

А. И. Дивеев, д-р техн. наук, проф., aidiveev@mail.ru,
Е. Ю. Шмалько, канд. техн. наук, e.shmalko@gmail.com,
ФИЦ "Информатика и управление" РАН, Москва,
О. Хуссейн, аспирант, eng.napo.oubai@gmail.com,
Российский университет дружбы народов, Москва

Управление квадрокоптером методом сетевого оператора на основе многоточечной стабилизации¹

Представлено решение задачи оптимального управления квадрокоптером в условиях фазовых ограничений численным методом сетевого оператора на основе многоточечной стабилизации. Согласно данному подходу на первом этапе решается задача синтеза системы управления. В результате обеспечивается стабилизация квадрокоптера относительно некоторой точки пространства состояний. На втором этапе находится такая последовательность точек стабилизации в пространстве состояний, что переключение точек стабилизации в фиксированные моменты времени обеспечивает движение квадрокоптера из начального состояния в терминальное с оптимальным значением критерия качества с учетом фазовых ограничений. Для решения задачи синтеза системы стабилизации используется метод сетевого оператора. Метод является численным и в отличие от известных аналитических методов позволяет в автоматическом режиме без конкретного анализа правых частей модели синтезировать систему управления. Метод позволяет с помощью генетического алгоритма находить структуру и параметры математического выражения в закодированном виде. Код метода сетевого оператора представляет собой целочисленную верхнетреугольную матрицу. На этапе решения задачи синтеза математическая модель движения квадрокоптера декомпозируется на угловое и пространственное движения для того, чтобы выделить отдельно компоненты управления для углового и пространственного движений соответственно. Синтезированная система стабилизации состоит из двух подсистем, соединенных последовательно, для пространственного и углового движения. В качестве управлений для пространственного движения использовались моменты вокруг осей и суммарная тяга всех винтов квадрокоптера. Входами для системы стабилизации углового движения являются желаемые углы наклона квадрокоптера. Задача стабилизации рассматривается как общая задача синтеза системы управления. Методом сетевого оператора ищется одна функция управления, которая обеспечивает стабилизацию объекта в заданной точке рассматриваемого пространства состояний из множества начальных условий. На этапе поиска точек равновесия используется эволюционный алгоритм роя частиц. Приведен численный пример решения задачи оптимального управления квадрокоптером с четырьмя фазовыми ограничениями.

Ключевые слова: оптимальное управление, синтез системы стабилизации, метод сетевого оператора, эволюционный алгоритм, квадрокоптер, фазовые ограничения

Введение

Сегодня квадрокоптеры являются очень популярным роботизированным объектом, который используется в различных прикладных задачах, для мониторинга местности, видеосъемки и др. В настоящей работе решается задача оптимального управления квадрокоптером. Численные методы решения задачи оптимального управления можно объединить в два класса [1–4] — на основе прямого и непрямого под-

ходов. Прямой подход состоит в редукции к конечномерной задаче нелинейного программирования [2]. Непрямой подход заключается в решении краевой задачи, полученной на основе принципа максимума Понтрягина [4]. Оба известных подхода сталкиваются с вычислительными проблемами, когда в задаче оптимального управления существуют фазовые ограничения [5–7], которые часто приводят к потере свойства унимодальности целевого функционала [8].

Одна из основных проблем оптимального управления состоит в том, что полученное оптимальное управление нельзя использовать на практике без построения системы стабилизации. При этом сама система стабилизации из-

¹Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований № 18-29-03061-мк (раздел 3) и Российского научного фонда № 19-11-00258 (разделы 1, 2).

меняет математическую модель объекта управления, что соответственно приводит к изменению и гамильтониана.

Альтернативные подходы заключаются в том, чтобы учитывать изменение положения объекта при его движении к терминальной точке [9].

В данной статье предлагается подход на основе многоточечной стабилизации [10]. Способ заключается в решении на первом этапе задачи синтеза системы стабилизации, обеспечивающей устойчивость объекта управления относительно некоторой заданной точки в пространстве состояний. На втором этапе осуществляется поиск оптимального положения этих точек стабилизации, чтобы переключение этих точек через заданный интервал времени привело к оптимальному согласно заданному критерию перемещению объекта. Задача поиска относится к классу задач конечномерной оптимизации.

На практике разработчики почти всегда первоначально делают объект управления устойчивым, а затем ищут управление им. Это скорее всего вызвано тем, что математическая модель объекта управления всегда не точно описывает реальный объект, но в окрестности точки стабилизации ошибки описания объекта нивелируются. Сложность реализации рассматриваемого в работе подхода состоит в том, что на первом этапе необходимо решать задачу общего синтеза управления, которая намного сложнее, чем задача оптимального управления. Для решения задачи синтеза в подавляющем большинстве случаев используются технические методы [12–14], в которых в каналы управления вставляются различные линейные регуляторы, либо аналитические регуляторы [15–20], в которых используются нелинейные стабилизирующие функции для обеспечения устойчивости по теоремам Ляпунова. Все эти методы нельзя назвать численными, они реализуются по-разному в зависимости от правых частей дифференциальных уравнений, описывающих модель объекта управления.

Для решения задачи синтеза управления в настоящей работе применяется численный метод символьной регрессии [21]. Данные методы находят математическое выражение для функции управления в форме специального кода. Для поиска решения на пространстве кодов используется эволюционный, как правило, генетический алгоритм. Методы символьной регрессии отличаются видом кодирования математического выражения. В данной работе

для решения задачи стабилизации используется метод сетевого оператора.

1. Математическая модель объекта

Математические модели квадрокоптеров отличаются друг от друга конструктивными особенностями, уровнем абстракций, например, моделью аэродинамических сил сопротивления и идеализации физических характеристик, упругостью и массой элементов конструкции.

В работе рассматривается симметричный квадрокоптер с четырьмя винтами [22]. Математическая модель квадрокоптера описывается следующей системой из $n = 12$ дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4 + (x_5 \sin x_1 + x_6 \cos x_1) \sin x_2 / \cos x_2; \\ \dot{x}_2 = (x_5 \sin x_1 + x_6 \cos x_1) / \cos x_2; \\ \dot{x}_3 = (x_5 \sin x_1 + x_6 \cos x_1); \\ \dot{x}_4 = x_5 x_6 (I_2 - I_3) / I_1 + M_1 / I_1; \\ \dot{x}_5 = x_4 x_6 (I_3 - I_1) / I_2 + M_2 / I_2; \\ \dot{x}_6 = x_4 x_5 (I_1 - I_2) / I_3 + M_3 / I_3; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_7 = x_{10}; \\ \dot{x}_8 = x_{11}; \\ \dot{x}_9 = x_{12}; \\ \dot{x}_{10} = F \sin x_3 \cos x_2 \cos x_1 + \sin x_1 \sin x_2; \\ \dot{x}_{11} = F \cos x_3 \cos x_2 \cos x_1 - g; \\ \dot{x}_{12} = F \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2 \sin x_3, \end{cases} \quad (2)$$

где система уравнений (1) описывает угловое движение квадрокоптера, а система уравнений (2) описывает пространственное перемещение квадрокоптера; x_1, x_3 — углы поворота вокруг горизонтальных осей; x_2 — угол поворота вокруг вертикальной оси; x_4 и x_6 — угловые скорости вращения вокруг горизонтальных осей; x_5 — угловая скорость вращения вокруг вертикальной оси; x_7, x_9 — горизонтальные оси; x_8 — вертикальная ось; x_{10} — скорость вдоль оси x_7 ; x_{11} — скорость вдоль оси x_8 ; x_{12} — скорость вдоль оси x_9 ; $M_i, i = 1, 2, 3$ — управляющие моменты, создаваемые винтами квадрокоптера вокруг трех осей; F — общая тяга всех четырех винтов квадрокоптера с учетом поправки на массу m ; g — постоянное ускорение свободного падения; $I_i, i = 1, 2, 3$ — моменты инерции квадрокоптера вокруг осей $x_i, i = 1, 2, 3$.

Как видим из уравнений (1)–(2), движение квадрокоптера можно декомпозировать

на угловое и пространственное. Перемещение квадрокоптера в пространстве осуществляется за счет наклона силы тяги. Наклон квадрокоптера осуществляется управляющими моментами M_1 и M_3 . Реальное управление квадрокоптером осуществляется силами тяги каждого из четырех винтов. Связь между управляющими моментами и общей силой тяги с силами тяги отдельных винтов квадрокоптера определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} F &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \quad M_1 = u_2 + u_3 - u_1 - u_4, \\ M_2 &= u_1 + u_3 - u_2 + u_4, \quad M_3 = u_1 + u_2 - u_3 + u_4. \end{aligned} \quad (3)$$

На силы тяги отдельных винтов наложены ограничения, которые являются в контексте постановки задачи оптимального управления ограничениями на управление:

$$0 \leq u_i \leq u^+, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

Система координат вертолета с четырьмя винтами показана на рис. 1 (см. третью сторону обложки).

Переменные просто нумеруются без ссылки на их физический смысл, поскольку вычислительный подход, который используется для решения задачи синтезированного оптимального управления, является автоматическим, и физический смысл переменных для компьютера не имеет значения.

2. Синтез системы стабилизации методом сетевого оператора

Согласно методу многоточечной стабилизации [9] первоначально решаем задачу синтеза системы стабилизации.

Для того чтобы решить задачу стабилизации квадрокоптера в точке двенадцатимерного пространства состояний, первоначально строим систему угловой стабилизации. Для решения этой задачи используем систему из шести уравнений (1). В результате решения задачи синтеза системы стабилизации углового движения квадрокоптера получим синтезирующие функции управления

$$\begin{aligned} M_1 &= g_1(x_1^* - x_1, x_2^* - x_2, x_3^* - x_3, x_4^* - x_4, x_5^* - x_5, x_6^* - x_6); \\ M_2 &= g_2(x_1^* - x_1, x_2^* - x_2, x_3^* - x_3, x_4^* - x_4, x_5^* - x_5, x_6^* - x_6); \\ M_3 &= g_3(x_1^* - x_1, x_2^* - x_2, x_3^* - x_3, x_4^* - x_4, x_5^* - x_5, x_6^* - x_6), \end{aligned} \quad (5)$$

где x_1^*, x_2^*, x_3^* — заданные углы наклона квадрокоптера; x_4^*, x_5^*, x_6^* — заданные скорости; $g_i(\mathbf{x}^a, \tilde{\mathbf{x}}^a)$ — компонента векторной синтезирующей функции управления системы угловой стабилизации, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{x}^a, \tilde{\mathbf{x}}^a) &= [g_1(\mathbf{x}^a, \tilde{\mathbf{x}}^a) \ g_2(\mathbf{x}^a, \tilde{\mathbf{x}}^a) \ g_3(\mathbf{x}^a, \tilde{\mathbf{x}}^a)]^T; \\ \mathbf{x}^a &= [x_1 \dots x_6]^T; \quad \tilde{\mathbf{x}}^a = [x_1^* \ x_2^* \ x_3^* \ 0 \ 0 \ 0]^T. \end{aligned} \quad (6)$$

На втором этапе решаем задачу пространственной стабилизации, где используем все двенадцать уравнений (1), (2). Здесь в качестве управления рассматриваем заданные углы стабилизации и общую тягу всех винтов

$$\begin{aligned} x_1^* &= h_1(x_7^* - x_7, x_8^* - x_8, x_9^* - x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}); \\ x_2^* &= h_2(x_7^* - x_7, x_8^* - x_8, x_9^* - x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}), \\ x_3^* &= h_3(x_7^* - x_7, x_8^* - x_8, x_9^* - x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}); \\ F &= h_4(x_7^* - x_7, x_8^* - x_8, x_9^* - x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}), \end{aligned} \quad (7)$$

где x_7^*, x_8^*, x_9^* — заданные координаты пространственного положения квадрокоптера; $h_i(\mathbf{x}^s, \tilde{\mathbf{x}}^s)$ — компонента векторной синтезирующей функции управления системы пространственной стабилизации, $i = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{x}^s, \tilde{\mathbf{x}}^s) &= [h_1(\mathbf{x}^s, \tilde{\mathbf{x}}^s) \ h_2(\mathbf{x}^s, \tilde{\mathbf{x}}^s) \ h_3(\mathbf{x}^s, \tilde{\mathbf{x}}^s)]^T; \\ \mathbf{x}^s &= [x_7 \dots x_{12}]^T; \quad \tilde{\mathbf{x}}^s = [x_7^* \ x_8^* \ x_9^* \ 0 \ 0 \ 0]^T. \end{aligned} \quad (8)$$

Для решения задач угловой и пространственной стабилизации квадрокоптера используем численный метод сетевого оператора. Метод сетевого оператора — один из современных методов символьной регрессии, разработанный специально для решения задачи общего синтеза управления. Метод сетевого оператора кодирует математическое выражение как композицию элементарных функций в виде ориентированного графа. Подробнее с методом сетевого оператора можно ознакомиться в монографии [21].

При синтезе системы угловой стабилизации были заданы следующие начальные значения:

$$\begin{aligned} X_0 &= \{\mathbf{x}^{a,0,1} = [-0,2 \ -0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ \mathbf{x}^{a,0,2} &= [-0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ \mathbf{x}^{a,0,3} &= [-0,2 \ -0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{a,0,4} &= [-0,2 \ 0 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,5} &= [-0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,6} &= [-0,2 \ 0 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,7} &= [-0,2 \ 0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,8} &= [-0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,9} &= [-0,2 \ 0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,10} &= [0 \ -0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,11} &= [0 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,12} &= [0 \ -0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,13} &= [0 \ 0 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,14} &= [0 \ 0 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,15} &= [0 \ 0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,16} &= [0 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,17} &= [0 \ 0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,18} &= [0,2 \ -0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,19} &= [0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,20} &= [0,2 \ -0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,21} &= [0,2 \ 0 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,22} &= [0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,23} &= [0,2 \ 0 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,24} &= [0,2 \ 0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,25} &= [0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\
\mathbf{x}^{a,0,26} &= [0,2 \ 0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T.
\end{aligned}$$

Было задано терминальное условие $\mathbf{x}_{a,f} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

Ограничения на управления в задаче синтеза системы угловой стабилизации имели следующие значения:

$$-2 = M_i^- \leq M_i \leq M_i^+ = 2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Критерий качества имел следующий вид:

$$J_a = \sum_{i=1}^{26} \left(t_{f,i}^{(a)} + p_a \sqrt{\sum_{j=1}^6 (x_j^{a,f} - x_j^a(t_{f,i}^{(a)}, \mathbf{x}^{a,0,i}))^2} \right), \quad (9)$$

где $p_a = 1$, значение $t_{f,i}^{(a)}$ определялось из формулы

$$t_{f,i}^{(a)} = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^a \text{ и } \mathbf{x}^a(t, \mathbf{x}^{a,0,k}) - \mathbf{x}^{a,f} \leq \varepsilon_a; \\ t^{a+} & \text{иначе;} \end{cases}$$

$t^{a+} = 1,5$ с, $\varepsilon_a = 0,01$ — заданные положительные величины;

$$\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^{a,f} = \sqrt{\sum_{j=1}^6 (x_j - x_j^{a,f})^2}.$$

При поиске решения параметры модели имели следующие значения: $I_1 = 1,5$, $I_2 = 1$, $I_3 = 1,5$, $g = 9,8067$.

Сетевой оператор имел следующие значения параметров: размерность матрицы сетевого оператора 32×32 , число функций с одним аргументом $k_w = 20$, число функций с двумя аргументами $k_v = 2$, число возможных решений в начальном множестве (популяции) $H = 1024$, число поколений $P = 128$, максимальное число скрещиваний в одном поколении $R = 128$, число поколений между сменой базисного решения $k_E = 32$, число малых вариаций в одном возможном решении $d = 8$, вероятность мутации $p_\mu = 0,7$, число искоемых параметров $p = 6$, число битов кода Грея для поиска параметров 16, для целой части — 4, для дробной части — 12.

Базисное решение при синтезе системы угловой стабилизации имело вид

$$M_j^{(0)} = \sum_{i=1}^6 q_i (x_i^{a,f} - x_i^a), \quad j = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Расчеты проводили на персональном компьютере 2,8 ГГц, с процессором Core i7. Время счета для одного запуска составляло около 40 мин. В процессе поиска функционал (9) вычислялся 1 035 720 раз.

В результате решения задачи синтеза системы угловой стабилизации методом сетевого оператора была получена следующая синтезирующая функция:

$$M_i = \begin{cases} M_i^-, & \text{если } \tilde{M}_i < M_i^-; \\ M_i^+, & \text{если } \tilde{M}_i > M_i^+; \\ \tilde{M}_i^0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (11)$$

$i = 1, 2, 3,$

где математические выражения для синтезирующей функции имеют вид

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_1 &= A_1^{-1} + \sqrt[3]{A_1} + \operatorname{sgn}(x_6^* - x_6) \times \\
&\times \ln(|q_6(x_6^* - x_6)| + 1) + q_2(x_2^* - x_2) + \\
q_1(x_1^* - x_1) &+ \operatorname{sgn}(x_4^* - x_4) \sqrt{|q_4(x_4^* - x_4)|} + \\
&+ q_4^3(x_4^* - x_4)^3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{M}_2 &= \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(A_2) \exp(|A_2| - 1) \times \\ &\quad \times \sqrt{|\operatorname{sgn}(A_2) \exp(|A_2| - 1)|}); \\ \tilde{M}_3 &= \tanh(0,5A_3) + q_3(x_3^* - x_3) + \operatorname{sgn}(x_5^* - x_5) \times \\ &\quad \times \ln(|q_5(x_5^* - x_5)| + 1) - x_3^* + x_3 + \\ &\quad + \sqrt[3]{A_3} + q_6(x_6^* - x_6) + q_2(x_2^* - x_2); \\ A_1 &= q_4(x_4^* - x_4) + q_1(x_1^* - x_1) + \\ &\quad + (x_4^* - x_4)^3 + \sqrt[3]{q_1(x_1^* - x_1)}; \\ A_2 &= B + (q_3 + 1)(x_3^* - x_3); \\ A_3 &= (B + q_3(x_3^* - x_3))^3 + q_6(x_6^* - x_6) + q_2(x_2^* - x_2); \\ B &= \operatorname{sgn}(x_5^* - x_5) \ln(|q_5(x_5^* - x_5)| + 1); \\ \tanh(\alpha) &= \frac{1 - \exp(-2\alpha)}{1 + \exp(-2\alpha)},\end{aligned}$$

где $q_1 = 12,224$, $q_2 = 14,197$, $q_3 = 13,661$, $q_4 = 4,361$, $q_5 = 9,989$, $q_6 = 4,114$.

На рис. 2 показаны результаты моделирования синтезированной системы угловой стабилизации для восьми начальных значений

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{a,0,1} &= [-0,2 \ -0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ \mathbf{x}^{a,0,3} &= [-0,2 \ -0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ \mathbf{x}^{a,0,7} &= [-0,2 \ 0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ \mathbf{x}^{a,0,9} &= [-0,2 \ 0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ \mathbf{x}^{a,0,18} &= [0,2 \ -0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ \mathbf{x}^{a,0,20} &= [0,2 \ -0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ \mathbf{x}^{a,0,24} &= [0,2 \ 0,2 \ -0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ \mathbf{x}^{a,0,26} &= [0,2 \ 0,2 \ 0,2 \ 0 \ 0 \ 0]^T.\end{aligned}\quad (12)$$

На рис. 3, 4 приведены графики управлений для системы угловой стабилизации для одного начального состояния $\mathbf{x}^{a,0,1}$.

На втором этапе решалась задача синтеза системы пространственной стабилизации. Здесь рассматривалась стабилизация квадрокоптера относительно точки в шестимерном подпространстве $\{x_7, \dots, x_{12}\}$. Управление для системы стабилизации включало четыре компоненты $\hat{\mathbf{u}} = [x_1^* \ x_2^* \ x_3^* \ F]^T$.

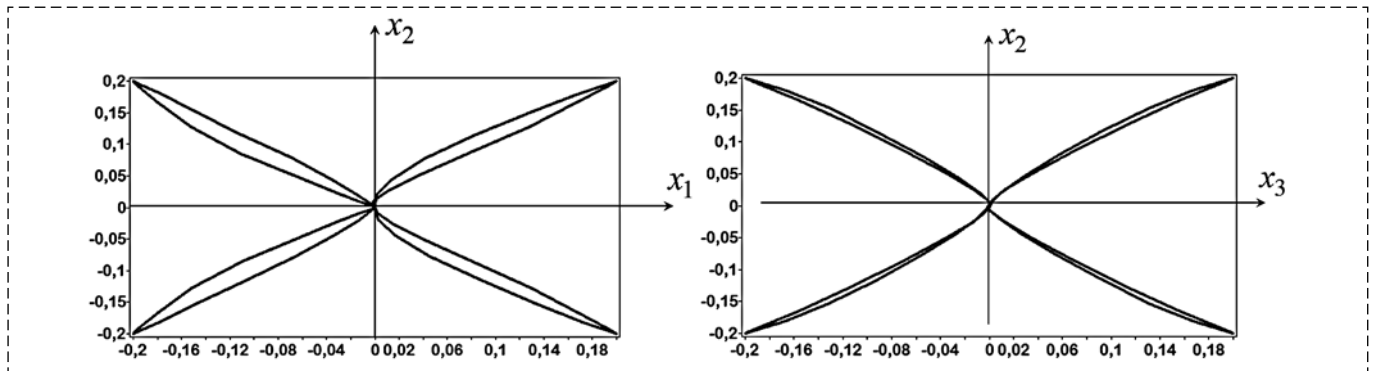


Рис. 2. Траектории углового движения квадрокоптера на $\{x_1, x_2\}$ и $\{x_2, x_3\}$
Fig. 2. Quadcopter angular motion trajectories on subspaces $\{x_1, x_2\}$ and $\{x_2, x_3\}$

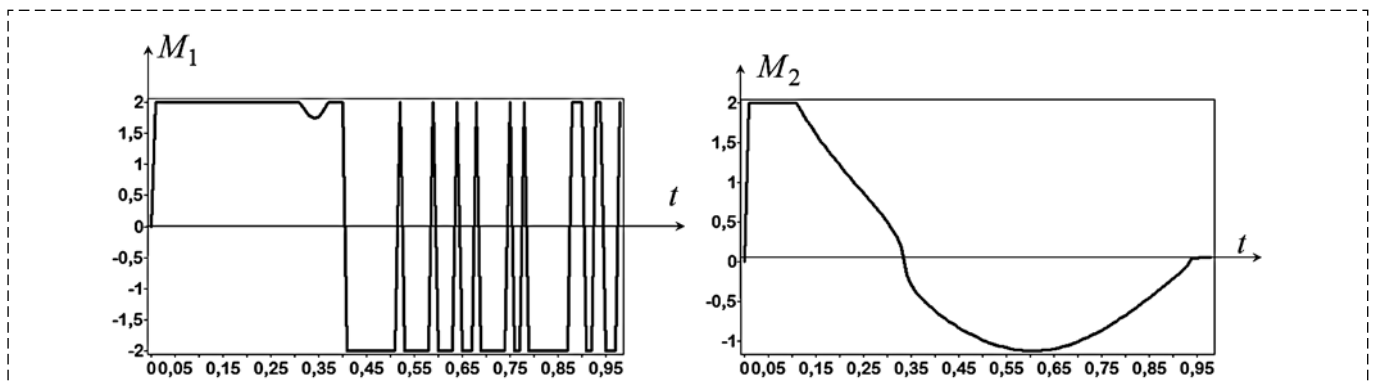


Рис. 3. Управление M_1 и M_2 системы угловой стабилизации
Fig. 3. Angle stabilization control M_1 and M_2

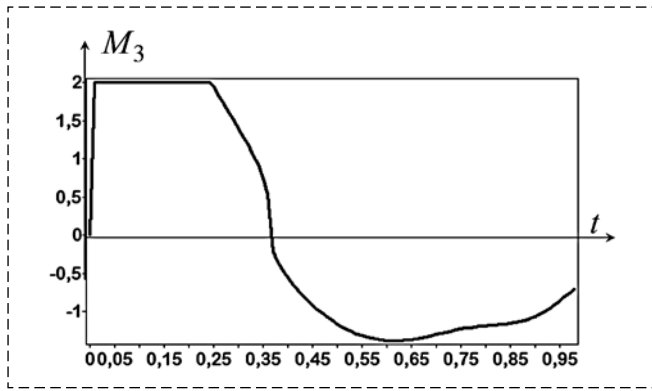


Рис. 4. Управление M_3 системы угловой стабилизации
Fig. 4. Angle stabilization control M_3

Множество точек начальных значений включало восемь элементов

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0 = \{ & \mathbf{x}^{0,1} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0,5 \ -0,5 \ -0,5 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ & \mathbf{x}^{0,2} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0,5 \ -0,5 \ 0,5 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ & \mathbf{x}^{0,3} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0,5 \ 0,5 \ -0,5 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ & \mathbf{x}^{0,4} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ & \mathbf{x}^{0,5} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,5 \ -0,5 \ -0,5 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ & \mathbf{x}^{0,6} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,5 \ -0,5 \ 0,5 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ & \mathbf{x}^{0,7} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,5 \ 0,5 \ -0,5 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ & \mathbf{x}^{0,8} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,5 \ 0,5 \ 0,5 \ 0 \ 0 \ 0]^T \}. \end{aligned}$$

Ограничения на управление были приняты следующими:

$$\begin{aligned} -\pi/4 &= x_1^- \leq x_1^* \leq x_1^+ = \pi/4; \\ -\pi/4 &= x_2^- \leq x_2^* \leq x_2^+ = \pi/4; \\ -\pi/4 &= x_3^- \leq x_3^* \leq x_3^+ = \pi/4; \\ 0 &= F^- \leq F \leq F^+ = 12. \end{aligned}$$

Терминальное условие:

$$\mathbf{x}^f = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

При синтезе функционал имел следующий вид:

$$J_s = \sum_{i=1}^8 \left(t_{f,i} + p_s \sqrt{\sum_{j=1}^{12} (x_j^f - x_j(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i}))^2} \right), \quad (13)$$

где $p_s = 2,5$, $t_{f,i}$ определялось по формуле

$$t_{f,i} = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^+ \text{ и } \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,i}) - \mathbf{x}^f \leq \varepsilon_s, \\ t^+ & \text{иначе} \end{cases}$$

со значениями параметров $\varepsilon_s = 0,05$, $t^+ = 2$ с,

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^f = \sqrt{\sum_{j=1}^{12} (x_j - x_j^f)^2}.$$

Базисное решение имело следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1^* &= q_{11}(x_9^* - x_9) - q_{12}; \\ x_2^* &= q_7(x_7^* - x_7) - q_8 x_{10} + q_9(x_8^* - x_8) - \\ &\quad - q_{10} x_{11} + q_{11}(x_9^* - x_9) - q_{12} x_{12}; \\ x_1^* &= q_7(x_7^* - x_7) - q_8 x_{10}; \\ F &= q_9(x_8^* - x_8) - q_{10} x_{11}. \end{aligned}$$

В результате было получено следующее решение:

$$\begin{aligned} x_i^* &= \begin{cases} x_i^-, & \text{если } \tilde{x}_i < x_i^-; \\ x_i^+, & \text{если } \tilde{x}_i > x_i^+; \\ \tilde{x}_i & \text{иначе;} \end{cases} \\ F &= \begin{cases} F^-, & \text{если } \tilde{F} < F^-; \\ F^+, & \text{если } \tilde{F} > F^+; \\ \tilde{F} & \text{иначе;} \end{cases} \quad (14) \\ i &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^* &= C_1 D_1 \sqrt[3]{C_1} \ln(|q_9(x_9^* - x_9) \cos(x_{11})|); \\ \tilde{x}_2^* &= \sqrt[3]{\tilde{x}_1^*} + 2 \arctan(C_2) - q_{10}^3 x_{10}^9 + D_2 - \\ &\quad - q_{11} x_{11} q_8^2 (x_8^f - x_8)^2 + \arctan(C_1 D_1) + \\ &\quad + q_8 (x_8^f - x_8) + \tanh(-0,5 x_{12}) - \\ &\quad - q_7 (x_7^f - x_7) + \arctan(-q_{10} x_{10}^3 + q_7 (x_7^f - x_7)) + \\ &\quad + \operatorname{sgn}(C_3) (\exp(|C_3|) - 1) + \\ &\quad + \operatorname{sgn}(q_{10} x_{10}^3 + q_7 (x_7^f - x_7)) \times \\ &\quad \times \sqrt{|q_{10} x_{10}^3 + q_7 (x_7^f - x_7)|} + \mu(C_1 D_1); \\ \tilde{x}_3^* &= \operatorname{sgn}(x_1) \ln(|\tilde{x}_1^*| + 1) + \sqrt[3]{C_3} + \arctan(C_2) - \\ &\quad - q_{10}^3 x_{10}^9 - \tilde{x}_1^* + (-q_{10} x_{10}^3 + q_7 (x_7^f - x_7))^3; \\ \tilde{F} &= \operatorname{sgn}(\tilde{x}_3^*) + \operatorname{sgn}(\tilde{x}_2^*) \exp(|\tilde{x}_2^*| - 1) + \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\tilde{x}_1^*) \ln(|\tilde{x}_1^*| + 1) + C_2^2 + \tanh(0,5 C_3) + D_1^2 + \\ &\quad + \tanh(0,5 C_3) + (-q_{10} x_{10}^3 + q_7 (x_7^f - x_7))^2; \\ C_1 &= q_{12} x_{12} + \sqrt[3]{q_{10}} + \arctan(q_9) + \cos(x_7^f - x_7); \\ D_1 &= q_9 (x_9^f - x_9) \cos(x_{11}) \exp(-q_{12}); \end{aligned}$$

$$D_2 = 2(\arctan(-q_{10}x_{10}^3 + q_7(x_7^f - x_7)) + \\ + q_{11}x_{11}q_8^2(x_8^f - x_8)^2 + q_8^2(x_8^f - x_8) - 1 - \\ - \operatorname{sgn}(x_{11})\exp(-|q_{11}x_{11}q_8^2(x_8^f - x_8)|) + \\ + \exp(q_{10}) + (-q_{10}x_{10}^3 + q_7(x_7^f - x_7))^3 - \\ - q_7(x_7^f - x_7));$$

$$C_2 = \operatorname{sgn}(-q_{10}x_{10}^3 + q_7(x_7^f - x_7)) \times \\ \times (\exp(-|q_{10}x_{10}^3 + q_7(x_7^f - x_7)|) - 1 - \\ - \operatorname{sgn}(x_{10})\sqrt{|q_{10}x_{10}^3|} + \mu(q_7(x_7^f - x_7)));$$

$$C_3 = \arctan(-q_{10}x_{10}^3 + q_7(x_7^f - x_7)) - \\ - q_7(x_7^f - x_7) - q_{11}x_{11}q_8^2(x_8^f - x_8)^2 + \\ + q_8(x_8^f - x_8);$$

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\alpha), & \text{если } |\alpha| > 1; \\ \alpha & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$q_7 = 0,115, q_8 = 3,371, q_9 = 3,076, q_{10} = 0,144, \\ q_{11} = 3,131, q_{12} = 4,515.$$

При поиске решения было выполнено 1 189 440 вычислений критерия качества (12).

На рис. 5 приведены траектории движения квадрокоптера с системами угловой и пространственной стабилизации из восьми начальных условий (12). На рис. 6, 7 приведены графики управлений пространственным движением квадрокоптера для одного начального условия $x^{0,1}$.

Как видно из графиков, приведенных на рис. 2—7, синтезированные методом сетевого оператора в автоматическом режиме системы угловой и пространственной стабилизации достаточно качественно стабилизируют квадрокоптер в точке пространства состояний. Сложные математические выражения, полученные в результате автоматического синтеза методом сетевого оператора объясняются компьютерным способом нахождения этих выражений. Скорее всего, они являются избыточными и допускают сокращения. Сложности для вычислений на борту квадрокоптера данные выражения не представляют, так как при вычислении будет использоваться их код в форме сетевого оператора.

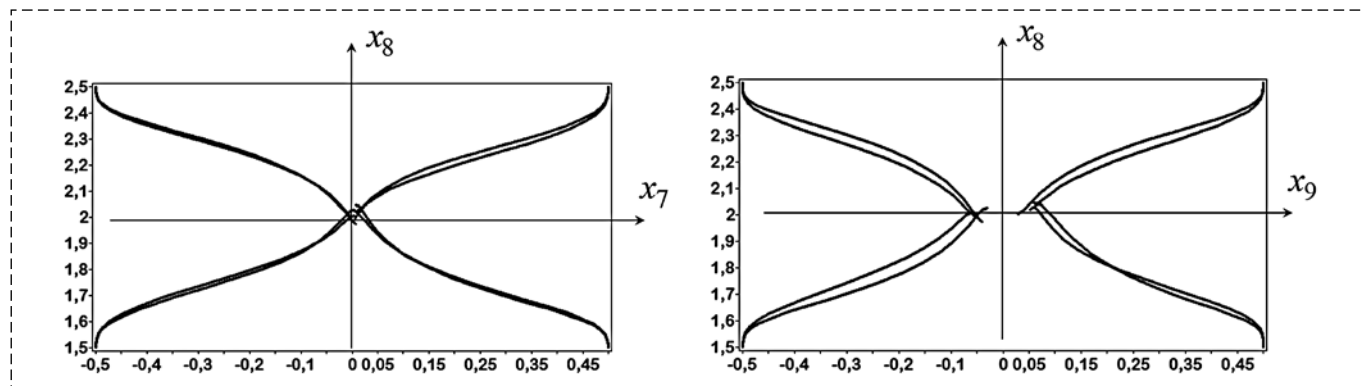


Рис. 5. Траектории движения квадрокоптера на плоскостях $\{x_7, x_8\}$ и $\{x_9, x_8\}$

Fig. 5. Trajectories of the quadcopter on the planes $\{x_7, x_8\}$ and $\{x_9, x_8\}$

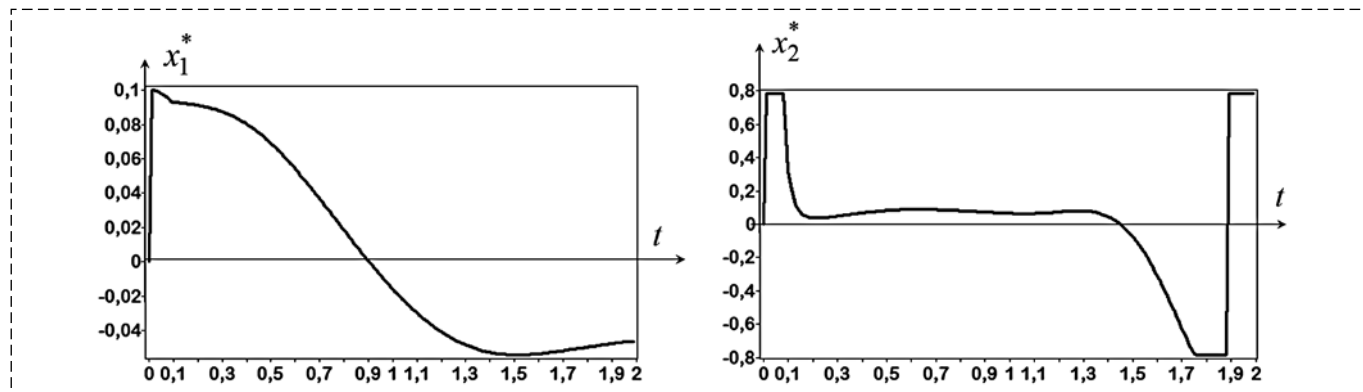


Рис. 6. Компоненты управления x_1^* и x_2^*

Fig. 6. Control components x_1^* and x_2^*

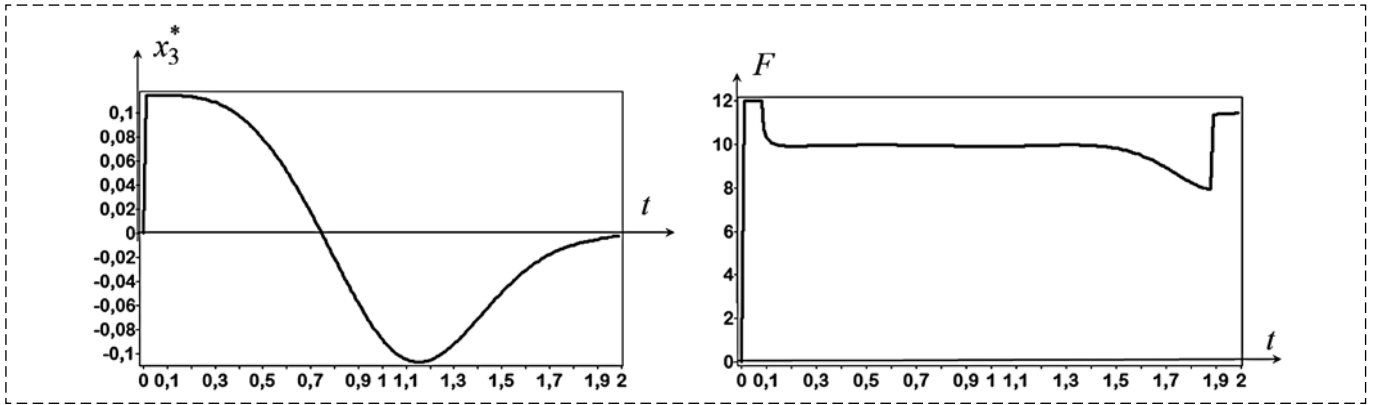


Рис. 7. Компоненты управления x_3^* и F
 Fig. 7. Control components x_3^* and F

3. Поиск оптимального положения точек стабилизации

Найденные синтезированные функции управления зависят от разности между координатами точки стабилизации и текущими координатами объекта управления. Далее мы находим координаты других точек стабилизации как искомые параметры оптимального управления. Координаты точек стабилизации подаются в синтезированные функции управления через заданные интервалы времени, чтобы обеспечить движение объекта управления в терминальное состояние с оптимальным значением критерия качества.

Рассмотрим решение задачи перемещения квадрокоптера из начального состояния в терминальное с учетом фазовых ограничений.

Пусть задана математическая модель квадрокоптера (1), (2).

Заданы начальные условия

$$x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, 12. \quad (15)$$

Заданы фазовые ограничения

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = r_i - \sqrt{(x_{i,7} - x_7)^2 + (x_{i,9} - x_9)^2} \leq 0, \quad (16)$$

$$i = 1, \dots, s,$$

где s — число фазовых ограничений.

Заданы терминальные условия

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{12} (x_i(t_f) - x_i^f)^2} \leq \varepsilon, \quad (17)$$

где x_i^f — заданные значения; t_f — ограниченное, но неизвестное время окончания процесса управления, которое также определяется достижением терминальных условий (17):

$$t_{f,i} = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^+ \text{ и } \sqrt{\sum_{j=1}^{12} (x_i(t_f) - x_i^f)^2} \leq \varepsilon; \\ t^+ & \text{— иначе,} \end{cases} \quad (18)$$

t^+ — заданное ограничение на время управления; ε — заданная точность достижения терминальных условий (17).

Задан критерий качества управления

$$J = t_f \rightarrow \min. \quad (19)$$

Задача синтеза системы стабилизации была решена на предыдущем этапе методом сетевого оператора и получены синтезирующие функции управления (11), (13).

На данном этапе находим целевые точки $\mathbf{x}^* = \{\mathbf{x}^{*,1}, \dots, \mathbf{x}^{*,K}\}$, чтобы решить задачу оптимального управления с помощью переключения этих точек через определенный интервал времени Δt .

При решении задачи оптимального управления включим условия попадания в терминальное состояние (17) и условие выполнения фазовых ограничений (16) в критерий качества (19):

$$J_1 = t_f + a_1 \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^s \vartheta(\varphi_i(\mathbf{x})) dt +$$

$$+ \sqrt{\sum_{j=7}^9 a_{j-5} (x_j(t_f) - x_j^f)^2} \rightarrow \min,$$

где a_i , $i = 1, 2, 3, 4$, — весовые коэффициенты;

$$\vartheta(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha > 0; \\ 0 & \text{— иначе.} \end{cases}$$

Для определения координат целевых точек используем эволюционный алгоритм роя частиц (particle swarm optimization) — PSO-алго-

ритм [23, 24], поскольку целевая функция в данном случае скорее всего будет невыпуклой и неунимодальной в пространстве искомых параметров.

В вычислительном эксперименте были заданы следующие значения: начальные условия $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0, x_5(0) = 0, x_6(0) = 0, x_7(0) = 0, x_8(0) = 2, x_9(0) = 0, x_{10}(0) = 0, x_{11}(0) = 0, x_{12}(0) = 0$; терминальные условия $x_1^f = 0, x_2^f = 0, x_3^f = 0, x_4^f = 0, x_5^f = 0, x_6^f = 0, x_7^f = 10, x_8^f = 2, x_9^f = 10, x_{10}^f = 0, x_{11}^f = 0, x_{12}^f = 0$; другие параметры: $t^+ = 3,5, \varepsilon = 0,01, a_1 = a_3 = 2,5, a_2 = a_4 = 2$; число фазовых ограничений $s = 4$; параметры ограничений $r_1 = 1,5, r_2 = 1,5, r_3 = 2, r_4 = 2, x_{1,7} = 2,5, x_{1,9} = 2,5, x_{2,7} = 7,5, x_{2,9} = 7,5, x_{3,7} = 2, x_{3,9} = 8, x_{4,7} = 8, x_{4,9} = 2$; ограничения на управление $M_i^- = -2, M_i^+ = 2, i = 1, 2, 3, F^- = 0, F^+ = 12$.

В результате были получены следующие координаты целевых точек $\{x_7, x_8, x_9\}$:

$$\begin{aligned} x_7^{*,1} &= 0,891, & x_8^{*,1} &= 3,799, & x_9^{*,1} &= -0,241, \\ x_7^{*,2} &= 4,958, & x_8^{*,2} &= 2,532, & x_9^{*,2} &= 1,362, \\ x_7^{*,3} &= 8,686, & x_8^{*,3} &= 2,615, & x_9^{*,3} &= 11,822, \\ x_7^{*,4} &= 8,454, & x_8^{*,4} &= 3,402, & x_9^{*,4} &= 1,391. \end{aligned}$$

Точки переключались через интервал $\Delta t = 0,7$ с. Последняя точка совпадала с терминальной точкой $x_7^f = 10, x_8^f = 2, x_9^f = 10$.

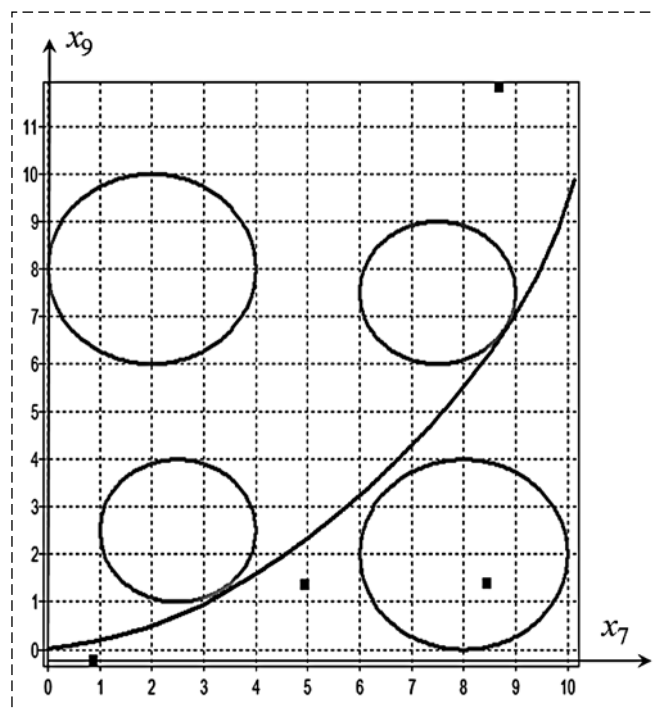


Рис. 8. Оптимальная траектория движения квадрокоптера
Fig. 8. The optimal trajectory of the quadcopter

Оптимальная траектория движения квадрокоптера на плоскости приведена на рис. 8, где окружности изображают фазовые ограничения, маленькие черные квадраты — найденные целевые точки. Как видим из рис. 8, квадрокоптер достиг терминального состояния, выполнив условия фазовых ограничений, по достаточно гладкой траектории.

Заключение

Рассмотрена задача оптимального управления квадрокоптером с фазовыми ограничениями. Предложен численный подход к решению, который заключается в том, что на первом этапе реализуется численный синтез системы стабилизации объекта. Далее оптимальное управление реализуется за счет оптимального расположения точек стабилизации. Результаты вычислительного эксперимента показали эффективность предложенного подхода.

Список литературы

1. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975. 280 с.
2. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. Сер. Математическая библиотека. М.: Наука, Главн. ред. физ.-мат. лит., 1982. 432 с.
3. Квасов Д. Е., Сергеев Я. Д. Методы липшицевой глобальной оптимизации в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 9. С. 3—19.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1983. 392 с.
5. Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. A nondegenerate maximum principle for the optimal control problem with state constraints // SIAM J. Control Optim. 2005. V. 43, N. 5. P. 1812—1843.
6. Милотин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Издательство МГУ, 168 с.
7. Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах // Известия АН СССР. Серия математическая. 1960. № 24. С. 315—356.
8. Дивеев А. И. Условия отсутствия свойств унимодальности функционала в задаче оптимального управления с фазовыми ограничениями // Cloud of science. 2018. N. 2. P. 268—285.
9. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. Методы "гибких" траекторий в задачах терминального управления вертикальными маневрами летательных аппаратов // Проблемы управления сложными динамическими объектами авиационной и космической техники. Гл. 2 / Под ред. С. Н. Васильева. М.: Машиностроение, 2015. С. 51—110.
10. Дивеев А. И., Шмально Е. Ю. Метод синтезированного оптимального управления для группы роботов // Надежность и качество сложных систем. 2018. № 4 (24). С. 25—32.
11. Гэн К., Чулин Н. А. Алгоритмы стабилизации для автоматического управления траекторным движением квадрокоптера // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2015. № 5. С. 218—235.

12. **Зенкевич С. Л., Галустьян Н. К.** Разработка математической модели и синтез алгоритма угловой стабилизации движения квадрокоптера. // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 3. С. 27–32.
13. **Зенкевич С. Л., Галустьян Н. К.** Синтез и апробация алгоритма управления движением квадрокоптера по траектории. // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 8. С. 530–535.
14. **Cutler M., How J. P.** Actuator Constrained Trajectory Generation and Control for Variable-Pitch Quadrotors // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference (GNC). Minneapolis, Minnesota, August 2012.
15. **Афанасьев В. Н.** Оптимальные системы управления. М.: Издательство РУДН, 2007. 260 с.
16. **Колесников А. А.** Синергетические методы управления сложными системами: теория системного синтеза. М.: КомКнига, 2006. 240 с.
17. **Колесников А. А., Колесников А. А., Кузьменко А. А.** Методы АКАР и бэкстеппинг в задачах синтеза нелинейных систем управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 7. С. 435–445.

18. **Халил Х. К.** Нелинейные системы. Серия Бестселлеры нелинейной науки. М.—Ижевск: РХД, 2009. 832 с.
19. **Krstic M., Kanellakopoulos M., Kokotovic P. V.** Adaptive nonlinear control without overparametrization // Systems & Control Letters. 1992. Vol. 19, Iss. 3. P. 177–185.
20. **Кунцевич В. М., Лычак М. М.** Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977, 400 с.
21. **Дивеев А. И.** Численные методы решения задачи синтеза управления. М.: РУДН, 2019. 192 с.
22. **Гурьянов А. Е.** Моделирование управления квадрокоптером // Инженерный вестник. МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2014. С. 522–534.
23. **Kennedy J., Eberhart R.** Particle swarm optimization // Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks, Perth, Australia. 1995. Vol. IV. P. 1942–1948.
24. **Дивеев А. И., Константинов С. В.** Исследование практической сходимости эволюционных алгоритмов оптимального программного управления колесным роботом // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 4. С. 80–106.

Quadrocopter Control by Network Operator Method Based on Multi-Point Stabilization

A. I. Diveev, aidiveev@mail.ru, **E. Yu. Shmalko**, e.shmalko@gmail.com,
Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS, 119333, Moscow, Russian Federation,
O. Hussein, eng.nano.oubai@gmail.com
RUDN University, 117198, Moscow, Russian Federation

*Corresponding author: Shmalko E. Yu., PhD, Senior Researcher,
Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences,
119333, Moscow, Russian Federation, e-mail: e.shmalko@gmail.com*

Accepted on March 18, 2020

Abstract

The paper presents a solution to the problem of optimal control of a quadrocopter under phase constraints by the numerical method of a network operator based on multi-point stabilization. According to this approach, the task of control system synthesis is initially solved. As a result, the quadrocopter is stabilized with respect to a certain point in the state space. At the second stage, a sequence of stabilization points is searched in the state space such that switching the stabilization points at fixed times ensures the movement of the quadrocopter from the initial state to the terminal state with an optimal value of the quality criterion taking into account phase constraints. To solve the problem of stabilization system synthesis, the network operator method is used. The method is numerical and, unlike the well-known analytical methods, allows to synthesize a control system automatically without a specific analysis of the right parts of the model. The method allows to find the structure and parameters of a mathematical expression in the encoded form using the genetic algorithm. The network operator code is an integer upper-triangular matrix. At the stage of solving the synthesis problem, the mathematical model of quadrocopter motion is decomposed into angular and spatial motions in order to separate control components for angular and spatial motions, respectively. The synthesized stabilization system consists of two subsystems connected in series for spatial and angular motion. As controls for spatial motion, moments around the axes and the total thrust of all quadrocopter propellers were used. And the inputs for the angular motion stabilization system are the desired angles of inclination of the quadrocopter. The stabilization problem is considered as a general synthesis task for a control system. Using the network operator method, one control function is searched that provides stabilization of the object at a given point in the considered state space from the set of initial conditions. At the stage of the search for equilibrium points, the evolutionary particle swarm algorithm is used. A numerical example of solving the problem of optimal control of a quadrocopter with four phase constraints is given.

Keywords: *optimal control, stabilization system synthesis, network operator method, evolutionary algorithm, quadrocopter, phase constraints*

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project № 18-29-03061-mk (section 3), and Russian Science Foundation, project № 19-11-00258 (sections 1, 2).

For citation:

Diveev A. I., Shmalko E. Yu., Hussein O. Quadrocopter control by the network operator method based on multi-point sta-

bilization, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 7, pp. 428–438.

DOI: 10.17587/mau.21.428-438

References

1. **Tabak D., Kuo B. C.** Optimal Control by Mathematical Programming, Prentice-Hall Inc. Englewood, Cliffs, New Jersey, 1971, 280 p.
2. **Fedorenko R. P.** An approximate solution of optimal control problems (series: "Mathematical library"), Nauka, Glavn. ed. Phys.-Math. lit., 1982 (in Russian).
3. **Kvasov D. E., Sergeyev Y. D.** Lipschitz global optimization methods in control problems, *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 9, pp. 1435–1448.
4. **Pontryagin L. S., Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F.** The mathematical theory of optimal processes, Moscow, Nauka, Main Edition of Physics and Mathematics, 1983 (in Russian).
5. **Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F.** A nondegenerate maximum principle for the optimal control problem with state constraints, *SIAM J. Control Optim.*, 2005, vol. 43, no. 5, pp. 1812–1843.
6. **Milyutin A. A., Dmitruk A. V., Osmolovsky N. P.** *The maximum principle in optimal control*, Publishing house of Moscow State University, 2004 (in Russian).
7. **Gamkrelidze R. V.** Optimal control processes with limited phase coordinates, *Izvestiya AN SSSR. Mathematical Series*, 1960, no. 24, pp. 315–356 (in Russian).
8. **Diveev A. I.** Conditions for the absence of functional unimodality properties in the optimal control problem with phase constraints, *Cloud of science*, 2018, no. 2, pp. 268–285 (in Russian).
9. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** *Methods of "flexible" trajectories in the problems of terminal control of vertical maneuvers of aircraft*, Chap.2 in "Problems of managing complex dynamic objects of aviation and space technology", Ed. by S. N. Vasiliev, Moscow, Mashinostroenie, 2015, pp. 51–110 (in Russian).
10. **Diveev A. I., Shmalko E. Yu.** The method of synthesized optimal control for a group of robots, *NiKSS*, 2018, no. 4 (24), pp. 25–32 (in Russian).
11. **Gen K., Chulin N. A.** Algoritmy stabilizatsii dlya avtomaticheskogo upravleniya trayektornym dvizheniyem kvadroptera, *Nauka i obrazovaniye: nauchnoye izdaniye MGTU im. N. E. Bauman*, 2015, no. 5, pp. 218–235 (in Russian).
12. **Zenkevich S. L., Galustyan N. K.** Development of a mathematical model and synthesis of an algorithm for angular stabilization of quadcopter motion, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2014, no. 3, pp. 27–32 (in Russian).
13. **Zenkevich S. L., Galustyan N. K.** Synthesis and testing of an algorithm for controlling the motion of a quadcopter along a trajectory, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2015, vol. 16, no. 8, pp. 530–535 (in Russian).
14. **Cutler M., How J. P.** Actuator Constrained Trajectory Generation and Control for Variable-Pitch Quadrotors, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference (GNC)*, Minneapolis, Minnesota, August 2012.
15. **Afanasyev V. N.** Optimal control systems, Moscow, Publishing house RUDN, 2007 (in Russian).
16. **Kolesnikov A. A.** Synergetic control methods for complex systems: the theory of system synthesis, KomKniga, Moscow, 2006 (in Russian).
17. **Kolesnikov A. A., Kolesnikov A. A., Kuzmenko A. A.** AKAR methods and back-stepping in the synthesis of non-linear control systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravleniye*, 2016, vol. 17, no. 7, pp. 435–445 (in Russian).
18. **Khalil Hassan K.** Nonlinear systems, Upper Saddle River, Prentice Hall, NJ, 2002.
19. **Krstic M., Kanellakopoulos M., Kokotovic P. V.** Adaptive nonlinear control without overparametrization, *Systems & Control Letters*, 1992, vol. 19, iss. 3, pp. 177–185.
20. **Kuntsevich V. M., Lychak M. M.** *Synthesis of automatic control systems using Lyapunov functions*, Nauka, Moscow, 1977.
21. **Diveev A. I.** Numerical methods for solving the control synthesis problem, RUDN, 2019 (in Russian).
22. **Guryanov A. E.** Quadcopter control modeling, *Engineering Bulletin*, Bauman Moscow State Technical University, 2014, pp. 522–534 (in Russian).
23. **Kennedy J., Eberhart R.** Particle swarm optimization, *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Perth, Australia, 1995, IV, pp. 1942–1948.
24. **Diveev A. I., Konstantinov S. V.** Study of the Practical Convergence of Evolutionary Algorithms for the Optimal Program Control of a Wheeled Robot, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2018, vol. 57, no. 4, pp. 561–580.

Издательство "НОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ"

107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Телефон редакции журнала: (499) 269-5510, (499) 269-5397

Технический редактор *Е. В. Конова*. Корректор *М. Ю. Безменова*.

Сдано в набор 25.03.2020. Подписано в печать 10.06.2020. Формат 60×88 1/8. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 8,86. Заказ МН720. Цена договорная.

Журнал зарегистрирован в Комитете Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-11648 от 21.01.02

Учредитель: Издательство "Новые технологии"

Оригинал-макет ООО "Авансед солюшнз". Отпечатано в ООО "Авансед солюшнз".
119071, г. Москва, Ленинский пр-т, д. 19, стр. 1. Сайт: www.aov.ru