

**А. Б. Филимонов**, д-р техн. наук, проф., filimon\_ab@mail.ru,  
МИРЭА — Российский технологический университет, Москва,  
**Н. Б. Филимонов**, д-р техн. наук, проф., nbfilimonov@mail.ru,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

## Управление нулями и полюсами в задачах синтеза систем регулирования. Часть II. Компенсационно-модальный подход<sup>1</sup>

*В теории и практике построения автоматических систем важное место занимает проблема синтеза линейных стационарных систем автоматического регулирования (САР) с заданными показателями динамического качества процессов регулирования, которые связывают с видом и параметрами переходной характеристики системы. Исходные требования к динамическому качеству САР возможно формализовать посредством задания желаемой структуры и параметров передаточной функции (ПФ) системы — коэффициента усиления, нулей и полюсов.*

*В механизме формирования желаемой ПФ синтезируемой САР необходимо учитывать фактор компенсации нулей и полюсов объекта управления: они хотя и исключаются из ПФ канала "уставка—выход", но становятся полюсами синтезируемой системы и неизбежно проявляются в ее динамике при действии внешних возмущений.*

*В первой части статьи анализируется эффект компенсации нулей и полюсов объекта управления в САР, а также исследуется влияние фактора неминимально-фазовых нулей на динамику систем. Данный эффект и его негативные результаты наглядно проявляются в классическом компенсационном подходе к синтезу регуляторов по априори заданной (желаемой, эталонной) ПФ замкнутой САР.*

*Во второй части статьи изложен классический полиномиальный метод синтеза модальных компенсаторов, принципиальным недостатком которого является появление неконтролируемых ("паразитных") нулей. Предлагаются новые схемы регулирования, совмещающие функциональные возможности компенсационного и модального подходов. Обсуждаются и анализируются два метода синтеза САР с желаемыми полюсами и нулями системы, исключая эффект появления "паразитных" нулей. В первом методе в структуру регулятора включаются последовательное и параллельное корректирующие звенья (КЗ). Последнее содержит малые постоянные времени, которые порождают быстрозатухающие моды, влиянием которых на процессы регулирования можно пренебречь. Во втором методе также используется последовательное КЗ, однако вместо параллельного КЗ используется модальная обратная связь (МОС). Ключевое значение при этом играет свойство инвариантности нулей ПФ объекта при замыкании его МОС. Обсуждается возможность компенсации нежелательных левых нулей объекта, которые попадают в область локализации спектров быстрозатухающих мод.*

**Ключевые слова:** синтез системы регулирования, управление нулями и полюсами системы, компенсационно-модальный подход, полиномиальный синтез регуляторов, исключение эффекта "паразитных" нулей

*Теория автоматического управления располагает аппаратом, который позволяет решать ее основные задачи. Таким аппаратом является полиномиальное исчисление.*

Л. Н. Волгин

### Введение

В современной теории автоматического управления одной из центральных является проблема синтеза систем автоматического регулирования (САР) с заданными требованиями к динамическому качеству процессов регулиро-

вания [1]. В первой части статьи [2] анализируется эффект компенсации нулей и полюсов объекта управления в системах регулирования, а также исследуется влияние фактора неминимально-фазовых нулей на их динамику.

В инженерной практике синтеза высококачественных САР большую популярность получили методы, основанные на использовании аппарата полиномиального исчисления [3—14]. Данные методы, именуемые полиномиальны-

<sup>1</sup>Часть I опубликована в журнале "Мехатроника, автоматизация, управление", 2020, Т. 21, № 8.

ми (полиномиально-операторными или просто операторными), предлагают регулярные аналитические расчетные процедуры с полиномиальными диофантовыми уравнениями [15, 16]. Следует отметить, что полиномиальные методы синтеза САР с заданной передаточной функцией (ПФ) или заданными нулями и полюсами берут начало от работы В. Л. Волгина 1959 г. и получили развитие в работах М. Р. Елистратова, Л. П. Чхартишвили, Л. М. Скворцова, А. А. Воронова, Е. Н. Розенвассера, П. Д. Крутько, Г. И. Лозгачева, З. Ш. Ишматова, А. Р. Гайдука, В. В. Тютикова, С. В. Тарарыкина, П. Д. Кима, А. В. Воронина, К. М. Бобекова, А. А. Воеводы и др.

В настоящей, второй, части статьи анализируются структурные и динамические свойства классической схемы регулирования с модальным компенсатором. Исследуются возможности управления передаточными нулями и полюсами в системах регулирования с применением параллельных корректирующих звеньев и модальной обратной связи. Изложенные результаты развивают исследования авторов [1, 2, 17–22].

### Классическая схема регулирования с модальным компенсатором

Обратимся к одноконтурной САР, представленной на рис. 1. Здесь  $u$  и  $y$  — соответственно регулирующий вход и регулируемый выход объекта управления,  $y^*$  — задание (уставка, целевое значение выхода),  $e$  — ошибка регулирования:  $e = y^* - y$ .

Положим, что объект управления является линейной стационарной динамической системой, и его ПФ представлена рациональной дробью

$$W_0(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s)}, \quad (1)$$

где  $s$  — комплексная частота;  $A_0(s)$  и  $B_0(s)$  — взаимно простые полиномы вида

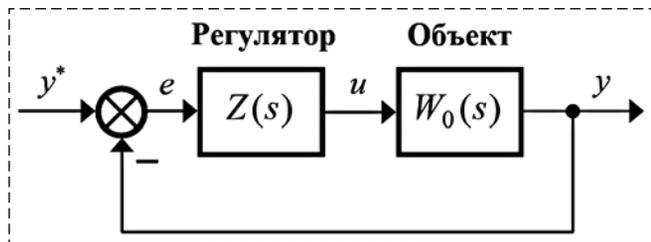


Рис. 1  
Fig. 1

$$A_0(s) = s^{n_0} + \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i^0 s^i, \quad B_0(s) = \sum_{j=0}^{m_0} b_j^0 s^j, \quad (2)$$

$n_0 = \deg A_0(s)$ ,  $m_0 = \deg B_0(s)$ ;  $a_i^0, b_j^0$  — постоянные вещественные коэффициенты, причем  $B_0(0) \neq 0$  и

$$m_0 < n_0. \quad (3)$$

Считаем, что объект вполне управляем и наблюдаем, так что ПФ (1) является несократимой дробью.

Динамический регулятор, именуемый далее *модальным компенсатором*, включен в прямую цепь САР и должен обеспечивать заданные полюсы замкнутой системе регулирования.

Представим ПФ регулятора в виде рациональной дроби

$$Z(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}, \quad (4)$$

где  $P(s)$  и  $Q(s)$  — взаимно простые полиномы:

$$P(s) = s^v + \sum_{i=0}^{v-1} p_i s^i, \quad Q(s) = \sum_{j=0}^v q_j s^j. \quad (5)$$

Заметим, что выполняется требование физической реализуемости регулятора:

$$\deg Q(s) \leq \deg P(s).$$

ПФ замкнутой САР равна

$$W(s) = \frac{Z(s)W_0(s)}{1 + Z(s)W_0(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (6)$$

где

$$A(s) = A_0(s)P(s) + B_0(s)Q(s), \quad (7)$$

$$B(s) = B_0(s)Q(s). \quad (8)$$

Динамический порядок замкнутой САР равен

$$n = n_0 + v, \quad (9)$$

а ее характеристический полином  $A(s)$  является унитарным (т.е. с единичным старшим коэффициентом) полиномом:

$$A(s) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i s^i.$$

Обозначим  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  — множество корней данного полинома.

Введем вектор настроечных параметров  $\mathbf{K}$  регулятора:

$$\mathbf{K} = (p_0, \dots, p_{v-1}, q_0, \dots, q_v).$$

Их число равно

$$\tilde{n} = 2\nu + 1. \quad (10)$$

Пусть задан *желаемый* спектр замкнутой САР — множество на  $s$ -плоскости, симметричное относительно вещественной оси:

$$\Lambda^* = \{\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*\}.$$

Ему отвечает *желаемый* характеристический многочлен системы:

$$A^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i^*) = s^n + a_{n-1}^* s^{n-1} + \dots + a_0^*. \quad (11)$$

Фактический и *желаемый* спектры должны совпадать:

$$\Lambda(\mathbf{K}) = \Lambda^*.$$

Данное условие равносильно равенству

$$A(\mathbf{K}, s) = A^*(s).$$

Следовательно, согласно соотношению (7) выбор структуры и параметров модального компенсатора сводится к решению диофантова уравнения в кольце полиномов

$$A_0(s)P(s) + B_0(s)Q(s) = A^*(s) \quad (12)$$

относительно неизвестных полиномов знаменателя  $P(s)$  и числителя  $Q(s)$  ПФ регулятора (4).

Очевидно, число настроечных параметров регулятора не может быть меньше степени характеристического полинома САР, так что

$$\tilde{n} \geq n.$$

Отсюда и из выражений (9), (10) получаем структурное требование к модальному компенсатору:

$$\nu \geq n_0 - 1, \quad (13)$$

при этом

$$n \geq 2n_0 - 1. \quad (14)$$

**Теорема 1.** Для разрешимости уравнения (12) при любом полиноме в правой части  $A^*(s)$ , степень которого отвечает условию (14), необходимо и достаточно, чтобы заданные полиномы  $A_0(s)$  и  $B_0(s)$  были взаимно простыми. ■

*Доказательство.* Разлагая дробь  $\frac{A^*(s)}{A_0(s)B_0(s)}$  на слагаемые — целую часть и сумму простейших дробей, можно получить выражение

$$\frac{A^*(s)}{A_0(s)B_0(s)} = P_2(s) + \frac{P_1(s)}{B_0(s)} + \frac{Q(s)}{A_0(s)}. \quad (15)$$

Здесь  $P_2(s)$  — выделенная целая часть, а остальные два слагаемых — правильные дроби, образованные суммированием простейших дробей, полюса которых являются соответственно корнями полиномов  $B_0(s)$  и  $A_0(s)$ .

Отметим неравенства, вытекающие из соотношения (15):

$$\deg P_1(s) \leq m_0 - 1, \quad (16)$$

$$\deg Q(s) \leq n_0 - 1.$$

Анализ соотношения (15) с учетом (14) и (3) показывает, что  $P_2(s)$  — ненулевой полином и

$$\deg P_2(s) = n - (n_0 + m_0) \geq 0. \quad (17)$$

Из неравенств (16) получаем

$$\frac{A^*(s)}{A_0(s)B_0(s)} = \frac{P(s)}{B_0(s)} + \frac{Q(s)}{A_0(s)},$$

где

$$P(s) = P_1(s) + P_2(s)B_0(s), \quad (18)$$

причем в силу (16), (17) и (3)

$$\deg P(s) = n - n_0.$$

Из теоремы 1 очевидным образом выводится следующее утверждение.

**Утверждение 1.** Для динамического порядка модального компенсатора должно выполняться условие (13), причем в случае минимального порядка

$$\nu = n_0 - 1, \quad \tilde{n} = n = 2n_0 - 1. \quad \blacksquare \quad (19)$$

Существует ряд способов решения полиномиального уравнения (12). Укажем два из них.

*Первый способ* основан на выполнении разложения (15), в результате чего находятся полиномы  $P_1(s)$ ,  $P_2(s)$ ,  $Q(s)$  и затем полином  $P(s)$  согласно формуле (18).

*Второй способ* заключается в следующем. Уравнение (12) можно развернуть в систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов полиномов  $P(s)$  и  $Q(s)$ : в левой части уравнения раскрываются скобки, приводятся подобные члены и затем приравниваются коэффициенты у подобных одночленов в левой и правой частях равенства. В итоге получаем линейную систему алгебраических уравнений  $n$ -го порядка относительно  $\tilde{n} = 2\nu + 1$  неизвестных  $p_0, \dots, p_{\nu-1}, q_0, \dots, q_\nu$ . Данная система уравнений всегда будет совместной, если  $\tilde{n} \geq n$ , причем в случае строгого неравенства она будет иметь бесконечное

множество решений, а в случае равенства — единственное решение.

**Астатическое модальное регулирование.**

Важнейшим требованием к синтезируемому САР является требование астатизма по отношению к задающему воздействию. Будем исходить из требования астатизма 1-го порядка. Оно структурно обеспечивается, если прямая цепь системы включает нулевой полюс  $s = 0$ . Если объект является статическим, то необходимо данный полюс привести в прямую цепь посредством регулятора, т.е. необходимо модифицировать его структуру, положив

$$P(s) = s\tilde{P}(s),$$

где  $\tilde{P}(s)$  — унитарный полином. Теперь наименьший динамический порядок модального компенсатора будет равен

$$v = n_0$$

и

$$\tilde{P}(s) = s^{v-1} + \sum_{i=0}^{v-2} p_i s^i, \quad Q(s) = \sum_{j=0}^v q_j s^j.$$

**Эффект появления "паразитных" нулей**

Рассмотренная схема САР с модальным компенсатором имеет существенный недостаток: согласно соотношениям (6) и (8) нули полинома  $Q(s)$ , т.е. числителя ПФ (4) регулятора, становятся нулями ПФ (6) синтезированной САР. "Паразитный" эффект появления таких нулей может быть нежелательным с точки зрения динамического качества процессов регулирования.

**Пример 1.** Пусть ПФ объекта равна

$$W_0(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 5)}. \quad (20)$$

Так как  $n_0 = 3$ , то согласно (19)  $n = 5$ .

В качестве желаемого характеристического полинома замкнутой САР выберем следующий полином:

$$\chi^*(s) = (s + 2)^5. \quad (21)$$

Для ПФ модального компенсатора и замкнутой САР получаем выражения

$$Z(s) = \frac{9s^2 - 50s + 32}{s^2 + 9s + 26}, \quad W(s) = \frac{9s^2 - 50s + 32}{(s + 2)^5}.$$

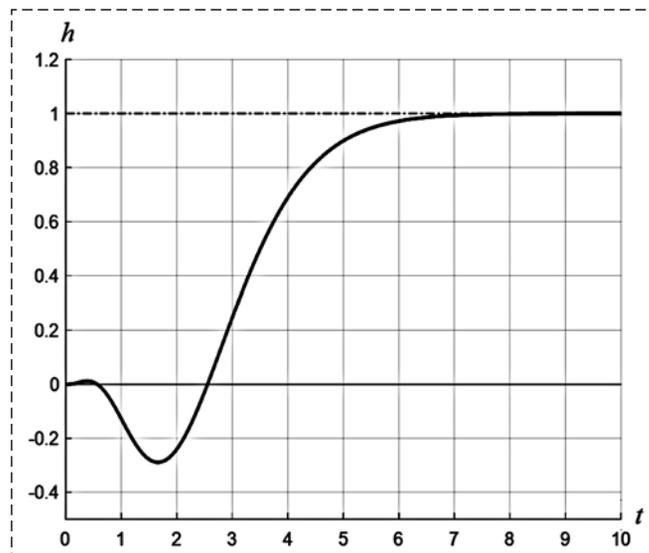


Рис. 2  
Fig. 2

Итак, в канале регулирования появились "паразитные" комплексные неминимально-фазовые нули. Переходная характеристика САР  $h(t)$  представлена на рис. 2.

Виден негативный результат появления и действия "паразитных" нулей — в переходной характеристике САР имеется отрицательный "всплеск".

В свете вышеизложенного теоретический и практический интерес представляет проблема разработки методов синтеза САР, исключающих эффект появления "паразитных" нулей. Далее излагаются два таких метода, основанных на идее параллельной модальной коррекции объекта управления.

**Схема регулирования с использованием параллельной модальной коррекции**

Исследуем функциональные возможности САР, схема которой включает параллельное и последовательное корректирующие звенья (КЗ) как показано на рис. 3. ПФ данных звеньев обозначим соответственно  $Z_1(s)$  и  $Z_2(s)$ , полагая

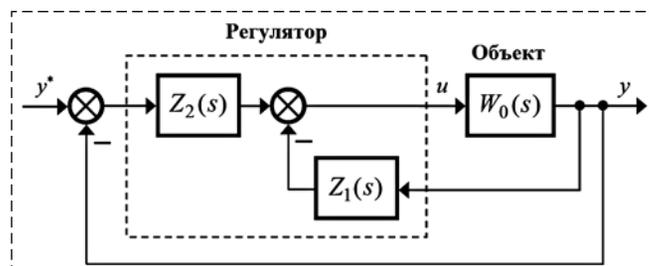


Рис. 3  
Fig. 3

$$Z_1(s) = \frac{Q_1(s)}{P_1(s)}, \quad (22)$$

$$Z_2(s) = \frac{Q_2(s)}{P_2(s)}, \quad (23)$$

где  $\deg P_1(s) = \mu_1$ ,  $\deg Q_1(s) = \nu_1$ ,  $\deg P_2(s) = \mu_2$ ,  $\deg Q_2(s) = \nu_2$ .

Условия физической реализуемости КЗ:

$$\nu_1 \leq \mu_1, \quad \nu_2 \leq \mu_2. \quad (24)$$

Параллельная коррекция объекта дает ПФ

$$W_1(s) = \frac{B_0(s)}{A_0(s) + B_0(s) \frac{Q_1(s)}{P_1(s)}}.$$

ПФ замкнутой САР определяется формулой

$$W(s) = \frac{Z_2(s)W_1(s)}{1 + Z_2(s)W_1(s)} \quad (25)$$

и, следовательно, равна

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} B(s) &= B_0(s)P_1(s)Q_2(s), \\ A(s) &= A_0(s)P_1(s)P_2(s) + \\ &+ B_0(s)(P_1(s)Q_2(s) + P_2(s)Q_1(s)). \end{aligned} \quad (27)$$

Отсюда согласно соотношениям (3) и (24)

$$n = \deg A(s) = n_0 + \mu_1 + \mu_2. \quad (28)$$

Общее число неизвестных коэффициентов числителей и знаменателей дробей (22) и (23) равно

$$\tilde{n} = \mu_1 + \nu_1 + \mu_2 + \nu_2 + 2.$$

Учтем, что числитель (27) ПФ (26) не может содержать "паразитные" нули, т.е. все нули полинома  $P_1(s)Q_2(s)$  считаются заданными. Таким образом, общее число настраиваемых параметров регулятора равно

$$\tilde{n}' = \nu_1 + \mu_2 + 2. \quad (29)$$

Для формирования желаемого характеристического полинома системы должно выполняться условие

$$\tilde{n}' \geq n.$$

Но тогда из соотношений (28), (29), (24) получаем следующее *ограничение* на применимость изложенного метода синтеза САР:

$$n_0 \leq 2.$$

Более того, можно показать, что при  $n_0 = 2$  в данной схеме САР не удастся обеспечить требование астатизма.

### Схема регулирования с использованием аппроксимационной модальной коррекции

Изложим метод параллельной модальной коррекции, в основу которого положена идея формирования в модальной структуре синтезируемой САР двух типов мод: *быстрозатухающих* и остальных, именуемых *доминирующими*, причем влиянием первых на процессы регулирования можно пренебречь, так что динамика САР практически определяется доминирующими модами.

Выделим в  $s$ -плоскости области локализации спектров доминирующих и быстрозатухающих мод:

$$\begin{aligned} D_d &= \{s \mid -\gamma_d \leq \operatorname{Re} s < 0\}, \\ D^+ &= \{s \mid \operatorname{Re} s < -\gamma^+\}, \end{aligned} \quad (30)$$

причем полагаем  $\gamma_d < \gamma^+$ . Спектр синтезированной САР должен включать два подмножества:

$$\Lambda = \Lambda_d \cup \Lambda^+,$$

где  $\Lambda_d \subset D_d$  и  $\Lambda^+ \subset D^+$ .

Соответственно характеристический полином САР разбивается на два полиномиальных множителя

$$\chi(s) = \chi_d(s)\chi^+(s), \quad (31)$$

множества корней которых совпадают соответственно с  $\Lambda_d$  и  $\Lambda^+$ .

Зададим *желаемую* ПФ замкнутой САР

$$W^*(s) = \frac{k(\tau s + 1)}{A^*(s)}, \quad (32)$$

где  $A^*(s)$  — унитарный полином с заданным множеством нулей  $\Lambda_d^* \subset D_d$ .

В области *рабочих частот*

$$|s| \leq \gamma_d \quad (33)$$

должно выполняться приближение

$$W(s) \cong W^*(s). \quad (34)$$

Предлагаемый метод предполагает дополнительные ограничения на класс объектов управления:  $m_0 = 0$ , так что

$$W_0(s) = \frac{k_0}{A_0(s)}. \quad (35)$$

Для ПФ параллельного КЗ положим

$$P_1(s) = (T_d s + 1)^{n_0 - 1}, \quad Q_1(s) = \sum_{i=0}^{n_0 - 1} q_i^1 s^i,$$

где  $T_d > 0$  — заданная малая постоянная времени:  $T_d \cdot \gamma^+ < 1$ .

Найдем ПФ скорректированного объекта:

$$W_1(s) = \frac{k_0}{A_0(s) + k_0 \frac{Q_1(s)}{P_1(s)}}. \quad (36)$$

При анализе процессов регулирования в области рабочих частот (33) инерционностью параллельного КЗ можно пренебречь:

$$P_1(s) \cong 1, \quad (37)$$

и для ПФ (36) использовать приближение

$$W_1(s) \cong \frac{k_0}{A_0(s) + k_0 Q_1(s)}.$$

ПФ замкнутой САР определяется формулой (25). Для ПФ последовательного КЗ примем

$$Z_2(s) = \frac{k_2(\tau s + 1)}{s}, \quad (38)$$

где  $k_2$  — настраиваемый параметр;  $\tau > 0$  — заданная постоянная времени.

Из соотношений (25), (36), (38) выводим

$$W(s) = \frac{k_0 k_2 (\tau s + 1)}{s \left[ A_0(s) + k_0 \frac{Q_1(s)}{P_1(s)} \right] + k_0 k_2 (\tau s + 1)}.$$

В условиях приближения (37)

$$W(s) \cong \frac{k_0 k_2 (\tau s + 1)}{A_d(s)},$$

где

$$A_d(s) = s[A_0(s) + k_0 Q_1(s)] + k_0 k_2 (\tau s + 1). \quad (39)$$

Полагая

$$\deg A^*(s) = n_0 + 1$$

потребуем выполнения равенства

$$A_d(s) = A^*(s).$$

Отсюда и из выражения (39) находим

$$k_2 = A^*(0)/k_0,$$

$$Q_1(s) = \frac{1}{k_0} \left[ \frac{A^*(s) - k_0 k_2 (\tau s + 1)}{s} - A_0(s) \right].$$

Предложенный метод по сути является *аппроксимационным*, что отражает приближение (34). Его теоретической основой является следующее утверждение, которое нетрудно доказать.

**Утверждение 2.** При достаточно малой постоянной времени  $T_d$  характеристический многочлен САР и его ПФ удовлетворяет требованиям (31) и (34), причем при  $T_d \rightarrow 0$  будут выполняться асимптотические равенства

$$\frac{\chi^+(s)}{P_1(s)} \sim 1, \quad \chi_d(s) \sim A^*(s), \quad W(s) \sim W^*(s). \quad \blacksquare$$

**Пример 2.** Решим задачу синтеза САР для объекта с ПФ (20) на основе изложенного метода аппроксимационной модальной коррекции. Опять выберем желаемый характеристический многочлен вида (21). Так как  $n_0 = 3$ , то

$$A^*(s) = (s + 2)^4.$$

Ниже в таблице представлено множество полюсов  $\Lambda_d$  (с округлением до сотых) и  $\Lambda^+$  (с округлением до целого) замкнутой САР для различных значений постоянной времени  $T_d$ .

$T_d$	$\Lambda_d$	$\Lambda^+$
0,0001	-1,78; -1,95; -1,95; -2,31	-9732; -10261
0,001	-1,63; -1,88; -1,88; -2,68	-912; -1080
0,015	-1,35; -1,65±0,64j; -5,00	-39; -85

На рис. 4 представлена переходная характеристика САР для варианта  $T_d = 0,015$ . Отметим, что она практически совпадает с переходной характеристикой, отвечающей желаемой ПФ (32).

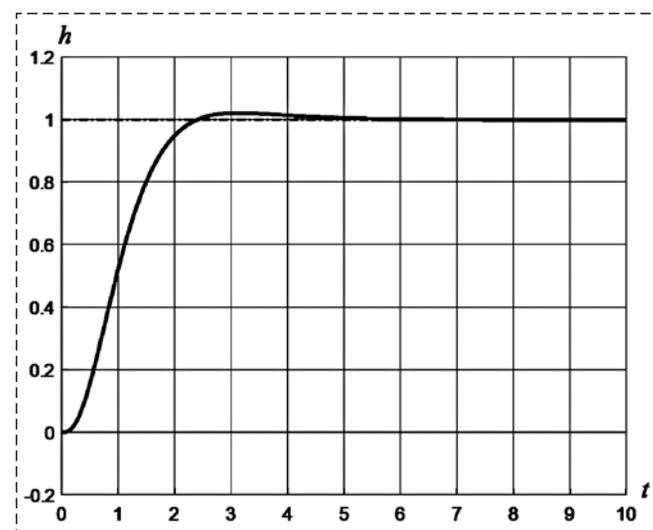


Рис. 4  
Fig. 4

## Обратная связь по состоянию и нули канала управления

Модальная обратная связь по состоянию (МОС) позволяет управлять полюсами системы. Выясним, каким образом она влияет на передаточные нули каналов управления.

На рис. 5 представлена схема модальной коррекции объекта с помощью МОС. Управляющее воздействие состоит из двух слагаемых:

$$u = -u_1 + v. \quad (40)$$

Здесь  $v$  — входной сигнал, а

$$u_1 = \mathbf{K}\mathbf{x} \quad (41)$$

— сигнал, формируемый МОС на основе информации о векторе переменных состояния объекта  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n_0}$ ;  $\mathbf{K}$  — постоянная вещественная матрица размера  $1 \times n_0$ .

**Теорема 2.** Обратная связь по состоянию не изменяет передаточные нули объекта управления. ■

*Доказательство.* Положим, что объект вполне управляем и наблюдаем, а его ПФ  $W_0(s)$  определяется соотношениями (1), (2).

Для анализа действия МОС перейдем к канонической форме Фробениуса. Используя метод фазовой переменной [23], представим динамику объекта уравнениями

$$A_0(p)\xi(t) = u(t); \quad (42)$$

$$y(t) = B_0(p)\xi(t), \quad (43)$$

где  $\xi$  — скалярная переменная состояния;  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования;  $A_0(p)$  и  $B_0(p)$  — линейные дифференциальные операторы:

$$A_0(p) = p^{n_0} + \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i^0 p^i, \quad B_0(p) = \sum_{j=0}^{m_0} b_j^0 p^j.$$

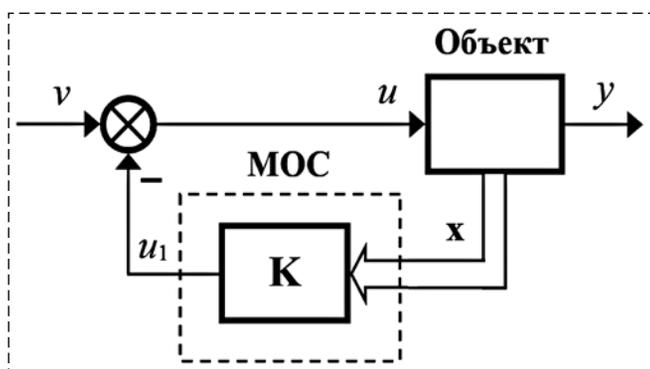


Рис. 5  
Fig. 5

Рассмотрим вектор состояния  $\mathbf{x}_F$ , образованный переменной  $\xi$  и ее производными:

$$\mathbf{x}_F = (\xi, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n_0-1)})^T. \quad (44)$$

В этих переменных состояния уравнение (41) принимает вид

$$u_1 = \mathbf{K}_F \mathbf{x}_F. \quad (45)$$

Запишем вектор-строку  $\mathbf{K}_F$  следующим образом:

$$\mathbf{K}_F = (a_0^1 - a_0^0, a_1^1 - a_1^0, \dots, a_{n_0-1}^1 - a_{n_0-1}^0). \quad (46)$$

Введем также дифференциальный оператор

$$A_1(p) = p^{n_0} + \sum_{i=0}^{n_0-1} a_i^1 p^i.$$

Тогда с учетом соотношений (44)—(46) получаем операторное выражение

$$u_1(t) = (A_1(p) - A_0(p))\xi(t)$$

Отсюда и из уравнений (40), (42) следует дифференциальное уравнение, определяющее динамику состояния объекта:

$$A_1(p)\xi(t) = v(t). \quad (47)$$

Уравнения (43) и (47) определяют ПФ канала "вход  $v$ —выход  $y$ ":

$$W_1(s) = \frac{B_0(s)}{A_1(s)}. \quad (48)$$

Таким образом, обратная связь по состоянию не влияет на числитель ПФ скорректированного объекта управления. Нетрудно также убедиться, что данный результат не зависит от выбора переменных состояния: в нашем случае использовалась каноническая форма Фробениуса.

Если объект не является вполне управляемым и наблюдаемым, то приведенные выкладки относятся к его вполне управляемой и наблюдаемой подсистеме, а именно она определяет ПФ объекта, охваченного обратной связью по состоянию. Теорема доказана.

Заметим, что в случае неполной информации о состоянии объекта в структуру модальной обратной связи можно включать наблюдающие устройства, при этом сформулированная теорема также будет справедлива.

Из данной теоремы вытекает следующее утверждение, имеющее важное методологическое значение.

**Утверждение 3.** Числитель ПФ скорректированного объекта инвариантен к действию статических и динамических МОС. ■

### Схемы регулирования с модальной обратной связью

Обсудим возможности совместного использования в системах регулирования последовательного корректирующего звена (ПКЗ) и МОС. Такая схема построения САР представлена на рис. 6.

Полагаем, что динамический порядок ПКЗ равен  $\nu$ , его ПФ представляется дробью

$$Z(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

и соотношениями (5), а МОС (41) формирует ПФ замыкаемого объекта (48).

ПФ замкнутой САР равна

$$W(s) = \frac{Z(s)W_1(s)}{1 + Z(s)W_1(s)} = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} B(s) &= B_0(s)Q(s), \\ A(s) &= A_1(s)P(s) + B_0(s)Q(s). \end{aligned}$$

Динамический порядок замкнутой САР определяется выражением (9).

Пусть  $A^*(s)$  — желаемый характеристический полином замкнутой САР (11). Тогда должно выполняться равенство

$$A_1(s)P(s) + B_0(s)Q(s) = A^*(s). \quad (49)$$

Будем исходить из требования астатизма по отношению к задающему воздействию.

Обсудим три частных варианта решения задачи синтеза САР с МОС.

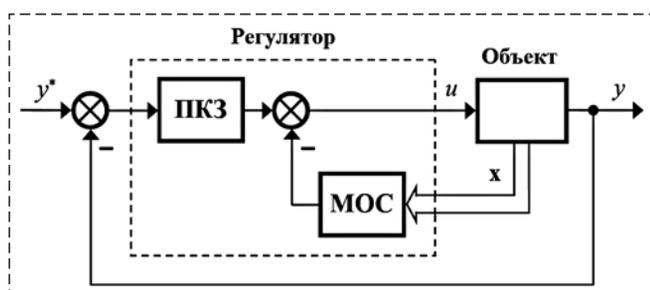


Рис. 6  
Fig. 6

**Вариант 1.** Пусть ПФ объекта имеет вид (35), а ПКЗ является пропорциональным звеном ( $\nu = 0$ ):

$$Z(s) = k.$$

Тогда уравнение (49) принимает вид

$$A_1(s) + k_0k = A^*(s). \quad (50)$$

Для обеспечения астатизма положим

$$A_1(0) = 0,$$

т.е. нулевой полюс в разомкнутой САР формируется МОС. Отсюда и из уравнения (50) получаем:

$$k = \frac{A^*(0)}{k_0} = \frac{a_0^*}{k_0}, \quad A_1(s) = A^*(s) - k_0k.$$

**Пример 3.** Рассмотрим объект управления с той же ПФ (20), что и в примере 1. Поскольку динамический порядок САР совпадает с порядком объекта, полагаем  $n = 3$ . На рис. 7 представлена переходная характеристика САР, синтезированной исходя из вида (21) желаемого характеристического полинома.

**Вариант 2.** Пусть ПФ объекта имеет вид (35), а желаемая ПФ замкнутой системы задается выражением (32).

Зададим ПФ ПКЗ в виде

$$Z(s) = \frac{k(\tau s + 1)}{s}.$$

Таким образом,  $n = n_0 + 1$ . Теперь уравнение (49) принимает вид

$$A_1(s)s + k_0k(\tau s + 1) = A^*(s).$$

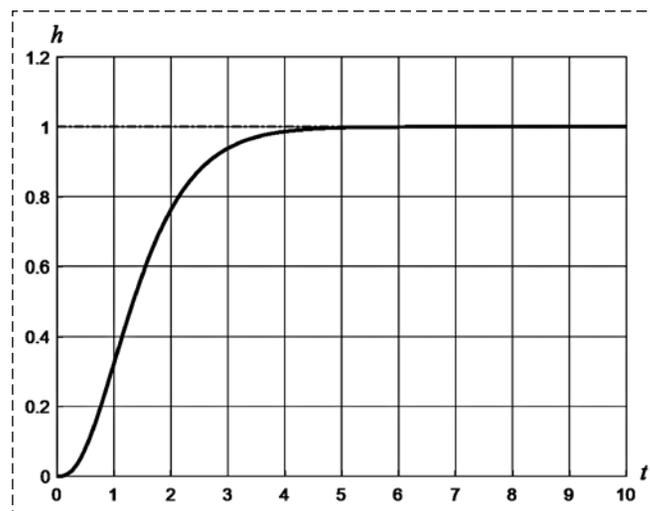


Рис. 7  
Fig. 7

Отсюда находим

$$k = \frac{A^*(0)}{k_0} = \frac{a_0^*}{k_0}, \quad A_1(s) = \frac{A^*(s) - k_0 k (\tau s + 1)}{s}.$$

**Вариант 3.** Покажем возможность совмещения изложенного подхода к синтезу САР и идеи принудительной компенсации нулей объекта.

Выделим в  $s$ -плоскости области локализации спектров доминирующих и быстро затухающих мод (30). Считаем, что спектр синтезированной САР может включать два подмножества:

$$\Lambda = \Lambda^* \cup \Lambda^+,$$

где  $\Lambda^* \subset D$  и  $\Lambda^+ \subset D^+$ .

Пусть все нули ПФ объекта являются нежелательными и попадают в допустимую область  $D^+$ . Представим числитель ПФ в виде

$$B_0(s) = k_0 B_0^+(s),$$

где  $B_0^+(s)$  — унитарный полином.

Компенсируем данные нули посредством МОС, полагая

$$A_1(s) = \tilde{A}_1(s) B_0^+(s).$$

Но тогда ПФ (48) после сокращения совпадающих нулей и полюсов в канале управления примет вид

$$W_1(s) = \frac{k_0}{\tilde{A}_1(s)}.$$

Отметим два результата описанной компенсации: во-первых, устранение нулей объекта из контура регулирования и, во-вторых, редукция (уменьшение размерности) задачи синтеза САР.

Теперь настроечные параметры САР определяются уравнением

$$\tilde{A}_1(s)P(s) + k_0 Q(s) = \tilde{A}^*(s),$$

где  $\tilde{A}^*(s)$  — формируемый знаменатель ПФ САР. При этом характеристический полином системы оказывается равным

$$\chi(s) = \tilde{A}^*(s) B_0^+(s).$$

Отметим, что скомпенсированные нули ПФ объекта являются полюсами ненаблюдаемой части системы и поэтому не влияют на процессы отработки уставки. Данным полюсам отвечают быстро затухающие моды, так что они заведомо приемлемы с точки зрения качества демпфирования переходных процессов, вызванных возмущениями состояния объекта управления.

## Заключение

Рассмотрены некоторые актуальные аспекты проблемы управления передаточными нулями и полюсами в задачах синтеза САР. Изложен классический полиномиальный метод синтеза модальных компенсаторов. Его принципиальным недостатком является появление неконтролируемых ("паразитных нулей") в ПФ замкнутой САР, которые могут негативно сказываться на качестве процессов регулирования.

В связи с этим теоретический и практический интерес представляет проблема разработки методов синтеза САР с желаемыми полюсами и нулями системы, исключающих эффект появления "паразитных" нулей. Обсуждаются и анализируются два таких метода.

В первом методе в структуру регулятора включаются последовательное и параллельное КЗ. Последнее содержит малые постоянные времени, которые порождают быстро затухающие моды, влиянием которых на процессы регулирования можно пренебречь.

Во втором методе также используется последовательное КЗ, однако вместо параллельного КЗ используется МОС. Ключевое значение при этом играет свойство инвариантности нулей ПФ объекта при замыкании его МОС.

Обсуждается возможность компенсации нежелательных левых нулей объекта, которые вследствие удаленности от мнимой оси попадают в область локализации спектров быстро затухающих мод.

## Список литературы

1. Солодовников В. В., Филимонов Н. Б. Динамическое качество систем автоматического регулирования. М.: МВТУ им. Н. Э. Баумана, 1987. 84 с.
2. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Управление передаточными нулями и полюсами в задачах синтеза систем регулирования. Ч. I. Компенсационный подход // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. Т. 21, № 8. С. 443–452.
3. Волгин Л. Н. Элементы теории управляющих машин (метод полиномиальных уравнений в задачах синтеза систем автоматического управления с цифровыми вычислительными машинами). М.: Сов. радио, 1962. 164 с.
4. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977. 560 с.
5. Kučera V. Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach. Prague: Academia, 1979. 206 p.
6. Волгин Л. Н. Оптимальное дискретное управление динамическими системами М.: Наука, 1986. 240 с.
7. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. М.: Наука, 1987. 304 с.
8. Grimble M. J., Kučera V. Polynomial Methods for Control Systems Design. Springer-Verlag, 1996. 260 p.

9. **Chen C. T.** Linear System Theory and Design. New York: Oxford University Press, 1999. 334 p.
10. **Тютиков В. В., Таратыкин С. В.** Робастное модальное управление технологическими объектами. Иваново: ИГЭУ им. В. И. Ленина, 2006. 256 с.
11. **Ишматов З. Ш.** Микропроцессорное управление электроприводами и технологическими объектами. Полиномиальные методы: монография. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2007. 277 с.
12. **Söylemez M. T., Üstoglu I.** Polynomial Control Systems // IEEE Control Systems Magazine. 2007. Vol. 27, N. 4. P. 124–137.
13. **Гайдук А. Р.** Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 360 с.
14. **Ким Д. П.** Алгебраические методы синтеза систем автоматического управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. 164 с.
15. **Kučera V.** Diophantine Equations in Control — A survey // Automatica. 1993. Vol. 29, N. 6. P. 1361–1375.
16. **Волгин Л. Н.** Диофантово полиномиальное исчисление и его применение для решения математических задач теории управления // Автоматика. 1987. № 1. С. 43–52.
17. **Филимонов Н. Б.** Управление переходными процессами в линейных конечномерных объектах: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.02. МВТУ им. Н. Э. Баумана, М., 1979. 395 с.
18. **Солодовников В. В., Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Анализ компенсационного подхода к синтезу систем управления // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 1979. № 2. С. 27–32.
19. **Филимонов Н. Б.** К вопросу о разрешимости задачи В. Солодовникова // Труды МВТУ № 314. Системы автоматического управления. 1979. Вып. 7. С. 60–71.
20. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** К проблеме динамического качества линейных стационарных систем регулирования // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвузовский научный сборник. Саратов: СПИ. 1981. С. 94–106.
21. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Фактор правых передаточных нулей в задачах автоматического регулирования // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2019. Iss. 15. P. 103–109.
22. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Некоторые аспекты модального синтеза систем автоматического регулирования // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2018. Iss. 11. P. 82–88.
23. **Солодовников В. В., Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Метод фазового пространства в задачах управления линейными конечномерными объектами // Автоматика. 1981. № 2. С. 55–67.

## Control of Zeros and Poles in Problems of Synthesis of Regulation Systems. Part II. Compensation Modal Approach

**A. B. Filimonov**, filimon\_ab@mail.ru,

Moscow Technological University, 119454, Moscow, Russian Federation,

**N. B. Filimonov**, nbfilimonov@mail.ru,

Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation

Corresponding author: **Filimonov Nikolay B.**, Professor, Dr. Sci. Tech., Lomonosov Moscow State University, 119991, Moscow, Russian Federation, e-mail: nbfilimonov@mail.ru

Accepted on July, 28, 2020

### Abstract

The synthesis problem of linear stationary automatic regulation systems (ARS) with the given indicators of the dynamic quality of regulation processes occupies the important place in the theory and practice of the automatic systems' construction. The given indicators are connected with the type and parameters of transient characteristics of the regulation systems. The initial requirements for the dynamic quality of ARS it is possible to formalize via the representation of the desired structure and parameters of the transfer function (TF) of the system namely amplification coefficient, zeros and poles. In mechanism of formation of the desired TF which is synthesized by ARS it is necessary to take into account the factor of compensation of zeros and poles of the controlled object. Although they are excluded from TF channel "setpoint — output" of the system, but become the poles of the synthesized system and will inevitably develop its dynamics under external perturbations. The effect of compensation of zeros and poles of the control object in ARS is analyzed in the first part of the article. And also the influence of the factor of non-minimal phase zeros for the dynamics of regulation systems is researched. The given effect and its negative results are visually shown in the classical compensation approach to the synthesis of regulators by a priori given (desired, standard) TF of closed ARS. The classical polynomial method of the modal compensators synthesis, the principle deficiency of which is the appearance of uncontrolled ("parasitic") zeros is presented in the second part of the article. The new regulation schemes combining the functional possibilities of the compensation and modal approaches are suggested. Two methods of ASR synthesis with desired poles and zeros of the system, excluding the effect of the appearance of "parasitic" zeros, are discussed and analyzed. In the first method the sequential and parallel correction links (CL) are included into the regulator's structure. The latter one contains small constant time which generate rapidly damped modes. One may neglect by their influence on the regulation processes. The sequential CL is also used in the second method, but instead of parallel CL modal feedback (MFB) is used. In this case the key value has the invariance property of the zeros of object's TF when closing its MFB. The possibility of compensating unwanted left zeros of an object that fall within the localization region of fast-fading mode spectra is discussed.

**Keywords:** synthesis of regulation system, control by zeros and poles of system, compensation-modal approach, polynomial synthesis of regulators, exclusion of the effect of "parasitic" zeros

For citation:

**Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Control of Zeros and Poles in Problems of Synthesis of Regulation Systems. Part II. Compensation Modal Approach, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 11, pp. 611–621.

DOI: 10.17587/mau.21.611-621

## References

1. **Solodovnikov V. V., Filimonov N. B.** Dynamic Quality of Automatic Control Systems, Moscow, BMSTU, 1987, 84 p. (in Russian).
2. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Control of Zeros and Poles in Problems of Synthesis of Regulation Systems. Part I. Compensation Approach, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 8, pp. 443–452.
3. **Tsyarkin Ya. Z.** Fundamentals of the Theory of Automatic Systems, Moscow, Nauka, 1977, 560 p. (in Russian).
4. **Volgin L. N.** Elements of the Theory of Controlling Machines (Method of Polynomial Equations in the Problems of Synthesis of Automatic Control Systems with Digital Computers), Moscow, Sovetskoe radio, 1962, 164 p. (in Russian).
5. **Kučera V.** Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach, Prague, Academia, 1979, 206 p.
6. **Volgin L. N.** Optimal Discrete Control of Dynamic Systems, Moscow, Nauka, 1986, 240 p. (in Russian).
7. **Krut'ko P. D.** Inverse Problems of Dynamics of Controlled Systems. Linear Model, Moscow, Nauka, 1987, 304 p. (in Russian).
8. **Grimble M. J., Kučera V.** Polynomial Methods for Control Systems Design, Springer-Verlag, 1996, 260 p.
9. **Chen C. T.** Linear System Theory and Design, New York, Oxford University Press, 1999, 334 p.
10. **Tyutikov V. V., Tararykin S. V.** Robust Modal Management of Technological Objects, Ivanovo, IGEU named after V. I. Lenin, 2006, 256 p. (in Russian).
11. **Ishmatov Z. S.** Microprocessor Based Control of Electric Drives and Production Facilities. Polynomial Methods, Yekaterinburg, Publishing house of UGTU-UPI, 2007, 278 p. (in Russian).
12. **Söylemez M. T., Üstoglu I.** Polynomial Control Systems, *IEEE Control Systems Magazine*, 2007, vol. 27, no. 4, pp. 124–137.
13. **Gaiduk A. R.** Theory and Methods of Analytical Synthesis of Automatic Control Systems (Polynomial Approach). Moscow, Fizmatlit, 2012, 360 p. (in Russian).
14. **Kim D. P.** Algebraic Methods of Automatic Control System Synthesis, Moscow, Fizmatlit, 2014, 164 p. (in Russian).
15. **Kučera V.** Diophantine Equations in Control — A survey, *Automatica*, 1993, vol. 29, no. 6, pp. 1361–1375.
16. **Volgin L. N.** Diophantine Polynomial Calculus and its Application to Solving Mathematical Problems in Control Theory, *Automatic*, 1987, no. 1, pp. 43–52 (in Russian).
17. **Filimonov N. B.** Control of Transients in Linear Finite-Dimensional Objects: Dis. ... Cand. Tech. Science: 05.13.02. Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 1979, 395 p. (in Russian).
18. **Solodovnikov V. V., Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Analysis of the Compensation Approach to the Synthesis of Control Systems, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroyeniye*, 1979, no. 2, pp. 27–32 (in Russian).
19. **Filimonov N. B.** The Question of the Solvability of Problem of V. V. Solodovnikov, *Proceedings of the Bauman*, no. 314, *Automatic Control Systems*, iss. 7, Moscow, BMSTU, 1979, pp. 60–71 (in Russian).
20. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** On the Problem of Dynamic Quality of Linear Stationary Control Systems. *Analytical Methods of Synthesis of Regulators: Interuniversity Science*, Saratov, SPTU, 1981, pp. 94–106 (in Russian).
21. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Factor of the Right Transmission Zeroes in the Problems of Automatic Regulation, *Journal of Advanced Research in Technical Science*, 2019, iss. 15, pp. 103–109 (in Russian).
22. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Some Aspects of Modal Synthesis of Automatic Regulation Systems, *Journal of Advanced Research in Technical Science*, 2018, iss. 11, pp. 82–88 (in Russian).
23. **Solodovnikov V. V., Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Method of Phase Space in Control Problems of Linear Finite-Dimensional Objects, *Automatics*, 1981, no. 2, pp. 55–67 (in Russian).



16—19 марта 2021 г.

## XXIII конференция молодых ученых "НАВИГАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ"

Санкт-Петербург, Россия

В формат конференции включаются обзорные лекции ведущих ученых в области теории и практики построения современных систем навигации и управления движением и доклады участников конференции.