

Б. В. Сухинин, д-р техн. наук, проф., eeo@uic.tula.ru,
В. В. Сурков, д-р техн. наук, проф., vvs150747@mail.ru,
 Тульский государственный университет

Аналитическое конструирование робастных оптимальных по быстродействию систем управления с бесконечно большим коэффициентом усиления

Обсуждается проблема синтеза робастных систем управления с большим коэффициентом усиления и, в частности, оптимальных по критерию быстродействия, позволяющих управлять оптимально по точности регулирования многомерными нелинейными динамическими объектами высокой размерности с функциональными неопределенностями.

Предлагается метод аналитического конструирования оптимальных по быстродействию систем управления для широкого класса многомерных нелинейных динамических объектов с функциональными неопределенностями, в том числе неустойчивыми, неминимально-фазовыми, нейтральными, обладающими свойствами дифференцирования. Простота и универсальность, математическая строгость и физическая обоснованность данного метода заключается в использовании метода Р. Беллмана и декомпозиции задачи оптимального по быстродействию управления на ряд однотипных простых задач первого порядка.

Теоретически исчерпывающее решение задачи робастного управления дает идея построения систем, устойчивых при неограниченном увеличении коэффициента усиления. Свойствами устойчивости при этом обладают оптимальные системы, синтезированные с применением квадратичных функционалов качества, не зависящих явно от управляющего сигнала, и при ограничении на управляющий сигнал. Существенно, что в отличие от непрерывных систем с не измеряемыми возмущениями и мало известным объектом, в которых условия инвариантности предполагают использование бесконечно больших коэффициентов усиления, в релейных (разрывных) системах эквивалентный эффект достигается с помощью конечных управляющих воздействий.

Поскольку задача быстродействия является частной задачей точности воспроизведения входного воздействия на объект управления, установившаяся ошибка регулирования (в том числе и все коэффициенты ошибок: по положению, скорости, ускорению, рывку и т. д.) теоретически строго равна нулю при наличии внешних и внутренних помех, действующих только на объект регулирования, но не на систему управления, включая датчики переменных состояния объекта управления или сигнал задания. Однако из-за инерции объекта ни о какой точности не может быть и речи в переходном процессе отработки сигнала задания, пусть даже и в оптимальном по быстродействию режиме.

Ключевые слова: неопределенный объект, большой коэффициент усиления, оптимальная точность, быстродействие, синтез управления, устойчивость, функциональное уравнение, условие управляемости

"Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий"

Козьма Прутков

Введение

Проблема робастности в теории управления по-прежнему является весьма актуальной и продолжает будоражить умы ученых [1–10]. Здесь важно отметить, что "все вопросы науки — в том числе и проблема робастности, — негласно регулируются нравственностью" [11]. В свою очередь, "нравственность — это добровольное исполнение человеком тех или иных обязательств и норм нравственного закона (Закона Божьего)" [12] или законов природы для неверующих в Бога. Отсюда вывод простой — необходимо изучать законы природы, расширяя круг понятий. В противном случае индивид формирует у себя иллюзию объектив-

ности, что порождает иллюзию управления. Но результат все равно будет объективным. А разочарования индивида — реальными.

Как показано в статье [1], "большая часть результатов современной теории робастного управления получена на основе линейных методов", использующих давно известный круг понятий. В результате получаемое линейное управление хотя и обеспечивает "уровень гашения возмущений в замкнутой системе меньше заданного числа", но не обладает наивысшим качеством (не оптимально по быстродействию и по точности отработки сигнала задания, при котором все коэффициенты ошибок равны нулю), а лишь "обеспечивает только асимптотическую устойчивость". Кроме того,

в таких "робастных следящих системах в начальный момент времени наблюдается высокое значение сигнала управления" [2] как следствие "решения различных робастных задач, приводящих не известно откуда к появлению больших коэффициентов усиления" [13]. Из-за этого на управление вынужденно и бездоказательно приходится накладывать ограничение. "Отличительной особенностью K_{∞} -робастных систем является тот факт, что ... применяется метод функции Ляпунова" [2]. Такой подход также не расширяет "круг понятий", не обеспечивает оптимальную точность и принципиально исключает возможность получения оптимального быстрого действия.

Для успешного решения проблем робастного управления одной математики мало, необходимо расширять "круг понятий" и, как минимум, изучать физику процесса управления (законы природы). Например, в работах [1, 14–16] "динамика управляемого процесса в робастных системах с большим коэффициентом усиления разбита на два интервала: быстрое движение к малой окрестности плоскости $s = 0$ " и "медленное движение по $s = 0$ в положение равновесия. Эта особенность авторами названа "эффектом локализации движения". Этот термин фактически подтверждает принцип работы робастного регулятора [17]: сначала как можно быстрее свести ошибку регулирования к нулю (задача быстрого действия) и далее держать ошибку на нулевом уровне (задача точности). Здесь важно отметить, что в быстродействующем процессе регулятор работает при максимальном сигнале управления в разомкнутой системе без обратной связи, когда все зависит от инерционности объекта, а как ее уменьшить или ликвидировать совсем, пока никто не знает.

Авторы работы [3] поставили цель: синтезировать "алгоритм управления динамическими объектами с компенсацией параметрической неопределенности, внешних возмущений и помех измерения". Это аналогично, например, управлению положением фотона при измерении его действительного положения сантиметровой лентой трясущимися руками с дальнейшей попыткой извлечь для управления хоть какую-нибудь ценную достоверную информацию о местоположении объекта управления. Для точного качественного управления объектом очень важно иметь точную качественную информацию о его состоянии и, по возможности, без всяких промежуточных преобразований.

Хорошо известно, что с точки зрения физики процессов, происходящих при управлении, управление — это передача информации от блока к блоку при взаимодействии между блоками по замкнутому циклу. Иными словами, измерение (информация) — это только одна составляющая процесса управления, причем управление никак не может повлиять на уровень помех измерения или на помехи в сигнале задания (независимо от управления они либо есть, либо их нет), все помехи проникают непосредственно в регулятор (устройство, вырабатывающее "чистый", без помех сигнал управления). Именно поэтому на регулятор не должны действовать никакие помехи [17], внешние возмущения (возмущения окружающей среды) и неопределенности. Сигнал, поступающий в регулятор, должен быть предварительно и достоверно очищен от любых искажений. Компенсация (фильтрация) помех измерения и задания, а еще лучше достаточное для управления точное получение информации об измерении и задании — это отдельная крупная и очень важная проблема, влияющая на качество управления, но не имеющая к управлению никакого отношения. Влияние же параметрических неопределенностей объекта и внешних возмущений на объект может быть эффективно уменьшено вплоть до нуля (это и есть инвариантность, т. е. независимость, или робастность) только с помощью управления по замкнутому циклу (в системах с обратной связью).

Для иллюстрации действия неизвестной помехи измерения $f_{изм}$ на процесс управления и компенсации помех рассмотрим структурную схему [17] замкнутой автоматической системы (рис. 1) с регулятором (Р), выходным сигналом x_1 объекта управления (ОУ), входным сигналом задания $x_{1зад}$, ошибкой Δx , управлением u , выходным сигналом системы $x_{1сп}$ с помехой. На ОУ действует внешняя помеха (окружающая среда, например, момент нагрузки) $f_{вн}$, приведенная к выходу ОУ.

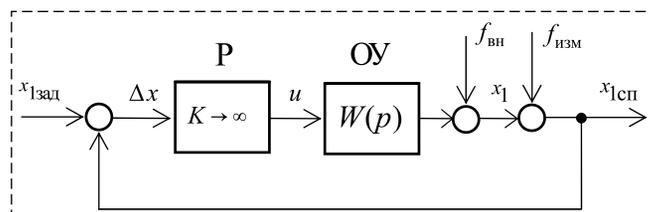


Рис. 1. Структурная схема системы автоматического управления

Fig. 1. The block diagram of the automatic control system

Из схемы на рис. 1 следует:

$$x_1(p) = \frac{KW(p)}{1 + KW(p)} x_{1\text{зад}}(p) + \frac{1}{1 + KW(p)} f_{\text{вн}}(p) - \frac{KW(p)}{1 + KW(p)} f_{\text{изм}}(p);$$

$$x_{1\text{сп}}(p) = \frac{KW(p)}{1 + KW(p)} x_{1\text{зад}}(p) + \frac{1}{1 + KW(p)} f_{\text{вн}}(p) + \frac{1}{1 + KW(p)} f_{\text{изм}}(p).$$

При $K \rightarrow \infty$, полагая, что каким-то образом [17] решен вопрос устойчивости системы, имеем: $x_1 = x_{1\text{зад}} - f_{\text{изм}}$, $x_{1\text{сп}} = x_{1\text{зад}}$. Отметим независимость сигналов x_1 и $x_{1\text{сп}}$ от $f_{\text{вн}}$ и параметрических изменений ОУ (параметрических возмущений).

Из последних формул следует:

$$f_{\text{изм}} = x_{1\text{зад}} - x_1 = x_{1\text{сп}} - x_1$$

и $x_1 = x_{1\text{зад}} - f_{\text{изм}} = x_{1\text{сп}} - f_{\text{изм}}$.

Итак, для выделения помехи и получения чистого (без помех) сигнала необходим сам чистый сигнал. Все остальное — иллюзия компенсации неизвестной помехи с помощью управления.

В работах [18—20] "предлагается другая теоретическая схема включения механизма большого усиления в структуру систем автоматического управления. В ее основе лежит робастная коррекция (посредством большого коэффициента усиления) объекта управления как предварительный этап решения задачи управления. В итоге синтезируемая САУ имеет двухконтурную структуру: внутренний контур обеспечивает робастную коррекцию ОУ, а внешний отвечает за достижение цели управления". Такое разделение задачи на ряд простых (декомпозиция) позволяет сосредоточить внимание на придании свойств робастности вначале объекту управления, а затем можно формировать новые полезные свойства системы. Важно подчеркнуть, что для обеспечения приемлемой устойчивости внутреннего контура при большом коэффициенте усиления такая робастная коррекция накладывает определенные ограничения, в том числе на корни характеристического многочлена скорректированного объекта: корни (моды) должны быть быстро затухающими. "Данная схема коррекции неприменима для неминимально-фазовых объектов, а также

в случаях, когда эти корни неудовлетворительны с точки зрения требуемого запаса устойчивости синтезируемой системы управления". Кроме того, "отметим один существенный аспект классических схем и методов модального управления — они могут приводить к неробастным решениям". При этом внешний контур строится по традиционной схеме непрерывных систем управления с регулятором, что не может обеспечить оптимальную точность регулирования и принципиально исключает возможность получения оптимального быстродействия.

Настоящую статью можно рассматривать как продолжение обсуждения вопросов теории оптимального управления и, в частности, робастного регулятора по критерию быстродействия (частный случай задачи точности).

Авторы в работе [21] отмечают: "Решение задач оптимального управления по критерию быстродействия в форме обратной связи, как показывает анализ известных работ [1—16], оцениваемое сотнями, представляет серьезную теоретическую проблему даже для объектов невысокого порядка ($n = 3, 4, 5$)". Точное аналитическое решение задачи быстродействия до сих пор является "неприступной крепостью" и "изюминкой на торте" даже линейной теории автоматического управления.

Так, например, для синтеза оптимальных по быстродействию систем до сих пор применяется метод фазовой плоскости и теорема об n интервалах А. А. Фельдбаума [22], которая им доказана для линейных систем (своеобразный аналог "эффекта локализации движения" или декомпозиции), имеющих аperiodические переходные процессы (не осциллирующие системы). Позднее аналогичный вывод был сделан и для нелинейных систем [23], которые, будучи линеаризованными, имеют аperiodические переходные процессы. Однако данная теорема позволяет определить только число интервалов постоянного управления, а не оптимальное быстродействующее управление, тем более, для осциллирующих (колебательных) систем.

Целью настоящей работы является демонстрация теоретических аспектов и практических особенностей точного метода аналитического конструирования оптимальных по быстродействию систем управления, позволяющих управлять нелинейными многомерными динамическими объектами высокого порядка с функциональными неопределенностями, в том числе неустойчивыми; неминималь-

но-фазовыми; нейтральными; обладающими свойствами дифференцирования. Простота и универсальность, математическая строгость и физическая обоснованность данного подхода заключаются в декомпозиции задачи быстрогодействия (теореме об n интервалах управлений, являющейся обобщением теоремы об n интервалах А. А. Фельдбаума) и подавлении динамики функционально неопределенного объекта и внешних возмущений за счет бесконечно большого коэффициента усиления в скользящем режиме работы.

Предлагаемый метод синтеза робастных систем управления, оптимальных по быстродействию

Теоретически исчерпывающее решение задачи робастного оптимального по быстродействию управления дает идея использования метода динамического программирования Р. Беллмана (математика) и принципа действия оптимальной по быстродействию системы (физика), которая является частным случаем решения задачи оптимальной точности [17, 24]. Акцентируем здесь внимание на том, что в рамках известного традиционного представления ("круга понятий") робастность системы, т. е. подавление динамики функционально неопределенного объекта и внешних возмущений, можно обеспечить только лишь в скользящем режиме спустя время регулирования t_p (t_p — время отсутствия обратной связи или разомкнутого состояния системы при максимальном сигнале управления до возникновения скользящего режима). При этом для точного отслеживания входного сигнала частота его изменения удовлетворять условию [24]

$$\omega_0 \ll 2\pi/t_p. \quad (1)$$

Чем меньше t_p (чем больше быстродействие), тем выше может быть частота изменения входного сигнала. Наименьшим временем регулирования t_p (но не оптимальным быстродействием) обладают системы с оптимальным (минимальным) "расходом сигнала управления" (термин введен А. А. Красовским). Однако такие системы управления должны быть устойчивы при отсутствии управляющего сигнала [24]. В противном случае приходится мириться с несколько возрастающим временем t_p в оптимальном по быстродействию процессе.

Один из возможных подходов к разработке математически строгой физической теории робастного управления может базироваться на теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов [24] по критерию быстрогодействия (АКОРБ).

Общим признаком интегральных критериев точности регулирования (включая оптимальные быстродействия) является их независимость в явной форме от управления:

$$J = \int_0^T F_0(\mathbf{X})dt, \quad F_0(\mathbf{X}) > 0,$$

$$\text{время } T \text{ — не определено,} \quad (2)$$

причем критерий быстрогодействия является частным случаем критерия точности при $F_0(\mathbf{X}) > 0$, или критерий быстрогодействия является одновременно и критерием точности (здесь \mathbf{X} — вектор состояния).

Известно (например, из принципа максимума Л. С. Понтрягина или динамического программирования Р. Э. Беллмана), что минимизация такого критерия (2) обеспечивается идеальными релейными управлениями:

$$u_{ij}(t) = -\text{sign}(\psi_{ij}(\mathbf{X})), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $|u_{ij}(t)| \leq 1$, $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ — вектор состояния (вектор фазовых координат) ОУ; n — порядок объекта управления (максимальное число интервалов управления); m — число управляющих воздействий; $\psi_{ij}(\mathbf{X})$ — искомые функции переключения, причем $\psi_{ij}(\mathbf{X}) = 0$ — поверхности переключения, проходящие через начало координат $\psi_{ij}(0) = 0$.

Пусть объект управления с функциональной неопределенностью описывается векторно-матричным нелинейным дифференциальным уравнением возмущенного движения в соответствии с теорией возмущенно-невозмущенного движения А. М. Ляпунова:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}) + \mathbf{B}(\mathbf{X})\mathbf{U} + \mathbf{V}(t). \quad (4)$$

где $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_m)^T$ — вектор управления; $\mathbf{A}(\mathbf{X}) = (a_1(\mathbf{X}), \dots, a_n(\mathbf{X}))^T$ — нелинейная нестационарная ограниченная вектор-функция; $\mathbf{B}(\mathbf{X}) = (b_{ij}(\mathbf{X}))_{n \times m}$ — нелинейная нестационарная ограниченная функциональная матрица; $\mathbf{V}(t) = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n)^T$ — вектор-функция неконтролируемых ограниченных внешних возмущений.

Предполагается, как минимум, что известен и может быть измерен вектор состояния объекта управления с необходимой точностью и известны входы подачи управляющих воздействий. Для упрощения дальнейшего изложения, не влияющего на сущность решаемой задачи, рассмотрим одномерный объект $b_n(\mathbf{X})$. Следуя работам [17, 24], запишем основное функциональное уравнение относительно искомой функции переключения (по А. А. Красовскому — скорости проникновения поверхности переключения):

$$\dot{\psi}(\mathbf{X}) = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n} \dot{x}_n = \mathbf{G}(\mathbf{A} + \mathbf{V}) + \mathbf{G}\mathbf{B}u \quad (5)$$

или

$$\psi(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}) + \varphi(\mathbf{X})u. \quad (6)$$

Здесь

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{G}\mathbf{A} = g_1(\mathbf{X})(a_1(\mathbf{X}) + v_1) + g_2(\mathbf{X})(a_2(\mathbf{X}) + v_2) + \dots + g_n(\mathbf{X})(a_n(\mathbf{X}) + v_n);$$

$\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{G}\mathbf{B} = g_n(\mathbf{X})b_n(\mathbf{X})$, $\mathbf{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$, $g_i = \partial\psi/\partial x_i \neq 0$ — неизвестные искомые функции.

Представим матричное уравнение (4) в виде системы обычных дифференциальных уравнений в форме Коши с учетом масштабирования сигнала управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(\cdot) + \vartheta_1(\cdot); \\ \dot{x}_2 = a_2(\cdot) + \vartheta_2(\cdot); \\ \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = a_n(\cdot) + b(\cdot)U_m u + \vartheta_n(\cdot). \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $|u| \leq 1$. В будущем распространим решение задачи синтеза в аналитическом виде закона оптимального по быстродействию управления и на многомерные объекты с m входами управления.

Поскольку $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{B}(\cdot)$ и $\mathbf{V}(\cdot)$ являются неизвестными, то представим объект (4), (7) в виде линейной известной части и нелинейной неизвестной части:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(\cdot); & f_i(\cdot) = -x_{i+1} + a_i(\cdot) + \vartheta_i(\cdot); \\ & i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(\cdot) + b(\cdot)U_m u; & f_n(\cdot) = a_n(\cdot) + \vartheta_n(\cdot). \end{cases} \quad (8)$$

Здесь линейная часть объекта представлена наиболее простым последовательным соединением n интегрирующих звеньев [17]. Все $f_i(\cdot)$, $b(\cdot)$ можно рассматривать как нежелательные помехи, действующие на объект.

Для оптимального по быстродействию управления не осциллирующими объектами необходимо выполнить условие управляемости (реализуемости) системы регулирования в виде строгого равенства:

$$|f(\mathbf{X})| = \varphi(\mathbf{X}), \dots, \varphi(\mathbf{X}) > 0. \quad (9)$$

Можно показать [24], что при применении последовательно $(n - 1)$ раз условия (9) фазовое пространство постепенно сжимается до единицы (см. работы А. Колесникова), причем

$$|u_n| = |u_{n-1}| = \dots = |u_2| = |u_1| = |u| = 1, \\ u_i = -\text{sign}[\psi_i(x_i, \dots, x_n)], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а последняя функция переключения $\psi_n(\mathbf{X}) = x_n$.

Рассмотрим точное аналитическое решение задачи синтеза закона оптимального управления объектом (8) с использованием теории АКОРБ [20].

Решение. Для объекта (8) n -го порядка в соответствии с теоремой об n интервалах управлений [24], запишем абсолютно точные выражения для n поверхностей переключения и, соответственно, n управлений оптимального по быстродействию процесса для неосциллирующих нелинейных объектов с точностью до постоянных интегрирования:

n -й интервал: $\psi_n = x_n$, $u_n = -\text{sign}(x_n)$;

$(n-1)$ -й интервал:

$\dot{\psi}_{n-1} = x_n + |x_n|u$, $u_{n-1} = -\text{sign}(\psi_{n-1} + C_{n-1})$;

$(n-2)$ -й интервал:

$\dot{\psi}_{n-2} = \psi_{n-1} + |\psi_{n-1}|u$, $u_{n-2} = -\text{sign}(\psi_{n-2} + C_{n-2})$;

... и так далее ...

второй интервал:

$\dot{\psi}_2 = \psi_3 + |\psi_3|u$, $u_2 = -\text{sign}(\psi_2 + C_2)$;

первый интервал:

$\dot{\psi} = \psi_1 + |\psi_1|u$ — функция переключения оптимального по быстродействию управления объектом (8) и управление $u = u_1 = -\text{sign}(\psi + C_1)$ — результат решения.

Здесь C_i — константа интегрирования соответствующего $\dot{\psi}_i$, которая определяется из условия $\psi_i(0) = 0$, так как поверхность переключения должна проходить через начало координат.

Иллюстрация полученных результатов исследования

Рассмотрим пример управления математическим маятником, взятый из работы [2], с учетом масштабирования сигнала управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -k_1 \sin x_1 + k_2 U_m u + v(t), \end{cases} \quad (10)$$

где $|u| \leq 1$; $U_m = 20$; $x_1 = \theta$ — угол от положения равновесия (вертикаль) — выходная координата; $x_2 = \dot{\theta}$; $k_1 = g/l$, $k_1 = [19,6; 9,8; 6,5]$; $k_2 = 2/ml^2$, $k_2 = [16; 2; 0,6]$; l — длина стержня, $l = [0,5; 1,0; 1,5]$; m — масса груза, $m = [0,5; 1,0; 1,5]$; номинальные значения параметров $m = l = 1$; $v(t) = 1 + \sin(10t) + \cos(4t)$ — неконтролируемое внешнее возмущение; $y_d = 0,5\sin(0,5t) + 0,5\cos(t)$ — эталонная траектория.

Генеральные составляющие модели:

$$f(\cdot) = -k_1 \sin(x_1) + v(t), \quad b(\cdot) = k_2.$$

Заданные показатели качества: $t_s = 2$ с, $\delta_x = 2\%$. Начальные условия: $x(0) = (x_{10}, x_{20})^T = (2, 0)^T$.

Будем полагать, что уравнения (10) записаны в отклонениях в соответствии с концепцией возмущенно-невозмущенного движения А. М. Ляпунова.

Решение. Здесь два интервала. На последнем интервале: $\psi_2 = x_2$. Для первого интервала:

$$\dot{\psi} = x_2 + |x_2|u = \dot{x}_1 + |x_2|u, \quad (11)$$

и оптимальное по быстродействию управление: для реальных координат:

$$u = \text{sign}(y_d - x_1 - \int |x_2| u dt + 0,0964). \quad (12)$$

Поскольку интегральную составляющую закона управления (12) аналитически определить не представляется возможным из-за неизвестных составляющих объекта, то постоянную интегрирования можно легко найти подбором при моделировании для конкретных начальных условий и задания.

На рис. 2 приведены результаты моделирования объекта (10) с управлением (12) при $y_d = -1$, $m = l = 1$.

Отметим, что с управлением (12) время оптимального по быстродействию процесса регулирования $t_p \approx 0,55$ с при нулевой (теоретически) ошибке слежения (в работе [2] это $t_s = 2$ с — заданное время установления (*settling time*) пере-

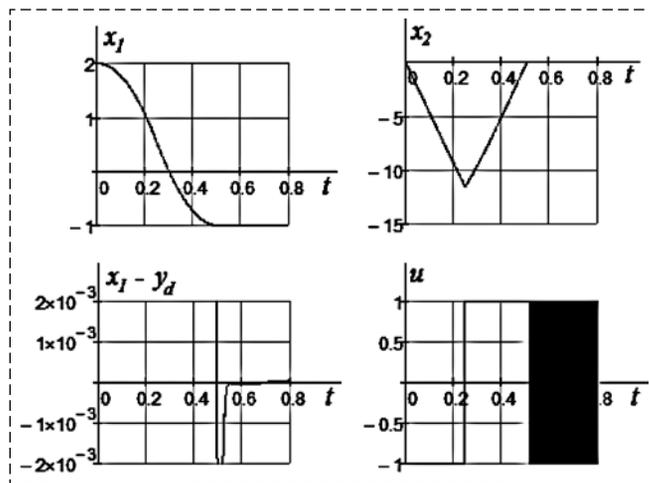


Рис. 2. Графики сигнала управления, переходных процессов и изменения ошибки в системе (10), (12)

Fig. 2. Graphs control signal, transients and changes in the error in the system (10), (12)

ходной составляющей при (1...5) %-ной ошибке слежения).

Существенный недостаток точного оптимального по быстродействию управления (12) заключается в необходимости определения постоянной интегрирования, которая зависит от изменяющихся начальных условий, неизвестных составляющих объекта и возмущений.

Достоинство метода: простота и быстрота получения решения с точностью до постоянных интегрирования, которое можно использовать для сравнения с другими оптимальными управлениями, а также для проверки подозрительных решений на оптимальность по быстродействию.

Для данного примера существует уникальная возможность получения абсолютно точного решения, если предположить, что генеральные составляющие модели известны и $v(t) = 0$. Подставляя в соотношение (11) уравнения объекта (10)

$$\dot{\psi} = \dot{x}_1 + (1/k_2 U_m)(|x_2| \dot{\psi}_2 + k_1 \text{sign}(x_2) \sin(x_1) \dot{x}_1), \quad (13)$$

интегрируя и учитывая $\psi|_{x=0} = 0$, получим $u = -\text{sign} \psi$ для реальных координат:

$$u = \text{sign} \left[y_d - x_1 - \frac{1}{2k_2 U_m} (x_2^2 + k_1 \times \cos(y_d - x_1)) \text{sign}(x_2) \right]. \quad (14)$$

На рис. 3 приведены результаты моделирования объекта (10) с управлением (14) при $y_d = -1$, $v(t) \neq 0$, $m = l = 1$. Из рис. 2 и 3 следует,

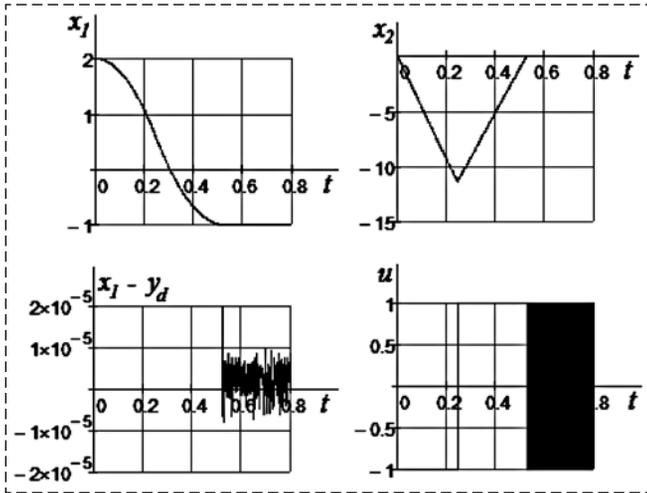


Рис. 3. Графики переходных процессов в системе (10), (14)
Fig. 3. Graphs transients in the system (10), (14)

что управления (14) и (12) практически одинаковы по быстродействию, но управление (14) сложнее по структуре, и для его вывода необходимо знать генеральные составляющие объекта.

Рассмотрим линейную часть объекта (10):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = U_m u. \end{cases} \quad (15)$$

Воспользовавшись уравнением (11) с учетом (15) и проинтегрировав его, получим оптимальное по быстродействию управление для объекта (15) и предполагаемое управление для объекта (10):

$$u = -\text{sign}(\psi) = -\text{sign} \left[y_d - x_1 - \frac{|x_2| x_2}{2U_m} \right]. \quad (16)$$

Такое решение (оптимальное по точности для объекта (10) и почти (квази) оптимальное по быстродействию) возможно при выполнении (может быть принудительном) условия управляемости (реализуемости) в виде нестроого равенства: $|f(\mathbf{X})| \leq \varphi(\mathbf{X})$. Можно показать, что оно выполняется, что подтверждается моделированием (рис. 4), где приведены результаты моделирования объекта (10) с управлением (16) при неизвестных генеральных составляющих, $v(t) \neq 0$, $y_d = -1$, $m = l = 1$.

Как следует из рис. 2–4, все найденные управления примерно одинаковы по времени переходного процесса при одинаковом $U_m = 20$, однако управление (16) не зависит от постоянных интегрирования и начальных условий. Отметим здесь, что в любом случае время

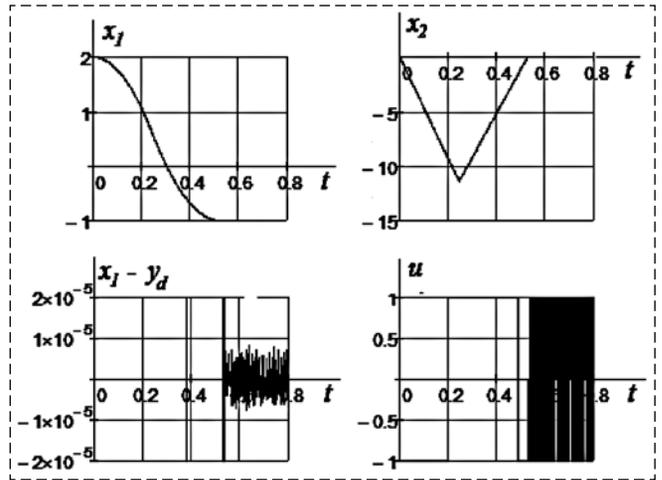


Рис. 4. Графики сигнала управления, переходных процессов и изменения ошибки в системе (10), (16)
Fig. 4. Graphs control signal, transients and changes in the error in the system (10), (16)

переходных процессов в квазиоптимальном или оптимальном по быстродействию процессе существенно зависит от генеральных составляющих объекта и начальных условий.

На рис. 5, 6 представлены графики процесса слежения за эталонной траекторией y_d и ошибки слежения $y_d - x_1$.

Из рис. 5 следует, что в управлении (16) три интервала, т. е. оно квазиоптимально по

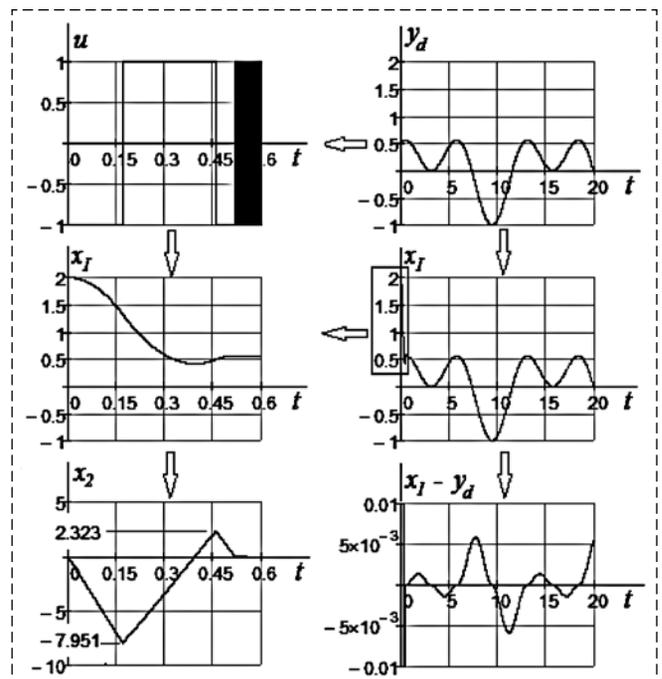


Рис. 5. Реакция системы (10) на задание y_d : управление (16), $U_m = 20$
Fig. 5. Reaction of the system (10) to the task y_d : control (16), $U_m = 20$

быстродействию до наступления скользящего режима при $t_p \approx 0,55$ с. Вследствие квазиоптимальности (сказываются неучтенные в управлении генеральные составляющие объекта), задание y_d обрабатывается колебательно (как, впрочем, и на графике в работе [2, стр. 703, рис. 4]). Небольшая ошибка регулирования (после t_p) свидетельствует о том, что быстродействия не достаточно и регулятор не успевает обрабатывать изменяющееся задание.

Замечание: ошибка регулирования может возникать также из-за недостаточной точности компьютерного моделирования и зависит от программы моделирования, точности вычислений, дискретизации по времени и уровню — все это влияет на точность определения нулевого значения функции переключения.

Графики получены при начальном условии $x(0) = (2,0)^T$ и $m = l = 1$ для системы (10) с квазиоптимальным по быстродействию (16) управлением (рис. 5) и с оптимальным по точности управлением (рис. 6):

$$u = -\text{sign}\psi = -\text{sign}(y_d - x_1 - 0,14x_2), \quad (17)$$

взятым из работы [17] для сравнения.

Теоретически ошибка регулирования в скользящем режиме должна быть строго равна нулю, а практически определяется точностью работы электронной схемы регулятора и точностью работы датчиков состояния объекта.

Управление (17) с линейными обратными связями (хотя и имеет два интервала, но это не оптимальное быстродействие) наиболее про-

стое по структуре и по аналитическому выводу, обеспечивает меньшее значение t_p из-за $0 \leftarrow |f| \ll \varphi$ (см. (9)), чем управление (16), где $|f| \approx \varphi$, но ошибка регулирования (после $t_p \approx 0,4$ с) на порядок больше вследствие малого быстродействия и большего значения координаты x_2 .

Здесь подтверждается вывод, приведенный в работе [17]: чем больше быстродействие, тем меньше ошибка слежения при прочих равных условиях. Для устойчивых объектов (в тех случаях, когда объект при отсутствии управления устойчив) чем меньше время t_p , тем быстрее наступит скользящий режим работы системы при бесконечном значении коэффициента усиления системы. Ошибка слежения за эталонной траекторией в системах (10), (16) и (10), (17) возникает из-за несоответствия быстродействия (t_p) частоте изменения эталонной траектории, т. е. из-за нарушения условия (1) при имеющемся быстродействии.

Одним из возможных и наиболее доступных способов кардинального решения проблемы робастности и, в частности, проблемы быстродействия является существенное увеличение мощности исполнительного органа (объекта управления) совместно с регулятором [17].

Исследуем самое простое управление (17) объектом (10) с неизвестными генеральными составляющими при действии эталонной траектории и неконтролируемого внешнего возмущения при существенном увеличении параметра U_m канала управления объектом.

На рис. 7 представлены графики процесса слежения за эталонной траекторией y_d и ошиб-

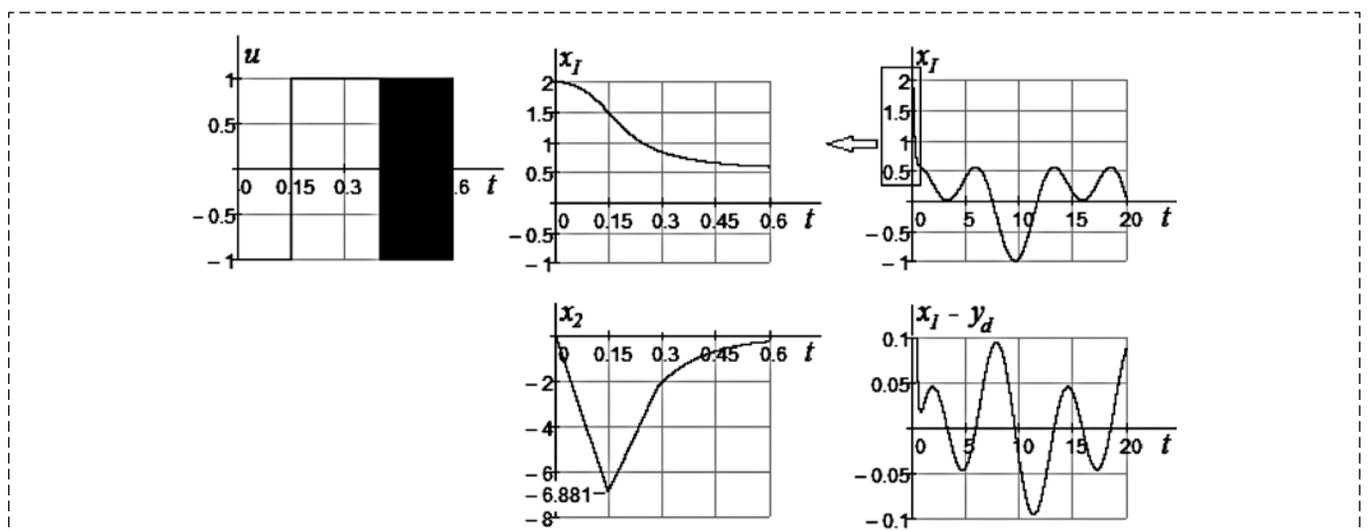


Рис. 6. Реакция системы (10) на задание y_d : управление (17), $U_m = 20$
 Fig. 6. Reaction of the system (10) to the task y_d : control (17), $U_m = 20$

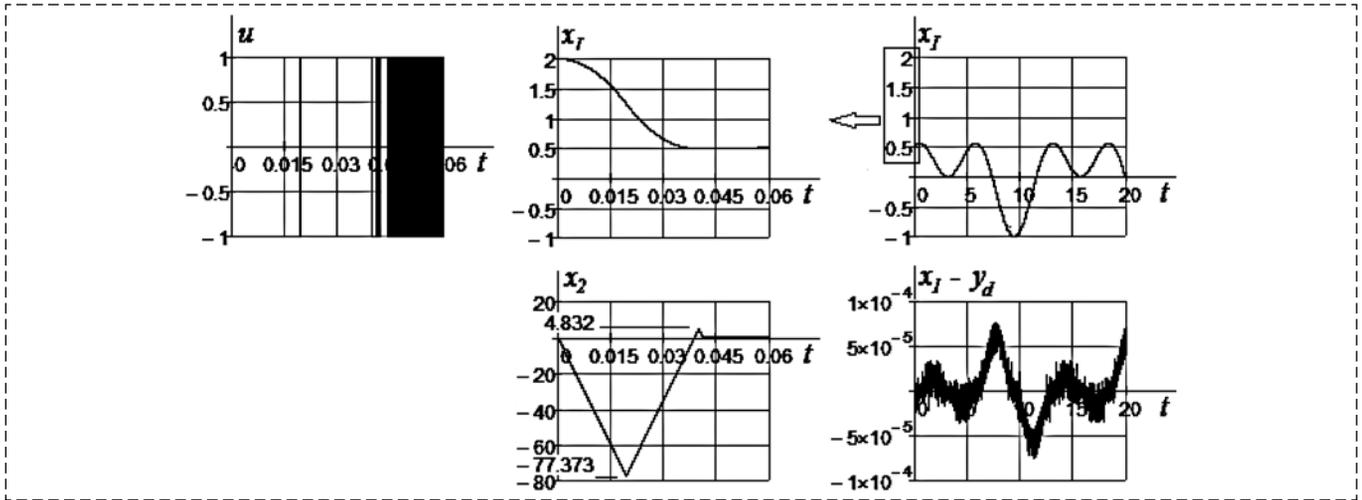


Рис. 7. Реакция системы (10) на задание y_d : управление (17), $U_m = 2000$
 Fig. 7. Reaction of the system (10) to the task y_d : control (17), $U_m = 2000$

ки слежения $y_d - x_1$. Из рис. 7 следует, что существенное увеличение U_m (на два порядка) существенно повышает быстродействие (более, чем на порядок) и существенно уменьшает ошибку регулирования (на два порядка).

Однако максимальное значение координаты x_2 при этом существенно возрастает (на порядок), т. е. требуется существенное увеличение мощности объекта (на порядок).

Заключение

В работе продолжено обсуждение проблемы робастности и тесно связанной с ней проблемы оптимального (наибольшего) быстродействия в переходном процессе для последующего решения задачи точности регулирования в системах управления нелинейными объектами с неизвестной или неполной математической моделью в условиях неопределенности характеристик объекта и действия внешних возмущений. Здесь опять подтверждается старая истина — "чудес не бывает", в том смысле, что степень быстродействия не влияет на робастность управления во время переходного процесса (пусть даже и оптимального по быстродействию). Во время оптимального быстродействия система большую часть времени разомкнута и нет смысла говорить о каком-либо коэффициенте усиления замкнутой системы управления, а моменты переключения системы в другое разомкнутое состояние зависят только от инерционности объекта управления, которую невозможно уменьшить в рамках традиционного "круга понятий".

Однако степень быстродействия очень сильно влияет на точность процесса слежения за эталонной траекторией задания, и при определенной частоте изменения задания часто даже быстродействующее управление не успевает обрабатывать входное воздействие, и появляется ошибка слежения. Один из возможных способов увеличения быстродействия связан с повышением мощности ОУ, что невозможно, если оставаться в традиционном круге понятий.

Для кардинального решения проблем робастности и, в частности, проблемы быстродействия, а в общем, и многих других проблем науки, необходимо сформировать новый круг понятий, который позволит, в частности, иметь столько возобновляемой мощности, сколько необходимо, что позволит уменьшить или полностью ликвидировать инерцию и (или) гравитацию.

Пересмотреть старый круг понятий необходимо, в том числе, и из-за того, что некоторые его положения заведомо противоречивы. Например, специальная теория относительности Эйнштейна, с одной стороны, исключает эфир, как вещество, а с другой стороны, соглашается с его существованием. Кроме того, его теория противоречит электродинамике Максвелла, экспериментам Фарадея и Ампера, а также выводам Хэвисайда, который вывел свои формулы (позже их назвали релятивистскими, т.е. относящимися к "Теории относительности") еще в конце XIX века. Другой пример: во всех современных учебниках по управлению и электротехнике, нечаянно или под влиянием сформированных иллюзий и старого круга понятий, не достаточно полно показан закон Джоуля—

Ленца, что приводит к недостаточному пониманию баланса мощностей и к невозможности получения практически неограниченной мощности непосредственно на месте и в процессе работы системы управления объектом и устранения инерции (гравитации). Выработка нового круга понятий по балансу мощностей позволит уменьшить или ликвидировать инерцию, существенно повысить быстродействие и обеспечить истинную робастность, однако это одна из возможных тем следующих статей.

Список литературы

1. Дегтярев Г. П., Файзулдинов Р. Н., Спиридонов И. О. Многокритериальный синтез робастного регулятора нелинейной механической системы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19, № № 11. С. 691—698.
2. Рустамов Г. А., Фархадов В. Г., Рустамов Р. Г. Исследование K_∞ -робастных систем при ограниченном управлении // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 19, № 11. С. 699—706.
3. Фуртат И. Б., Гушин П. А., Перегудин А. А. Алгоритм управления по выходу нелинейными системами с компенсацией возмущений и помех измерения // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 1. С. 3—15.
4. Гайворонский С. А., Езагина Т. А., Хожаев И. В., Ненечук А. А. Определение вершинных полиномов для анализа степени робастной устойчивости интервальной системы // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 5. С. 266—273.
5. Guay M., Adetola V., DeHaan D. Robust and Adaptive Model Predictive Control of Nonlinear Systems. Publishing house of The Institution of Engineering and Technology. Series: IET control robotics and sensors series 83, Categories: Mathematics \ Automatic Control Theory. 2015. 269 p.
6. Manchester Z., Kuindersma S. Robust direct trajectory optimization using approximate invariant funnels // Auton. Robot. 2019. 43. P. 375—387.
7. Zhang X., Kamgarpour M., Georghiou A., Goulart P., Lygeros J. Robust optimal control with adjustable uncertainty sets // Automatica. 2017. Vol. 75. P. 249—259.
8. Villanueva M. E., Quirynen R., Diehl M., Chachuat B., Houska B. Robust MPC via min—max differential inequalities // Automatica. 2017. Vol. 77. P. 311—321.
9. Singh A. Majumdar, Slotine J. J., Pavone M. Robust onlinemotion planning via contraction theory and convex optimi-

zation // Proc. IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (ICRA). IEEE. 2017. P. 5883—5890.

10. Limon D., Alvarado I., Alamo T., Camacho E. Robust tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances // J. Proc. Contr. 2010. Vol. 20, N. 3. P. 248—260.
11. Эссе на тему "Наука и нравственность". URL: https://studopedia.ru/19_62719_essentsii-chistoy-vibratsii.html.
12. Что такое нравственность. URL: https://www.b17.ru/article/o_nravstvennosti/
13. Рустамов Г. А., Рустамов Р. Г. Особенности K_∞ -робастных систем управления // XVIII Международная научно-практическая конф. "Научное обозрение физико-математических и технических наук в XXI веке". Prospero. 2015. № 6 (18). С. 30—33.
14. Востриков А. С. Синтез систем регулирования методом локализации. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. 252 с.
15. Востриков А. С. Старшая производная и большие коэффициенты усиления в задаче управления нелинейными нестационарными объектами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2008. № 5. С. 2—7.
16. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Метод больших коэффициентов усиления и эффект локализации движений в задачах синтеза систем автоматического управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. № 2. С. 2—10.
17. Сухинин Б. В., Сурков В. В. К вопросу о робастных системах автоматического управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 6. С. 341—351.
18. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Робастная коррекция в системах управления с большим коэффициентом усиления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 12. С. 3—10.
19. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Robust Correction of Dynamic Plants in Automatic Control Systems // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2015. Vol. 51, N. 5. P. 1—7.
20. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Робастное управление с "глубокой" обратной связью // XIII Всероссийское совещание по проблемам управления: Труды ИПУ РАН, 2019. С. 811—815.
21. Ловчаков В. И., Ловчаков Е. И., Кретов Е. И. Синтез быстродействующих систем управления с использованием теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 2. С. 83—93.
22. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966. 624 с.
23. Ключев А. С., Колесников А. А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. М.: Энергоиздат, 1982. 240 с.
24. Сурков В. В., Сухинин Б. В., Ловчаков В. И., Соловьев А. Э. Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов по критериям точности, быстродействию, энергосбережению. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. 300 с.

Analytical Construction Robust Optimal Control Systems by the Criterion of Quick Action with Infinitely High Gain

B. V. Sukhinin, eeo@uic.tula.ru, V. V. Surkov, vvs150747@mail.ru,
The Tula state university, Tula, 300034, Russian Federation

Corresponding author: Surkov V. V., Dr.Sci.Tech., Professor, The Tula state university,
Tula, 300034, Russian Federation, e-mail: vvs150747@mail.ru

Accepted on March 25, 2020

Abstract

The problem of the synthesis of robust control systems with a high gain and, in particular, optimal by the criterion of quick action, which allow optimal control by the accuracy of regulation of multidimensional non-linear dynamic objects

with functional uncertainties, is discussed. A method is proposed for the analytical construction of optimal control systems by the criterion of quick action for a wide class of multidimensional nonlinear dynamic objects with functional uncertainties, unstable objects; no minimal-phase objects, neutral object and objects with differentiation properties. Simplicity and universality, mathematical rigor and physical validity of this method consists in using R.R. Bellman's method and decomposing the optimal by the criterion of quick action problem into a series of simple first-order simple problems of the same type. A theoretically comprehensive solution to the robust control problem is given by the idea of constructing systems that are stable with an unlimited increase in gain. In this case, optimal systems have stability properties. Such systems are synthesized using quadratic quality functionals that are not explicitly dependent on the control signal and the restriction on the control signal. It is significant that, in contrast to continuous systems with unmeasurable perturbations and a little-known object, in which the conditions of invariance require the use of infinitely large gains, in relay (discontinuous) systems, the equivalent effect is achieved using finite control actions. Since the performance problem is a particular problem of the accuracy of reproducing the input action on the control object, the established control error (including all error coefficients: by position, speed, acceleration, jerk, etc.) is theoretically strictly equal to zero if external and internal interference, acting only on the control object, but not on the control system, including sensors of state variables of the control object or the input signal of the task. However, due to the inertia of the object, there can be no talk of accuracy in the transient process of working out the input signal of the task, even if it is optimal in terms of the criterion of fast action.

Keywords: uncertain object, large gain, optimal accuracy, speed, control synthesis, stability, functional equation, controllability condition

For citation:

Sukhinin B. V., Surkov V. V. Analytical Construction Robust Optimal Control Systems by the Criterion of Quick Action with Infinitely High Gain, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 8, pp. 453–463.

DOI: 10.17587/mau.21.453-463

References

1. Degtyarev G. P., Fajzudtinov R. N., Spiridonov I. O. Mnogokriterial'nyj sintez robustnogo reguljatora nelinejnoj mekhanicheskoj sistemy, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2018, vol. 19, no. 11, pp. 691–698 (in Russian).
2. Rustamov G. A., Farhadov V. G., Rustamov R. G. Issledovanie K_{∞} -robustnyh sistem pri ogranichenom upravlenii, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 11, pp. 699–706 (in Russian).
3. Furtat I. B., Gushchin P. A., Peregudin A. A. Algoritm upravleniya po vyhodu nelinejnymi sistemami s kompensaciej voz-mushchenij i pomekh izmereniya, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 1, pp. 3–15 (in Russian).
4. Gajvoronskij S. A., Ezangina T. A., Hozhaev I. V., Nesenchuk A. A. Opredelenie vershinyh polinomov dlya analiza stepeni robustnoj ustojchivosti interval'noj sistemy, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 5, pp. 266–273 (in Russian).
5. Guay M., Adetola V., DeHaan D. D. Robust and Adaptive Model Predictive Control of Nonlinear Systems. Publishing house: The Institution of Engineering and Technology. Series: IET control robotics and sensors ser. 83, Categories: Mathematics, Automatic Control Theory, 2015, 269 p.
6. Manchester Z., Kuindersma S. Robust direct trajectory optimization using approximate invariant funnels, *Auton Robot*, 2019, vol. 43, pp. 375–387.
7. Xiaojing Zhang, Maryam Kamgarpour, Angelos Georghiou, Paul Goulart, John Lygeros. Robust optimal control with adjustable uncertainty sets, *Automatica*, 2017, vol. 75, pp. 249–259.
8. Villanueva M. E., Quirynen R., Diehl M., Chachuat B., Houska B. Robust MPC via min–max differential inequalities, *Automatica*, 2017, vol. 77, pp. 311–321.
9. Singh A. Majumdar, Slotin J. J., Pavone M. Robust on-line motion planning via contraction theory and convex optimization, *Proc. IEEE International Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*. IEEE, 2017, pp. 5883–5890.
10. Limon D., Alvarado I., Alamo T., Camacho E. Robust tube-based MPC for tracking of constrained linear systems with additive disturbances, *J. Pr oc. Contr.*, 2010, vol. 20, no. 3, pp. 248–260.
11. Esse na temu "Nauka i nravstvennost'", available at: https://studopedia.ru/19_62719_essentsii-chistoy-vibratsii.html (in Russian).
12. Chto takoe nravstvennost', available at: https://www.b17.ru/article/o_nravstvennosti/ (in Russian).
13. Rustamov G. A., Rustamov R. G. Osobennosti K_{∞} -robustnyh sistem upravlenija (Features of K_{∞} -robust control systems), *XVIII Mezhdunarodnaya Nauchno-prakticheskaya konf. "Nauchnoe obozrenie fiziko-matematicheskij i tekhnicheskij nauk v XXI veke"*. Prospero, 2015, no. 6 (18), pp. 30–33 (in Russian).
14. Vostrikov A. S. Sintez sistem regulirovaniya metodom lokalizatsii, (Synthesis of control systems by localization method), Novosibirsk, Publishing house of NGTU, 2007, 252 p (in Russian).
15. Vostrikov A. S. Starshaya proizvodnaya i bol'shie koef-fitsienty usileniya v zadache upravleniya nelinejnymi nestacionarnymi ob'ektami, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2008, vol. 5, pp. 2–7 (in Russian).
16. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Metod bol'shih koef-fitsientov usileniya i effekt lokalizatsii dvizhenij v zadachah sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2009, no. 2, pp. 2–10. (in Russian).
17. Sukhinin B. V., Surkov V. V. K voprosu o robustnyh siste-mah avtomaticheskogo upravleniya, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 6, pp. 341–351 (in Russian).
18. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Robustnaya korrekciya v sistemah upravleniya s bol'shim koefitsientom usileniya, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*. 2014, no. 12. pp. 3–10 (in Russian).
19. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Robust Correction of Dynamic Plants in Automatic Control Systems, *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2015, vol. 51, no. 5, pp. 1–7.
20. Filimonov A. B., Filimonov N. B. Robustnoe upravlenie s "glubokoj" obratnoj svyaz'yu, *XIII Vserossijskoe soveshchanie po problemam upravleniya: Trudy IPU RAN*, 2019. pp. 811–815 (in Russian).
21. Lovchakov V. I., Lovchakov E. I., Kretov E. I. Sintekh bystrodejstvuyushchih sistem upravleniya s ispol'zovaniem teorii anal-iticheskogo konstruirovaniya optimal'nyh reguljatorov, *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 2, pp. 83–93 (in Russian).
22. Fel'dbaum A. A. Fundamentals of the theory of optimal automatic systems, Moscow, Nauka, 1966, 624 p (in Russian).
23. Klyuev A. S., Kolesnikov A. A. Optimization of automatic control systems for speed, Moscow, Energoizdat, 1982, 240 p. (in Russian).
24. Surkov V. V., Sukhinin B. V., Lovchakov V. I., Solov'ev A. Je. Analytical's construction of optimum regulators by criteria of ac-curacy, speed, power savings, Tula, Publishing house of TulGU, 2005, 300 p. (in Russian).