

**А. В. Имангазиева**, канд. техн. наук, доц.,  
доцент кафедры "Высшая и прикладная математика", aliya111@yandex.ru,  
Астраханский государственный технический университет

## Синхронизация сети нелинейных объектов с запаздыванием по состоянию в условиях неопределенности<sup>1</sup>

*Предложены робастные алгоритмы синхронизации сети нелинейных объектов с запаздыванием по состоянию. Рассматривается сеть объектов управления, динамические процессы в которых описываются дифференциальными уравнениями в форме Лурье с липшицевыми нелинейностями, с учетом запаздывания по состоянию в условиях постоянно действующих внешних неконтролируемых возмущений. Учет нелинейных и запаздывающих составляющих в математических моделях объектов делает систему близкой к реальной. В каждом локальном объекте сети осуществляется слежение за выходом ведущей подсистемы. Динамическая компенсация возмущений в каждом из объектов осуществляется путем выделения сигнала, несущего информацию об этих возмущениях, а затем подавления его с помощью вспомогательного контура и двух наблюдателей переменных системы. Применение наблюдателей переменных обусловлено необходимостью получения оценок производных переменных системы, измерение которых недоступно. Таким образом выбранные структуры управлений в каждом из локальных объектов не только обеспечивают достижимость цели управления с требуемой точностью, но и позволяют за счет использования наблюдателей переменных системы существенно понизить порядок системы. Рассмотрен числовой пример синхронизации сети, состоящей из четырех нелинейных объектов управления с запаздыванием по состоянию в условиях неопределенности параметров их математических моделей и действия внешних ограниченных возмущений. Для сети объектов применены предложенные алгоритмы управления. Проведено численное моделирование в пакете Simulink MATLAB, приведены графики переходных процессов по ошибкам слежения для каждой из четырех подсистем. Результаты моделирования подтвердили теоретические выводы и показали хорошую работоспособность предложенных алгоритмов синхронизации в условиях постоянно действующих внешних и внутренних возмущений.*

**Ключевые слова:** сеть, робастное управление, липшицевы нелинейности, ограниченные возмущения, точность, запаздывание по состоянию, алгоритм управления, наблюдатель, вспомогательный контур

### Введение

Бурное развитие новых высокотехнологичных сетей в промышленности и производстве, электроэнергетике, а также транспортных сетей и т. д. требует эффективных решений задач управления сетями объектов в условиях априорной неопределенности и при действии на них внешних неконтролируемых возмущений. Краткий обзор областей применения систем управления сетями объектов представлен в работе [1]. В последние десятилетия исследователями по теории управления написано большое число работ по управлению сетями различных объектов. К числу обзорных работ по сетевому управлению относятся работы [2–5].

В большинстве исследований математические модели объектов управления содержат разного рода неточности, которые необходимо учитывать на этапе синтеза алгоритмов управления. Так, ограничения, связанные с наличием запаздывания в условиях постоянно действующих внешних возмущений,

ухудшают динамические свойства замкнутой системы управления. Запаздывание может быть вызвано самыми различными причинами: инерционностью некоторых элементов, ограниченностью скорости распространения сигнала, растянутостью изучаемого процесса во времени, временной задержкой и т. д. Как правило, динамические процессы в подобных системах описываются уравнениями с последействием. Предложены решения задач управления объектами с учетом различных видов запаздывания [6–11]. Так, например, с помощью  $H_\infty$ -теории предложено решение задачи синхронизации для объекта с дискретным и распределенным запаздыванием [6]. В монографии [7] с помощью метода вспомогательного контура [8] предложены решения задач робастного управления для различных объектов с последействием. Алгоритм управления линейными объектами с запаздывающим входным сигналом при наличии внешних возмущений предложен в статье [9]. В работе [10] синтезируется наблюдатель для нелинейного объекта с запаздыванием. В статьях 18-го конгресса IFAC, полностью посвященного управлению объектами с запаздыванием, представ-

<sup>1</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-08-00610.

лены результаты по этой проблеме, некоторые из которых изложены в работе [11].

В настоящей статье предлагается решение одной из задач сетевого управления, задачи робастной синхронизации сети нелинейных объектов с запаздыванием по состоянию. Предлагается решение поставленной задачи с использованием метода вспомогательного контура [8]. Динамическая компенсация возмущений в каждом из синхронизируемых объектов осуществляется с помощью выбранного специальным образом вспомогательного контура и наблюдателей переменных системы. Данная работа является развитием результата, полученного в работе [12]. Одним из главных достоинств алгоритма является то, что для его реализации не требуется измерения производных регулируемой переменной, а управляющее воздействие формируется на основании измеренного входа и выхода, а также переменных, получаемых с двух наблюдателей Халила [13].

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим сеть  $r$  объектов управления, динамические процессы в которых описываются уравнениями

$$Q_l(D)y_l(t) = k_l R_l(D)u_l(t) + N_l(D)y_l(t - h_l(t)) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q D^{n-i} \psi_{ijl}(y_l(t)) \tau_{jl} + f_l(t); \quad (1)$$

$$D^i y_l(0) = y_{il}, i = 0, \dots, n-1, l = \overline{1, r}.$$

где  $y_l(t)$ ,  $u_l(t)$  — скалярные регулируемые переменные и управляющие воздействия локальных объектов;  $D = d/dt$  — оператор дифференцирования;  $Q_l(D)$ ,  $R_l(D)$  — нормированные дифференциальные операторы;  $\deg Q_l(D) = n_l$ ,  $\deg R_l(D) = m_l$ ,  $\deg N_l(D) \leq n_l - 1$ ; время запаздывания  $h_l(t)$  — ограниченные функции;  $k_l > 0$ ,  $\psi_{ijl}(y_l(t))$  — гладкие функции, удовлетворяющие условию Липшица;  $\tau_{jl}$  — неизвестные постоянные ( $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, q}$ );  $f_l(t)$  — внешние возмущающие воздействия,  $l = \overline{1, r}$ .

Ведущая подсистема описывается уравнением

$$Q_m(D)y_m(t) = k_m g(t), \quad (2)$$

где  $g(t)$  — скалярное ограниченное задающее воздействие;  $k_m > 0$ ,  $y_m(t)$  — ограниченный скалярный выход,  $\deg Q_m(D) = n_l - m_l$ .

Требуется получить алгоритмы синхронизации, обеспечивающие выполнение следующих целевых условий:

$$|y_l(t) - y_m(t)| < \delta \text{ при } t \leq T, \quad (3)$$

где  $\delta$  — некоторое достаточно малое число,  $T > 0$ .

### Предположения:

1. Локальные подсистемы являются управляемыми.

2. Коэффициенты операторов  $Q_l(D)$ ,  $R_l(D)$ ,  $N_l(D)$ ,  $M_l(D)$  и величины  $k_l$  зависят от вектора неизвестных параметров  $\xi \in \Xi$ , где  $\Xi$  — известное множество возможных значений вектора  $\xi$ .

3. Время запаздывания  $h_l(t)$  — ограниченные функции, удовлетворяющие условиям  $\frac{dh_l(t)}{dt} < 1$ ,  $h_l(t) > 0$ ,  $l = \overline{1, r}$ .

4. Задающее воздействие  $g(t)$  и возмущающие воздействия  $f_l(t)$ ,  $l = \overline{1, r}$ , локальных объектов являются ограниченными функциями времени.

5. Полиномы  $R_l(\lambda)$ ,  $Q_m(\lambda)$ ,  $R_m(\lambda)$  — гурвицевы, где  $\lambda$  — комплексная переменная в преобразовании Лапласа;  $\deg R_l(D) = m_l$ ,  $\deg Q_l(D) = n_l$ ,  $\deg Q_m(D) = n_l - m_l$ .

6. Производные выходных переменных и управляющих воздействий не измеряются.

## 3. Решение задачи

Представим операторы  $Q_l(D)$  и  $R_l(D)$  в виде  $Q_l(D) = Q_{0l}(D) + \Delta Q_l(D)$ ,  $R_l(D) = R_{0l}(D) + \Delta R_l(D)$ , где  $Q_{0l}(D)$ ,  $R_{0l}(D)$  — операторы с известными коэффициентами, такие что полиномы  $Q_{0l}(\lambda)$ ,  $R_{0l}(\lambda)$  — гурвицевы и имеют порядки  $n_l$  и  $m_l$  соответственно. Так как  $Q_{0l}(\lambda)$  и  $R_{0l}(\lambda)$  — произвольные известные полиномы, то выберем их так, чтобы выполнялось равенство  $Q_{ml}(D) = Q_{0l}(D)/R_{0l}(D)$ .

Воспользуемся известной параметризацией [14]. Тогда уравнение (1) преобразуется в эквивалентное уравнение относительно выхода  $y_l(t)$ :

$$Q_{ml}(D)y(t) = k_l(u_l(t) + \frac{\Delta R_l(D)}{R_{0l}(D)}u_l(t) - \frac{\Delta Q_l(D)}{k_l R_{0l}(D)}y_l(t) + \frac{N_l(D)}{k_l R_{0l}(D)}y_l(t - h_l(t)) + \frac{1}{k_l R_{0l}(D)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q D^{n-i} \psi_{ijl}(y_l(t)) \tau_{jl} + \frac{1}{k_l R_{0l}(D)} f_l(t)). \quad (4)$$

Составим уравнение относительно ошибки  $e_l(t) = y_l(t) - y_{ml}(t)$ , вычитая уравнение (2) из соотношения (4):

$$Q_{ml}(D)e_l(t) = k_l(u_l(t) + \frac{\Delta R_l(D)}{R_{0l}(D)}u_l(t) - \frac{\Delta Q_l(D)}{k_l R_{0l}(D)}y_l(t) + \frac{N_l(D)}{k_l R_{0l}(D)}y_l(t - h_l(t)) + \frac{1}{k_l R_{0l}(D)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q D^{n-i} \psi_{ijl}(y_l(t)) \tau_{jl} + \frac{1}{k_l R_{0l}(D)} f_l(t) - \frac{k_{ml} g_l(t)}{k_l R_{0l}(D)}). \quad (5)$$

Сформируем управление, которое позволит компенсировать негативное действие возмущений в  $l$ -й подсистеме. В случае доступности измерения  $n_l - m_l - 1$  производных управляющего воздействия  $v_l(t)$  зададим закон управления  $u_l(t)$  в виде

$$u_l(t) = T_l(D)v_l(t), \quad l = \overline{1, r}. \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) примет следующий вид:

$$Q_{ml}(D)e_l(t) = k_l T_l(D) \left( v_l(t) + \frac{\Delta R_l(D)}{R_{0l}(D)} v_l(t) - \frac{\Delta Q_l(D)}{k_l R_{0l}(D) T_l(D)} y_l(t) + \frac{N_l(D)}{k_l R_{0l}(D) T_l(D)} y_l(t - h_l(t)) + \frac{1}{k_l R_{0l}(D) T_l(D)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q D^{n-i} \psi_{ijl}(y_l(t)) \tau_{jl} + \frac{1}{k_l R_{0l}(D) T_l(D)} f_l(t) - \frac{k_{ml} g_l(t)}{k_l R_{0l}(D) T_l(D)} \right), \quad l = \overline{1, r}. \quad (7)$$

Так как система проектируется в предположении, что доступны измерению только скалярные вход и выход, то закон управления зададим вместо уравнения (6) в виде

$$u_l(t) = T_l(D) \bar{v}_l(t), \quad l = \overline{1, r}, \quad (8)$$

где  $\bar{v}_l(t)$  — оценка сигнала, получаемая с наблюдателя [13]

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_l &= F_{0l} \zeta_l(t) + B_{0l}(v_l(t) - \bar{v}_l(t)), \\ \bar{v}_l(t) &= L_l \zeta_l(t), \quad l = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\zeta_l(t) \in R^{n_l - m_l}$ ;  $F_{0l}$  — матрица в форме Фробениуса с нулевой нижней строкой;  $L_l = [1, 0, \dots, 0]$ ;  $B_{0l}^T = \begin{bmatrix} b_{1l} \\ \mu \\ \dots \\ b_{n_l - m_l} \\ \mu^{n_l - m_l} \end{bmatrix}$ . Параметры  $b_1, \dots, b_{n_l - m_l}$  выбираются так, чтобы матрицы  $F_l = F_{0l} + B_l L$  были гурвицевыми,  $B_l^T = [b_{1l}, \dots, b_{n_l - m_l}]$ .

Подставив выражение (8) в уравнение (7), получим уравнение

$$Q_{ml}(D)e_l(t) = \beta_l T_l(D) R_{0l}(D) v_l(t) + \bar{\varphi}_l(t) + \beta_l T_l(D) R_{0l}(D) (v_l(t) - \bar{v}_l(t)), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_l(t) &= (k_l - \beta_l) v_l(t) + k_l \frac{\Delta R_l(D)}{R_{0l}(D)} v_l(t) - \\ &- \frac{\Delta Q_l(D)}{R_{0l}(D) T_l(D)} y_l(t) + \frac{N_l(D)}{R_{0l}(D) T_l(D)} y_l(t - h_l(t)) + \\ &+ \frac{1}{R_{0l}(D) T_l(D)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q D^{n-i} \psi_{ijl}(y_l(t)) \tau_{jl} + \\ &+ \frac{M_l(D)}{R_{0l}(D) T_l(D)} f_l(t) - \frac{k_{ml}}{R_{0l}(D) T_l(D)} g_l(t). \end{aligned}$$

Выберем в  $l$ -й локальном объекте полином  $T_l(\lambda)$  так, чтобы передаточная функция удовлетворяла равенству  $\frac{T_l(\lambda)}{Q_m(\lambda)} = \frac{1}{\lambda + a_{ml}}$ . Тогда уравнение (10) преобразуется к виду

$$(D + a_{ml})e_l(t) = \beta_l v_l(t) + \varphi_l(t), \quad (11)$$

где

$$\varphi_l(t) = \frac{1}{T_l(D)} \bar{\varphi}_l(t) + \beta_l (\bar{v}_l(t) - v_l(t)), \quad l = \overline{1, r}.$$

В сигнале  $\varphi_l(t)$  сконцентрировалась вся неопределенность параметров  $l$ -го локального объекта управления, информация о внешних возмущениях, нелинейностях, запаздывании.

Для компенсации негативного действия выделенного сигнала  $\varphi_l(t)$  в  $l$ -м локальном объекте воспользуемся методом вспомогательного контура [8].

Введем вспомогательный контур

$$(D + a_{ml})\bar{e}_l(t) = \beta_l v_l(t), \quad l = \overline{1, r}. \quad (12)$$

С учетом соотношений (11), (12) составим уравнение

$$(D + a_{ml})\zeta_l(t) = \varphi_l(t), \quad l = \overline{1, r}, \quad (13)$$

где  $\zeta_l(t) = y_l(t) - \bar{y}_l(t)$ ,  $\zeta_l(t)$  — рассогласование. Таким образом, если измерению доступны  $n_l - m_l - 1$  производные сигналов  $v_l(t)$  и первая производная регулируемой величины  $e_l(t)$ , то, сформировав  $v_l(t)$  в виде

$$v_l(t) = -\frac{1}{\beta_l} (D + a_{ml})\zeta_l(t), \quad l = \overline{1, r}, \quad (14)$$

получим, что закон управления (6), (14) обеспечивает асимптотическую устойчивость системы (1), (6), (14) по переменной  $e_l(t)$ , а уравнение замкнутой системы будет иметь вид  $(D + a_{ml}) \times e_l(t) = 0$ . Следовательно, из уравнения (5) имеем, что  $n_l - m_l$  производные сигнала  $e_l(t)$  стремятся к 0. Но для работоспособности системы

необходимо показать, что сигнал  $\varphi_l(t)$ ,  $l = \overline{1, r}$ , ограничен.

Итак, в случае возможности измерения перечисленных производных  $\varphi_l(t) = \frac{1}{T_l(P)} \bar{\varphi}_l(t)$  и из (14) имеем, что  $v_l(t) = -\frac{1}{\beta_l} \varphi_l(t)$ . Тогда

$$u_l(t) = -\frac{1}{\beta_l} ((k_l - \beta_l) u_l(t) + k_l \frac{\Delta R_l(D)}{R_{0l}(D)} u_l(t) - \frac{\Delta Q_l(D)}{R_{0l}(D)} y_l(t) + \frac{N_l(D)}{R_{0l}(D)} y_l(t - h_l(t)) + \frac{1}{R_{0l}(D)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q D^{n-i} \psi_{ijl}(y_l(t)) \tau_{jl} + \frac{1}{R_{0l}(D)} f_l(t) - \frac{k_{ml}}{R_{0l}(D)} g_l(t)). \quad (15)$$

Составляющие  $\frac{\Delta Q_l(D)}{R_{0l}(D)} y_l(t)$ ,  $\frac{N_l(D)}{R_{0l}(D)} y_l(t - h_l(t))$ ,  $\frac{1}{R_{0l}(D)} f_l(t)$  ограничены в силу гурвицевости полинома  $R_{0l}(\lambda)$  и условия  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_l(t) = 0$ . Так как сигнал  $y_l(t)$  ограничен,  $\psi_{ijl}(y_l(t))$  — гладкие функции, удовлетворяющие условию Липшица, то составляющая  $\frac{1}{R_{0l}(D)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q D^{n-i} \psi_{ijl}(y_l(t)) \tau_{jl}$  ограничена. Кроме того, задающее воздействие  $g(t)$  ограничено в силу предположения 4.

Разрешив уравнение (15) относительно  $u_l(t)$ , получим

$$u_l(t) = \left( -\frac{\Delta R_l(D)}{R_{0l}(D)} u_l(t) + \frac{\Delta Q_l(D)}{k_l R_{0l}(D)} y_l(t) - \frac{N_l(D)}{k_l R_{0l}(D)} y_l(t - h_l(t)) - \frac{1}{k_l R_{0l}(D)} \times \times \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q D^{n-i} \psi_{ijl}(y_l(t)) \tau_{jl} - \frac{1}{k_l R_{0l}(D)} f_l(t) + \frac{k_{ml}}{k_l R_{0l}(D)} g_l(t) \right). \quad (16)$$

Отсюда с учетом (4) получаем  $Q_{ml}(D) y_l(t) = 0$ , а из соотношения (15) имеем

$$u_l(t) = \frac{-R_{0l}(D)}{R_{0l}(D) + \Delta R_l(D)} = \left( \frac{\Delta Q_l(D)}{k_l R_{0l}(D)} y_l(t) - \frac{N_l(D)}{k_l R_{0l}(D)} y_l(t - h_l(t)) - \frac{1}{k_l R_{0l}(D)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q D^{n-i} \psi_{ijl}(y_l(t)) \tau_{jl} - \frac{1}{k_l R_{0l}(D)} f_l(t) + \frac{k_{ml}}{k_l R_{0l}(D)} g_l(t) \right).$$

Так как  $R_{0l}(D) + \Delta R_l(D) = R_l(D)$  — гурвицев полином, и  $n_l - m_l$  производные  $e_l(t)$  стремятся к нулю, то ограничен управляющий сигнал  $u_l(t)$ , а следовательно, сигналы  $\varphi_l(t)$ ,  $\bar{\varphi}_l(t)$ , переменная  $\zeta_l(t)$  и ее производная в силу (14).

В случае невозможности измерять необходимые производные сигнала  $\zeta_l(t)$  сигнал  $v_l(t)$  вместо (14) формируем в виде

$$v_l(t) = -\frac{1}{\beta_l} (D + a_{ml}) \bar{\zeta}_l(t), \quad l = \overline{1, r}, \quad (17)$$

где  $\bar{\zeta}_l(t)$  — оценка, получаемая с наблюдателя [13]

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\zeta}}_l &= \bar{F}_{0l} \bar{z}_l(t) + \bar{B}_{0l} (\zeta_l(t) - \bar{\zeta}_l(t)), \\ \bar{\zeta}_l(t) &= L_{l2} \bar{z}_l(t), \quad l = \overline{1, r}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $z_l(t) \in R^2$ , матрицы  $\bar{F}_{0l}$  и  $\bar{B}_{0l}$  — такие же, как в (9), но только соответствующих размерностей,  $L_2 = [1, 0]$ ,  $l = \overline{1, r}$ . В этом случае справедливо утверждение.

**Утверждение.** Пусть выполнены условия предположений 1—6, тогда для любого  $\delta > 0$  в условиях (3) существуют числа  $\mu_l > 0$ ,  $T > 0$  такие, что при  $\mu_l \leq \mu_{0l}$  и  $t \geq T$  для системы (1), (8), (9), (12), (17), (18) выполнены целевые условия (3) и все переменные в системе ограничены.

**Доказательство утверждения.** Введем в рассмотрение векторы

$$\begin{aligned} \sigma_l^T(t) &= (v_l(t), Dv_l(t), \dots, D^{n_l-m_l} v_l(t)), \\ z_{0l}^T &= [\zeta_l(t), D\zeta_l(t)] \end{aligned}$$

и нормированные векторы рассогласований

$$\bar{\eta}_l(t) = \Gamma_1(\sigma_l(t) - \xi_l(t)), \quad \bar{w}_l(t) = \Gamma_2(z_{0l}(t) - z_l(t)),$$

здесь  $\Gamma_{1l} = \text{diag}\{\mu_l^{n_l-m_l-1}, \dots, \mu_l, 1\}$ ,  $\Gamma_{2l} = \text{diag}\{\mu_l, 1\}$ . Тогда из соотношений (9) и (18) имеем

$$\begin{cases} \dot{\bar{\eta}}_l(t) = \frac{1}{\mu_l} F_l \bar{\eta}_l - b_{0l} D^{n_l-m_l} v_l(t); \\ \theta_l(t) = \mu_l^{n_l-m_l-1} L_l \bar{\eta}_l(t); \\ \dot{\bar{w}}_l(t) = \frac{1}{\mu_l} \bar{F}_l \bar{w}_l(t) - \bar{b}_{0l} D^2 \zeta_l(t); \\ \tau_l(t) = \mu_l L_{2l} \bar{w}_l(t), \quad l = \overline{1, r}, \end{cases} \quad (19)$$

где  $\bar{F}_l = \bar{F}_{0l} + \bar{B}_{0l} L_{l2}$ ,  $b_{l0}^T = [0, \dots, 1]$ ,  $\bar{b}_{0l}^T = [0, 1]$ ,  $L_{2l} = [1, 0]$ ,  $\theta_l(t) = v_l(t) - v_l(t)$ ,  $\tau_l(t) = \zeta_l(t) - \bar{\zeta}_l(t)$ ,  $l = \overline{1, r}$ .

Преобразуем уравнения (19) в эквивалентные уравнения относительно выходов  $\theta_l(t)$  и  $\tau_l(t)$ :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_l(t) = \frac{1}{\mu_l} F_l \eta_l(t) - b D v_l(t); \\ \theta_l(t) = \mu_l^{n_l-m_l-1} L_l \eta_l(t); \\ \dot{w}_l(t) = \frac{1}{\mu_l} \bar{F}_l w_l(t) - \bar{b}_l D \zeta_l(t); \\ \tau_l(t) = \mu_l L_{2l} w_l(t), \end{cases} \quad (20)$$

$$b_l^T = [1, 0, \dots, 0], \bar{b}_l^T = [1, 0], l = \overline{1, r}.$$

Уравнения (19) и (20) эквивалентны относительно выходов  $\theta_l(t)$  и  $\tau_l(t)$ , так как являются векторно-матричными формами одних и тех же уравнений:

$$\begin{aligned} \left( D^{n-m} + \frac{b_{l1}}{\mu_l} D^{n_l-m_l-1} + \dots + \frac{b_{n_l-m_l}}{\mu_l^{n_l-m_l}} \right) \theta_l(t) &= D^{n_l-m_l} v_l(t), \\ \left( D^2 + \frac{d_{1l}}{\mu_l} D + \frac{d_{2l}}{\mu_{l2}} \right) \tau_l(t) &= D^2 \zeta_l(t), \quad l = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

С учетом (6), (17) и (20) уравнение (11) примет вид

$$y_l(t) = -\mu_l L_{2l} w_l(t), l = \overline{1, r}. \quad (21)$$

Возьмем функцию Ляпунова

$$V_l(t) = \eta_l^T(t) H_l \eta_l(t) + w_l^T(t) H_{1l} w_l(t), l = \overline{1, r},$$

где положительно-определенные матрицы  $H_l$  и  $H_{1l}$  — решения уравнений

$$\begin{aligned} H_l F_l + F_l^T H_l &= -2\rho_{1l} I, \\ H_{1l} \bar{F}_l + \bar{F}_l^T H_{1l} &= -2\rho_{2l} I_l, \quad l = \overline{1, r}, \end{aligned}$$

и вычислим полную производную на траекториях системы (20):

$$\begin{aligned} \dot{V}_l(t) &= -2 \frac{\rho_{1l}}{\mu_l} |\eta_l(t)|^2 - 2 \frac{\rho_{2l}}{\mu_l} |w_l(t)|^2 - \\ &- 2 \eta_l^T(t) H_l D v_l(t) - 2 w_l^T(t) H_{1l} D \zeta_l(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Запишем уравнения (20) в виде

$$\begin{cases} \mu_{1l} \dot{\eta}_l(t) = F_l \eta_l(t) - \mu_{2l} b_l D v_l(t); \\ \mu_{1l} \dot{w}_l(t) = \bar{F}_l w_l(t) - \mu_{2l} \bar{b}_l D \zeta_l; \\ (D + a_{ml}) y_l = -\mu_{2l} (D + a_{ml}) L_{2l} w_l(t); \\ \mu_{1l} = \mu_{2l}, \quad l = \overline{1, r}. \end{cases} \quad (23)$$

Воспользуемся леммой [15].

**Лемма** [15]. Если система описывается уравнениями  $\dot{x} = f(x, \mu_1, \mu_2)$ ,  $x \in R^n$ ,  $\mu = \text{col}(\mu_1, \mu_2)$ ,  $f(x, \mu_1, \mu_2)$  — непрерывная функция, липшицева по  $x$ , и при  $\mu_2 = 0$  имеет ограниченную замкнутую область диссипативности  $\Omega = \{x/F(x) < C\}$ , где  $F(x)$  — положительно-определенная, непрерывная, кусочно-гладкая функция, то существует  $\mu_0 > 0$  такое, что при  $\mu_1 < \mu_0$  и  $\mu_2 < \mu_0$  исходная система имеет ту же область диссипативности  $\Omega$ , если для некоторых чисел  $C > 0$ ,  $\bar{\mu}_1 > 0$ ,  $\mu_2 = 0$  выполнено условие

$$\sup_{|\mu_1| \leq \bar{\mu}_1} \left( \left( \frac{\partial F(x)}{\partial x} \right)^T, f(x, \mu_1, 0) \right) \leq -C, F(x) = C.$$

В данном случае, если  $\mu_{2l} = 0$  в (23), то это равносильно тому, что все производные измеряются, и добавляются две экспоненциально устойчивые системы  $\mu_{1l} \dot{\eta}_l(t) = F_l \eta_l(t)$ ,  $\dot{w}_l(t) = \bar{F}_l w_l(t)$ . Как уже доказано, в этом случае все переменные в системе ограничены, и условия леммы выполнены. Иными словами, в области  $\Omega$   $y_l(t) \rightarrow 0$ ,  $|v_l(t)| < k_{1l}$ ,  $|\zeta_l(t)| < k_{2l}$ , а из (8) и (15) следует, что  $|D \zeta_l(t)| < k_{3l}$ ,  $|D v_l(t)| < k_{4l}$ , где  $k_{1l}$ ,  $k_{2l}$ ,  $k_{3l}$ ,  $k_{4l}$  — некоторые положительные константы. Покажем, что в случае  $\mu_{2l} \neq 0$ , а точнее при  $\mu_{1l} < \mu_{0l}$  и  $\mu_{2l} < \mu_{1l}$  областью диссипативности будет  $\Omega_l$ .

Положим в системе (23)  $\mu_{1l} = \mu_{2l} = \mu_l$  и, подставив их в (22), воспользуемся оценками

$$\begin{aligned} -2 \eta_l^T(t) H_l D v_l(t) &\leq \frac{1}{\mu_l} |\eta_l(t)|^2 + \mu_l \|H_l\| |D v_l(t)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\mu_l} |\eta_l(t)|^2 + \mu_l \|H_l\| k_{3l}; \\ -2 w_l^T(t) H_{1l} D \zeta_l(t) &\leq \frac{1}{\mu_l} |w_l(t)|^2 + \mu_l \|H_{1l}\| k_{4l}, \\ l &= \overline{1, r}. \end{aligned}$$

Подставив эти оценки в соотношение (22), получим неравенство

$$\begin{aligned} \dot{V}_l(t) &\leq -\frac{\rho_{1l}}{\mu_l} |\eta_l(t)|^2 - \frac{\rho_{2l}}{\mu_l} |w_l(t)|^2 - \frac{1}{\mu_l} (\rho_{1l} - 1) |\eta_l(t)|^2 - \\ &- \frac{1}{\mu_l} (\rho_{2l} - 1) |w_l(t)|^2 + \mu_l (\|H_l\| k_{3l} + \|H_{1l}\| k_{4l}), \\ l &= \overline{1, r}. \end{aligned}$$

Выбрав  $\rho_{1l} > 1$  и  $\rho_{2l} > 1$ , получим

$$\dot{V}_l(t) \leq -\frac{\rho_{1l}}{\mu_l} |\eta_l(t)|^2 - \frac{\rho_{2l}}{\mu_l} |w_l(t)|^2 + \mu_l \beta_l, \quad (24)$$

где  $\beta_l = \|H_l\| k_{3l} + \|H_{1l}\| k_{4l}$ , откуда следует

$$\dot{V}_l(t) \leq -\beta_{1l}V_l(t) + \mu_l\beta_l, \quad (25)$$

где  $\beta_{1l} = \min \left\{ \frac{\rho_{1l}}{\mu_l \bar{\lambda}(H_{1l})}; \frac{\rho_{2l}}{\mu_l \bar{\lambda}(H_{1l})} \right\}$ ,  $\bar{\lambda}(\cdot)$  — максимальное собственное число соответствующей матрицы. Из условия (25) имеем  $V_l(t) \leq \frac{\mu_l \beta_l}{\beta_{1l}}$ .

Принимая во внимание неравенство  $|w_l(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_l(H_{1l})} V_l(t) \leq \frac{\mu_l \beta_l}{\beta_{1l}}$ , из третьего уравнения (23) имеем  $|y_l(t)| \leq \mu_l |w_l(t)| \leq \mu_l \sqrt{\frac{\mu_l \beta_l}{\beta_{1l}}}$ .

Отсюда видно, что для любых  $\delta > 0$  в условии (3) существует  $\mu_{0l}$  такое, что целевое условие (3) будет выполнено.

#### 4. Числовой пример

Рассмотрим сеть, состоящую из четырех объектов управления, динамические процессы в которых описываются нелинейными дифференциальными уравнениями с запаздыванием по состоянию:

$$\begin{aligned} & (D^4 + a_{1l}D^3 + a_{2l}D^2 + a_{3l}D + a_{4l})y_{1l}(t) = \\ & = (b_{0l}D + b_{1l})u_1 + (c_{1l}D^3 + c_{2l}D^2 + c_{3l}D + c_{4l})f_l(t) + \\ & + (d_{1l}D^3 + d_{2l}D^2 + d_{3l}D + d_{4l})\varphi_{1l}(y_l(t)) + \\ & + (n_{1l}D^3 + n_{2l}D^2 + n_{3l}D + n_{4l})y_l(t - h_l) + \\ & + (m_{1l}D^3 + m_{2l}D^2 + m_{3l}D + m_{4l})\varphi_{2l}(y_l(t)), \quad l = \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

Задача синхронизации четырех локальных объектов, как отмечено в предположении 2, решается в условиях параметрической неопределенности. Класс неопределенности задан следующими неравенствами:  $2 \leq a_{ql} \leq 8$ ,  $20 \leq b_{0l} \leq 50$ ,  $26 \leq b_{1l} \leq 50$ ,  $26 \leq c_{ql} \leq 50$ ,  $l, q = \overline{1, 4}$ . Уравнение ведущей подсистемы имеет вид:  $(D + 3)^3 y_m(t) = 81g(t)$ . Следуя предложенным в данной работе алгоритмам управления, выберем:

- полином  $T(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$ ,  $\beta = 50$ ,  $\mu = 0,01$ ,  $a_m = 3$ ;
- вспомогательные контуры (12) в виде  $(D + 3)\bar{e}_l(t) = 50v_l(t)$ ,  $l = \overline{1, 4}$ ;
- уравнения наблюдателей (9) и (18) в виде

$$\begin{cases} \dot{\varsigma}_{1l}(t) = \varsigma_{2l}(t) + \frac{6}{\mu_l}(v_l(t) - \varsigma_{1l}(t)); \\ \dot{\varsigma}_{2l}(t) = \frac{8}{\mu_l^2}(v_l(t) - \varsigma_{1l}(t)); \\ \bar{v}_l(t) = \varsigma_{1l}(t), \quad l = \overline{1, 4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_l(t) = \frac{3}{\mu_l}(\zeta_l(t) - z_l(t)); \\ \bar{\zeta}_l(t) = z_l(t), \quad l = \overline{1, 4}; \end{cases}$$

- управляющие воздействия (8) и (17) в виде

$$\begin{aligned} u_l(t) &= \varsigma_{1l}(t) + 6\varsigma_{2l}(t) + 9\dot{\varsigma}_{2l}(t); \\ v_l(t) &= -\frac{1}{50}(3\zeta_l(t) + \dot{z}_l(t)), \quad l = \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

Моделирование предложенных алгоритмов управления осуществлено в пакете Simulink среды MATLAB для сети четырех объектов управления, математические модели которых представлены в виде:

$$\begin{aligned} & (D^4 + 2D^3 + 2D^2 + 2D + 2)y_1(t) = \\ & = (40D + 26)u_1 + (2D^3 + 2D^2 + 2D + 2)f_1(t) + \\ & + (2D^3 + 4D^2 + 6D + 1)\sin(|y_1(t)|) + \\ & + (4D^3 + 3D^2 + 3D + 3)y_1(t - 1) + \\ & + (2D^3 + 4D^2 + 6D + 1)\ln^2(1 + 4|y_1(t)|); \end{aligned}$$

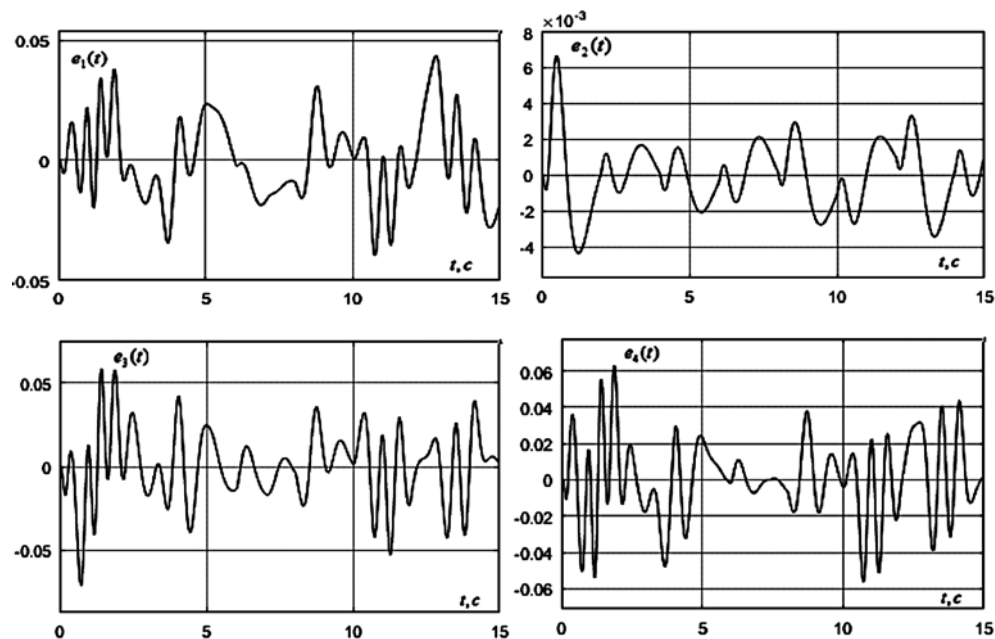
$$\begin{aligned} & (D^4 + 3D^3 + 3D^2 + 3D + 3)y_2(t) = \\ & = (26D + 35)u_2 + (2D^3 - 2D^2 + 8D - 2)f_2(t) + \\ & + (4D^3 + 3D^2 + 3D + 3)\ln^2(1 + 2|y_2(t)|) + \\ & + (2D^3 + 4D^2 + 6D + 1)y_2(t - 8); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (D^4 + 10D^3 + 10D^2 + 10D + 10)y_3(t) = \\ & = (26D + 35)u_3 + (2D^3 - 2D^2 + 8D - 2)f_3(t) + \\ & + (2D^3 + 4D^2 + 6D + 1)\sin(3|y_3(t)|) + \\ & + (2D^3 + 4D^2 + 6D + 1)y_3(t - 3) + \\ & + (4D^3 + 3D^2 + 3D + 3)\ln(2 + |y_3(t)|); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (D^4 + 5D^3 + 5D^2 + 5D + 5)y_4(t) = \\ & = (26D + 35)u_4 + (2D^3 + 2D^2 - 2)f_4(t) + \\ & + (4D^3 + 3D^2 + 3D + 3)\ln^2(1 + 4|y_4(t)|) + \\ & + (2D^3 + 4D^2 + 6D + 1)y_4(t - 1). \end{aligned}$$

На рисунке представлены переходные процессы по ошибкам синхронизации  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$ ,  $e_4(t)$ .

Точность  $\delta = 0,06$  получена при задающем воздействии  $g(t) = 81\sin 3t$  и возмущающих воздействиях:  $f_1(t) = 10\sin 1,7t$ ;  $f_2(t) = \sin 1,7t$ ;  $f_3(t) = 3\sin t$ ;  $f_4(t) = 2\sin 5t$ ;  $f(t) = 3\sin 1,7t$ . Начальные условия нулевые.



Переходные процессы по ошибкам синхронизации  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$ ,  $e_4(t)$   
 Transients of synchronization errors  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$ ,  $e_4(t)$

## Заключение

В работе рассмотрен один из возможных подходов к построению робастной системы синхронизации сети нелинейных объектов управления с запаздыванием по состоянию с компенсацией параметрической неопределенности и внешних ограниченных возмущений. В каждом из синхронизируемых локальных объектов используются вспомогательный контур [8] и два наблюдателя [13] производных сигналов системы. С учетом оценок возмущений формируются управляющие воздействия, которые обеспечивают достижимость цели управления с заданной точностью. Результаты численного моделирования в пакете Simulink среды MATLAB подтвердили теоретические выводы и показали хорошую работоспособность системы синхронизации.

## Список литературы

1. Кузнецов А. В. Краткий обзор многоагентных моделей // УБС. 2018. № 71. С. 6—44.
2. Fax J. A., Murray R. M. Information flow and cooperative control of vehicle formations // IEEE Trans. Autom. Control. 2004. Vol. 49, N. 9. P. 1465—1476.
3. Olfati-Saber R., Murray R. M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays // IEEE Trans. Autom. Control. 2004. Vol. 49, N. 9. P. 1520—1533.

4. Liu K., Selivanov A., Fridman E. Survey on Time-delay Approach to Networked Control // Annual Reviews in Control. 2019.
5. Проскурников А. В., Фрадков А. Л. Задачи и методы сетевого управления // АиТ. 2016. № 10. С. 3—39.
6. Karimi H. R. Robust Adaptive  $H_\infty$  Synchronization of Master-Slave Systems with Discrete and Distributed Time-Varying Delays and Nonlinear Perturbations // Preprint 18 IFAC Word Congr. 2011. P. 302—307.
7. Цыкунов А. М. Робастное управление объектами с последействием. М.: Физматлит, 2014. 301 с.
8. Цыкунов А. М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // АиТ. 2007. № 7. С. 103—115.
9. Фуртат И. Б., Гущин П. А. Алгоритм управления объектами с запаздывающим входным сигналом на базе субпредикторов регулируемой величины и возмущения // АиТ. 2019. № 2, С. 3—23.
10. Hassan L., Zemouche A., Boutayeb M.  $H_\infty$  Unknown input observers design for a class of nonlinear time-delay systems // Preprint 18 IFAC Word Congr. 2011. P. 3879—3884.
11. Witrant E., Fridman E., Senane O., Dugard L. Recent results on time-delay systems: Analysis and control // Springer: Advances in delays and dynamics. 2016.
12. Имангазиева А. В., Цыкунов А. М. Робастное управление линейным динамическим объектом с запаздыванием по состоянию // Мехатроника, автоматизация, управление. 2007. № 12. С. 2—6.
13. Atassi A. N., Khalil H. K. Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1999. V. 44, N. 9. P. 1672—1687.
14. Feuer A., Morse A. S. Adaptive control of single-input, single-output linear systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 1978. Vol. 23, № 4. P. 557—569.
15. Брусин В. А. Об одном классе сингулярно-возмущенных адаптивных систем // АиТ. 1995. № 4. С. 119—128.

# Synchronization of a Network of Nonlinear Plants with Time Delay as in Condition Under Uncertainty

A. V. Imangazieva, aliya111@yandex.ru,

Astrakhan State Technical University, Astrakhan, 414025, Astrakhan Branch, Russian Federation,

Corresponding author: **Imangazieva Aliya V.**, PhD, Associate Professor, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, 414025, Astrakhan Branch, Russian Federation, e-mail: aliya111@yandex.ru

Accepted on August 11, 2019

## Abstract

Robust algorithms for synchronizing a network of nonlinear plants with time delay are proposed. A network of control plants in the Lurie form with Lipschitz nonlinearities is considered taking into account the time delay under the conditions of constantly operating external uncontrolled disturbances. Taking into account nonlinear and delayed components in mathematical models of plants makes the system close to real. In each local network plant, the input of the leading subsystem is monitored. Dynamic compensation of disturbances in each of the plants is carried out by extracting a signal that carries information about these disturbances, and then suppressing it using an auxiliary circuit and two observers of the system variables. The use of variable observers is due to the need to obtain estimates of the derivatives of the system variables, the measurement of which is not available. A numerical example of the synchronization of a network consisting of four nonlinear control plants with a delay in state under conditions of uncertainty of the parameters of their mathematical models and the action of external bounded disturbances is considered. For the network of plants, the proposed control algorithms are applied. The numerical simulation in the Simulink Matlab package was carried out, the graphs of transient processes for tracking errors for each of the four subsystems are presented. The simulation results confirmed the theoretical conclusions and showed good performance of the proposed synchronization algorithms in the conditions of constantly operating external and internal disturbances.

**Keywords:** network, robust control, Lipschitz nonlinearities, bounded perturbations, accuracy, time delay, control algorithm, observer, auxiliary circuit.

**Acknowledgement:** The study was carried out with the financial support of the Russian Federal Property Fund in the framework of the scientific project No. 20-08-00610.

For citation:

**Imangazieva A. V.** Synchronization of a Network of Nonlinear Plants with Time Delay as in Condition Under Uncertainty, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, vol. 20, no. 5, pp. 266—273.

DOI: 10.17587/mau.21.266-273

## References

1. **Kuznetsov A. V.** Brief review of multi-agent models // UBS, 71 (2018), pp. 6—44 (in Russian).
2. **Fax J. A., Murray R. M.** Information flow and cooperative control of vehicle formations, *IEEE Transaction Automatic Control*, 2004, vol. 49, no. 9, pp. 1465—1476.
3. **Olfati-Saber R., Murray R. M.** Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays, *IEEE Transaction Automatic Control*, 2004, vol. 49, no. 9, pp. 1520—1533.
4. **Liu K., Selivanov A., Fridman E.** Survey on Time-delay Approach to Networked Control, *Annual Reviews in Control*, 2019.
5. **Proskurnikov A. V., Fradkov A. L.** Tasks and methods of network management *Avtomatika i upravleniye*, 2016, no. 10, pp. 3—39 (in Russian).
6. **Karimi H. R.** Robust Adaptive  $H_\infty$  Synchronization of Master-Slave Systems with Discrete and Distributed Time-Varying Delays and Nonlinear Perturbations, *Preprint 18 IFAC Word Congress*, 2011, pp. 302—307.
7. **Tsykunov A. M.** Robust control of plants with aftereffect, Moscow, Fizmatlit, 2014, pp. 301 (in Russian).
8. **Tsykunov A. M.** Robust control for one class of nonlinear plants with distributed delay, *Problemy upravleniya*, 2016, no. 3, pp. 16—22 (in Russian).
9. **Tsykunov A. M.** Robust control algorithms with compensation of bounded disturbances, *Avtomatika i upravleniye*, 2007, no. 7, pp. 103—115 (in Russian).
10. **Furtat I. B., Gushchin P. A.** The control algorithm for objects with a delayed input signal based on sub-predictors of controlled magnitude and disturbance, *Avtomatika i upravleniye*, 2019, no. 2, pp. 3—23 (in Russian).
11. **Hassan L., Zemouche A., Boutayeb M.**  $H_\infty$  Unknown input observers design for a class of nonlinear time-delay systems, *Preprint 18 IFAC Word Congress*, 2011, pp. 3879—3884.
12. **Witrant E., Fridman E., Sename O., Dugard L.** Recent results on time-delay systems: Analysis and control, *Springer: Advances in delays and dynamics*, 2016.
13. **Imangazieva A. V., Tsykunov A. M.** Robust control of a linear dynamic plant with time delay, *Mekhatronika, avtomatizatsiya*, 2007, no. 12, pp. 2—6 (in Russian).
14. **Atassi A. N., Khalil H. K.** Separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems, *IEEE Transaction Automatic Control*, 1999, vol. 44, no. 9, pp. 1672—1687.
15. **Feuer A., Morse A. S.** Adaptive control of single-input, single-output linear systems, *IEEE Transaction Automatic Control*, 1978, vol. 23, no. 4, pp. 557—569.
16. **Brusin V. A.** On a class of singularly perturbed adaptive systems, *Avtomatika i upravleniye*, 1995, no. 4, pp. 119—128 (in Russian).