quad (5)$$

- механический резистанс (resistance)

$$\underline{r} = r e^{i0} = r,$$

где r — коэффициент вязкого сопротивления;

- механический импеданс

$$\underline{z} = Z e^{i\varphi}, \quad (6)$$

где $Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2}$, $\varphi = \arctg \frac{x_m - x_k}{r}$.

Последовательное соединение характеризуется следующими величинами [4, 5]:

- инертный сассептанс (susceptance)

$$\underline{b}_m = \frac{1}{\omega m} e^{-i\pi/2} = b_m e^{-i\pi/2}; \quad (7)$$

- упругий сассептанс

$$\underline{b}_k = \frac{\omega}{k} e^{i\pi/2} = b_k e^{i\pi/2}; \quad (8)$$

- механический кондактанс (conductance)

$$\underline{g} = g e^{i0} = g.$$

Для элемента (инертного, упругого, резистивного), рассматриваемого вне связи с другими механическими элементами, $\underline{b}_m = 1/\underline{x}_m$, $\underline{b}_k = 1/\underline{x}_k$, $\underline{g} = 1/\underline{r}$. В системе, включающей несколько элементов, соотношения иные [4];

- механический адмитанс

$$\underline{y} = Y e^{i\varphi}, \quad (9)$$

где $Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2}$, $\varphi = \arctg \frac{b_k - b_m}{g}$.

1. Параллельное соединение и источник силы. Резонанс сил

Комплексная амплитуда скорости (см. (1))

$$\dot{V} = \frac{\dot{F}}{z} = \frac{F}{z} e^{-i\varphi} = Ve^{-i\varphi}. \quad (10)$$

Комплексная амплитуда инертной силы

$$\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = x_m V e^{i(\pi/2-\varphi)} = F_m e^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (11)$$

Комплексная амплитуда упругой силы

$$\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = x_k V e^{-i(\pi/2+\varphi)} = F_k e^{-i(\pi/2+\varphi)}. \quad (12)$$

Комплексная амплитуда резистивной силы

$$\dot{F}_r = \underline{r} \dot{V} = r V e^{-i\varphi} = F_r e^{-i\varphi}. \quad (13)$$

Разумеется,

$$\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = \dot{F}. \quad (14)$$

Из закона Гука, соотношений (12) и (5) следует выражение для комплексной амплитуды отклонения:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\dot{F}_k}{k} = \frac{x_k V e^{-i(\pi/2+\varphi)}}{k} = \frac{k V e^{-i(\pi/2+\varphi)}}{\omega k} = \\ &= \frac{V}{\omega} e^{-i(\pi/2+\varphi)} = X e^{-i(\pi/2+\varphi)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из второго закона Ньютона, соотношений (11) и (4) следует выражение для комплексной амплитуды ускорения:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\dot{F}_m}{m} = \frac{x_m V e^{i(\pi/2-\varphi)}}{m} = \frac{\omega m V e^{i(\pi/2-\varphi)}}{m} = \\ &= \omega V e^{i(\pi/2-\varphi)} = A e^{i(\pi/2-\varphi)} \end{aligned} \quad (16)$$

Разумеется, $A = \omega V = \omega^2 X$.

Из соотношений (10)–(16) и (4)–(6) следуют выражения для амплитудно-частотных характеристик

$$\begin{aligned} F_k(\omega) &= \frac{kF}{\omega\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \\ X(\omega) &= \frac{F}{\omega\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \\ F_r(\omega) &= \frac{rF}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \\ V(\omega) &= \frac{F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} F_m(\omega) &= \frac{\omega m F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}, \\ A(\omega) &= \frac{\omega F}{\sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Разумеется,

$$F = \sqrt{F_r^2 + (F_k - F_m)^2}, \quad (19)$$

Графики функций $X(\omega)$, $V(\omega)$, $A(\omega)$ ведут себя качественно так же как, соответственно, $F_k(\omega)$, $F_r(\omega)$, $F_m(\omega)$.

Частота ω_k , на которой функции $X(\omega)$ и $F_k(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \{ \omega^{-1} [(k\omega^{-1} - m\omega)^2 + r^2]^{-1/2} \} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_k &= \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - r^2/(2km)} = \\ &= \omega_0 \sqrt{1 - r^2/(2x_w^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - d^2/2}, \end{aligned}$$

где $x_w = \sqrt{km}$ — волновое сопротивление (системы), $d = r/x_w$ — затухание.

$$F_{k \max} = F_k(\omega_k) = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} F;$$

$$X_{\max} = X(\omega_k) = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} \frac{F}{k} = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} X_0,$$

где $Q = 1/d$ — добротность, $X_0 = X(0) = F/k$ — статическое отклонение.

Частота ω_r , на которой функции $V(\omega)$ и $F_r(\omega)$ имеют максимум, очевидным образом равна $\omega_r = \sqrt{k/m} = \omega_0$,

$$F_{r \max} = F_r(\omega_0) = F, V_{\max} = V(\omega_0) = \frac{F}{r}. \quad (20)$$

Частота ω_m , на которой функции $A(\omega)$ и $F_m(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \{ \omega [(k\omega^{-1} - m\omega)^2 + r^2]^{-1/2} \} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2/(2km)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - d^2/2}}, \quad (21)$$

$$F_{m \max} = F_m(\omega_m) = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} F, \quad (22)$$

$$A_{\max} = A(\omega_m) = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} \frac{F}{m} = \frac{Q}{\sqrt{1 - d^2/4}} A_0,$$

где $A_0 = A(0) = F/m$ — постоянное ускорение (при нулевой частоте).

При $d^2/2 > 1$ функции $X(\omega)$, $A(\omega)$, $F_k(\omega)$, $F_m(\omega)$ не имеют максимумов в вещественном диапазоне частот. Примечательно, что

$$\omega_k \omega_m = \omega_0^2; F_{k \max} = F_{m \max}; A_{\max} = \omega_0^2 X_{\max};$$

$$\frac{A_{\max}}{\omega_m} = \omega_k X_{\max} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{1-d^2/4}}. \quad (23)$$

Другие характерные точки:

$$F_m(\omega_k) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} F;$$

$$A(\omega_k) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} A_0; \quad (24)$$

$$F_k(\omega_m) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} F;$$

$$X(\omega_m) = \frac{Q-d/2}{\sqrt{1-d^2/4}} X_0; \quad (25)$$

$$F_m(\omega_0) = QF, A(\omega_0) = QA_0;$$

$$F_k(\omega_0) = QF, X(\omega_0) = QX_0; \quad (26)$$

$$F_r(\omega_k) = F_r(\omega_m) = \frac{\sqrt{1-d^2/2}}{\sqrt{1-d^2/4}} F; \quad (27)$$

$$V(\omega_k) = V(\omega_m) = \frac{\sqrt{1-d^2/2}}{\sqrt{1-d^2/4}} V(\omega_0).$$

Характерные отношения:

$$\frac{F_k(\omega_k)}{F_m(\omega_k)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_k(\omega_m)} = \frac{F_k(\omega_k)}{F_k(\omega_m)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_m(\omega_k)} =$$

$$= \frac{X(\omega_k)}{X(\omega_m)} = \frac{A(\omega_m)}{A(\omega_k)} = \frac{1}{1-d^2/2}; \quad (28)$$

$$\frac{F_k(\omega_k)}{F_r(\omega_k)} = \frac{F_m(\omega_m)}{F_r(\omega_m)} = \frac{Q}{\sqrt{1-d^2/2}}; \quad (29)$$

$$\frac{F_k(\omega_m)}{F_r(\omega_m)} = \frac{F_m(\omega_k)}{F_r(\omega_k)} = Q\sqrt{1-d^2/2}.$$

На рис. 3 представлены *подлинные* резонансные кривые для системы с параметрами: $F = 100$ Н, $m = 10$ кг, $k = 40$ кг·с⁻², $r = 10$ кг·с⁻¹.

На том основании, что амплитуда отклонения X имеет максимум на частоте ω_k ($\omega_k < \omega_0$), она (ω_k , а не ω_0) считается резонансной частотой [15].

Это было бы сильным решением, если бы X был единственным значимым кинематическим параметром. Однако не менее значимыми параметрами являются амплитуды скорости V и

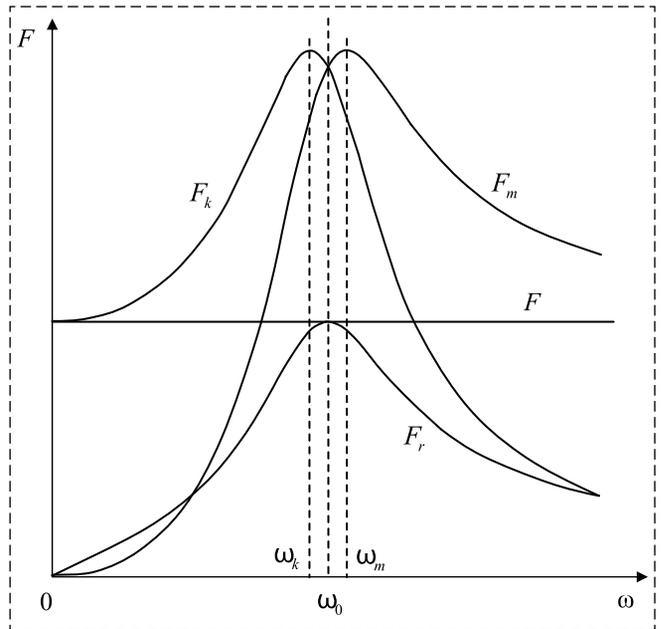


Рис. 3. Резонанс сил

Fig. 3. Resonance of forces

ускорения A . При этом первая имеет максимум на частоте ω_0 , а вторая — на частоте ω_m ($\omega_m > \omega_0$). Таким образом, ω_k ничем не лучше, чем ω_0 и ω_m . Единственным аргументом при выборе резонансной частоты остается соображение симметрии (усиленное первым выражением (23)), в соответствии с которым резонансная частота — это ω_0 .

Этот выбор становится еще более очевидным, если рассмотреть силы.

Амплитуда упругой силы F_k имеет максимум на частоте ω_k , амплитуда инертной силы F_m — на частоте ω_m . Отдать предпочтение той или другой частоте невозможно. Однако именно на частоте ω_0 имеет место *резонанс сил*, при котором реактивные силы F_k и F_m равны и противоположны, а их сумма, соответственно, равна нулю [14].

Вместе с тем, импеданс механической системы $Z = \sqrt{r^2 + (x_m - x_k)^2}$, характеризующий ее свойство оказывать сопротивление приводу, понуждающему ее совершать колебания, на частоте ω_0 имеет минимальное значение. Другими словами, именно на частоте ω_0 система оказывает приводу минимальное сопротивление.

Таким образом, резонансной частотой является исключительно ω_0 .

2. Параллельное соединение и источник скорости. Антирезонанс сил

Комплексная амплитуда инертной силы — $\dot{F}_m = \underline{x}_m \dot{V} = x_m V e^{i\pi/2} = F_m e^{i\pi/2}$.

Комплексная амплитуда упругой силы — $\dot{F}_k = \underline{x}_k \dot{V} = x_k V e^{-i\pi/2} = F_k e^{-i\pi/2}$.

Комплексная амплитуда резистивной силы — $\dot{F}_r = \underline{r} \dot{V} = r V e^{i0} = F_r e^{i0}$.

Разумеется, $\dot{F}_m + \dot{F}_k + \dot{F}_r = \dot{F}$.

Комплексная амплитуда отклонения

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\dot{F}_k}{k} = \frac{x_k V e^{-i\pi/2}}{k} = \frac{k V e^{-i\pi/2}}{\omega k} = \\ &= \frac{V}{\omega} e^{-i\pi/2} = X e^{-i\pi/2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Комплексная амплитуда ускорения

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\dot{F}_m}{m} = \frac{x_m V e^{i\pi/2}}{m} = \frac{\omega m V e^{i\pi/2}}{m} = \\ &= \omega V e^{i\pi/2} = A e^{i\pi/2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Комплексная амплитуда силы (см. (1)) — $\dot{F} = \dot{V} \underline{z} = V z e^{i\varphi} = F e^{i\varphi}$.

Амплитудно-частотная характеристика $F(\omega) = V \sqrt{r^2 + (\omega m - k/\omega)^2}$.

При $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ кривая $F(\omega)$ устремляется в бесконечность. При сверхмалых частотах условие (3) порождает чрезмерные деформации упругого элемента (30), сопровождаемые, соответственно, чрезмерными силами упругости. При сверхвысоких частотах условие (3) порождает чрезмерные ускорения (31) и чрезмерные инерционные силы.

При ω_0 график проходит через минимум $F_{\min} = F(\omega_0) = Vr = F_r$. Имеет место *антирезонанс*

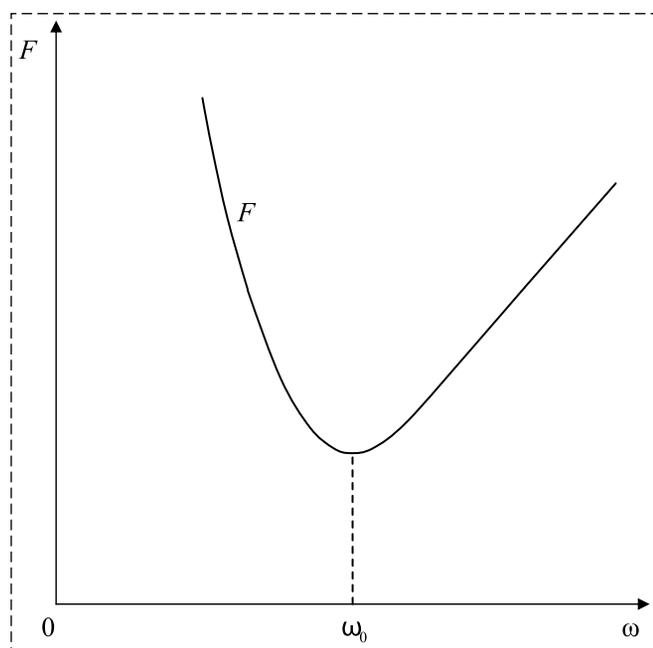


Рис. 4. Антирезонанс сил
Fig. 4. Anti-resonance of forces

нанс сил, при котором реактивные силы F_k и F_m равны и противоположны, а их сумма, соответственно, равна нулю.

Для антирезонанса разностей со смещением антирезонансной частоты (она же резонансная) не возникает.

На рис. 4 представлена *подлинная* антирезонансная кривая для системы, отличающейся от описанной в п. 1 тем, что $V = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$.

3. Последовательное соединение и источник скорости. Резонанс скоростей

Порядок рассуждений такой же, как в п. 1.

Комплексная амплитуда силы (см. (1))

$$\dot{F} = \frac{\dot{V}}{y} = \frac{V}{y} e^{-i\varphi} = F e^{-i\varphi}. \quad (32)$$

Комплексная амплитуда скорости инертного элемента

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = b_m F e^{-i(\pi/2+\varphi)} = V_m e^{-i(\pi/2+\varphi)}. \quad (33)$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины упругого элемента

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = b_k F e^{i(\pi/2-\varphi)} = V_k e^{i(\pi/2-\varphi)}. \quad (34)$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины резистивного элемента

$$\dot{V}_r = \underline{g} \dot{F} = g F e^{-i\varphi} = V_r e^{-i\varphi}. \quad (35)$$

Разумеется,

$$\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = \dot{V}. \quad (36)$$

Из соотношения (33) следует выражение для комплексной амплитуды импульса:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= m \dot{V}_m = m b_m F e^{-i(\pi/2+\varphi)} = m \frac{1}{\omega m} F e^{-i(\pi/2+\varphi)} = \\ &= \frac{F}{\omega} e^{-i(\pi/2+\varphi)} = P e^{-i(\pi/2+\varphi)} \end{aligned} \quad (37)$$

Из соотношения (34) следует выражение для комплексной амплитуды производной силы (специального названия не имеет, приводится здесь как дуальный аналог преобразования (16)):

$$\begin{aligned} \dot{B} &= k \dot{V}_k = k b_k F e^{i(\pi/2-\varphi)} = k \frac{\omega}{k} F e^{i(\pi/2-\varphi)} = \\ &= \omega F e^{i(\pi/2-\varphi)} = B e^{i(\pi/2-\varphi)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Это соответствует преобразованию

$$kv = k \frac{dx}{dt} = \frac{d(kx)}{dt} = \frac{dF}{dt} = B. \quad (39)$$

Разумеется,

$$B = \omega F = \omega^2 P. \quad (40)$$

Из соотношений (32)—(38) и (7)—(9) следуют выражения для амплитудно-частотных характеристик:

$$V_m(\omega) = \frac{V}{\omega m \sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}; \quad (41)$$

$$P(\omega) = \frac{V}{\omega \sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}};$$

$$V_r(\omega) = \frac{gV}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}; \quad (42)$$

$$F(\omega) = \frac{V}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}};$$

$$V_k(\omega) = \frac{\omega V}{k \sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}; \quad (43)$$

$$B(\omega) = \frac{\omega V}{\sqrt{1/r^2 + [\omega/k - 1/(\omega m)]^2}}.$$

Разумеется,

$$V = \sqrt{V_r^2 + (V_k - V_m)^2}. \quad (44)$$

Графики функций $P(\omega)$, $F(\omega)$, $B(\omega)$ ведут себя качественно так же как, соответственно, $V_m(\omega)$, $V_r(\omega)$, $V_k(\omega)$.

Частота ω_m , на которой функции $P(\omega)$ и $V_m(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \{ \omega^{-1} [(k^{-1}\omega - m^{-1}\omega^{-1})^2 + r^{-2}]^{-1/2} \} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} \omega_m &= \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - mk/(2r^2)} = \\ &= \omega_0 \sqrt{1 - x_w^2/(2r^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - Q^2/2}; \end{aligned} \quad (45)$$

$$V_{m \max} = V_m(\omega_m) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V; \quad (46)$$

$$P_{m \max} = P_m(\omega_m) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} P_0,$$

где $P_0 = P(0) = Vm$ — постоянный импульс (при нулевой частоте).

Частота ω_r , на которой функции $F(\omega)$ и $V_r(\omega)$ имеют максимум, очевидным образом равна $\omega_r = \sqrt{k/m} = \omega_0$:

$$V_{r \max} = V_r(\omega_0) = V, \quad F_{\max} = F(\omega_0) = \frac{V}{g}. \quad (47)$$

Частота ω_k , на которой функции $B(\omega)$ и $V_k(\omega)$ имеют максимум, определяется из условия

$$\frac{d}{d\omega} \{ \omega [(k^{-1}\omega - m^{-1}\omega^{-1})^2 + r^{-2}]^{-1/2} \} = 0.$$

Решение этого уравнения:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{1}{\sqrt{1 - km/(2r^2)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - Q^2/2}}; \quad (48)$$

$$V_{k \max} = V_k(\omega_k) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V; \quad (49)$$

$$B_{\max} = B(\omega_k) = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V_k = \frac{d}{\sqrt{1 - Q^2/4}} B_0,$$

где $B_0 = B(0) = V_k$ — постоянная производная силы (при нулевой частоте).

При $Q^2/2 > 1$ функции $P(\omega)$, $B(\omega)$, $V_m(\omega)$, $V_k(\omega)$ не имеют максимумов в вещественном диапазоне частот. Примечательно, что

$$\begin{aligned} \omega_k \omega_m &= \omega_0^2; \quad V_{k \max} = V_{m \max}; \quad B_{\max} = \omega_0^2 P_{\max}; \\ \frac{B_{\max}}{\omega_k} &= \omega_m P_{\max} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{1 - Q^2/4}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Другие характерные точки:

$$V_m(\omega_k) = \frac{d - Q/2}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V; \quad P(\omega_k) = \frac{d - Q/2}{\sqrt{1 - Q^2/4}} P_0; \quad (51)$$

$$V_k(\omega_m) = \frac{d - Q/2}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V; \quad B(\omega_m) = \frac{d - Q/2}{\sqrt{1 - Q^2/4}} B_0; \quad (52)$$

$$\begin{aligned} V_m(\omega_0) &= dV; \quad P(\omega_0) = dP_0; \\ V_k(\omega_0) &= dV; \quad B(\omega_0) = dB_0; \end{aligned} \quad (53)$$

$$V_r(\omega_k) = V_r(\omega_m) = \frac{\sqrt{1 - Q^2/2}}{\sqrt{1 - Q^2/4}} V; \quad (54)$$

$$F(\omega_k) = F(\omega_m) = \frac{\sqrt{1 - Q^2/2}}{\sqrt{1 - Q^2/4}} F(\omega_0).$$

Характерные отношения:

$$\frac{V_k(\omega_k)}{V_m(\omega_k)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_k(\omega_m)} = \frac{V_k(\omega_k)}{V_k(\omega_m)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_m(\omega_k)} = \frac{P(\omega_m)}{P(\omega_k)} = \frac{B(\omega_k)}{B(\omega_m)} = \frac{1}{1-d^2/2}; \quad (55)$$

$$\frac{V_k(\omega_k)}{V_r(\omega_k)} = \frac{V_m(\omega_m)}{V_r(\omega_m)} = \frac{d}{\sqrt{1-Q^2/2}}; \quad (56)$$

$$\frac{V_k(\omega_m)}{V_r(\omega_m)} = \frac{V_m(\omega_k)}{V_r(\omega_k)} = d\sqrt{1-Q^2/2}.$$

Амплитуда импульса P имеет максимум на частоте ω_m ($\omega_m < \omega_0$), амплитуда силы F — на частоте ω_0 , амплитуда производной силы B — на частоте ω_k ($\omega_k > \omega_0$).

Амплитуда скорости инертного элемента V_m имеет максимум на частоте ω_m , амплитуда скорости изменения длины упругого элемента V_k — на частоте ω_k .

На частоте ω_0 имеет место *резонанс скоростей*, при котором (реактивные) скорости V_m и V_k равны и противоположны, а их сумма, соответственно, равна нулю [14].

Адмитанс механической системы $Y = \sqrt{g^2 + (b_k - b_m)^2}$, характеризующий ее свойство не оказывать сопротивление приводу, по-прежнему ее совершать колебания, на частоте ω_0 имеет минимальное значение. Другими словами, именно на частоте ω_0 система оказывает приводу максимальное сопротивление.

Таким образом, резонансной частотой является исключительно ω_0 .

Для системы с параметрами, отличающимися от параметров системы, описанной в п. 2, тем, что $r = 40 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-1}$, подлинны резонансные кривые полностью совпадают с изображенными на рис. 3 при заменах $F_k \rightarrow V_m$, $F_m \rightarrow V_k$, $F_r \rightarrow V_r$, $\omega_k \rightarrow \omega_m$, $\omega_m \rightarrow \omega_k$.

4. Последовательное соединение и источник силы. Антирезонанс скоростей

Порядок рассуждений такой же, как в п. 2.

Комплексная амплитуда скорости инертного элемента

$$\dot{V}_m = \underline{b}_m \dot{F} = b_m F e^{-i\pi/2} = V_m e^{-i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины упругого элемента

$$\dot{V}_k = \underline{b}_k \dot{F} = b_k F e^{i\pi/2} = V_k e^{-i\pi/2}.$$

Комплексная амплитуда скорости изменения длины резистивного элемента

$$\dot{V}_r = \underline{g} \dot{F} = g F e^{i0} = V_r e^{i0}.$$

Разумеется, $\dot{V}_m + \dot{V}_k + \dot{V}_r = \dot{V}$.

Комплексная амплитуда импульса

$$\dot{P} = m \dot{V}_m = m b_m F e^{-i\pi/2} = m \frac{1}{\omega m} F e^{-i\pi/2} = \frac{F}{\omega} e^{-i\pi/2} = P e^{-i\pi/2}. \quad (57)$$

Комплексная амплитуда производной силы

$$\dot{B} = k \dot{V}_k = k b_k F e^{i\pi/2} = k \frac{\omega}{k} F e^{i\pi/2} = \omega F e^{i\pi/2} = B e^{i\pi/2}. \quad (58)$$

Комплексная амплитуда скорости (см. (1)) —

$$\dot{V} = \dot{F} y = F y e^{i\varphi} = V e^{i\varphi}.$$

Амплитудно-частотная характеристика

$$V(\omega) = F \sqrt{g^2 + (\omega/k - 1/(\omega m))^2}.$$

При $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ кривая $V(\omega)$ устремляется в бесконечность. При сверхмалых частотах условие (2) порождает чрезмерный импульс (57), сопровождаемый, соответственно, чрезмерной скоростью инертного элемента. При сверхвысоких частотах условие (2) порождает чрезмерную производную силы (58) и чрезмерную скорость изменения длины упругого элемента. При ω_0 график проходит через минимум $V_{\min} = V(\omega_0) = Fg = V_r$. Имеет место *антирезонанс скоростей*, при котором (реактивные) скорости V_m и V_k равны и противоположны, а их сумма, соответственно, равна нулю.

Для системы, отличающейся от описанной в п. 3, тем, что $F = 100 \text{ Н}$, подлинная антирезонансная кривая полностью совпадает с изображенной на рис. 4 при замене $F \rightarrow V$.

Заключение

Использование символического (комплексного) метода существенно упростило исследование резонансных и околорезонансных явлений, в частности, позволило глубоко унифицировать и формализовать рассмотрение различных механических систем (п.п. 1 и 3, 2 и 4 являются дуально инверсными). Громоздкие и трудоемкие операции, связанные

с составлением и решением дифференциальных уравнений, заменены простыми алгебраическими преобразованиями.

В основе метода лежит механический аналог закона Ома в комплексном представлении (1) и понятие о механических реактансе, резистансе, импедансе, сассептансе, кондактансе и адмитансе.

С помощью этого метода получены новые результаты, в том числе соотношения (14), (17)—(29), (36)—(56).

В дополнение к классическому методу рассмотрены последовательное соединение механических элементов и источник скоростей.

Классическое рассмотрение доставляет одну амплитудно-частотную характеристику, символический (комплексный) метод — восемь при значительно большем числе характерных точек и характерных отношений.

Установлено, что вопреки классическому подходу резонансной частотой является исключительно ω_0 (а не ω_r). Другими словами, резонансная частота не сдвигается от частоты свободных колебаний. Это обусловлено тем, что при классическом рассмотрении не установлена симметрия частот (23), (50) (первые выражения), а при символическом она очевидна.

Определены резонанс и антирезонанс сил, резонанс и антирезонанс скоростей, которые не были определены классическим методом. Резонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения элементов и источника силы, либо последовательного соединения и источника скорости. Антирезонансы возникают при сочетаниях параллельного соединения и источника скорости, либо последовательно-соединения и источника силы.

Для всех описанных случаев *фазочастотные* характеристики особой оригинальностью не отличаются и поэтому не рассматриваются.

Список литературы

1. Градецкий В. Г., Чашухин В. Г. Исследование динамики миниатюрных внутритрубных роботов вибрационного типа // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 6. С. 396—401.
2. Голицына М. В. Оптимальный выбор ускорения маятника в задачах управления вибрационным роботом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 1. С. 31—39.
3. Kunugi K., Kojima H., Trivailo P. M. Modeling of tape tether vibration and vibration sensing using smart film sensors // Acta Astronautica. 2015. Vol. 107. P. 97—111.
4. Попов И. П. Применение символического (комплексного) метода для расчета сложных механических систем при гармонических воздействиях // Прикладная физика и математика. 2019. № 4. С. 14—24.
5. Попов И. П. Импедансы и адмитансы механических систем // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2020. № 5. С. 3—11.
6. Бурьян Ю. А., Шалай В. В., Зубарев А. В., Поляков С. Н. Динамическая компенсация виброактивных сил в колебательной системе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 3. С. 192—195.
7. Голуб А. П., Селюцкий Ю. Д. Двухзвенный маятник в пружинном подвесе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № 6. С. 380—386.
8. Семенов М. Е., Матвеев М. Г., Мелешенко П. А., Соловьев А. М. Динамика демпфирующего устройства на основе материала Ишлинского // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 2. С. 106—113.
9. Попов И. P. Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76, Iss. 4. P. 393—395.
10. Uzun S., Sok K., Osadnik M. Free vibrations of the partially tensioned geometrically non-linear system subjected to euler's load // Vibrations in physical systems. 2016. Vol. 27. P. 399—406.
11. Permoon M. R., Haddadpour H., Shakouri M. Nonlinear vibration analysis of fractional viscoelastic cylindrical shells // Acta Mechanica. 2020. P. 1—18.
12. J drysiak J. Free vibrations of medium thickness microstructured plates // Vibrations in physical systems. 2016. Vol. 27. P. 169—174.
13. Legeza V. P. Dynamics of vibration isolation system with a ball vibration absorber // International Applied Mechanics. 2018. Vol. 54, N. 5. P. 584—593.
14. Попов И. П. Антирезонанс — резонанс скоростей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 6. С. 362—366.
15. Яворский Б. М. Детлаф А. А. Справочник по физике. М.: Наука, 1980. 512 с.

Sources of Harmonic Force and Speed in Mechatronic Automatic Systems

I. P. Popov, ip.popov@yandex.ru,
Kurgan State University, Kurgan, 640020, Russian Federation

Corresponding author: Popov Igor P., Senior Lecturer, Kurgan State University,
Kurgan, 640020, Russian Federation, e-mail: ip.popov@yandex.ru

Accepted on December 05, 2020

Abstract

To study resonance and near-resonance phenomena, a symbolic (complex) method was used, which makes it possible to significantly increase productivity, simplify and formalize mathematical transformations. Parallel and sequential con-

nections of elements of a mechanical system with a source of harmonic force or a source of harmonic speed as a source of external mechanical harmonic action are considered. The analytical descriptions of resonance in theoretical mechanics courses correspond to parallel connection. There are devices, in a satisfactory approximation, capable of performing the functions of sources of force and sources of speed. The source of harmonic speed can be a crank-yoke drive and a flywheel with a large moment of inertia. The source of the harmonic force can be the rod of the pneumatic cylinder, the cavity of which communicates with the cavity of another pneumatic cylinder, the diameter of which is immeasurably higher than that of the first, and the piston performs harmonic oscillations. The mechanical harmonic influences described in the courses of theoretical mechanics correspond to the source of the force. Four modes are described — resonances and antiresonances of forces and velocities. The use of the symbolic (complex) method has significantly simplified the study of resonance and near-resonance phenomena, in particular, it has made it possible to deeply unify and formalize the consideration of various mechanical systems. The cumbersome and time-consuming operations associated with the preparation and solution of differential equations have been replaced by simple algebraic transformations. Resonance and antiresonance of forces, resonance and antiresonance of velocities are determined.

Keywords: reactance, resistivity, impedance, susceptance, conductance, admittance

For citation:

Popov I. P. Sources of Harmonic Force and Speed in Mechatronic Automatic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 4, pp. 208–216.

DOI: 10.17587/mau.22.208-216

References

1. **Gradetskiy V. G., Chashchukhin V. G.** Investigation of the dynamics of miniature in-line vibrating robots, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, no. 6, pp. 396–401 (in Russian).
2. **Golitsyna M. V.** Optimal choice of the pendulum acceleration in the tasks of controlling a vibrating robot, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, no. 1, pp. 31–39 (in Russian).
3. **Kunugi K., Kojima H., Trivailo P. M.** Modeling of tape tether vibration and vibration sensing using smart film sensors, *Acta Astronautica*, 2015, vol. 107, pp. 97–111.
4. **Popov I. P.** Application of a symbolic (complex) method for calculating complex mechanical systems under harmonic influences, *Applied Physics and Mathematics*, 2019, no. 4, pp. 14–24 (in Russian).
5. **Popov I. P.** Impedances and admittances of mechanical systems, *Fundamental and applied problems of engineering and technology*, 2020, no. 5 (343), pp. 3–11 (in Russian).
6. **Bur'yan Yu. A., Shalay V. V., Zubarev A. V., Polyakov S. N.** Dynamic compensation of vibroactive forces in an oscillatory system, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, no. 3, pp. 192–195 (in Russian).
7. **Golub A. P., Selyutskiy Yu. D.** Two-link pendulum in elastic suspension. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2018, no. 6, pp. 380–386 (in Russian).
8. **Semonov M. Ye., Matveyev M. G., Meleshenko P. A., Solov'yev A. M.** Dynamics of a damping device based on Ishlinsky's material, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, no. 2, pp. 106–113 (in Russian).
9. **Popov I. P.** Free harmonic oscillations in systems with homogeneous elements, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, vol. 76, iss. 4, pp. 393–395.
10. **Uzny S., Sokół K., Osadnik M.** Free vibrations of the partially tensioned geometrically non-linear system subjected to euler's load, *Vibrations in physical systems*, 2016, vol. 27, pp. 399–406.
11. **Permoon M. R., Haddadpour H., Shakouri M.** Nonlinear vibration analysis of fractional viscoelastic cylindrical shells, *Acta Mechanica*, 2020, pp. 1–18.
12. **J drysiak J.** Free vibrations of medium thickness microstructured plates, *Vibrations in Physical Systems*, 2016, vol. 27, pp. 169–174.
13. **Legeza V. P.** Dynamics of vibration isolation system with a ball vibration absorber, *International Applied Mechanics*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 584–593.
14. **Popov I. P.** *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 6, pp. 362–366, <https://doi.org/10.17587/mau.20.362-366> (in Russian).
15. **Yavorsky B. M., Detlaf A. A.** *Physics Handbook*, Moscow, Nauka, 1980, 512 p. (in Russian).