УДК 681.513 DOI: 10.17587/mau.22.71-82

**В. И. Ловчаков**, д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru, **О. А. Шибякин**, аспирант, yutiiop@gmail.com,
Тульский государственный университет

# Модифицированные фильтры Баттерворса в решении обратной задачи аналитического конструирования оптимальных регуляторов

*Для линейных стационарных одномерных объектов управления рассматривается обратная задача аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), которая состоит в определении весовых коэффициентов квадратичного функционала оптимальности процесса управления, обеспечивающих замкнутой системе регулирования заданные значения времени переходных процессов и перерегулирования. Время переходного процесса (время регулирования) синтезируемой системы понимается в смысле классической теории автоматического управления и определяется с использованием "трубки", значение которой принимается, в отличие от известных работ, равным требуемому (желаемому) небольшому значению перерегулирования системы в несколько процентов (2...5 %). Равенство процентных величин, характеризующих "трубку" и желаемое перерегулирование синтезируемой системы, является необходимым условием максимального быстродействия линейных динамических систем и, соответственно, обеспечивает однозначность решения рассматриваемой обратной задачи АКОР в классе быстродействующих систем.*

*Предлагаемый способ решения предусматривает преобразование задачи АКОР к канонической форме, в которой объект управления описывается матричным дифференциальным уравнением в форме Фробениуса, а функционал качества определяется как интеграл от суммы произведений канонических фазовых координат объекта, а также квадрата сигнала управления с соответствующими весовыми коэффициентами. Показано, что решение обратной канонической задачи АКОР определяется значениями только трех ненулевых весовых коэффициентов критерия, причем один из них имеет единичное значение. Значения двух других коэффициентов предлагается находить в процессе моделирования синтезированной оптимальной системы управления из условий обеспечения для нее заданного времени регулирования и заданного перерегулирования.*

*Для получения числовых оценок двух основных весовых коэффициентов квадратичного критерия качества рассмотрено решение задачи АКОР при предельном увеличении значений этих весовых коэффициентов. Предельным решением задачи АКОР определены передаточные функции динамических систем с предельным (максимальным) быстродействием, которые имеют заданное перерегулирование 4,321 %. Динамические системы, описываемые данными передаточными функциями, названы модифицированными фильтрами Баттерворса в связи с тем, что известные фильтры Баттерворса получаются как их частный случай при нулевом значении определенной константы. Представлены параметры и показатели динамики этих фильтров до восьмого порядка. С использованием показателей фильтров Баттерворса установлены числовые оценки весовых коэффициентов квадратичного критерия качества. Передаточные функции модифицированных фильтров Баттерворса рекомендуется использовать в качестве эталонных передаточных функций синтезируемых быстродействующих систем управления.*

***Ключевые слова:*** *линейный одномерный объект, быстродействие, перерегулирование, аналитическое конструирование оптимального регулятора, фильтры Баттерворса*

## Введение

Как известно [1—4], к линейно-квадратичным задачам управления, или задачам аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР), относятся задачи структурно-параметрического синтеза линейных систем управления на основе минимизации интегрального квадратичного функционала (критерия) качества. Задачи данного типа впервые были рассмотрены и решены в работах Р. Э. Калмана [5] и А. М. Летова [6]. В настоящее время метод АКОР Калмана—Летова получил признание специалистов автоматического управления и стал уже классическим методом синтеза систем управления [3, 4]. Это явилось следствием широкого применения интегральных квадратичных критериев качества процессов управления, подынтегральная функция которых представляется как сумма произведений фазовых координат объекта с весовыми коэффициентами $q_{ij}$, $i, j = 1, 2, ..., n$ (они образуют матрицу $Q$), а также квадрата сигнала управления с коэффициентом $r$. Подробный анализ "безраздельного господства" методологии линейно-квадратичной оптимизации проведен в работе [3], в которой оно связывается с такими очевидными достоинствами данной методологии, как 1) логическая завершенность и принципиальная математическая простота, 2) законченность и аналитический характер получаемых решений, 3) применимость к широкому классу линейных стационарных и нестационарных динамических объектов как с конечным, так и с бесконечным временем функционирования. В работе [3] одновременно критикуется данное чрезмерное "безраздельное господство" методологии линейно-квадратичной оптимизации в теории управления. Критика в главном сводится к следующим положениям: 1) квадратичные функционалы качества не имеют ясного физического смысла, и их широкое распространение в основном предопределяется простотой вычисления и удобством использования в аналитических исследованиях; 2) в теории АКОР не решена проблема выбора значений весовых коэффициентов квадратичного функционала и их связи с общепринятыми в инженерной практике первичными показателями качества синтезируемых систем (временем переходного процесса, перерегулированием, статической ошибкой регулирования и др.).

Впервые задача связи между весовыми коэффициентами $Q$, $r$ квадратичного критерия и динамическими свойствами оптимизируемых процессов управления, именуемая задачей обращения или обратной задачей АКОР, была поставлена в работах Р. Калмана [8], Р. Беллмана и Р. Калабы [9]. Сложность решения этой задачи вызвана недостаточной информативностью квадратичных функционалов качества, поскольку их значения определяются не только коэффициентами $Q$, $r$, но также и параметрами объекта управления. До настоящего времени предпринимаются многочисленные попытки решения этой задачи. Здесь выделим, прежде всего, работы отечественных ученых А. М. Летова, А. А. Красовского, А. Г. Александрова, Я. Курцвейля, Ю. Б. Попова, Ю. П. Плотникова, В. Н. Романенко, Ч. П. Даса, Р. Т. Янушевского, В. А. Подчукаева, В. В. Григорьева, В. Д. Фурасова, Л. И. Кожинской, Н. В. Кухаренко, Г. А. Крыжановского и др. Однако необходимо подчеркнуть, что зависимость между весовыми коэффициентами критерия и инженерными показателями качества системы является сложной, и ее определение остается основной проблемой современной теории АКОР. Для ее решения предложены отдельные подходы и рекомендации [2, 10—14], которые имеют часто эвристический, эмпирический характер, и процедура нахождения весовых коэффициентов, как правило, сводится многократному моделированию проектируемой системы управления с использованием цифровой вычислительной техники при выбранных некоторым способом значениях искомых коэффициентов. Если процессы в системе управления в каком-либо отношении не удовлетворяют проектировщика, то проводится целенаправленная корректировка весовых коэффициентов критерия качества и повторное определение оптимальных, скорректированных управлений. При необходимости этапы этого итерационного процесса решения задачи АКОР повторяются необходимое число раз. Каждая такая итерация сопряжена с большим объемом вычислений по определению $n(n + 1)/2$ элементов симметричной матрицы $Q$ и весового коэффициента $r$. Для уменьшения числа итераций могут применяться методы математического программирования [14]. В данной работе в целях дальнейшего уменьшения объема вычислений применительно к одномерным стационарным объектам решается задача установления наименьшего числа ненулевых элементов матрицы $Q$, достаточных для обеспечения проектируемой системе управления заданных значений первичных показателей качества, а именно времени переходного процесса и перерегулирования системы. Для ненулевых весовых коэффициентов $q_{ij}$ предлагается приближенная, но относительно точная численная оценка.

## Постановка задач управления и исследования

Исследуемый класс линейных стационарных объектов управления описывается матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{Z}(t) = A_Z Z(t) + B_Z U(t), \tag{1}$$

где $Z(t)$ — вектор координат состояния объекта; $u(t)$ — его управляющее воздействие; $A_Z$, $B_Z$ — постоянные матрицы параметров объекта размерностей $n \times n$, $n \times 1$ соответственно. Предполагается, что координаты $z_i(t)$ вектора состояния объекта имеют физический смысл отклонений от заданного режима его работы. Также предполагается, что в состав объекта управления (1) входит интегрирующее звено (оно или имеется реально или включается дополнительно), которое обеспечивает астатизм проектируемой системы стабилизации выходной координаты. На этом основании в дальнейшем не проводится анализ статической точности проектируемой системы управления.

Рассмотрим классическую стационарную задачу АКОР Калмана—Летова с интегральным квадратичным критерием оптимальности процесса управления

$$I = \int_0^\infty (Z^{\mathrm{T}}(t)QZ(t) + ru^2(t))dt, \qquad (2)$$

где $Q$ — симметричная положительно определенная матрица, составленная из весовых коэффициентов $q_{ij}$. В критерии (2) принимается значение коэффициента $r = 1$ на том основании, что значение одного весового коэффициента функционала качества без изменения решения задачи АКОР можно задавать произвольно.

Соответственно, задача АКОР формулируется следующим образом [7, 15]: необходимо найти закон обратной связи $U(t) = F_0[Z(t)]$, образующий совместно с исходным объектом (1) асимптотически устойчивую замкнутую систему, доставляющую минимум функционалу качества (2) при переводе объекта управления из начального положения $X(0) = X_0$ в конечное нулевое.

Как известно [15—17], решением задачи (1), (2) является линейный алгоритм управления

$$U(t) = -r^{-1}B_Z^{\mathrm{T}}PZ(t) = -KZ(t), \quad K = r^{-1}B_Z^{\mathrm{T}}P, \qquad (3)$$

в котором матрица $P$ находится как положительно определенное решение матричного уравнения Риккати

$$PA_Z + A_Z^{\mathrm{T}}P - r^{-1}PB_ZB_Z^{\mathrm{T}}P + Q = 0. \qquad (4)$$

Соответственно, *задача исследования* ставится следующим образом: для объекта (1) с конкретными числовыми матрицами параметров требуется с использованием решения (3), (4) определить такие значения матрицы весовых коэффициентов $Q$, при которых замкнутая система с управлением (3) имела бы для выделенного режима работы заданное (желаемое) значение времени переходных процессов (времени регулирования) $t_{\mathrm{p}} = t_{\mathrm{p}z}$ и заданное перерегулирование $\sigma = \sigma_z = 4{,}321$ %. Напомним, что в классической теории автоматического управления временем регулирования $t_{\mathrm{p}}$ называют наименьшее время отработки системой ступенчатого воздействия $x_z \cdot 1(t)$ ($x_z$ — сигнал задания регулятора), по истечении которого отклонение выходной переменной объекта от установившегося значения не превышает принятого значения $\Delta$ "трубки" [15, 19]. Завершая постановку задачи управления, особо подчеркнем, что в данной работе для обеспечения единственности решения сформулированной задачи принимается $\Delta = \sigma_z = 4{,}321$ %, где заданное значение перерегулирования системы принято равным перерегулированию колебательного звена с коэффициентом демпфирования $\sqrt{2}/2$ — фильтру Баттерворса второго порядка [15, 18].

## Решение задачи при отсутствии ограничения на перерегулирование

Предварительно найдем решение более простой задачи при отсутствии ограничения на перерегулирование, которое в дальнейшем укажет направление поиска решения сформулированной задачи исследования.

В целях упрощения решений рассматриваемых обратных задач АКОР осуществим преобразование фазовых координат $Z(t) = D \cdot X(t)$ объекта (1) с использованием такой невырожденной матрицы $D$, при которой описание объекта принимает каноническую форму Фробениуса

$$\begin{gathered} \dot{X}(t) = A_X X(t) + B_X U(t), \\ A_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \ B_X = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}. \end{gathered} \qquad (5)$$

Как известно, матрица перехода $D$, обладающая указанным свойством, может быть найдена разными способами. Один из способов основан на использовании матриц управляемости объекта в новом и старом базисах [12]:

$$\begin{gathered} D^{-1} = \left\| B_X,\, A_X B_X, A_X^2 B_X, \dots, A_X^{n-1} B_X \right\| \times \\ \times \left\| B_Z,\, A_Z B_Z, A_Z^2 B_Z, \dots, A_Z^{n-1} B_Z \right\|^{-1}. \end{gathered} \qquad (6)$$

Нетрудно видеть, что для полностью управляемого объекта (1) это матрица является неособенной: $\det D \neq 0$.

Необходимо отметить, что, во-первых, компоненты вектора состояния $X$ объекта в канонической форме Фробениуса имеют ясный математический и физический смысл:

$$\begin{gathered} x_1(t) = x_z - x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t), \\ x_3(t) = \dot{x}_2(t), \dots, x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t) \end{gathered}$$

— смысл отклонения выходной переменной объекта от заданного режима и его производных. Во-вторых, данное каноническое описание объекта можно представить в форме дифференциального уравнения $n$-порядка

$$A(p)x(t) = bu(t), \tag{7}$$

где $A(p) = p^n + a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \ldots + a_2 p + a_1$ — полином от оператора дифференцирования $p = d/dt$.

Соответственно, функционал качества (2) также будем рассматривать в каноническом фазовом пространстве

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty (X^{\mathrm{T}}(t) D^{\mathrm{T}} Q D X(t) + ru^2(t))dt \equiv \\ &\equiv \int_0^\infty (X^{\mathrm{T}}(t) \bar{Q} X(t) + ru^2(t))dt. \end{aligned} \tag{8}$$

С использованием модели (7) можно доказать **теорему 1**: решение задачи АКОР (7), (8) определяет замкнутую систему управления с заданным временем регулирования $t_{pz}$ *в* случае, если матрица $Q$ имеет всего один ненулевой элемент с достаточно большим значением $\bar{q}_{11} = q_1 \gg 0$. При предельных значениях весового коэффициента $q_1 \to \infty$ описание оптимальной замкнутой системы приближается к передаточной функции (ПФ) фильтра Баттерворса $n$-го порядка, из которой следует оценка весового коэффициента

$$q_1 \geqslant \frac{r}{\alpha^{2n} b^2}, \quad \alpha = \frac{t_{pz}}{\tau_p}, \tag{9}$$

где $\tau_p$ — время регулирования фильтра Баттерворса, описываемого ПФ, нормированной по Вышнеградскому [15, 20].

Для доказательства воспользуемся известным результатом [10], утверждающим, что характеристический полином $G(s)$ оптимальной системы управления объектом (7) по критерию (8) удовлетворяет уравнению

$$G(s)G(-s) = A(s)A(-s) + q_1 b^2 / r. \tag{10}$$

В этом случае говорят, что функция $G(s)$ определяется операцией факторизации полинома правой части выражения (10). Напомним, что ПФ оптимальной системы описывается дробью $W_0(s) = 1/G(s)$.

Проведем нормирование по Вышнеградскому [15, 20] полинома (10), который предварительно представим в стандартной форме

$$\begin{aligned} &A(s)A(-s) + q_1 b^2 / r = \\ &= A_{2n} s^{2n} + A_{2n-1} s^{2n-1} + \ldots + A_1 s + A_0, \end{aligned} \tag{11}$$

с соответствующими коэффициентами $A_k$, причем

$$A_0 = a_1^2 + q_1 b^2 / r, \;\; A_{2n} = (-1)^n.$$

Напомним, что нормированной передаточной функцией (НПФ), или передаточной функцией в форме Вышнеградского, называется ПФ, у которой в знаменателе свободный член и коэффициент при старшей степени равны единице. Произвольная ПФ

$$\begin{gathered} W(s) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)} = \\ = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n}, \\ m \leqslant n-1, \end{gathered} \tag{12}$$

может быть преобразована в нормированную заменой переменной $s$ новой переменной $q = \alpha s$, $a = \sqrt[n]{a_0/a_n}$:

$$\overline{W}(q) = \frac{\overline{b_0} q^m + \overline{b_1} q^{m-1} + \overline{b_2} q^{m-2} + \ldots + \overline{b_m}}{q^n + \overline{a_1} q^{n-1} + \overline{a_2} q^{n-2} + \ldots + \overline{a_{n-1}} q + 1}, \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered} \overline{b_i} = \frac{b_i}{a_n \alpha^{m-i}}, \; \overline{a_k} = \frac{a_k}{a_n \alpha^{m-k}}, \\ i = 0, 1, \ldots, m; \;\; k = 1, 2, \ldots, n-1. \end{gathered}$$

Соответственно, коэффициенты ненормированной ПФ (12) связаны с коэффициентами НПФ соотношениями

$$b_i = \alpha^{m-i} \overline{b_i}, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, m; \tag{14 а}$$

$$a_0 = \alpha^n; \, a_n = 1; \, a_k = \alpha^{n-k} \overline{a_k}, \, i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{14 б}$$

Между свойствами систем с ПФ (12) и (13) существует тесная связь [19—21]: характер их переходных процессов (монотонность, апериодичность, перерегулирование, показатели точности в установившемся режиме) совпадает. Исключение составляет только длительность переходных процессов систем — время регулирования $t_p$ системы (12) и время регулирования $\tau_p$ системы (13) отличаются и связаны соотношением

$$\alpha = t_p / \tau_p. \tag{15}$$

Воспользовавшись заменой переменной $s$ Лапласа новой переменной

$$q = \alpha s \text{ при } \alpha = \sqrt[2n]{r/q_1 b^2}, \qquad (16)$$

найдем значения коэффициентов $\bar{A}_k$, $k = 0, 1, ..., 2n$, преобразованного полинома после их умножения на константу $r/q_1 b^2 = \alpha^{2n}$ (данное умножение не изменяет характеристического уравнения системы и соответственно ее свойства):

$$\bar{A}_k = A_k \alpha^{2n-k} = A_k (r/q_1 b^2)^{\frac{2n-k}{2n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n. \qquad (17)$$

Проанализируем значения коэффициентов (17) при предельном увеличении весового коэффициента $q_1 \to \infty$, что физически означает аналогичное увеличение коэффициента передачи регулятора (3) и, соответственно, повышение быстродействия устойчивой системы управления. Этот физический вывод непосредственно следует из уравнения (4), указывающего на увеличение по модулю значений элементов матрицы $P$, если матрица $Q$ имеет вид

$$Q = q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \equiv q_1 J_1. \qquad (18)$$

Такой же вывод вытекает также из управления (3) при значении $r = 1/q_1$, получаемом при выносе коэффициента $q_1$ из-под знака интеграла критерия (8).

Рассматривая предельные значения коэффициентов (17) при $q_1 \to \infty$, убеждаемся, что они приближаются к нулю, за исключением коэффициента $\bar{A}_{2n} = (-1)^n$ при $k = 2n$ и $\bar{A}_0 = A_0\left(\frac{r}{q_1 b^2}\right) = \left(a_1^2 + \frac{q_1 b^2}{r}\right)\left(\frac{r}{q_1 b^2}\right) = a_1^2 \frac{r}{q_1 b^2} + 1 \to 1$ при $k = 0$. Подчеркнем, что при четном $n$ предельные значения крайних коэффициентов полинома $\bar{A}_0 = \bar{A}_{2n} = 1$, т.е. предельный, преобразованный указанным образом полином (8), является нормированным по Вышнеградскому. Соответственно при больших значениях параметра $q_1 \to \infty$ корни характеристического полинома $G(q)$ оптимальной замкнутой системы управления стремятся к устойчивым корням двучлена

$$G(q)G(-q) = (-1)^n q^{2n} + 1, \qquad (19)$$

которые на комплексной плоскости $q$ совпадают с вершинами правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. В литературе такое распределение корней известно как распределение (размещение) Баттерворса порядка $n$ [15, 16, 18].

Устойчивые корни этого распределения (корни с отрицательными вещественными частями) определяют полюсы динамических систем, называемых фильтрами Баттерворса. Они описываются ПФ $W_B(q) = 1/D_n(q)$, где полиномы Баттерворса имеют вид [15]:

$$\begin{gathered} D_1(q) = q + 1, \quad D_2(q) = q^2 + 1{,}4142q + 1, \\ D_3(q) = (q+1)(q^2 + q + 1), \\ D_4(q) = (q^2 + 0{,}7654q + 1)(q^2 + 1{,}8478q + 1), \\ D_5(q) = (q+1)(q^2 + 0{,}6180q + 1) \times \\ \times (q^2 + 1{,}6180q + 1), \\ D_6(q) = (q^2 + 0{,}5176q + 1) \times \\ \times (q^2 + 1{,}4142q + 1)(q^2 + 1{,}9319q + 1), \\ D_7(q) = (q+1)(q^2 + 1{,}8019q + 1) \times \\ \times (q^2 + 1{,}2469q + 1)(q^2 + 0{,}4450q + 1), \\ D_8(q) = (q^2 + 1{,}9615q + 1)(q^2 + 0.3901q + 1) \times \\ \times (q^2 + 1{,}6629q + 1)(q^2 + 1{,}1111q + 1). \end{gathered} \qquad (20)$$

Соответственно, переходные характеристики ($h_i(\tau)$, $i = 1, 2, ..., 8$) этих фильтров показаны на рис. 1 в нормированном времени $\tau$.

Результаты, представленные на рис. 1, можно рассматривать как графическое доказательство теоремы 1, наглядно показывающее существование решения обратной задачи АКОР.

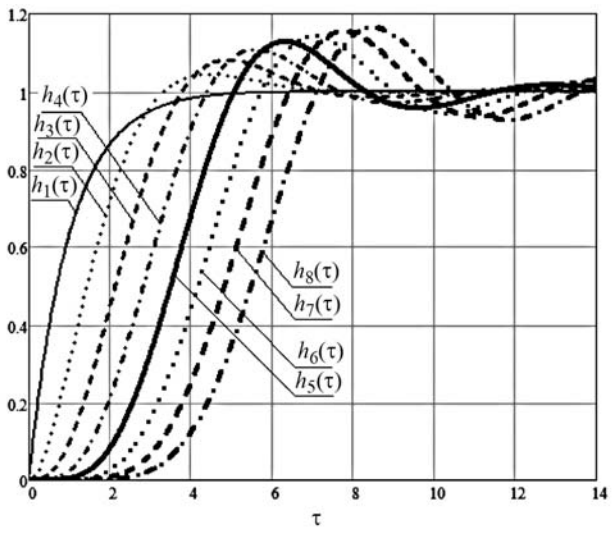


**Рис. 1. Переходные характеристики фильтров Баттерворса**
**Fig. 1. Transient characteristics of Butterworth filters**

В частности, используя графики рис. 1, возможно для исследуемого фильтра Баттерворса приближенно определить время регулирования $\tau_p$, определяющее оценку весового коэффициента (9).

Эта оценка непосредственно следует из соотношения (16) для коэффициента преобразования полинома (10). Для нас важно, что этот коэффициент преобразования одновременно относится и к полиному знаменателя $G(s)$ ПФ оптимальной системы, определяемого соотношением (10). Действительно, факторизация нормированного полинома (10) дает нормированный полином $G(s)$. На этом основании из формулы (16) получается оценка (9).

Необходимо подчеркнуть, что теорема 1 описывает решение обратной задачи АКОР для канонического объекта в форме Фробениуса. Используя это решение и преобразование координат $X(t) = D^{-1}Z(t)$ с матрицей (6), запишем решение обратной задачи АКОР для исходного объекта (1):

$$Q = q_1(D^{-1})^{\mathrm{T}} J_1 D^{-1}, \qquad (21)$$

где матрица $J_1$ определяется выражением (18).

Отметим, что согласно рис. 1 фильтры Баттерворса (20) порядка $n$ = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 имеют значения перерегулирования $\sigma_2$ = 4,321, $\sigma_3$ = 8,147, $\sigma_4$ = 10,828, $\sigma_5$ = 12,777, $\sigma_6$ = 14,251, $\sigma_7$ = 15,412, $\sigma_8$ = 16,349 %, и при дальнейшем увеличении $n$ перерегулирование также увеличивается, но с уменьшающейся скоростью [15, 19]. Следовательно, все фильтры Баттерворса, за исключением фильтра второго порядка, имеют большее перерегулирование, чем заданное $\sigma_z$ = 4,321 %. В следующем разделе учитывается имеющееся ограничение на перерегулирование системы управления.

## Решение задачи при заданном перерегулировании системы

Очевидно, что для обеспечения проектируемой системе управления желаемого значения перерегулирования необходимо одному или нескольким весовым коэффициентам критерия, которые ранее были нулевыми, придать положительные значения. Вначале имеет смысл ограничиться одним коэффициентом $\bar{q}_{22} = q_2 > 0$. Выбор данного весового коэффициента физически можно обосновать следующим образом. Заметим, что большее значение перерегулирования системы, описываемой в фазовом пространстве с каноническим вектором состояния $X = (x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})^{\mathrm{T}}$, определяется большим значением скорости системы $\dot{x}(t)$ в момент времени нарастания [1, 21]. Следовательно, перерегулирование системы возможно уменьшить ограничением указанной скорости и, соответственно, введением в функционал качества (8) слагаемого $q_2\dot{x}^2(t) = \bar{q}_{22}x_2^2(t)$ с определенным значением весового коэффициента $q_2 > 0$.

Проведем математический анализ предложенного способа выбора

$$q_1 > 0,\, q_2 > 0,\, q_3 = \ldots = q_{n-1} = 0,\, r = 1 \qquad (22)$$

значений коэффициентов квадратичного критерия качества. По аналогии с фильтрами Баттерворса найдем предельное при $q_1 \to \infty$ решение задачи АКОР для объекта (7) по критерию (8) с весовыми коэффициентами (22). Согласно работе [10] характеристический полином $G(s)$ рассматриваемой оптимальной системы управления будет удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} &G(s)G(-s) = \\ &= A(s)A(-s) - s^2(q_2b^2/r) + q_1b^2/r. \end{aligned} \qquad (23)$$

Как и ранее, с использованием замены переменной (16) проведем нормирование полинома (23), представив предварительно его в стандартной форме (11). Значения коэффициентов преобразованного полинома после их умножения на величину $q_1b^2/r = \alpha^{2n}$ определяются также выражением (17), и, соответственно, они при предельном уменьшении времени переходных процессов системы (увеличении $q_1 \to \infty$) приближаются к нулю, за исключением коэффициентов $\bar{A}_0 = 1$, $\bar{A}_{2n} = (-1)^n$ и

$$\bar{A}_2 = A_2\alpha^{2n-2} = A_2\left(\frac{r}{q_1b^2}\right)^{\frac{n-1}{n}} =$$

$$= \left(2a_1a_3 - a_2^2 - \frac{q_2b^2}{r}\right)\left(\frac{r}{q_1b^2}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Заметим, что соответствующим выбором весового коэффициента $q_2$ критерия можно при $q_1 \to \infty$ обеспечить значение $\bar{A}_2 = a = \mathrm{const}$, если положить

$$\left(\frac{q_2b^2}{r}\right)\left(\frac{r}{q_1b^2}\right)^{\frac{n-1}{n}} = a.$$

Это равенство выполняется при

$$q_2 = c(q_1)^{\frac{n-1}{n}}, \quad c = a/\sqrt[n]{b^2} \qquad (24)$$

с коэффициентом пропорциональности $c$. В данном случае и при $q_1 \to \infty$ корни полинома $G(q)$ оптимальной системы управления будут приближаться к устойчивым корням полинома

$$G(q)G(-q) = (-1)^n q^{2n} - aq^2 + 1, \quad a > 0. \qquad (25)$$

Таким образом, здесь возникает следующая задача: факторизацией полинома (25) определить функцию $G(q)$ и соответствующую ей нормированную ПФ оптимальной системы

$$W_0(q) = 1/G(q) = \\ = 1/(q^n + g_{n-1}q^{n-1} + g_{n-2}q^{n-2} + \dots + g_1 q + 1) \qquad (26)$$

при таком значении параметра $a$, при котором динамическая система (26) имела бы перерегулирование, равное $\sigma_z = 4{,}321$ %.

Данную задачу можно решить с использованием системы компьютерной математики MathCAD 15, в которой имеется процедура, позволяющая в режиме аналитических вычислений находить все $2n$ решений алгебраического уравнения

$$(-1)^n q^{2n} - aq^2 + 1 = 0 \qquad (27)$$

при произвольном численном значении параметра $a > 0$. С этой целью была разработана программа, выполняющая следующие операции:

1) расчет всех решений $p_i$, $i = 1, 2, ..., 2n$, алгебраического уравнения (27) при выбранном положительном значении параметра *a;*

2) выбор решений $p_i$, $i = 1, 2, ..., n$, имеющих отрицательные вещественные части, и расчет с их использованием коэффициентов нормированного полинома

$$G(q) = \prod_{i=1}^{n}(q + p_i) = \\ = q^n + g_{n-1}q^{n-1} + g_{n-2}q^{n-2} + \ldots + g_1 q + 1;$$

3) нахождение переходной функции динамической системы (26) и определение для нее перерегулирования σ и длительности переходных процессов;

**Параметры и показатели систем с ПФ $W_0(q)$**

***Parameters and indicators of systems with the NTFs $W_0(q)$***

| $N$ | $a$ | Коэффициенты $G(q)$ | Корни $G(q)$ | $T_i$ | $\zeta_i$ | σ, % | $\tau_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | $g_1 = \sqrt{2}$ | $p_{1,2} = -\sqrt{2}/2 \pm \sqrt{2}/2\, i$ | 1 | $\zeta_1 = \sqrt{2}/2 = 0{,}707107$ | 4,3213 | 2,9744 |
| 3 | 0,4760 | $g_1 = 2{,}150236$<br>$g_2 = 2{,}073758$ | $p_1 = -0{,}918078$<br>$p_{2,3} = -0{,}57784 \pm 0{,}869099i$ | $T_1 = 1{,}089232$<br>$T_2 = 0{,}958164$ | $\zeta_1 = 1$<br>$\zeta_2 = 0{,}553665$ | 4,32090 | 3,8124 |
| 4 | 0,79572 | $g_1 = 2{,}850881$<br>$g_2 = 3{,}665902$<br>$g_3 = 2{,}707730$ | $p_{1,2} = -0{,}461477 \pm 0{,}966015i$<br>$P_{3,4} = -0{,}892388 \pm 0{,}275923i$ | $T_1 = 0{,}9340713$<br>$T_2 = 1{,}070582$ | $\zeta_1 = 0{,}431054$<br>$\zeta_2 = 0{,}955374$ | 4,32102 | 4,5736 |
| 5 | 1,06233 | $g_1 = 3{,}541902$<br>$g_2 = 5{,}741368$<br>$g_3 = 5{,}598041$<br>$g_4 = 3{,}346055$ | $p_1 = -0{,}858401$<br>$p_{2,3} = -0{,}372580 \pm 1{,}010266i$<br>$P_{4,5} = -0{,}871247 \pm 0{,}495656i$ | $T_1 = 1{,}164957$<br>$T_2 = 0{,}928695$<br>$T_3 = 0{,}997635$ | $\zeta_1 = 1$<br>$\zeta_2 = 0{,}346013$<br>$\zeta_3 = 0{,}869187$ | 4,32095 | 5,3220 |
| 6 | 1,29958 | $g_1 = 4{,}227217$<br>$g_2 = 8{,}284891$<br>$g_3 = 9{,}99870$<br>$g_4 = 7{,}946964$<br>$g_5 = 3{,}986719$ | $p_{1,2} = -0{,}887857 \pm 0{,}114812i$<br>$P_{3,4} = -0{,}796768 \pm 0{,}665763i$<br>$P_{5,6} = -0{,}308735 \pm 1{,}030546i$ | $T_1 = 1{,}117007$<br>$T_2 = 0{,}963107$<br>$T_3 = 0{,}929542$ | $\zeta_1 = 0{,}991742$<br>$\zeta_2 = 0{,}767373$<br>$\zeta_3 = 0{,}286982$ | 4,32100 | 6,0633 |
| 7 | 1,51678 | $g_1 = 4{,}908248$<br>$g_2 = 11{,}287063$<br>$g_3 = 16{,}216913$<br>$g_4 = 15{,}897742$<br>$g_5 = 10{,}711177$<br>$g_6 = 4{,}628428$ | $p_1 = -0{,}795343$<br>$p_{2,3} = -0{,}262160 \pm 1{,}040079i$<br>$P_{4,5} = -0{,}943263 \pm 0{,}313527i$<br>$P_{6,7} = -0{,}711118 \pm 0{,}774845i$ | $T_1 = 1{,}257318$<br>$T_2 = 0{,}932305$<br>$T_3 = 1{,}006031$<br>$T_4 = 0{,}950840$ | $\zeta_1 = 1$<br>$\zeta_2 = 0{,}244413$<br>$\zeta_3 = 0{,}948952$<br>$\zeta_4 = 0{,}676160$ | 4,32105 | 6,7984 |
| 8 | 1,71897 | $g_1 = 5{,}585856$<br>$g_2 = 14{,}741411$<br>$g_3 = 24{,}551222$<br>$g_4 = 28{,}484998$<br>$g_5 = 23{,}705809$<br>$g_6 = 13{,}889418$<br>$g_7 = 5{,}270563$ | $p_1 = -0{,}768324$<br>$p_2 = -0{,}970457$<br>$P_{3,4} = -0{,}227153 \pm 1{,}044473i$<br>$P_{5,6} = -0{,}904804 \pm 0{,}483353i$<br>$P_{7,8} = -0{,}633932 \pm 0{,}844771i$ | $T_1 = 1{,}301532$<br>$T_2 = 1{,}030441$<br>$T_3 = 0{,}935550$<br>$T_4 = 0{,}974832$<br>$T_5 = 0{,}946811$ | $\zeta_1 = 1$<br>$\zeta_2 = 1$<br>$\zeta_3 = 0{,}212514$<br>$\zeta_4 = 0{,}882032$<br>$\zeta_5 = 0{,}600214$ | 4,32103 | 7,5279 |

4) если значение $\sigma$ системы управления отличается от $\sigma_z = 4{,}321$ % более, чем на 0,001 %, то уточняется значение параметра $a$ и осуществляется переход к операции 1.

Результаты вычислений по данной программе при значениях $n = 2, ..., 8$ представлены в таблице, в которой параметры $T_i$, $\zeta_i$ соответствуют постоянным времени и коэффициентам демпфирования последовательно соединенных звеньев апериодического и колебательного характера, которые можно выделить в системе с ПФ $W_0(q)$.

Необходимо подчеркнуть, что ПФ $W_0(q)$ описывает динамическую систему, которая в соответствии со своим принципом получения должна иметь заданное значение перерегулирования $\sigma_z = 4{,}321$ %. Этот вывод был проверен и подтвержден построением для этих систем переходных функций ($h_i(\tau)$, $i = 1, 2, ..., 8$), представленных на рис. 2.

Динамические системы с ПФ $W_0(q)$, имеющие фиксированное значение перерегулирования $\sigma_z = 4{,}321$ %, были названы модифицированными фильтрами Баттерворса, поскольку стандартные фильтры Баттерворса получаются как их частный случай при значении параметра $a = 0$.

Результаты, представленные на рис. 2, можно рассматривать как графическое доказательство следующей **теоремы 2**: решение задачи АКОР (7), (8) определяет замкнутую систему управления с заданными значениями времени регулирования $t_{pz}$ и перерегулирования $\sigma_z = 4{,}321$ %

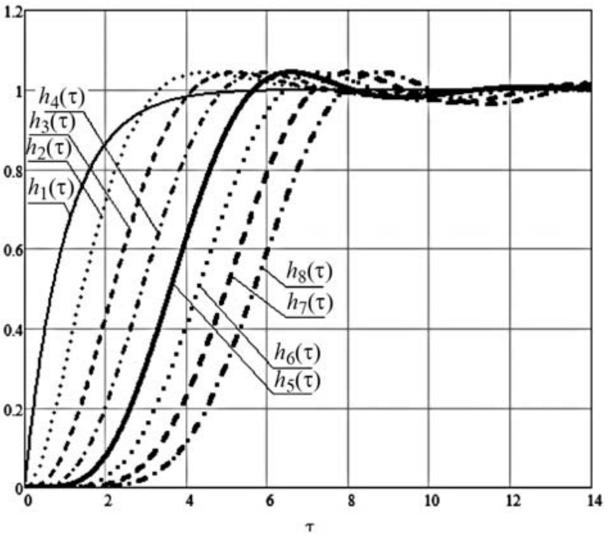


**Рис. 2. Переходные характеристики модифицированных фильтров Баттерворса**

**Fig. 2. Transient characteristics of modified Butterworth filters**

в том случае, если матрица весовых коэффициентов $Q$ имеет два ненулевых элемента с достаточно большими значениями $\bar{q}_{11} = q_1 \gg 0$ и $\bar{q}_{22} = q_2 \gg 0$. При предельных значениях весовых коэффициентов $q_1 \to \infty$ и $q_2 = c(q_1)^{\frac{n-1}{n}} \to \infty$ ($c$ = const) описание оптимальной замкнутой системы приближается к ПФ модифицированного фильтра Баттерворса $n$-го порядка, из которой следует оценка коэффициентов

$$q_1 \simeq \frac{r}{b^2}\left(\frac{1}{\alpha^{2n}} - a_1^2\right), \quad \alpha = \frac{t_{pz}}{\tau_p}, \qquad (28)$$
$$q_2 \simeq a(q_1)^{\frac{n-1}{n}} / \sqrt[n]{b^2},$$

где параметры $a$, $\tau_p$ определяются с использованием таблицы исходя из порядка $n$ применяемого модифицированного фильтра Баттерворса.

Необходимо отметить, что теорема 2, также как и теорема 1, описывает решение обратной задачи АКОР для канонического объекта в форме Фробениуса. Используя это решение и преобразование координат $X(t) = D^{-1}Z(t)$ с матрицей (6), несложно найти решение исходной обратной задачи АКОР

$$Q = (D^{-1})^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} D^{-1} \qquad (29)$$

для исходного объекта (1).

**Пример.** Пусть ПФ объекта управления имеет вид

$$W_0(p) = 1/p(0{,}1p^3 + 0{,}8p^2 + 1{,}7p + 1) \qquad (30)$$

(такой объект рассматривался в работах [20, 23]). Для этого объекта решим задачу АКОР с критерием качества, имеющим весовые коэффициенты (28), и проверим, действительно ли они обеспечивают для синтезируемой системы, как ожидается согласно теореме 2, близкие к желаемым значения перерегулирования $\sigma_z = 4{,}321$ % и времени переходных процессов, например, $t_{pz} = 0{,}75$. Это значение соответствует времени регулирования системы управления, рассмотренной в работе [20].

Решение задачи осуществим в фазовом пространстве с координатами

$$x_1(t) = x_z - x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t),$$
$$x_3(t) = \dot{x}_2(t), \quad x_4(t) = \dot{x}_3(t).$$

Непосредственно по ПФ (30) в данном пространстве определяем матрицы описания объекта в форме Фробениуса

$$A_X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -17 & -8 \end{pmatrix}; \; B_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Предварительно для определения весовых коэффициентов (28) квадратичного критерия рассчитаем параметр $\alpha = t_{pz}/t_p = 0{,}75/4{,}5736 = 0{,}164$, где значение нормированного времени $\tau_p$ взято из таблицы в соответствии с порядком $n = 4$ фильтра Баттерворса.

По формулам (28) рассчитываем весовые коэффициенты

$$q_1 \simeq \frac{r}{b^2}\left(\frac{1}{\alpha^{2n}} - a_1^2\right) = \frac{1}{1^2}\left(\frac{1}{0{,}164^8} - 0{,}0\right) = 1{,}91095 \cdot 10^6,$$

$$q_2 \simeq a(q_1)^{\frac{n-1}{n}} / \sqrt[n]{b^2} = 0{,}79572(1{,}91095 \cdot 10^6)^{3/4} = 4{,}08975 \cdot 10^4.$$

Здесь значение параметра $a$ также выбрано из таблицы в соответствии с порядком $n = 4$ фильтра Баттерворса. Составляем матрицу весовых коэффициентов

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}91095 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}08975 \cdot 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Далее решаем задачу АКОР с матрицами (31) и (32), используя функцию $[K, P] = lqr(A_X, B_X, Q, r)$ пакета MATLAB. Данная функция рассчитывает матрицу коэффициентов обратных связей $K$ закона управления (3), минимизирующего квадратичный критерий (2). В дополнение к матрице коэффициентов обратных связей функция возвращает решение $P$ уравнения Риккати (4). Применение данной функции дало:

$$K = 1 \cdot 10^3 \times (1{,}3824 \quad 0{,}6565 \quad 0{,}1289 \quad 0{,}0099);$$

$$P = 1 \cdot 10^5 \times \begin{pmatrix} 9{,}2139 & 2{,}0163 & 0{,}2479 & 0{,}0138 \\ 2{,}0163 & 0{,}7225 & 0{,}1049 & 0{,}0066 \\ 0{,}2479 & 0{,}1049 & 0{,}0182 & 0{,}0013 \\ 0{,}0138 & 0{,}0066 & 0{,}0013 & 0{,}0001 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Построив моделированием переходную функцию системы управления с коэффициентами обратной связи (33), определяем показатели качества регулирования $t_p = 0{,}891$, $\sigma = 1{,}361$ %. Полученное время регулирования системы больше заданного на (0,891—0,75)·100/0,75 = 18,8 %. Для приближения времени переходных процессов к требуемому значению на столько же процентов уменьшим коэффициент $\alpha = 0{,}614 \cdot 0{,}812 = 0{,}1332$, предположив линейную зависимость. Повторив предыдущий расчет с данным коэффициентом, получаем

$$q_1 = 1{,}0091743 \cdot 10^7; \quad q_2 = 142473{,}768;$$

$$K = 1 \cdot 10^3 \times (3{,}1768 \quad 1{,}2212 \quad 0{,}1991 \quad 0{,}0135);$$

$$P = 1 \cdot 10^6 \times \begin{pmatrix} 3{,}9112 & 0{,}6866 & 0{,}0683 & 0{,}0032 \\ 0{,}6866 & 0{,}1976 & 0{,}0232 & 0{,}0012 \\ 0{,}0683 & 0{,}0232 & 0{,}0033 & 0{,}0002 \\ 0{,}0032 & 0{,}0012 & 0{,}0002 & 0{,}0000 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Оптимальная система управления с параметрами (34) имеет показатели качества $t_p = 0{,}708$, $\sigma = 1{,}91$ %, достаточно близкие к требуемым значениям: время регулирования отличается только на 5,6 %, а перерегулирование не превышает заданное $\sigma_z = 4{,}321$ %. При необходимости, выполняя следующую вторую итерацию приближения, можно получить практически желаемые значения качества управления. Таким образом, оценки (28) теоремы 2 позволяют достаточно эффективно решать обратную задачу АКОР.

Завершая статью, акцентируем внимание на том факте, что модифицированные фильтры Баттерворса, определяющие решение рассматриваемой обратной задачи АКОР, получены при выполнении следующих двух условий. Во-первых, равенство значения "трубки", используемой при определении времени переходного процесса системы управления, перерегулированию этой системы. Равенство указанных величин, как установлено в работе [22], является необходимым условием максимального быстродействия линейных динамических систем. Во-вторых, ПФ модифицированных фильтров Баттерворса получены как предельное решение задачи АКОР при больших значениях весового коэффициента критерия $q_1 \to \infty$, что физически соответствует аналогичному увеличению коэффициента передачи оптимального регулятора, приводящему к повышению быстродействия устойчивой системы управления.

По указанным условиям (причинам) модифицированные фильтры Баттерворса имеют предельное (максимальное) быстродействие в сравнении с другими фильтрами, описываемыми НПФ. Свойство максимального быстродействия фильтров Баттерворса детально проанализировано и подтверждено в работе [23]. В связи с данным свойством ПФ модифицированных фильтров Баттерворса, характеризуемых параметрами табл. 1, аналогично стандартным ПФ [15, 19, 21], рекомендуются к выбору в качестве эталонных ПФ при синтезе быстродействующих систем управления алгебраическим методом [19—21] или методом модального управления [15—17].

## Заключение

В работе предложен способ решения обратной задачи АКОР, которая состоит в определении весовых коэффициентов квадратичного функционала оптимальности процесса управления, обеспечивающих замкнутой системе заданные значения времени переходных процессов и перерегулирования. При этом время переходных процессов (время регулирования) понимается в смысле классической теории автоматического управления и определяется с использованием значения "трубки" $\Delta = \sigma_z = 4{,}321$ %, равного заданному (желаемому) значению перерегулирования синтезируемой системы. Данный способ предусматривает преобразование задачи АКОР к канонической форме, в которой объект управления описывается матричным дифференциальным уравнением в форме Фробениуса, а функционал качества определяется как интеграл от суммы квадратов канонических фазовых координат объекта с весовыми коэффициентами $q_i$, $i = 1, 2, ..., n$, а также квадрата сигнала управления с коэффициентом $r$. В форме теоремы сформулировано утверждение, что решение обратной канонической задачи АКОР находится при $r = 1$, $q_3 = q_4 = ... = q_n = 0$ и некоторых положительных значениях коэффициентов $q_1$, $q_2$ квадратичного критерия качества. Значения этих двух коэффициентов предлагается выбирать в процессе моделирования оптимальной системы управления соответственно из условий обеспечения заданных значений времени регулирования и перерегулирования системы.

Предельным решением задачи АКОР при $q_1 \to \infty$ и $q_2 = c(q_1)^{\frac{n-1}{n}} \to \infty$ ($c$ = const) определены ПФ динамических систем с предельным (максимальным) быстродействием, которые при определенных значениях константы $c$ имеют перерегулирование $\sigma_z = 4{,}321$ %. Данные динамические системы названы модифицированными фильтрами Баттерворса в связи с тем, что известные фильтры Баттерворса получаются аналогичным образом при константе $c = 0$. С использованием найденных ПФ фильтров Баттерворса получены числовые оценки весовых коэффициентов квадратичного качества.

ПФ модифицированных фильтров Баттерворса рекомендуется использовать в качестве эталонных ПФ синтезируемых быстродействующих систем.

### Список литературы


1. **Красовский А. А.** и др. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. 712 с.
2. **Красовский А. А.** Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. М.: Наука, 1973. 558 с.
3. **Филимонов Н. Б.** Проблема качества процессов управления: смена оптимизационной парадигмы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2010. № 12. С. 2—10.
4. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Динамическая коррекция процессов регулирования методом линейно-квадратичной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 5. С. 9—14.
5. **Kalman R. E.** Contributions to the Theory of Optimal Control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. V. 5, N. 1. P. 102—119.
6. **Летов А. М.** Аналитическое конструирование регуляторов. I, II, III // Автоматика и телемеханика. 1960. № 4. С. 406—411; № 5. С. 561—568; № 6. С. 661—665.
7. **Летов А. М.** Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 256 с.
8. **Калман Р. Э.** Когда линейная система управления является оптимальной? // Труды Америк. об-ва инж. механиков. 1964. Т. 86, Сер. D. № 1. С. 69—84.
9. **Белман Р., Калаба Р.** Обратная задача программирования в автоматическом управлении // Механика: Сб. перев. иностр. статей. 1964. Т. 88, № 6. С. 3.
10. **Абдулаев Н. Д., Петров Ю. П.** Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 240 с.

11. **Александров А. Г.** Синтез регуляторов многомерных систем. М.: Машиностроение, 1986. 272 с.

12. **Александров А. Г.** Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 264 с.

13. **Кухаренко В. Н.** Выбор коэффициентов квадратичных функционалов при аналитическом конструировании регуляторов // Изв. вузов. Электромеханика. 1978. № 4. С. 411—417.

14. **Дегтярев Г. Л., Ризаев И. С.** Синтез локально-оптимальных алгоритмов управления. М.: Машиностроение, 1991. 304 с.

15. **Пупков К. А.** Методы классической и современной теории автоматического управления. В 3 тт. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. 736 с.

16. **Квакернак Х. Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 650 с.

17. **Kawasaki N., Kobayashi H., Shimemura E.** Relation between pole assignment and LQ-regulator // Int. J. Contr. 1998. Vol. 47, N. 4. P. 947—951.

18. **Miroslav D. Lutovac.** Filter Design for Signal Processing using MATLAB and Mathematica. New Jersey, USA.: Prentice Hall, 2001.

19. **Гайдук А. Р.** Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.

20. **Ким Д. П.** Синтез оптимальных по быстродействию непрерывных линейных регуляторов // АиТ. 2009. № 3. С. 5—16.

21. **Ким Д. П.** Алгебраические методы синтеза САУ. М.: Физматлит, 2014, 164 с.

22. **Ловчаков В. И.** Необходимые условия максимального быстродействия линейных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. № 6. С. 376—382.

23. **Ловчаков В. И.** Синтез линейных систем управления с максимальным быстродействием и заданным перерегулированием // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 9. С. 499—510.


## Modified Butterworth Filters in Solving the Inverse Problem of Analytical Design of Optimal Controllers


**V. I. Lovchakov,** lovvi50@mail.ru, **O. A. Shibyakin,** yutiiop@gmail.com,
Tula State University, Tula, 300600, Russian Federation

*Corresponding author:* **Lovchakov Vladimir I**., D. Sc., Full Professor,
Tula State University, Department of electrical engineering and electrical equipment,
Tula, 300600, Russian Federation, e-mail: lovvi50@mail.ru



*Accepted on November 10, 2020*



***Abstract***

*In this work, for linear stationary one-dimensional control objects, the inverse problem of analytical design of optimal controllers (ADOC) is considered, which consists in determining the weight coefficients of the quadratic functional of the optimality of the control process that provide the closed-loop control system with the specified values of the time of transient processes and overshoot. The time of the transient process (regulation time) of the synthesized system is understood in the sense of the classical theory of automatic control and is determined using a "tube", the value of which is taken, in contrast to known works, equal to the required (desired) small value of the system overshoot of a few percent (2—5 %). The equality of the percentage values characterizing the "tube" and the desired overshoot of the synthesized system is a necessary condition for the maximum response rate of linear dynamic systems and, accordingly, ensures the unambiguity of the solution of the considered inverse ADOC problem in the class of fast-response systems. The proposed solution method provides for the transformation of the ADOC problem to the canonical form, in which the control object is described by a matrix differential equation in the Frobenius form, and the quality functional is defined as the integral of the sum of the products of the object's canonical phase coordinates, as well as the square of the control signal with appropriate weight coefficients. It is shown that the solution of the inverse canonical ADOC problem is determined by the values of only three nonzero weight coefficients of the criterion, and one of them has a single value. The values of the other two coefficients are proposed to be found in the process of modeling the synthesized optimal control system from the conditions of providing for it a given control time and a given overshoot. To obtain numerical estimates of the two main weight coefficients of the quadratic quality criterion, the solution of the ADOC problem is considered with the limiting increase in the values of these weight coefficients. By the limiting solution of the ADOC problem, the transfer functions of dynamic systems with the limiting (maximum) speed are determined, which have a given overshoot of 4.321 %. The dynamical systems described by these transfer functions are called modified Butterworth filters due to the fact that the well-known Butterworth filters are obtained as their special case with a zero value of a certain constant. The parameters and indicators of the dynamics of these filters up to the sixth order are presented in the table. Using the indicators of Butterworth filters, numerical estimates of the weight coefficients of the quadratic quality criterion are established. Transfer functions of modified Butterworth filters are recommended to be used as reference transfer functions of synthesized high-speed control systems.*



***Keywords:*** *linear one-dimensional plant, speed, overshoot, analytical design of an optimal controller, Butterworth filters*

For citation:

**Lovchakov V. I., Shibyakin O. A.** Modified Butterworth Filters in Solving the Inverse Problem of Analytical Design of Optimal Controllers, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2021, vol. 22, no. 2, pp. 71—82.

DOI: 10.17587/mau.22.71-82

**References**

1. **Krasovskii A. A.** et al. Handbook on the theory of automatic control, Moscow, Nauka Publ., 1987, 712 p.(in Russian).
2. **Krasovskii A. A.** Automatic flight control systems and their analytical design, Moscow, Nauka Publ., 1973. 558 p. (in Russian).
3. **Filimonov N. B.** The problem of the quality of management processes: a change in the optimization paradigm, *Mekhatronika, Avtomatizatsiia, Upravlenie,* 2010, no. 12, pp. 2—10 (in Russian).
4. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Dynamic Correction of Regulation Processes by Method of Linear-Square Optimization, *Mekhatronika, Avtomatizatsiia, Upravlenie,* 2011, no. 5, pp. 9—14 (in Russian).
5. **Kalman R. E.** Contributions to the Theory of Optimal Control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102—119.
6. **Letov A. M.** Analytical design of regulators. I, II, III, *Avtomatika i Telemekhanika,* 1960, no. 4, pp. 406—411; no. 5, pp. 561—568; no. 6, pp. 661—665 (in Russian).
7. **Letov A. M.** Mathematical theory of control processes, Moscow, Nauka Publ., 1981, 256 p. (in Russian).
8. **Kalman R. E.** When is a linear control system optimal?, *Tpudy Amepik. ob-va inzh.-mekhanikov*, vol. 86, ser. D, 1964, no. 1, pp. 69—84 (in Russian).
9. **Bellman R., Kalaba R.** Inverse programming task in automatic control, *Mekhanika: Sb. pepev. inostp. Statej*, 1964, vol. 88, no. 6, pp. 3.
10. **Abdulaev N. D.** Theory and methods of designing optimal controllers, Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1985, 240 p. (in Russian).
11. **Aleksandrov A. G.** Synthesis of regulators of multidimensional systems, Moscow, Mashinostroenie Publ., 1986, 272 p. (in Russian).
12. **Aleksandrov A. G.** Optimal and adaptive systems, Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1989, 264 p. (in Russian).
13. **Kuharenko V. N.** Choice of coefficients of quadratic functionals in the analytical design of controllers, *Izv. vuzov. Elektromekhanika*, 1978, no. 4, pp. 411—417 (in Russian).
14. **Degtyarev G. L.** Synthesis of locally optimal control algorithms, Moscow, Mashinostroenie Publ., 1991, 304 p. (in Russian).
15. **Pupkov K. A.** Methods of classical and modern control theory: 3 vol., Moscow, MGTU im. N. E. Baumana Publ., 2000, 736 p. (in Russian).
16. **Kvakernak H., Sivan R.** Linear Optimal Control Systems, Moscow, Mir Publ., 1977, 650 p. (in Russian).
17. **Kawasaki N., Kobayashi H., Shimemura E.** Relation between pole assignment and LQ-regulator, *Int. J. Contr.,* 1998, vol. 47, no. 4, pp. 947—951.
18. **Miroslav D. Lutovac.** Filter Design for Signal Processing using MATLAB and Mathematica, New Jersey, USA, Prentice Hall, 2001.
19. **Gajduk A. R.** Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems, Moscow, Fizmatlit Publ., 2012, 360 p. (in Russian).
20. **Kim D. P.** The synthesis of optimal speed of response continuous linear controller, AiT Publ., 2009, no. 3, pp. 5—16 (in Russian).
21. **Kim D. P.** Algebraicheskie metody sinteza SAU [Algebraic methods of ACS synthesis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 164 p. (in Russian).
22. **Lovchakov V. I.** Necessary conditions of the maximum speed of response of linear dynamic systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiia, Upravlenie*, 2017, no. 6, pp. 376—382 (in Russian).
23. **Lovchakov V. I.** Synthesis of Linear Control Systems with Maximum Speed and Given Overshoot, *Mekhatronika, Avtomatizatsiia, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 9, pp. 499—510 (in Russian).