

Я. Г. Сапунков, канд. физ.-мат. наук, доц.,
А. В. Молоденков, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., iptmuran@san.ru,
Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов

Квазиоптимальный алгоритм разворота осесимметричного космического аппарата при произвольных граничных условиях

В кватернионной постановке рассматривается задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота осесимметричного космического аппарата (КА) как твердого тела при произвольных граничных условиях без ограничения на функцию управления. С помощью замен переменных исходная задача оптимального разворота осесимметричного КА упрощается (в смысле динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. Для этой задачи представлено аналитическое приближенное решение в классе обобщенных конических движений. Дается алгоритм квазиоптимального разворота КА. Приводятся численные примеры.

Ключевые слова: осесимметричное твердое тело, космический аппарат, оптимальный разворот, квазиоптимальное решение, обобщенное коническое движение, произвольные граничные условия

Введение

Построение управления пространственной переориентацией космического аппарата (КА) как твердого тела в традиционной постановке включает задачи программного углового движения (разворота), программного управления и поиска управления, стабилизирующего программу углового движения в малом. Задача расчета программного углового движения и реализующего его управления во многих случаях решается с помощью методов теории оптимального управления. Точное аналитическое решение этой задачи для наиболее часто используемых функционалов оптимизации при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА не найдено даже в случае сферической симметрии КА, не говоря уже о его произвольной динамической конфигурации. Известны лишь некоторые частные случаи решения задачи (см., например, [1–8]); в общем случае приходится рассчитывать только на приближенные численные методы. Между тем, аналитическое решение задачи оптимального разворота КА в замкнутой форме имеет не только теоретический, но и большой практический интерес, так как позволяет использовать на борту космических аппаратов готовые законы программного управления и изменения оптимальной траектории.

В настоящей статье в традиционной постановке рассматривается задача оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота КА как твердого тела с одной осью симметрии при произвольных граничных условиях по угловому положению и угловой скорости КА без ограничения на уп-

равление. Время переориентации КА произвольно и зафиксировано. С помощью замен переменных исходная задача оптимального разворота осесимметричного КА упрощается (в смысле динамических уравнений Эйлера) до задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс, содержащей одно дополнительное скалярное дифференциальное уравнение. В классе обобщенных конических движений проведена модификация полученной задачи оптимального разворота, которая позволила получить аналитические решения для уравнений движения, содержащие произвольные постоянные и две произвольные скалярные функции (параметры обобщенного конического движения). Относительно этих функций и их производных формулируется и решается оптимизационная задача, в которой в качестве управлений выступают вторые производные от этих двух функций. Полученное аналитическое решение модифицированной задачи может рассматриваться как приближенное (квазиоптимальное) решение традиционной задачи оптимального разворота КА при произвольных граничных условиях. Следует отметить, что для случаев аналитической разрешимости традиционной задачи оптимального разворота при сферической симметрии твердого тела, когда наложены ограничения на краевые условия задачи — плоский эйлеров разворот [7], коническое движение [9], — решения традиционной и модифицированной задач полностью совпадают. На примере осесимметричного КА "Спейс Шаттл", рассматриваемого как твердое тело, приводятся результаты численных решений задачи оптимального разворота

в традиционной и модифицированной постановках для нескольких вариантов граничных условий по угловому положению и угловой скорости КА. Расхождение между значениями функционала качества в рассматриваемых решениях для традиционной и модифицированной задачи не превышает 0,3 %. Надо заметить, что значение функционала качества процесса управления является определяющей характеристикой задачи.

Статья продолжает исследования, начатые в работах [9, 10].

1. Постановка традиционной задачи оптимального разворота

Движение КА как твердого тела с одной осью симметрии вокруг центра масс описывается дифференциальными уравнениями [1]

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{w}; \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} I_1 \dot{w}_1 &= M_1; \\ I_2 \dot{w}_2 &= M_2 - (I_1 - I_2)w_1w_3; \\ I_2 \dot{w}_3 &= M_3 + (I_1 - I_2)w_1w_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\mathbf{L}(t) = l_0(t) + l_1(t)i_1 + l_2(t)i_2 + l_3(t)i_3$ (кватернион поворота КА); $\mathbf{w}(t) = w_1(t)i_1 + w_2(t)i_2 + w_3(t)i_3$ (вектор угловой скорости КА) — фазовые координаты; $\mathbf{M}(t) = [M_1(t), M_2(t), M_3(t)]^T$ — (вектор внешнего момента, действующего на КА) — управление. Фазовые координаты и управление подчинены требованиям задачи понтрягинского типа ($\mathbf{L}(t)$, $\mathbf{w}(t)$ — функции непрерывные, $\mathbf{M}(t)$ — кусочно-непрерывная функция); кватернион $\mathbf{L}(t)$ нормирован, т.е. $\|\mathbf{L}\| = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$; i_1, i_2, i_3 — орты гиперкомплексного пространства (мнимые единицы Гамильтона), которые можно идентифицировать с ортами трехмерного векторного пространства $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, символ "o" означает кватернионное умножение. В динамических уравнениях Эйлера (1.2) для твердого тела с одной осью симметрии (направленной в нашем случае вдоль орта $\mathbf{i}_1$ связанной с твердым телом системы координат) I_1, I_2 — главные центральные моменты инерции твердого тела, $I_1, I_2 = \text{const} > 0$.

Заданы произвольные граничные условия по угловому положению

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{L}_0, \mathbf{L}(T) = \mathbf{L}_T \quad (1.3)$$

и угловой скорости КА

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}(T) = \mathbf{w}_T. \quad (1.4)$$

Требуется определить оптимальное управление $\mathbf{M}^{\text{опт}}(t)$ системой (1.1), (1.2) при граничных условиях (1.3), (1.4), доставляющее минимум функционалу

$$J = \int_0^T (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt, \quad (1.5)$$

где время T произвольно и зафиксировано.

Следуя работе [11], можно полагать, что функционал (1.5) пропорционален энергетическим затратам на создание управляющего момента твердого тела.

2. Замены переменных в уравнениях движения КА

Перейдем от размерных переменных задачи к безразмерным по формулам

$$\begin{aligned} t^{\text{безраз}} &= t/T, \mathbf{w}^{\text{безраз}} = \mathbf{w}T, \mathbf{M}^{\text{безраз}} = \mathbf{M}T^2/I^{\text{масш}}, \\ J^{\text{безраз}} &= JT^3/(I^{\text{масш}})^2, I_k^{\text{безраз}} = I_k/I^{\text{масш}}, k = 1, 2, \\ I^{\text{масш}} &= ((I_1^2 + 2I_2^2)/3)^{1/2}, \end{aligned}$$

при этом вид формул (1.1)—(1.4) не изменится, а функционал (1.5) запишется так:

$$J = \int_0^1 (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) dt.$$

Далее будем иметь в виду постановку задачи (1.1)—(1.5) (где $T = 1$) в безразмерных переменных, и верхние индексы у них будут опущены.

В целях упрощения (в смысле динамических уравнений Эйлера) задачи (1.1)—(1.5) осуществим замены переменных, аналогичные сделанным в работах [12, 13], сводящие исходную задачу оптимального разворота осесимметричного КА (твердого тела) к задаче оптимального разворота тела со сферическим распределением масс. Для этого перепишем уравнения (1.2) в виде

$$\dot{w}_1 = m_1;$$

$$\dot{w}_2 = b_1m_2 - bw_1w_3;$$

$$\dot{w}_3 = b_1m_3 - bw_1w_2,$$

где $m_1 = M_1/I_1, m_2 = M_2/I_1, m_3 = M_3/I_1, b = (I_1 - I_2)/I_2, b_1 = I_1/I_2$.

Замена переменных $w_k(t)$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(bb_1^{-1}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right) & -\sin\left(bb_1^{-1}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right) \\ 0 & \sin\left(bb_1^{-1}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right) & \cos\left(bb_1^{-1}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где $\omega_k = \omega_k(t), k = \overline{1, 3}$, — новые переменные, преобразует уравнения (1.2) следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 \cos\left(bb_1^{-1}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right) & b_1 \sin\left(bb_1^{-1}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right) \\ 0 & -b_1 \sin\left(bb_1^{-1}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right) & b_1 \cos\left(bb_1^{-1}\int_0^t \omega_1(\tau)d\tau\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

или в кватернионной записи

$$\dot{\omega} = \tilde{\mathbf{B}} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \mathbf{B}; \quad (2.3)$$

$$\mathbf{B}(t) = \exp \left\{ \mathbf{i}_1 b_2 \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau / 2 \right\}, \quad (2.4)$$

где "∼" — сопряжение кватерниона, а "exp{.}" — кватернионная экспонента, $b_2 = b b_1^{-1} = 1 - I_2/I_1 = 1 - b_1^{-1}$.

Отметим, что $|\mathbf{B}(t)| = 1, \forall t$.

Кватернионное уравнение углового движения КА (2.1) при этом запишется следующим образом:

$$2\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \circ \mathbf{B} \circ (b_1^{-1} \omega_1 \mathbf{i}_1 + \omega_2 \mathbf{i}_2 + \omega_3 \mathbf{i}_3) \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (2.5)$$

где кватернион $\mathbf{B}$ определяется соотношением (2.4).

С учетом первого соотношения системы (1.2) и начального условия по угловой скорости КА (1.4) уравнение (2.3) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\omega} = \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta; \quad (2.6)$$

$$\beta(t) = \exp \left\{ \mathbf{i}_1 b_2 \int_0^t \left(\int_0^\tau m_1(\xi) d\xi + w_{0_1} \right) d\tau / 2 \right\}. \quad (2.7)$$

Нелинейное выражение, стоящее в правой части уравнения (2.6) и зависящее только от переменных $m_k(t), k = 1, 3$, примем за новое управление $\mathbf{u}(t)$:

$$\mathbf{u} = \tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta, \quad (2.8)$$

где β определяется выражением (2.7). Отметим, что $u_1(t) = b_1 m_1(t)$, и поэтому в замене переменных (2.8) всегда можно совершить обратный ход: по новой векторной переменной $\mathbf{u}(t)$ (когда она будет известна) восстановить управление $\mathbf{m}(t)$ задачи (1.1)–(1.5).

Модуль вектора нового управления связан с модулем вектора управляющего момента КА следующим образом:

$$|\mathbf{u}| = |\tilde{\beta} \circ b_1 \mathbf{m} \circ \beta| = b_1 |\tilde{\beta}| |\mathbf{m}| |\beta| = b_1 |\mathbf{m}| = b_1 |\mathbf{M}|/I_1 = |\mathbf{M}|/I_2.$$

Исходя из соотношения (2.5) осуществим еще одну замену переменных

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} \circ \tilde{\mathbf{B}}, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ — новая кватернионная переменная, описывающая угловое положение КА.

С учетом всех указанных выше замен переменных и вспомогательного обозначения

$$\theta(t) = b_2 \int_0^t \omega_1(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

задача оптимального разворота твердого тела (1.1)–(1.5) примет вид

$$2\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \circ \omega; \quad (2.11)$$

$$\dot{\omega} = \mathbf{u}; \quad (2.12)$$

$$\theta^* = b_2 \omega_1; \quad (2.13)$$

$$\theta(0) = 0; \quad (2.14)$$

$$\omega(0) = \omega_0 = b_1 w_{0_1} \mathbf{i}_1 + w_{0_2} \mathbf{i}_2 + w_{0_3} \mathbf{i}_3;$$

$$\omega(T) = \omega_T = \tilde{\mathbf{B}}(\theta(T)) \circ$$

$$\circ (b_1 w_{T_1} \mathbf{i}_1 + w_{T_2} \mathbf{i}_2 + w_{T_3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(T)); \quad (2.15)$$

$$\mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0 = \mathbf{L}_0;$$

$$\mathbf{A}(T) = \mathbf{A}_T = \mathbf{L}_T \circ \mathbf{B}(\theta(T)), T = 1; \quad (2.16)$$

$$J = I_2^2 \int_0^1 \mathbf{u}^2 dt \rightarrow \min. \quad (2.17)$$

В этой задаче искомыми величинами являются $\mathbf{u}^{\text{опт}}, \mathbf{A}^{\text{опт}}, \omega^{\text{опт}}$, а $\mathbf{B}(\theta(T)) = \exp\{\mathbf{i}_1 \theta(T)/2\}$. Как видно, векторное дифференциальное уравнение (2.12) имеет структуру, соответствующую динамическим уравнениям Эйлера для сферически симметричного твердого тела. Это существенно облегчает исследование задачи.

3. Модифицированная задача оптимального разворота

Одной из основных проблем при построении аналитического решения в задаче оптимального разворота КА (твердого тела) является разрешимость классической задачи Дарбу — аналитического определения $\mathbf{A}(t)$ из уравнения (2.11) при известных $\mathbf{A}_0, \omega(t)$.

Для кватернионного дифференциального уравнения (2.11) при условии, что вектор угловой скорости $\omega(t)$ задается выражением

$$\omega(t) = \mathbf{i}_1 \frac{df}{dt} \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \frac{df}{dt} \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \frac{dg}{dt}, \quad (3.1)$$

в котором $f(t)$ и $g(t)$ — произвольные функции времени, известно решение [14], удовлетворяющее начальному условию (2.16):

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{-\mathbf{i}_2 f(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2 f(t)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\}. \quad (3.2)$$

Формулы (3.1), (3.2) включают в себя все известные точные аналитические решения традиционной задачи оптимального разворота твердого тела при его сферической симметрии, когда вектор угловой скорости на всем интервале времени движения твердого тела постоянен по направлению или описывает в пространстве круговой конус [1–3, 5–9].

Заметим [14], что задачу Дарбу с произвольно заданным вектором угловой скорости $\omega(t)$ с помощью замен переменных можно свести к решению уравнения типа (2.11) с угловой скоростью

$$\omega^*(t) = -\left(\mathbf{i}_1 \frac{df}{dt} \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \frac{df}{dt} \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \frac{dg}{dt} \right),$$

отличающейся от выражения (3.1) только знаком. При этом явное аналитическое решение этой задачи, как и при произвольном векторе $\omega(t)$, неизвестно.

Выражение (3.1) и решение (3.2) можно обобщить, добавив поворот на постоянный угол вокруг некоторой оси. Такой поворот задается с помощью кватерниона $\mathbf{K}$, $\|\mathbf{K}\| = 1$. Тогда вектор ω и кватернион Λ будут определяться соотношениями

$$\omega = \tilde{\mathbf{K}} \circ \left(\mathbf{i}_1 \frac{df}{dt} \sin g(t) + \mathbf{i}_2 \frac{df}{dt} \cos g(t) + \mathbf{i}_3 \frac{dg}{dt} \right) \circ \mathbf{K}; \quad (3.3)$$

$$\Lambda = \Lambda_0 \circ \tilde{\mathbf{K}} \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(t) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(t)/2\} \circ \mathbf{K}. \quad (3.4)$$

Будем рассматривать вторые производные от функций f и g в качестве управляющих параметров. Тогда, если ввести обозначения

$$\frac{df}{dt} = f_1, \quad \frac{dg}{dt} = g_1, \quad (3.5)$$

то можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих управляемую систему:

$$\frac{df}{dt} = f_1, \quad \frac{dg}{dt} = g_1, \quad \frac{df_1}{dt} = v_1, \quad \frac{dg_1}{dt} = v_2, \quad (3.6)$$

где f, f_1, g, g_1 — фазовые координаты; v_1, v_2 — управляющие параметры.

Ограничимся случаем, когда кватернион $\mathbf{K}$ представляется в виде произведения

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1, \quad \mathbf{K}_1 = \exp\{\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \mathbf{K}_2 = \exp\{\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\}, \quad (3.7)$$

где α_1, α_2 — некоторые постоянные. Отметим, что кватернионы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ определяют поворот вектора ω (3.1) вокруг осей $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. Поворот вокруг оси $\mathbf{i}_3$ уже включен в формулу (3.3), если учесть, что в функцию $g(t)$ входит аддитивная постоянная. Сопряженный кватернион $\tilde{\mathbf{K}}$ будет представляться в виде

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2, \quad \tilde{\mathbf{K}}_1 = \exp\{-\mathbf{i}_1 \alpha_1/2\}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 = \exp\{-\mathbf{i}_2 \alpha_2/2\}. \quad (3.8)$$

Условия того, что выражения для ω, Λ (3.3), (3.4) удовлетворяют граничным условиям (2.15), (2.16) с учетом (3.7), (3.8), запишутся в виде

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(0) \sin g(0) + \mathbf{i}_2 f_1(0) \cos g(0) + \mathbf{i}_3 g_1(0)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = b_1 w_{01} \mathbf{i}_1 + w_{02} \mathbf{i}_2 + w_{03} \mathbf{i}_3; \quad (3.9)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ (\mathbf{i}_1 f_1(1) \sin g(1) + \mathbf{i}_2 f_1(1) \cos g(1) + \mathbf{i}_3 g_1(1)) \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 = \tilde{\mathbf{B}}(\theta(1)) \circ (b_1 w_{T1} \mathbf{i}_1 + w_{T2} \mathbf{i}_2 + w_{T3} \mathbf{i}_3) \circ \mathbf{B}(\theta(1)); \quad (3.10)$$

$$\text{vect}(\mathbf{L}_0 \circ \tilde{\mathbf{K}}_1 \circ \tilde{\mathbf{K}}_2 \circ \exp\{-\mathbf{i}_3 g(0)/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_2(f(1) - f(0))/2\} \circ \exp\{\mathbf{i}_3 g(1)/2\} \circ \mathbf{K}_2 \circ \mathbf{K}_1 \circ \tilde{\mathbf{B}}(\theta(1)) \circ \mathbf{L}_T) = 0. \quad (3.11)$$

Тогда для управляемой системы (3.6) можно сформулировать следующую задачу оптимального управления. Требуется найти оптимальные управления $v_1(t), v_2(t)$, которые переводят управляемую систему (3.6) из начального состояния

$$f = f(0), f_1 = f_1(0), g = g(0), g_1 = g_1(0) \quad (3.12)$$

в конечное состояние

$$f = f(T), f_1 = f_1(T), g = g(T), g_1 = g_1(T), \quad (3.13)$$

удовлетворяющие соотношениям (3.9)—(3.11), в которых α_1, α_2 выступают как параметры, подлежащие определению, и доставляют минимум функционалу

$$J = \int_0^1 (v_1^2 + v_2^2) dt. \quad (3.14)$$

Такую задачу оптимального управления (с учетом замен переменных (2.1), (2.4), (2.7)—(2.9)) будем называть модифицированной задачей оптимального разворота осесимметричного КА (твёрдого тела).

Учитывая соотношение (3.7), можно записать компоненты вектора ω (3.3) в виде

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_1 \sin g \cos \alpha_2 - g_1 \sin \alpha_2; \\ \omega_2 &= f_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + g_1 \cos g \cos \alpha_1) + g_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2; \\ \omega_3 &= f_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - g_1 \cos g \sin \alpha_1) + g_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Компоненты вектора управления $\mathbf{u}$, который согласно выражению (2.12) является производной по времени от вектора ω , определяются по формулам

$$\begin{aligned} u_1 &= \dot{\omega}_1 = (v_1 \sin g + f_1 g_1 \cos g) \cos \alpha_2 - v_2 \sin \alpha_2; \\ u_2 &= \dot{\omega}_2 = v_1 (\sin g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos g \cos \alpha_1) + f_1 g_1 (\cos g \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \sin g \cos \alpha_1) + v_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2; \\ u_3 &= \dot{\omega}_3 = v_1 (\sin g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \cos g \sin \alpha_1) + f_1 g_1 (\cos g \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 + \sin g \sin \alpha_1) + v_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Квадрат вектора $\mathbf{u}$, который является подынтегральной функцией в функционале (2.17), согласно выражениям (3.16) определяется по формуле

$$\mathbf{u}^2 = v_1^2 + v_2^2 + f_1^2 g_1^2. \quad (3.17)$$

4. Решение задачи с помощью принципа максимума

Функция Гамильтона—Понтрягина [15] для поставленной задачи оптимального управления имеет вид

$$H = -(v_1^2 + v_2^2) + \psi_1 f_1 + \psi_2 g_1 + \psi_3 v_1 + \psi_4 v_2, \quad (4.1)$$

где $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ — сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \frac{d\psi_2}{dt} = 0, \frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_1, \frac{d\psi_4}{dt} = -\psi_2. \quad (4.2)$$

Общее решение уравнений (4.2), содержащее произвольные постоянные $c_1, \dots, c_4$, имеет вид

$$\psi_1 = c_1, \psi_2 = c_2, \psi_3 = -c_1 t + c_3, \psi_4 = -c_2 t + c_4. \quad (4.3)$$

Из условия максимума для функции Гамильтона—Понтрягина (4.1) определяется оптимальное управление

$$\begin{aligned} v_1 &= \psi_3/2 = (-c_1 t + c_3)/2; \\ v_2 &= \psi_4/2 = (-c_2 t + c_4)/2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

После подстановки (4.4) в систему уравнений (3.6) находится общее решение для фазовых координат, содержащее восемь произвольных постоянных $c_1, \dots, c_8$:

$$\begin{aligned} f &= -c_1 t^3/12 + c_3 t^2/4 + c_5 t + c_7; \\ g &= -c_2 t^3/12 + c_4 t^2/4 + c_6 t + c_8; \\ f_1 &= -c_1 t^2/4 + c_3 t/2 + c_5; \\ g_1 &= -c_2 t^2/4 + c_4 t/2 + c_6. \end{aligned} \quad (4.5)$$

В связи с тем, что постоянная c_7 входит в функцию f как аддитивная постоянная, то из формулы (3.4) для кватерниона Λ видно, что эта постоянная не оказывает влияние, поэтому c_7 можно положить равной нулю. Из формул (3.3), (3.4), (3.7), (4.5) видно, что в выражения для вектора ω и кватерниона Λ входят девять произвольных постоянных $c_1, \dots, c_6, c_8, \alpha_1, \alpha_2$, для определения которых имеется девять условий (3.9)—(3.11). Если формулы (4.5) подставить в соотношения (3.3), (3.4), то будут получены аналитические выражения для определения законов изменения оптимальной угловой скорости и оптимальной траектории КА. Эти выражения определяют оптимальный в смысле минимума комбинированного функционала (3.14) разворот КА в классе обобщенных конических движений. Далее по формулам (2.1), (2.4), (2.9) вычисляются вектор безразмерной угловой скорости $\mathbf{w}$ и кватернион ориентации КА $\mathbf{L}$. По формулам (3.16) определяются компоненты вектора $\mathbf{u}$. Из выражений (2.7), (2.8) следует, что безразмерный управляющий момент $\mathbf{M}$ выражается через вектор $\mathbf{u}$ следующим образом:

$$\mathbf{M} = I_2 \tilde{\mathbf{B}}(\theta) \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{B}(\theta). \quad (4.6)$$

Формула (4.6) определяет аналитическое решение для управляющего момента, соответствующего решению модифицированной задачи. Модифицированная задача оптимального разворота КА (твердого тела), тем самым, решена полностью. Полученные таким способом кватернион $\mathbf{L}$ и векторы $\mathbf{w}, \mathbf{M}$ можно рассматривать как приближенное (квази-оптимальное) решение традиционной задачи опти-

мального разворота осесимметричного КА (твердого тела).

Следует отметить, что при сферической симметрии твердого тела квадрат модуля безразмерного управляющего момента традиционной задачи выражается через управляющие параметры и фазовые координаты модифицированной задачи следующим образом:

$$\mathbf{M}^2 = v_1^2 + f_1^2 g_1^2 + v_2^2. \quad (4.7)$$

Если в задаче оптимального разворота сферически-симметричного твердого тела векторы граничных условий по угловой скорости $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_T$ положить параллельными $\text{vect}(\tilde{\mathbf{L}}_0 \circ \mathbf{L}_T)$ (плоский эйлеров разворот твердого тела), то решения задач в традиционной и модифицированной постановках полностью совпадут. То же самое можно сказать и о случае, когда решение традиционной задачи оптимального разворота сферически-симметричного твердого тела получено в классе конических движений [9]. В этих случаях слагаемое $f_1^2 g_1^2$ в выражении (4.7) обращается в нуль и функционал (3.14) полностью переходит в функционал (1.5) традиционной задачи.

5. Численные примеры разворотов КА

В данном разделе на примере осесимметричного КА "Спейс Шаттл" [16], рассматриваемого как твердое тело, приводятся результаты численных решений задачи оптимального разворота в традиционной и модифицированной постановке для нескольких вариантов граничных условий по угловому положению и угловой скорости КА. На рис. 1, 2 представлена качественная картина изменения во времени компонент угловой скорости КА $w_i(t), i = \overline{1, 3}$, векторной части кватерниона ориентации КА $L_i(t), i = \overline{1, 3}$, и компонент вектора управляющего момента $M_i(t), i = \overline{1, 3}$.

На рис. 1 приведены результаты решения модифицированной задачи оптимального разворота КА. Расчеты проводились для значений:

$$I_1 = 3\,400\,648 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_2 = 21\,041\,672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$I_3 = I_2 = 21\,041\,672 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \text{ или}$$

$$I_1 = 0,1967, I_2 = 1,2168, I_3 = I_2$$

(безразмерные моменты инерции);

$$\mathbf{L}_0 = (0,79505, 0,29814, -0,39752, 0,34783),$$

$$\mathbf{L}_T = (0,84434, 0,39846, -0,3260, 0,14848), \quad (5.1)$$

$$\mathbf{w}_0 = (0,27388, -0,23883, -0,3),$$

$$\mathbf{w}_T = (0, 0, -0,59). \quad (5.2)$$

Значения постоянных $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_6, c_8$, входящих в аналитическое решение задачи, таковы:

$$\alpha_1 = -0,04922, \alpha_2 = -0,03221, c_1 = 1,95809,$$

$$c_2 = -0,91029, c_3 = 1,43673, c_4 = -1,06099,$$

$$c_5 = -0,25889, c_6 = -0,28631, c_8 = -0,20819.$$

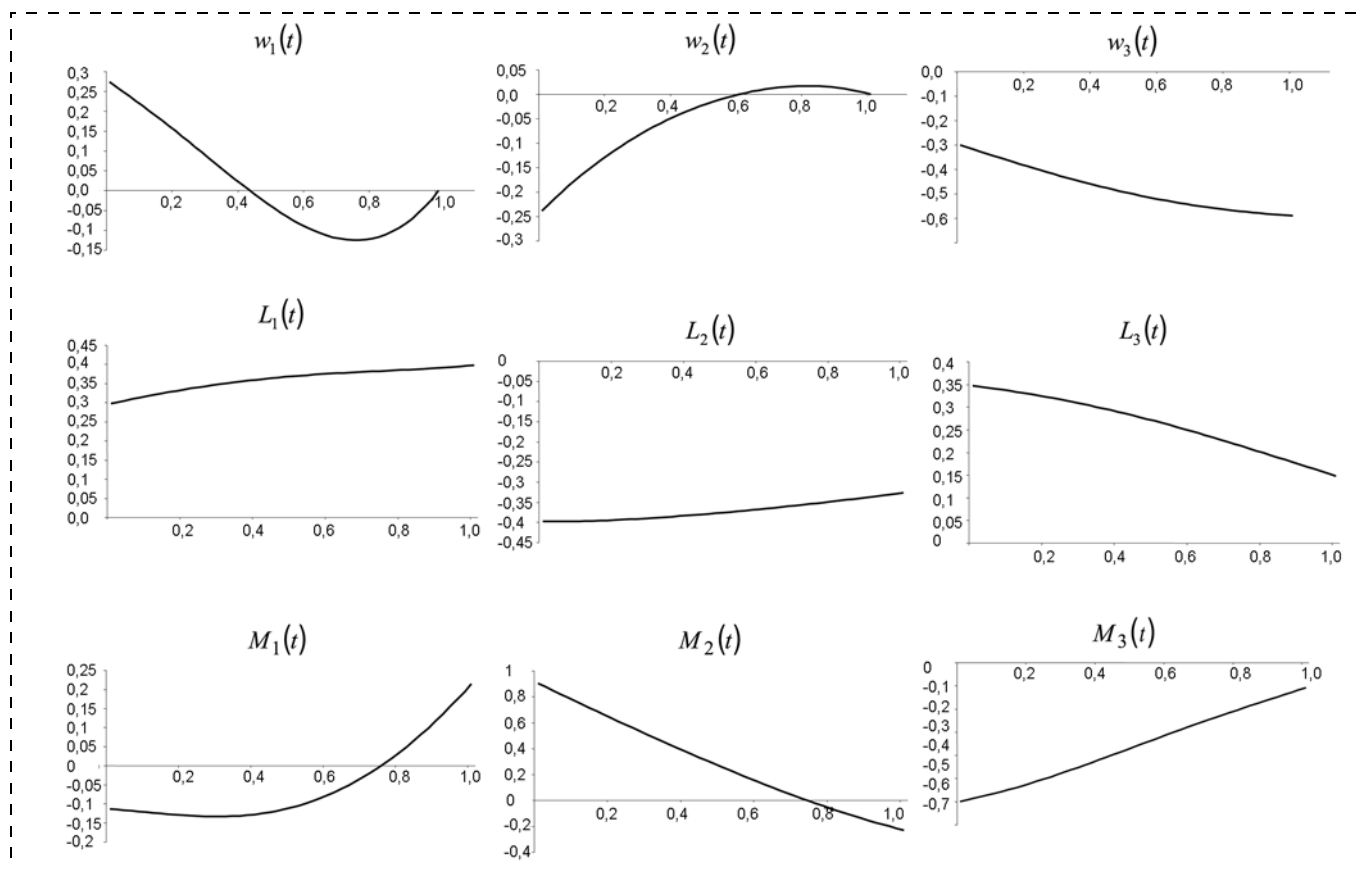


Рис. 1. Результаты решения модифицированной задачи (произвольные граничные условия)

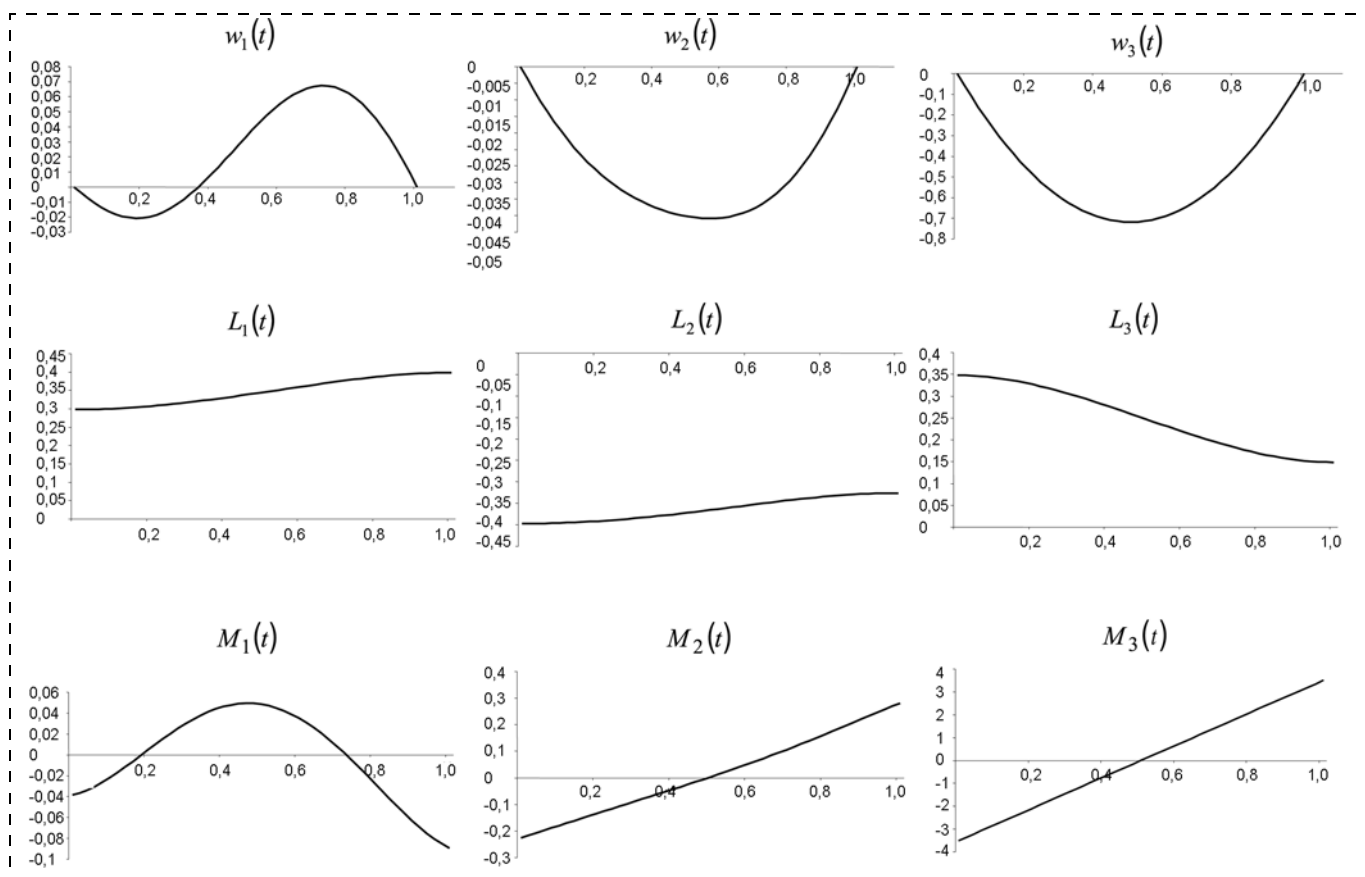


Рис. 2. Результаты решения модифицированной задачи (разворот из положения покоя в положение покоя)

Таблица 1

t		M_1		M_2		M_3	
Традиционная	Модифицированная	Традиционная	Модифицированная	Традиционная	Модифицированная	Традиционная	Модифицированная
0	0	-0,1556	-0,1132	0,8792	0,9044	-0,5955	-0,5984
0,5	0,5	-0,0780	-0,1102	0,2846	0,2613	-0,3644	-0,3649
$T = 1$	$T = 1$	0,1444	0,2141	-0,2897	-0,2282	-0,1065	-0,1077

Таблица 2

t		M_1		M_2		M_3	
Традиционная	Модифицированная	Традиционная	Модифицированная	Традиционная	Модифицированная	Традиционная	Модифицированная
0	0	0,0260	-0,0386	-0,2294	-0,2257	-3,4941	-3,4944
0,5	0,5	0,0	0,0485	-0,0012	0,0034	0,0001	0,0002
$T = 1$	$T = 1$	-0,0260	-0,0896	0,2978	0,2808	0,3489	0,3489

С граничными условиями (5.1), (5.2) с помощью универсальной программы численного решения краевой задачи оптимизации, полученной на основании принципа максимума и описанной в работах [13, 17], также решалась задача оптимального разворота КА в традиционной постановке (1.1)–(1.5). Графики решения двух задач практически совпали. Для примера в табл. 1 приведены значения компонент вектора $\mathbf{M}(t)$ на концах и в середине интервала времени движения КА $[0, 1]$ в этих двух решениях.

Значение функционала (1.5) для традиционной задачи в рассматриваемом примере составляет 0,35794. Значение того же функционала, вычисленного на основе решения модифицированной задачи, составляет 0,35898. Другими словами, в рассматриваемом примере расхождение между значениями функционала (1.5) для традиционной и модернизированной задачи составляет меньше 0,3 %. Это показывает близость значений оптимального момента, полученных при решении традиционной и модифицированной задач.

На рис. 2 приведены результаты решения модифицированной задачи оптимального разворота КА "Спейс Шаттл" в важном с практической точки зрения случае разворота из положения покоя в положение покоя. По формулам разделов 3, 4 расчеты проводились для граничных условий (5.1)

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{w}_T = (0, 0, 0). \quad (5.3)$$

Значения постоянных $\alpha_1, \alpha_2, c_1, \dots, c_6, c_8$, входящих в аналитическое решение задачи, таковы:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -0,01196, \alpha_2 = 0,00205, c_1 = -0,89182, \\ c_2 &= -11,47697, c_3 = -0,44591, c_4 = -5,73848, \\ c_5 &= 0,0, c_6 = 0,0, c_8 = 0,16941. \end{aligned}$$

Также с граничными условиями (5.1), (5.3) численно решалась задача оптимального разворота КА в традиционной постановке (1.1)–(1.5). Графики решения двух задач практически совпали. Для примера в табл. 2 приведены значения компонент век-

тора $\mathbf{M}(t)$ на концах и в середине интервала времени движения КА $[0, 1]$ в этих двух решениях.

Значение функционала (1.5) для традиционной задачи в рассматриваемом примере составляет 4,08727. Значение того же функционала, вычисленного на основе решения модифицированной задачи, составляет 4,08871. Таким образом, в рассматриваемом примере расхождение между значениями функционала (1.5) для традиционной и модернизированной задачи составляет меньше 0,033 %.

Следует отметить, что кватернион ориентации КА (твердого тела) $\mathbf{L}(t)$ может быть двузначным [1], т. е. $\mathbf{L}$ и $-\mathbf{L}$ соответствуют одному и тому же угловому положению КА в пространстве.

Заключение

Представленное в статье аналитическое квази-оптимальное решение задачи разворота осесимметричного КА (твердого тела) при произвольных граничных условиях может найти свое применение при построении систем управления КА, как и известное оптимальное аналитическое решение задачи, полученное в классе конических движений для частного случая граничных условий по угловой скорости КА [4].

Список литературы

1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
2. Scrivener S. L., Thompson R. C. Survey of time-optimal attitude maneuvers // J. Guidance, Control, and Dynamics. 1994. Vol. 17, N. 2. P. 225–233.
3. Петров Б. Н., Боднер В. А., Алексеев К. Б. Аналитическое решение задачи управления пространственным поворотным маневром // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 6. С. 1235–1238.
4. Бранец В. Н., Черток М. Б., Казначеев Ю. В. Оптимальный разворот твердого тела с одной осью симметрии // Космич. исследования. 1984. Т. 22, Вып. 3. С. 352–360.
5. Сиротин А. Н. Оптимальное управление переориентацией симметричного твердого тела из положения покоя в положение покоя // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 36–47.

6. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Новый класс аналитических решений в задаче оптимального разворота сферически симметричного твердого тела // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 2. С. 16—27.
7. Молоденков А. В. Кватернионное решение задачи оптимального разворота твердого тела со сферическим распределением масс // Проблемы механики и управления. Сб. научн. трудов. Пермь: ПГУ, 1995. С. 122—131.
8. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Аналитическое решение задачи оптимального в смысле комбинированного функционала разворота твердого тела в классе конических движений // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 2. С. 3—16.
9. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота сферически симметричного твердого тела при произвольных граничных условиях в классе обобщенных конических движений // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 5. С. 22—34.
10. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Алгоритм оптимального по энергии разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 8. С. 536—544.
11. Черноушко Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н. Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 383 с.
12. Челноков Ю. Н. Об осцилляторном и ротационном движениях одного класса механических систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 1. С. 28—35.
13. Молоденков А. В., Сапунков Я. Г. Решение задачи оптимального разворота осесимметричного космического аппарата с ограниченным и импульсным управлением при произвольных граничных условиях // Изв. РАН. ТиСУ. 2007. № 2. С. 90—105.
14. Молоденков А. В. К решению задачи Дарбу // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 3—13.
15. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
16. Li F., Bainum P. M. Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers // J. Guidance, Contr., and Dynamics. 1990. V. 13, N. 1. P. 38—45.
17. Сапунков Я. Г., Молоденков А. В. Численное решение задачи оптимальной переориентации вращающегося космического аппарата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 6. Автоматическое и автоматизированное управление летательными аппаратами. 2008. № 6. С. 10—15.

Quasioptimal Algorithm of Turn of an Axially Symmetric Spacecraft under Arbitrary Boundary Conditions

Ya. G. Sapunkov, iptmuran@san.ru, A. V. Molodenkov, iptmuran@san.ru
Precision Mechanics and Control Problems Institute of RAS, Saratov, 410028, Russian Federation

Corresponding author: Molodenkov Aleksei V., Ph. D., Senior Researcher,
Laboratory of Mechanics, Navigation and Motion Control, Precision Mechanics
and Control Problems Institute, RAS, Saratov, 410028, Russian Federation, e-mail: iptmuran@san.ru

Accepted on August 31, 2017

The traditional problem of optimal turn in the sense of minimum of energy loss of an axially symmetric spacecraft as a rigid body under arbitrary boundary conditions on angular position and angular velocity of a spacecraft without constraint on the function of control is considered in the quaternion statement. The spacecraft reorientation time is arbitrary and fixed. Using substitutions of variables, the original problem is simplified (in terms of dynamic Euler equations) to the optimal slew problem for a rigid body with a spherical mass distribution. The simplified problem contains one additional scalar differential equation. In the class of generalized conical motions, the traditional optimal slew problem is modified to obtain analytical solutions for motion equations. The solutions contain arbitrary constants and two arbitrary scalar functions (generalized conical motion parameters). An optimization problem is formulated and solved with respect to these two functions, the second derivatives of which serve as controls in the optimization problem. The resulting analytical solution of the modified problem can be treated as an approximate (quasioptimal) solution of the traditional optimal slew problem under arbitrary boundary conditions. The quasioptimal algorithm of the optimal turn of a spacecraft is given. Numerical examples showing the closeness of the solutions of the traditional and modified optimal slew problems for an axially symmetric spacecraft are given.

Keywords: axially symmetric rigid body, spacecraft, optimal turn, quasioptimal solution, generalized conical motion, arbitrary boundary conditions

For citation:

Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V. Quasioptimal Algorithm of Turn of an Axially Symmetric Spacecraft under Arbitrary Boundary Conditions, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2017, vol. 18, no. 12, pp. 847—855.

DOI: 10.17587/mau.18.847-855

References

1. Branets V. N., Shmyglevskij I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachah orientacii tverdogo tela* (The Use of Quaternions in Problems of Orientation of Solid Bodies), Moscow, Nauka, 1973, 320 p. (in Russian).
2. Scriven S. L., Thompson R. C. Survey of Time-Optimal Attitude Maneuvers, *J. guidance, control, and dynamics*, 1994, vol. 17, no. 2, pp. 225—233.
3. Petrov B. N., Bodner V. A., Alekseev K. B. *Analiticheskoe reshenie zadachi upravleniya prostranstvennym povorotnym manevrom* (Analytical Solution of the Spatial Slew Manuever), *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1970, vol. 192, no. 6, pp. 1235—1238 (in Russian).
4. Branets V. N., Chertok M. B., Kaznacheev Yu. V. *Optimal'nyj razvorot tverdogo tela s odnoy osyu simmetrii* (Optimal Slew of a Solid Body with a Single Symmetry Axis), *Kosmicheskie Issledovaniya*, 1984, vol. 22, no. 3, pp. 352—360 (in Russian).
5. Sirotin A. N. *Optimal'noe upravlenie pereorientaciej simmetrichnogo tverdogo tela iz polozheniya pokoya v polozhenie pokoya* (Optimal Reorientation of a Symmetric Solid Body from a State of Rest to Another State of Rest), *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1989, no. 1, pp. 36—46 (in Russian).
6. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. A New Class of Analytical Solutions in the Optimal Turn Problem for a Spherically Symmetric Body, *Mech. Solids*, 2012, vol. 47, no. 2, pp. 167—177.
7. Molodenkov A. V. *Kvaternionnoe reshenie zadachi optimal'nogo v smysle minimuma energeticheskikh zatrat razvorota tverdogo tela* (Quaternion-Based Solution of the Energy Optimal Slew of a Solid Body), in *Collected Papers "Problems of Mechanics and Control"*, Perm Gos. Univ., Perm, 1995, p. 122—131 (in Russian).
8. Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G. Analytical Solution of the Optimal Attitude Maneuver Problem with a Combined Objective

Functional for a Rigid Body in the Class of Conical Motions, *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, no. 2, pp. 135–147 (in Russian).

9. **Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.** Solutions of the Optimal Turn Problem for a Spherically Symmetric Body under Arbitrary Boundary Conditions in the Class of Generalized Conical Motion, *Mech. Solids*, 2014, vol. 49, no. 5, pp. 495–505 (in Russian).

10. **Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.** *Algoritm optimal'nogo po energii razvorota kosmicheskogo apparata pri proizvol'nyh granichnykh usloviyakh* (Algorithm for the Optimal Turn of a Spacecraft in the Sense of Minimal Energy Loss under Arbitrary Boundary Conditions), *Mexatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2015, vol. 16, no. 8, pp. 536–544 (in Russian).

11. **Chernous'ko F. L., Akulenko L. D., Sokolov B. N.** *Upravlenie kolebaniyami* (Control of Oscillations), Moscow, Nauka, 1980, 383 p. (in Russian).

12. **Chelnokov Yu. N.** *Ob oscillyatornom i rotatsionnom dviglenii odnogo klassa mekhanicheskikh system* (About Oscillator and Rotational Motion of the One Class of Mechanic System), *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Mekh. Tverd. Tela*, 1989, no. 1, pp. 28–35 (in Russian).

13. **Molodenkov A. V., Sapunkov Ya. G.** A Solution of the Optimal Turn Problem of an Axially Symmetric Spacecraft with Bounded and Pulse Control under Arbitrary Boundary Conditions, *J. Computer and Systems Sciences International*, 2007, vol. 46, no. 2, pp. 310–323 (in Russian).

14. **Molodenkov A. V.** On the Solution of the Darboux Problem, *Mech. Solids*, 2007, vol. 42, no. 2, pp. 167–176 (in Russian).

15. **Pontryagin L. S., Boltyanskij V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh processov* (The Mathematical Theory of Optimal Processes), Moscow, Nauka, 1961, 384 p. (in Russian).

16. **Li F., Bainum P. M.** Numerical Approach for Solving Rigid Spacecraft Minimum Time Attitude Maneuvers, *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 1990, vol. 13, no. 1, pp. 38–45.

17. **Sapunkov Ya. G., Molodenkov A. V.** *Chislennoe reshenie zadachi optimal'noy pereorientatsii vrashhayushchegosya kosmicheskogo apparata* (Numerical Solution of Optimal Reorientation Problem of Rotating Spacecraft), *Mexatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2008, no. 6, pp. 10–15 (in Russian).

УДК 629.78

DOI: 10.17587/mau.18.855-861

В. Ф. Петрищев, д-р техн. наук, вед. науч. сотр., mail@samspace.ru,
АО "Ракетно-космический центр "Прогресс", г. Самара

Энергосберегающее управление плоскостными параметрами орбиты геостационарного космического аппарата с помощью двигателя малой регулируемой тяги

Разработан энергосберегающий алгоритм управления плоскостными параметрами орбиты геостационарного космического аппарата с помощью двигателя малой регулируемой тяги. В результате математического моделирования и сравнения полученных затрат характеристической скорости с затратами, приведенными в технической литературе, показана эффективность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: вспомогательная система, заданная система, геостационарная орбита, коррекция орбиты, критерий качества, энергосберегающий алгоритм

Введение

Актуальность задачи обусловлена тем, что с течением времени гравитационные возмущения, действующие на геостационарный космический аппарат (ГСКА) со стороны Луны, Солнца и других планет, приводят к отклонениям в параметрах его орбиты и точки стояния. В связи с этим периодически необходимо проводить коррекцию орбиты и возвращать ГСКА в заданную точку стояния. Кроме того, в настоящее время все более актуальной становится задача удаления ГСКА, выведенных из эксплуатации (так называемый космический мусор), поскольку они представляют серьезную угрозу для функционирующих ГСКА. По идеологии работы [1] с экономической точки зрения мусор целесообразно собирать в одну точку геостационарной орбиты (ГСО). В связи с этой задачей особенно важным является вопрос о разработке энергосберегающего алгоритма коррекции параметров ГСО буксира, курсирующего от точки сбора космического мусора до новой цели и обратно.

Задача энергосберегающего управления технологическими установками и наземными транспортными средствами рассмотрена в работе [2]. В ней

предложен математический аппарат и алгоритмическое обеспечение, позволяющие решать задачи анализа оптимального управления объектами на множестве состояний функционирования. В качестве методов синтеза при этом используются принцип максимума, динамическое программирование и метод синтезирующих переменных. Отмечено, что затраты энергии при оптимальном управлении снижаются на 8...20 %.

Традиционно задача управления параметрами орбиты ГСКА решается с использованием либо импульсного управления, либо малой постоянной тяги. Во всех случаях применяются методы программного управления. Примером решения задачи управления плоскостными параметрами орбиты ГСКА с помощью двигателя малой нерегулируемой тяги, прикладываемой в трансверсальном направлении, является работа [3]. В ней предложен трехшаговый алгоритм управления периодом обращения, эксцентриситетом и долготой точки стояния. В настоящей работе поставлена и решена задача энергосберегающего управления плоскостными параметрами орбиты ГСКА с использованием двигателя малой регулируемой тяги.