

А. С. Девятисильный, д-р техн. наук, проф., devyatis@iacp.dvo.ru,
А. В. Шурыгин, мл. науч. сотр., artem.shurygin@bunjlabs.com,
Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

Математическая модель спутниково-инерциальной подвижной вычислительной гравиметрии

Предлагается математическая модель гибридной системы (ГС) на борту подвижного объекта, представляемой инерциальным измерителем вектора удельных сил — трехкомпонентным ньютонометром с ортогональными осями чувствительности — и сетью позиционируемых приемников навигационной спутниковой системы (НСС). Назначение ГС — темпоральное оценивание напряженности околоземного гравитационного поля на траектории движения объекта.

В рамках механики Ньютона предполагается возможность выбора инерциальной системы отсчета с началом в центре масс Земли; комплементарно стандартам ПЗ-90 (Россия) и WGS-84 (США) вводятся: 1) эллипсоидальная (геодезическая) система координат, жестко связанная с твердой Землей; 2) два подвижных сопутствующих прямоугольных правых координатных трехгранника с общим началом — точкой, движение которой образует траекторию движения объекта; один из этих трехгранников, приборный, жестко связан с объектом как твердым телом и, таким образом, свободно ориентирован, другой, географический, перманентно ориентирован по сторонам света (восток, север, зенит).

При рассмотрении кинематики обращается внимание на тот факт, что изменчивость абсолютной линейной скорости в инерциальном пространстве, объяснимая движением объекта относительно твердой Земли и ее собственным вращением, характеризуется векторами ротаций относительной и переносных скоростей, которые идентифицируют векторы относительной и переносной угловых скоростей вращения недеформируемого географического трехгранника и представлены проекциями на его оси.

Каузальность траектории определена вторым законом Ньютона; в проекциях на оси подвижного географического трехгранника выполнена покомпонентная запись уравнений динамики, разрешенных относительно компонент напряженности гравитационного поля.

Отмечается, что проблеме высокоточной оценки кинематических параметров уравнений движения посвящена предшествующая статья авторов. Показывается, что для прямого вычисления напряженности гравитационного поля требуется транспортировка измерений ньютонометров из приборного трехгранника в географический. Требуемое линейное преобразование для этого конструируется с учетом возможностей мультипозиционирования объекта НСС. Описывается вычислительный эксперимент и приводятся некоторые его результаты.

Ключевые слова: геофизическое поле, гиперзвуковая скорость, ГЛОНАСС, гравиметрия, координатный трехгранник, навигационная спутниковая система, подвижный объект, ротация скорости, тензор вращения, угловая скорость

Введение

Одним из важнейших физических полей в околоземном пространстве является гравитационное поле, что и обуславливает чрезвычайную востребованность представлений о нем при проведении большинства фундаментальных и прикладных исследований.

Настоящая работа определенно базируется на результатах исследований, изложенных в работах [1, 2], и посвящена модели спутниково-инерциальной навигационной системы (СИНС) с функцией оценки напряженности околоземного гравитационного поля, что, в сущности, и отличает ее от рассмотренной в работе [2] системы, ориентированной на решение чисто навигационных задач. Предполагается, что навигационная спутниковая система (НСС) физически представлена бортовой сетью тем-

порального приема данных, обеспечивающих объемное позиционирование (мультипозиционирование) подвижного объекта (ПО), чем обуславливается возможность определения всех необходимых линейных и пространственных угловых параметров движения ПО как твердого тела. Инерциальные же измерители (гироскопы и ньютонометры) представлены только трехкомпонентным блоком ньютонометров, что не характерно для традиционных схем СИНС [3–5], содержащих еще и гироскопические измерители. По существу, рассматриваемая здесь система ориентирована на полное и, что особенно важно подчеркнуть, численное решение задачи гравиметрии; ее применение, в частности, актуально при планировании и выполнении маршрутных заданий подвижными объектами, оснащенными системами навигации по геофизическим полям.

Учитывая преемственность исследований, так же, как и в работах [1, 2], вводится эллипсоидальная (геодезическая) система отсчета с координатами $\{\varphi, \lambda, h\}$ — геодезические широта, долгота и высота над поверхностью опорного эллипсоида; кроме того, вводятся:

а) сопутствующий (подвижный) правый прямоугольный координатный трехгранник $Ox = Ox_1x_2x_3$, начало которого совмещено с текущей точкой (O) траектории движения ПО, а оси ориентированы на восток (ось Ox_1), север (ось Ox_2) и по нормали к поверхности эллипсоида (ось Ox_3);

б) сопутствующий, но свободный (свободно вращающийся) в отличие от Ox , правый прямоугольный координатный трехгранник $Oy = Oy_1y_2y_3$ — приборный трехгранник с осями, соосными осям чувствительности ньютометров и строительным осям ПО.

Материализуя точку O и оставаясь в рамках мира Ньютона [3], для формирования динамики движения точки O обратимся к некоторым аналогиям и образам механики жидкости [6]. Точка O участвует в двух движениях — относительном (к твердой Земле) и переносном, обусловленном собственным вращением Земли с известной угловой скоростью. Тогда ее линейная скорость в абсолютном ньютоновском пространстве с инерциальной системой отсчета с началом в центре масс Земли, т.е. абсолютная скорость $\mathbf{V}$, представима в виде $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_c$, где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_c$ — соответственно векторы относительной и переносной скоростей, пространственная изменчивость которых характеризуется векторами ротаций — $\text{rot}\mathbf{v}$, $\text{rot}\mathbf{v}_c$, $\text{rot}\mathbf{V} = \text{rot}\mathbf{v} + \text{rot}\mathbf{v}_c$, или, эквивалентно, векторами вихрей (завихренностей) — $\boldsymbol{\omega} = 0,5\text{rot}\mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega}_c = 0,5\text{rot}\mathbf{v}_c$, $\boldsymbol{\Omega} = 0,5\text{rot}\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_c$ и соответствующими им кососимметрическими тензорами завихренностей, составляемыми из компонент векторов по правилу $\Omega_{ij} = e_{ijk}\Omega_k$; $i, j, k = 1, 2, 3$, где e_{ijk} — псевдотензор Леви—Чивита. Как видно из определения трехгранника Ox , он является недеформируемым связным трехгранником, поэтому векторы вихрей $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_c$ могут быть идентифицированы как векторы относительной и переносной угловых скоростей вращения ПО как твердого тела и представлены своими проекциями на его оси [6], а именно:

$$\boldsymbol{\omega} = \left(-\frac{v_2}{r_2}, \frac{v_1}{r_1}, \frac{v_1}{r_1} \text{tg}\varphi \right)^T;$$

$$\boldsymbol{\omega}_c = \mathbf{u} = (0, u \cos \varphi, u \sin \varphi)^T,$$

где r_1 и r_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных главных нормальных сечений (касательного к параллели и меридионального), проходящих через оси Ox_1 и Ox_2 [4]; $\mathbf{u}$ — вектор угловой скорости собственного вращения Земли, $|\mathbf{u}| = u$.

Здесь же заметим, что в силу того, что Ox — сопутствующий трехгранник, переносная скорость в проекциях на его оси определяется как

$$v_{c,i} = u_{ij}x_j,$$

где $\mathbf{x} = (0, 0, r_1)^T$, т.е. $\mathbf{v}_c = (u_2r_1, 0, 0)^T$.

Каузальность эволюции абсолютной скорости материальной точки O , или ее динамика, определена вторым законом Ньютона, который в сопутствующем координатном трехграннике Ox записывается в виде следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}} + \widehat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{V} &= \mathbf{F}; \\ \mathbf{F} &= \mathbf{g} + \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)^T$ — напряженность гравитационного поля; $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ — вектор удельных сил негравитационной природы, или кажущееся ускорение [3].

Учитывая цель работы, разрешим уравнения (1) относительно компонент вектора $\mathbf{g}$, т.е.:

$$\begin{aligned} g_1 &= \dot{v}_1 + \frac{v_1}{r_1}(v_3 - v_2 \text{tg}\varphi) - v_2u_3 \left(\frac{r_1}{r_2} + 1 \right) + \\ &+ v_3u_2 + u_2\dot{r}_1 - f_1; \\ g_2 &= \dot{v}_2 + \frac{v_1^2}{r_1} \text{tg}\varphi - 2v_1u_3 + \frac{v_2u_3}{r_2} + u_2u_3r_1 - f_2; \\ g_3 &= \dot{v}_3 - \left(\frac{v_1^2}{r_1} + \frac{v_2^2}{r_2} \right) - 2v_1u_2 - u_2^2r_1 - f_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где $v_3 = \dot{r}_\psi$; r_ψ — радиус кривизны нормального сечения эллипсоида при $h = \text{const}$ в точке O под углом ψ к оси Ox_2 [2,4]; ψ — путевой угол движения.

Заметим, что в процессе выполнения исследований по проблеме высокоточной численной оценки параметров движения (положения, скорости и ее производных) относительно твердой Земли, которым посвящена работа авторов [1], были получены следующие результаты:

- выполнена общая постановка задач и разработаны имитационные модели движения в эллипсоидальной системе координат и модели измерения;
- разработаны математические модели реконструкции параметров траекторий подвижных объектов;

- дана оценка корректности (по Ж. Адамару) математической постановки задачи реконструкции параметров движения при темпоральном позиционировании подвижного объекта навигационной спутниковой системой; разработаны процедуры гарантированной разрешимости задач в условиях конечной точности вычислений и измерений;
- разработан нейроподобный алгоритм динамического обращения калмановского типа;
- разработана методология и подготовлен комплекс исследовательских программ для проведения вычислительных экспериментов.

Эти результаты были использованы в работе [2], а также в вычислительных экспериментах при подготовке настоящей статьи. В таком контексте это означает, что все кинематические параметры траектории, входящие в уравнения (2): $\{v_1, v_2, v_3, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{v}_3, \varphi, r_1, \dot{r}_1, r_2, \dot{r}_2, u_2, u_3\}$, известны и для прямого вычисления значений компонент вектора $\mathbf{g}$ в трехграннике Ox согласно (2) не хватает только темпоральных оценок в Ox вектора $\mathbf{f}$. Вместе с тем последний измеряется в приборном трехграннике Oy , пространственная ориентация которого относительно Ox характеризуется углами Эйлера—Крылова — курса (α), крена (β) и тангажа (θ), являющимися параметрами ортогональной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\alpha, \beta, \theta)$ линейного преобразования вида $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, которая удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\dot{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{q}}_y \mathbf{A} = 0,$$

где $\mathbf{q}_y = (q_{y,i}), i = 1, 2, 3$, — вектор угловой скорости вращения Oy относительно Ox в проекциях на оси Oy ; $\hat{\mathbf{q}} = (q_{ij}), q_{ij} = e_{ikj}q_k, (i, j, k) = 1, 2, 3$, — соответствующий ему тензор вращения.

В силу инвариантности второго закона Ньютона [7] движение материальной точки O может быть представлено в трехграннике Oy в форме, ковариантной (1), а именно:

$$\Phi = \dot{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{U},$$

где $\mathbf{U}$ и $\hat{\mathbf{p}}$ — соответственно вектор линейной скорости и тензор вращения в инерциальном пространстве.

В силу каузальности движения материальной точки O имеет место соотношение $\Phi = \mathbf{A}\mathbf{F}$, или $\dot{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{p}}\mathbf{U} = \mathbf{A}(\dot{\mathbf{V}} + \hat{\Omega}\mathbf{V})$; последнее равенство удовлетворяется тождественно, если $\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{V}$ и $\mathbf{A}\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_y$; действительно, тогда $\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{A}^T(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{q}}_y)\mathbf{A}\mathbf{V} = \dot{\mathbf{V}} + \hat{\Omega}\mathbf{V}$ и $\mathbf{A}^T(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{q}}_y)\mathbf{A} = \hat{\Omega}$,

если $\mathbf{p} - \mathbf{q}_y = \dot{\Omega}_y = \mathbf{A}\dot{\Omega}$. Изложенное объясняет и актуализирует проблему транспортировки векторных измерений и оценок, выполненных в трехграннике Oy , в трехгранник Ox , т.е. определения матрицы $\mathbf{A}$, — вполне решаемую проблему, если в каждом из трехгранников доступны оценки не менее двух одних и тех же неколлинеарных векторов.

В уже упоминаемой выше статье [2], посвященной моделированию системы определения линейных и угловых параметров движения ПО, в качестве одного из векторов при оценке угловых параметров можно было брать вектор $\mathbf{f}$, вычисляемый в Ox согласно системе (1) при известном $\mathbf{g}$, и одновременно с этим измеряемый ньютонометрами в Oy . При решении же задачи гравиметрии, которой главным образом посвящена настоящая работа, такая возможность отсутствует, поэтому для ее решения назначаются дополнительные к точке O (P_0) точки $P_1, P_2, \dots, P_N$ ($N \geq 2$) на ПО с заданными координатами в приборном трехграннике Oy (векторы $\mathbf{y}_1 = \overline{OP}_1, \dots, \mathbf{y}_N = \overline{OP}_N$), позиционируемые НСС в трехграннике Ox (векторы $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$), $N \geq 2$. Матрица $\mathbf{A}$ оценивается путем решения системы уравнений $\{\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N = \mathbf{A}\mathbf{x}_N\}$. При $N = 2$ (при трехпозиционном приеме и обработке информации от НСС — в точках P_0, P_1, P_2) целесообразно пополнить обе системы векторов "виртуальными" членами $\mathbf{z}_y$ и $\mathbf{z}_x$, образуемыми векторными произведениями векторов $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$, в Oy и $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — в Ox , а именно: $\mathbf{z}_{y,i} = e_{ikj}y_{1,k}y_{2,j}$; $\mathbf{z}_{x,i} = e_{ikj}x_{1,k}x_{2,j}$ и, таким образом, решать систему уравнений $\{\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2, \mathbf{z}_y = \mathbf{A}\mathbf{z}_x\}$, нелинейную по искомым параметрам α, β, θ .

Вычислительный эксперимент

Для вычислительного эксперимента, как отмечалось выше, был разработан комплекс программ, включающий программу анализа разрешимости и регуляризации задач динамического обращения [1], имитации измерений и построения оценок решения. Реализация комплекса выполнена на языке *Julia* версии 1.2.0. Визуализация полученного массива данных выполнена с помощью программного пакета *Veusz* версии 3.1.

На рис. 1 представлена обобщенная структура потоков данных процесса при работе проблемно-ориентированного на решение задачи подвижной гравиметрии части программного комплекса на одном временном шаге длительности τ . Соответствующий процесс может повторяться требуемое число раз.



Рис. 1. Структура одной итерации работы программы
Fig. 1. Structure of single iteration of the program

Потоки данных на рис. 1 обозначены следующим образом:

- 1 — модельное время t ;
- 2 — измерения координат $\{\varphi, \lambda, h\}$ точки P_0 ;
- 3 — измерения координат $\{\varphi, \lambda, h\}$ точек P_1, P_2 ;
- 4 — измерения ньютометров;
- 5 — оценки значений $\{v_1, v_2, v_3, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{v}_3, \varphi, r_1, \dot{r}_1, r_2, r_\psi, u_2, u_3\}$;
- 6 — оценка матрицы A ;
- 7 — оценка вектора удельных сил F ;
- 8 — оценка вектора удельных сил f ;
- 9 — оценка напряженности гравитационного поля g .

На рис. 2 и рис. 3, 4 (см. вторую сторону обложки) представлены некоторые результаты вычислительного эксперимента для ПО, движущегося в северном полушарии по вертикальной спирали со скоростью 300 м/с с набором высоты со скоростью 1 м/с. О характере изменчивости удельных сил F и g на траектории (см. рис. 2) с достаточностью свидетельствуют графики их оценок на рис. 3 и 4. Среднеквадратические погрешности (СКП) оценок соответственно равны $\sigma_{F_1} \approx \sigma_{g_1} = 2,6 \cdot 10^{-2}$ м/с²; $\sigma_{F_2} \approx \sigma_{g_2} = 2,7 \cdot 10^{-2}$ м/с²; $\sigma_{F_3} \approx \sigma_{g_3} = 1,2 \cdot 10^{-6}$ м/с². Эксперимент выполнен при СКП позиционирования ГЛОНАСС $\sigma_\varphi = \sigma_\lambda = \sigma_h = 0,17$ м и измерений ньютометров $\sigma_f = 1 \cdot 10^{-8}$ м/с²; соответствующие обоим процессам времена корреляций — $\tau_p = 4,0$ с и

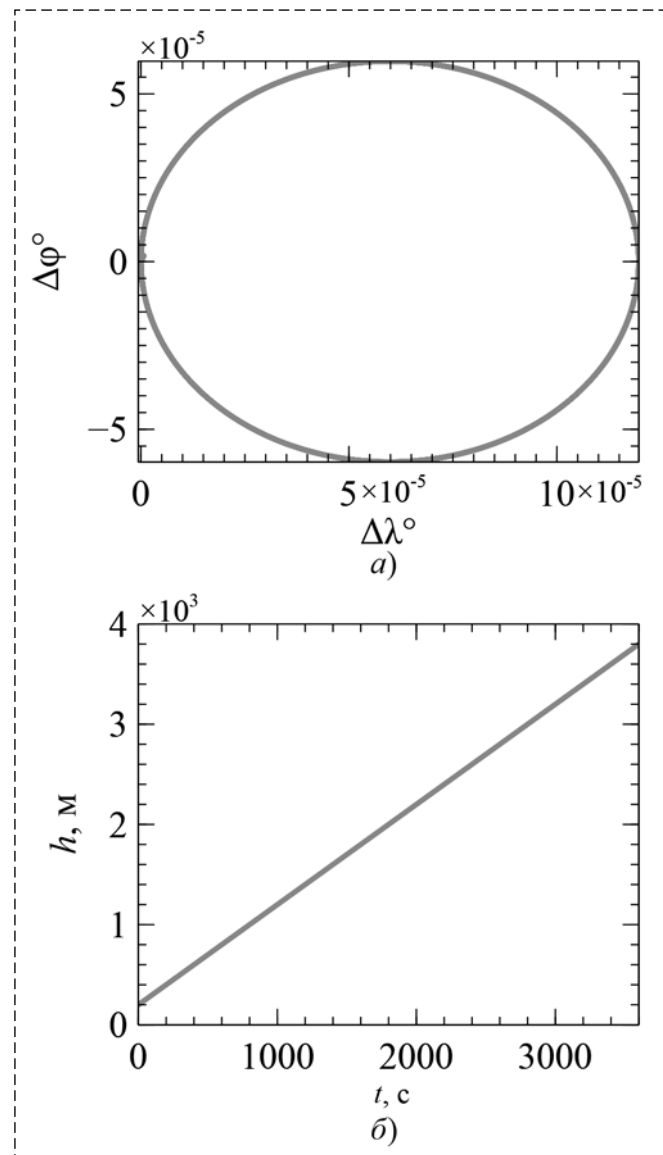


Рис. 2. Элементы траектории движения ПО:

a — широта и долгота ($\varphi = \Delta\varphi + 45^\circ$, $\lambda = \Delta\lambda + 45^\circ$); b — высота

Fig. 2. Movement trajectory elements of movable object:

a — latitude and longitude ($\varphi = \Delta\varphi + 45^\circ$, $\lambda = \Delta\lambda + 45^\circ$); b — height

$\tau_f = 1,5$ с. Данные позиционирования поступают с шагом $\tau = 0,1$ с.

Вычислительные эксперименты показали, что погрешности позиционирования НСС вносят основной вклад в погрешности оценок g . Вместе с тем последние могут быть уменьшены до значений не хуже 10^{-8} м/с² при апостериорной обработке результатов.

Заключение

В целом, как показали выполненные исследования, предложенный и развиваемый, начиная с публикации [1], метод решения некорректной по математической постановке задачи

многократного высокоточного дифференцирования данных темпорального с произвольным шагом τ позиционирования ПО навигационной спутниковой системой вполне себя оправдывает при построении гибридных навигационных систем для ПО широкого скоростного диапазона, включая гиперзвуковые.

Список литературы

1. Девятисильный А. С., Шурыгин А. В., Стоценко А. К. Аналитическое конструирование и численное исследование моделей определения движения на данных ГЛОНАСС //

Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 11. С. 782—787.

2. Девятисильный А. С., Шурыгин А. В. Модель гибридной спутниково-инерциальной навигационной системы неполной структуры // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 12. С. 751—755.

3. Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Едиториал УРСС, 2018. 320 с.

4. Андреев В. Д. Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967. 648 с.

5. Перов А. И., Харисов В. Н. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования. М.: Радиотехника, 2010. 800 с.

6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 823 с.

7. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. М.: Наука, 1997. 320 с.

Mathematical Model of Satellite-Inertial Mobile Computational Gravimetry

A. S. Devyatisilny, devyatis@dvo.ru, A. V. Shurygin, artem.shurygin@bunjlabs.com,

Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, 690041, Russian Federation

Corresponding author: Devyatisilny Aleksandr S., D. Sc., Professor Head of the Navigation and Control Department, Institute of Automation and Control Processes, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, 690041, Russian Federation, e-mail: devyatis@dvo.ru

Accepted on May 25, 2020

Abstract

The article proposes a mathematical model of a hybrid system installed on board of a moving object and represented by an inertial sensor of the vector of specific forces — a three-component newtonometer with orthogonal sensitivity axes and a network of receivers of a navigation satellite system (HSS). The purpose of this hybrid system is the temporal estimations of the near-Earth gravitational field on the trajectory of the object. Within the Newtonian mechanics the possibility of choosing an inertial reference system with a beginning at the center of mass of the Earth is assumed; complementary to the PZ-90 (Russia) and WGS-84 (USA) standards, the following are introduced: 1) an ellipsoidal (geodesic) coordinate system, rigidly connected with the solid Earth; 2) two movable accompanying right-angled trihedrals with a common origin as a point whose movement forms the trajectory of the object; the instrument one, is rigidly connected with the object as a solid body, and is thus freely oriented, other one are geographic, and permanently oriented to the cardinal points (East, North, Zenith). In the presentation of kinematics, attention is drawn to the fact that the variability of the absolute linear velocity in inertial space explained by the motion of an object relative to solid Earth and its own rotation is characterized by rotational vectors of relative and portable velocities which identify the vectors of relative and portable angular rotational velocities of the undeformable geographic trihedron and are represented projections on its axis. The causality of the trajectory is determined by Newton's second law; in projections on the axis of the moving geographic trihedron, component-wise recording of the equations of dynamics is performed, which are resolved with respect to the components of the strength of the gravitational field. It is noted that the previous article by the authors is devoted to the problem of a high-precision estimate of the kinematic parameters of motion equations. In such a context it is indicated that direct calculation of the gravitational field strength requires the converting of Newtonometer measurements from the instrument trihedron to the geographic one. The required linear transformation for this is constructed considering the possibilities of multi-position of the NSS object. A computational experiment is described and some of its results are presented.

Keywords: angular velocity, coordinate trihedron, geophysical field, GLONASS, gravimetry, hypersonic speed, moving object, navigation satellite system, rotation tensor, speed rotation.

For citation:

Devyatisilny A. S., Shurygin A. V. Mathematical Model of Satellite-Inertial Mobile Computational Gravimetry, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 43—47.

DOI: 10.17587/mau.22.43-47

References

1. Devyatisilny A. S., Shurygin A. V., Stotsenko A. K. Analytical Design and Numerical Research of Motion Detection Models Based on GLONASS Data, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 11, pp. 782—787 (in Russian).

2. Devyatisilny A. S., Shurygin A. V. Model of hybrid satellite-inertial navigation system with partial structure, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 12, pp. 751—755 (in Russian).

3. Ishlinskij A. Ju. Classical mechanics and inertial forces, Moscow, Editorial, URSS, 2018, 320 p. (in Russian).

4. Andreev V. D. The theory of inertial navigation. Correctable systems, Moscow, Nauka, 1967, 648 p. (in Russian).

5. Perov A. I., Harisov V. N. GLONASS. Principles of construction and operation, Moscow, Radiotekhnika, 2005, 688 p. (in Russian).

6. Lojcanskij L. G. Fluid and gas mechanics, Moscow, Nauka, 1987, 823 p. (in Russian).

7. Zhuravlev V. F. Fundamentals of Theoretical Mechanics, Moscow, Nauka, 1997, 320 p. (in Russian).