

В. И. Ловчаков, д-р техн. наук, проф., lovvi50@mail.ru,
Тульский государственный университет

Синтез линейных систем управления с максимальным быстродействием и заданным перерегулированием

Исследуется решение так называемой задачи максимального быстродействия линейной системы управления, в которой, в отличие от классической задачи оптимального быстродействия с управлением релейного характера, для линейного объекта определяется линейный алгоритм управления, обеспечивающий предельное быстродействие системы. Эта задача имеет важное прикладное значение вследствие широкого применения на практике линейных законов управления. Задача сформулирована применительно к непрерывным объектам управления высокого порядка, описываемым соответствующей передаточной функцией или эквивалентной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Время переходного процесса (время регулирования) синтезируемой системы понимается в смысле классической теории автоматического управления и определяется с использованием "трубки", значение которой принимается, в отличие от известных работ, равной требуемому (желаемому) небольшому значению перерегулирования системы в несколько процентов (2...5 %). Равенство величин, характеризующих "трубку" и желаемое перерегулирование синтезируемой системы, обеспечивает в дальнейшем однозначность решения задачи максимального быстродействия, которая ставится в следующей формулировке: требуется найти линейный алгоритм обратной связи, обеспечивающий замкнутой системе регулирования заданный порядок астатизма и переводящий объект управления из начального состояния в конечное, определяемое постоянным сигналом задания регулятора, с минимальным значением времени переходных процессов системы и заданным значением перерегулирования при выполнении ограничения на сигнал управления.

В настоящее время данная задача решена приближенно алгебраическим методом синтеза систем управления при определении желаемой передаточной функции конструируемой системы на основе типовых (эталонных) нормированных передаточных функций. Приближенный характер решения определяется тем, что эталонные передаточные функции, применяемые при синтезе быстродействующих систем, установлены эмпирически. В данной работе предлагается математически обоснованное решение задачи максимального быстродействия с использованием теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов. Максимальное быстродействие и заданные ограничения на перерегулирование и сигнал управления в синтезируемой системе обеспечиваются предложенным способом выбора весовых коэффициентов квадратичного функционала качества. Подчеркнем, что предложенный метод синтеза быстродействующих систем в отличие от алгебраического метода применим к более широкому классу объектов управления: как минимально-фазовым, так и не минимально-фазовым, как содержащим нули, так и не содержащим. Метод иллюстрируется примером синтеза быстродействующей системы управления четвертого порядка, содержащим результаты ее моделирования.

Ключевые слова: линейный одномерный объект, быстродействие, перерегулирование, астатизм системы, аналитическое конструирование оптимального регулятора, фильтры Баттерворса

Введение

Для повышения эффективности функционирования многих технологических процессов, производственных агрегатов, электромеханических систем желательно, чтобы системы управления, входящие в их состав, отвечали критерию оптимальности по быстродействию, который непосредственно определяет их производительность. Однако строгое решение задач оптимального управления по критерию быстродействия в форме обратной связи представляет серьезную теоретическую проблему даже для линейных объектов относительно невысокого порядка ($n = 4, 5$) [1–7]. Действи-

тельно, задача быстродействия полностью решена для объектов второго порядка методом фазовой плоскости [2–4]. Для объектов третьего порядка быстродействующее управление точно (аналитически) найдено только в отдельных случаях, в частности, для трех последовательно соединенных интеграторов [2, 3], соединения двух интеграторов и апериодического звена [2], соединения интегратора и двух апериодических звеньев [2]. При этом существенным образом использовались геометрические методы, например, построение проекций вынужденных траекторий объекта в трехмерном фазовом пространстве на соответствующие плоскости. Для объектов высокого порядка

($n \geq 4$) применение геометрических методов существенно затруднено и, как следствие, для них практически неизвестны аналитические решения задач оптимального быстрогодействия [6, 7].

С другой, прикладной, точки зрения реализация строго оптимальных по быстрдействию релейных алгоритмов управления, отличающихся математической сложностью, серьезно затруднена и требует многократно больших технико-экономических затрат в сравнении с линейными алгоритмами управления. При этом отметим, что применение оптимальных релейных алгоритмов в условиях действия интенсивных случайных возмущений является и нецелесообразным по причине увеличения ими среднеквадратичной ошибки регулирования системы по сравнению с теми же линейными законами управления [8]. Необходимо также подчеркнуть, что более 90 % прикладных задач управления техническими объектами решаются с использованием линейных законов обратной связи, например, стандартных П, ПИ и ПИД регуляторов [9].

В связи с указанными причинами в настоящей работе рассматривается задача синтеза линейной системы управления с минимальным временем переходных процессов, понимаемым в смысле классической теории систем автоматического управления. В отличие от классической задачи оптимального быстрогодействия, решением которой является релейный алгоритм управления [1], указанная задача в дальнейшем называется задачей максимального быстрогодействия линейных систем управления. В настоящее время она приближенно решена алгебраическим методом синтеза [10–17] при определении желаемой передаточной функции (ЖПФ) проектируемой замкнутой системы на основе типовых (эталонных) нормированных передаточных функций (НПФ). В работах Д. П. Кима [12, 13] проведен анализ четырех видов НПФ, обладающих повышенным быстрымдействием и используемых в решении рассматриваемой задачи управления. Приближенный характер ее решения определяется тем, что применяемые НПФ установлены эмпирически. В настоящей работе предлагается математически обоснованное решение задачи максимального быстрогодействия с использованием теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [16, 19, 20], причем в постановке, требующей, чтобы синтезируемая система управления имела строго заданное перерегулирование $\sigma_z = 4,321\%$.

Постановка задач управления и исследования

Рассмотрим одномерные объекты, динамика которых адекватно описывается передаточной функцией (ПФ)

$$W(s) = \frac{B_m(s)}{A_n(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}, \quad (1)$$

$$m \leq n - 1$$

с постоянными параметрами b_i , a_j , а их управление подчиняется ограничению $|u(t)| \leq u_{\max}$.

Для данных объектов сформулируем задачу максимального быстрогодействия по аналогии с основной задачей управления работы [10]: требуется найти алгоритм управления в форме линейной обратной связи

$$u[X(t)] = KX(t) = \sum_{i=0}^N k_i x_i(t) \quad (2)$$

по вектору состояния системы управления $X(t)$ размерности N с искомыми параметрами k_i , обеспечивающими замкнутой системе регулирования заданный порядок n_a астатизма, заданное перерегулирование $\sigma_z = 4,321\%$ при выполнении ограничения на сигнал управления $|u(t)| \leq u_{\max}$, и переводящий объект (1) из произвольного начального состояния в конечное, определяемое сигналом задания x_z регулятора, с минимальным значением времени переходных процессов системы t_p , понимаемым в смысле классической теории систем автоматического управления. Напомним, что временем t_p называют наименьшее время отработки системой ступенчатого воздействия $x_z \cdot 1(t)$, по истечении которого отклонение выходной переменной объекта от установившегося значения не превышает принятого значения Δ "трубки" [15, 16]. Завершая постановку задачи управления, особо подчеркнем, что в данной работе для обеспечения единственности решения сформулированной задачи принимается $\Delta = \sigma_z = 4,321\%$, где заданное значение перерегулирования системы соответствует колебательному звену с коэффициентом демпфирования $\zeta = \sqrt{2}/2 \approx 0,7071$ — фильтру Баттерворса второго порядка [16].

Сформулированная задача максимального быстрогодействия является своеобразным вариантом задачи управления, исследуемой в работе [10], в которой быстродействующий регулятор отыскивается в форме передаточной функции определенной структуры. Данный регулятор находится алгебраическим методом

синтеза с использованием ЖПФ синтезируемой замкнутой системы, определяемой на первом этапе синтеза в форме НПФ. Как известно [13, 17], НПФ, или передаточной функцией в форме Вышнеградского, называется передаточная функция, у которой в знаменателе свободный член и коэффициент при старшей степени равны единице. Произвольная ПФ (1) может быть преобразована в нормированную заменой переменной s новой переменной $q = \alpha s$, $\alpha = \sqrt[n]{a_0/a_n}$:

$$\overline{W}(q) = \frac{\overline{b_0}q^m + \overline{b_1}q^{m-1} + \overline{b_2}q^{m-2} + \dots + \overline{b_m}}{q^n + \overline{a_1}q^{n-1} + \overline{a_2}q^{n-2} + \dots + \overline{a_{n-1}}q + 1}, \quad (3)$$

где $\overline{b_i} = \frac{b_i}{a_n \alpha^{m-i}}$, $\overline{a_k} = \frac{a_k}{a_n \alpha^{n-k}}$, $i = 0, 1, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Соответственно, коэффициенты ненормированной ПФ (1) связаны с коэффициентами НПФ соотношениями

$$b_i = \alpha^{m-i} \overline{b_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m; \quad (4 \text{ а})$$

$$a_0 = \alpha^n; \quad a_n = 1; \quad a_k = \alpha^{n-k} \overline{a_k}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (4 \text{ б})$$

Между свойствами систем с передаточными функциями (1) и (3) существует тесная связь [13–16]: характер их переходных процессов (монотонность, апериодичность, перерегулирование, показатели точности в установившемся режиме) совпадает. Исключение составляет только длительность переходных процессов систем — время регулирования t_p системы (1) и время регулирования τ_p системы (3) отличаются и связаны соотношением

$$\alpha = t_p / \tau_p. \quad (5)$$

Поэтому на первом этапе алгебраического метода синтеза определяется НПФ, обладающая всеми заданными требованиями к системе управления (кроме требования к времени регулирования), которая называется желаемой НПФ.

В работе [10], базирующейся на результатах [17], в качестве желаемой НПФ используется функция вида $W(q) = 1/M(q)$, причем нормированный полином $M(q)$ имеет комплексные корни с одинаковыми вещественными частями η и мнимыми частями, образующими арифметическую прогрессию с разностью и первым членом, равным γ . В работе [17] показано, что существует значение $\mu = \gamma/\eta$, при котором время регулирования системы минимально. Ниже, в соответствии с этой работой, приводятся характеристические полиномы для

пяти значений степеней, начиная с $n = 2$, при оптимальных значениях μ :

$$\begin{aligned} n = 2: M_2(q) &= q^2 + 1,38q + 1; \\ n = 3: M_3(q) &= q^3 + 2,05q^2 + 2,39q + 1; \\ n = 4: M_4(q) &= q^4 + 2,6q^3 + 3,8q^2 + 2,8q + 1; \\ n = 5: M_5(q) &= q^5 + 2,5q^4 + 5,3q^3 + \\ &+ 5,46q^2 + 3,64q + 1; \\ n = 6: M_6(q) &= q^6 + 3,73q^5 + 8,0q^4 + \\ &+ 10,3q^3 + 8,56q^2 + 4,18q + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

На следующем этапе синтеза осуществляется обратное преобразование (4) функции $W(q) = 1/M(q)$ с коэффициентом преобразования (5) и находится желаемая передаточная функция синтезируемой системы. Далее автор работы [10], зная ЖПФ замкнутой системы и описание объекта (1), по формальной процедуре алгебраического метода синтеза определяет ПФ быстродействующего регулятора. Рассмотренное решение задачи быстродействия имеет следующие недостатки: 1) как будет показано далее, полиномы $M_i(q)$ для объектов выше второго порядка не обеспечивают максимальное быстродействие системам автоматического управления (САУ); 2) используемый метод синтеза в силу его особенностей применим не ко всем рассматриваемым объектам (в последующих работах [12–14] предлагаются способы обобщения алгебраического метода синтеза).

В работе [18] автором предложен метод синтеза линейных быстродействующих систем управления, практически свободный от указанных недостатков, основанный на использовании результатов теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [16, 19, 20]. Этот метод опишем подробнее в связи с тем, что он в дальнейшем будет уточнен и модифицирован для решения сформулированной задачи управления. Метод предполагает выполнение следующих процедур.

1. Обеспечение астатизма проектируемой системы. Для получения требуемого порядка n_a астатизма в качестве нового управления $U(t)$ выбирается сигнал, подаваемый на вход дополнительного n_a -кратного интегратора, включенного последовательно с исходным объектом. В этом случае "расширенный" объект управления будет описываться передаточной функцией

$$W(s) = \frac{L[x(t)]}{L[U(t)]} = \frac{B_m(s)}{p^{n_a} A_n(s)} \equiv \frac{B_m(s)}{A_N(s)}, \quad N = n + n_a. \quad (7)$$

Описанию объекта в форме ПФ (7) с использованием сведений о его физической природе или теории решения задач о построении динамической реализации системы [16, 19] ставится в соответствие математическое описание в некотором фазовом пространстве с вектором состояния $Z(t)$:

$$\dot{Z}(t) = A_z Z(t) + B_z U(t), \quad (8)$$

где A_z, B_z — матрицы параметров объекта, имеющие соответственно размерности $N \times N, N \times 1$.

2. *Определение описания объекта в канонической форме.* С целью упростить решение сформулированной задачи управления осуществляется преобразование фазовых координат объекта $Z(t) = DX(t)$ с использованием такой невырожденной матрицы D , при которой описание объекта принимает каноническую форму Фробениуса

$$\dot{X}(t) = A_x X(t) + B_x U(t) \quad (9)$$

с матрицами следующей структуры:

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_N \end{pmatrix}, B_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Как известно, матрица перехода D , обладающая указанным свойством, может быть найдена разными способами. Один из способов основан на использовании матриц управляемости объекта в новом и старом базисах [16, 19]:

$$D^{-1} = \|B_x, A_x B_x, A_x^2 B_x, \dots, A_x^{N-1} B_x\| \times \|B_z, A_z B_z, A_z^2 B_z, \dots, A_z^{N-1} B_z\|^{-1}. \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что для полностью управляемого объекта (8) эта матрица является неособенной: $\det D \neq 0$.

Необходимо отметить, что, во-первых, компоненты вектора состояния X объекта в канонической форме Фробениуса

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_{\text{зад}} - x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t), \\ x_3(t) &= \dot{x}_2(t), \dots, \quad x_N(t) = \dot{x}_{N-1}(t) \end{aligned} \quad (11)$$

имеют ясный математический и физический смысл — это отклонения выходной переменной объекта от заданного режима и производных данного отклонения. Во-вторых, данное каноническое описание объекта можно пред-

ставить в форме дифференциального уравнения N -го порядка

$$A(p)x(t) = bU(t), \quad (12)$$

где $A(p) = p^N + a_N p^{N-1} + a_{N-1} p^{N-2} + \dots + a_2 p + a_1$ — полином от оператора дифференцирования $p = d/dt$.

3. *Решение задачи АКОР.* Следующий шаг в решении целевой задачи быстрогодействия (1), (2) состоит в решении для объекта (9) своеобразной задачи АКОР Летова—Калмана, формулируемой следующим образом. Требуется определить закон обратной связи $U(X) \equiv U(x_1, x_2, \dots, x_N)$, который в совокупности с объектом (9) образует асимптотически устойчивую систему, переводящий ее из начального состояния $X(t=0) = X_0$ в конечное нулевое состояние $X(t \rightarrow \infty) = 0$ с минимальным значением квадратичного функционала

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{N-1} q_i x_i^2(t) + r U^2(t) \right) dt \equiv \\ &\equiv \int_0^\infty (X^T(t) Q X(t) + r U^2(t)) dt, \quad q_i, r > 0 \end{aligned} \quad (13)$$

(Q — диагональная матрица, составленная из коэффициентов q_i), причем для получения повышенного быстрогодействия проектируемой системы значения весовых коэффициентов критерия качества принимаются равными

$$q_1 = 1, q_2 = q_3 = \dots = q_{N-1} = 0, \quad (14)$$

а значение коэффициента r выбирается при последующем моделировании системы из условия выполнения ограничения $|U(t)| \leq U_{\max}$.

Как известно [16, 19, 20], решение задачи (9), (13) определяет линейный алгоритм управления

$$U(t) = -KX(t), \quad K = r^{-1} B_x^T P, \quad (15)$$

в котором матрица P находится как положительно определенное решение матричного уравнения Риккати

$$PA + A_x^T P - r^{-1} P B_x B_x^T P + Q = 0, \quad (16)$$

4. *Определение закона обратной связи.* С использованием обратного преобразования фазовых координат $X(t) = D^{-1}Z(t)$ находим искомым алгоритм управления

$$U(t) = \bar{K}Z(t), \quad \bar{K} = KD^{-1} \quad (17)$$

для исходного объекта управления (8).

Заметим, что при моделировании синтезированной системы для увеличения ее быстродействия весовой коэффициент r функционала (13) необходимо уменьшать до некоторого небольшого значения: уменьшение r снижает уровень ограничения, накладываемого на сигнал управления при минимизации функционала качества, тем самым увеличивая значения $U(t)$ и, соответственно, быстродействие САУ. Однако при уменьшении r необходимо не допустить превышения значений управления установленного уровня $U_{\max}$.

Необходимо подчеркнуть, что с уменьшением значений r и увеличением быстродействия системы перерегулирование в ней может превысить заданный уровень σ_z . Соответственно основная задача (задача исследования) работы состоит в модификации описанного метода синтеза в целях обеспечения в проектируемой системе управления заданного значения перерегулирования $\sigma_z = \Delta = 4,321\%$ и достижения при этом перерегулирования максимального быстродействия системы.

Предельные передаточные функции оптимальных систем

Первоначально покажем, что система, синтезированная описанным методом, может иметь перерегулирование большее, чем σ_z , при достаточно малых значениях r функционала качества. С этой целью воспользуемся известным результатом [8, 19], утверждающим, что характеристический полином $G(s)$ оптимальной системы управления объектом (12) по критерию (13) удовлетворяет уравнению

$$G(s)G(-s) = A(s)A(-s) + q_1 b^2 / r. \quad (18)$$

В этом случае говорят, что функция $G(s)$ определяется операцией факторизации полинома правой части выражения (18). Напомним, что передаточная функция оптимальной системы описывается дробью $W(s) = 1/G(s)$.

Проведем нормирование по Вышнеградскому полинома (18), который предварительно представим в форме

$$\begin{aligned} A(s)A(-s) + q_1 b^2 / r = \\ = A_{2N} s^{2N} + A_{2N-1} s^{2N-1} + \dots + A_1 s + A_0, \end{aligned} \quad (19)$$

с соответствующими коэффициентами A_k , причем

$$A_0 = a_1^2 + q_1 b^2 / r, \quad A_{2N} = (-1)^N.$$

Воспользовавшись заменой переменной s преобразования Лапласа новой переменной

$$q = \alpha s \text{ при } \alpha = \sqrt[2N]{r/q_1 b^2}, \quad (20)$$

найдем значения коэффициентов $\bar{A}_k$, $k = 0, 1, \dots, 2N$, преобразованного полинома после их умножения на константу $r/q_1 b^2 = \alpha^{2N}$ (данное умножение не изменяет характеристического уравнения системы и соответственно ее свойства):

$$\bar{A}_k = A_k \alpha^{2N-k} = A_k (r/q_1 b^2)^{\frac{2N-k}{2N}}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N. \quad (21)$$

Значения коэффициентов (21) при предельном уменьшении $r \rightarrow 0$ (соответственно предельном увеличении быстродействия системы) приближаются к нулю, за исключением $A_{2N} = (-1)^N$ при $k = 2N$ и

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 = A_0 \left(\frac{r}{q_1 b^2} \right) &= \left(a_1^2 + \frac{q_1 b^2}{r} \right) \left(\frac{r}{q_1 b^2} \right) = \\ &= a_1^2 \frac{r}{q_1 b^2} + 1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

при $k = 0$. Подчеркнем, что при четном N предельные значения крайних коэффициентов полинома $\bar{A}_0 = \bar{A}_{2N} = 1$, т.е. предельный, преобразованный указанным образом полином (19), является нормированным по Вышнеградскому. Таким образом, при малых значениях параметра $r \rightarrow 0$ корни характеристического полинома $G(q)$ оптимальной замкнутой системы управления стремятся к устойчивым корням двучлена

$$G(q)G(-q) = (-1)^N q^{2N} + 1, \quad (22)$$

которые на комплексной плоскости q совпадают с вершинами правильного $2N$ -угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. В литературе такое распределение корней известно как распределение (размещение) Баттерворса порядка N [7, 16, 19, 21].

Устойчивые корни этого распределения (корни с отрицательными вещественными частями) определяют полюса динамических систем, называемых фильтрами Баттерворса. Они описываются передаточными функциями

$W_B(q) = 1/D_N(q)$, где полиномы Баттерворса имеют следующий вид [16]:

$$\begin{aligned} D_1(q) &= q + 1, \quad D_2(q) = q^2 + 1,4142q + 1, \\ D_3(q) &= (q + 1)(q^2 + q + 1), \\ D_4(q) &= (q^2 + 0,7654q + 1)(q^2 + 1,8478q + 1), \\ D_5(q) &= (q + 1)(q^2 + 0,6180q + 1) \times \\ &\quad \times (q^2 + 1,6180q + 1), \\ D_6(q) &= (q^2 + 0,5176q + 1)(q^2 + 1,4142q + 1) \times \\ &\quad \times (q^2 + 1,9319q + 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Данные фильтры Баттерворса порядка $N = 2, 3, 4, 5, 6$ имеют значения перерегулирования $\sigma_2 = 4,321$, $\sigma_3 = 8,147$, $\sigma_4 = 10,828$, $\sigma_5 = 12,777$, $\sigma_6 = 14,251$ % и при дальнейшем увеличении N перерегулирование также увеличивается, но с уменьшающейся скоростью [16]. Следовательно, все фильтры Баттерворса, за исключением случая $N = 2$, имеют перерегулирование большее, чем принятый уровень $\sigma_z = 4,321$ %. Соответственно, указанное решение исходной задачи (1), (2) требует уточнения.

Для нахождения решения задачи максимального быстродействия необходимо соответствующим образом определить весовые коэффициенты квадратичного критерия (13). Напомним, что выбор значений (14) коэффициентов осуществлялся в целях предельного увеличения быстродействия синтезируемой системы управления в соответствии с рекомендациями работы [22]. В данной работе показано, что для объектов, описываемых в фазовом пространстве с каноническим вектором состояния $X = (x, \dot{x}, \dots, x^{(N-1)})^T$, введение в квадратичный функционал качества составляющих $q_i \dot{x}_i^2(t)$, $i = 2, 3, \dots, N - 1$, только увеличивает время переходных процессов синтезируемой оптимальной системы, так как это в процессе минимизации функционала (13) приводит к ограничению значений скорости, ускорения и других более высоких производных выходной переменной объекта. В соответствии с данным утверждением для получения значений перерегулирования в проектируемой системе, меньших, чем в рассмотренных фильтрах Баттерворса, необходимо наложить на весовой коэффициент функционала качества ограничение $q_2 > 0$. Действительно, так как большее значение перерегулирования системы определяется большим значением скорости системы в момент времени нарастания [17], то

перерегулирование системы можно уменьшить ограничением указанной скорости и, соответственно, введением в функционал качества (13) слагаемого $q_2 \dot{x}^2(t) = q_2 \dot{x}_2^2(t)$ с определенным значением весового коэффициента $q_2 > 0$. При этом, в соответствии с логикой работы [22], значения остальных коэффициентов функционала целесообразно, как и раньше, оставить равными $q_3 = q_4 = \dots = q_{N-1} = 0$ для получения максимального быстродействия проектируемой системы при желаемом значении перерегулирования. Здесь укажем, что значение одного весового коэффициента функционала качества без изменения решения задачи АКОР можно задавать произвольно; на этом основании далее полагается $q_1 = 1$.

Проведем более детальный математический анализ предложенного способа выбора значений коэффициентов квадратичного критерия качества. По аналогии с фильтрами Баттерворса найдем предельное при $r \rightarrow 0$ решение задачи АКОР для объекта (12) по критерию (13) с весовыми коэффициентами

$$q_1 = 1, q_2 > 0, q_3 = \dots = q_{N-1} = 0. \quad (24)$$

Для функционала качества (13) с коэффициентами (24) согласно работе [8] характеристический полином $G(s)$ оптимальной системы управления объектом (12) будет удовлетворять уравнению

$$G(s)G(-s) = A(s)A(-s) - s^2(q_2 b^2/r) + q_1 b^2/r. \quad (25)$$

Как и ранее, с использованием замены переменной (20), проведем нормирование полинома (25), представив предварительно его в форме (19). Значения коэффициентов преобразованного полинома после их умножения на величину $q_1 b^2/r = \alpha^{2N}$ определяются также выражением (21) и, соответственно, они при предельном уменьшении времени переходных процессов системы (уменьшении $r \rightarrow 0$) приближаются к нулю, за исключением коэффициентов $\bar{A}_0 = 1$, $\bar{A}_{2N} = (-1)^N$ и

$$\begin{aligned} \bar{A}_2 &= A_2 \alpha^{2N-2} = A_2 \left(\frac{r}{q_1 b^2} \right)^{\frac{N-1}{N}} = \\ &= \left(2a_1 a_3 - a_2^2 - \frac{q_2 b^2}{r} \right) \left(\frac{r}{q_1 b^2} \right)^{\frac{N-1}{N}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что соответствующим выбором весового коэффициента q_2 критерия можно

при $r \rightarrow 0$ обеспечить значение $\bar{A}_2 = a = \text{const}$, если положить

$$\left(\frac{q_2 b^2}{r} \right) \left(\frac{r}{q_1 b^2} \right)^{\frac{N-1}{N}} = a.$$

Это равенство выполняется при

$$q_2 = c \sqrt[N]{r}, \quad c = \frac{a}{b^2} (q_1 b^2)^{\frac{N-1}{N}} \quad (27)$$

с коэффициентом пропорциональности c . В данном случае при условии (27) и при $r \rightarrow 0$ корни полинома $G(q)$ оптимальной системы управления будут приближаться к устойчивым корням полинома

$$G(q)G(-q) = (-1)^N q^{2N} - a q^2 + 1, \quad (28)$$

$$a = c b^2 / (q_1 b^2)^{\frac{N-1}{N}} > 0.$$

Таким образом, здесь возникает следующая задача: факторизацией полинома (28) определить функцию $G(q)$ и соответствующую ей нормированную передаточную функцию оптимальной системы

$$W_0(q) = 1/G(q) = 1/(q^N + g_{N-1}q^{N-1} + g_{N-2}q^{N-2} + \dots + g_1q + 1) \quad (29)$$

при таком значении параметра a , при котором динамическая система (29) имела бы перерегулирование, равное $\sigma_z = 4,321\%$.

Данную задачу можно решить с использованием системы компьютерной математики MathCAD 15, в которой имеется процедура, позволяющая в режиме аналитических вычислений находить все $2N$ решений алгебраического уравнения

$$(-1)^N q^{2N} - a q^2 + 1 = 0 \quad (30)$$

при произвольном численном значении параметра $a > 0$. С этой целью была разработана программа, выполняющая следующие операции:

1) расчет всех решений p_i , $i = 1, 2, \dots, 2N$, алгебраического уравнения (30) при выбранном положительном значении параметра a ;

2) выбор решений p_i , $i = 1, 2, \dots, N$, имеющих отрицательные вещественные части, и расчет с их использованием коэффициентов нормированного полинома

$$G(q) = \prod_{i=1}^N (q + p_i) = q^N + g_{N-1}q^{N-1} + g_{N-2}q^{N-2} + \dots + g_1q + 1;$$

3) нахождение переходной функции динамической системы (29) и определение для нее перерегулирования σ и длительности переходных процессов;

4) если значение σ системы управления отличается от $\sigma_z = 4,321\%$ более, чем на $0,001\%$, то уточняется значение параметра a и осуществляется переход к операции 1.

Результаты вычислений по данной программе при значениях $N = 2, \dots, 6$ представлены в табл. 1.

В данной таблице параметры T_i , ζ_i соответствуют постоянным времени и коэффициентам демпфирования элементарных, последовательно соединенных звеньев апериодического и колебательного характера, которые можно выделить в системе с передаточной функцией $W_0(q)$.

Подчеркнем, что передаточная функция $W_0(q)$, полученная как предельное решение указанной выше задачи АКОР, описывает динамическую систему, которая имеет минимальное относительное время переходных процессов при заданном значении перерегулирования $\sigma_z = 4,321\%$. Этот вывод подтверждает также сравнительный анализ показателей данной динамической системы и известных систем порядка $N = 2, \dots, 6$, описываемых нормированными передаточными функциями с повышенным быстродействием [12, 13]. Эти показатели представлены в табл. 2.

Первая строка табл. 2 отвечает фильтрам Баттерворса с передаточными функциями $W_B(q) = 1/D_N(q)$, в которых полиномы $D_N(q)$ описываются выражениями (23).

Данные строк 2–4 заимствованы из табл. 3 работы [12]. Вторая строка соответствует динамическим системам с НПФ вида

$$W(q) = 1/(q^2 + 2\zeta q + 1)^{N/2}$$

при четном значении N

и

$$W(q) = 1/(q + 1)(q^2 + 2\zeta q + 1)^{(N-1)/2}$$

при нечетном значении N ,

причем коэффициент демпфирования $\zeta = 0,7$.

Третья строка табл. 2 соответствует аналогичным динамическим системам со значением $\zeta = 0,75$.

Параметры и показатели систем с ПФ $W_0(q)$
Parameters and indicators of systems with the ntf $W_0(q)$

N	a	Коэффициенты $G(q)$	Корни $G(q)$	T_i	ζ_i	$\sigma, \%$	τ_p
2	0	$g_1 = \sqrt{2}$	$p_{1,2} = -\sqrt{2}/2 \pm \sqrt{2}/2i$	1	$\zeta_1 = \sqrt{2}/2 = 0,707107$	4,3213	2,9744
3	0,4760	$g_1 = 2,150236$ $g_2 = 2,073758$	$p_1 = -0,918078$ $p_{2,3} = -0,577840 \pm 0,869099i$	$T_1 = 1,089232$ $T_2 = 0,958164$	$\zeta_1 = 1$ $\zeta_2 = 0,553665$	4,32090	3,8124
4	0,79572	$g_1 = 2,850881$ $g_2 = 3,665902$ $g_3 = 2,707730$	$p_{1,2} = -0,461477 \pm 0,966015i$ $p_{3,4} = -0,892388 \pm 0,275923i$	$T_1 = 0,9340713$ $T_2 = 1,070582$	$\zeta_1 = 0,431054$ $\zeta_2 = 0,955374$	4,32102	4,5736
5	1,06233	$g_1 = 3,541902$ $g_2 = 5,741368$ $g_3 = 5,598041$ $g_4 = 3,346055$	$p_1 = -0,858401$ $p_{2,3} = -0,372580 \pm 1,010266i$ $p_{4,5} = -0,871247 \pm 0,495656i$	$T_1 = 1,164957$ $T_2 = 0,928695$ $T_3 = 0,997635$	$\zeta_1 = 1$ $\zeta_2 = 0,346013$ $\zeta_3 = 0,869187$	4,32095	5,3220
6	1,29958	$g_1 = 4,227217$ $g_2 = 8,284891$ $g_3 = 9,99870$ $g_4 = 7,946964$ $g_5 = 3,986719$	$p_{1,2} = -0,887857 \pm 0,114812i$ $p_{3,4} = -0,796768 \pm 0,665763i$ $p_{5,6} = -0,308735 \pm 1,030546i$	$T_1 = 1,117007$ $T_2 = 0,963107$ $T_3 = 0,929542$	$\zeta_1 = 0,991742$ $\zeta_2 = 0,767373$ $\zeta_3 = 0,286982$	4,32100	6,0633

Четвертая строка отвечает системам управления с передаточной функцией $W(q) = 1/M(q)$, в которой полиномы $M(q)$ описываются выражениями (6).

Данные пятой строки сформированы на основе результатов табл. 1.

Таблица 2
Table 2

Параметры и показатели быстродействующих НПФ
Parameters and indicators of high-speed ntf

Вид НПФ, ее параметры	Показатели	N				
		2	3	4	5	6
1. Фильтры Баттерворса	τ_p	2,974	6,111	6,953	9,716	11,03
	σ	4,321	8,147	10,828	12,777	14,251
2. Колебательный с $\zeta = 0,7$	τ_p	2,90	4,41	7,26	5,99	9,43
	σ	4,60	1,52	6,69	3,45	8,08
3. Колебательный с $\zeta = 0,75$	τ_p	3,13	4,69	5,02	6,43	6,80
	σ	2,84	0,77	3,88	1,79	8,08
4. Оптимальный по Поспелову Г. С., Красовскому А. А.	τ_p	4,38	4,07	4,57	5,71	6,22
	σ	5,00	0,49	4,73	0,00	5,00
5. Оптимальный по Летову А. М. (АКОР)	τ_p	2,974	3,812	4,573	5,322	6,063
	σ	4,321	4,321	4,321	4,321	4,321

Согласно данным табл. 2 система управления с передаточной функцией $W_0(q) = 1/G(q)$ в сравнении с другими системами действительно имеет лучшее быстродействие за счет обеспечения заданного перерегулирования $\sigma_z = \Delta = 4,321 \%$. Поэтому передаточную функцию $W_0(q)$ аналогично перечисленным стандартным НПФ можно рекомендовать к выбору в качестве эталонной передаточной функции при синтезе систем управления алгебраическим методом [13, 15]. Подчеркнем, что динамические системы с функциями $W_0(q)$, определяемыми как предельные решения указанной задачи АКОР, можно рассматривать как модифицированные фильтры Баттерворса, имеющие фиксированное значение перерегулирования $\sigma_z = 4,321 \%$. Известные фильтры Баттерворса получаются как их частный случай при значении параметра $a = 0$.

Метод синтеза быстродействующих линейных САУ

Используя результаты предыдущего раздела, уточним метод синтеза быстродействующих систем управления, изложенный в разделе 1.

Процедуры 1, 2 и 4 данного метода остаются прежними.

В процедуре 3 выбор весовых коэффициентов квадратичного функционала (13) изме-

няется на соотношения (24), причем значение коэффициента q_2 вычисляется с использованием соотношения (27), в котором значение параметра a выбирается из табл. 1 на основе известного порядка N проектируемой системы. Такое значение коэффициента q_2 обеспечивает системе требуемое значение $\sigma_z = 4,321\%$.

Добавляется процедура 5 — моделирование системы с управлением (17) в целях определения значения весового коэффициента r критерия (или, что то же самое, параметра $\alpha = \sqrt[2N]{r/q_1 b^2}$), обеспечивающего выполнение заданного ограничения $|u(t)| \leq u_{\max}$. Начальное значение α рекомендуется задавать с использованием соотношения $\alpha = t_p^*/\tau_p$, где t_p^* — желаемое время типового переходного процесса синтезируемой системы, которое считается известным проектировщику САУ; τ_p — относительное время переходного процесса выбранной НПФ, определяемое по табл. 1 или табл. 2.

Пример 1. Пусть передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W_0(p) = 1/(0,1p^3 + 0,8p^2 + 1,7p + 1),$$

а управляющий сигнал подчиняется ограничению $|u(t)| \leq u_{\max} = 10$ (такой объект рассматривался в работах [10, 23]). Требуется определить линейный регулятор с максимальным быстродействием, обеспечивающий системе переходный процесс с перерегулированием $\sigma_z = \Delta = 4,321\%$ и нулевой статической ошибкой регулирования.

Выполняем процедуры предложенного метода синтеза.

1. Обеспечение астатизма системы.

Так как ПФ объекта третьего порядка (17) не содержит нулевой полюс, то для того чтобы статическая ошибка проектируемой системы управления была равна нулю, полагаем порядок астатизма $n_a = 1$, и тогда "расширенный" объект управления порядка $N = n + n_a = 3 + 1 = 4$ описывается передаточной функцией

$$W(p) = 1/[p(0,1p^3 + 0,8p^2 + 1,7p + 1)]. \quad (31)$$

С учетом того, что интегратор, обеспечивающий астатизм системы, стоит перед исходным объектом и описывается уравнением $\dot{u}(t) = U(t)$, для объекта (31) введем следующие фазовые координаты $z_i(t)$:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= x_z - x(t), \quad z_2(t) = \dot{z}_1(t), \\ z_3(t) &= \dot{z}_2(t), \quad z_4(t) = u(t), \end{aligned}$$

где $u(t)$ — сигнал управления исходного объекта; $U(t)$ — управление "расширенного" объекта.

В данном фазовом пространстве матрицы A_z , B_z описания (8) принимают вид

$$A_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -17 & -8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Определение описания объекта в канонической форме.* Непосредственно по передаточной функции (31) в каноническом фазовом пространстве

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_z - x(t), \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t), \\ x_3(t) &= \dot{x}_2(t), \quad x_4(t) = \dot{x}_3(t) \end{aligned}$$

определяем матрицы описания в форме Фробениуса

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -17 & -8 \end{pmatrix},$$

$$B_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу преобразования фазовых координат $Z(t) = DX(t)$ вычисляем с использованием матриц управляемости объекта в новом и старом базисах (10):

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ -1 & -1,7 & -0,8 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 10 & 17 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решение задачи АКОР.

Предварительно в соответствии с указанными рекомендациями задаемся значениями весовых коэффициентов $q_1 = 1$, $q_3 = q_4 = 0$ функционала качества (13). Для нахождения в первом приближении коэффициента r функционала воспользуемся результатом моделирования работы [10], в которой синтезированная для объекта (32) быстродействующая систе-

ма управления имеет время регулирования $t_p^* = 0,878$ с и найдем

$$\alpha = t_p^*/\tau_p = 0,878/4,4736 = 0,192$$

и далее на основе соотношения (20) вычислим

$$r = q_1 b^2 \alpha^8 = 1 \cdot 1 \cdot (0,192)^8 = 1,847 \cdot 10^{-6}.$$

С использованием формулы (27) рассчитываем последний весовой коэффициент функционала

$$c = \frac{a}{b^2} (q_1 b^2)^{\frac{N-1}{N}} = \frac{0,7957}{1} (1)^{3/4} = 0,7957;$$

$$q_2 = c^N \sqrt[N]{r} = 0,7957^4 \sqrt[4]{1,847 \cdot 10^{-6}} = 0,0293.$$

Решение задачи АКОР $U(t) = \bar{K}Z(t)$ при данных коэффициентах функционала качества в соответствии с формулами (15)–(17) дало следующие значения коэффициентов регулятора $\bar{K} = (65,835 \ 27,831 \ 3,004 \ 7,751)$, причем, как показало моделирование, замкнутая система управления имеет $t_p \approx 0,94$ с, $\sigma \approx 4,1\%$, а значения сигнала управления при отработке задания $x_z = 1$ не превышают уровня 6 единиц. Эти результаты моделирования относительно близки к исходным данным синтеза.

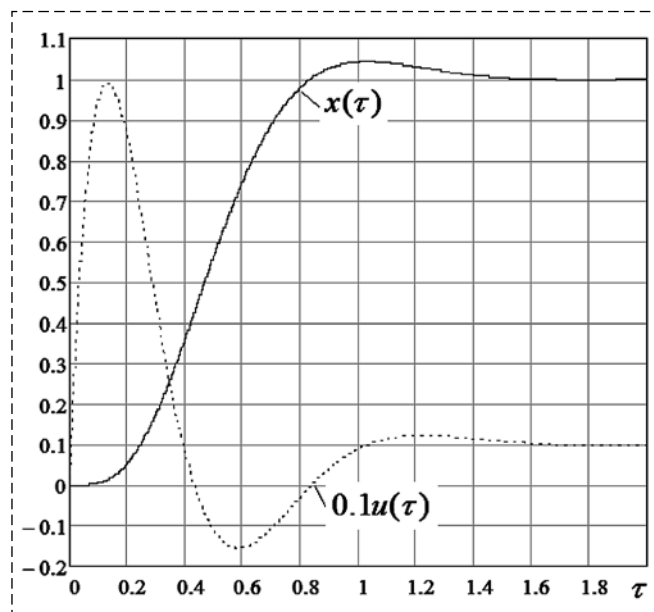
Последующие несколько итераций решения задачи АКОР при изменении коэффициента r по-

зволили уточнить значение этого коэффициента $r = 3,5 \cdot 10^{-7}$, обеспечивающее уровень сигнала управления не более требуемых 10 единиц. В этом случае оптимальный регулятор, имеющий параметры $\bar{K} = (158,308 \ 58,05 \ 5,749 \ 10,723)$, обеспечивает переходные процессы системы, показанные на рисунке, где приведен график исходного сигнала управления $u(\tau) = z_4(\tau)$.

Из данного рисунка также следует, что исследуемая система управления четвертого порядка имеет нулевую статическую ошибку, перерегулирование $\sigma = 4,163\%$ и время переходных процессов $t_p = 0,745$. Эти результаты практически совпадают с результатами системы регулирования [23], имеющей параметры $\bar{K} = (158,093 \ 57,788 \ 5,523 \ 10,757)$, $\sigma = 4,321\%$ и $t_p = 0,738$. Приведенные результаты моделирования отвечают исходным данным синтеза быстродействующего регулятора и свидетельствуют о работоспособности предложенного метода синтеза систем управления.

Заключение

В работе предложен математически обоснованный метод синтеза линейных систем, имеющих минимальное время регулирования, которое понимается в смысле классической теории автоматического управления и определяется с использованием значения $\Delta = \sigma_z = 4,321\%$ "трубки", равной заданному (желаемому) значению перерегулирования синтезируемой системы. Решение данной так называемой задачи максимального быстродействия линейной системы получено с использованием теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР). Максимальное быстродействие и заданные ограничения на перерегулирование и сигнал управления в синтезируемой системе обеспечиваются предложенным способом выбора весовых коэффициентов квадратичного функционала качества. Данный способ предусматривает преобразование задачи АКОР к канонической форме, в которой объект управления описывается матричным дифференциальным уравнением в форме Фробениуса, а функционал качества определяется как интеграл от суммы квадратов канонических фазовых координат объекта с весовыми коэффициентами q_i , $i = 1, 2, \dots, N$, а также квадрата сигнала управления с коэффициентом r . Показано, что решение задачи максимального бы-



Переходные процессы быстродействующей системы четвертого порядка

Transients responses of a high-speed system of the fourth order

стродействия линейной системы находится как решение указанной задачи АКОР при $q_1 = 1$, $q_3 = q_4 = \dots = q_N = 0$ и некоторых положительных значениях коэффициентов q_2 , r . Значения этих коэффициентов предлагается выбирать в процессе моделирования синтезированной системы управления соответственно из условий обеспечения заданного перерегулирования и заданного ограничения на сигнал управления.

Предельным решением указанной задачи АКОР при $r \rightarrow \infty$ и $q_2 = c\sqrt{N/r}$, $c = \text{const}$ определены передаточные функции динамических систем с предельным (максимальным) быстродействием, которые при определенных значениях константы c имеют перерегулирование $\sigma_z = 4,321\%$. Данные динамические системы названы модифицированными фильтрами Баттерворса в связи с тем, что известные фильтры Баттерворса получаются аналогичным образом при константе $c = 0$. Параметры и показатели динамики этих фильтров порядка $N = 2, 3, \dots, 6$ представлены в табл. 1. Найденные передаточные функции модифицированных фильтров Баттерворса рекомендуется использовать в качестве эталонных передаточных функций быстродействующих систем, синтезируемых алгебраическим методом.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 302 с.
2. Athans M., Falb P. L. Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications. New York: McGraw-Hill, 1966.
3. Иванов В. А., Фалдин Н. В. Теория оптимальных систем автоматического управления. М.: Наука, 1981. 336 с.
4. Ключев А. С., Колесников А. А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
5. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Гибридная схема решения задачи линейного быстродействия на основе формализма полиэдральной оптимизации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7. С. 3–9.
6. Каюмов О. Р. Глобально управляемые механические системы. М.: Физматлит, 2007. 168 с.

7. Weinberg L. Network Analysis and Synthesis. New York: McGraw-Hill, 1962.

8. Абдулаев Н. Д., Петров Ю. П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 240 с.

9. Александров А. Г., Паленов М. В. Состояние и перспективы развития адаптивных ПИД-регуляторов // АиТ. 2014. № 2. С. 16–30.

10. Ким Д. П. Синтез оптимальных по быстродействию непрерывных линейных регуляторов // АиТ. 2009. № 3. С. 5–16.

11. Ким Д. П. Алгебраический метод синтеза линейных непрерывных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 1. С. 9–15.

12. Ким Д. П. Определение желаемой передаточной функции при синтезе систем управления алгебраическим методом // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 5. С. 15–21.

13. Ким Д. П. Алгебраические методы синтеза САУ. М.: Физматлит, 2014. 164 с.

14. Ким Д. П. Аналитический метод синтеза астатических непрерывных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. № 5. С. 274–279.

15. Гайдук А. Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход). М.: Физматлит, 2012. 360 с.

16. Пупков К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления: в 3 т. / К. А. Пупков. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. Т. 2: Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления. 736 с.

17. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М.: Гостехиздат, 1962.

18. Ловчаков В. И., Мозжечков В. А. Синтез линейных систем управления с максимальным быстродействием // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 4. Тула: Изд-во ТулГУ, 2016. С. 149–159.

19. Kwakernaak H., Sivan R. Linear optimal control systems. Wiley Interscience, A Division Of John Wiley Sons, Inc. New York-London-Sydney-Toronto, 1972.

20. Kawasaki N., Kobayashi H., Shimemura E. Relation between pole assignment and LQ-regulator // Int. J. Contr. 1998. V. 47. № 4. P. 947–951.

21. Miroslav D. Lutovac. Filter Design for Signal Processing using MATLAB and Mathematica. New Jersey, USA: Prentice Hall, 2001.

22. Садовой А. В., Сухинин Б. В., Сохина Ю. В. Системы оптимального управления прецизионными электроприводами. Киев: ИСИМО, 1996. 298 с.

23. Ловчаков В. И., Шибякин О. А. Решение задачи быстродействия по выходной координате для линейных динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 9. С. 532–541.

Synthesis of Linear Control Systems with Maximum Speed and Given Overshoot

V. I. Lovchakov, lovvi50@mail.ru,
Tula State University, 300600, Tula, Russian Federation

Corresponding author: Lovchakov Vladimir I., Full Professor, Tula State University,
department of electrical engineering and electrical equipment, Tula, 300600, Russian Federation,
e-mail: lovvi50@mail.ru

Accepted on March 22, 2020

Abstract

We study the solution of the so-called maximum speed problem of a linear control system, in which, unlike the classical optimal speed problem with a relay-type control, a linear control algorithm is determined for a linear object that provides the maximum speed of the system. It is of practical importance due to the widespread practical application of linear control laws. The problem is formulated in relation to continuous, one-dimensional high-order control objects described by the corresponding transfer function or an equivalent system of ordinary differential equations in a certain phase space. The time of the transition process t_{tp} of the designed system is understood in the sense of the classical theory of automatic control and is determined using the zone $\Delta = \sigma_{pr} = 4,321\%$, equal to the given (desired) value of the overshoot of the synthesized system. This overshoot corresponds to an oscillatory link with a damping coefficient $\sqrt{2}/2$ — the Butterworth filter of the second order. Accordingly, the maximum performance problem is put in the following formulation: it is required to find a linear feedback algorithm that provides the closed control system with a given astatism order n_a and transferring the control object from the initial state to the final one, determined by the constant signal of the regulator's task, with the minimum value of transient time t_{tp} and set value overshoot $\sigma = \sigma_{pr}$ when performing a constraint on the control signal $|u(t)| \leq u_{max}$. At present, this problem has been solved by an approximately algebraic method of synthesizing linear control systems in determining the desired transfer function of a projected closed system based on typical (reference) normalized transfer functions (NTF). The approximate nature of the decision is determined by the fact that the NTF used in the synthesis of high-speed systems are established empirically. This paper proposes a mathematically sound solution to the problem of maximum speed using the theory of analytical design of optimal controllers (ADOC). The maximum speed and set limits on the overshoot and the value of the control signal in the synthesized system are provided by the proposed method for selecting the weights of the quadratic quality functional. We emphasize that the proposed method for the synthesis of high-speed systems, in contrast to the algebraic method, is applicable to a wider class of control objects: both minimal-phase and non-minimal-phase, as containing zeroes, and not. The method is illustrated by an example of the synthesis of a high-speed fourth-order control system containing the results of its simulation.

Keywords: linear one-dimensional object, speed, overshoot, system astatism, analytical design of optimal controller, Butterworth filters

For citation:

Lovchakov V. I. Synthesis of Linear Control Systems with Maximum Speed and Given Overshoot, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 9, pp. 499–510.

DOI: 10.17587/mau.21.499-510

References

1. Pontriagin L. S., Boltianskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. Mathematical theory of optimal processes, Moscow, Fizmatlit Publ., 1961, 302 p (in Russian).
2. Atans M., Falb P. L. Optimal Control, An Introduction to the Theory and Its Applications, McGraw-Hill, New York, 1966.
3. Ivanov V. A., Faldin N. V. theory of optimal control systems, Moscow, Nauka Publ., 1981, 336 p (in Russian).
4. Kliuev A. S., Kolesnikov A. A. The optimization of control systems by time-optimality, Moscow, Energoizdat Publ., 1982. 240 p. (in Russian).
5. Filimonov A. B., Filimonov N. B. The hybrid scheme of the task solution of linear time-optimality based on the formalism of the polyhedral optimization, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2014, no.7, pp. 3–9 (in Russian).
6. Kayumov O. R. Globally controlled mechanical systems, Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 168 p (in Russian).
7. Weinberg L. Network Analysis and Synthesis, McGraw-Hill, New York, 1962.
8. Abdulaev N. D., Petrov Yu. P. Theory and design methods of optimal regulators, Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1985. 240 p (in Russian).
9. Aleksandrov A. G., Palenov M. V. Status and development prospects of adaptive PID controllers, *AiT Publ.*, 2014, no. 2, pp. 16–30 (in Russian).
10. Kim D. P. The synthesis of optimal time-optimality continuous linear controller, *AiT Publ.*, 2009, no. 3, pp. 5–16 (in Russian).
11. Kim D. P. The algebraic method of the synthesis of linear continuous control systems. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2011, no. 1, pp. 9–15 (in Russian).
12. Kim D. P. Finding the desirable transfer function in the synthesis of control systems by the algebraic method. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 5, pp. 15–21 (in Russian).
13. Kim D. P. Algebraic methods for the synthesis of ACS, Moscow, Fizmatlit Publ., 2014. 164 p. (in Russian).
14. Kim D. P. Analytical method for the synthesis of static control systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, no. 5, pp. 274–279 (in Russian).
15. Gajduk A. R. Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach), Moscow, Fizmatlit Publ., 2012. 360 p. (in Russian).
16. Pupkov K. A. Methods of classical and modern control theory: 3 volumes, Moscow, MG TU im. N. E. Bauman Publ., 2000. 736 p. (in Russian).
17. Krasovskii A. A., Pospelov G. S. Automatics and technical cybernetics fundamentals, Moscow, Gostekhizdat Publ., 1962 (in Russian).
18. Lovchakov V. I., Mozzhechkov V. A. Synthesis of linear control systems with maximum speed, *Izvestiya Tula. Technical science*, iss. 4. Tula, TulSU Publ., 2016, pp. 149–159 (in Russian).
19. Kwakernaak H., Sivan R. Linear optimal control systems. Wiley Interscience, A Division of John Wiley Sons, Inc. New York-London-Sydney-Toronto 1972.
20. Kawasaki N., Kobayashi H., Shimemura E. Relation between pole assignment and LQ-regulator, *Int. J. Contr.*, 1998, vol. 47, no. 4, pp. 947–951.
21. Miroslav D. Lutovac. Filter Design for Signal Processing using MATLAB and Mathematica, New Jersey, USA, Prentice Hall, 2001.
22. Sadovoy A. V., Sukhinin B. V., Sokhina Yu. V. Optimal control systems for precision electric drives, Kiev, ISIMO Publ., 1996, 298 p (in Ukraine).
23. Lovchakov V. I., Shibyakin O. A. The solution of a problem of speed of response on output coordinate for linear dynamic systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, no. 9, pp. 532–541 (in Russian).