

В. И. Воротников, д-р физ.-мат. наук, проф., vorotnikov-vi@rambler.ru,
Сочинский институт Российского университета дружбы народов,
Ю. Г. Мартышенко, канд. физ.-мат. наук, доц., j-mart@mail.ru,
Российский государственный университет нефти и газа, Москва

Об устойчивости по части переменных нелинейных дискретных систем со случайными параметрами

Рассматривается нелинейная дискретная (конечно-разностная) система уравнений, подверженных воздействию случайного процесса типа "белого" шума, являющаяся разностным аналогом систем стохастических дифференциальных уравнений в форме Ито. Повышенный интерес к таким системам связан с их использованием в цифровых системах управления, в финансовой математике, а также с численным решением систем стохастических дифференциальных уравнений. Задачи устойчивости относятся к основным задачам качественного анализа и синтеза рассматриваемых систем. При этом в основном изучается обладающая большой общностью задача устойчивости нулевого положения равновесия, в рамках которой устойчивость анализируется по отношению ко всем переменным, определяющим состояние системы. Для ее решения разработан дискретно-стохастический вариант метода функций Ляпунова. Центральным здесь является введенное в работах школы Н. Н. Красовского понятие усредненной конечной разности функции Ляпунова, для вычисления которой достаточно знать лишь правые части системы и вероятностные характеристики случайного процесса. В данной работе для рассматриваемого класса систем дается постановка более общей задачи устойчивости нулевого положения равновесия: не по всем, а по заданной части определяющих его переменных. Для случая детерминированных систем обыкновенных дифференциальных уравнений постановка этой задачи восходит к классическим работам А. М. Ляпунова и В. В. Рунянцева. Для решения поставленной задачи используется дискретно-стохастический вариант метода функций Ляпунова при соответствующей конкретизации требований к функциям Ляпунова. В целях расширения возможностей используемого метода наряду с основной функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова.

Ключевые слова: система нелинейных дискретных (конечно-разностных) уравнений, случайные возмущения типа "белого" шума, устойчивость по части переменных, метод функций Ляпунова

Введение

Теория устойчивости систем стохастических дифференциальных уравнений сформировалась в 60-е годы прошлого столетия и опирается на идеи метода функций Ляпунова. Существенный вклад в становление этого метода как основного метода исследования устойчивости нелинейных стохастических систем внесла работа Н. Н. Красовского и И. Я. Каца [1], в которой введено понятие усредненной производной функции Ляпунова, и последовавшие за ней монографии Г. Кушнера [2] и Р. З. Хасьминского [3].

Анализ устойчивости дискретных систем со случайными параметрами и (или) структурой составляет отдельное направление стохастической теории устойчивости. В рамках данного направления разработан дискретно-стохастический вариант метода функций Ляпунова (см. например, работы [2, 4–11]), где центральным является понятие *усредненной конечной разности* функции Ляпунова и рассматривается устойчивость по всем переменным нулевого положения равновесия. Ситуация, когда устойчивость имеет место только по заданной части переменных, практически не исследовалась.

Учитывая, что задачи частичной устойчивости становятся базой многих современных исследований [12–15], в данной статье для класса нелинейных систем дискретных (конечно-разностных) уравнений, подверженных действию дискретного случайного процесса типа "белого" шума, ставится задача устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия.

Для решения этой задачи применяется дискретно-стохастический вариант метода функций Ляпунова. Необходимые дополнения и изменения включают: 1) конкретизацию требований к функциям Ляпунова, соответствующих предложенной постановке задачи; 2) наряду с основной функцией Ляпунова рассматривается дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова.

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейное действительное конечномерное пространство векторов x с нормой $|x| = \max |x_i|$ (x_i — i -я компонента вектора x).

Введем разбиение $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T$ (индекс "Т" обозначает транспонирование). Обозначим $\mathbb{Z}_+ = \{k = 0, 1, 2, \dots\}$ множество целых неотрицательных чисел.

Пусть дана нелинейная система стохастических дискретных (конечно-разностных) уравнений

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k)) + \boldsymbol{\sigma}(k, \mathbf{x}(k))\xi(k),$$

$$\mathbf{X}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0},$$

в которой $k \in \mathbb{Z}_+$ — дискретное время; $\mathbf{x}(k)$ — n -мерный фазовый вектор, определяющий текущее состояние системы; $\xi(k)$ — m -мерный случайный вектор внешних воздействий, заданный на стандартном вероятностном пространстве с вероятностной мерой $\mathbf{P}$; $\mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k))$, $\boldsymbol{\sigma}(k, \mathbf{x}(k))$ — соответственно n -мерная вектор-функция и матричная функция размера $(n \times m)$. Компоненты $\xi_i(k, \omega)$ — реализации случайного процесса $\xi(k)$ — предполагаются независимыми случайными величинами с одинаковыми законами распределения; $\mathbf{E}[\xi_i(k)] = 0$, $\mathbf{E}[\xi_i^2(k)] = 1$, $\mathbf{E}$ — оператор математического ожидания.

С учетом сделанного разбиения $\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T$ представим рассматриваемую систему в виде двух групп уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k+1) &= \mathbf{Y}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) + \boldsymbol{\sigma}_y(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k))\xi(k); \\ \mathbf{z}(k+1) &= \mathbf{Z}(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k)) + \boldsymbol{\sigma}_z(k, \mathbf{y}(k), \mathbf{z}(k))\xi(k), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, $\boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\sigma}_z$ — векторные и матричные функции соответствующих размеров.

Будем считать, что вектор-функция $\mathbf{X} = (\mathbf{Y}^T, \mathbf{Z}^T)^T$ и матричная функция $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_y^T, \boldsymbol{\sigma}_z^T)^T$, определяющие правые части системы (1), при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ и всех ξ непрерывны по $\mathbf{x}$ в области $|\mathbf{x}| < \infty$.

Тогда [7, 9] для всех $k_0 \geq 0$ и каждого детерминированного значения $\mathbf{x}_0$ существует единственный случайный многомерный марковский процесс, являющийся в пространстве $\{\mathbf{x}, \xi\}$ случайной вектор-функцией $\{\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0), \xi(k, \xi_0)\}$, реализации $\{\mathbf{x}(k, \omega) = \mathbf{x}(k, \omega; k_0, \mathbf{x}_0), \xi(k, \omega) = \xi(k, \omega; \xi_0)\}$ которой удовлетворяют системе (1). Данный случайный процесс и соответствующий ему набор реализаций случайной вектор-функции определяют решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(k_0; k_0, \mathbf{x}_0)$, $\xi_0 = \xi(k_0; \xi_0)$; это решение является глобально продолжимым (определено при всех $k \geq k_0$).

Чтобы сделать рассматриваемые понятия устойчивости по части переменных положения равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ более содержательными, представим компоненту $\mathbf{z}$ вектора $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1^T, \mathbf{z}_2^T)^T$ и обозначим D_δ — область значений $\mathbf{x}_0$ таких, что $|\mathbf{y}_0| < \delta$, $|\mathbf{z}_{10}| \leq L$, $|\mathbf{z}_{20}| < \infty$.

Определения. Положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$:

1) *у-устойчиво по вероятности*, если для каждого $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, k_0) > 0$ такое, что для всех $k \geq k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{k \geq k_0} |\mathbf{y}(k; k_0, \mathbf{x}_0)| > \varepsilon \right\} < \gamma; \quad (2)$$

2) *равномерно у-устойчиво*, если $\delta = \delta(\varepsilon, \gamma, L)$.

Замечание 1. В определениях 1)–2) значение $\mathbf{x}_0$ предполагается детерминированным. Однако можно показать (см. например, работу [16]), что если $\mathbf{x}_0$ — случайная величина (не зависящая от $\xi(k)$), и включение $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$ выполняется почти наверное (с вероятностью 1), то получаем определения, эквивалентные введенным определениям частичной устойчивости.

Замечание 2. Наиболее близкими к введенным являются понятия устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ систем стохастических дифференциальных уравнений [17, 18]: понятие *у-устойчивости*, в котором $|\mathbf{y}_0| < \delta$, $|\mathbf{z}_0| < \infty$, где δ может зависеть не только от ε , k_0 , но и от $\mathbf{z}_0$ [17] (в этом случае неравенства $|\mathbf{y}_0| < \delta$, $|\mathbf{z}_0| < \infty$ эквивалентны неравенствам $|\mathbf{y}_0| < \delta$, $|\mathbf{z}_0| < L$), а также более общее понятие *у-устойчивости* [18], предполагающее включение $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Мотивацией к разделению вектора $\mathbf{z}_0$ на две части (в виде $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_{10}^T, \mathbf{z}_{20}^T)^T$) и переход от условия $|\mathbf{z}_0| < \infty$ к условиям $|\mathbf{z}_{10}| \leq L$, $|\mathbf{z}_{20}| < \infty$ является поиск компромисса между содержательным смыслом понятия частичной устойчивости и требованиями к функциям Ляпунова.

Задача. Найти условия *у-устойчивости* (при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$) по вероятности положения равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) в контексте метода функций Ляпунова.

Поставленная задача представляет интерес как задача анализа системы (1), но может использоваться и для решения задачи стабилизации по части переменных положения равно-

весия этой системы посредством приложения соответствующих управляющих воздействий. Кроме того, указанная задача может рассматриваться также как *вспомогательная* при анализе устойчивости по всем переменным нулевого положения равновесия системы (1).

2. Условия устойчивости по части переменных

Для решения поставленной задачи будем рассматривать однозначные непрерывные по $\mathbf{x}$ при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ вспомогательные скалярные функции $V = V(k, \mathbf{x})$, $V(k, \mathbf{0}) \equiv 0$, определенные в области

$$|\mathbf{y}| < h, |\mathbf{z}| < \infty. \quad (3)$$

Аналогом производных этих функций в силу исследуемой системы (1) являются их усредненные разности (приращения), вычисляемые по формуле [4, 7]

$$\begin{aligned} LV(k, \mathbf{x}) = \\ = \mathbf{E}[V(k+1, \mathbf{X}^*(k, \mathbf{x}(k), \xi(k))) | \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}] - V(k, \mathbf{x}), \\ \mathbf{X}^*(k, \mathbf{x}(k), \xi(k)) = \mathbf{X}(k, \mathbf{x}(k)) + \sigma(k, \mathbf{x}(k))\xi(k), \end{aligned}$$

где $\mathbf{E}[V(k+1, \mathbf{X}^*(k, \mathbf{x}(k), \xi(k))) | \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}]$ — условное математическое ожидание при $\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}$ случайной величины $V(k+1, \mathbf{X}^*(k, \mathbf{x}(k), \xi(k)))$, порожденной реализациями $\{\mathbf{x}(k, \omega), \xi(k, \omega)\}$ процесса $\{\mathbf{x}(k), \xi(k)\}$.

Также для формулировки условий частичной устойчивости дополнительно будут использоваться следующие вспомогательные функции:

1) скалярные непрерывные при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ в области (3) функции $V^*(k, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$, $V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1)$ и вспомогательная векторная функция $\mu(k, \mathbf{x})$, $\mu(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$;

2) непрерывная монотонно возрастающая по $r > 0$ скалярная функция $a(r)$, $a(0) = 0$ (функция типа Хана [12, 13]).

Теорема 1. Пусть для системы (1) наряду с основной скалярной V -функцией можно указать дополнительную векторную функцию $\mu(k, \mathbf{x})$, $\mu(k, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$, для которых при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ и достаточно малом $h_1 > 0$ в области

$$|\mathbf{y}| + |\mu(k, \mathbf{x})| < h_1 < h, |\mathbf{z}| < \infty \quad (4)$$

выполняются условия

$$V(k, \mathbf{x}) \geq a(|\mathbf{y}| + |\mu(k, \mathbf{x})|), \quad (5)$$

$$V(k, \mathbf{x}) \leq V^*(k, \mathbf{y}, \mathbf{z}_1), V^*(k, \mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0, \quad (6)$$

$$LV(k, \mathbf{x}) = \mathbf{E}[V(k+1, \mathbf{X}^*(k, \mathbf{x}(k), \xi(k))) | \mathbf{x}(k) = \mathbf{x}] - V(k, \mathbf{x}) \leq 0. \quad (7)$$

Тогда положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) $\mathbf{y}$ -устойчиво по вероятности при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство. Возьмем произвольное число ε ($0 < \varepsilon < h_1$) и выберем начальную точку $\mathbf{x}_0$ из области $D_\varepsilon = \{|\mathbf{y}_0| < \varepsilon, |\mathbf{z}_{10}| \leq L, |\mathbf{z}_{20}| < \infty\}$. Рассмотрим случайный процесс $\mathbf{x}(k; t_0, \mathbf{x}_0)$ и обозначим τ_ε — "целочисленный" момент первого достижения этим процессом поверхности $|\mathbf{y}| = \varepsilon$. Если некоторые траектории этого процесса ни за какое конечное время не достигают поверхности $|\mathbf{y}| = \varepsilon$, то для них τ_ε считаем равным ∞ . Положим $\tau(k) = \min(\tau_\varepsilon, k)$; $\tau(k_0) = k_0$.

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)) - V(k_0, \mathbf{x}_0) = \\ = V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)) - \\ - V(\tau(k-1), \mathbf{x}(\tau(k-1); k_0, \mathbf{x}_0)) + \\ + V(\tau(k-1), \mathbf{x}(\tau(k-1); k_0, \mathbf{x}_0)) - \\ - V(\tau(k-2), \mathbf{x}(\tau(k-2); k_0, \mathbf{x}_0)) + \\ \dots \\ + V(\tau(k_0+1), \mathbf{x}(\tau(k_0+1); k_0, \mathbf{x}_0)) - V(k_0, \mathbf{x}_0) = \\ = \sum_{s=k_0}^{k-1} \Delta V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)); \\ \Delta V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)) = \\ = V(\tau(s+1), \mathbf{x}(\tau(s+1); k_0, \mathbf{x}_0)) - V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)). \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что для последовательности $v(k)$ случайных величин $v(k) = V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0))$, порожденных реализациями $\{\mathbf{x}(k, \omega), \xi(k, \omega)\}$ случайного процесса $\{\mathbf{x}(k), \xi(k)\}$, определяемого системой (1), имеют место "усредненные" соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)) - V(k_0, \mathbf{x}_0)] = \\ = \mathbf{E}V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)) - V(k_0, \mathbf{x}_0) = \\ = \sum_{s=k_0}^{k-1} \mathbf{E}\Delta V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)). \end{aligned}$$

Учитывая равенства (полученные с учетом правила вычисления повторного математического ожидания)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\Delta V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))] = \\ = \mathbf{E}[V(\tau(s+1), \mathbf{X}^*(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0), \xi(\tau(s))) - \\ - V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}\{\mathbf{E}[V(\tau(s+1), \mathbf{X}^*(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s), \xi(\tau(s)) \mid \mathbf{x}(\tau(s)) = \\
&= \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0)))] - \mathbf{E}[V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))] = \\
&= \mathbf{E}\{\mathbf{E}[V(\tau(s+1), \mathbf{X}^*(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s), \xi(\tau(s))) \mid \mathbf{x}(\tau(s)) = \\
&= \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))] - V(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))\} = \\
&= \mathbf{E}[LV(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))],
\end{aligned}$$

приходим к соотношению [7], представляющему дискретный вариант формулы Дынкина:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)) - V(k_0, \mathbf{x}_0) = \\
&= \sum_{s=k_0}^{k-1} \mathbf{E}[LV(\tau(s), \mathbf{x}(\tau(s); k_0, \mathbf{x}_0))].
\end{aligned}$$

В результате на основании условия (7) получаем неравенство

$$\mathbf{E}V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)) \leq V(k_0, \mathbf{x}_0) < \infty. \quad (8)$$

Если справедливо неравенство $k > \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau(k) = \tau_\varepsilon$), то выполняются соотношения $|\mathbf{y}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0)| = |\mathbf{y}(\tau_\varepsilon; k_0, \mathbf{x}_0)| = \varepsilon$. Если же справедливо неравенство $k < \tau_\varepsilon$ (в этом случае имеем $\tau(k) = k$), то на основании неравенства Чебышева—Маркова и оценки (8) находим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}[|\mathbf{y}(k; k_0, \mathbf{x}_0)| > \varepsilon] \leq \\
&\leq a^{-1}(\varepsilon) \mathbf{E}[a(|\mathbf{y}(k; k_0, \mathbf{x}_0)|)] \leq \\
&\leq a^{-1}(\varepsilon) \mathbf{E}[a(|\mathbf{y}(k; k_0, \mathbf{x}_0)| + \\
&\quad + |\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))|)] \leq \\
&\leq a^{-1}(\varepsilon) \mathbf{E}[V(k, \mathbf{x}(k; k_0, \mathbf{x}_0))] = \\
&= a^{-1}(\varepsilon) \mathbf{E}[V(\tau(k), \mathbf{x}(\tau(k); k_0, \mathbf{x}_0))] \leq \\
&\leq a^{-1}(\varepsilon) V(k_0, \mathbf{x}_0).
\end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку функция $V(k, \mathbf{x})$ непрерывна, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, а также выполняются неравенства (8), то для всех $k_0 \geq 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение

$$\lim_{y_0 \rightarrow \mathbf{0}} V(k_0, \mathbf{x}_0) = 0 \quad (10)$$

выполняется при $|\mathbf{z}_{10}| \leq L$ равномерно по $|\mathbf{z}_{20}| < \infty$.

Поэтому для всех $k_0 \geq 0$ и для любого заданного числа $L > 0$ на основании неравенств (9), (10) имеем предельное соотношение

$$\lim_{y_0 \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{P} \left[\lim_{k > k_0} |\mathbf{y}(k; t_0, \mathbf{x}_0)| > \varepsilon \right] = 0,$$

выполняющееся при $|\mathbf{z}_{10}| \leq L$ равномерно по $|\mathbf{z}_{20}| < \infty$.

В результате для каждого $k_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon, \gamma, L, k_0) > 0$ такое, что неравенство (2) имеет место для всех $k \geq k_0$ и

$\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) у-устойчиво по вероятности. Теорема доказана.

Теорема 2. Если условия (6) заменить условиями

$$V(k, \mathbf{x}) \leq V^*(\mathbf{y}, \mathbf{z}_1), \quad V^*(\mathbf{0}, \mathbf{z}_1) \equiv 0, \quad (11)$$

то положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно у-устойчиво по вероятности при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$.

Доказательство. При выполнении условий (11) для любого заданного числа $L > 0$ предельное соотношение (10) выполняется при $|\mathbf{z}_{10}| \leq L$ равномерно не только по $|\mathbf{z}_{20}| < \infty$, но и по $k_0 \geq 0$. В результате для каждого $k_0 \geq 0$ и для любых сколь угодно малых чисел $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, а также для любого наперед заданного числа $L > 0$ найдется не зависящее от k_0 число $\delta(\varepsilon, \gamma, L) > 0$ такое, что неравенство (2) имеет место для всех $k \geq k_0$ и $\mathbf{x}_0 \in D_\delta$. Следовательно, при больших значениях $\mathbf{z}_{10}$ в целом по $\mathbf{z}_{20}$ положение равновесия $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}$ системы (1) равномерно у-устойчиво по вероятности. Теорема доказана.

Замечание 3. Вспомогательная V -функция и ее приращение в силу системы (1) в теоремах 1, 2 при каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ являются, вообще говоря, знакопеременными функциями в области (3), которая обычно рассматривается при анализе у-устойчивости. Наряду с основной V -функцией дополнительная вспомогательная векторная $\boldsymbol{\mu}$ -функция вводится для наиболее рациональной замены области (3) областью (4). При этом в рамках предложенного подхода используемые вспомогательные нелинейные V -функции могут быть построены как знакоопределенные квадратичные формы $V(k, \mathbf{x}) \equiv V^*(k, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}))$ переменных $\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}$.

Замечание 4. В случае $\boldsymbol{\mu}(k, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}$, $\xi(k) \equiv \mathbf{0}$, $|\mathbf{x}_0| < \delta$ при выполнении условий (5), (7) (условие (6) не требуется) имеем дискретный вариант классической теоремы В. В. Румянцева [12] об устойчивости по части переменных. В случае $\xi(k) \equiv \mathbf{0}$ теорема 1 переходит в дискретные варианты [19, 20] соответствующих теорем об устойчивости по части переменных детерминированных систем дифференциальных уравнений из работ [21—23].

Замечание 5. Устойчивость по части переменных нулевого положения равновесия систем стохастических дискретных уравнений рассмотрена также в работах [24, 25], где используются

другие понятия устойчивости и методы исследования. Кроме того, в ряде работ (см. например, [26–34]) исследуется задача устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия нелинейных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито (в том числе и для систем со случайной структурой).

4. Пример

Пусть дискретная система (1) состоит из уравнений

$$\begin{aligned} y_1(k+1) &= \frac{1}{2} y_1(k) + z_1(k) z_2(k) + a y_1(k) x_1(k), \\ z_1(k+1) &= \left[\frac{1}{2} - y_1(k) z_1(k) z_2(k) \right] z_2(k), \\ z_2(k+1) &= [1 + 2 y_1(k) z_1(k) z_2(k)] z_1(k), \\ \mathbf{E}[\xi_1(k)] &= 0, \mathbf{E}[\xi_1^2(k)] = 1, a = \text{const}. \end{aligned} \quad (12)$$

Наряду с основной V -функцией

$$V(\mathbf{x}) = y_1^2 + 2 z_1^2 z_2^2 \quad (13)$$

также рассмотрим вспомогательную функцию $\mu_1(\mathbf{z}) = z_1 z_2$.

Для V -функции (13) в области (4) выполняются условия (5) и (11).

При каждом $k \in \mathbb{Z}_+$ в области (4) усредненная разность (приращение) $\mathbf{L}V$ выбранной V -функции (13) в силу системы (12) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}V(\mathbf{x}) &= \mathbf{E} \left[\left(\frac{1}{2} y_1(k) + z_1(k) z_2(k) + a y_1(k) x_1(k) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 z_1^2(k) z_2^2(k) \left(\frac{1}{2} - y_1(k) z_1(k) z_2(k) \right)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 + 2 y_1(k) z_1(k) z_2(k))^2 | \mathbf{x}(k) = \mathbf{x} \right] - y_1^2 - 2 z_1^2 z_2^2 = \\ &= \frac{1}{4} y_1^2 + y_1 z_1 z_2 + z_1^2 z_2^2 + a^2 y_1^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} z_1^2 z_2^2 - 4 y_1^2 z_1^4 z_2^4 + 8 y_1^4 z_1^6 z_2^6 - y_1^2 - 2 z_1^2 z_2^2 = \\ &= \left(a^2 - \frac{3}{4} \right) y_1^2 + y_1 \mu_1 - \frac{1}{2} \mu_1^2 - 4 y_1^2 \mu_1^4 + 8 y_1^4 \mu_1^6. \end{aligned}$$

Если выполняется условие $a^2 < \frac{1}{4}$, то для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ при достаточно малом $h_1 > 0$ в области (4) (но не в области (3)) имеет место оценка $\mathbf{L}V(\mathbf{x}) \leq 0$.

На основании теоремы 2 положение равновесия $y_1(k) = z_1(k) = z_2(k) = 0$ системы (12) при больших значениях z_{10} в целом по z_{20} равномерно y_1 -устойчиво по вероятности.

Заключение

Для нелинейной системы стохастических дискретных (конечно-разностных) уравнений, подверженных действию дискретного случайного процесса типа "белого" шума, поставлена задача устойчивости по заданной части переменных нулевого положения равновесия.

Даны достаточные условия разрешимости этой задачи в контексте дискретно-стохастического варианта метода функций Ляпунова в соответствующей модификации. Наряду с основной функцией Ляпунова использована дополнительная (векторная, вообще говоря) вспомогательная функция для корректировки области, в которой строится основная функция Ляпунова. Целесообразность такого подхода заключается в том, что в результате основная V -функция Ляпунова, а также ее усредненное приращение в силу рассматриваемой системы, могут быть знакопеременными.

Список литературы

1. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, Вып. 5. С. 809–823.
2. Кушнер Г. Дж. Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969. 200 с.
3. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 368 с.
4. Ахметкалиев Т. О связи между устойчивостью стохастических систем разностных и дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1, № 8. С. 1016–1026.
5. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971. 309 с.
6. Константинов В. М. Об устойчивости стохастических разностных систем // Проблемы передачи информации. 1970. Т. 6, Вып. 1. С. 81–86.
7. Пакшин П. В. Дискретные системы со случайными параметрами и структурой. М.: Физматлит, 1994. 304 с.
8. Ажмяков В. В., Пятницкий Е. С. Нелокальный синтез систем стабилизации дискретных стохастических объектов управления // Автоматика и телемеханика. 1994. № 2. С. 68–78.
9. Барабанов И. Н. Построение функций Ляпунова для дискретных систем со случайными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1995. № 11. С. 31–41.
10. Jian X. S., Tian S. P., Zhang T. L., Zhang W. H. Stability and Stabilization of Nonlinear Discrete-Time Stochastic Systems // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2019. Vol. 29, N. 18. P. 6419–6437.
11. Qin Y., Cao M., Anderson B. D. O. Lyapunov Criterion for Stochastic Systems and its Applications in Distributed Computation // IEEE Trans. Autom. Control. 2020. Vol. 65, N. 2. P. 546–560.

12. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 256 с.
13. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный Мир, 2001. 320 с.
14. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
15. Воротников В. И. Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3—59.
16. Mao X. R. Stochastic Differential Equations. 2 ed. Oxford: Woodhead Publ., 2008. 440 p.
17. Rajputrohit T., Haddad W. M. Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control for Stochastic Dynamical Systems // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. 2017. Vol. 139, N. 9. Paper DS-15-1602.
18. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. К задаче частичной устойчивости по вероятности нелинейных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2019. № 5. С. 86—98.
19. Haddad W. M., Chellaboina V. Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach. Princeton: Princeton University Press, 2008. 976 p.
20. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. К задаче частичной устойчивости нелинейных дискретных систем // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2017. Т. 18, № 6. С. 371—375.
21. Воротников В. И. Об устойчивости и устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия нелинейных динамических систем // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 3. С. 332—337.
22. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. К теории частичной устойчивости нелинейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. Т. 51, Вып. 5. С. 23—31.
23. Воротников В. И., Мартышенко Ю. Г. Об устойчивости по части переменных "частичных" положений равновесия систем с последствием // Математические заметки. 2014. Т. 96, Вып. 4. С. 496—503.
24. Юдаев Г. С. Об устойчивости стохастических разностных систем // Изв. Вузов. Математика. 1979. № 8. С. 74—78.
25. Phillis Y. A. γ -Stability and Stabilization in the Mean of Discrete-Time Stochastic Systems // Int. J. Control. 1984. Vol. 40, N. 1. P. 149—160.
26. Шаров В. Ф. Устойчивость и стабилизация стохастических систем по отношению к части переменных // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 63—71.
27. Vorotnikov V. I. Partial Stability and Control. Boston: Birkhauser, 1998. 448 p.
28. Ignatyev O. Partial Asymptotic Stability in Probability of Stochastic Differential Equations // Statistics & Probability Letters. 2009. Vol. 79, N. 5. P. 597—601.
29. Зуев А. Л., Игнатьев А. О., Ковалев А. М. Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. Киев: Наукова Думка, 2013. 430 с.
30. Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H. Stability in Mean of Partial Variables for Stochastic Reaction—Diffusion Systems with Markovian Switching // J. of the Franklin Institute. 2014. Vol. 351, N. 1. P. 500—512.
31. Socha L., Zhu Q. X. Exponential Stability with Respect to Part of the Variables for a Class of Nonlinear Stochastic Systems with Markovian Switching // Math. Comp. Simul. 2019. Vol. 155. P. 2—14.
32. Socha L. Stability and Positivity with Respect to Part of the Variables for Positive Markovian Jump Systems // Bull. Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. 2019. Vol. 67, N. 4. P. 769—775.
33. Sultanov O. Capture into Parametric Autoresonance in the Presence of Noise // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2019. Vol. 75. P. 14—21.
34. Zuyev A., Vasylieva I. Partial Stabilization of Stochastic Systems with Application to Rotating Rigid Bodies // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52, N. 16. P. 162—167.

On Stability with Respect to a Part of the Variables for Nonlinear Discrete-Time Systems with a Random Disturbances

V. I. Vorotnikov, vorotnikov-vi@rambler.ru,

Sochi Institute of the Peoples' Friendship University of Russia, Sochi, 354340, Russian Federation,

Yu. G. Martyshenko, j-mart@mail.ru,

Russian State University of Oil and Gas, Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: Vorotnikov Vladimir I., Doctor Sci. (Phys.&Math.), Professor, Sochi Institute of the Peoples' Friendship University of Russia, Sochi, 354340, Russian Federation, e-mail: vorotnikov-vi@rambler.ru

Accepted on September 25, 2020

Abstract

Nonlinear discrete (finite-difference) system of equations subject to the influence of a random disturbances of the "white" noise type, which is a difference analog of systems of stochastic differential equations in the Ito form, is considered. The increased interest in such systems is associated with the use of digital control systems, financial mathematics, as well as with the numerical solution of systems of stochastic differential equations. Stability problems are among the main problems of qualitative analysis and synthesis of the systems under consideration. In this case, we mainly study the general problem of stability of the zero equilibrium position, within the framework of which stability is analyzed with respect to all variables that determine the state of the system. To solve it, a discrete-stochastic version of the method of Lyapunov functions has been developed. The central point here is the introduction by N. N. Krasovskii, the concept of the averaged finite difference of a Lyapunov function, for the calculation of which it is sufficient to know only the right-hand sides of the system and the probabilistic characteristics of a random process. In this paper, for the class of systems under consideration, a statement of a more general problem of stability of the zero equilibrium position is given: not for all, but for a given part of the variables

defining it. For the case of deterministic systems of ordinary differential equations, the formulation of this problem goes back to the classical works of A. M. Lyapunov and V. V. Rumyantsev. To solve the problem posed, a discrete-stochastic version of the method of Lyapunov functions is used with a corresponding specification of the requirements for Lyapunov functions. In order to expand the capabilities of the method used, along with the main Lyapunov function, an additional (vector, generally speaking) auxiliary function is considered for correcting the region in which the main Lyapunov function is constructed.

Keywords: nonlinear stochastic discrete-time (difference) systems, partial stability, Lyapunov functions method

For citation:

Vorotnikov V. I., Martysenko Yu. G. On Stability with Respect to a Part of the Variables for Nonlinear Discrete-Time Systems with a Random Disturbances, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2021, vol. 22, no. 1, pp. 12–18.

DOI: 10.17587/mau.22.12-18

References

1. **Kats I. Ya., Krasovskii N. N.** On the Stability of Systems with Random Parameters, *J. Appl. Math. Mech.*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1225–1246 (in Russian).
2. **Kushner H. J.** Stochastic Stability and Control, New York, Acad. Press, 1967. 161 p. (in Russian).
3. **Khasminskii R. Z.** Stochastic Stability of Differential Equations, Berlin, Springer-Verlag, 2012, 360 p. (in Russian).
4. **Ahmetkaliev T.** Connection Between Stability of Stochastic Difference Equations and Stochastic Differential Equations, *Differential Equations*, 1965, vol. 1, no. 8, pp. 790–798 (in Russian).
5. **Halanay A., Wexler D.** Qualitative Theory of Impulsive Systems, Bucharest, Ed. Acad. RPR, 1968. 312 p. (in Russian).
6. **Konstantinov V. M.** The stability of Stochastic Difference Equations, *Problems of Information Transmission*, 1970, vol. 6, no. 1, pp. 70–75 (in Russian).
7. **Pakshin P. V.** Discrete Systems with a Random Parameters and Structure, Moscow, Fizmatlit, 1994, 304 p. (in Russian).
8. **Azhmyakov V. V., Pyatnitskiy E. S.** Nonlocal Synthesis of Systems for Stabilization of Discrete Stochastic Controllable Objects, *Autom. Remote Control*, 1994, vol. 55, no. 2, pp. 202–210.
9. **Barabanov I. N.** Construction of Lyapunov Functions for Discrete Systems with Stochastic Parameters, *Autom. Remote Control*, 1995, vol. 56, no. 11, pp. 1529–1537.
10. **Jian X. S., Tian S. P., Zhang T. L., Zhang W. H.** Stability and Stabilization of Nonlinear Discrete-Time Stochastic Systems, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 2019, vol. 29, no. 18, pp. 6419–6437.
11. **Qin Y., Cao M., Anderson B. D. O.** Lyapunov Criterion for Stochastic Systems and its Applications in Distributed Computation, *IEEE Trans. Autom. Control*, 2020, vol. 65, no. 2, pp. 546–560.
12. **Rumyantsev V. V., Oziraner A. S.** Stability and Stabilization of Motion with Respect to a Part of the Variables, Moscow, Nauka, 1987, 256 p. (in Russian).
13. **Vorotnikov V. I., Rumyantsev V. V.** Stability and Control with Respect to a Part of the Phase Coordinates of Dynamic Systems: Theory, Methods and Applications, Moscow, Nauchnyj mir, 2001, 320 p. (in Russian).
14. **Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.** Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1999, 528 p.
15. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects, *Automation and Remote Control*, 2005, vol. 66, no. 4, pp. 511–561.
16. **Mao X. R.** Stochastic Differential Equations, Oxford, Woodhead Publ., 2008. 440 p.
17. **Rajpurohit T., Haddad W. M.** Partial-State Stabilization and Optimal Feedback Control for Stochastic Dynamical Systems, *J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2017, vol. 139, no. 9, Paper DS-15-1602.
18. **Vorotnikov V. I., Martysenko Y. G.** On the Partial Stability in Probability of Nonlinear Stochastic Systems, *Autom. Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 5, pp. 856–866.
19. **Haddad W. M., Chellaboina V.** Nonlinear Dynamical Systems and Control: A Lyapunov-Based Approach, Princeton: Princeton University Press, 2008, 976 p.
20. **Vorotnikov V. I., Martysenko Yu. G.** K zadache chastichnoy ustoychivosti nelineynykh diskretnykh sistem (To Problem of Partial Stability of Nonlinear Discrete-Time Systems), *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 6, pp. 371–375 (in Russian).
21. **Vorotnikov V. I.** Partial-Equilibrium Position of Nonlinear Dynamical Systems: their Stability and Stability with Respect to Some of Variables, *Doklady Physics*, 2003, vol. 48, no. 3, pp. 151–155 (in Russian).
22. **Vorotnikov V. I., Martysenko Yu. G.** On the Partial Stability of Nonlinear Dynamical Systems, *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2010, vol. 49, no. 5, pp. 702–709 (in Russian).
23. **Vorotnikov V. I., Martysenko Yu. G.** Stability in a Part of Variables of "Partial" Equilibria of Systems with Aftereffect, *Mathematical Notes*, 2014, vol. 96, no. 3, pp. 477–483 (in Russian).
24. **Yudaev G. S.** Stability of Stochastic Difference Systems, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1979, no. 8, pp. 74–78 (in Russian).
25. **Phillis Y. A.** γ -Stability and Stabilization in the Mean of Discrete-Time Stochastic Systems, *Int. J. Control*, 1984, vol. 40, no. 1, pp. 149–160.
26. **Sharov V. F.** Stability and Stabilization of Stochastic Systems vis-a-vis Some of the Variables, *Automation and Remote Control*, 1978, vol. 39, no. 11, pp. 1629–1636.
27. **Vorotnikov V. I.** Partial Stability and Control, Boston, Birkhauser, 1998. 448 p.
28. **Ignatyev O.** Partial Asymptotic Stability in Probability of Stochastic Differential Equations, *Statistics & Probability Letters*, 2009, vol. 79, no. 5, pp. 597–601.
29. **Zuyev A. L., Ignatyev A. O., Kovalev A. M.** Stability and Stabilization of Nonlinear Systems, Kiev, Naukova dumka, 2013, 430 p.
30. **Kao Y., Wang C., Zha F., Cao H.** Stability in Mean of Partial Variables for Stochastic Reaction–Diffusion Systems with Markovian Switching, *J. of the Franklin Institute*, 2014, vol. 351, no. 1, pp. 500–512.
31. **Socha L., Zhu Q. X.** Exponential Stability with Respect to Part of the Variables for a Class of Nonlinear Stochastic Systems with Markovian Switching, *Math. Comp. Simul.*, 2019, vol. 155, pp. 2–14.
32. **Socha L.** Stability and Positivity with Respect to Part of the Variables for Positive Markovian Jump Systems, *Bull. Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 2019, vol. 67, no. 4, pp. 769–775.
33. **Sultanov O.** Capture into Parametric Autoresonance in the Presence of Noise, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2019, vol. 75, pp. 14–21.
34. **Zuyev A., Vasylieva I.** Partial Stabilization of Stochastic Systems with Application to Rotating Rigid Bodies, *IFAC-Papers-OnLine*, 2019, vol. 52, no. 16, pp. 162–167.