УДК 517.72 DOI: 10.17587/mau.21.394-403

В. Г. Козырев, канд. техн. наук, доц., vldr.kzrv@yandex.ru,
Севастопольский государственный университет

Синтез аддитивного терминального управления одноосным движением нелинейных объектов

Предлагается метод синтеза законов терминального управления одноосным перемещением нелинейных динамических объектов. Задача решается для случая, когда управляющее воздействие входит скалярной аддитивной составляющей в нелинейные уравнения объекта. Целевые законы управления отвечают требованию перевода объекта из произвольного начального состояния в заданное конечное положение с заданной конечной скоростью. Остальные параметры состояния объекта в конечный момент времени в общем случае не контролируются. При назначении нулевой конечной скорости достигается "мягкий" переход объекта в заданное положение, необходимый для многих терминальных систем.

Ввиду принципиальной сложности оптимального синтеза в условиях, когда объект управления обладает нелинейными свойствами, предпочтительной представляется чисто терминальная постановка задачи. Одним из эффективных средств ее решения являются методы планирования траекторий и решения обратных задач динамики. Этот подход принят в данном исследовании. Привлечение его совместно с дополнительным анализом позволило записать закон управления в форме обратной связи для случая нелинейной математической модели объекта.

Разработанный метод синтеза отличается простотой формы и удобством технической реализации, например с помощью встраиваемых микроконтроллеров. Известные общие методы связаны с неоправданным для рассматриваемого случая расходом временных и технических ресурсов системы управления. Указанная экономичность данного метода достигается благодаря учету особенностей скалярного и аддитивного характера управления в системе.

Использование метода проиллюстрировано примером "мягкого" поворота вала электродвигателя последовательного возбуждения на заданный угол с нулевой конечной скоростью, что не требует применения жестких упоров. Последнее обстоятельство существенно улучшает качество терминального управления. При данном условии значительно упрощается организация позиционирования подвижных исполнительных органов разнообразного промышленного оборудования.

***Ключевые слова**: терминальное управление, обратная задача динамики, планирование траекторий, "мягкий" поворот вала электродвигателя*

Введение

Терминальное управление составляет неотъемлемую часть современных технологий. Мягкое приземление космической станции на поверхность планеты, посадка самолета вертикального взлета и вертолета на площадку ограниченных размеров, перевод антенны из одного углового положения в другое, поворот судового руля на требуемый угол, замыкание контактов электрического аппарата с допустимой скоростью соударения — все это примеры терминального управления. Данные задачи объединяет одна общая цель — перевести объект управления — самолет, исполнительный орган и т.п. — из одного положения или состояния в другое за конечное время. Реализующее эту цель управление и принято называть *терминальным*.

Проблемам терминального управления посвящено значительное число научных работ [1—17]. Они выполнены как в оптимальной [1—8], так и в чисто терминальной [9—17] постановке с поиском законов управления разомкнутого и замкнутого типов для линейных и нелинейных уравнений объектов. Применение методов оптимизации [1—4] для синтеза терминального управления в случае, когда объект управления обладает нелинейными свойствами, крайне затруднительно. Такую задачу удается решить лишь для сравнительно узкого класса управляемых объектов — преимущественно линейных стационарных [3, 5, 7, 14] или линеаризуемых на каждом такте работы бортового компьютера [8], что, правда, приводит к значительным вычислительным затратам.

Если объект нелинейный, традиционно прибегают к компромиссному варианту конструирования управления, исходящему из принципа "невозмущенно-возмущенного движения" [1, 3, 8]. Он заключается в декомпозиции задачи управления на две подзадачи: планирование управляемого невозмущенного движения и стабилизация запланированного движения в условиях действия возмущений. Первая задача решается для отправных, нелинейных, уравнений объекта, из которых определяется программное управление. Вторая — для линеаризованных уравнений, полученных из отправных при ус-

ловии малых отклонений состояния объекта от программного движения, что позволяет осуществить синтез стабилизирующего управления. Однако при значительных отклонениях состояния от планируемого этот способ становится неправомерным. К тому же он сопряжен с громоздкой технической реализацией закона управления, неприемлемой для рассматриваемой в данной статье задачи.

Альтернативой модели невозмущенно-возмущенного движения являются принципы, изложенные в аналитических работах [4, 18, 19]. Они сводятся к осуществлению гибких стратегий терминального управления, обеспечивающих требуемую точность управления в конечный момент времени. Этот подход может проводиться как без априорного формирования программных траекторий [4], так и посредством их планирования с временно́й или с пространственной синхронизацией [18, 19]. Первый вариант [4] предусматривает предсказание конечного состояния в процессе функционирования системы на основе интегрирования уравнений движения ЛА в ускоренном масштабе времени и формирование управления как функции текущей предсказываемой ошибки терминального управления. При этом используется кусочно-линейная аппроксимация нелинейных характеристик уравнений движения. Этот вариант связан с большими затратами временных и технических ресурсов. Второй вариант [18, 19] реализует концепцию "гибких кинематических траекторий" и является достаточно эффективным для широкого круга практических задач.

В основе подхода [18, 19] лежит метод планирования траекторий и концепция обратных задач динамики. Отмечено [18, 19], что кинематический аспект играет существенную роль в задачах управления движением, а специфика задач управления подвижными объектами обусловлена двумя обстоятельствами: во-первых, преимущественно нелинейной структурой их уравнений динамики и, во-вторых, целевыми требованиями к кинематике управляемых движений.

Ряд терминальных задач представляют случаи, когда движение объекта происходит по фиксированной оси. Перечисленные ранее примеры относятся именно к таким типам движения. Их рассмотрению и посвящена настоящая статья. В ней развиваются идеи, согласующиеся с методологией работ [18, 19] и отталкивающиеся от методов обратных задач динамики и планирования траекторий. В данной статье они распространены на класс нелинейных аддитивно управляемых объектов, движущихся по фиксированной оси. Дальнейший анализ позволил осуществить синтез терминального управления в форме обратной связи. В частности, одной из возможностей построенного управления является "мягкое" приведение объекта в конечное состояние, т.е. такое, при котором скорость в конечный момент времени становится равной нулю. Полученное решение, в отличие от метода, приведенного в работах [20—22], не требует предварительной линеаризации исходных уравнений или, как в работе [17], наличия у математической модели системы особых свойств симметрии.

Постановка задачи

Рассмотрим управляемый динамический объект, движущийся вдоль некоторой оси согласно системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{ds}{dt} = v; \\ &\frac{dv}{dt} = F/m; \\ &\frac{dx_k}{dt} = f_k + b_k u, \ \ k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь s — координата объекта вдоль оси движения Os; v — скорость объекта; x_k — другие переменные, характеризующие состояние объекта; m — масса объекта; u — управляющее воздействие; $F = F(t, s, v, x_1, \ldots, x_n)$ — механическая сила, действующая на объект вдоль оси Os и зависящая от времени и переменных состояния (предполагается, что функция F дифференцируема по своим аргументам); $f_k = f_k(t, s, v, x_1, \ldots, x_n)$ и $b_k = b_k(t, s, v, x_1, \ldots, x_n)$ — некоторые функции времени и переменных состояния.

Поставим следующую задачу управления объектом (1): при известном начальном состоянии его в момент времени $t = t_0$

$$\begin{aligned} &s(t_0) = s_0, \ \ v(t_0) = v_0, \\ &x_k(t_0) = x_{k0} \end{aligned} \tag{2}$$

необходимо найти закон изменения управляющего воздействия $u = u(t)$, переводящий объект в заданное конечное положение s_f с заданной конечной скоростью v_f к моменту времени $t = t_f = t_0 + T$, где T — длительность времени перевода:

$$s(t_f) = s_f, v(t_f) = v_f. \tag{3}$$

Синтез закона управления

Планирование траектории. Решение задачи будем проводить в терминальной постановке на основе использования методов планирования траекторий и обратных задач динамики. Ввиду нелинейного характера рассматриваемого объекта управления и связанной с этим существенной сложности оптимизации управления подобный подход представляется целесообразным.

В соответствии с поставленной задачей необходимо построить траекторию движения объекта в виде дважды непрерывно дифференцируемой функции времени $s = s(t)$, проходящей через две опорных точки маршрута $s(t_0) = s_0$, $s(t_f) = s_f$ с заданными значениями скорости $v = v(t)$ в этих точках: $v(t_0) = v_0$, $v(t_f) = v_f$. Мы употребляем здесь термин "траектория" в обобщенном смысле, по аналогии с параметрическим описанием траектории в n-мерном пространстве (см., например, работы [23, 24]). Буквально же траектория в нашей задаче, как линия в пространстве, — это просто отрезок $[s_0, s_f]$ оси Os (необязательно прямолинейной).

Сделанная постановка относит нас к классу задач терминального управления, являющихся, по сути, краевыми задачами. Для их решения широко применяется упомянутый выше метод обратных задач динамики. Осуществляется задание (планирование) желаемой траектории движения объекта и ищется управляющее воздействие, вызывающее движение по этой траектории [9, 10, 13, 23].

При планировании траектории $s = s(t)$ воспользуемся известным рациональным способом, применяемым во многих работах [9, 10, 13, 15, 16, 23, 24]. Он состоит в идее нахождения функции $s = s(t)$ путем сужения множества допустимых решений до некоторого набора многопараметрических функций времени

$$s = s(c_1, c_2, \ldots, c_p, t), \tag{4}$$

где c_1, c_2, ..., c_p — неизвестные пока параметры.

Дифференцируя зависимость (4), запишем также скорость и ускорение объекта при рассматриваемом движении:

$$v = \frac{ds}{dt} = v(c_1, c_2, \ldots, c_p, t);$$
$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = a(c_1, c_2, \ldots, c_p, t).$$

Функция $s(t)$ и ее производные должны удовлетворять граничным условиям согласно соотношениям (2), (3):

$$\begin{aligned} s(t_0) = s_0, v(t_0) = v_0, \\ s(t_f) = s_f, v(t_f) = v_f. \end{aligned} \tag{5}$$

Кроме того, второе уравнение системы (1) предполагает выполнение еще одного условия

$$a(t_0) = F(t_0)/m. \tag{6}$$

Из этих условий можно найти неизвестные коэффициенты c_1, c_2, ..., c_p. Для удовлетворения всех пяти условий достаточно пяти коэффициентов, например c_1, c_2, ..., c_5. Остальные c_6, c_7, ..., c_p можно отбросить или оставить свободными в целях достижения дополнительных характеристик качества управляемого процесса.

Дальнейшую процедуру принято сводить к заданию функции (4) в виде линейной комбинации базисных функций

$$s = \sum_{i=1}^{p} c_i \varphi_i(t), \tag{7}$$

где $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, — базисные функции, обладающие свойством линейной независимости. Для упрощения вычислений структура базисных функций принимается достаточно простой. Требуется лишь, чтобы они являлись дважды непрерывно дифференцируемыми. Обычно используются базисные функции, представляющие собой целые степени времени [9, 10, 13, 15, 16, 23, 25]:

$$\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = \tau, \varphi_3(t) = \tau^2,$$
$$\varphi_4(t) = \tau^3, \ldots, \varphi_p(t) = \tau^{p-1},$$

где $\tau = \dfrac{t - t_0}{t_f - t_0} = \dfrac{t - t_0}{T}$ $(T = t_f - t_0)$, так что $\tau = 0$ при $t = t_0$ и $\tau = 1$ при $t = t_f$.

В этом случае (7) принимает вид

$$s = c_1 + c_2\tau + c_3\tau^2 + \ldots + c_p\tau^{p-1}. \tag{8}$$

Могут применяться и другие функции, например гармонические $\varphi_i(t) = \sin(2\pi\tau)$, $\varphi_i(t) = \cos(2\pi\tau)$, экспоненциальные $\varphi_i(t) = \mathbf{e}^{-\lambda_i\tau}$ [26, 27], сигмоидные $\varphi_i(t) = \dfrac{1}{1 + \mathbf{e}^{-\lambda_i\tau}}$ и прочие.

О качестве управления при полиномиальном описании траектории. Может возникнуть во-

прос, сопоставимо ли полиномиальное описание траектории со стремлением добиться не только терминальной точности, но и качества управляемого процесса в целом. Не окажется ли так, что построенное управление (путем решения обратной задачи динамики), хотя и будет терминальным, но вызовет неупорядоченный ход переходного процесса в системе при переводе ее из одного состояния в другое, выражающийся в наличии колебаний, реверсов, перерегулирования и других отклонениях процесса от нормативно плавной динамики. На этот вопрос отвечают соображения, изложенные в работе [9] и поясняемые ниже. Именно, по найденному из выражения (4) ускорению $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ можно найти силу $F(t)$, вызывающую движение объекта по траектории (4):

$$F = ma(t). \qquad (9)$$

В этом смысле силу $F(t)$ можно считать управляющей. В отношении вопроса о качестве осуществляемого ею управления в работе [9] показано, что полиномиальная зависимость силы $F(t)$ от времени, полученная из соотношения (8), благодаря которой происходит перевод объекта из начального фазового состояния в конечное, является оптимальной по критерию $I = \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt$ при числе конечных условий, равном порядку системы из первых двух уравнений (1). Проще говоря, число варьируемых параметров c_1, c_2, ...,c_p полинома (8) не должно быть избыточно высоким. В этом случае принятый подход к поиску терминального управления, опирающийся на методы полиномиального планирования траектории и обратной задачи динамики, не противоречит общепринятым представлениям о качестве управления.

Вывод выражения для закона управления. Сила (9) осуществляет программный перевод объекта в заданное конечное состояние. Обеспечить закон изменения силы (9) можно попытаться посредством соответствующего изменения управляющего воздействия $u = u(t)$ в исходной системе (1). Рассмотрим задачу поиска этого управления. Она состоит в нахождении такой зависимости $u = u(t)$, которая приводит к изменению силы $F(t)$ по формуле (9), а значит, перемещению объекта по траектории (4).

Таким образом, с одной стороны мы имеем, что для осуществления движения по траектории (4) движущая механическая сила $F = ma$ должна изменяться по закону (9):

$$F = ma(t),$$

где $a(t)$ есть вторая производная от планируемой траектории (4) по времени.

С другой стороны, сила F создается энергетической частью системы (1), описываемой уравнениями относительно x_k. Поэтому она подчиняется известной зависимости от переменных состояния

$$F = F(t, s, v, x_1, \ldots, x_n).$$

Следовательно, в каждый момент времени должно выполняться тождество

$$F(t, s, v, x_1, \ldots, x_n) \equiv ma(t).$$

Для определения искомого закона управления $u = u(t)$ продифференцируем данное тождество по времени. Находим:

$$\frac{dF}{dt} = ma_t,$$

где

$$a_t = \frac{da}{dt},$$

а производная dF/dt сложной функции $F = F(t, s(t), v(t), x_1(t), \ldots, x_n(t))$ есть

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}.$$

Выразим ее через переменные состояния системы в силу уравнений (1). Имеем:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s}v + \frac{\partial F}{\partial v}a + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}(f_k + b_k u).$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial s}v + \frac{\partial F}{\partial v}a + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}(f_k + b_k u) = ma_t$$

и тогда

$$u\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}b_k = ma_t - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial s}v - \frac{\partial F}{\partial v}a - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}f_k.$$

Из последнего соотношения определяем искомое u:

$$u = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}b_k}\left(ma_t - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial s}v - \frac{\partial F}{\partial v}a - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}f_k\right).$$

Вводя удобные обозначения, окончательно запишем:

$$u = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} F_{x_k} b_k}\left(ma_t - F_t - F_s v - F_v a - \sum_{k=1}^{n} F_{x_k} f_k \right). \quad (10)$$

Здесь $a = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = a(c_1, c_2, \ldots, c_p, t)$ и $v = \dfrac{ds}{dt} = v(c_1, c_2, ..., c_p, t)$ — заданные функции времени с постоянными параметрами $c_1, c_2, ..., c_p$, подлежащими определению исходя из граничных условий (5), (6); $a_t = \dfrac{da}{dt} = a_t(c_1, c_2, \ldots, c_p, t)$; $F_t = \dfrac{\partial F}{\partial t} = F_t(t, s, v, x_1, \ldots, x_n)$; $F_s = \dfrac{\partial F}{\partial s} = F_s(t, s, v, x_1, ..., x_n)$; $F_v = \dfrac{\partial F}{\partial v} = F_v(t, s, v, x_1, \ldots, x_n)$; $F_{x_k} = \dfrac{\partial F}{\partial x_k} = F_{x_k}(t, s, v, x_1, \ldots, x_n)$ — известные функции своих аргументов, определяемые как частные производные функции F по этим аргументам.

Формула (10) дает закон искомого терминального управления объектом, описываемым нелинейными уравнениями (1), в форме обратной связи.

В частности, если использовать полиномиальную зависимость (8) для описания планируемой траектории, то неизвестные коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_p$ должны удовлетворять следующим уравнениям, вытекающим из выражений (5), (6) для данного случая:

$$c_1 = s_0,\ c_2 = Tv_0,$$
$$c_1 + c_2 + \ldots + c_p = s_f,$$
$$c_2 + 2c_3 + \ldots + (p-1)c_p = Tv_f,$$
$$2c_3 = T^2 F(t_0)/m.$$

Проводя простые выкладки, находим, например, из этих уравнений:

$$c_1 = s_0,\ c_2 = v_0 T,\ c_3 = \frac{1}{2} a_0 T^2,$$
$$c_4 = 4d_2 - Td_1,\ c_5 = -(3d_2 - Td_1),$$

где

$$d_1 = v_f - v_0 - a_0 T - [5c_6 + 6c_7 + \ldots + (p-1)c_p]/T,$$

$$d_2 = s_f - s_0 - v_0 T - a_0 \frac{T^2}{2} - c_6 - c_7 - \ldots - c_p,$$

$c_6, c_7, ..., c_p$ — свободные параметры.

После определения коэффициентов планируемая траектория выражается окончательной зависимостью от времени (8), в которой коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_5$ уже известны, а остальные $c_6, c_7, ..., c_p$ — свободны.

Выражение для закона управления (10) имеет вид дроби, и ее знаменатель, вообще говоря, может обращаться в нуль в какие-то моменты времени для конкретной системы. В этом случае, исходя из опыта автора, следует подыскать иную траекторию сближения или сшить ее из отдельных участков либо "заморозить" управление в окрестности нуля. Эти приемы обычно позволяют преодолеть отмеченное затруднение. Кроме того, известные препятствия могут возникать ввиду нелинейного характера задачи, не обязанной иметь решение на заданном промежутке времени. Данные вопросы являются предметом дальнейших исследований.

Тем не менее, во многих практически важных задачах удается подобрать приемлемую траекторию и добиться целевого управления, переводящего объект в заданное состояние по положению и скорости.

Управление электромагнитным приводом

Задача "мягкого" поворота вала электропривода. В качестве иллюстративного примера рассмотрим управление "мягким" поворотом вала электрического привода постоянного тока на заданный угол, т.е. таким поворотом, при котором скорость в конечный момент времени поворота $t = t_f$ становится равной нулю:

$$v_f = v(t_f) = 0.$$

Подобное управление имеет практическое значение в ряде актуальных технических задач, включая и те, которые были перечислены выше.

Электромеханические уравнения электропривода. Электропривод (ЭП) содержит в своем составе электродвигатель постоянного тока (Дв), редуктор (Р) и тахогенератор (Тг). Остановимся на ЭП с двигателем последовательного возбуждения, при котором его обмотка возбуждения (ОВ) и якорная цепь соединены последовательно, как показано на рис. 1.

Введем параметры ЭП:

U — электрическое напряжение, приложенное к обмоткам ЭП;

I — электрический ток в цепи обмоток;

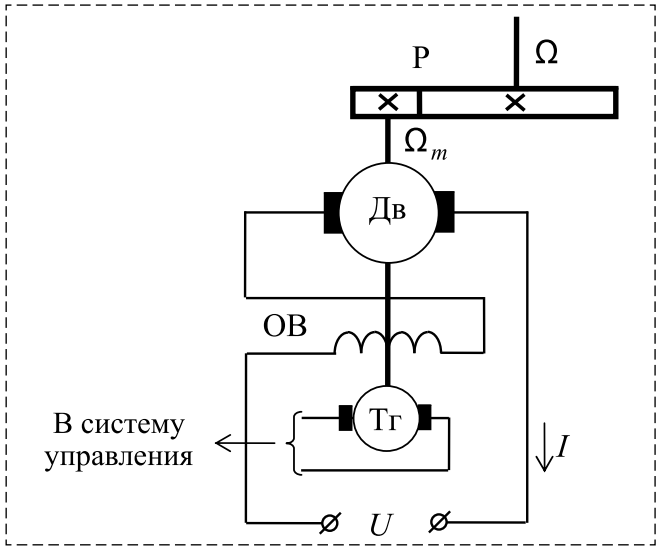

Рис. 1. Схема электропривода с двигателем постоянного тока последовательного возбуждения
Fig. 1. Diagram of an electric drive with a DC motor of sequential excitation

R_a и L_a — активное сопротивление и индуктивность якорной обмотки;

R_e и L_e — активное сопротивление и индуктивность обмотки возбуждения;

Ω_m — угловая скорость вращения вала двигателя;

k_r — коэффициент передачи редуктора;

$\Omega = \Omega_m / k_r$ — угловая скорость вращения выходного вала ЭП;

$J = J_m k_r^2 + J_r$ — приведенный момент инерции вала ЭП (J_m и J_r — моменты инерции вала двигателя и редуктора);

$\Phi = c_e I$ — магнитный поток возбуждения;

$E_a = c_m \Phi \Omega_m = c_m \Phi k_r \Omega = c_m c_e k_r \Omega I$ — ЭДС реакции якоря, пропорциональная потоку возбуждения Ф и скорости Ω_m;

$M_m = c_m \Phi I = c_m c_e I^2$ — вращающий магнитный момент;

$M_{fr} = -C_{fr} \Omega$ — момент трения валов двигателя и редуктора;

$C_{fr} = C_{fr_m} k_r^2 + C_{fr_r}$ — коэффициент вязкого трения (C_{fr_m} и C_{fr_r} — коэффициенты трения валов двигателя и редуктора).

Электромеханические уравнения рассматриваемого ЭП в нормальной форме Коши имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{dt} &= \Omega; \\ \frac{d\Omega}{dt} &= -a_{01}\Omega + a_{02} I^2; \\ \frac{dI}{dt} &= -a_{11} I - a_{12} \Omega I + b_1 U, \end{aligned} \qquad (11)$$

где $a_{01} = \dfrac{C_{fr}}{J}$, $a_{02} = \dfrac{k_r c_m c_e}{J}$, $a_{11} = \dfrac{R_a + R_e}{L_a + L_e}$, $a_{12} = \dfrac{c_m c_e k_r}{L_a + L_e}$, $b_1 = \dfrac{1}{L_a + L_e}$.

В терминах системы уравнений (1) параметры ЭП как объекта управления определяются выражениями

$$s = \Psi,\ v = \Omega,\ x_1 = I,\ u = U,\ m = 1,$$
$$F = -a_{01} v + a_{02} x_1^2,\ f_1 = -a_{11} x_1 - a_{12} v x_1.$$

Закон терминального управления ЭП. Согласно выражению (10) управляющее воздействие $u = u(t)$, приводящее к повороту вала ЭП из начального положения (2) в конечное (3), описывается формулой

$$u = \frac{1}{F_{x_1} b_1} (m a_t - F_v a) - \frac{f_1}{b_1}, \qquad (12)$$

где

$$F_v = \frac{\partial F}{\partial v} = -a_{01},\ F_{x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2 a_{02} x_1.$$

Планирование траектории при "мягком" повороте вала ЭП. С помощью уравнений (11), в которых управляющее напряжение U подчиняется закону (12), проведем расчет поворота выходного вала ЭП с электродвигателем типа 2ПФ132LГУХЛ4. Параметры электродвигателя и редуктора характеризуются следующими значениями: $R_a = 0{,}269$ Ом, $L_a = 5{,}7 \cdot 10^{-3}$ Гн, $R_e = 25$ Ом, $L_e = 6{,}339$ Гн, $k_r = 100$, $J_m = 0{,}048$ кг·м^2, $J_r = 0{,}0096$ кг·м^2, $c_m = 181$ В·с/рад.

Поставим задачу "мягкого" поворота вала на заданный угол $\Delta\Psi$ под действием управляющего напряжения $U = U(t)$. Скорость вала в начальном и конечном положениях примем равной нулю. Данная задача соответствует наложению на уравнения (11) граничных условий

$$\Psi(t_0) = \Psi_0,\ \Psi(t_f) = \Psi_f,\ \Psi_f - \Psi_0 = \Delta\Psi,$$
$$\Omega(t_0) = \Omega_0 = 0,\ \Omega(t_f) = \Omega_f = 0,$$

где $t = t_0$ — начальный момент времени поворота, $t = t_f$ — конечный момент.

Возьмем для определенности

$$\Psi_0 = 0,\ \Psi_f = 2 \text{ рад},\ \Delta\Psi = 2 \text{ рад}.$$

Для упрощения планирования траектории разобьем процесс на две фазы: от $t = t_0$ до $t = t_f/2 = T$ и от $t = t_f/2 = T$ до $t = t_f = 2T$ (рис. 2). На первой фазе осуществим поворот вала на

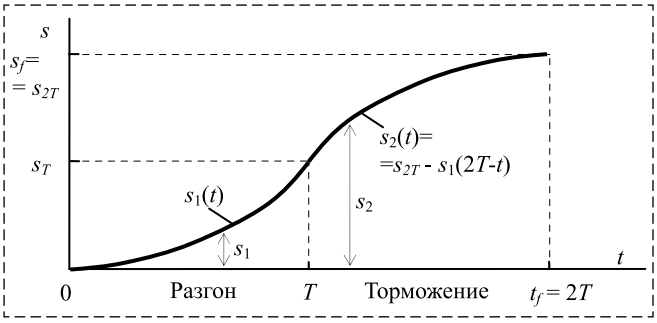

Рис.2. Две фазы зеркальной траектории
Fig. 2. Two phases of the mirror trajectory

угол $\Delta\Psi/2 = s(T) = s_T = s_f/2$ путем разгона его до какой-либо приемлемой конечной скорости $v(T) = v_T > 0$. На второй фазе — поворот еще на $\Delta\Psi/2 = s(2T) = s_{2T} = s_f$ с торможением до нулевой скорости $v(2T) = v_{2T} = v_f = 0$. Торможение вала электродвигателя последовательного возбуждения осуществляется посредством инверсии тока в одной из его обмоток с помощью мостовой переключательной схемы. При этом вращающий магнитный момент $M_m = c_m c_e I^2 = Ja_{02} I^2$ и ЭДС реакции якоря $E_a = c_m c_e k_r \Omega I = (L_a + L_e) a_{12} \Omega I$ изменяют свои направления на противоположные: $M_m = -Ja_{02} I^2$, $E_a = -(L_a + L_e) a_{12} \Omega I$.

Соотношения зеркальной кинематики. Если разгон на первой фазе происходит по некоторому закону

$$s_1 = s_1(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

то торможение на второй фазе естественно выполнить по обратному, зеркальному, закону

$$s_2(t) = 2s_T - s_1(2T - t),\ T \leqslant t \leqslant t_f = 2T.$$

При этом путь на второй фазе от момента $t = T$ до момента $t = T + \Delta t$, $\Delta t > 0$ будет составлять

$$s_2(T + \Delta t) - s_2(T) = s_2(T + \Delta t) - s_T =$$
$$= 2s_T - s_1(2T - (T + \Delta t)) - s_T = s_T - s_1(T - \Delta t),$$

т.е. равен пути на первой фазе от момента $t = T - \Delta t$ до момента $t = T$. Таким образом, пути, проходимые за промежутки времени, равно отстоящие от границы фаз — момента $t = T$, одинаковы (рис. 2). Иными словами, вторая фаза зеркальна первой.

Аналогично скорости одинаковы по модулю в моменты времени, равно отстоящие от границы фаз — момента $t = T$:

$$v_2(t) = v_1(2T - t) \text{ и } v_2(T + \Delta t) = v_1(T - \Delta t)$$

а ускорения одинаковы по модулю и противоположны по знаку в эти моменты:

$$a_2(t) = -a_1(2T - t) \text{ и } a_2(T + \Delta t) = -a_1(T - \Delta t).$$

Производные от ускорения в эти моменты тоже одинаковы (как и скорости):

$$a_{t2}(t) = a_{t1}(2T - t) \text{ и } a_{t2}(T + \Delta t) = a_{t1}(T - \Delta t).$$

Степенная траектория. Разгон на первой фазе проведем по траектории

$$s_1 = s_T \tau^n = s_T \frac{t^n}{T^n}, \qquad (13)$$

где $\tau = \dfrac{t}{T}$ при $t_0 = 0$.

Производные функции (13) по времени t суть

$$v_1 = s_T n \frac{t^{n-1}}{T^n};$$

$$a_1 = s_T n(n-1) \frac{t^{n-2}}{T^n};$$

$$a_{1t} = s_T n(n-1)(n-2) \frac{t^{n-3}}{T^n}.$$

Торможение на второй фазе осуществим согласно записанным выше зеркальным соотношениям

$$s_2(t) = 2s_T - s_1(2T - t) = 2s_T - s_T \frac{(2T - t)^n}{T^n};$$

$$v_2(t) = v_1(2T - t) = s_T n \frac{(2T - t)^{n-1}}{T^n};$$

$$a_2(t) = -a_1(2T - t) = -s_T n(n-1) \frac{(2T - t)^{n-2}}{T^n}; \qquad (14)$$

$$a_{t2}(t) = a_{t1}(2T - t) = s_T n(n-1)(n-2) \frac{(2T - t)^{n-3}}{T^n}.$$

Примем $n = 3$, $t_f = 2$ с, $T = t_f/2 = 1$ с.

Численные расчеты. Численно интегрируя систему дифференциальных уравнений (11) при управляющем воздействии (12), степенной траектории на первой фазе (13), а на второй фазе — (14) и заданных начальных условиях $\Psi_0 = 0$, $\Omega_0 = 0$, $I_0 = 0$, получим процессы управления ЭП. Во избежание деления на нуль в начальный момент времени в соотношении (12) несколько сдвигаем от нуля начальное значение тока: $I_0 = 0{,}001$ А. Практически это соответствует началу управления с небольшим запаздыванием после включения питания.

Результаты расчетов представлены на рис. 3—7. Из графика изменения угла поворо-

та вала ЭП во времени на рис. 3 понятно, что поставленная задача выполнена. Осуществлен поворот вала на заданный угол 2 рад за требуемое время 2 с с нулевой скоростью в конечный момент времени поворота. Торможение на второй фазе движения (уменьшение скорости вращения вала, см. рис. 4) достигается за счет реверса вращающего момента (см. рис. 5). Скорость вращения вала лежит в приемлемых пределах (см. рис. 4), а перегрузок по силе тока и напряжению не наблюдается (рис. 6, 7). Таким образом, качество управления отвечает нормативным инженерным требованиям.

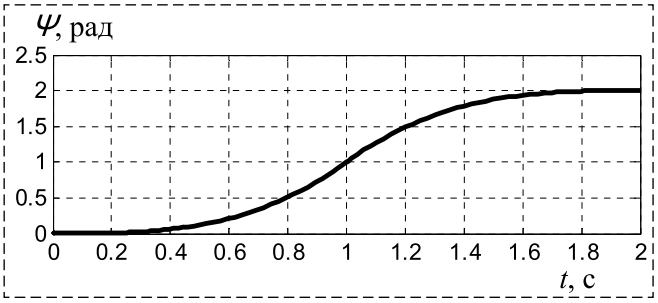

Рис. 3. "Мягкий" поворот вала ЭП на угол ΔΨ = 2 рад
Fig. 3. "Soft" turn of the electric drive shaft at an angle ΔΨ = 2 rad

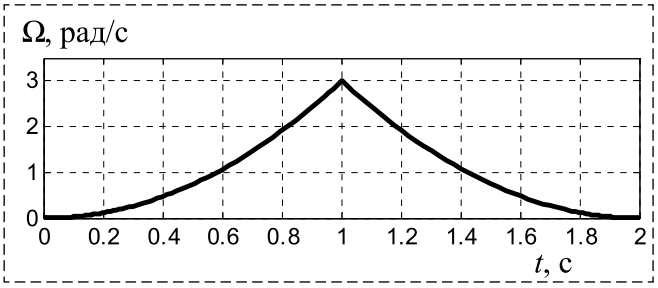

Рис.4. Угловая скорость Ω вала ЭП при "мягком" повороте
Fig. 4. Angular velocity Ω of the electric drive shaft at a "soft" turn

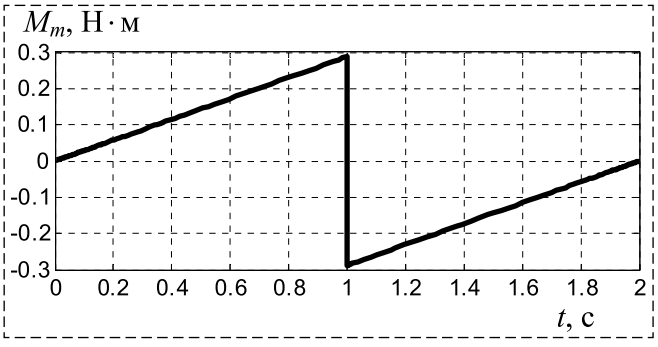

Рис. 5. Вращающий магнитный момент M_m
Fig. 5. The rotating magnetic moment M_m

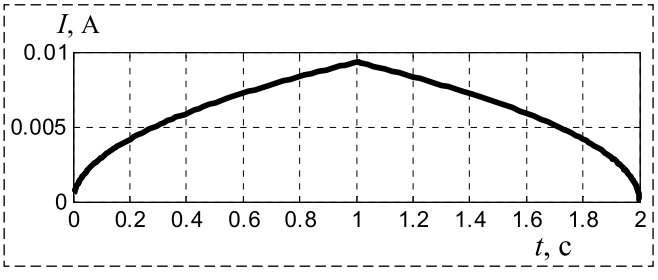

Рис. 6. Сила электрического тока *I* в обмотках
Fig. 6. Electric current *I* in the windings

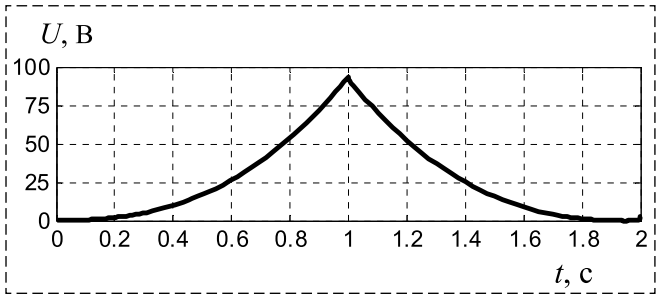

Рис. 7. Управляющее напряжение *U*
Fig. 7. Control voltage *U*

Заключение

В статье изложен метод синтеза терминального управления одноосным механическим движением нелинейных объектов. Построенное с его помощью управление обеспечивает перемещение объекта из известного начального положения и при известной начальной скорости и других начальных значениях параметров состояния в заданное конечное положение с заданной конечной скоростью. Остальные параметры состояния объекта в конечный момент времени в общем случае не контролируются.

Метод характеризуется простотой воплощения как в отношении формы закона управления, так и его практической реализации, например, с помощью встраиваемых микроконтроллеров. Это позволяет существенно упростить осуществление терминального управления мягким позиционированием подвижных исполнительных органов разнообразных технических объектов: промышленных роботов, манипуляторов, автооператоров, станков и других, избегая применения жестких упоров.

Известным неудобством метода в отдельных случаях может оказаться необходимость выполнения операции деления при вычислении закона управления, когда делитель обращается в нуль в какой-то момент времени. Однако оно преодолевается, как правило, путем выбора иной планируемой траектории или ее сшиванием из отдельных участков или "замораживанием" управления в малой окрестности нуля. Данный вопрос является предметом дальнейших исследований.

Список литературы

1. **Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С., Парусников Н. А., Тихомиров В. М.** Оптимальное управление движением. М.: Физматлит, 2005. 376 с.
2. **Афанасьев В. Н.** Оптимальные системы управления. Аналитическое конструирование. М.: Изд-во физического факультета МГУ, 2011. 170 с.
3. **Летов А. М.** Динамика полета и управление. М.: Наука, 1969. 360 с.
4. **Бек В. В., Вишняков Ю. С., Махлин А. Р.** Интегрированные системы терминального управления. М.: Наука, 1989. 224 с.
5. **Лебедев Г. Н., Ву С. Х.** Логика комплексированного терминального управления летательным аппаратом с помощью линейного и релейного регуляторов // Электронный журнал "Труды МАИ". 2013. Вып.70. URL: www.mail.ru/science/trudy/
6. **Половинчук Н. Я., Иванов С. В., Жукова М. Ю., Белоножко Д. Г.** Способ терминального управления на участке выведения беспилотного летательного аппарата с баллистической фазой полета // Вестник Донского государственного университета. 2019. Т. 19, № 1. С. 93—100.
7. **Козырев А. В.** Асимптотически точное оптимальное управление конечным положением по части вектора состояния // Оптимизация производственных процессов. Сб. науч. тр. СевГТУ. 2001. Вып. 4. С. 110—114.
8. **Зубов Н. Е., Ли М. В., Ли Е. К., Микрин Е. А., Рябченко В. Н.** Алгоритм синтеза терминального управления выставкой космического аппарата в инерциальную систему координат // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 1. С. 57—66.
9. **Батенко А. П.** Управление конечным состоянием движущихся объектов. М.: Сов. радио, 1977. 256 с.
10. **Батенко А. П.** Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.
11. **Крутько П. Д.** Алгоритмы терминального управления линейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. 1998. № 6. С. 33—45.
12. **Крутько П. Д.** Обратные задачи динамики в теории автоматического правления. М.: Машиностроение, 2004. 576 с.
13. **Жевнин А. А., Колесников К. С., Крищенко А. П., Толокнов В. И.** Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепций обратных задач динамики (обзор) // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 4. С. 180—188.
14. **Хрусталев М. М.** Методы теории инвариантности в задачах синтеза законов терминального управления летательными аппаратами. М.: Изд-во МАИ. 1987. 51 с.
15. **Велищанский М. А.** Синтез квазиоптимальной траектории движения беспилотного летательного аппарата // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 12. С. 417—430.
16. **Канатников А. Н., Шмагина Е. А.** Задача терминального управления движением летательного аппарата // Нелинейная динамика и управление. 2010. С. 79—94.
17. **Легенький В. И.** О построении систем управления с инвариантной программой // Математические машины и системы. 2004. № 1. С. 115—121.
18. **Теряев Е. Д., Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б., Петрин К. В.** Концепция "гибких кинематических траекторий" в задачах терминального управления подвижными объектами // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 12. С. 7—15.
19. **Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Методы "гибких" траекторий в задачах терминального управления вертикальными маневрами летательных аппаратов // Проблемы управления сложными динамическими объектами авиационной и космической техники. Гл. 2 / Под ред. С. Н. Васильева. М.: Машиностроение, 2015. С. 51—110.
20. **Никифоров В. М., Сапожников А. И., Вязов С. М.** Аналитическое конструирование терминального регулятора динамических систем управления согласно векторно-матричному методу В. Н. Бородовского // Тр. ФГУП "НПЦ АП им. акад. Н. А. Пилюгина". Системы и приборы управления. 2008. № 2(4). С. 60—75.
21. **Бородовский В. Н., Никифоров В. М.** Терминальное управление процессом начальной выставки гироплатформы летательного аппарата в горизонт // МАК-2000. Москва, 2000.
22. **Разоренов Г. Н.** Метод синтеза законов "мягкого" и "сверхмягкого" управления конечным состоянием динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2011. № 4. С. 2—11.
23. **Танг Тхань Лам.** Системный анализ и оптимизация режимов полета для управления летательным аппаратом: дис. на соискание ученой степени канд. техн. наук: 05.13.01 — системный анализ, управление и обработка информации. М.: Московский физико-технический институт (государственный университет). 2015. 155 с.
24. **Попов А. Н.** Методы планирования траектории движения беспилотного летательного аппарата // Известия Самарского научного центра РАН. 2017. Том 19, № 1 (2). С. 364—370.
25. **Солодовников В. В., Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б.** Метод фазового пространства в задачах управления линейными конечномерными объектами // Автоматика. 1981. № 2. С. 55—67.
26. **Котик М. Г.** Динамика взлета и посадки самолетов. М.: Машиностроение, 1984. 256 с.
27. **Мерриэм К. У.** Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. М.: Мир, 1967. 549 с.

Synthesis of the Additive Terminal Control of Uniaxial Motion of Nonlinear Objects

V. G. Kozyrev, vldr.kzrv@yandex.ru
Sevastopol State University, Department of Computer Science and Control in Technical Systems,
Sevastopol, 299053, Russian Federation,

Corresponding author: **Kozyrev V. G.,** PhD, Associate Professor,
Sevastopol State University, Department of Computer Science and Control in Technical Systems,
Sevastopol, 299053, Russian Federation, e-mail: vldr.kzrv@yandex.ru

Accepted on March 10, 2020

Abstract

A method for synthesizing the laws of terminal control of uniaxial movement of nonlinear dynamic objects is proposed. The problem is solved for the case when the control action is included in the scalar additive component of the nonlinear equations of the object. Target control laws meet the requirement to transfer an object from an arbitrary initial state to

a specified final position with a specified final speed. The other parameters of the object's state at the end time are generally not controlled. When assigning a zero final speed, the object's "soft" transition to the specified position is achieved, which is necessary for many terminal systems. Due to the fundamental complexity of optimal synthesis in conditions where the control object has nonlinear properties, a purely terminal formulation of the problem is preferable. One of the most effective means of solving this problem is the methods of trajectory planning and solving inverse dynamics problems. This approach is adopted in this study. Using it together with additional analysis allowed us to write the control law in the feedback form for the case of a nonlinear mathematical model of the object. The developed synthesis method is characterized by simplicity of form and ease of practical implementation, for example, using embedded microcontrollers. Known general approaches are usually associated with a significant expenditure of time and technical resources of the control system in this case. The specified efficiency of the method is achieved by taking into account the features of scalar and additive control in the system. The use of the method is illustrated by an example of "soft" turn of the sequential excitation electric motor shaft at a given angle with zero final speed, which does not require the use of rigid stop. The latter circumstance means a significant improvement in the quality of terminal control. Under this condition, the organization of positioning of mobile executive bodies of various industrial equipment is significantly simplified.

Keywords: *terminal control, the inverse problem of dynamics, trajectory planning, "soft" turning the shaft of the electric motor*

For citation:

Kozyrev V. G. Synthesis of the Additive Terminal Control of Uniaxial Motion of Nonlinear Objects, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2020, vol. 21, no. 7, pp. 394—403.

DOI: 10.17587/mau.21.394-403

References

1. **Alexandrov V. V.**, **Lemah S. S., Parusnikov N. A., Tikhomirov V. M., Boltyansky V. G.** Optimal motion control, Moscow, Fizmatgiz, 2005, 376 p. (in Russian).

2. **Afanasyev V. N.** Optimal control systems. Analytical design, Moscow, Publishing house of fizicheskii fakul'tet MSU, 2011, 170 p. (in Russian).

3. **Letov A. M.** Flight dynamics and control, Moscow, Nauka, 1969, 360 p. (in Russian).

4. **Bek V. V., Vishniakov Iu. S., Makhlin A. R.** Integrated terminal control systems, Moscow, Nauka, 1989, 224 p. (in Russian).

5. **Lebedev G. N.**, **Vu S. H.** Logic of the integrated terminal aircraft control by means of the linear and relay controllers, *Ehlektronnyj zhurnal "Trudy MAI",* 2013, iss. 70, available at: www.mail.ru/science/trudy/ (in Russian).

6. **Polovinchyuk N. Ya., Ivanov S. V., Zhukova M. Yu., Belonozhko D. G.** Method of terminal control in the area of launching an unmanned aerial vehicle with a ballistic phase of flight, *Vestnik Donskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 93—100 (in Russian).

7. **Kozyrev A. V.** Asymptotically exact optimal control of the final position on the part of the state vector, *Optimizatsiia proizvodstvennykh protsessov. Sbornik nauchnykh trudov SevGTU*, no. 4, Sevastopol, Publishing house of SevGTU, 2001, pp. 110—114 (in Russian).

8. **Zubov N. E.**, **Li M. V., Li E. K., Mikrin E. A., Ryabchenko V. N.** Algorithm for synthesis of terminal control of the spacecraft exhibition into an inertial coordinate system, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2016, vol. 17, no. 1, pp. 57—66 (in Russian).

9. **Batenko A. P.** Control of the final state of moving objects, Moscow, Sovetskoe radio Soviet radio, 1977, 256 p. (in Russian).

10. **Batenko A. P.** Terminal control systems., Moscow, Radio i Sviaz, 1984, 160 p. (in Russian).

11. **Krutko P. D.** Terminal control algorithms for linear dynamical, *Izvestiia RAN. Teoriia i Sistemy Upravleniia*,1998, no. 6, pp. 33—45 (in Russian).

12. **Krutko P. D.** Inverse problems of dynamics in the theory of automatic control, Moscow, Mashinostroenie, 2004, 576 p. (in Russian).

13. **Zhevnin A. A.**, **Kolesnikov K. S., Krishenko A. P., Tolknov V. I.** Synthesis of terminal control algorithms based on the concepts of inverse dynamics problems (overview), *Izv. AN SSSR. Tekhn. Kibernetika*, 1985, no. 4, pp. 180—188 (in Russian).

14. **Khrustalev M. M.** Methods of invariance theory in problems of synthesis of laws of terminal control of aircraft, Moscow, Publishing house of MAI, 1987, 51 p. (in Russian).

15. **Velishchanskii M. A.** Synthesis of quasi-optimal trajectory of unmanned aerial vehicle, *Nauka i Obrazovanie. MGTU im. N E Baumana Elektronnyi zhurnal*, 2013, no. 12, pp. 417—430 (in Russian).

16. **Kanatnikov A. N., Shmagina E. A.** The problem of terminal control of the movement of the aircraft, *Nelineinaia Dinamika i Upravlenie*, 2010, pp. 79—94 (in Russian).

17. **Legenkii V. I.** On the construction of control systems with invariant program, *Matematicheskie Mashiny i Sistemy*, 2004, no. 1, pp. 115—121 (in Russian).

18. **Teryaev E. D., Filimonov A. B., Filimonov N. B., Petrin K. B.** The concept of "flexible kinematic trajectories" in the problems of terminal control of mobile objects, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 12, pp. 7—15 (in Russian).

19. **Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Methods of "flexible" trajectories in problems of terminal control of vertical maneuvers of aircraft. Chapter 2 in the monograph "Problems of controlling complex dynamic objects of aviation and space technology", Moscow, Mashinostroenie, 2015, pp. 51—110 (in Russian).

20. **Nikiforov V. M.**, **Sapozhnikov A. I., Viazov S. M.** Analytical design of the terminal controller of dynamic control systems according to the vector-matrix method of V. N. Borodovskii, *Tpudy FGUP "NPTS AP im akad N A Piliugina". Sistemy i Pribory Upravleniia,* 2008, no. 2(4), pp. 60—75 (in Russian).

21. **Borodovskii V. N., Nikiforov V. M.** Terminal control of the initial exposure of the aircraft's gyro platform in the horizon, MAK-2000, Moscow, 2000 (in Russian).

22. **Razorenov G. N.** Method of synthesis of the laws of "soft" and "super-soft" control of the final state of dynamical systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2011, no. 4, pp. 2—11 (in Russian).

23. **Tang Tkhan Lam.** System analysis and optimization of flight modes for aircraft control: dissertatsiia na soiskanie uchenoi stepeni kand tekhn nauk: 05 13 01 — sistemnyi analiz upravlenie i obrabotka informatsii, Moscow, Moskovskii fiziko-tekhnicheskii institut (gosudarstvennyi universitet), 2015, 155 p. (in Russian).

24. **Popov A. N.** Methods of planning the trajectory of an unmanned aerial vehicle, *Izvestiia Samarskogo Nauchnogo Tsentra RAN*, 2017, vol. 19, no. 1 (2), pp. 364—370 (in Russian).

25. **Solodovnikov V. V., Filimonov A. B., Filimonov N. B.** Phase space method in control problems for linear finite-dimensional objects, *Avtomatika,* 1981, no. 2, pp. 55—67 (in Russian).

26. **Kotic M. G.** Dynamics of take-off and landing of aircraft, Moscow, Mashinostroenie, 1984, 256 p. (in Russian).

27. **Merriam C. W.** Optimization theory and calculation of feedback control systems, Moscow, Mir, 1967, 549 p. (in Russian).