УДК 629.7 DOI: 10.17587/mau.19.408-415

М. В. Левский, канд. техн. наук, вед. науч. сотр., dp940@mail.ru,
Научно-исследовательский институт космических систем имени А. А. Максимова —
филиал ГКНПЦ им. М. В. Хруничева

Оптимальное управление космическим аппаратом с исключительной ролью условий трансверсальности

Решается задача оптимального управления разворотом космического аппарата (как твердого тела) из произвольного начального в требуемое конечное угловое положение. Исследуется случай, когда условия трансверсальности имеют решающее значение. Критерий качества управления учитывает энергию вращения и длительность маневра. В аналитическом виде записаны условия оптимальности маневра переориентации и изучены свойства оптимального движения. На основании условий трансверсальности как необходимых условий оптимальности определены главные свойства, законы и ключевые характеристики (параметры, константы, интегралы движения) оптимального решения задачи управления, в том числе максимальная энергия для оптимального движения и длительность маневра. Даны ключевые соотношения и уравнения для построения оптимальной программы управления. Показано, что принятый критерий оптимальности гарантирует движение космического аппарата с энергией вращения, не превышающей требуемого значения. Приведен пример численного моделирования разворота космического аппарата в соответствии с разработанным методом управления.

Ключевые слова: *космический аппарат, оптимальное управление, критерий оптимальности, управляющая функция, принцип максимума, условия трансверсальности*

Эффективность средств и методов управления движением космического аппарата (КА) непосредственно влияет на эффективность выполнения целевых программ — на объем решаемых задач, проведенных наблюдений и экспериментов, на точность полученных результатов, на время активного существования на орбите и целевого применения КА и т.д. К проблеме оптимального управления движением КА многие исследователи обращались неоднократно [1—9]. Аналитическое решение задачи оптимального разворота в замкнутой форме, если бы оно было найдено, имело бы большой практический интерес, так как позволило бы применять на борту КА готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории движения КА (для осесимметричного КА некоторые решения известны [1—3]). Однако аналитическое решение задачи пространственного разворота для КА с произвольным распределением масс при произвольных граничных условиях по угловому положению КА не найдено; известны лишь некоторые особые случаи решения задачи разворота (см. например, [4—6]). Поэтому в общем случае приходится рассчитывать только на приближенное численное решение задачи. Численное решение задачи оптимального разворота динамически симметричного КА подробно рассмотрено в работе [2] (ее авторы решали краевую задачу принципа максимума путем замены переменных и сведением ее к краевой задаче разворота сферически симметричного тела).

Ниже исследуется задача оптимального управления ориентацией КА, когда минимизируется функционал, объединяющий в заданной пропорции время и интеграл энергии, затраченные на поворотный маневр. Вопросы нахождения экономичного управления актуальны и в настоящее время, поэтому решаемая в статье задача является практически важной.

Уравнения движения и постановка задачи оптимального управления

Под поворотным маневром понимают перевод связанных осей КА из одного известного углового положения в другое известное (обычно заданное) угловое положение за конечное время T. Полагаем, что управление угловым положением КА осуществляется посредством исполнительных механизмов, создающих вращающие момен-

ты относительно всех трех главных центральных осей инерции КА. Угловое движение КА как твердого тела описывается кинематическими уравнениями, записанными в кватернионных переменных [4]:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1\omega_1 - \lambda_2\omega_2 - \lambda_3\omega_3; \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0\omega_1 + \lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2; \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0\omega_2 + \lambda_3\omega_1 - \lambda_1\omega_3; \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0\omega_3 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

или в кватернионной форме:

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega},$$

где ω_i ($i = \overline{1, 3}$) — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости КА на оси связанного базиса $\boldsymbol{E}$, образованного главными центральными осями эллипсоида инерции КА; λ_j ($j = \overline{0, 3}$) — компоненты кватерниона Λ [4], который задает движение связанного базиса $\boldsymbol{E}$ относительно инерциального базиса $\boldsymbol{I}$. Уравнения (1) имеют граничные условия $\Lambda(0) = \Lambda_н$ и $\Lambda(T) = \Lambda_к$, где T — время окончания маневра переориентации. Кватернионы $\Lambda_н$ и $\Lambda_к$ имеют произвольные, наперед заданные значения, для которых $\Lambda_к \neq \pm\Lambda_н$ и $\|\Lambda_н\| = \|\Lambda_к\| = 1$ (кватернион Λ принят нормированным [4] для удобства).

Эффективность управления ориентацией будем оценивать интегральной величиной

$$G = \int_0^T (a_1(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2) + a_2)dt, \qquad (2)$$

где J_i — главные центральные моменты инерции КА; $a_1 = \text{const} > 0$, $a_2 = \text{const} > 0$ — постоянные положительные коэффициенты. Оптимальным считается движение, при котором значение G минимально. Задачу оптимального управления КА формализуем следующим образом: необходимо развернуть КА из положения $\Lambda(0) = \Lambda_н$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_к$ в соответствии с уравнениями (1) с минимальным значением интеграла (2); при этом время разворота T не фиксировано (оно также подлежит оптимизации и определяется одновременно со значением G). При нахождении оптимального по критерию (2) закона движения считается, что $\boldsymbol{\omega}(t)$ — кусочно-непрерывная функция времени.

Задачи оптимального управления ориентацией КА с использованием комбинированных критериев оптимальности исследовались и раньше [2, 3]. Но в отличие от известных работ в данной статье задача оптимального управления разворотом решена применительно к произвольному КА (т.е. когда отсутствуют ограничения на соотношение моментов инерции J_1, J_2, J_3).

Решение задачи оптимального управления переориентацией

Будем решать поставленную задачу (1)—(2) на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина [11]. Значение функционала (2) в явном виде не зависит от вращающего момента **M**, действующего на КА. Поэтому управляющими переменными принимаем компоненты ω_i вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Наличие фазового ограничения $\|\Lambda\| = 1$ несущественно, так как оно всегда выполняется (при любых движениях КА вокруг центра масс). Переменные λ_j имеют свойство: в силу уравнений (1) норма $\|\Lambda\|$ кватерниона Λ есть величина постоянная, $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \text{const}$. В начальный момент времени $\|\Lambda(0)\| = \|\Lambda_н\| = 1$, поэтому $\|\Lambda(t)\| = 1$ в любой момент времени $t \in [0, T]$. Так как критерий оптимальности не включает позиционные координаты λ_j, правомерно использовать универсальные переменные r_i ($i = \overline{1, 3}$) [7], заменяющие сопряженные переменные. Для сформулированной выше задачи (1)—(2) функция Гамильтона H равна

$$H = r_1\omega_1 + r_1\omega_1 + r_1\omega_1 - a_1(J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2) - a_2. \quad (3)$$

Оптимальные функции r_i, как компоненты вектора **r**, удовлетворяют уравнениям [7]:

$$\dot{r}_1 = \omega_3 r_2 - \omega_2 r_3;\ \dot{r}_2 = \omega_1 r_3 - \omega_3 r_1;\ \dot{r}_3 = \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2. \quad (4)$$

Функция Гамильтона H составлена без учета ограничения $\|\Lambda\| = 1$ для фазовых переменных в силу равенства $\|\Lambda(0)\| = 1$, о чем договорились выше. Вектор **r** неподвижен относительно инерциального базиса $\boldsymbol{I}$, из-за чего $|\mathbf{r}| = \text{const} \neq 0$. Решение $\mathbf{r}(t)$ системы (4) определяется начальным $\Lambda_н$ и конечным $\Lambda_к$ положениями КА. Оптимальная функция $\mathbf{r}(t)$ вычисляется через кватернион $\Lambda(t)$ [4, 7]:

$$\mathbf{r} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda,$$

где $\mathbf{c}_E = \Lambda_н \circ \mathbf{r}(0) \circ \tilde{\Lambda}_н = \text{const}$ (составляющие вектора $\mathbf{c}_E$ — проекции вектора **r** на оси инерциального базиса $\boldsymbol{I}$). Так как в рассматриваемой задаче оптимального управления время окончания маневра T не фиксировано, то необходимо выполнение еще одного условия трансверсальности $H(T) = 0$ [12]. Система (4) для переменных r_i совместно с требованием максимальности гамильтониана H и условиями трансверсальности $\mathbf{r}(0) \neq 0$, $\mathbf{r}(T) \neq 0$ и $H(T) = 0$ являются необходимыми условиями оптимальности. Условия максимума функции H определяют искомое решение $\boldsymbol{\omega}(t)$; граничные значения по положению $\Lambda(0)$ и $\Lambda(T)$ определяют решения $\Lambda(t)$ и $\mathbf{r}(t)$.

Краевая задача принципа максимума заключается в определении значения $\mathbf{r}(0)$, при котором решение системы дифференциальных уравнений (1), (4) с одновременной максимизацией

в каждый момент времени функции Гамильтона H удовлетворяет условиям разворота $\Lambda(0) = \Lambda_н$, $\Lambda(T) = \Lambda_к$ и условию $H(T) = 0$.

Как видно из выражения (3), H — квадратичная функция угловых скоростей ω_i, и поэтому ее максимальное значение достигается в точке локального экстремума. Применяя необходимые условия $\partial H/\partial\omega_i = 0$, получим уравнения $r_i - 2a_1 J_i\omega_i = 0$. Функция H максимальна, если выполняются соотношения

$$\omega_i = r_i/2a_1 J_i. \tag{5}$$

Оптимальное движение определяется замкнутой системой уравнений (1), (4), (5) с учетом равенств $\Lambda(0) = \Lambda_н$, $\Lambda(T) = \Lambda_к$. Система уравнений (4), (5) и $H(T) = 0$ формализует необходимые условия оптимальности для исходной задачи оптимального управления (1)—(2). Задача построения оптимальной программы управления свелась к решению системы уравнений (1), (4) при условии, что управляющие функции ω_i вычисляются в соответствии с выражением (5). Перейдем к нормированному вектору $\mathbf{p} = \mathbf{r} / |\mathbf{r}|$ и обозначим $r_0 = |\mathbf{r}| = \text{const} = |\mathbf{r}(0)| \neq 0$. Для проекций p_i орта $\mathbf{p}$ на оси связанного базиса $\boldsymbol{E}$ справедливы уравнения

$$\dot p_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3;\ \dot p_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1;\quad \dot p_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2. \tag{6}$$

В дальнейшем будем использовать компоненты p_i вектора $\mathbf{p}$; переменные $r_i = r_0 p_i$, где r_0 — константа, которую необходимо определить в процессе оптимизации ($|\mathbf{p}| = 1$). Необходимое условие оптимальности запишем в виде

$$\omega_i = bp_i/J_i, \tag{7}$$

где $b > 0$ — скалярная величина. Уравнения (7) отчетливо показывают, что в геометрическом представлении вектор $\mathbf{p}$ есть не что иное, как орт оптимального кинетического момента КА $\mathbf{L}$ в связанной с КА системе координат. Решение системы (6), (7) описывает движение, при котором кинетический момент КА $\mathbf{L}$ имеет постоянное направление в инерциальной системе координат.

Так как гамильтониан H не зависит явно от времени и длительность T не фиксирована, то $H = 0$ в каждый момент времени $t \in [0, T]$ [12]. Подставив оптимальные значения функций ω_i, вычисленные по соотношениям (5), в выражение (3) для функции H, с учетом равенств $r_i = r_0 p_i$ получим уравнение

$$(r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3)/4a_1 - a_2 = 0,$$

из которого следуют следующие свойства оптимального движения:

$$r_1^2/J_1 + r_2^2/J_2 + r_3^2/J_3 = \text{const} = 4a_1a_2$$

и

$$J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 = \text{const},\quad J_1^2\omega_1^2 + J_2^2\omega_2^2 + J_3^2\omega_3^2 = \text{const}. \tag{8}$$

Поскольку коэффициенты $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, условие $\mathbf{r} \neq 0$ выполняется автоматически. При этом оптимальным является значение $r_0 = 2\sqrt{a_1a_2}/C$, где $C = \sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3}$; $p_{i\,0}$ — компоненты вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$. Сравнив выражения (5) и (7), с учетом $|\mathbf{r}| = \text{const}$, заключаем, что во время оптимального разворота величина $b = \text{const}$. Кинетическая энергия вращения во время оптимального разворота равна $E_К = a_2/2a_1$. Кинетический момент в процессе разворота соответствует условию $|\mathbf{L}| = L_{opt} = \sqrt{a_2/a_1}/C$.

Задача нахождения оптимального управления состоит в решении системы уравнений углового движения КА (1) и уравнений (4) при условии, что управление $\boldsymbol{\omega}$ выбрано из требования (5). Сформулированная задача управления (1)—(2) решается до конца. Условия максимума функции H определяют оптимальное решение $\boldsymbol{\omega}(t)$. На всем интервале движения $0 < t < T$ КА должен вращаться с постоянным по модулю кинетическим моментом $|\mathbf{L}| = \text{const}$ (так как во время идеального по критерию (2) разворота $b = \text{const}$). Уравнения (1) и (6) совместно с соотношениями (7) образуют замкнутую систему уравнений. Значение параметра C зависит от вектора $\mathbf{p}(0)$, который, в свою очередь, определяется граничными значениями $\Lambda(0)$, $\Lambda(T)$ и моментами инерции J_1, J_2, J_3.

Таким образом, задача построения оптимальной программы управления $\boldsymbol{\omega}(t)$ состоит главным образом в нахождении такого значения вектора $\mathbf{p}(0)$, при котором в результате движения КА в соответствии с уравнениями (1), (6), (7) и $\Lambda(0) = \Lambda_н$ выполнялось бы равенство $\Lambda(T) = \Lambda_к$. Общее решение приведенной системы уравнений найти практически невозможно. Трудность заключается в определении граничных значений $\mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{p}(T)$, которые связаны выражением

$$\Lambda_к \circ \mathbf{p}(T) \circ \tilde\Lambda_к = \Lambda_н \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde\Lambda_н \quad \text{или} \quad \mathbf{p}(T) = \tilde\Lambda_р \circ \mathbf{p}(0) \circ \Lambda_р,$$

где $\Lambda_р = \tilde\Lambda_н \circ \Lambda_к$ — кватернион разворота.

Задача оптимального управления (в смысле минимума интеграла (2)) будет решена, если мы найдем решение системы уравнений (1), (6), (7), удовлетворяющее граничным условиям $\Lambda(0) = \Lambda_н$ и $\Lambda(T) = \Lambda_к$. Оптимальная угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ связана с кватернионом ориентации Λ зависимостью

$$\boldsymbol{\omega} = J^{-1}L_{opt}\tilde\Lambda \circ \mathbf{c}_P \circ \Lambda, \tag{9}$$

где $\mathbf{c}_P = \text{const} = \Lambda_н \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde\Lambda_н$; $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ — тензор инерции КА (напомним, $p_{i0} = p_i(0)$). Ключе-

вой искомой характеристикой является значение вектора $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0)$. Решение $\boldsymbol{\omega}(t)$ во время кинематически оптимального разворота (без ограничений на момент $\mathbf{M}$) обладает свойствами (8) (интегралами движения).

Поскольку управлением считается вектор $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости КА, то поставленную кинематическую задачу оптимального разворота можно считать решенной — уравнения (1), (9) с учетом граничных условий $\Lambda(0) = \Lambda_н$, $\Lambda(T) = \Lambda_к$ полностью определяют искомое решение $\boldsymbol{\omega}(t)$. Уравнения для оптимальных управляющих функций ω_i формализуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3(J_2 - J_3)/J_1; \\ \dot{\omega}_2 &= \omega_1\omega_3(J_3 - J_1)/J_2; . \\ \dot{\omega}_3 &= \omega_1\omega_2(J_1 - J_2)/J_3. \end{aligned} \qquad (10)$$

Основная задача — нахождение закона изменения вектора $\mathbf{p}(t)$, чтобы в результате решения системы уравнений (1), (6), (7) с начальными условиями $\Lambda(0) = \Lambda_н$ граничное условие $\Lambda(T) = \Lambda_к$ на правом конце было выполнено (определение вектора $\mathbf{p}(0)$ — самостоятельная и достаточно непростая задача).

Вращающие моменты относительно главных центральных осей инерции КА определяются динамическими уравнениями Эйлера [4]:

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 &= M_1; \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_1\omega_3 &= M_2; \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 &= M_3, \end{aligned} \qquad (11)$$

где M_i — проекции главного момента $\mathbf{M}$ сил на оси связанного базиса $\boldsymbol{E}$. После подстановки $\dot{\omega}_i$, вычисленных по выражениям (10), в динамические уравнения (11) получим $M_i = 0$. В результате приходим к выводу, что момент $\mathbf{M}$ в процессе оптимального разворота равен нулю: $\mathbf{M} = 0$.

Для вращений твердого тела, удовлетворяющих зависимостям (6), (7), значение интеграла

$$S = \int_0^T |\mathbf{L}(t)|\,dt \qquad (12)$$

не зависит от длительности разворота T и определяется исключительно кватернионом разворота $\Lambda_р = \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda_к$ и инерционными характеристиками КА J_1, J_2, J_3 [8]. Значение функционала (2) при оптимальном движении КА равно

$$G = S(2a_1E_К + a_2)/L_{opt}.$$

После подстановки найденных ранее значений L_{opt} и $E_К$ получим $G = 2SC\sqrt{a_1a_2}$.

Построение типовой программы оптимального вращения КА

В системе (1), (9) единственным неизвестным параметром является $\mathbf{c}_P$ (или $\mathbf{p}_0$). Оптимальная траектория движения $\Lambda(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} = 0,5\Lambda \circ (J^{-1}\tilde{\Lambda} \circ \Lambda_н \circ \mathbf{p}_0 \circ \tilde{\Lambda}_н \circ \Lambda)\times \\ \times\sqrt{a_2/a_1}\Big/\sqrt{p_{10}^2/J_1 + p_{20}^2/J_2 + p_{30}^2/J_3} \end{aligned} \qquad (13)$$

и граничным условиям $\Lambda(0) = \Lambda_н$, $\Lambda(T) = \Lambda_к$. Оптимальный вектор $\mathbf{p}_0$ имеет такое значение, чтобы решение $\Lambda(t)$ уравнения (13) с начальным условием $\Lambda(0) = \Lambda_н$ удовлетворяло граничному условию $\Lambda(T) = \Lambda_к$. Аналитическое решение уравнения (13) существует только для динамически симметричного и сферически симметричного твердого тела. Для произвольного КА ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы уравнений (1), (9) находится только численными методами (например, методом последовательных приближений, как описано в работе [10]).

Для динамически симметричного КА (например, когда $J_2 = J_3$) задача оптимального управления разворотом решается до конца. В этом частном случае система (10) распадается на две независимые линейные системы дифференциальных уравнений, одна из которых $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = 0$ (и, как следствие, $p_1 = \text{const} = p_{10}$). Система (10) становится системой двух линейных дифференциальных уравнений с параметром $\omega_1 = \text{const} = \omega_1(0)$. Оптимальное движение представляет собой одновременное вращение КА как твердого тела вокруг своей продольной оси OX и вокруг некоторого направления $\boldsymbol{\eta}$, неподвижного в инерциальном пространстве и составляющего с продольной осью КА определенный постоянный угол ϑ. Угловые скорости относительно осей OX и $\boldsymbol{\eta}$ имеют постоянное соотношение, и поэтому справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Lambda_к &= \Lambda_н \circ e^{\mathbf{p}_0\beta/2} \circ e^{\mathbf{e}_1\alpha/2}; \\ \alpha &= p_{10}\beta(J_2 - J_1)/J_1, \end{aligned} \qquad (14)$$

где e — кватернионная экспонента [4]; $\mathbf{e}_1$ — орт продольной оси КА; α, β — углы поворота КА вокруг продольной оси OX и вокруг вектора $\mathbf{p}$ соответственно; считается $|\alpha| \leqslant \pi$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$. Оптимальная траектория $\Lambda(t)$, как решение уравнения (13), определяется формулами

$$\Lambda(t) = \Lambda_н \circ e^{\mathbf{p}_0\varepsilon/2} \circ e^{\mathbf{e}_1\varphi/2}; \quad \varepsilon = t\sqrt{a_2/a_1}\Big/J_2C;$$

$$\varphi = p_{10}\varepsilon(J_2 - J_1)/J_1.$$

Оптимальные угловые скорости изменяются по закону

$$\omega_1 = p_{10}\sqrt{a_2/a_1}\,/J_1C;$$
$$\omega_2 = (p_{20}\cos\dot{\varphi}t + p_{30}\sin\dot{\varphi}t)\sqrt{a_2/a_1}\,/J_2C;$$
$$\omega_3 = (p_{30}\cos\dot{\varphi}t - p_{20}\sin\dot{\varphi}t)\sqrt{a_2/a_1}\,/J_2C,$$

где $\dot{\varphi} = \omega_1(J_2 - J_1)/J_2$ — скорость собственного вращения вокруг продольной оси КА. Интеграл (12) в случае $J_2 = J_3$ вычисляется значительно проще: $S = J_2\beta$.

Для сферически симметричного твердого тела (когда $J_1 = J_2 = J_3$) решение соответствует вращению вокруг оси Эйлера, при котором

$$p_i(t) = \text{const} = p_{i0} = \nu_i/\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2};$$
$$\omega_i(t) = p_{i0}\sqrt{a_2/a_1}\,/J_iC,$$

где ν_1, ν_2, ν_3 — компоненты векторной части кватерниона разворота $\Lambda_р$.

Практическое значение имеют задачи, в которых $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ (такие условия разворота КА наиболее характерны). Разумеется, в моменты времени $t = 0$ и $t = T$ угловая скорость для номинальной программы вращения КА, определяемая уравнением (9), не равна нулю. Следовательно, неизбежны переходные участки: разгон — переход из состояния покоя (когда $\boldsymbol{\omega} = 0$) в режим вращения с кинетическим моментом максимальной величины $L_{\max}$ и торможение — гашение кинетического момента КА до нуля. Между разгоном и торможением выполняются уравнения (6) и (7), в которых $b = L_{\max}$.

Если условия разворота $\Lambda_н$, $\Lambda_к$ и время T таковы, что времена разгона и торможения пренебрежимо малы (по сравнению с длительностью всего разворота), то сообщение КА необходимого кинетического момента $L_{\max}$ и гашение имеющегося кинетического момента до нуля можно считать импульсным, а между импульсными сообщением и гашением угловой скорости КА вращается по инерции. Определяющим при нахождении оптимальных решений $\boldsymbol{\omega}(t)$, $\Lambda(t)$ является значение вектора $\mathbf{p}_0$.

Если момент управления $\mathbf{M}$ ограничен, то сообщение требуемого кинетического момента до уровня $|\mathbf{L}| = L_{\max}$ в начале разворота и гашение имеющейся угловой скорости до нуля в конце разворота занимают некоторое конечное (отличное от нуля) время. Если управляющий момент $\mathbf{M}$ ограничен условием

$$|\mathbf{M}| \leqslant m_0, \qquad (15)$$

то законы максимально быстрого набора и гашения кинетического момента известны [9], где $m_0 > 0$ — максимально допустимая величина момента $\mathbf{M}$. На участке торможения оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{M} = -m_0\mathbf{L}/|\mathbf{L}|.$$

При оптимальном движении кинетический момент КА не меняет своего направления в инерциальной системе координат, а управляющий момент $\mathbf{M}$ составляет с кинетическим моментом 180°. Величина кинетического момента КА изменяется по закону $|\mathbf{L}| = L_{\max} - m_0(t - t_0)$, где t_0 — момент начала остановки вращения. Оптимальное управление на участке разгона имеет вид

$$\mathbf{M} = m_0\mathbf{L}/|\mathbf{L}|.$$

Модуль кинетического момента изменяется по закону $|\mathbf{L}| = m_0 t$. И при разгоне, и при торможении оптимальным по быстродействию является управление, при котором управляющий момент все время параллелен кинетическому моменту.

В случае $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ маневр разворота включает две фазы, во время которых модуль момента $\mathbf{M}$ максимально возможный — разгон (увеличение угловой скорости) и торможение (гашение угловой скорости до нуля), и фазу неуправляемого движения, когда справедливы уравнения (8) и (10). Кинетический момент $\mathbf{L}$ не меняет своего направления относительно инерциальной системы координат при разгоне, при торможении, при вращении между разгоном и торможением (когда КА движется по инерции), а значит, направление кинетического момента в инерциальной системе координат неизменно на всем отрезке времени $[0, T]$. Следовательно, при наличии ограничения $|\mathbf{M}| \leqslant m_0$ на всем участке управления от $t = 0$ до $t = T$ справедливы уравнения (6)—(7), а значит, и интеграл (12) не меняется по сравнению с идеальным разворотом (когда $b = \text{const}$). Для системы (6), (7) на всем отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant T$ выполняется условие $p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const}$, и отношение кинетической энергии вращения к квадрату модуля кинетического момента КА есть величина постоянная. Значение функционала (2) при оптимальном движении КА с учетом условия (15) равно

$$G = a_1C^2L_{\max}(S - L_{\max}^2/3m_0) + \\ + a_2(S/L_{\max} + L_{\max}/m_0), \qquad (16)$$

где $S = K_c t_{\text{пр}}$; $t_{\text{пр}}$ — прогнозируемое время достижения положения $\Lambda_к$ (т.е. когда выполнится равенство $\Lambda = \Lambda_к$) при вращении твердого тела с кинетическим моментом $|\mathbf{L}| = K_c$ из положения $\Lambda(0) = \Lambda_н$ в соответствии со свойствами (10) и (8). Время разворота $T = S/L_{\max} + L_{\max}/m_0$. Для оптимальной программы разворота длительность

разгона и торможения одинаковая и равна $\tau = L_{\max}/m_0$.

Оптимальным будет такое $L_{\max}$, при котором G минимально. Этому условию соответствует значение $L_{\max} = \sqrt{a_2/a_1}/C$. Безусловно, должно выполняться условие $T > 2\tau$, а значит, $T - \tau = S/L_{\max} > \tau$. Минимум функции (16) (как и (2)) ищется в интервале $0 < L_{\max} < \sqrt{m_0 S}$. Поэтому $L_{\text{opt}} = \sqrt{a_2/a_1}/C$ — оптимальное значение параметра $L_{\max}$ программы оптимального разворота, когда $\tau \neq 0$ (если, конечно, $\sqrt{a_2/a_1}/Cm_0 \ll T_{\text{opt}} = SC\sqrt{a_1/a_2}$ или $m_0 SC^2 \gg a_2/a_1$). Значение G и время T равны

$$G = 2CS\sqrt{a_1 a_2} + 2a_2\sqrt{a_2/a_1}/3Cm_0;$$

$$T = SC\sqrt{a_1/a_2} + \sqrt{a_2/a_1}/Cm_0.$$

В результате пришли к заключению, что модуль кинетического момента КА на участке между разгоном и торможением не зависит от длительности разгона (торможения). Для любого момента времени $t \in [0, T]$ энергия вращения не превышает $a_2/2a_1$ (независимо от продолжительности разгона и торможения). Иными словами, всегда во время оптимального разворота из положения $\Lambda_н$ в положение $\Lambda_к$ (в смысле минимума (2)) энергия вращения КА ограничена известным верхним уровнем, определяемым коэффициентами a_1, a_2 минимизируемого функционала. Если принять $a_1 = 0{,}5$ и $a_2 = E_{\text{доп}}$, то оптимизация программы движения в соответствии с критерием (2) приводит к выполнению в любой момент времени условия $J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2 \leqslant 2E_{\text{доп}}$, где $E_{\text{доп}}$ — допустимая энергия вращения.

Так как при торможении КА управляющий момент **M** направлен строго против кинетического момента **L**, то момент начала торможения может быть спрогнозирован достаточно точно. Длительность остановки вращения равна $\tau = |\mathbf{L}|/m_0$. Момент начала участка торможения $t_т$ определяется условием

$$4\arcsin\frac{K\sqrt{\delta_2^2 + \delta_3^2}}{\sqrt{(J_2\omega_2)^2 + (J_3\omega_3)^2}} = \frac{K^2\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}}{m_0\sqrt{(J_2\omega_2)^2 + (J_3\omega_3)^2}},$$

где δ_j — компоненты кватерниона рассогласования $\tilde{\Lambda}(t) \circ \Lambda_K$ ($j = 0, 1, 2, 3$); ω_j — проекции вектора угловой скорости КА $\boldsymbol{\omega}$ на оси связанной с КА системы координат; $K = |J\boldsymbol{\omega}|$ — величина кинетического момента КА.

Определение момента времени $t_т$ по фактическим (измеренным значениям) параметрам движения (угловому рассогласованию и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$) повышает точность приведения КА в требуемое состояние $\Lambda = \Lambda_к$, $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Компьютерная апробация алгоритма оптимального управления

Рассмотрим разворот КА на 180° из начального положения $\Lambda_н$, когда оси КА совпадают с осями опорного базиса ***I***, в заданное конечное положение $\Lambda_к$; элементы кватерниона $\Lambda_к$ равны: $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 0{,}707107$; $\lambda_2 = 0{,}59$; $\lambda_3 = 0{,}39$; при этом $\boldsymbol{\omega}(0) = 0$ и $\boldsymbol{\omega}(T) = 0$. Считалось, что коэффициенты $a_1 = 0{,}6$, $a_2 = 45{,}2$ Дж, а $J_1 = 118\,952$ кг·м^2; $J_2 = 350\,467$ кг·м^2; $J_3 = 269\,497$ кг·м^2. Мощность исполнительных органов характеризуется величиной $m_0 = 140$ Н·м (управляющий момент **M** ограничен сферой (15)). Решив кинематическую задачу разворота, получили $\mathbf{p}_0 = \{0{,}485149;\ 0{,}126100;\ 0{,}865292\}$ и $\mathbf{c}_P = \mathbf{p}_0$ (так как $\Lambda_н = 1$). Интеграл $S = 616$ кН·м·с^2. Расчетное значение вектора $\mathbf{p}_0$ находилось методом последовательных приближений, где за первое приближение $\mathbf{p}_0^{(0)}$ берется решение той же краевой задачи для динамически симметричного КА с моментами инерции J_1 и J_{tr}, где J_{tr} — момент инерции относительно поперечной оси, принимаемый равным $J_{\text{tr}} = (J_2 + J_3)/2$ (значение $\mathbf{p}_0^{(0)}$ получаем из системы уравнений (14), в которой вместо J_2 подставляем J_{tr}). Энергия вращения между разгоном и торможением постоянна $E_к = 37{,}7$ Дж, а максимальная величина кинетического момента $L_{\max} = 2800$ Н·м·с. Расчетное время разгона (торможения) $\tau = 20$ с.

Результаты численного моделирования процесса разворота при оптимальном управлении представлены рис. 1—3. На рис. 1 и 2 изображены графики изменения угловых скоростей $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ и оптимальных функций $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ по времени, на рис. 3 — графики изменения компонент кватерниона $\Lambda(t)$ текущей ориентации КА. По результатам моделирования момент окончания разгона $t_р = 20$ с, момент начала торможения $t_т = 220$ с. Общая длительность маневра составила $T = 240$ с. Значение интеграла (2) равно $G = 20{,}49$ кДж·с. Важно отметить, что $\omega_1(t)$, $p_1(t)$, соответствующие продольной оси КА, — зна-

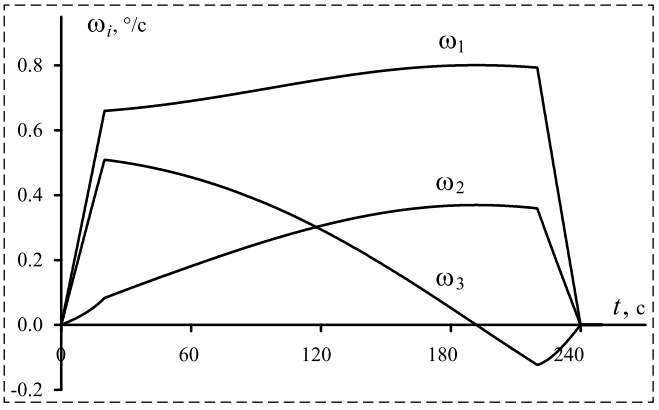

Рис. 1

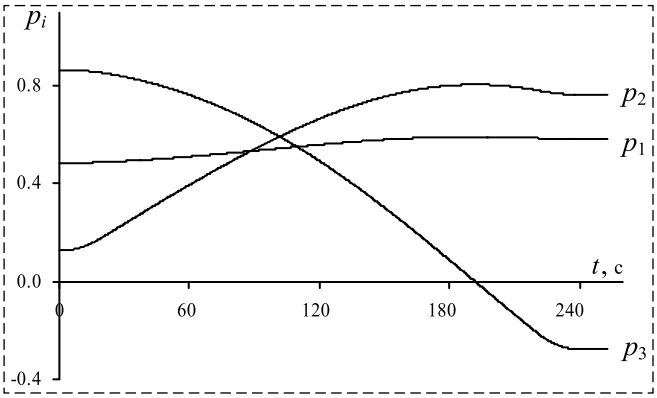

Рис. 2

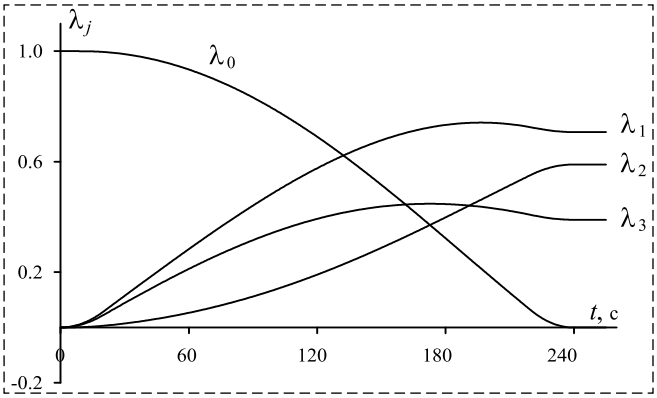

Рис. 3

копостоянные функции времени (это свойство наблюдается при любых сочетаниях граничных значений $\Lambda_н$ и $\Lambda_к$).

Заключение

В статье исследуется задача оптимального управления КА во время разворота в требуемое положение. Оптимизация проводилась в соответствии с критерием качества, который одновременно учитывает время и энергию вращения. Вопросы экономичности при управлении движением КА остаются актуальными и сегодня, поэтому рассмотренная задача управления является практически важной. Решение сформулированной задачи основано на принципе максимума и методе кватернионов. Выписаны условия оптимальности и изучены свойства оптимального разворота. Ключевую роль в определении основных свойств, законов и главных характеристик (параметров, констант, интегралов движения) оптимального управления, включая максимальную энергию вращения и длительность маневра, играют условия трансверсальности. Задача оптимального управления разворотом решается до конца. Получены ключевые соотношения и уравнения для построения оптимальной программы разворота; приведены расчетные выражения для нахождения ключевых параметров маневра разворота.

В случае, когда действующий на КА момент **M** ограничен, а начальная и конечная угловые скорости равны нулю, оптимальная программа управления включает участки разгона (в начале разворота) и торможения (при завершении разворота). При разгоне и торможении управляющий момент максимально возможный, между разгоном и торможением КА вращается по инерции. Если управляющий момент ограничен сферой, то на участках разгона и торможения управляющий момент параллелен вектору кинетического момента. В течение всего маневра переориентации КА вращается по траектории "свободного движения", длительность разгона и торможения одинаковая. Показано, что для принятого критерия оптимальности энергия вращения КА не превышает заранее известного значения, определяемого исключительно пропорцией между коэффициентами оптимизируемого функционала. Для динамически симметричного КА представлено законченное решение задачи переориентации в замкнутой форме. Также приведены численный пример и результаты моделирования, иллюстрирующие динамику движения КА во время оптимального разворота.

Список литературы

1. **Shen H., Tsiotras P.** Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls // AIAA J. Guidance, Control and Dynamics. 1999. Vol. 22, N. 5.

2. **Молоденков А. В., Сапунков Я. Г.** Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2.

3. **Молоденков А. В., Сапунков Я. Г.** Особый режим управления в задаче оптимального разворота осесимметричного космического аппарата // Изв. РАН. ТиСУ. 2010. № 6.

4. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

5. **Scrivener S., Thompson R.** Survey of time-optimal attitude maneuvers // J. Guidance, Control and Dynamics. 1994. Vol. 17, N. 2.

6. **Levskii M. V.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation // International Journal "Problems of nonlinear analysis in engineering systems", 2015, Vol. 21, N. 2.

7. **Левский М. В.** Использование универсальных переменных в задачах оптимального управления ориентацией космических аппаратов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 1.

8. **Levskii M. V.** Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method // Mechanics of solids, 2009, Vol. 44, N. 2.

9. **Левский М. В.** К вопросу оптимального успокоения космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 1, с. 340.

10. **Левский М. В.** Способ управления разворотом космического аппарата и система для его реализации. Патент на изобретение РФ № 2114771 // Бюллетень "Изобретения. Заявки и патенты". 1998. № 19.

11. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

12. **Young L. G.** Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. W. B. Saunders Company. Philadelphia, London, Toronto, 1969.

Optimal Control of a Spacecraft with Exceptional Role of Conditions of Transversality

M. V. Levskii, dp940@mail.ru,
Maximov Research Institute of Space Systems as Branch
of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, 141091, The Moscow region

Corresponding author: **Levskii Mikhail V.,** Ph. D., Leading Researcher, Maximov Research Institute of Space Systems as Branch of the Khrunichev State Research and Production Space Center, Korolev, 141091, The Moscow region, e-mail: dp940@mail.ru

Accepted on February 14, 2018

The optimal control problem of slew maneuver of a spacecraft (as solid body) from arbitrary initial attitude into required final angular position is considered and solved. Designing and construction of optimal control of spacecraft rotation is based on the quaternion variables and Pontryagin's maximum principle. The case when the conditions of transversality have crucial significance is investigated. The minimized functional takes into account energy of rotation and duration of maneuver. Using the necessary conditions of optimality in the form of maximum principle and the quaternion method for solving the control problems of spacecraft motion, an analytical solution to the formulated problem was obtained. On basis of the conditions of transversality as the necessary conditions of optimality, main properties, laws and key characteristics (parameters, constants, integrals of motion) of optimal solution of control problem, including the maximal rotation energy for optimum motion and duration of maneuver are determined. The formalized equations and the calculated expressions and dependences for synthesis of the optimal program of reorientation are obtained. The estimation of influence of constraint and narrow-mindedness of the controlling moment onto character of optimal motion and onto indexes of quality of control is given. It is shown that the accepted criterion of optimality guarantees motion of a spacecraft with energy of rotation which does not exceed the required value. For spherically symmetric spacecraft and dynamically symmetric spacecraft, the complete solution of reorientation problem is presented in the closed form. The example and results of mathematical simulation of spacecraft motion under optimal control, showing a practical realizability of the developed method for control of spatial orientation of a spacecraft, are given.

Keywords: *spacecraft, optimal control, criterion of optimality, control function, maximum principle, the conditions of transversality*

For citation:

Levskii M. V. Optimal Control of a Spacecraft with Exceptional Role of Conditions of Transversality, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 6, pp. 408—415.

DOI: 10.17587/mau.19.408-415

References

1. **Shen H., Tsiotras P.** Time-optimal control of axi-symmetric rigid spacecraft with two controls, *AIAA J. Guidance, Control and Dynamics*, 1999, vol. 22, no. 5.

2. **Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.** *Reshenie zadachi optimal'nogo razvorota osesimmetrichnogo kosmicheskogo apparata s ogranichennym i impul'snym upravleniem pri proizvol'nykh granichnykh usloviyakh* (A solution of the optimal turn problem of an axially symmetric spacecraft with bounded and pulse control under arbitrary boundary conditions), I*zv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2007, no. 2 (in Russian).

3. **Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.** *Osobyi regime upravleniya v zadache optimal'nogo razvorota osesimmetrichnogo kosmicheskogo apparata* (Special control regime in the problem of optimal turn of an axially symmetric spacecraft), Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya, 2010, no. 6 (in Russian).

4. **Branets V. N., Shmyglevskii I. P.** *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* (The use of quaternions in problems of orientation of a rigid body), Moscow, Nauka, 1973 (in Russian).

5. **Scrivener S., Thompson R.** Survey of time-optimal attitude maneuvers, *J. Guidance, Control and Dynamics,* 1994, vol. 17, no. 2.

6. **Levskii M. V.** About method for solving the optimal control problems of spacecraft spatial orientation, *International Journal "Problems of nonlinear analysis in engineering systems",* 2015, vol. 21, no. 2.

7. **Levskii M. V.** *Ispol'zovanie universal'nykh peremennykh v zadachakh optimal'nogo upravleniya orientatsiei kosmicheskikh apparatov* (The use of universal variables in problems of optimal control concerning spacecrafts orientation), *Mehatronika, Avtomatizacia, Upravlenie*, 2014, no. 1 (in Russian).

8. **Levskii M. V.** Optimal spacecraft terminal attitude control synthesis by the quaternion method, *Mechanics of Solids*, 2009, vol. 44, no. 2.

9. **Levskii M. V.** *K voprosu optimal'nogo uspokoeniya kosmicheskogo apparata* (On optimal spacecraft damping), *Izv. RAN. Teoriya i Sistemy Upravleniya*, 2011, no. 1 (in Russian).

10. **Levskii M. V.** *Sposob upravleniya razvorotom kosmicheskogo apparata i sistema dlya ego realizacii. Patent na izobretenie RF № 2114771* (A method of controlling a spacecraft turn and the system for its implementation. The patent for the invention of the Russian Federation no. 2114771), *Byulleten' "Izobreteniya. Zayavki i patenty"*, 1998, no. 19 (in Russian).

11. **Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh processov* (The mathematical theory of optimal processes), Moscow, Nauka, 1983 (in Russian); Gordon and Breach, New York, 1986.

12. **Young L. G.** Lectures on the calculus of variations and optimal control theory, W. B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1969.