

Н. Н. Карабутов, д-р техн. наук, проф., kn22@yandex.ru,  
МИРЭА — Российский технологический университет, г. Москва

## О роли S-синхронизируемости и постоянства возбуждения в задаче структурной идентифицируемости нелинейных систем

*Рассмотрен класс динамических систем с одной нелинейностью. Введено понятие S-синхронизируемости входа. Показано, что S-синхронизируемость является условием структурной идентифицируемости нелинейной системы, которая может быть преобразована к некоторой статической системе. Принятие решения о структурной идентифицируемости основано на анализе свойств специального класса геометрических структур, отражающих свойства нелинейной части динамической системы. Рассмотрены требования к модели, позволяющие получить геометрическую структуру по измерениям входа и выхода. Исследовано влияние условия постоянства возбуждения входа на структурную идентифицируемость системы. Невыполнение условия постоянства возбуждения приводит к появлению незначимой геометрической структуры. Рассмотрены различные виды идентифицируемости системы, основанные на анализе структуры. Введено понятие d-оптимальности, которое характеризует свойства геометрической структуры. Получены условия неидентифицируемой структуры нелинейной системы при невыполнении условия d-оптимальности для геометрической структуры при заданных свойствах входа. Предложены методы оценки идентифицируемости системы и нахождения области идентифицируемости в условиях неопределенности. Показано, как на основе фазового портрета можно получить оценку неидентифицируемости системы. Предлагаемый подход обобщен на системы с двумя нелинейностями. Приведены условия частичной структурной идентифицируемости. Предложен метод построения области структурной идентифицируемости системы. Отмечены особенности структурной идентифицируемости данного класса систем. Показано, как при выполнении условия структурной идентифицируемости оценить структуру системы. Предложен способ иерархического погружения для идентификации структуры системы. Предлагаемые методы и процедуры применены для исследования систем с гистерезисом Бука—Вена и двумя нелинейностями. Приведен пример, иллюстрирующий эффективность метода иерархического погружения.*

**Ключевые слова:** идентифицируемость, геометрическая структура, структурная идентификация, S-синхронизируемость, система с двойной нелинейностью, степень структурной идентифицируемости

### Введение

В настоящее время получены основополагающие результаты по параметрической идентификации систем. Наряду с этим продолжаются исследования по оценке идентифицируемости динамических систем. Подход к оценке идентифицируемости основан на идеях Р. Калмана [1], а дальнейшее их развитие дано в работах [2, 3]. Показано, что для параметрической идентифицируемости системы необходима невырожденность информационной матрицы. В работе [4] введено понятие структурной идентифицируемости. Для проверки структурной идентифицируемости могут применяться различные подходы и методы [5–7].

Из приведенных результатов следует, что оценка идентифицируемости системы вы-

полняется в параметрическом пространстве. Исследованию данной проблемы посвящено множество публикаций. Отличие от подхода, изложенного в работе [2], состоит в том, что результаты идентифицируемости пытаются представить в виде, принятом в задачах параметрического оценивания. Другие подходы к оценке структурной идентифицируемости рассмотрены в работах [8–10].

Много работ посвящено параметрической идентифицируемости нелинейных систем (см. например, [9–12]). В статье [10] для исследования идентифицируемости применяется подход, основанный на анализе чувствительности системы по выходу. В работе [9] получены условия локальной параметрической идентифицируемости при различных вариантах измерения экспериментальных данных. Критический

## Постановка задачи

анализ подходов, применяемых для оценки идентифицируемости биологических моделей, дан в статье [11]. Рассмотрены модели оценки идентифицируемости нелинейных систем на основе разложения в ряд Тейлора, таблиц идентифицируемости и алгебры Ли. Вопросам исследования практической идентифицируемости посвящены работы [12–14].

Проведенный анализ показывает, что под идентифицируемостью модели понимают возможность оценки ее параметров. Предлагаемые методы основаны на оценке невырожденности информационной матрицы. Аналогичные результаты получены в теории параметрического оценивания, а условие невырожденности (полноты ранга) матрицы представлено в легко проверяемом условии постоянства возбуждения входа и выхода системы. Как правило, структура модели задается априори, и поэтому не всегда понятно, какой смысл вкладывается в понятие структурной локальной идентифицируемости. Понятие структуры широко эксплуатируется в задачах оценки идентифицируемости. Идентифицируемость нелинейной системы также сводится к задаче параметрической идентифицируемости на основе применения различных методов линеаризации модели по параметрам. Эта обширная область исследований не охватывает задачи структурной идентифицируемости нелинейных динамических систем в следующем смысле: можно ли в условиях неопределенности принять решение о структуре (форме, зависимости) нелинейной части системы. Задача в таком виде не ставилась. Такая постановка соответствует анализу структурных аспектов идентифицируемости (идентификации) системы. Кроме того, не рассматривался вопрос: какой вход, даже обладающий свойством постоянства возбуждения, гарантирует структурную идентифицируемость системы в указанном выше смысле. Данная постановка впервые была предложена в работе [15].

Ниже рассматривается задача структурной идентифицируемости нелинейной системы. Понятие структурной идентифицируемости ( $h$ -идентифицируемости) введено в статье [15]. В отличие от изложенных выше методов предлагаемый подход направлен на решение задачи оценки структуры нелинейной части динамической системы и основан на анализе специального класса структур. Ниже дается изложение и обобщение результатов, полученных в работах [16, 17].

Рассмотрите систему

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + B_\varphi \varphi(y) + B_u u, \\ y &= C^T X, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u \in R$ ,  $y \in R$  — вход и выход системы;  $A \in R^{q \times q}$ ,  $B_u \in R$ ,  $B_\varphi \in R^q$ ,  $C \in R^q$  — матрицы соответствующих размерностей;  $\varphi(y)$  — некоторая скалярная нелинейная функция. Матрица  $A$  является гурвицевой. Далее полагаем, что  $B_\varphi = B_u = I = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$ ,  $C = [1, 0, \dots, 0]^T$ .

Полагаем, что функция  $\varphi(y)$  является гладкой и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \chi \in F_\varphi &= \{\gamma_1 \xi^2 \leq \varphi(\xi) \xi \leq \gamma_2 \xi^2, \\ \xi &\neq 0, \varphi(0) = 0, \gamma_1 \geq 0, \gamma_2 < \infty\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\xi \in R$  — вход нелинейного элемента,  $\xi$  является линейной комбинацией переменных состояния. Для системы (1) известно информационное множество

$$I_o = \{u(t), y(t), t \in J = [t_0, t_k]\}. \quad (3)$$

Задача: на основе анализа и обработки  $I_o$  оценить структурную идентифицируемость (СИ) нелинейной части системы (1).

Воспользуемся подходом к структурной идентификации, предложенным в работе [17]. Он основан на переходе в специальное структурное пространство и построении структур  $S_{ey}$ , отражающих свойства нелинейной части (1). Анализ  $S_{ey}$  напрямую связан с решением задачи структурной идентифицируемости системы. Чтобы отличить излагаемый далее подход от параметрической идентифицируемости, ниже будет использоваться термин  $h$ -идентифицируемости (HI). Изложим метод построения  $S_{ey}$ -структуры.

### Метод построения $S_{ey}$ -структуры

Построение  $S_{ey}$ -структуры требует предварительного формирования множества  $I_{N, g}$ , содержащего информацию о функции  $\varphi(y)$ . Изложим способ получения  $I_{N, g}$ , следуя работе [18]. Применим к  $y(t)$  операцию дифференцирования и обозначим полученную переменную  $x_1$ . Учет  $x_1$  приводит к расширению информационного множества  $I_o$ :  $I_{ent} = \{I_o, x_1\}$ .

**Замечание 1.** Если переменные  $u$ ,  $y$  измеряются с ошибкой, то к  $u$ ,  $y$  следует применить процедуру фильтрации или сглаживания.

Выделим подмножество  $I_g \subset I_{ent}$ , соответствующее частному решению системы (1) (установившемуся состоянию). Множество  $I_g = I_{ent} \setminus I_{tr}$  не содержит данные  $I_{tr}$  о переходном процессе в системе. Применим математическую модель

$$\hat{x}'_1(t) = H^T [1 \ u(t) \ y(t)]^T \quad (4)$$

для выделения линейной составляющей в  $x_1$ , где  $H \in R^3$  — вектор параметров модели. Переменная  $x_1$  определена на интервале  $J_g = J \setminus J_{tr}$ .

Определим вектор  $H$  как решение задачи

$$\min_H Q(e) \Big|_{e=\hat{x}'_1 - x_1} \rightarrow H_{opt}, \quad Q(e) = 0,5e^2.$$

Найдем прогноз для переменной  $x_1$  на основе модели (4)  $\forall t \in I_g$  и сформируем ошибку  $e(t) = \hat{x}'_1(t) - x_1(t)$ .  $e(t)$  зависит от нелинейности  $\varphi(y)$  в системе (1). Итак, получено множество  $I_{N,g} = \{y(t), e(t) \ t \in J_g\}$ . Далее будем применять обозначение  $y(t)$ , полагая, что  $y(t) \in I_{N,g}$ .

**Замечание 2.** Выбор структуры модели (4) является одним из этапов структурной идентификации системы (1). Результаты моделирования показывают, что модель (4) применима в системах идентификации объектов со статическими нелинейностями. Решение задачи выбора структуры модели (4) для более сложного класса нелинейностей дано в работе [16].

Фазовый портрет  $S$ , описываемый функцией  $\Gamma : \{y\} \rightarrow \{y'\}$ , не всегда гарантирует принятие решения о нелинейных свойствах системы в условиях неопределенности. Перейдем в пространство  $\mathcal{P}_{ye} = (y, e)$ , которое будем называть структурным.

Рассмотрим функцию  $\Gamma_{ey} : \{y\} \rightarrow \{e\}$ ,  $\forall t \in J_g$ , которая на плоскости  $(y, e)$  описывает изменение структуры  $S_{ey}$ . Так как  $I_{N,g}$  содержит информацию о  $\varphi(y)$ , то  $S_{ey}$  будет в обобщенном виде описывать изменение нелинейной функции. Идентификация структуры  $\varphi(y)$  основана на использовании входа системы (1), удовлетворяющего определенным условиям. Он должен обладать свойством постоянства возбуждения (см. далее). Такой вход позволяет получить замкнутую структуру  $S_{ey}$ . В некоторых случаях может применяться также структура  $S_{ek}$ , которая описывается функцией  $\Gamma_{ek} : \{k_s\} \rightarrow \{e\}$ , где  $k_s(t) \in R$  — коэффициент структурности [16]:

$$k_s(t) = \frac{e(t)}{y(t)}.$$

В результате применения модели (4) система (1) может быть представлена в виде

$$S_y : \begin{cases} \dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + I\zeta, \\ \tilde{y} = C^T \tilde{X}, \end{cases} \quad S_\varphi : e = f(y, x_1), \quad (5)$$

где  $\tilde{X} \in R^q$  — переменная, описывающая общее решение системы (1);  $\zeta \in R$  — ограниченное возмущение, возникающее в результате применения процедуры определения переменной  $e$ ;  $I = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$ ,  $I \in R^q$ .

Рассмотрим проблему идентифицируемости систем  $S_y, S_\varphi$ .

### Структурная идентифицируемость нелинейной системы

Рассмотрим систему  $S_\varphi$  и свойства  $I_{N,g}$ , позволяющие решить задачу структурной идентификации, а следовательно, и  $h$ -идентифицируемости. Анализ  $I_{N,g}$  позволяет определить важные свойства информационного множества  $I_\varphi$ .

Пусть выполняются следующие условия:

**В1.** Вход  $u(t)$  является постоянно возбуждаемым на интервале  $J$ .

**В2.** Анализ  $S_{ey}$  дает решение задачи оценки нелинейных свойств системы (1).

**Определение 1.** Вход  $u(t)$  будем называть представительным, если он удовлетворяет условиям В1, В2.

Пусть структура  $S_{ey}$  является замкнутой, и ее площадь не равна нулю. Обозначим  $h(S_{ey})$  высоту  $S_{ey}$ , где высота понимается как расстояние между двумя точками противоположных сторон структуры  $S_{ey}$ .

**Теорема 1** [18]. Пусть: 1) линейная часть системы (1) является устойчивой, а нелинейность  $\varphi(\cdot)$  удовлетворяет условию (2); 2) вход  $u(t)$  является ограниченным, кусочно-непрерывным и постоянно возбуждаемым; 3) существует такое  $\delta_S > 0$ , что  $h(S_{ey}) \geq \delta_S$ . Тогда структура  $S_{ey}$  является идентифицируемой на множестве  $I_{N,g}$ .

**Определение 2.** Структура  $S_{ey}$ , имеющая указанные свойства, называется  $h$ -идентифицируемой.

Предположим, что  $S_{ey}$  является  $h$ -идентифицируемой. Особенности понятия  $h$ -идентифицируемости рассмотрены в работе [15]. Следует отметить, что может существовать "плохой" вход, который удовлетворяет условию постоян-

ства возбуждения. Такой вход может давать так называемую "незначимую"  $S_{ey}$ -структуру ( $\mathcal{N}S_{ey}$ -структура). Но при этом  $\mathcal{N}S_{ey}$ -структура может быть  $h$ -идентифицируемой. Идентификация нелинейности в условиях неопределенности на основе анализа  $\mathcal{N}S_{ey}$ -структуры может давать результаты, нетипичные для исследуемой системы.

Приведем условия существования  $\mathcal{N}S_{ey}$ -структуры. Рассмотрим класс нелинейных функций, к которым применима операция гомотетии [19].

Пусть  $S_{ey} = F_{S_{ey}}^l \cup F_{S_{ey}}^r$ , где  $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$  — левый и правый фрагменты  $S_{ey}$ . Определим для  $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$  секущие

$$\gamma_S^r = a^r y, \quad \gamma_S^l = a^l y, \quad (6)$$

где  $a^l, a^r$  — числа, определяемые с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

**Теорема 2** [16]. Пусть: 1) структура  $S_{ey}$  является  $h$ -идентифицируемой и имеет вид  $S_{ey} = F_{S_{ey}}^l \cup F_{S_{ey}}^r$ ; 2) секущие для  $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$  описываются уравнениями (6). Тогда  $S_{ey}$  является  $\mathcal{N}S_{ey}$ -структурой, если

$$\|a^l| - |a^r|\| > \delta_h, \quad (7)$$

где  $\delta_h > 0$  — некоторое заданное число.

**Замечание 3.**  $\mathcal{N}S_{ey}$ -структуры часто являются результатом неадекватного применения входных воздействий.

Рассмотрим структуру  $S_{ey}$ . Введем обозначения:  $\mathcal{D}_y = \text{dom}(S_{ey})$  — область определения  $S_{ey}$ ,  $D_y = D_y(\mathcal{D}_y) = \max_t y(t) - \min_t y(t)$  — диаметр  $\mathcal{D}_y$ . Пусть  $u(t) \in U$ , где  $U$  — допустимое множество входов для системы (1). Множество  $U$  содержит представительные входы.

**Определение 3.** Вход  $u(t) \in U_S \subseteq U$  будем называть  $S$ -синхронизирующим систему (1), если на множестве  $\{y(t), t \in J\}$  область определения  $\mathcal{D}_y$  структуры  $S_{ey}$  имеет максимальный диаметр  $D_y$ .

Рассмотрим эталонную структуру  $S_{ey}^{ref}$ , под которой понимаем структуру  $S_{ey}$ , позволяющую отразить все свойства функции  $\varphi(y)$ . Обозначим  $D_y^{ref}$  — диаметр  $D_y(S_{ey}^{ref})$ .  $D_y^{ref}$  существует для системы (1) с  $S$ -синхронизирующим входом.

Из определений 2, 3 следует, что если  $S_{ey} \cong S_{ey}^{ref}$ , то  $|D_y - D_y^{ref}| \leq \varepsilon_y$ , где  $\varepsilon_y \geq 0, \cong$  — знак близости. Элементы подмножества  $U_S$  обладают свойством

$$|D_y(S_{ey}(u(t)|_{u \in U_S})) - D_y^{ref}| \leq \varepsilon_y. \quad (8)$$

Синхронизацию  $u(t) \in U$  будем понимать как выбор такого входа  $u_h(t) \in U$ , который позволяет отразить все особенности  $S_{ey}$ , характерные для  $\varphi(y)$ . Это возможно только в случае, когда  $u(t)$  обеспечивает  $\max_{u_h} D_y$ . В отличие от понятия синхронизации,  $u_h$  принятого в теории колебаний, здесь выбор свойств входа направлен на возможность получения структуры  $S_{ey} \neq \mathcal{N}S_{ey}$ . Такой подбор  $u_h(t) \in U$  можно трактовать как синхронизацию между структурами модели и системы, поэтому выполнение условия  $d_{h,y} = \max_{u_h} D_y$  приводит к  $h$ -идентифицируемости системы  $u_h$ . Условие  $h$ -идентифицируемости принимает вид

$$|D_y(S_{ey}(u(t)|_{u \in U_S})) - d_{h,y}| \leq \varepsilon_y. \quad (9)$$

Условие появления  $\mathcal{N}S_{ey}$ :

$$|D_y(S_{ey}(u(t)|_{u \in U \setminus U_S})) - d_{h,y}| > \varepsilon_y. \quad (10)$$

Условие (9) можно интерпретировать как область близости

$$Q_D = |S_{ey}(u(t)|_{u \in U_S}) - S_{ey}^{ref}|,$$

которая понимается как  $|y(t) - y^{ref}(t)| \leq \varepsilon_y$ , для почти  $\forall t \geq \tilde{t}$ .

Будем писать  $\delta Q_D \leq \varepsilon_y$ , если рассматриваемые структуры являются близкими. Если для  $Q_D$  выполняется условие  $\delta Q_D \leq \varepsilon_y$  для почти  $\forall t \geq t^*$ , то область  $Q_D$  будем называть областью  $S$ -синхронизируемости на множестве входов  $\{u_h(t)\}$  или областью структурной идентифицируемости на множестве  $\{S_h(u_h(t))\}$ , где  $S_h$  — фазовый портрет системы (1).

Итак, представлены два критерия (7) и (10) существования незначимой структуры  $S_{ey}$ . В этом случае структура системы  $S_\varphi$ , а следовательно, и система (1) являются структурно неидентифицируемыми.

Пусть вход  $u_h(t)$  синхронизирует множество  $\mathcal{D}_y$ . Если  $u(t)$  является  $S$ -синхронизирующим, то будем писать  $u_h(t) \in S$ . Заметим, что для системы (1) существует конечное множество  $\{u_h(t)\} \in S$ . Выбор оптимального  $u_h(t)$  зависит от  $d_{h,y}$  и выполнения условия (9). Обеспечение условия (9) является одной из предпосылок структурной идентифицируемости системы (1).

**Определение 4.** Структуру  $S_{ey}$  (систему (1)) будем называть структурно идентифицируе-

мой или  $h_{\delta_h}$ -идентифицируемой, если  $S_{ey}$  является  $h$ -идентифицируемой и выполняются условия  $\|a^l\| - \|a^r\| \leq \delta_h$ , (8).

Из этого определения следует, что если система (1)  $h_{\delta_h}$ -идентифицируема, то структура  $S_{ey}$  имеет максимальный диаметр области  $D_y$ .

Пусть структура  $S$  содержит  $m$  особенностей. Под особенностями функции  $\varphi(y)$  будем понимать как потерю непрерывности на интервале  $I_y^j$ , так и точки перегиба функции или экстремумы. Эти особенности являются признаками нелинейности исследуемой функции.

**Определение 5.** Модель (4) будем называть  $SM$ -идентифицирующей, если структура  $S_{ey}$  является  $h_{\delta_h}$ -идентифицируемой.

**Теорема 3** [17]. Пусть: 1) вход  $u(t)$  является постоянно возбуждаемым и обеспечивает  $S$ -синхронизацию системы (1); 2) фазовый портрет  $S$  системы (1) содержит  $m$  особенностей; 3)  $S_{ey}$ -структура является  $h_{\delta_h}$ -идентифицируемой и содержит фрагменты, соответствующие особенностям фазового портрета  $S$ . Тогда модель (4) является  $SM$ -идентифицирующей.

Теорема 3 показывает, что если модель (4) не является  $SM$ -идентифицирующей, то необходимо менять структуру модели (4) или информационное множество для ее построения.

Рассмотрим структуру  $S_{ey}$ . Обозначим  $c_S$  — центр структуры  $S_{ey}$  на множестве  $J_y = \{y(t)\}$ , а  $c_{D_y}$  — центр области  $D_y$ .

**Теорема 4.** Пусть на множестве  $U_S$  синхронизирующих входов системы (1): 1) существует такое  $\varepsilon \geq 0$ , что  $|c_S - c_{D_y}| \leq \varepsilon$ ; 2) выполняется условие  $\|a^l\| - \|a^r\| \leq \delta_h$ , где  $a^l, a^r$  — коэффициенты текущих (7). Тогда система (1) является  $h_{\delta_h}$ -идентифицируемой, а вход  $u_h(t) \in S$ .

**Доказательство теоремы 4.** Рассмотрим вход  $u_h(t) \in U_S$ . Так как выполняется условие  $\|a^l\| - \|a^r\| \leq \delta_h$ , то структура  $S_{ey}$  является симметричной относительно точки  $c_S$  на плоскости  $(y, e)$ . Следовательно, диаметры областей определения фрагментов  $(F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r) \subset S_{ey}$  совпадают с точностью до некоторой величины  $\varepsilon_F \geq 0$  на множестве  $\{y(t)\}$ , т. е.

$$\left| D_{F_S^l}(D_{F_S^l}) - D_{F_S^r}(D_{F_S^r}) \right| \leq \varepsilon_F, \quad (11)$$

где  $D_{F_S^l}, D_{F_S^r}$  — области определения  $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ . Тогда центр структуры  $S_{ey}$  равен  $c_{D_y} = 0,5(D_{F_S^l} + D_{F_S^r})$ . Так как  $D_{F_S^l} + D_{F_S^r} = D_y$ , то существует такое  $\varepsilon \geq 0$ , что  $|c_S - c_{D_y}| \leq \varepsilon$ . Вы-

полнение условий 1), 2) гарантирует, что  $u(t) = u_h(t)$  и  $d_{h,y} = \max_{u_h} D_y$ . Следовательно, при  $u_h(t)$  структура  $S_{ey}$  будет содержать все особенности, характерные для функции  $\varphi(y)$ . Отсюда следует, что  $u_h(t) \in S$ , а система (1) является  $h_{\delta_h}$ -идентифицируемой. ■

Может существовать некоторое подмножество  $\{u_{h,i}(t)\} \subset U_S \subseteq U$  ( $i \geq 1$ ), элементы которого обладают свойством  $S$ -синхронизируемости. Каждому  $u_{h,i}(t)$  соответствует структура  $S_{ey,i}(u_{h,i})$  с диаметром  $D_{y,i}$  области определения  $D_{y,i}$ . Так как  $u_{h,i}(t) \in S$ , то диаметры  $D_{y,i}$  будут обладать свойством  $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности. Пусть гипотетическая структура  $S_{ey}$  (структура  $S_{ey}^{ref}$ ) системы (1) имеет диаметр  $d_{h,\Sigma}$ .

**Определение 6.** Структура  $S_{ey,i}$  обладает свойством  $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности на множестве  $U_h$ , если существует такое  $\varepsilon_\Sigma > 0$ , что  $|d_{h,\Sigma} - D_{y,i}| \leq \varepsilon_\Sigma \quad \forall i = \overline{1, \#U_h}$ .

**Определение 7.** Если существует подмножество входов  $\{u_{h,i}(t)\} = U_h \subset U$  ( $i \geq 1$ ), элементы которого  $u_{h,i}(t) \in S$  и соответствующие им структуры  $S_{ey,i}(u_{h,i})$  обладают свойством  $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности, то структуры  $S_{ey,i}(u_{h,i})$  являются структурно неразличимыми на множествах  $\{u_{h,i}(t)\}, J_y(u(t) = u_{h,i}(t))$ .

Из определений 6, 7 следует, что в случае существования множества  $U_h$  оценку  $h_{\delta_h}$ -идентифицируемости можно получить по любому входу  $u(t) \in U_h$ .

**Определение 8.** Структуры  $S_{ey,i}(u_{h,i})$ , обладающие свойством  $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности, будем называть локально структурно идентифицируемыми на множестве  $U_h$ .

Структуру  $S_{ey,i}(u_{h,i})$ , обладающую свойством  $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности, будем обозначать  $S_{ey,i}^\Sigma$ , а локально структурно идентифицируемую структуру  $S_{ey,i}(u_{h,i})$  —  $S_{ey,i}^{LSI}$ .

Итак, из изложенного выше следует, что структура  $S_{ey}$  является локально структурно идентифицируемой на множестве  $U_h \subseteq U_S$ , если

$$(\exists u_h \in S), \text{ что } (S_{ey} \cong S_{ey}^\Sigma) \rightarrow S_{ey} \cong S_{ey}^{LSI}. \quad (12)$$

**Замечание 4.** Здесь рассматривается случай симметричных нелинейностей. Поэтому остаются справедливыми сделанные выше замечания и условия существования  $\mathcal{N}S_{ey}$ -структуры. Если нелинейная функция не обладает свойством симметрии, то требуется дальнейшее исследование данной проблемы.

**Определение 9.** Структуры  $S_{ey,i}$  ( $u_i \notin U_S$ ), не обладающие свойством  $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности, будем называть локально структурно неидентифицируемыми на множестве  $U_h$ .

**Замечание 5.** Изложенный подход применим к нелинейной системе с динамическим законом изменения нелинейности, где требуется многоуровневый анализ идентифицируемости структур.

Идентифицируемость системы  $S_y$  рассмотрена в работе [21].

### О влиянии постоянства возбуждения на идентифицируемость системы

В работе [21] показано влияние условия постоянства возбуждения (ПВ) на оценку идентифицируемости системы. Отмечено, что не любой вход, обладающий свойством ПВ, гарантирует структурную идентифицируемость системы. Ниже приводятся результаты, позволяющие оценить влияние этого условия.

Рассмотрим вход  $u \in PE_\alpha$ , где  $PE_\alpha$  — свойство постоянства возбуждения

$$PE_\alpha: u^2(t) \geq \alpha$$

справедливо для  $\exists \alpha > 0$  и  $\forall t \geq t_0$  на некотором интервале  $T > 0$ .

Пусть вход  $u(t)$  системы (1) обладает свойством  $u(t) \in PE_{\alpha,\omega_k}$ , где

$$u_k(t) : (u \in PE_\alpha) \& (u \in PF_{\omega_k}) \& (\overline{u_h \in S}), \quad (13)$$

$$PF_{\omega_k} : u_k(t) = RF_k(\Omega_k),$$

$RF(\Omega_k)$  — модель  $u_k(t)$  на основе ряда Фурье, заданного на конечном множестве  $\Omega_k = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$  частот.

Полагаем, что  $u_k \in U_k$ ,  $U_k = U \setminus U_S$ . Следовательно,  $u_k \notin S$ , т. е. вход  $u_k$  не является S-синхронизирующим. Для  $u_h \in S$  справедливо

$$u_h(t) : (u_h \in PE_\alpha) \& (u_h \in PF_{\omega_h}) \& (u_h \in S), \quad (14)$$

$$PF_{\omega_h} : u_h(t) = RF_h(\Omega_h),$$

где  $\Omega_h \neq \Omega_k$ .

Из условий (13), (14) следует, что

$$(RF_h(\Omega_h) \neq RF_k(\Omega_k)) \Rightarrow S_{ey}^h \neq S_{ey}^k \Rightarrow S_{ey}^k = NS_{ey}. \quad (15)$$

Из (15) получаем

$$(\mathcal{D}_y(S_{ey}^h) \neq \mathcal{D}_y(S_{ey}^k)) \Rightarrow [D_y(S_{ey}^h) \geq D_y(S_{ey}^k)]. \quad (16)$$

Так как области определения структур  $S_{ey}^h, S_{ey}^k$  не совпадают, а  $S_{ey}^h$  является  $d_{h,\Sigma}$ -оптимальной на множестве  $U_h$ , то из неравенства (16) следует выполнение условия (10). Это условие говорит о том, что структура нелинейной части системы (1) с  $u_k$  имеет показатели, отличающиеся от структурно идентифицируемых параметров системы (1) с  $u_h$ .

Итак, условие постоянства возбуждения входа существенно влияет на  $h_{\delta_h}$ -идентифицируемость  $S_\phi$ -системы, а следовательно, и системы (1).

Из вышеизложенного следует

**Теорема 5.** Пусть для системы (1): 1) вход  $u_k$  удовлетворяет условию (13); 2) входу  $u_k$  соответствует структура  $S_{ey}^k$ ; 3) существует такой вход  $u_h \in S$ , что выполняется условие (14); 4) выполняются условия (15), (16). Тогда  $S_\phi$ -система является структурно неидентифицируемой по входу  $u_k$ , а структурные параметры  $S_\phi$ -системы не соответствуют системе (1) с идентифицируемой структурой  $S_{ey}^h$ .

Как оценить степень неидентифицируемости  $S_\phi$ -системы? В условиях априорной неопределенности это сделать непросто. Далее предлагается подход, позволяющий получить количественные оценки для этого показателя.

Пусть для системы (1) построен фазовый портрет  $S$ . Известно, что области определения структур  $S$  и  $S_{ey}$  совпадают. Поэтому диаметр  $D(S_{ey})$  области определения  $S_{ey}$  известен. Рассмотрим множество входов  $\{u_i(t)\}$ , имеющих свойство  $PE_\alpha$ . Для каждого  $u_i(t)$  построим структуру  $S_{ey,i}$  и определим  $D_{y,i}(S_{ey,i})$ . Положим  $d_{h,y} = \max_{u_i} |D_y(\mathcal{D}(S_{ey,i}))|$  и соответствующий вход обозначим  $u_h$ . Для всех входов  $\mathcal{U} = \{u_i(t)\} \setminus \{u_h\}$  найдем диаметры  $d_{y,j} = |D_{y,j}(\mathcal{D}[S_{ey,j}(u_j \in \mathcal{U})])|$ . Так как  $u_h \in S$ , то  $d_{h,y} > d_{y,j} \quad \forall j \geq 1$ . Тогда степень неидентифицируемости можно оценить следующим образом:

$$SI_j = SI(S_{ey,j}) = \frac{d_{h,y} - d_{y,j}}{d_{h,y}}. \quad (17)$$

Из соотношения (17) следует, что система (1) является структурно идентифицируемой, если  $SI_j \rightarrow 0$ . Область структурной идентифицируемости  $Q_D$  определяется условием (9).

**Замечание 6.** Если выделить фрагменты  $F_S^l, F_S^r$  на фазовом портрете  $S$ , то предварительную оценку неидентифицируемости системы можно определить как

$$SI = SI(S) = \frac{d_y^l(F_S^l)}{d_y^r(F_S^r)},$$

где  $d_y^l(F_S^l), d_y^r(F_S^r)$  — диаметры фрагментов  $F_S^l, F_S^r$ . Система (1) будет структурно идентифицируема, если  $SI(S) \leq o(1)$ , где  $o(1)$  — окрестность 1.

В отличие от линейных систем на СИ нелинейных систем может оказывать влияние амплитуда входа  $u(t)$ . Модифицируем условия (13), (14):

$$u_k(t) : (u \in \mathcal{PE}_\alpha) \& (u \in \mathcal{PF}_{\omega_k}) \& \overline{(u_h \in S)}, \quad (13a)$$

$$\mathcal{PF}_{\omega_k} : u_k(t) = \mathcal{RF}_k(G_k, \Omega_k);$$

$$u_h(t) : (u_h \in \mathcal{PE}_\alpha) \& (u_h \in \mathcal{PF}_{\omega_h}) \& (u_h \in S), \quad (14a)$$

$$\mathcal{PF}_{\omega_h} : u_h(t) = \mathcal{RF}_h(G_h, \Omega_h),$$

где  $G_k, G_h$  — векторы параметров моделей  $\mathcal{RF}_k, \mathcal{RF}_h$ .

Представим модели  $\mathcal{RF}_k$  и  $\mathcal{RF}_h$  в виде

$$\mathcal{RF}_h(G_h, \Omega_h) = g_h \overline{\mathcal{RF}_h}(\tilde{G}_h, \Omega_h),$$

$$\mathcal{RF}_k(G_k, \Omega_k) = g_k \overline{\mathcal{RF}_k}(\tilde{G}_k, \Omega_k),$$

где  $\overline{\mathcal{RF}_h}(\tilde{G}_h, \Omega_h), \overline{\mathcal{RF}_k}(\tilde{G}_k, \Omega_k)$  — модификации моделей (13), (14);  $g_h = \max_i g_{h,i}, i = \overline{1, \# \Omega_h}$ ,  $g_h, i$  — элемент  $G_h$ ;  $g_k = \max_i g_{k,i}, i = \overline{1, \# \Omega_k}$ ,  $g_p$  ( $p = k, h$ ) будем называть обобщенной амплитудой входа.

Условие (15) преобразуем к виду

$$g_h \overline{\mathcal{RF}_h}(\tilde{G}_h, \Omega_h) \neq g_k \overline{\mathcal{RF}_k}(\tilde{G}_k, \Omega_k).$$

Так как вход  $u_h \in S$ , то  $g_h \geq g_k$ . Это следует из того, что

$$D_h(S(u_h)) \geq D_k(S(u_k)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \overline{\mathcal{RF}_h}(\tilde{G}_h, \Omega_h) \right| \geq \left| \overline{\mathcal{RF}_k}(\tilde{G}_k, \Omega_k) \right|,$$

а модель  $\overline{\mathcal{RF}_h}(\tilde{G}_h, \Omega_h)$  аппроксимирует вход, обеспечивающий S-синхронизацию системы (1).

Из  $S(u_h) \Rightarrow S_{ey}^h$  получаем, что диаметр  $D_h(S_{ey}^h)$  является  $d_{h, \Sigma}$ -оптимальным. Структура  $S_{ey}^k$  в силу (14a) таким свойством не обладает. Следовательно,  $D_k(S_{ey}^k)$  может давать только вход  $u_k \notin S$ , имеющий меньшую обобщенную амплитуду.

**Теорема 6.** Пусть для системы (1): 1) вход  $u_k$  удовлетворяет условию (13a); 2) входу  $u_k$  соответствует структура  $S_{ey}^k$ ; 3) существует

такой вход  $u_h \in S$ , что выполняется условие (14a); 4) выполняются условия (15), (16). Тогда  $S_\varphi$ -система является структурно неидентифицируемой по входу  $u_k$ , а структурные параметры  $S_\varphi$ -системы не соответствуют системе (1) с идентифицируемой структурой  $S_{ey}^h$ , если  $g_h \geq g_k$ .

**Пример 1.** Рассмотрим нелинейную систему с гистерезисом Бука—Вена (система  $S_{BW}$ ) [20]

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + F(x, z, t) = f(t), \quad (18)$$

$$F(x, z, t) = \alpha kx(t) + (1 - \alpha)kdz(t), \quad (19)$$

$$\dot{z} = d^{-1}(a\dot{x} - \beta|\dot{x}||z|^n \text{sign}(z) - \gamma\dot{x}|z|^n), \quad (20)$$

где  $m > 0$  — масса;  $c > 0$  — демпфирование;  $F(x, z, t)$  — восстанавливающая сила,  $d > 0, n > 0, k > 0, \alpha \in (0, 1), u(t) = f(t)$  — возбуждающая сила;  $a, \beta, \gamma$  — некоторые числа;  $y = x$  — выход системы. Здесь (20) является уравнением Бука—Вена.

$S_{BW}$ -система моделировалась со следующими параметрами:  $n = 1,5; c = 2; m = 1; \beta = 0,5; \alpha = 0,7; k = 0,6; d = a = 1; x(0) = 1; \dot{x}(0) = 0; z(0) = 1$ . В результате было сформировано множество данных  $I_o = \{u(t), y(t), t \in [0; t_e]\}$  ( $t_e < \infty$ ) о системе. Рассматривались четыре варианта входа  $u(t)$ :

$$u_0(t) = 2 - 2 \sin(0,15\pi t),$$

$$u_1(t) = 2 - 2 \sin(0,35\pi t), \quad (21)$$

$$u_2(t) = 2 - 2 \sin(0,5\pi t),$$

$$u_3(t) = 2 - 2 \sin(0,15\pi t) + 0,2 \sin(0,35\pi t).$$

Обозначим  $S_i$ , где  $i = \overline{0,3}$ , — фазовые портреты системы с указанными входами. Область определения фазового портрета совпадает с областью определения гистерезиса (рис. 1 для случая  $S_0$ ).

Вычислим диаметры области определения фазового портрета

$$D_{y,0}(S_0) = 3,75, D_{y,1}(S_1) = 1,728, \quad (22)$$

$$D_{y,2}(S_2) = 1,08, D_{y,3}(S_3) = 3,967.$$

Эти результаты получены для установившегося режима работы система  $S_{BW}$ .

Анализ показал, что  $u_0(t) \in S$ . Поэтому систему  $S_{BW}$  с фазовым портретом  $S_0$  принимаем за эталон и полагаем, что  $d_{h,y} = D_{y,0}(S_0)$ . Тогда

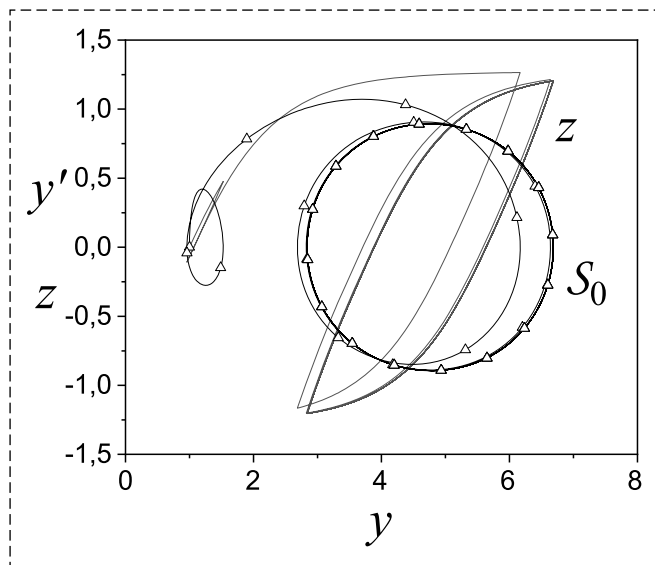


Рис. 1. Фазовый портрет и выход гистерезиса системы с  $u_0$   
 Fig. 1. Phase portrait and hysteresis of system with  $u_0$

для степени неидентифицируемости системы для различных  $u_i$  получаем

$$SI_1 = 0,549, SI_2 = 0,718, SI_3 = -0,035. \quad (23)$$

Из (23) следует, что  $S_{BW}$ -система с входами  $u_1, u_2$  является структурно неидентифицируемой, а с входом  $u_3$  — структурно неразличима с входом  $u_0$ .

Итак, из (23) следует, что структуры  $S_{ey,1}(u_1), S_{ey,2}(u_2)$  являются структурами класса  $\mathcal{NS}_{ey}$ , а структура  $S_{ey,3}(u_3)$  принадлежит классу  $S_{ey}^{LSI}$ .

Полученные результаты подтверждает рис. 2 (см. вторую сторону обложки). На нем в интегрированном виде представлены выходы  $y_i$  систе-

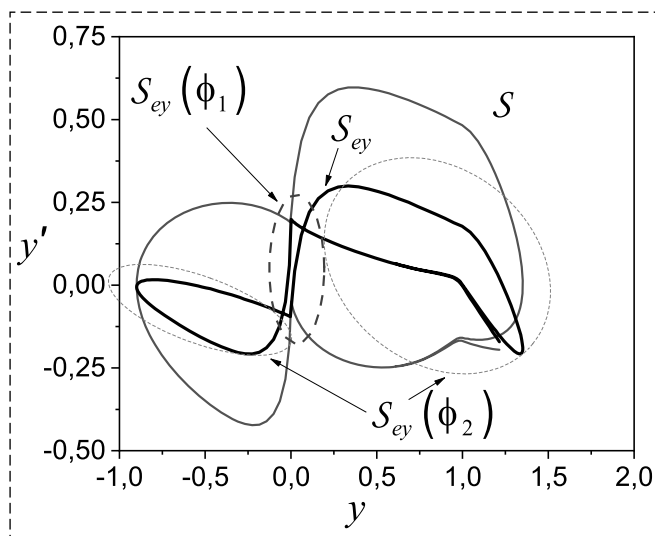


Рис. 5. Пример  $S_{ey}$ -структуры для системы (1), (24)  
 Fig. 5. Example  $S_{ey}$ -framework for system (1), (24)

мы. Прямоугольные области представляют собой оценки диаметров в указанных пределах. Несмотря на некоторое отличие от результатов (22), они подтверждают оценки (23).

Итак, что частотные свойства входа существенно влияют на идентифицируемость системы. Особенно это актуально для нелинейной части, где даже незначительное изменение свойств входа сказывается на возможности оценки структурных параметров гистерезиса. Для подтверждения сделанных выводов на рис. 3 показаны выходы модели Бука—Вена (20) при различных входах. Из рис. 3 (см. вторую сторону обложки) следует, что  $u(t)$  изменяет наблюдаемые области определения и значений гистерезиса.

На рис. 4 (см. вторую сторону обложки) показана область  $Q_D$ . Она подтверждает сделанные выше выводы. На рис. 4 применяются следующие обозначения: 1 —  $S_0$ , 2 —  $S_2$ , 3 —  $S_1$ , 4 —  $S_3$ .

### О структурной идентифицируемости системы с двумя нелинейностями

Рассмотрим случай, когда система (1) содержит две нелинейности

$$B_\varphi(y) = B_{\varphi,1}\varphi_1(y) + B_{\varphi,2}\varphi_2(y), \quad (24)$$

где  $\varphi_i(y)$  удовлетворяет условию (2).

Этот случай, как и случай  $i > 2$ , является более сложным и имеет свои особенности. Предварительный анализ показывает, что в данном случае для принятия решения об идентифицируемости  $S_\varphi$ -системы можно применить подход, изложенный в разделе "Структурная идентифицируемость нелинейной системы". Но анализа свойств структуры  $S_{ey}$  может оказаться недостаточно. Кроме того, может возникнуть случай, когда  $S_{ey}$  является частично  $\mathcal{NS}_{ey}$ -структурой. Рассмотрим этот случай.

Пусть получена  $S_{ey}$ -структура (рис. 5 отражает установившееся состояние системы) для системы (1), (24) второго порядка. Применим теорему 2 и получим, что не выполняется условие (7). Следовательно,  $S_{ey} = \mathcal{NS}_{ey}$ .

Из рис. 5 следует, что одна нелинейность идентифицируема, а вторая нет. Для принятия решения рассмотрим отображение  $\Gamma_{yk} : \{y\} \rightarrow \{k_{ey'}\}$ ,  $k_{ey'} = \frac{e}{y'}$ .  $\Gamma_{yk}$  соответствует структура  $S_{ky}$  (рис. 6).

Из анализа  $S_{ky}$  следует, что нелинейность (обозначим ее  $\varphi_1$ ) доминирует и является иден-

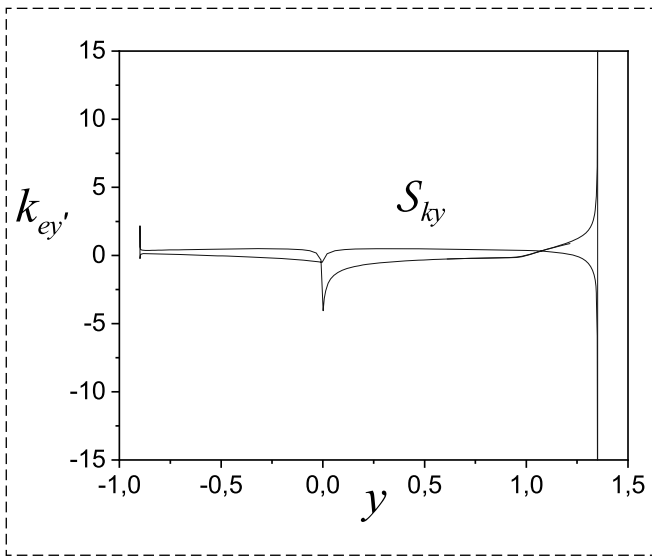


Рис. 6. Структура  $S_{ky}$   
Fig. 6. Framework  $S_{ky}$

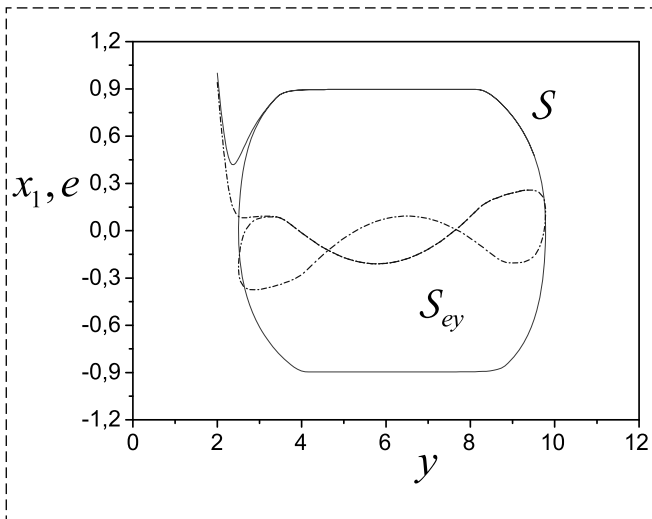


Рис. 7. Структуры  $S, S_{ey}$   
Fig. 7. Frameworks  $S, S_{ey}$

тифицируемой, а нелинейность  $\varphi_2$  неидентифицируема.  $S_{ey}$ -структуру можно представить в виде  $S_{ey} = S_{ey}^{id} \cup \mathcal{N}S_{ey}$ , где  $S_{ey}^{id} = S_{ey}(\varphi_1)$ ,  $\mathcal{N}S_{ey} = S_{ey}(\varphi_2)$ .

**Определение 10.** Система (1), (24) называется частично структурно идентифицируемой или идентифицируемой на уровне  $\varphi_1$  при  $u \notin S$ , если фрагмент  $S_{ey}^{id}$  структуры  $S_{ey} = S_{ey}^{id} \cup S_{ey}(\varphi_2)$  является  $h$ -идентифицируемым, и неидентифицируемой на уровне  $\varphi_2$ , если  $S_{ey}(\varphi_2) = \mathcal{N}S_{ey}$ .

**Определение 11.** Подсистема  $S_\varphi$  системы (1), (24) называется идентифицируемой при  $u \in S$ , если фрагменты  $S_{ey}(\varphi_1)$ ,  $S_{ey}(\varphi_2)$  структуры  $S_{ey} = S_{ey}(\varphi_1) \cup S_{ey}(\varphi_2)$  являются  $h$ -идентифицируемыми.

**Определение 12.** Подсистема  $S_\varphi$  системы (1), (24) называется структурно идентифицируемой при  $u \in S$ , если фрагменты  $S_{ey}(\varphi_1)$ ,  $S_{ey}(\varphi_2)$  структуры  $S_{ey} = S_{ey}(\varphi_1) \cup S_{ey}(\varphi_2)$  являются  $h$ -идентифицируемыми и выполняются условия теоремы 4 для каждого фрагмента  $S_{ey}(\varphi_1)$ ,  $S_{ey}(\varphi_2)$ .

Для оценки идентифицируемости  $S_\varphi$ -системы следует выполнить фрагментацию структуры  $S_{ey}$ , применив операцию сглаживания на множестве определения фрагмента  $S_{ey}(\varphi_1)$ . В результате получим оценку  $\hat{S}_{ey}(\varphi_2)$  структуры  $S_{ey}(\varphi_2)$ . Оценка структуры  $S_{ey}(\varphi_1)$  формируется на основе применения операции  $\hat{S}_{ey}(\varphi_1) = S_{ey} \setminus \hat{S}_{ey}(\varphi_2)$ .

Анализ структурной идентифицируемости системы (1) представляет собой нетривиальную задачу, если нелинейности не удовлетворяют условию (24). В этом случае оценка  $h_{\delta_h}$ -идентифицируемости системы требует расширения подхода, предложенного в предыдущих разделах. Покажем это на примере.

**Пример 2.** Рассмотрим систему, состоящую из нелинейного привода и управляемого объекта. Управляемый объект имеет линейное и квадратичное трение. Привод описывается нелинейной функцией с насыщением. Система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -c_1\varphi_1(x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c\varphi_2(u) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$y = x_1,$$

где  $\varphi_1(x_2) = -c_1x_2^2\text{sign}(x_2)$  — квадратичное трение;  $\varphi_2(u) = \text{sat}(u)$  — сухое трение;  $x = x_1$  — угол поворота вала управляемого объекта;  $u$  — ток возбуждения обмотки привода;  $y$  — выход;  $c_1 = 2$ ,  $c = 1$ .

Для идентификации доступна информация  $I_o = \{u(t), y(t), t = [0, t_k]\}$ ,  $t_k < \infty$ . Пусть  $u(t) = 3\sin(0,1\pi t)$ . Построим структуры  $S, S_{ey}$  (рис. 7).

Применение результатов раздела "Структурная идентифицируемость нелинейной системы" показывает, что система является структурно идентифицируемой. Но принять решение о структуре нелинейностей не удастся. Задача усложняется тем, что вход является нелинейным. Анализ структуры  $S$  показывает, что вход  $\varphi_2(u)$  на интервале  $\bar{J}_y = [4; 8, 5]$  является постоянным и для него не выполняется условие ПВ. Из рис. 7 следует, что можно положить  $\varphi_2(u) = \text{sat}(u)$ . В дальнейшем в качестве рабочего интервала по  $y$  будем использовать

$J_y = [2; 4] \vee [8, 5; 10]$ . С учетом этого можно отметить, что применение модели (4) (структура  $S_{ey}$ ) является неэффективным. Поэтому перейдем к анализу зависимостей  $\dot{x}_2$  от доступных переменных. Анализ показывает, что коэффициенты детерминации между  $\dot{x}_2$  и  $x_2$ ,  $y$  соответственно равны  $r_{x_2\dot{x}_2}^2 = 0,995$ ;  $r_{y\dot{x}_2}^2 = 0,916$ . Поэтому считаем, что существует зависимость между  $\dot{x}_2$  и  $x_2$ . Воспользуемся методом иерархического погружения для уточнения структурных связей [22]. Реализуем следующие этапы.

1. Исключение влияния функции  $\varphi_2(u)$  на  $\dot{x}_2$ . Пусть параметр выхода  $\varphi_2(u)$  в область насыщения равен 1,8, а линейная часть на интервале  $[-1,8; 1,8]$  пропорциональна  $u$ . Обозначим полученную функцию  $\hat{\varphi}_2(u)$ :

$$\hat{\varphi}_2(u) = \begin{cases} 1,8, & \text{если } u > 1,8, \\ u, & \text{если } u \leq 1,8, \\ -1,8, & \text{если } u < -1,8. \end{cases}$$

Математическая модель имеет вид

$$\hat{x}_2 = 0,147\hat{\varphi}_2(u) + 0,433, \quad r_{\hat{\varphi}_2\hat{x}_2}^2 = 0,99. \quad (26)$$

2. Исключение влияния  $y$ . Введем невязку  $\varepsilon = \dot{x}_2 - \hat{x}_2$  и получим модель

$$\hat{\varepsilon} = -0,2038y + 0,933, \quad r_{y\hat{\varepsilon}}^2 = 0,95. \quad (27)$$

3. Введем невязку  $\pi = \varepsilon - \hat{\varepsilon}$  и аппроксимируем ее линейной моделью

$$\hat{\pi}_1 = 0,424x_2 - 0,559, \quad r_{x_2\hat{\pi}_1}^2 = 0,97. \quad (28)$$

Из (28) следует, что модель является адекватной. Для повышения точности аппроксимации  $\pi(t)$  применим модель

$$\hat{\pi}_2 = -0,37|x_2|x_2 - 0,45, \quad r_{|x_2|x_2,\hat{\pi}_2}^2 = 0,97. \quad (29)$$

**Замечание 7.** При реализации метода иерархического погружения на каждом этапе предварительно проверяется условие структурной идентифицируемости получаемой геометрической структуры, прежде чем синтезировать соответствующую модель. Этот этап является предпосылкой для получения адекватной модели.

Итак, проведенный анализ подтверждает возможность структурной идентификации

нелинейной части системы (25) и ее идентифицируемость на интервале  $J_y$ . Показано, что применение модели (4) зависит от структуры системы (структура  $S_{ey}$ ). Поэтому предложить общий подход к выбору структуры модели в общем случае не удастся. Ее вид во многом зависит от специфики рассматриваемой системы. Этот вывод иллюстрирует рассматриваемый пример. Он подтверждает многогранность и сложность рассматриваемой проблемы.

## Заключение

Введено понятие S-синхронизируемости входа. Выполнение условия S-синхронизируемости входа является основой структурной идентифицируемости и структурной идентификации нелинейной системы. Исследовано влияние входа на возможность оценки структурных параметров нелинейности. Введено понятие незначимой структуры и показана его роль в задаче оценки идентифицируемости системы. Получены условия локальной идентифицируемости и неидентифицируемости системы. Введена степень идентифицируемости системы и показана возможность ее оценки в условиях неопределенности. Исследовано влияние условия постоянства возбуждения входа на возможность структурной идентифицируемости системы. Предложен способ вычисления области идентифицируемости в условиях неопределенности. Рассмотрена структурная идентифицируемость системы с двумя нелинейностями. Приведены условия частичной структурной идентифицируемости нелинейной системы с двумя нелинейностями.

## Список литературы

1. Kalman R. E. On the general theory of control systems // Proceeding first IFAC Congress on Automatic Control, Moscow, 1960; Butterworths, London, 1961. Vol. 1. P. 481–492.
2. Lee R. C. K. Optimal estimation, identification, and control. MIT Press, Cambridge, Mass, 1964. 176 p.
3. Elgerd O. I. Control systems theory. N. Y.: McGraw-Hill, 1967. 562 p.
4. Walter E. Identifiability of state space models. Berlin. Germany: Springer-Verlag, 1982. 197 p.
5. Audoly S., D'Angio L., Saccomany M. P., Cobelli C. Global identifiability of linear compartmental models — a computer algebra algorithm // IEEE Trans. Automat. Contr. 1998. Vol. 45. P. 36–47.
6. Авдеенко Т. В. Идентификация линейных динамических систем с использованием концепции сепараторов параметрического пространства // Автоматика и программная инженерия. 2013. № 1(3). С. 16–23.

7. **Бодунов Н. А.** Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. № 2. 137 с.
8. **Балонин Н. А.** Теоремы идентифицируемости. СПб.: Изд-во "Политехника", 2010. 48 с.
9. **Справочник** по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
10. **Stigter J. D., Peeters R. L. M.** On a geometric approach to the structural identifiability problem and its application in a water quality case study // Proceedings of the european control conference 2007 Kos, Greece, July 2–5. 2007. P. 3450–3456.
11. **Chis O.-T., Banga J. R., Balsa-Canto E.** Structural identifiability of systems biology models: a critical comparison of methods // PLOS ONE. Nov. 2011. Vol. 6, Iss. 4. P. 1–16.
12. **Saccomani M. P., Thomaseth K.** Structural vs practical identifiability of nonlinear differential equation models in systems biology. Bringing mathematics to life // Dynamics of mathematical models in biology. Ed. A. Rogato, V. Zazzu, M. Guarracino. Springer. 2010. P. 31–42.
13. **Villaverde A., Barreiro A., Papachristodoulou A.** Structural identifiability of dynamic systems biology models // PLOS Computational Biology. 2016. Vol. 12, N. 10. P. 1–22.
14. **Raue A., Karlsson J., Saccomani M. P., Jirstrand M., Timmer J.** Comparison of approaches for parameter identifiability analysis of biological systems // Bioinformatic. 2014. Vol. 30, N. 10. P. 1440–1448.
15. **Karabutov N.** About structural identifiability of nonlinear dynamic systems under uncertainty // Global journal of science frontier research: A Physics and space science. 2018. Vol. 18, Iss. 11 (vers. 1.0). P. 51–61.
16. **Karabutov N.** Structural identification of dynamic systems with hysteresis // International journal of intelligent systems and applications. 2016. Vol. 8, N. 7. P. 1–13.
17. **Karabutov N.** Structural methods of design identification systems // In Nonlinearity problems, solutions and applications. Vol. 1. Ed. L. A. Uvarova, A. B. Nadykto, A. V. Latyshev. New York. Nova Science Publishers, Inc. 2017. P. 233–274.
18. **Karabutov N.** Structural identification of nonlinear dynamic systems // International journal of intelligent systems and applications. 2015. Vol. 7, N. 9. P. 1–11.
19. **Choquet G.** L'enseignement de la geometrie. Paris: Hermann, 1964. 173 p.
20. **Ismail M., Ikhouane F., Rodellar J.** The hysteresis Bouc-Wen model, a survey // Arch Comput Methods Eng. 2009. Vol. 16. P. 161–188.
21. **Карабутов Н. Н.** S-синхронизация, структурная идентифицируемость и идентификация нелинейных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 6 (2020). С. 323–336.
22. **Карабутов Н. Н.** Структурный анализ и модификации системы с гистерезисом Бука-Вена // Вестник Воронежского государственного технического университета. Т. 16. № 2. 2020. С. 57–64.

## On Role of S-Synchronizability and Excitation Constancy in Structural Identifiability Problem of Nonlinear Systems

N. N. Karabutov, kn22@yandex.ru,

MIREA—Russian Technological University, Moscow, 119454, Russian Federation

Corresponding author: **Karabutov Nikolay N.**, DTS, Professor,  
MIREA—Russian Technological University, Moscow, 119454, Russian Federation,  
e-mail: kn22@yande.ru

Accepted on October 20, 2020

### Abstract

*A class of dynamical systems with a single nonlinearity considered. The S-synchronizability concept of input introduced. It is shown that S-synchronizability is a condition for the structural identifiability of a nonlinear system. The decision-making on structural identifiability based on the properties analysis for a special class of geometric frameworks. Geometric frameworks reflect properties of the nonlinear dynamic system. Requirements for the model allowed us to obtain a geometric structure based on the input and output data considered. The constant excitation effect of input on the structural identifiability of the system is studied. The constant excitation effect of input studied on the structural identifiability of the system. Nonfulfillment the constant excitation condition gives a nonsignificant geometric framework. Various types of structural identifiability based on structure analysis considered. The concept of d-optimality described properties of the geometric structure introduced. Conditions for non-identifiability of nonlinear system structure obtained if the d-optimality of the geometric framework does not hold for the given properties of the input. Methods for estimating identifiability of the system and determining the identifiability area under uncertainty proposed. The proposed approach is generalized to the system having two nonlinearities. Conditions for partial structural identifiability obtained. Structural identifiability features of this class systems noted. The method for estimating the structure of the system proposed when the condition of structural identifiability satisfied. It has shown how the phase portrait used to estimate the system non-identifiability. A method proposed for constructing the structural identifiability domain of the system. Proposed methods and procedures are applied to study systems with Bouc-Wen hysteresis and two nonlinearity.*

**Keywords:** *identifiability, geometric structure, structural identification, S-synchronizability, a system with double nonlinearity, degree of structural non-identifiability.*

For citation:

**Karabutov N. N.** On Role of S-Synchronizability and Excitation Constancy in Structural Identifiability Problem of Nonlinear Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 2, pp. 59–70.

DOI: 10.17587/mau.22.59-70

## References

1. **Kalman R. E.** On the general theory of control systems. *Proceeding first IFAC Congress on Automatic Control, Moscow*, 1960; Butterworths, London, 1961, vol. 1, pp. 481–492.
2. **Lee R. C. K.** Optimal estimation, identification, and control, MIT Press, Cambridge, Mass, 1964. 176 p.
3. **Elgerd O. I.** Control systems theory, N. Y., McGraw-Hill, 1967. 562 p.
4. **Walter E.** Identifiability of state space models, Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1982, 197 p.
5. **Audoly S., D'Angio L., Saccomani M. P., Cobelli C.** Global identifiability of linear compartmental models — a computer algebra algorithm, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1998, vol. 45, pp. 36–47.
6. **Avdeenko T. V.** Identification of linear dynamic systems with use parametrical space separators, *Automatics and Program Engineering*, 2013, no. 1(3), pp. 16–23 (in Russian).
7. **Bodunov N. A.** Introduction to the theory of local parametrical identifiability, *Differential Equations and Management Processes*, 2012, no. 2, 137 p.
8. **Balonin N. A.** *Theorems of identifiability*. St. Petersburg, Politekhnik publishing house, 2010, 49 p.
9. **Reference** book on automatic control theory, Ed. A. A. Krasovskiy, Moscow, Nauka, 1987, 712 p.
10. **Stigter J. D., Peeters R. L. M.** On a geometric approach to the structural identifiability problem and its application in a water quality case study, *Proceedings of the European Control Conference 2007 Kos, Greece, July 2–5, 2007*, pp. 3450–3456.
11. **Chis O.-T., Banga J. R., Balsa-Canto E.** Structural identifiability of systems biology models: a critical comparison of methods, *PLOS ONE*, 2011, vol. 6, iss. 4, pp. 1–16.
12. **Saccomani M. P., Thomaseth K.** Structural vs practical identifiability of nonlinear differential equation models in systems biology. Bringing mathematics to life, *Dynamics of Mathematical Models in Biology*. Ed. A. Rogato, V. Zazzu, M. Guarracino. Springer, 2010, pp. 31–42.
13. **Villaverde A., Barreiro A., Papachristodoulou A.** Structural identifiability of dynamic systems biology models, *PLOS Computational Biology*, 2016, vol. 12, no. 10, pp. 1–22.
14. **Raue A., Karlsson J., Saccomani M. P., Jirstrand M., Timmer J.** Comparison of approaches for parameter identifiability analysis of biological systems, *Bioinformatic*, 2014, vol. 30, no. 10, pp. 1440–1448.
15. **Karabutov N.** About structural identifiability of nonlinear dynamic systems under uncertainty, *Global Journal of Science Frontier Research: A Physics and Space Science*, 2018, vol. 18, iss. 11 (vers. 1.0), pp. 51–61.
16. **Karabutov N.** Structural identification of dynamic systems with hysteresis, *International Journal of Intelligent Systems and Applications*, 2016, vol. 8, no. 7, pp. 1–13.
17. **Karabutov N.** Structural methods of design identification systems. In *Nonlinearity Problems, Solutions and Applications. Vol. 1*. Ed. L. A. Uvarova, A. B. Nadykto, A. V. Latyshev. New York. Nova Science Publishers, Inc. 2017, pp. 233–274.
18. **Karabutov N.** Structural identification of nonlinear dynamic systems. *International Journal of Intelligent Systems and Applications*, 2015, vol. 7, no. 9, pp. 1–11.
19. **Choquet G.** L'enseignement de la geometrie. Paris: Hermann, 1964. 173 p.
20. **Ismail M., Ikhouane F., Rodellar J.** The hysteresis Bouc-Wen model, a survey, *Arch Comput Methods Eng*, 2009, vol. 16, pp. 161–188.
21. **Karabutov N. N.** S-synchronization structural identifiability and identification of nonlinear dynamic systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2020, vol. 21, no. 6 (2020), pp. 323–336.
22. **Karabutov N. N.** Structural analysis and modifications of system with Bouc-Wen hysteresis, *The Bulletin of Voronezh State Technical University*, 2020, vol. 16, no. 2, pp. 57–64.

31 мая – 4 июня 2021 г., ДГТУ, г. Ростов-на-Дону, Россия

Международная научная мультikonференция

## "КИБЕР-ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ: ПРОЕКТИРОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ" "CYBER-PHYSICAL SYSTEMS DESIGN AND MODELLING" (CYBERPHY-2021) (SCOPUS, SPRINGER)

### Секции

1. Cyber-Physical Systems: digital technologies and applications (Кибер-физические системы: цифровые технологии и приложения)
2. Cyber-physical systems: design and application for Industry 4.0 (Кибер-физические системы: проектирование и применение для Индустрии 4.0)
3. Cyber-Physical Systems: Modelling and Intelligent Control (Кибер-физические системы: моделирование и интеллектуальное управление)
4. Society 5.0: Cyberspace for advanced human-centered society (Общество 5.0: киберпространство для развитого общества, ориентированного на человека)

XXXIV Международная научная конференция

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕХНИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ - ММТТ-34 (РИНЦ, DOI)

### Секции

1. Качественные и численные методы исследования дифференциальных и интегральных уравнений
2. Оптимизация, автоматизация и оптимальное управление технологическими процессами
3. Математическое моделирование технологических и социальных процессов
4. Математическое моделирование и оптимизация в задачах САПР, аддитивных технологий, цифрового производства
5. Математические методы в задачах радиотехники, радиоэлектроники и телекоммуникаций, геоинформатики, авионики и космонавтики
6. Математические методы и интеллектуальные системы в робототехнике и мехатронике
7. Математические методы в медицине, биотехнологии и экологии
8. Математические методы в экономике и гуманитарных науках
9. Информационные и интеллектуальные технологии в технике и образовании
10. Математические и инструментальные методы технологий Индустрии 4.0
11. Обсуждение квалификационных работ

Подача заявок на участие с 15 декабря 2020 г.

Подробная информация о конференции и условиях участия в ней размещается на сайте <http://mmtt.sstu.ru/>