

Н. Н. Карабутов, д-р техн. наук, проф., kn22@yandex.ru,
МИРЭА (Российский технологический университет), г. Москва,
Московская государственная академия водного транспорта

S-синхронизация, структурная идентифицируемость и идентификация нелинейных динамических систем

Предложен подход к анализу структурной идентифицируемости нелинейных динамических систем в условиях неопределенности. Показано, что структурная идентифицируемость нелинейной системы возможна только в случае выполнения условия S-синхронизации. Рассмотрены условия, при которых можно получить модель для выделения нелинейной части системы. Предложен способ получения множества, содержащего информацию о нелинейной части системы. Введен класс геометрических структур, которые отражают состояние нелинейной части системы. Геометрические структуры определены на указанном множестве. Приведены условия структурной неразличимости геометрических структур на множестве S-синхронизирующих входов. Рассмотрены условия локальной идентифицируемости нелинейной части. Показано, что не S-синхронизирующий вход дает незначимую геометрическую структуру, что ведет к структурной неидентифицируемости нелинейной части системы. Описан способ оценки структурной идентифицируемости нелинейной части. Приведены условия параметрической идентифицируемости линейной части системы. Показано, что структурная идентифицируемость является основой для структурной идентификации системы. Предложен метод иерархического погружения для оценки структурных параметров нелинейной системы. Показан пример его применения.

Ключевые слова: структура, нелинейная динамическая система, структурная идентифицируемость, S-синхронизируемость, иерархическое погружение, структурная идентификация, гистерезис Бука—Вена

Введение

Проблема идентификации динамических систем, несмотря на множество полученных результатов, продолжает оставаться одной из актуальных областей исследования. Получены основополагающие результаты по параметрической идентификации систем. Наряду с этим выполнялись исследования по оценке идентифицируемости динамических систем. Подход к оценке идентифицируемости основан на идеях Р. Калмана [1]. Дальнейшее развитие этих идей дано в работах [2, 3]. Р. Ли [2] дает определение идентифицируемости.

Рассматривается система

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n, \\ y_n &= C^T X_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $X_n \in R^m$ — состояние системы; $A \in R^{m \times m}$, $y_n \in R$ — выход системы; $n = J_n = [0, N]$ — дискретное время.

Ставится задача: определить условия, при каких можно идентифицировать систему на основе множества

$$I_o = \{y_n, n = \overline{0, N}, N < \infty\}. \quad (2)$$

Условие n -идентифицируемости сводится к тому, чтобы матрица $[X_0 | AX_0 | A^2 X_0 | \dots | A^{n-1} X_0]$ была невырожденной. Приведены условия 1-идентифицируемости. В работе [2] рассмотрен случай идентифицируемости, когда порядок динамической системы меньше m .

Из вышесказанного следует, что оценка идентифицируемости системы (1) выполняется в параметрическом пространстве. Назовем ее IP-идентифицируемостью (IPI). Исследованию IPI посвящено множество публикаций. В них в отличие от подхода, изложенного в работе [2], результаты идентифицируемости пытаются представить в виде, принятом в задачах параметрического оценивания. В работе [4] введено понятие структурной идентифицируемости.

Показано, что локальная идентифицируемость является необходимым условием глобальной идентифицируемости. Параметр, который является структурно локально идентифицируемым, но не является структурно глобально идентифицируемым, называется *структурно глобально неидентифицируемым*. Параметр, который не является структурно локально идентифицируемым, называется *структурно локально неидентифицируемым*. Для проверки структурной идентифицируемости могут применяться различные подходы и методы [5, 6]. В работе [7] введено понятие локальной параметрической идентифицируемости и дано его теоретическое обоснование. Рассматривается система, описываемая системой дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(t, X, P), \quad X(t_0) = X_0, \quad (3)$$

где $X_n \in R^m$ — состояние системы; $P \in R^m$ — вектор параметров; $F(\cdot)$ — нелинейная вектор-функция.

Замечание 1. В большинстве работ, посвященных рассматриваемой проблеме и доступных автору, речь не идет об оценке структуры системы в общепринятом в теории идентификации смысле. Поэтому понятие структурной идентифицируемости не отражает суть рассматриваемой проблемы. Но так как эта терминология активно применяется в задачах оценки идентифицируемости, то в этом разделе будем придерживаться этой терминологии, чтобы продолжить анализ полученных результатов.

Другие подходы к оценке структурной идентифицируемости рассмотрены в работах [8–10].

Много работ посвящены IP-идентифицируемости нелинейных систем (см. например, [9–12]). В работе [10] для исследования идентифицируемости применяется подход, основанный на анализе чувствительности системы по выходу. Показана эффективность данного подхода при исследовании идентифицируемости комбинации параметров системы. В работе [9] получены локальные условия параметрической идентифицируемости при различных вариантах измерения экспериментальных данных. Критический анализ подходов, применяемых для оценки идентифицируемости биологических моделей, дан в статье [11]. Рассмотрены модели оценки идентифицируемости нелинейных систем на основе разложения в ряд Тейлора, таблиц идентифицируемости и алгебры

дифференциалов. Вопросам исследования практической идентифицируемости посвящена работа [12]. Дано применение предлагаемого подхода к задачам биологии. Эти же вопросы рассматриваются в статьях [13, 14].

В работе [15] рассмотрены вопросы идентифицируемости модели, описываемой системой одновременных уравнений

$$BY_n + \Gamma X_n = U_n, \quad (4)$$

где $B \in R^{m \times m}$ — невырожденная матрица; $X_n \in R^k$ — экзогенный вектор (внешних) переменных; $\Gamma \in R^{m \times k}$; $U_n \in R^m$ — вектор внешних случайных возмущений; $Y_n \in R^m$ — вектор эндогенных переменных. Известны априорная информация о внешних и внутренних переменных, случайном характере U_n , ограничения на коэффициенты и правило нормализации переменных. Введены понятия наблюдаемо эквивалентных структур; параметра, идентифицируемого на структуре; идентифицируемой структуры. Рассмотрены различные случаи задания априорной информации о структуре и получены условия идентифицируемости в виде ранга матрицы, зависящей от переменных системы (3).

Замечание 2. Несмотря на то, что система (4) относится к классу статических, ее идентификация представляет определенный интерес в плане постановки задачи. Здесь также фигурирует понятие "структура". В рамках дальнейшего изложения будет полезно сравнить существующие трактовки и постановки задач структурной идентифицируемости.

В работе [16] введено понятие идентифицируемости и гладкой идентифицируемости для нелинейных систем. Показана связь между ними. В работе [17] установлена связь между идентифицируемостью и наблюдаемостью нелинейных биологических систем. Вопросы структурной идентифицируемости систем временных рядов, описываемых нелинейными регрессионными и авторегрессионными уравнениями, рассмотрены в работе [18]. В статье [19] для нелинейных процессов в биологии сделана попытка оценки совместной наблюдаемости, управляемости и достижимости системы.

Итак, проведенный анализ показывает, что под идентифицируемостью модели понимают возможность оценки ее параметров. Предлагаемые методы основаны на оценке невырожденности информационной матрицы. Аналогичные

результаты получены в теории параметрического оценивания, и условие невырожденности (полноты ранга) матрицы представлено в легко проверяемом условии предельной невырожденности входа и выхода системы. Как правило, структура модели задается априори, и поэтому не всегда понятно, какой смысл вкладывается в понятие структурной локальной идентифицируемости. Понятие структуры широко эксплуатируется в задачах оценки идентифицируемости. Идентифицируемость нелинейной системы также сводится к задаче параметрической идентифицируемости на основе применения различных методов линеаризации модели по параметрам. Эта обширная область исследований не охватывает задачи структурной идентифицируемости нелинейных динамических систем в следующем смысле: можно ли в условиях неопределенности принять решение об оценке структуры (формы, зависимости) нелинейной части системы. Задача в таком виде не ставилась. В таком разрезе рассматриваются именно структурные аспекты идентифицируемости системы. Кроме того, не рассматривался вопрос: какой вход, даже обладающий свойством предельной невырожденности (постоянства возбуждения), позволяет обеспечить структурную идентифицируемость системы в указанном выше смысле. Данная постановка впервые была предложена в работе [20].

В данной работе рассматривается задача структурной идентифицируемости нелинейной системы. Следует заметить, что сама по себе это очень сложная проблема, так как до настоящего времени не разработаны методы формализации структуры системы. Понятие структурной идентифицируемости (h -идентифицируемости) было введено в работе [20]. В отличие от изложенных выше методов предлагаемый подход направлен на решение задачи оценки структуры нелинейной части динамической системы. Он основан на анализе специального класса структур, отражающих состояние нелинейной части системы. Ниже дается изложение и обобщение результатов, полученных в работах [21, 22].

Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + B_\varphi \varphi(y) + B_u u, \\ y &= C^T X,\end{aligned}\quad (5)$$

где $u \in R$, $y \in R$ — вход и выход системы; $A \in R^{q \times q}$, $B_u \in R^q$, $B_\varphi \in R^q$, $C \in R^q$ — матрицы соответствующих размерностей; $\varphi(y)$ — некоторая скалярная нелинейная функция. Матрица A является гурвицевой. Далее полагаем, что $B_\varphi = B_u = I = [0, 0, \dots, 0, 1]^T$, $C = [1, 0, \dots, 0]^T$.

Относительно структуры функции $\chi = \varphi(y)$ могут делаться различные предположения. Они определяются уровнем априорной информации. При наличии априорной информации могут применяться методы, основанные на процедурах линеаризации [23]. При исследовании абсолютной устойчивости нелинейных систем относительно $\chi = \varphi(y)$ полагают, что [24]

$$\chi \in \mathcal{F}_\varphi = \{\varphi(\xi)\xi \geq \xi^2, \xi \neq 0, \varphi(0) = 0\}, \quad (6)$$

где $\xi \in R$ — вход нелинейного элемента. ξ является линейной комбинацией переменных состояния. Дальнейшим обобщением условия (6) является секторное условие, задающее область, которой принадлежит нелинейная функция:

$$\begin{aligned}\chi \in \mathcal{F}_\varphi &= \{\gamma_1 \xi^2 \leq \varphi(\xi)\xi \leq \gamma_2 \xi^2, \xi \neq 0, \\ \varphi(0) &= 0, \gamma_1 \geq 0, \gamma_2 < \infty\}.\end{aligned}\quad (7)$$

Часто нелинейная часть системы (5) может описываться статическими зависимостями. Поэтому далее рассматривается случай системы (5) с $\varphi(y)$, описываемой статическим (алгебраическим) уравнением. Будем считать, что функция $\varphi(y)$ является гладкой.

Пусть для системы (5) известно информационное множество

$$I_o = \{u(t), y(t), t \in J = [t_0, t_k]\}. \quad (8)$$

Задача: на основе анализа и обработки I_o оценить структурную идентифицируемость (СИ) и структуру нелинейной части системы (5).

В силу отмеченных во введении причин применение параметрических методов идентификации в условиях неопределенности не позволяет подойти к решению задачи СИ. Поэтому воспользуемся подходом к структурной идентификации, предложенным в работе [22]. Он основан на переходе в специальное структурное пространство и построении структур $\mathcal{S}_{ey}$, отражающих свойства нелинейной части (5). Анализ $\mathcal{S}_{ey}$ напрямую связан с решением задачи структурной идентифицируемости системы. Чтобы отличить излагаемый далее подход от IP-идентифицируемости, ниже будут исполь-

зоваться термин h -идентифицируемости (НІ). Изложим метод построения S_{ey} -структуры.

Метод построения S_{ey} -структуры

Построение S_{ey} -структуры требует предварительного формирования множества $I_{N,g}$, содержащего информацию о функции $\varphi(y)$. Изложим способ получения $I_{N,g}$, следуя работе [25].

Множество для формирования S_{ey} -структуры

Применим к $y(t)$ операцию дифференцирования и обозначим полученную переменную x_1 . Учет x_1 приводит к расширению информационного множества $I_o: I_{ent} = \{I_o, x_1\}$.

Замечание 3. Если переменные u , y измеряются с ошибкой, то к u , y следует применить процедуру фильтрации или сглаживания.

Выделим подмножество $I_g \subset I_{ent}$, соответствующее частному решению системы (5) (установившемуся состоянию). Множество $I_g = I_{ent} \setminus I_{tr}$ не содержит данные I_{tr} о переходном процессе в системе. Применим математическую модель

$$\hat{x}_1'(t) = H^T [1 \ u(t) \ y(t)]^T, \quad (9)$$

для выделения линейной составляющей в x_1 . Переменная x_1 определена на интервале $J_g = J \setminus J_{tr}$. Здесь $H \in R^3$ — вектор параметров модели.

Определим вектор H как решение задачи

$$\min_H Q(e) \Big|_{e=\hat{x}_1' - x_1} \rightarrow H_{opt},$$

где $Q(e) = 0,5e^2$.

Найдем прогноз для переменной x_1 на основе модели (9) $\forall t \in I_g$ и сформируем ошибку $e(t) = \hat{x}_1'(t) - x_1(t)$. $e(t)$ зависит от нелинейности $\varphi(y)$ в системе (5). Итак, получено множество $I_{N,g} = \{y(t), e(t) \mid t \in J_g\}$. Далее будем применять обозначение $y(t)$, полагая, что $y(t) \in I_{N,g}$.

Замечание 4. Выбор структуры модели (9) является одним из этапов структурной идентификации системы (5). Результаты моделирования показывают, что модель (9) применима в системах идентификации объектов со статическими нелинейностями. Решение задачи выбора структуры модели (9) для более сложного класса нелинейностей дано в работе [21].

Структуры S_{ey} , S_{ek}

Анализ свойств системы (5) на основе фазового портрета S , описываемого функцией

$\Gamma: \{y\} \rightarrow \{y'\}$, в условиях неопределенности не всегда позволяет сделать заключение о нелинейных свойствах системы. Поэтому воспользуемся множеством $I_{N,g}$ и перейдем в пространство $\mathcal{P}_{ye} = (y, e)$, которое будем называть структурным.

Рассмотрим функцию $\forall t \in J_g$, которая на плоскости (y, e) описывает изменение структуры S_{ey} . Так как $I_{N,g}$ содержит информацию о $\varphi(y)$, то S_{ey} будет в обобщенном виде описывать изменение нелинейной функции. Чтобы получить представление о $\varphi(y)$, вход системы (5) должен удовлетворять определенным условиям. Он должен обладать свойством постоянства возбуждения (предельной невырожденности). Такой вход позволяет получить замкнутую структуру S_{ey} . В некоторых случаях может применяться также структура S_{ek} , которая описывается функцией $\Gamma_{ek}: \{k_s\} \rightarrow \{e\}$, где $k_s(t) \in R$ — коэффициент структурности [21]:

$$k_s(t) = \frac{e(t)}{y(t)}.$$

В результате применения модели (9) система (5) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} S_y : \begin{cases} \dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + I\zeta, \\ \tilde{y} = C^T \tilde{X}, \end{cases} \\ S_\varphi : e = f(y, x_1), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\tilde{X} \in R^q$ — переменная, описывающая общее решение системы (5); $\zeta \in R$ — ограниченное возмущение, возникающее в результате применения процедуры определения переменной e .

Рассмотрим проблему идентифицируемости систем S_y , S_φ .

О необходимости оценки h -идентифицируемости нелинейной системы

Из введения следует, что основное внимание при исследовании идентифицируемости систем уделено вопросам IP-идентифицируемости. Как показывают результаты моделирования [20], сведение проблемы СИ нелинейных систем к IP-идентифицируемости не всегда оправдано. Такой подход справедлив только в условиях априорной определенности. Часто для системы априорная информация может отсутствовать или быть неполной. Поэтому применение различных процедур аппроксимации нелинейности может привести к неадекватно-

му учету свойств системы. Это может вызвать сложности, которые отмечены в работе [28]. Поэтому вопрос структурной идентифицируемости требует детального изучения. В дальнейшем данную проблему будем трактовать как h -идентифицируемость.

h -идентифицируемость и S -синхронизируемость

Замечания, сделанные в разделе "Метод построения S_{ey} -структуры", показывают, что подходы, применяемые для оценки IP-идентифицируемости, являются неприменимыми в случае оценки h -идентифицируемости. Ниже излагается подход к оценке ИИ, предложенный в работе [25].

Система S_φ

Рассмотрим систему S_φ и свойства $I_{N,g}$, позволяющие решить задачу структурной идентификации, а следовательно, и h -идентифицируемости. Анализ $I_{N,g}$ позволяет определить важные свойства информационного множества I_o .

Пусть выполняются следующие условия.

B1. Исходное множество I_o дает решение задачи параметрической идентификации модели (5). Это значит, что вход $u(t)$ является предельно невырожденным на интервале J .

B2. Вход $u(t)$ обеспечивает получение информативной структуры $S_{ey}(I_{N,g})$. Это означает, что анализ S_{ey} дает решение задачи оценки нелинейных свойств системы (5).

Определение 1. Вход $u(t)$ будем называть представительным, если он удовлетворяет условиям B1, B2.

Пусть структура S_{ey} является замкнутой, и ее площадь не равна нулю. Обозначим высоту S_{ey} через $h(S_{ey})$, где высота понимается как расстояние между двумя точками противоположных сторон структуры S_{ey} .

Теорема 1 [25]. Пусть: 1) линейная часть системы (5) является устойчивой, а нелинейность $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет условию (7); 2) вход $u(t)$ является ограниченным, кусочно-непрерывным и предельно невырожденным; 3) существует такое $\delta_S > 0$, что $h(S_{ey}) \geq \delta_S$. Тогда структура S_{ey} является идентифицируемой на множестве $I_{N,g}$.

Определение 2. Структуру S_{ey} , имеющую указанные свойства, называется h -идентифицируемой.

Предположим, что S_{ey} является h -идентифицируемой.

Особенности понятия h -идентифицируемости отмечены в работе [20].

Следует отметить, что может существовать "плохой" вход, который удовлетворяет условию предельной невырожденности. Такой вход может давать так называемую незначимую S_{ey} -структуру ($\mathcal{N}S_{ey}$ -структура). Но при этом $\mathcal{N}S_{ey}$ -структура может быть h -идентифицируемой. Идентификация нелинейности в условиях неопределенности на основе анализа $\mathcal{N}S_{ey}$ -структуры может давать результаты, нетипичные для исследуемой системы.

Приведем условия существования $\mathcal{N}S_{ey}$ -структуры. Рассмотрим класс нелинейных функций, к которым применима операция гомотетии. Гомотетия [26] представляет собой метод получения одной части геометрической фигуры из другой на основе ее поворота и растяжения около определенной точки на плоскости (y, e) . Этот подход применим для нелинейностей, симметричных относительно некоторой точки или прямой.

Пусть $S_{ey} = F_{S_{ey}}^l \cup F_{S_{ey}}^r$, где $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ — левый и правый фрагменты S_{ey} . Определим для $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ секущие

$$\gamma_S^r = a^r y, \quad \gamma_S^l = a^l y, \quad (11)$$

где a^l, a^r — числа, определяемые с помощью метода наименьших квадратов (МНК).

Теорема 2 [21]. Пусть: 1) структура S_{ey} является h -идентифицируемой и имеет вид $S_{ey} = F_{S_{ey}}^l \cup F_{S_{ey}}^r$, где $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ — левый и правый фрагменты S_{ey} ; 2) секущие для $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ описываются уравнениями (11). Тогда S_{ey} является $\mathcal{N}S_{ey}$ -структурой, если

$$\|a^l\| - \|a^r\| > \delta_h, \quad (12)$$

где $\delta_h > 0$ — некоторое заданное число.

Замечание 5. Теорема 2 может быть доказана на основе гомотетии множеств [26]. Она основана на оценке близости множеств $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$. Подход, основанный на методе секущих, является более простым в реализации.

Замечание 6. $\mathcal{N}S_{ey}$ -структуры характерны для систем с многозначными нелинейностями. Часто они являются результатом неадекватного применения входных воздействий.

Рассмотрим структуру S_{ey} . Введем обозначения: $\mathcal{D}_y = \text{dom}(S_{ey})$ — область определения S_{ey} , $D_y = D_y(\mathcal{D}_y) = \max_t y(t) - \min_t y(t)$ — диаметр $\mathcal{D}_y$.

Пусть $u(t) \in U$, где U — допустимое множество входов для системы (5). Множество U содержит представительные входы.

Определение 3. Вход $u(t) \in U_S \subseteq U$ будем называть S -синхронизирующим систему (5), если на множестве $\{y(t), t \in J\}$ область определения $\mathcal{D}_y$ структуры S_{ey} имеет максимальный диаметр D_y .

Рассмотрим эталонную структуру S_{ey}^{ref} , под которой понимаем структуру S_{ey} , позволяющую отразить все свойства функции $\varphi(y)$. Обозначим диаметр $D_y(S_{ey}^{ref})$ через D_y^{ref} . D_y^{ref} существует для системы (5), для которой вход является S -синхронизирующим.

Из определений 2, 3 следует, что если $S_{ey} \cong S_{ey}^{ref}$, то $|D_y - D_y^{ref}| \leq \varepsilon_y$, где $\varepsilon_y \geq 0$, $\cong$ — знак близости. Элементы подмножества U_S обладают свойством

$$|D_y(S_{ey}(u(t)|_{u \in U_S})) - D_y^{ref}| \leq \varepsilon_y. \quad (13)$$

Синхронизацию $u(t) \in U$ будем понимать как выбор такого входа $u_h(t) \in U$, который позволяет отразить все особенности S_{ey} , характерные для $\varphi(y)$. Это возможно только в случае, когда $u(t)$ обеспечивает $\max_{u_h} D_y$. В отличие от понятия синхронизации, принятого в теории колебаний, здесь выбор свойств входа направлен на возможность получения структуры $S_{ey} \neq \mathcal{N}S_{ey}$. Так как такой подбор $u_h(t) \in U$ можно трактовать как синхронизацию между структурами модели и системы, то выполнение условия $d_{h,y} = \max_{u_h} D_y$ приводит к h -идентифицируемости системы. Условие h -идентифицируемости принимает вид

$$|D_y(S_{ey}(u(t)|_{u \in U_S})) - d_{h,y}| \leq \varepsilon_y, \quad (14)$$

а

$$|D_y(S_{ey}(u(t)|_{u \in U \setminus U_S})) - d_{h,y}| > \varepsilon_y \quad (15)$$

есть условие появления $\mathcal{N}S_{ey}$.

Итак, представлено два критерия (12) и (15) существования незначимой структуры S_{ey} . В этом случае структура системы S_φ , а следовательно, и системы (5) является структурно неидентифицируемой.

Пусть вход $u_h(t)$ синхронизирует множество $\mathcal{D}_y$. Если $u(t)$ является S -синхронизирующим, то будем писать $u_h(t) \in S$. Заметим, что для системы (5) существует конечное множество $\{u_h(t)\} \in S$. Выбор оптимального $u_h(t)$ зависит от $d_{h,y}$ и условия (14). Обеспечение условия (14) является

одной из предпосылок структурной идентифицируемости системы (5).

Определение 4. Структуру S_{ey} (систему (5)) будем называть структурно идентифицируемой или h_{δ_h} -идентифицируемой, если S_{ey} является h -идентифицируемой и выполняются условия $\|a^l\| - \|a^r\| \leq \delta_h$ и (13).

Из этого определения следует, что если система (5) h_{δ_h} -идентифицируема, то структура S_{ey} имеет максимальный диаметр области $\mathcal{D}_y$.

Пусть структура S содержит m особенностей. Под особенностями функции $\varphi(y)$ будем понимать как потерю непрерывности на интервале I_y^i (множество, на котором изменяется i -е свойство), так и точки перегиба функции или экстремумы. Эти особенности являются признаками нелинейности исследуемой функции.

Определение 5. Модель (9) будем называть SM -идентифицирующей, если структура S_{ey} является h_{δ_h} -идентифицируемой.

Теорема 3 [22]. Пусть: 1) вход $u(t)$ является предельно невырожденным и обеспечивает S -синхронизацию системы (5); 2) фазовый портрет S системы (5) содержит m особенностей; 3) S_{ey} -структура является h_{δ_h} -идентифицируемой и содержит фрагменты, соответствующие особенностям фазового портрета S . Тогда модель (9) является SM -идентифицируемой.

Теорема 3 показывает, что если модель (9) не является SM -идентифицирующей, то необходимо менять структуру модели (9) или информационное множество для ее построения.

Рассмотрим структуру S_{ey} . Обозначим c_S — центр структуры S_{ey} на множестве $J_y = \{y(t)\}$, а центр области $\mathcal{D}_y$ — c_{D_y} .

Теорема 4. Пусть на множестве U_S синхронизирующих входов $u(t)$ системы (5): 1) существует такое $\varepsilon \leq 0$, что $|c_S - c_{D_y}| \leq \varepsilon$; 2) выполняется условие $\|a^l\| - \|a^r\| \leq \delta_h$, где a^l, a^r — коэффициенты текущих (11). Тогда система (5) является h_{δ_h} -идентифицируемой, а вход $u_h(t) \in S$.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим вход $u_h(t) \in U_S$. Так как выполняется условие $\|a^l\| - \|a^r\| \leq \delta_h$, то структура S_{ey} является симметричной относительно точки c_S на плоскости (y, e) . Следовательно, диаметры областей определения фрагментов $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ структуры S_{ey} совпадают с точностью до некоторой величины $e_\varphi \geq 0$ на множестве $\{y(t)\}$, т. е.

$$|D_{F_S^l}(\mathcal{D}_{F_S^l}) - D_{F_S^r}(\mathcal{D}_{F_S^r})| \leq \varepsilon_\varphi, \quad (16)$$

где $\mathcal{D}_{F_S^l}, \mathcal{D}_{F_S^r}$ — области определения $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$. Тогда центр структуры S_{ey} равен $c_{D_y} = 0,5(\mathcal{D}_{F_S^l}, \mathcal{D}_{F_S^r})$. Так как $D_{F_S^l} + D_{F_S^r} = D_y$, то существует такое $\varepsilon \geq 0$, что $|c_S - c_{D_y}| \leq \varepsilon$. Выполнение условий 1), 2) гарантирует, что $u(t) = u_h(t)$ и $d_{h,y} = \max_{u_h} D_y$. Следовательно, при $u_h(t)$ структура S_{ey} будет содержать все особенности, характерные для функции $\varphi(y)$. Отсюда следует, что $u_h(t) \in S$, а система (5) является h_{δ_h} -идентифицируемой. ■

Может существовать некоторое подмножество $\{u_{h,i}(t)\} \subset U_S \subseteq U$ ($i \geq 1$), элементы которого обладают свойством S-синхронизируемости. Каждому $u_{h,i}(t)$ соответствует структура $S_{ey,i}(u_{h,i})$ с диаметром $D_{y,i}$ области определения $\mathcal{D}_{y,i}$. Так как $u_{h,i}(t) \in S$, то диаметры $D_{y,i}$ будут обладать свойством $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности. Пусть гипотетическая структура S_{ey} (структура S_{ey}^{ref}) системы (5) имеет диаметр $d_{h,\Sigma}$.

Определение 6. Структура $S_{ey,i}$ обладает свойством $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности на множестве U_h , если существует такое $\varepsilon_\Sigma > 0$, что $|d_{h,\Sigma} - D_{y,i}| \leq \varepsilon_\Sigma \forall i = 1, \# U_h$ (здесь и далее $\#$ — мощность множества).

Определение 7. Если существует подмножество входов $\{u_{h,i}(t)\} = U_h \subset U$ ($i \geq 1$), элементы которого $u_{h,i}(t) \in S$ и соответствующие им структуры $S_{ey,i}(u_{h,i})$ обладают свойством $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности, то структуры $S_{ey,i}(u_{h,i})$ являются структурно неразличимыми на множествах $\{u_{h,i}(t)\}$, $J_y(u(t)) = u_{h,i}(t)$.

Из определений 6, 7 следует, что в случае существования множества U_h оценку h_{δ_h} -идентифицируемости можно получить по любому входу $u(t) \subset U_h$.

Определение 8. Структуры $S_{ey,i}(u_{h,i})$, обладающие свойством $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности, будем называть локально структурно идентифицируемыми на множестве U_h .

Структуру $S_{ey,i}(u_{h,i})$, обладающую свойством $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности, будем обозначать $S_{ey,i}^\Sigma$, а локально структурно идентифицируемую структуру $S_{ey,i}(u_{h,i})$ — $S_{ey,i}^{LSI}$.

Итак, из изложенного выше следует, что структура S_{ey} является локально структурно идентифицируемой на множестве $U_h \subseteq U_S$, если

$$(\exists u_h \in S), \text{ что } (S_{ey} \cong S_{ey}^\Sigma) \rightarrow S_{ey} \cong S_{ey}^{LSI}. \quad (17)$$

Замечание 7. Здесь рассматривается случай симметричных нелинейностей. Поэтому остаются справедливыми сделанные выше замеча-

ния и условия существования $\mathcal{N}S_{ey}$ -структуры. Если нелинейная функция не обладает свойством симметрии, то требуется дальнейшее исследование данной проблемы. Это связано с тем, что любая нелинейность имеет свои особенности и их учет возможен только при имеющейся априорной информации о системе.

Определение 9. Структуры $S_{ey,i}(u_h \notin U_S)$, не обладающие свойством $d_{h,\Sigma}$ -оптимальности, будем называть локально структурно неидентифицируемыми на множестве U_h .

Замечание 8. Изложенный подход применим к нелинейной системе с динамическим законом изменения нелинейности, где требуется многоуровневый анализ идентифицируемости структур. Ниже на примере будет рассмотрен метод иерархического погружения [21].

Система S_y

Рассмотрим систему S_y , которая описывает почти общее решение системы (5). Понятие "почти общее" связано с наличием возмущения $\zeta \in R$, которое появляется в результате применения модели (9). Условия идентифицируемости такой системы известны. Единственная особенность связана со свойствами ζ . Предполагаем, что $u \in PE_\alpha$, где PE_α — свойство предельной невырожденности

$$PE_\alpha: u^2(t) \geq \alpha,$$

справедливо для $\exists \alpha > 0$ и $\forall t \geq t_0$ на некотором интервале $T > 0$.

Так как модель (9) является SM -идентифицирующей, то $\zeta \in PE_{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} > 0$. Матрица A является гурвицевой, поэтому $\text{Re} \lambda_i < 0$.

Для получения условия идентифицируемости рассмотрим передаточную функцию S_y

$$y = C^T(sI_q - A)^{-1}I\zeta, \quad (18)$$

где $I_q \in R^{q \times q}$ — единичная матрица, $s = d/dt$. Пусть $A \in R^{q \times q}$ является матрицей Фробениуса с вектором параметров $A_S \in R^q$, $A_S = [a_{s,1}, a_{s,2}, \dots, a_{s,q}]^T$. Разделим левую и правую части (18) на полином $v(s) = \prod_{i=1}^{q-1} (s + \mu_i)$, где $\mu_i > 0$. Тогда для y получим следующее идентификационное представление:

$$y(s) = s^{-1} \left\{ b_1 \zeta(s) - a_1 y(s) + \sum_{i=2}^q (b_i \zeta(s) + a_i y(s)) \frac{1}{s + \mu_i} \right\}. \quad (19)$$

Из соотношения (19) имеем следующее уравнение для y :

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -a_1 y + \sum_{i=2}^g (a_i p_{yi} + b_i p_{\zeta i}) + b_1 \zeta; \\ \dot{p}_{yi} &= -\mu_i p_{yi} + y, \quad \dot{p}_{\zeta i} = -\mu_i p_{\zeta i} + \zeta.\end{aligned}\quad (20)$$

Введя вектор $P = [y, p_{y2}, \dots, p_{yq}; \zeta, p_{\zeta 2}, \dots, p_{\zeta q}]^T$, получаем

$$\dot{y} = \bar{A}^T P, \quad \bar{A}^T = [-a_1, a_2, \dots, a_g; b_1, b_2, \dots, b_q], \quad (21)$$

где a_i и b_i зависят от параметров системы S_y .

Для (20) нетрудно получить представление в пространстве состояний. В отличие от представления S_y (10) здесь идет анализ в пространстве (ζ, y) . Покажем глобальную идентифицируемость (21). Рассмотрим систему

$$\dot{\hat{y}} = \hat{A}^T P, \quad \hat{A}^T = [-\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_g; \hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_q]. \quad (22)$$

Введем переменную $e = \hat{y} - y$ и из соотношений (21) и (22) получим

$$\dot{e} = -\hat{a}_1 e + \Delta A^T P,$$

где $\Delta A = \hat{A} - A$.

Рассмотрим критерий $V(e) = 0,5e^2$. Для $\dot{V}$ получим

$$\dot{V} = -\hat{a}_1 e^2 + e \Delta A^T P \leq -\frac{\hat{a}_1}{2} e^2 + \frac{1}{2\hat{a}_1} \Delta A^T P P^T \Delta A. \quad (23)$$

Из условия (23) следует, что $\Delta A = 0$, если вектор $P(t)$ является предельно невырожденным, т.е. $P(t) \in \mathcal{PE}_\sigma$, $\sigma > 0$.

Теорема 5. Система S_y является глобально идентифицируемой по выходу, если: 1) система S_ϕ является S -синхронизируемой; 2) S_y является управляемой; 3) вектор $P(t)$ является предельно невырожденным; 4) возмущение ζ является ограниченным и предельно невырожденным.

Доказательство теоремы 5 следует из выше изложенного.

Подход к оценке h_{δ_h} -идентифицируемости

Рассмотрим задачу построения интегрального показателя, который позволял бы на основе обработки множества I_N, g принимать решение об h_{δ_h} -идентифицируемости системы (5). Он должен быть основан на анализе свойств структуры S_{ey} .

В нелинейной динамике и теории фракталов для оценки показателя размерности структуры применяются подходы, основанные на принципе покрытия [27]. Предложены различные виды размерности. Одним из простейших показателей является топологическая размерность. Она оценивает геометрию структуры и не всегда отражает ее внутренние особенности. Аттракторы и фракталы часто являются неоднородными. Такие неоднородные фрактальные объекты называют мультифракталами [22]. S_{ey} -структуры динамических систем с многозначными нелинейностями являются примером неоднородных структур.

Различные показатели покрытия (корреляционная размерность, информационная размерность и т. п.) оценки размерности являются приближенными и трудоемкими [27]. Они не всегда дают оценку геометрического различия фрагментов структуры. Поэтому далее вводится интегральная характеристика структуры, которая представляет собой функцию распределения переменной e на множестве $\{y(t)\}$ [22]. Такой подход исключает различные априорные предположения относительно покрытия структуры локальными объектами. Суть предлагаемого подхода состоит в следующем.

Пусть для системы (5) получена структура S_{ey} . Выполним фрагментацию $S_{ey} = F_{S_{ey}}^l \cup F_{S_{ey}}^r$, где $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ — левая и правая части структуры S_{ey} . Фрагменты $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ описываются функциями $e^l(y), e^r(y)$, где $\{e^l\} \subseteq \{e\}, \{e^r\} \subseteq \{e\}$. Построим для $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ частотные функции распределения (гистограммы) $\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^r$. На основе $\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^r$ получим интегральные функции распределения $I\mathcal{H}^l, I\mathcal{H}^r$. Пусть $I_{\mathcal{H}} = \{i\Delta e, i = \overline{1, k}\}$ — область определения функций $\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^r$. Область значений функций $I\mathcal{H}^l, I\mathcal{H}^r$ представим в виде векторов

$$L(I\mathcal{H}^l) = [I\mathcal{H}_1^l, I\mathcal{H}_2^l, \dots, I\mathcal{H}_k^l]^T;$$

$$R(I\mathcal{H}^r) = [I\mathcal{H}_1^r, I\mathcal{H}_2^r, \dots, I\mathcal{H}_k^r]^T.$$

Здесь k — число карманов, заданных на $I_{\mathcal{H}}$; Δe — величина кармана по e . Применим модель

$$\hat{R} = a_H L(I\mathcal{H}^l) \quad (24)$$

и с помощью МНК определим параметр a_H .

Модель является адекватной, если параметр $a_H \in O(1)$, где $O(1)$ — окрестность 1. Если условие $a_H \in O(1)$ выполняется, то система (5) является h_{δ_h} -идентифицируемой и $S_{ey} \neq \mathcal{NS}_{ey}$. В противном случае структура S_{ey} является

незначимой и, следовательно, структурно неидентифицируемой.

Утверждение 1 [22]. Пусть для системы (5): 1) получена структура S_{ey} , которая имеет вид $S_{ey} = F_{S_{ey}}^l \cup F_{S_{ey}}^r$, где $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ — фрагменты структуры S_{ey} , определенные на множестве $\{y(t)\}$; 2) для $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ известны частотные $\mathcal{H}^l, \mathcal{H}^r$ и интегральные $\mathcal{I}\mathcal{H}^l, \mathcal{I}\mathcal{H}^r$ функции распределения; 4) зависимость между $R(\mathcal{I}\mathcal{H}^r)$ и $L(\mathcal{I}\mathcal{H}^l)$ имеет вид (24). Тогда система (5) является h_{δ_h} -идентифицируемой, если $a_H \in O(1)$.

Определение 10. Если система (5) является h_{δ_h} -идентифицируемой, то структура S_{ey} имеет размерность $DH_h = a_H \in O(1)$.

Определение 10 показывает, что если $u(t) \in S$, то размерность структурно идентифицируемой системы близка к 1. Такое значение DH_h говорит о том, что структура S_{ey} не имеет сложных участков, и фрагменты $F_{S_{ey}}^l, F_{S_{ey}}^r$ являются структурно идентичными или гомотетными. Если же $DH_h \notin O(1)$, то это может быть признаком $\mathcal{N}S_{ey}$ -структуры или системы с более сложной формой нелинейностью.

Результаты, полученные с помощью утверждения 1, можно дополнить гистограммным анализом структуры S_{ey} [21, 22].

Структурная идентификация нелинейных систем на основе иерархического погружения

Приведем постановку задачи структурной идентификации. Рассмотрим объект, описываемый уравнением

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= F(X, A, t) + Bu(t); \\ y(t) &= C^T X(t) + \xi(t), \end{aligned} \quad (25)$$

где $X \in R^m$ — вектор состояния; $F: R^m \times R^k \times J \rightarrow R^m$ — гладкая непрерывно дифференцируемая m -мерная вектор-функция; $t \in J \subset R$, $y \in R$ — выход объекта; $u \in R$ — вход; $A \in R^k$ — вектор параметров; $B \in R^m$, $\xi \in R$ — кусочно-непрерывное ограниченное возмущение, $C \in R^m$.

Для системы (25) известна априорная информация

$$I_a(X, S_S, G_S, u, \xi) \subset S_S \cup G_S \cup I_a^X \cup I_a^u \cup I_a^\xi, \quad (26)$$

которая представляет собой множество, содержащее доступную информацию о структуре вектор-функции $F \in S_S$, параметрах $(\bar{A}, B) \subset G_S$, а также о характеристиках входа I_a^u , выхода I_a^y и возмущения I_a^ξ .

Множество S_S может содержать информацию о классе операторов, описывающих динамику системы (25), а также некоторые их структурные параметры A_S . Мощность A_S определяется уровнем I_a . Как правило, в задачах идентификации формирование как S_S , так и A_S основано на опыте и интуиции исследователя. Учитывая неформализуемость S_S в (26), мощность подмножеств S_S, A_S может быть задана нечетко, а чаще всего является неопределенной. Это существенно усложняет процесс решения задачи структурной идентификации.

О системе (25) имеется экспериментальная информация

$$I_o = \{u(t), y(t), t \in J = [t_0, t_k]\}. \quad (27)$$

Относительно возмущения (помехи) ξ могут делаться различные предположения. Существенно то, что ξ является ограниченным.

Рассмотрим оператор $\hat{F}_i(\cdot) \in R^m$, являющийся претендентом на формирование структуры вектор-функции $\hat{F}(X, A, t)$ в системе (25). Считаем, что оператор $\hat{F}_i(\cdot) \in S_S$ и параметризован с точностью до пары $(\hat{A}_i, \hat{B}_i) \in A_S \subset S_S$. Для оценки качества выбранных кандидатов применим модель

$$\hat{X}(t) = \hat{F}(\hat{X}, \hat{A}, t) + \hat{B}u(t).$$

Задача: на основе имеющейся априорной I_a и экспериментальной I_o информации, применяя метод параметрической идентификации, оценить структуру вектор-функции F в системе (25) таким образом, чтобы минимизировать мощность множества S_S

$$\arg \min_{\hat{F}} \# S_S = F^*. \quad (28)$$

Выполнение критерия (28) эквивалентно следующему условию:

$$\arg \min_{(\hat{A}, \hat{B})} \# A_S = (A^*, B^*).$$

Здесь не конкретизируется класс методов параметрической идентификации, так как их вид зависит от элементов множества S_S . Выбор критерия идентификации $\# S_S$ отражает нестандартность и сложность рассматриваемой задачи.

Из приведенной постановки задачи видно, что проблема структурной идентификации является сложной и не поддается формализации на уровне I_a . Немаловажное значение имеет

опыт и интуиция исследователя. Поэтому вместо критерия (28) при решении прикладных задач часто используют интуитивные и эвристические подходы. Ниже излагается методика иерархического погружения (ИП) для решения задачи структурной идентификации. Рассматривается пример конкретной нелинейной системы, так как в общем случае невозможно адекватно априори описать множества S_S и A_S .

Рассматривается система с гистерезисом Бука—Вена [29]

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + F(x, z, t) &= f(t), \quad y = x, \\ F(x, z, t) &= \alpha kx(t) + (1 - \alpha)kdz(t); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\dot{z} = d^{-1}(a\dot{x} - \beta|\dot{x}||z|^n \text{sign} z - \gamma\dot{x}|z|^n), \quad (30)$$

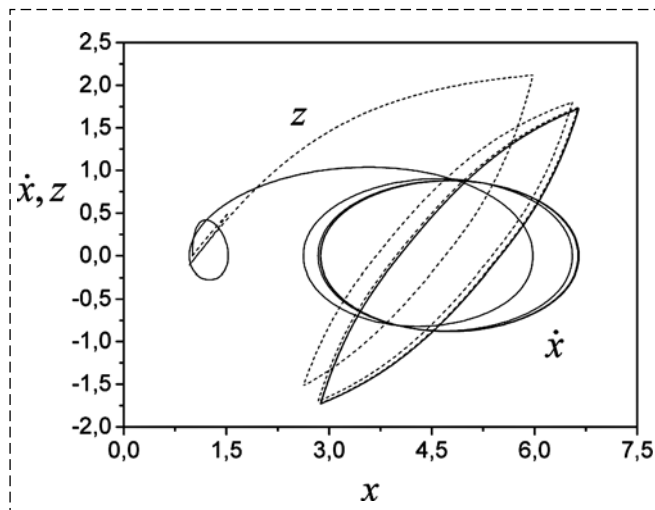


Рис. 1. Фазовый портрет и выход модели (30)
Fig. 1. Phase portrait and output of model (30)

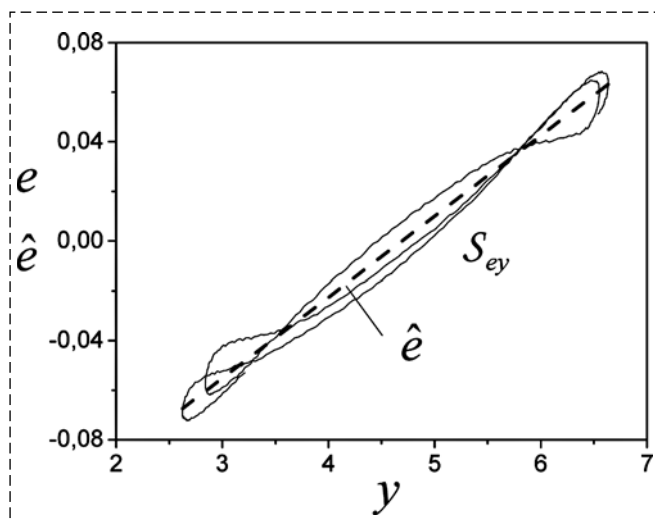


Рис. 2. Структура S_{ey}
Fig. 2. Framework S_{ey}

где $m > 0$ — масса; $c > 0$ — демпфирование; $F(x, z, t)$ — восстанавливающая сила; $d > 0$, $n > 0$, $k > 0$, $\alpha \in (0, 1)$; $f(t)$ — возбуждающая сила; α, β, γ — некоторые числа. Далее систему (29), (30) будем обозначать S_{BW} . Считаем, что известна информация I_o , а данные о структуре системы S_{BW} являются неполными. Необходимо оценить структурные составляющие модели Бука—Вена (30). Далее полагаем, что $n = 1,5$, $c = 2$, $m = 1$, $\beta = 0,5$, $\alpha = 0,7$, $k = 0,6$, $d = a = 1$. Возбуждающая сила $f(t) = 2 - 2\sin(0,15\pi t)$. Система S_{BW} моделировалась с начальными условиями: $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Применяя подход, изложенный в разделе "Метод построения S_{ey} -структур", получим структуру S_{ey} и фазовый портрет S (рис. 1, 2).

Модель (9) имеет вид

$$\dot{\hat{x}} = -0,199x + 0,471f. \quad (31)$$

На рис. 2 представлен выход модели $\hat{e}$, аппроксимирующей $e(t)$. Модель имеет вид

$$\gamma_{ey} = 0,033y - 0,153, \quad r_{ey}^2 = 0,983, \quad (32)$$

где $\gamma_{ey} = \hat{e}$ — секущая структуру S_{ey} ; r_{ey}^2 — коэффициент детерминации. Если сравнить рис. 1, 2, то можно заметить, что области определения z и e совпадают. Из рис. 2 следует, что S_{BW} -система является нелинейной.

Структурная идентифицируемость следует из теоремы 4 с $\delta_h = 0,002$. S_{BW} -система является S -синхронизируемой, а модель (31) — SM -идентифицирующей. Центр структуры S_{ey} $c_S = -0,001$. Секущие (11) имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_e^l &= 0,0313y - 0,146, \quad r_{ye,l}^2 = 0,912, \\ \gamma_e^r &= 0,032y - 0,15, \quad r_{ye,r}^2 = 0,926. \end{aligned} \quad (33)$$

Модели (33) структурно согласуются с (32). Эти результаты позволяют перейти к этапу оценки структурных составляющих модели Бука—Вена (МБВ) (30).

Найдем производную от $e(t)$, применив операцию численного дифференцирования. Так как эта процедура чувствительна к ошибкам вычисления, то выполним сглаживание $\dot{e}(t)$. Обозначим полученную переменную через $\varepsilon = \dot{e}$. Дальнейший анализ показал, что ε не зависит от x . Следовательно, ε может зависеть от $\dot{x}$ или z . Это был первый этап ИП.

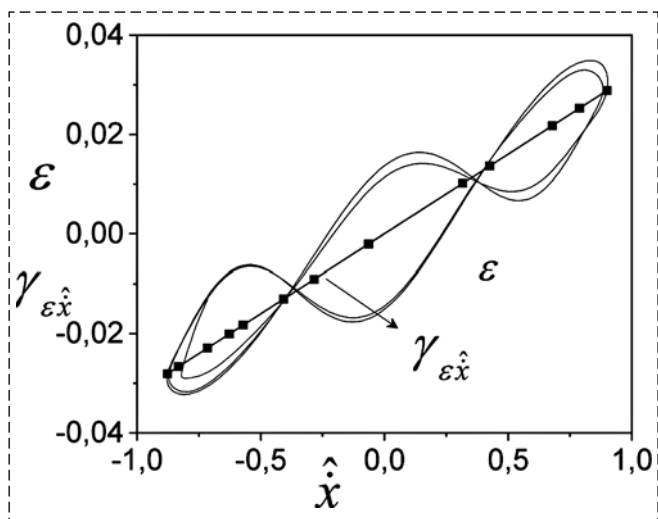


Рис. 3. Структура для оценки влияния производной выхода S_{BW} -системы

Fig. 3. Framework for evaluating impact $\hat{x}$ of S_{BW} -system

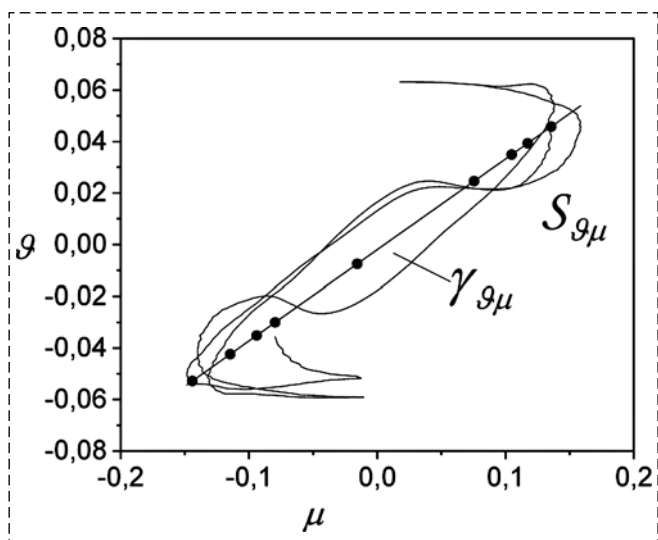


Рис. 4. Структура для оценки влияния переменной μ

Fig. 4. Framework for evaluating impact of variable μ

Рассмотрим структуру $S_{\epsilon \hat{x}}$, описываемую отображением $\Gamma_{\epsilon \hat{x}}: \hat{x} \rightarrow \epsilon$, где $\hat{x}$ — оценка производной $\dot{x}$ (второй этап ИП). Построим секущую γ_{ϵ} для $S_{\epsilon \hat{x}}$:

$$\gamma_{\epsilon \hat{x}} = 0,0324\hat{x}, r_{\epsilon \hat{x}}^2 = 0,86.. \quad (34)$$

Адекватность модели (34) отражает рис. 3. Рис. 3 и соотношение (34) подтверждают влияние $\dot{x}$ на свойства гистерезиса (30).

Следующий этап ИП сводится к определению связи между переменными z с ϵ . В качестве оценки z используем переменную e . В дальнейшем для нее будем использовать

обозначение $\hat{z} = e$. Анализ показывает, что между $\hat{z}$ и ϵ отсутствует линейная связь. Следовательно, может существовать корреляция между ϵ и комбинацией $\hat{z}$ и $\hat{x}$ (см. выше). Исключим влияние линейной составляющей по $\hat{x}$ на ϵ . Для этого сформируем переменную $\vartheta = \epsilon - \gamma_{\epsilon \hat{x}}$. Перейдем в пространство $\mathcal{P}_{\vartheta \mu}$, где $\mu = |\hat{z}|^h \hat{x}$, $h > 0$. Введение абсолютной величины связано с обеспечением действительного значения μ при $\hat{z} < 0$. Пример оценки связи на основе анализа структуры $S_{\vartheta \mu}$ показан на рис. 4, где $h = 0,5$. Структура $S_{\vartheta \mu}$ является h_{δ_h} -идентифицируемой.

Секущая $\gamma_{\vartheta \mu}$ структуры $S_{\vartheta \mu}$ имеет вид: $\gamma_{\vartheta \mu} = 0,354\mu$, $r_{\vartheta \mu}^2 = 0,82$, $h = 0,5$. Следует заметить, что выбор h может не соответствовать параметру n в выражение (30). Причина такого несоответствия следует из предлагаемого подхода. Истинные оценки для параметров модели Бука—Вена могут быть получены только на этапе параметрической идентификации.

Замечание 9. Для установления структурных связей можно в качестве выхода использовать секущую (34).

Справедливость предложенного подхода подтверждает рис. 5, который отражает взаимосвязь эталонной и полученной оценок гистерезиса. Секущая γ_{zz} структуру имеет вид

$$\gamma_{zz} = 0,033z - 0,0068, r_{zz}^2 = 0,836.$$

Итак, проведенный структурный анализ показал, что динамика гистерезиса зависит

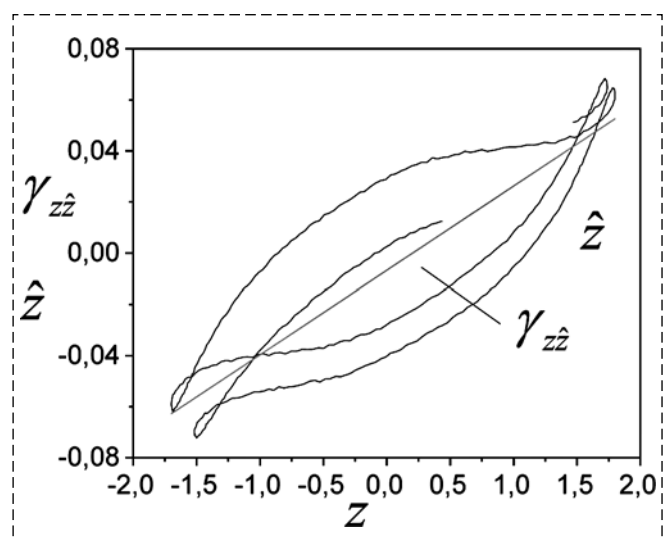


Рис. 5. Оценка близости z и $\hat{z}$

Fig. 5. Proximity evaluation z and $\hat{z}$

от переменных z и $\dot{x}$. Выход системы (29) непосредственно не влияет на изменение гистерезиса. Структурный анализ требует применения адекватного математического аппарата для принятия решений о структуре системы S_{BW} . Рассмотренный здесь подход представляет собой метод ИП в пространство состояния системы и его расширение.

Возникает вопрос: до какого этапа (уровня) может применяться метод ИП?

Рассмотрим информационное множество $I_i(I_0)$, на котором определена структура S_i , где i — уровень иерархического погружения. Примеры множеств $I_i(I_0)$ представлены выше. Там же рассмотрены соответствующие им структуры. Пусть $\mathcal{NS}_{i+1}$ является незначимой структурой [22]. Это значит, что на уровне $i + 1$ система является структурно неидентифицируемой.

Теорема 6. Система S_{BW} является структурно идентифицируемой на заданном информационном множестве $I_i(I_0)$ с помощью структуры S_i , если на уровне $i + 1$ $S_{i+1} = \mathcal{NS}_{i+1}$.

Утверждение теоремы 6 непосредственно следует из представленных выше результатов. Пример остановки метода иерархического погружения демонстрирует рис. 6, где представлена структура $S_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}$, где $\tilde{\mu} = |\hat{z}||\hat{x}|$, $\tilde{\varepsilon} = \vartheta - \gamma_{\vartheta}\tilde{\mu}$. Здесь же показана секущая структуру $S_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}$.

Если переменную $\tilde{\varepsilon}$ аппроксимировать на множестве $\{\hat{x}(t), \tilde{\mu}(t)\}$, т. е. получить модель $\hat{\tilde{\varepsilon}} = \hat{a}_1\tilde{\mu} + \hat{a}_2\hat{x}$, и ввести невязку $\tilde{\kappa} = \tilde{\varepsilon} - \hat{\tilde{\varepsilon}}$, то последующая аппроксимация $\tilde{\kappa}$ с помощью линейной модели, зависящей от переменной $\tilde{\mu}$,

дает основание сделать вывод, что эта связь является существенной (четвертый этап ИП). Тем самым этот вывод обосновывает наличие в уравнении (30) третьего слагаемого в правой части.

Заключение

Введено условие S-синхронизации нелинейной системы и показано, что его выполнение гарантирует структурную идентифицируемость системы. Получены условия структурной идентифицируемости нелинейной части системы. Эти условия основаны на анализе специального класса геометрических структур, отражающих состояние нелинейной части системы на каждом уровне их применения. Получены условия структурной идентифицируемости линейной части системы. Предложен метод структурной идентификации нелинейной части системы. Он представляет собой процедуру иерархического погружения, которая основана на синтезе геометрической структуры на каждом шаге погружения и последующем ее структурном анализе с целью установить зависимости, присущие нелинейной части системы. На каждом шаге этой процедуры проверяется условие структурной идентифицируемости геометрической структуры, а значит, и адекватность полученных структурных связей. Данная процедура реализована на примере нелинейной системы с гистерезисом Бука—Вена. Дана постановка задачи структурной идентификации.

Список литературы

1. Kalman R. E. On the general theory of control systems // Proceeding first IFAC Congress on Automatic Control. Moscow, 1960; Butterworths, London, 1961. Vol. 1. P. 481—492.
2. Lee R. C. K. Optimal estimation, identification, and control. Cambridge, Mass: MIT Press, 1964. 176 p.
3. Elgerd O. I. Control systems theory. N. Y.: McGraw-Hill, 1967. 562 p.
4. Walter E. Identifiability of state space models. Berlin. Germany: Springer-Verlag, 1982. 197 p.
5. Audoly S., D'Angio L., Saccomany M. P., Cobelli C. Global identifiability of linear compartmental models — a computer algebra algorithm // IEEE Trans. Automat. Contr. 1998. Vol. 45. P. 36—47.
6. Авдеев Т. В. Идентификация линейных динамических систем с использованием концепции сепараторов параметрического пространства // Автоматика и программная инженерия. 2013. № 1(3). С. 16—23.
7. Бодунов Н. А. Введение в теорию локальной параметрической идентифицируемости // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. № 2. 137 с.

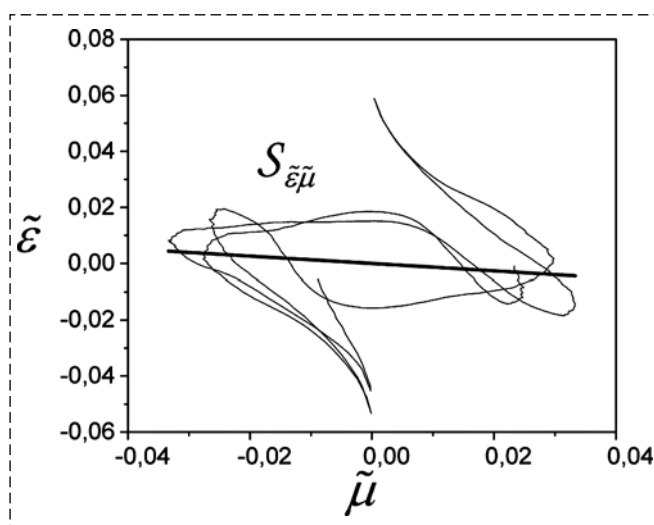


Рис. 6. Незначимая структура $S_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}$
Fig. 6. Insignificant framework $S_{\tilde{\varepsilon}\tilde{\mu}}$

8. Балонин Н. А. Теоремы идентифицируемости. СПб.: Изд-во "Политехника", 2010. 48 с.
9. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
10. Stigter J. D., Peeters R. L. M. On a geometric approach to the structural identifiability problem and its application in a water quality case study // Proceedings of the european control conference 2007 Kos, Greece, July 2—5. 2007. P. 3450—3456.
11. Chis O.-T., Banga J. R., Balsa-Canto E. Structural identifiability of systems biology models: a critical comparison of methods // PLOS ONE. Nov 2011. Vol. 6, Iss. 4. P. 1—16.
12. Saccomani M. P., Thomaseth K. Structural vs practical identifiability of nonlinear differential equation models in systems biology. Bringing mathematics to life // Dynamics of mathematical models in biology. Ed. A. Rogato, V. Zazzu, M. Guarracino. Springer. 2010. P. 31—42.
13. Villaverde A., Barreiro A., Papachristodoulou A. Structural identifiability of dynamic systems biology models // PLOS Computational Biology. 2016. Vol. 12, N. 10. P. 1—22.
14. Raue A., Karlsson J., Saccomani M. P., Jirstrand M., Timmer J. Comparison of approaches for parameter identifiability analysis of biological systems // Bioinformatic. 2014. Vol. 30, N. 10. P. 1440—1448.
15. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей: Справ. изд. / Под ред. С. А. Айвазяна. М.: Финансы и статистика, 1985. 487 с.
16. Busvelle E., Gauthier J.-P. New results on identifiability of nonlinear systems // 2nd IFAC symposium on system, structure and control. 2004. P. 8—10.
17. Lee R. C. K. Optimal estimation, identification, and control // MIT Press Observability and structural identifiability of nonlinear biological systems, Complexity. 2019. Vol. 2019. Article ID 8497093. 12 p.
18. Noh J., Lee S. On the identifiability conditions in some nonlinear time series model // Revstat — Statistical Journal. 2016. Vol. 14, N. 4. P. 395—413.
19. Villaverde A. F., Banga J. R. Structural properties of dynamic systems biology models: identifiability, reachability, and initial conditions // Processes 2017. Vol. 5, N. 29. P. 2—16.
20. Karabutov N. About structural identifiability of nonlinear dynamic systems under uncertainty // Global journal of science frontier research: A Physics and space science. 2018. Vol. 18, Iss. 11 (vers. 1.0). P. 51—61.
21. Karabutov N. Structural identification of dynamic systems with hysteresis // International journal of intelligent systems and applications. 2016. Vol. 8, N. 7. P. 1—13.
22. Karabutov N. Structural methods of design identification systems // In Nonlinearity problems, solutions and applications. Vol. 1. Ed. L. A. Uvarova, A. B. Nadykto, A. V. Latyshev. New York. Nova Science Publishers, Inc. 2017. P. 233—274.
23. Казаков И. Е., Доступов Б. Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1962. 278 с.
24. Фурасов В. Д. Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 248 с.
25. Karabutov N. Structural identification of nonlinear dynamic systems // International journal of intelligent systems and applications. 2015. Vol. 7, N. 9. P. 1—11.
26. Choquet G. L'enseignement de la geometrie. Paris: Hermann, 1964. 173 p.
27. Божок С. В., Паршин Д. А. Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 128 с.
28. Данилин А. Н., Кузнецова Е. Л., Курдюмов Н. Н., Рабинский Л. Н., Тарасов С. С. О модификации модели Бук—Вена для описания гистерезиса нестационарных процессов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 4. С. 187—199.
29. Ismail M., Ikhoulane F., Rodellar J. The hysteresis Bouc-Wen model, a survey // Arch Comput Methods Eng. 2009. Vol. 16. P. 161—188.

S-synchronization Structural Identifiability and Identification of Nonlinear Dynamic Systems

N. N. Karabutov, kn22@yandex.ru,

MIREA — Russian Technological University, Moscow, 119454, Russian Federation

*Corresponding author: Karabutov Nikolay N., DTS, Professor,
MIREA — Russian Technological University Moscow, 119454, Russian Federation,
e-mail: kn22@yande.ru*

Accepted on March 24, 2020

Abstract

An approach to the structural identifiability analysis of nonlinear dynamic systems under uncertainty is proposed. We have shown that S-synchronization is the necessary condition for the structural identifiability of a nonlinear system. Conditions are obtained for the design of a model which identifies the nonlinear part of the system. The method is proposed for the obtaining of a set which contains the information on the nonlinear part. A class of geometric frameworks which reflect the state of the system nonlinear part is introduced. Geometrical frameworks are defined on the synthesized set. The conditions are given for the structural indistinguishability of geometric frameworks on the set of S-synchronizing inputs. Local identifiability conditions are obtained for the nonlinear part. We are shown that a non-synchronizing input gives an insignificant geometric framework. This leads to a structural non-identifiability of the system nonlinear part. The method is proposed for the estimation of the structural identifiability the nonlinear part of the system. Conditions for parametric identifiability of the system linear part are obtained. We show that the structural identifiability is the basis for the structural identification of the system. The hierarchical immersion method is proposed for the estimation of nonlinear system structural parameters. The method is used for the structural identification of a system with Bouc-Wen hysteresis.

Keywords: framework, nonlinear dynamic system, structural identifiability, S-synchronizability, hierarchical immersion, structural identification, Bouc-Wen hysteresis

For citation:

Karabutov N. N. S-synchronization Structural Identifiability and Identification of Nonlinear Dynamic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol.21, no.6, pp. 323–336.

DOI: 10.17587/mau.21.323-336

References

1. **Kalman R. E.** On the general theory of control systems. *Proceeding first IFAC Congress on Automatic Control*, Moscow, 1960; Butterworths, London, 1961, vol. 1, pp. 481–492.
2. **Lee R. C. K.** Optimal estimation, identification, and control, Cambridge, Mass., MIT Press, 1964, 340 p.
3. **Elgerd O. I.** Control systems theory, N. Y., McGraw-Hill, 1967, 562 p.
4. **Walter E.** Identifiability of state space models, Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1982, 197 p.
5. **Audoly S., D'Angio L., Saccomani M. P., Cobelli C.** Global identifiability of linear compartmental models — a computer algebra algorithm, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1998, vol. 45, pp. 36–47.
6. **Avdeenko T. V.** Identification of linear dynamic systems with use parametrical space separators, *Automatics and program engineering*, 2013, no. 1(3), p. 16–23 (in Russian).
7. **Bodunov N. A.** Introduction to the theory of local parametrical identifiability, *Differential equations and management processes*, 2012, no. 2, 137 p. (in Russian).
8. **Balonin N. A.** Theorems of identifiability, St. Petersburg, Politekhnik publishing house, 2010 (in Russian).
9. **Krasovskiy A. A.** ed. Reference book on automatic control theory, Moscow, Nauka, 1987 (in Russian).
10. **Stigter J. D., Peeters R. L. M.** On a geometric approach to the structural identifiability problem and its application in a water quality case study, *Proceedings of the european control conference*, 2007, Kos, Greece, 2007, pp. 3450–3456.
11. **Chis O.-T., Banga J. R., Balsa-Canto E.** Structural identifiability of systems biology models: a critical comparison of methods, *PLOS ONE*, 2011, vol. 6, iss. 4, pp. 1–16.
12. **Saccomani M. P., Thomaseth K.** Structural vs practical identifiability of nonlinear differential equation models in systems biology. Bringing mathematics to life, *Dynamics of mathematical models in biology*. Ed. A. Rogato, V. Zazzu, M. Guarracino, Springer, 2010, pp. 31–42.
13. **Villaverde A., Barreiro A., Papachristodoulou A.** Structural identifiability of dynamic systems biology models, *PLOS Computational Biology*, 2016, vol. 12, no. 10, pp. 1–22.
14. **Raue A., Karlsson J., Saccomani M. P., Jirstrand M., Timmer J.** Comparison of approaches for parameter identifiability analysis of biological systems, *Bioinformatic*, 2014, vol. 30, no. 10, pp. 1440–1448.
15. **Aivazyan S. A., Yenyukov I. S., Meshalkin L. D.** Applied statistics. Study of relationships, Moscow, Finansy i statistika, 1985 (in Russian).
16. **Busvelle E., Gauthier J.-P.** New results on identifiability of nonlinear systems, *2nd IFAC symposium on system, structure and control*, 2004, pp. 8–10.
17. **Lee R. C. K.** Optimal estimation, identification, and control, *MIT Press Observability and structural identifiability of nonlinear biological systems, Complexity*, 2019, vol. 2019, Article ID 8497093, 12 p.
18. **Noh J., Lee S.** On the identifiability conditions in some nonlinear time series model, *Revstat-Statistical Journal*, 2016, vol. 14, no. 4, pp. 395–413.
19. **Villaverde A. F., Banga J. R.** Structural properties of dynamic systems biology models: identifiability, reachability, and initial conditions, *Processes*, 2017, vol. 5, no. 29, pp. 2–16.
20. **Karabutov N.** About structural identifiability of nonlinear dynamic systems under uncertainty // *Global journal of science frontier research: A Physics and space science*, 2018, vol. 18, iss. 11 (vers. 1.0), pp. 51–61.
21. **Karabutov N.** Structural identification of dynamic systems with hysteresis, *International journal of intelligent systems and applications*, 2016, vol. 8, no. 7, pp. 1–13.
22. **Karabutov N.** Structural methods of design identification systems, *Nonlinearity problems, solutions and applications. Vol. 1*, Ed. L. A. Uvarova, A. B. Nadykto, A. V. Latyshev, New York, Nova Science Publishers, Inc, 2017, pp. 233–274.
23. **Kazakov Y. E., Dostupov B. G.** Statistical dynamics of nonlinear automatic systems, Moscow, Fizmatgis, 1962, 278 p. (in Russian).
24. **Furasov V. D.** Stability of motion, estimation and stabilization, Moscow, Nauka, 1977, 248 p. (in Russian).
25. **Karabutov N.** Structural identification of nonlinear dynamic systems, *International journal of intelligent systems and applications*, 2015, vol. 7, no. 9, pp. 1–11.
26. **Choquet G.** L'enseignement de la geometrie, Paris, Hermann, 1964, 173 p.
27. **Bozhokin S. V., Parshin D. A.** Fractals and Multifractals, Moscow-Izhevsk, Scientific Publishing Centre Regular and Chaotic Dynamics", 2001, 128 p. (in Russian).
28. **Danilin A. N., Kuznetsova E. L., Kurdumov N. N., Rabin-sky L. N., Tarasov S. S.** A modified Bouc-Wen model to describe the hysteresis of non-stationary processes, *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2016, no. 4, pp. 187–199 (in Russian).
29. **Ismail M., Ikhoulane F., Rodellar J.** The hysteresis Bouc-Wen model, a survey, *Arch Comput Methods Eng*, 2009, vol. 16, pp. 161–188.