УДК 517.93 DOI: 10.17587/mau.18.327-330.

**Е. Ю. Колесниченко,** канд. физ.-мат. наук., науч. сотр., decstrela@mail.ru,
**В. Е. Павловский,** д-р физ.-мат. наук., проф., vlpavl@mail.ru,
Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, г. Москва,
**И. А. Орлов,** канд. физ.-мат. наук., i.orlov@keldysh.ru,
**А. П. Алисейчик,** канд. физ.-мат. наук., aliseychik@keldysh.ru,
Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, г. Москва,
**Д. А. Грибков,** студент, legovas@gmail.com, **А. В. Подопросветов,** студент, llecxis@gmail.com,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, г. Москва

# Математическая модель робота на омни-колесах, расположенных в вершинах прямоугольного треугольника[1]

*Рассмотрено управление роботами с тремя омни-колесами, представляющими собой платформу в виде прямоугольного треугольника. Исследуется функция управления и приведены явные формулы моментов сил, которые нужно приложить к колесам для движения вдоль заданной траектории. Рассмотрено два частных случая: поступательное движение и движение, когда продольная ось корпуса робота направляется по касательной к траектории, и робот, соответственно, поворачивается.*

***Ключевые слова:*** *омни-колесо, треугольная платформа, всенаправленное движение, мобильный робот, управление омни-роботом*

## Введение

Достаточно много работ посвящено роботам на трех омни-колесах [1—5], но в них в основном изучаются платформы в виде равносторонних треугольников. В настоящей работе рассматривается корпус робота в виде прямоугольного треугольника. В этом случае уравнения имеют более сложную форму. В данной работе изучается математическая модель такого робота и, в частности, исследуются моменты сил, которые нужно приложить к колесам для движения вдоль произвольной кривой. За счет омни-колес вдоль траектории можно двигаться разными способами. Здесь будут рассмотрены два случая: первый — это поступательное движение, когда робот не поворачивается в процессе перемещения; второй — это движение по касательной к выбранной криволинейной траектории, когда робот поворачивается в соответствии с кривизной траектории.

Цель исследования состоит в следующем. Группа описанных роботов может реализовать транспортирующую систему с различной конфигурацией общей транспортной платформы, для этого роботы должны соединяться сторонами (ребрами) своих корпусов. Для того чтобы образовывать общую платформу, например прямоугольник или ромб, требуется, чтобы у корпуса робота-агента был прямой угол.

Заметим здесь, что с общей точки зрения задача соединения треугольников в общую заданную фигуру (соответствующую грузу, который следует перевезти) является задачей замощения плоскости или части плоскости однотипными "плитками" [9], которая еще называется задачей укладки, упаковки или задачей о паркетах (см. также [9, 10]). Известно, что для плиток-треугольников эта задача имеет решение.

В данной работе построим базис управления роботами-агентами, с помощью которого в дальнейшем возможно будет решать задачу замощения.

## Кинематика

Проанализируем и опишем кинематику робота на трех омни-колесах. Пусть корпус представляет собой прямоугольный треугольник со сторонами $a$, $b$, $c$ (для определенности $c^2 = a^2 + b^2$), и колеса расположены в его вершинах. Оси колес направлены вдоль медиан треугольника (рис. 1).

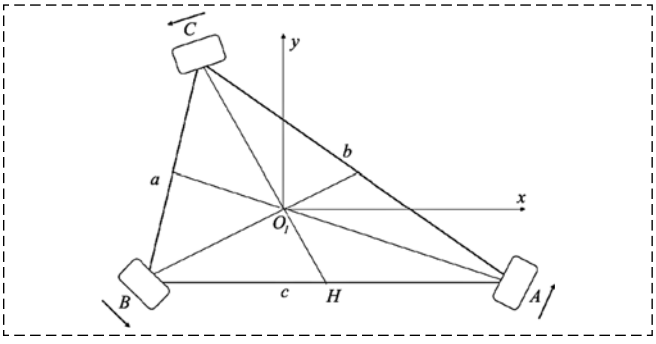


**Рис. 1. Треугольник с тремя омни-колесами**

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00131-а, № 16-08-00880-а, 16-29-04412-офи_м), РНФ (проект № 16-19-10705) и Программы № 29 фундаментальных исследований Президиума РАН "Актуальные проблемы робототехнических систем".

Геометрический центр треугольника (т. е. точка пересечения медиан) обозначим $O_1$, а центры колес — $A$, $B$, $C$. Свяжем с роботом систему координат $O_1xy$ так, чтобы ось $O_1x$ была параллельна стороне $AB$, как показано на рис. 1. Таким образом, координаты центров колес следующие:

$$A = \left(\frac{a^2 + 2b^2}{3c}; -\frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{3c}\right), B = \left(-\frac{2a^2 + b^2}{3c}; -\frac{a\sqrt{c^2 - a^2}}{3c}\right),$$

$$C = \left(-\frac{b^2 - a^2}{3c}; -\frac{2a\sqrt{c^2 - a^2}}{3c}\right).$$

Оси колес с осью $O_1x$ составляют углы $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$. Предполагается, что положительные угловые скорости вращают колеса против часовой стрелки, тогда

$$\alpha_1 = \pi - \arccos\frac{a^2 + 2b^2}{c\sqrt{4b^2 + a^2}};$$

$$\alpha_2 = \arccos\frac{2a^2 + b^2}{c\sqrt{4a^2 + b^2}}; \alpha_3 = -\arccos\frac{b^2 - a^2}{c\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Кроме того, на аппарат наложены связи [6, 7]:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}q_1 \\ \frac{d}{dt}q_2 \\ \frac{d}{dt}q_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} M \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ \omega \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\frac{d}{dt}q_i, i = 1, 2, 3,$ — угловые скорости колес; $r$ — радиус колес; $(v_x, v_y)$ — линейная скорость робота; $\omega$ — угловая скорость аппарата, матрица $M$ зависит от расположения колес.

Для робота, рассматриваемого в данной работе, матрица $M$ имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{ab}{c\sqrt{a^2 + 4b^2}} & -\frac{a^2 + 2b^2}{c\sqrt{a^2 + 4b^2}} & -\frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{3} \\ -\frac{ab}{c\sqrt{4a^2 + b^2}} & \frac{2a^2 + b^2}{c\sqrt{4a^2 + b^2}} & -\frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{3} \\ \frac{2ab}{c^2} & \frac{b^2 - a^2}{c^2} & -\frac{c}{3} \end{pmatrix}.$$

Для решения прямой задачи кинематики необходима обратная матрица:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a^3\sqrt{a^2 + 4b^2}}{3bc^3} & -\frac{b^3\sqrt{4a^2 + b^2}}{3ac^3} & -\frac{a^4 + 3a^2b^2 + b^4}{3abc^2} \\ -\frac{(b^2 + 3a^2)\sqrt{a^2 + 4b^2}}{6c^3} & \frac{(a^2 + 3b^2)\sqrt{4a^2 + b^2}}{6c^3} & \frac{b^2 - a^2}{6c^2} \\ -\frac{\sqrt{a^2 + 4b^2}}{2c^2} & -\frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2c^2} & -\frac{1}{2c} \end{pmatrix}.$$

## Динамика

Обозначим $q = (q_1, q_2, q_3)^{\text{т}}$, $z = (v_x, v_y, \omega)^{\text{т}}$.

Кинетическая энергия (она же лагранжиан в данной задаче) имеет следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} I_i\dot{q}_i^2,$$

где $m$ — полная масса аппарата; $v^2 = v_x^2 + v_y^2$; $I$ — полный момент инерции относительно точки $O_1$; $I_i$, $i = 1, 2, 3,$ — момент инерции $i$-го колеса относительно соответствующей оси колеса. Предполагаем, что колеса идентичны друг другу, поэтому $I_1 = I_2 = I_3$.

Используя уравнения Лагранжа с неопределенными множителями [8], получим уравнения динамики для данного аппарата:

$$\left(A + \frac{I_1}{r^2}M^{\text{т}}M\right)\dot{z} + \Gamma\omega z = -\frac{1}{r}M^{\text{т}}\mu,$$

где $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^{\text{т}}$ — вектор моментов сил, приложенных к колесам,

$$A = \operatorname{diag}\{m, m, I\}, \ \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -m & 0 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После подстановки матриц $A$, $M$ и $\Gamma$ последнее уравнение имеет следующий вид:

$$\left(I + \frac{I_1\left(2a^2 + 2b^2\right)}{3r^2}\right)\dot{\omega} =$$

$$= \frac{1}{3r}\left(\mu_1\sqrt{a^2 + 4b^2} + \mu_2\sqrt{4a^2 + b^2} + \mu_3\sqrt{a^2 + b^2}\right)$$

и имеет явное решение:

$$\omega = \frac{r}{3r^2I + I_1\left(2a^2 + 2b^2\right)} \times$$

$$\times\left(\sqrt{a^2 + 4b^2}\int_0^t \mu_1 dt + \sqrt{4a^2 + b^2}\int_0^t \mu_2 dt + \sqrt{a^2 + b^2}\int_0^t \mu_3 dt\right).$$

Моменты, необходимые для движения по заданной траектории $z(t)$:

$$\mu = -r\left(M^{\text{т}}\right)^{-1}\left(\left(A + \frac{I_1}{r^2}M^{\text{т}}M\right)\dot{z} + \Gamma\omega z\right). \tag{2}$$

Для свободного движения ($\mu(t) = 0$) первые интегралы: $\omega = \text{const}_1$ и

$$\left(m + \frac{I_1}{r^2}\left(M^{\text{т}}M\right)_{11}\right)v_x^2 + 2\frac{I_1}{r^2}\left(M^{\text{т}}M\right)_{12} v_x v_y +$$

$$+\left(m + \frac{I_1}{r^2}\left(M^{\text{т}}M\right)_{22}\right)v_y^2 = \text{const}_2.$$

Заметим, что матрица $(M^{\text{т}}M)$ — симметрическая и для данного расположения колес $(M^{\text{т}}M)_{13} = (M^{\text{т}}M)_{23} = 0$.

Для постоянных моментов исследуем стационарные движения. Для постоянной угловой скорости $\omega_0$ требуется условие $\mu_1\sqrt{a^2+4b^2}+$ $+\mu_2\sqrt{4a^2+b^2}+\mu_3\sqrt{a^2+b^2}=0$, иначе $\omega = \omega(t)$. Перепишем уравнения динамики:

$$A'\begin{pmatrix}\dfrac{d}{dt}v_x\\ \dfrac{d}{dt}v_y\end{pmatrix}+B'\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

где $A'=\begin{pmatrix} m+\dfrac{I_1}{r^2}(M^{\mathrm{T}}M)_{11} & \dfrac{I_1}{r^2}(M^{\mathrm{T}}M)_{12}\\ \dfrac{I_1}{r^2}(M^{\mathrm{T}}M)_{21} & m+\dfrac{I_1}{r^2}(M^{\mathrm{T}}M)_{22}\end{pmatrix}$;

$B'=\begin{pmatrix}0 & -m\omega_0\\ m\omega_0 & 0\end{pmatrix}$; $u_1$, $u_2$ — сокращенная для удобства запись правых частей уравнений динамики ($u_1$ и $u_2$ — постоянны). Стационарные решения: $v_x=\dfrac{u_2}{m\omega_0}$, $v_y=-\dfrac{u_1}{m\omega_0}$.

## Движение вдоль траекторий

Благодаря конструкции колес робот может двигаться вдоль заданной траектории различными способами. Два наиболее интересных — это поступательное движение и движение по касательной к кривой.

Сначала рассмотрим движение робота при условии, что он не вращается вокруг оси $O_1z$. Следовательно, $\omega = 0$. Предположим, что центр робота уже находится в некоторой точке кривой, а ось $O_1x$ составляет некоторый угол $\beta$ с некоторой постоянной осью $O\xi_1$. Согласно требованиям задачи угол $\beta$ должен оставаться постоянным. Тогда

$$v_x=\frac{d}{dt}\xi_1\cos\beta+\frac{d}{dt}\xi_2\sin\beta,$$

$$v_y=-\frac{d}{dt}\xi_1\sin\beta+\frac{d}{dt}\xi_2\cos\beta.$$

В эти выражения следует подставить уравнение траектории в параметрическом виде. Из выражения (2) находятся необходимые моменты для реализации данного движения.

Теперь рассмотрим движение робота вдоль кривой при условии, что в каждый момент времени ось $O_1x$ направлена по касательной к траектории. Тогда $\omega = kv$, где $k$ — кривизна траектории.

Предположим, что в начальный момент робот уже расположен так, что ось $O_1x$ и касательная к траектории совпадают. Тогда

$$v_x=\frac{d}{dt}\xi_1, v_y=\frac{d}{dt}\xi_2, \omega=k\sqrt{\frac{d}{dt}\xi_1^2+\frac{d}{dt}\xi_2^2}.$$

Моменты сил для такого типа движений также выражаются из соотношения (2).

## Управление

Чтобы проверить модель и учесть влияние возможного проскальзывания, был создан прототип робота на трех омни-колесах с электромоторами (рис. 2).

**Рис. 2. Прототип робота**

Главной целью прототипирования является синтез управления движения вдоль различных траекторий и сравнение результатов с результатами математического моделирования. Использование омни-колес упрощает кинематическую схему аппарата за счет того, что нет необходимости в сложных рулевых устройствах, при этом остается возможность управления криволинейным движением. Произвольное расположение колес позволяет обобщить теорию роботов всенаправленного движения. Аппаратная и программная архитектура системы управления мобильным роботом была разработана на основе микроконтроллера *STM32F4*. *MATLAB Simulink* был выбран в качестве среды моделирования и программирования системы управления. Для моделирования кинематики и динамики робота был использован программный комплекс "Универсальный механизм". Универсальная система низкоуровневого контроля для электродвигателей с обратной связью по датчикам для оценки возможного проскальзывания и датчикам угловых скоростей колес на основе эффекта Холла была разработана для многофункциональной мобильной платформы в виде блок-схем для многодоменного моделирования и модельного проектирования в *MATLAB Simulink*. Для получения обратной связи для корректировки позиционирования используется бортовая навигационная система. Навигация осуществляется с помощью маяков на основе ультразвуковых датчиков расстояния.

## Заключение

В статье описаны кинематика и динамика треугольного аппарата на омни-колесах. В работе приведены явные формулы моментов сил, необходимые для управления движением вдоль произвольной кривой. Тестирование таких систем управления предполагается на прототипе.


**Список литературы**

1. **Lin L., Shih H.** Modeling and Adaptive Control of an Omni-Mecanum-Wheeled Robot // Intelligent Control and Automation. 2013. Vol. 4, N. 2. P. 166—179.
2. **Taheri H., Qiao B., Ghaeminezhad N.** Kinematic Model of a Four Mecanum Wheeled Mobile Robot // International Journal of Computer Applications. 2015. Vol. 113, N. 3. P. 6—9.
3. **Williams R. L., Carter B. E., Gallina P., Rosati G.** Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. Vol. 18, Iss. 3. P. 285—293.
4. **Ashmore M., Barnes N.** Omni-drive Robot Motion on Curved Paths: The Fastest Path between Two Points Is Not a Straight-Line // Proc. of AI 2002: Advances in Artificial Intelligence, 15th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence Canberra, Australia, December 2—6. 2002. P. 225—236.
5. **Balakrishna R., Ghosal A.** Modeling of slip for wheeled mobile robots // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1995. Vol. 11, Iss. 1. P. 126—132.
6. **Gfrerrer A.** Geometry and kinematics of the Mecanum wheel // Comput. Aided Geom. Design. 2008. Vol. 25, N. 9. P. 784—791.
7. **Зобова А. А., Татаринов Я. В.** Динамика экипажа с роликонесущими колесами // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, № 1. С. 13—22.
8. **Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С.** Тележка с омни-колесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4 (Мобильные роботы). С. 785—801.
9. **Колмогоров А. Н.** Паркеты из правильных многоугольников // Квант. 1970. № 3.
10. **URL:** https://ru.wikipedia.org/wiki/Паркет_(геометрия).


# Mathematical Model of a Robot with Omni-Wheels Located at the Vertices of the Right Triangle


**E. Y. Kolesnichenko,** decstrela@mail.ru, **V. E. Pavlovsky,** vlpavl@mail.ru,
Keldysh Institute of Applied Mathematics Russian Academy of Sciences, Moscow 125047, Russian Federation,
**I. A. Orlov,** i.orlov@imash.ru, **A. P. Aliseychik,** aliseychik@imash.ru,
Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow 101990, Russian Federation,
**D. A. Gribkov**, legovas@gmail.com, **A. V. Podoprosvetov,** llecxis@gmail.com,
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russian Federation

*Corresponding author:* **Pavlovsky Vladimir E.,** Dr. Sc. in Physics and Mathematics, Professor, Chief Researcher, Head of Laboratory "Intelligence and mechatronics", Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences), Moscow, 125047, Russian Federation, e-mail: vlpavl@mail.ru, www.keldysh.ru



*Accepted on August 07, 2017*



*The article deals with control of a robot with three omni-wheels. The feature of this robot is the triangular platform with a right angle. The steering function is of special interest of the paper. The explicit formulae of moments applied to the wheels are obtained for the robot's movement along a specified trajectory for two particular cases. The first is forward motion, when the robot does not turn during the movement. The second is the tangential movement to the selected curvilinear trajectory, when the robot rotates according to the curvature of the trajectory. The purpose of the study is as follows. A group of described robots can implement a transport system with a different configuration of a common transport platform, for this, the robots connecte by the sides (ribs) of their bodies. In order to form a common platform — for example, a rectangle, or a rhombus, and it is required that the body of the robot agent has a right angle. We note here that, from a general point of view, the problem of connecting triangles to a common given figure (corresponding to transporting thing) is the task of tiling the plane, or part of the plane, with a repeating "pattern" [9], which is also called the tessellation, packing or the problem of parquet (see also [9, 10]). It is known that for triangular tiles this problem has a solution.*



***Keywords:*** *omni-wheels, triangular platform, omni-directional movement, mobile robot, omni-robot control*

**Acknowledgements.** This research is supported by RFBR (grants № 15-08-08769-a, № 16-01-00131-a, № 16-08-00880-a, 16-29-04412-ofi_m) and RSF (grant № 16-19-10705).

For citation:

**Kolesnichenko E. Y., Pavlovsky V. E., Orlov I. A., Aliseychik A. P., Gribkov D. A., Podoprosvetov A. V.** Mathematical Model of a Robot with Omni-Wheels Located at the Vertices of the Right Triangle, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 5, pp. 327—330.

DOI: 10.17587/mau.19.327-330



**References**

1. **Lin L. and Shih H.** Modeling and Adaptive Control of an Omni-Mecanum-Wheeled Robot, *Intelligent Control and Automation*, 2013, vol. 4, no. 2, pp. 166—179.
2. **Taheri H., Qiao B., Ghaeminezhad N.** Kinematic Model of a Four Mecanum Wheeled Mobile Robot, *International Journal of Computer Applications*, 2015, vol. 113, no. 3, pp. 6—9.
3. **Williams R. L., Carter B. E., Gallina P., Rosati G.** Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2002, vol. 18, iss. 3, pp. 285—293.
4. **Ashmore M., Barnes N.** Omni-drive Robot Motion on Curved Paths: The Fastest Path between Two Points Is Not a Straight-Line, *Proc. of AI 2002: Advances in Artificial Intelligence, 15th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence Canberra*, Australia, December 2—6, 2002, pp. 225—236.
5. **Balakrishna R., Ghosal A.** Modeling of slip for wheeled mobile robots, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1995, vol. 11, iss. 1, pp. 126—132.
6. **Gfrerrer A.** Geometry and kinematics of the Mecanum wheel. Comput, *Aided Geom. Design*, 2008, vol. 25. no. 9, pp. 784—791.
7. **Zobova A. A., Tatarinov Ya. V.** The dynamics of an omnimobile vehicle, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 8—15 (in Russian).
8. **Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S.** An omni-wheel vehicle on a plane and a sphere, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2011, vol. 7, no. 4, pp. 785—801 (in Russian).
9. **Kolmogorov A. N.** Parkety iz pravilnyh mnogougolnikov (Parquets from regular polygons), *Kvant*, 1970, no. 3 (in Russian).
10. Availaible at: https://ru.wikipedia.org/wiki/Parquet_(geometry) (in Russian).