УДК 517.977 DOI: 10.17587/mau.21.259-265

Р. О. Оморов, д-р техн. наук, проф., член-корр. НАН КР, romano_ip@list.ru,
Институт физики им. акад. Ж. Жеенбаева Национальной академии наук Кыргызской Республики, г. Бишкек

Метод топологической грубости в задачах исследования и управления синергетическими системами

Рассматривается метод исследования грубости динамических систем, основанный на понятии грубости по Андронову—Понтрягину и именуемый "методом топологической грубости". Даны понятия "грубость" и "бифуркация" динамических систем, сформулированные еще на заре становления научного направления математики — топологии — великим французским ученым А. Пуанкаре. Формулируется понятие грубости по Андронову—Понтрягину и определяются условия достижимости требуемой грубости динамической системы. Приведены определения понятий максимальной грубости и минимальной негрубости динамических систем, введенные автором ранее. Сформулированы соответствующие теоремы о необходимых и достаточных условиях достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости, а также возникновения бифуркаций топологических структур динамических систем, которые были доказаны в основополагающих работах автора, приведенных в списке литературы. Утверждается, что множества грубых и негрубых систем составляют непрерывные по показателю грубости множества. В качестве показателя грубости в методе используется число обусловленности матрицы приведения к диагональному (квазидиагональному) виду матрицы Якоби в особых точках фазового пространства системы. Метод позволяет управлять грубостью систем управления на основе теоремы, сформулированной с использованием матричного уравнения Сильвестра и доказанной в работах автора, которая также приведена в данной работе. Основные этапы исследований грубости и бифуркаций систем с помощью рассматриваемого метода сформулированы в виде соответствующего алгоритма. В работе кратко изложены вопросы о синергетических системах и хаосе (странных аттракторах) в них. Метод может быть использован для исследований грубости и бифуркаций динамических систем, а также синергетических систем и хаоса различной физической природы. Возможности метода проиллюстрированы на примерах синергетической системы Чуа, а также технической системы в виде нелинейного сервомеханизма.

Ключевые слова: *динамическая система, топологическая грубость, синергетическая система и хаос, грубость по Андронову—Понтрягину, бифуркация, максимальная грубость и минимальная негрубость систем, гиперболические и негиперболические особые точки*

Введение

Проблемам исследования грубости динамических систем и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [1—3].

В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости: 1) на основе понятия грубости по Пейксото, или иначе "структурной устойчивости"; 2) на основе понятия грубости по Андронову—Понтрягину, когда в отличие от предыдущего варианта требуется ε-близость исходного и возмущенного гомеоморфизмов [1, 2, 4].

В работах [5—7] на базе понятия грубости по Андронову—Понтрягину были заложены основы "метода топологической грубости", который позволяет исследовать грубость (робастность) и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем, а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [8—11].

В данной статье рассматриваются основы "метода топологической грубости", а также применение этого метода к синергетической системе Чуа и нелинейному сервомеханизму [12].

Основы метода

В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций систем были поставлены еще на заре становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А. Пуанкаре [13]. В частности, термин "бифуркация" впервые введен им и означает дословно "раздвоение" (от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения). "Грубость" динамических систем при этом определяется как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В современной терминологии "бифуркация" употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе. Таким образом, бифуркация означает переход между пространствами грубых систем.

Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые области (пространства). Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А. А. Андроновым и его школой [1, 2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости и сформулированы качественные критерии грубости, впоследствии названной понятием грубости по Андронову—Понтрягину [2].

В многомерной постановке рассматривается динамическая система (ДС) n-го порядка

$$\dot{z} = F(z), \tag{1}$$

где $z \in R^n$ — вектор фазовых координат; F — n-мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову—Понтрягину в некоторой области G, если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\tilde{G}$ области G и описываемая уравнением

$$\dot{\tilde{z}} = F(\tilde{z}) + f(\tilde{z}), \tag{2}$$

являются ε-тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) ε-тождественны, если существуют открытые области D, $\tilde{D}$ в n-мерном фазовом пространстве, такие что при $D \subset \tilde{D}$ и $\tilde{G} \subset G$ $\exists \varepsilon, \delta > 0$:

$$\text{если } \|f(\tilde{z})\| < \delta \text{ и } |df_i(\tilde{z})/d\tilde{z}_j| < \delta,\ i, j = \overline{1, n},$$
$$\text{то } \|\|z\| - \|\tilde{z}\|\| < \varepsilon,$$

или иными словами

$$(\tilde{D}, (2)) \overset{\varepsilon}{\equiv} (D, (1)), \tag{3}$$

иначе, разбиения областей $\tilde{D}$ и D траекториями систем (2) и (1) ε-тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до ε).

Если (3) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову—Понтрягину.

Топологическая структура ДС определяется особыми траекториями и многообразиями типа особых точек (ОТ), особых линий (сепаратрис), замкнутых (периодических) траекторий, притягивающих многообразий (аттракторов).

В работах [5, 6] на основе понятия грубости по Андронову—Понтрягину предложены основы "метода топологической грубости" на базе меры грубости в виде числа обусловленности $C\{M\}$ матрицы M — нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в ОТ фазового пространства. Здесь же впервые введено понятие максимальной грубости и минимальной негрубости на отношениях пары δ и ε.

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости в окрестности ОТ фазового пространства определяется следующей теоремой, доказанной в работах [5—7].

Теорема 1. *Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки (z_0) была максимально грубой, а в окрестности негиперболической — минимально негрубой, необходимо и достаточно, чтобы существовал*

$$M^* = \operatorname{argmin} C\{M\},$$

где M — матрица приведения линейной части A системы (1) в особой точке (z_0) к диагональному (квазидиагональному) базису, $C\{M\}$ — число обусловленности матрицы M.

Замечание 1. Как следует из определений максимальной грубости и минимальной негрубости систем, а также теоремы 1, существуют и минимально грубые, и максимально негрубые системы, для которых $C\{M\} = \infty$. Иначе, множество грубых и негрубых систем образуют непрерывные множества. При этом системами с $C\{M\} = \infty$ будут системы с жордановой квазидиагональной формой матриц линейного приближения A системы (1).

Очевидно, число обусловленности $C\{M\}$ как меру грубости можно использовать для кусочно-гладких ДС, рассматривая совокупную грубость по областям гладкости системы, если ОТ не находятся на границе этих областей.

Следует отметить, что для негладких систем, используя какую-либо обобщенную производную из негладкого анализа при определении матрицы линейной части, можно обобщить эту меру грубости.

Теоретические результаты "метода топологической грубости", полученные в работах [5—11], позволяют управлять грубостью синергетических систем, соответствующая теорема доказана в работах [5, 7].

Рассматривается ДС

$$\dot{z} = Q(z, u), \tag{4}$$

где $z \in R^n$, $u \in R^r$ — соответственно векторы фазовых координат и управлений системы; $Q(\cdot)$ — n-мерная нелинейная дифференцируемая вектор-функция.

Возможности управления грубостью определяются условиями следующей теоремы.

Теорема 2. *Для того чтобы в управляемой ДС (4), описываемой в n-мерном фазовом пространстве с помощью матриц линейного приближения A, B соответственно для фазовых координат и управлений существовало управление u, обеспечивающее в окрестности соответствующей ОТ замкнутой системы максимальную грубость или минимальную негрубость, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия невырожденной разрешимости матричного уравнения Сильвестра.*

Управление $u \in U$ ищется в классе систем с обратной связью $u = -Kx$ такое, что матрица замкнутой системы $F = A - BK$ в окрестности ОТ удовлетворяет условиям

$$G(F) = G(\Gamma),\ M\Gamma - AM = -BH,\ K = HM^{-1},$$

где $\Gamma \in R^{n\times n}$ —диагональная (квазидиагональная) матрица состояния канонической модели; $H \in R^{m\times n}$ — матрица, задаваемая произвольно с ограничением на наблюдаемость пары (Γ, H); $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$ — матрицы координат и управления.

В окрестности ОТ:

$$F(z) = 0,\ \dot{z} = Az + Bu,$$

управление $u \in U$ синтезируется так, чтобы достичь требуемого значения показателя $C\{M\}$, используя какие-либо методы нелинейного программирования [14].

Метод топологической грубости также позволяет определять бифуркации ДС на основе критериев, разработанных в работах [5—9]. Более того, метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций. В докторской диссертации автора доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы в области G многомерной (n > 2) ДС при значении параметра* $q = q^*$, $q \in R^p$ *возникла какая-нибудь бифуркация топологической структуры, необходимо и достаточно чтобы:*

- *либо 1) в рассматриваемой области G ДС существуют негиперболические (негрубые) ОТ, или орбитально-неустойчивые предельные циклы (ПЦ), для которых имеет место равенство*

$$C\{M(q^*)\} = \min \sum_{i=1}^{p} C_i\{M(q)\}, \tag{5}$$

где p — число ОТ или ПЦ в области G:

- *либо 2) в области G ДС имеются какие-либо грубые ОТ или ПЦ, для которых выполняется условие*

$$C\{M(q^*)\} = \infty. \tag{6}$$

Замечание 2. Тип бифуркации зависит, во-первых, от того, какое из условий (5) или (6) выполняется, во-вторых, от того, какая особая траектория — ОТ или ПЦ — удовлетворяет этим условиям. Так, например, хаотические колебания ("странные аттракторы"), возникающие из-за потери симметрии, происходят, когда условию (5) удовлетворяют ОТ, а хаотические колебания, возникающие через последовательности бифуркаций удвоения периода, происходят в том случае, когда условию (5) отвечают ПЦ.

Синергетика и хаос

В современной науке возрастает интерес к ее объединяющим направлениям, рассматривающим явления природы и общества, живой и неживой природы с единых точек зрения в зависимости от проявляемых ими свойств и характеристик. К одному из таких направлений науки относится синергетика, которая занимается самоорганизующимися процессами, явлениями и системами [15—17].

Синергетика в настоящее время вторгается во все области науки, начиная с естественных наук — физики, химии, биологии, геологии, геофизики — и заканчивая неточными областями наук, такими как экономика, социология, психология, философия, распознавание образов, а также в области техники и технологий [8—12, 15—20].

Многие ученые в настоящее время ставят задачи не только исследования синергетических процессов и систем, но и управления ими в целях достижения желаемого развития и динамики [21, 22].

Одним из явлений в синергетических системах, привлекающих огромное внимание исследователей в различных областях науки, являются так называемые странные аттракторы, представляющие притягивающие многообразия в фазовом пространстве с хаотическим поведением (хаосом) траекторий в этих многообразиях [15—24]. Исследование странных аттракторов вызывает интерес и потому, что многие видят в изучении этого феномена ключ к разгадке тайн природы турбулентности и хаоса в системах различной природы — физических и химических, экономических и социальных системах [23, 24]. Более того, актуальной становится и задача управления хаосом в синергетических системах различной физической природы [21].

Основоположниками синергетики по праву являются выдающиеся ученые — бельгийский химик и физик, Нобелевский лауреат Илья Пригожин и немецкий физик Герман Хакен. Огромный вклад в синергетику внесли многие советские и российские ученые, в особенности школа С. П. Курдюмова [25].

При исследовании и управлении синергетическими системами важнейшее значение имеют вопросы грубости и бифуркаций. Одним из методов в изучении свойств грубости и бифуркаций синергетических систем, а также управления этими свойствами служит "метод топологической грубости", основы которого изложены выше.

Далее в работе возможности метода проиллюстрированы на двух примерах систем — Чуа и нелинейного сервомеханизма [26].

Примеры

Система (цепь) Чуа [21]. Как известно, система Чуа представляет собой электронную цепь с одним нелинейным элементом, которая способна генерировать разнообразные, в частности, хаотические колебания.

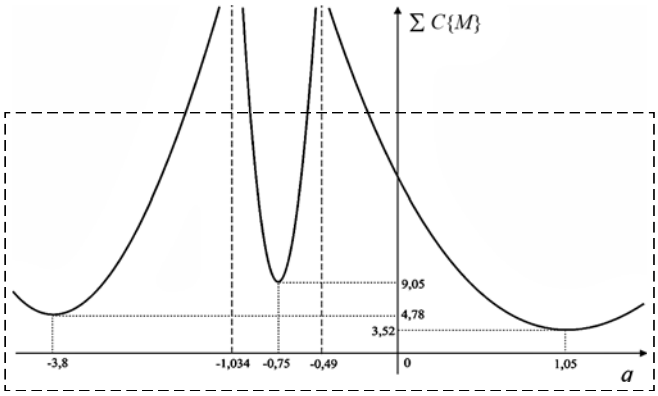

Рис. 1. Зависимость $C\{M\}$ от параметра q в системе Чуа

Fig. 1. Dependency of $C\{M\}$ on the q parameter in the Chua system

Система Чуа описывается уравнениями:

$$\dot{x} = p(y - f(x)),\ \ \dot{y} = x - y + z,\ \ \dot{z} = -qy, \quad (7)$$

где $f(x) = M_1x + 0{,}5(M_1 - M_0)(|x + 1| - |x - 1|)$.

При $p = 9$, $q = 14{,}3$, $M_1 = -6/7$, $M_0 = 5/7$, в системе (7) наблюдаются хаотические колебания. В данном случае имеются три ОТ: ОТ$_1$ (0, 0, 0); ОТ$_{2,3}$($\pm 11/6$, 0, 11/6).

Исследованиями установлены, что хаотические движения обнаруживаются и при значениях q: $-1{,}034 < q < -0{,}49$, а при $q = -3{,}8$ и $q = 1{,}05$ наблюдается максимальная грубость движений в системе (7), что показано на рис. 1.

Нелинейный сервомеханизм [26]. Рассматривается нелинейная кусочно-гладкая система в виде нелинейного сервомеханизма, заданная уравнениями

$$\ddot{x} + \dot{x} + \gamma x = -F(\sigma),\ \ \sigma = x + T_1\dot{x}, \quad (8)$$

где $\gamma = \gamma_h R/T_s^2$, $T_1 = T_s/\gamma R$ — постоянные коэффициенты, $F(\sigma)$ — обобщенная релейная функция, обусловленная зоной нечувствительности и гистерезисом (рис. 2); σ — аргумент релейной функции.

В работе [26] проведено исследование системы (8) при различных случаях первичных параметров T_s, γ_h методом многолистной фазовой плоскости и точечных преобразований.

Представим систему (8) в фазовой плоскости $(x,\ y = \dot{x})$:

$$\dot{x} = y,\ \dot{y} = -\gamma x - y - F(\sigma),\ \sigma = x + T_1 y. \quad (9)$$

В данной системе только одна ОТ — (0,0): $y = 0$, $-\gamma x - F(\sigma) = 0$, т. е. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

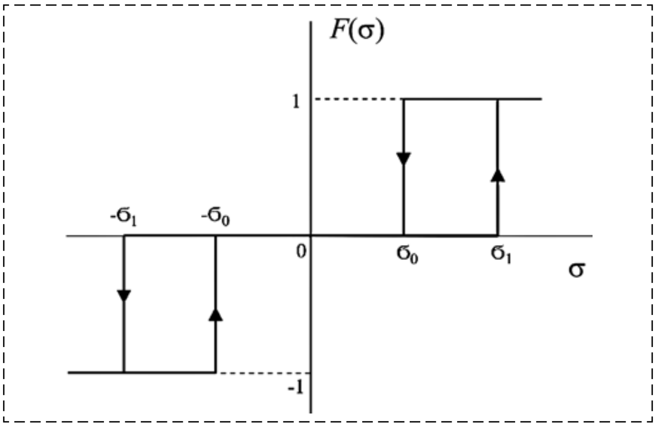

Рис. 2. Обобщенная релейная функция $F(\sigma)$
Fig. 2. Generalized relay function $F(\sigma)$

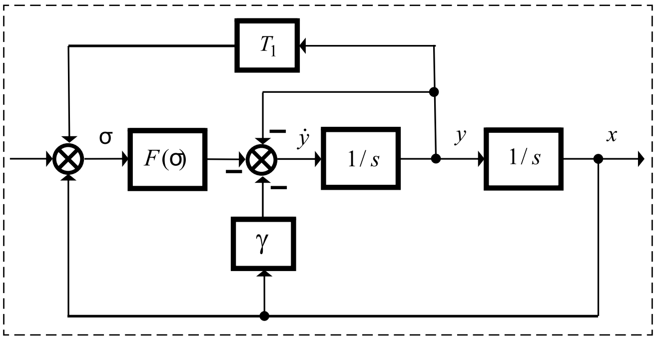

Рис. 3. Структурная схема системы (9)
Fig. 3. Structural diagram of the system (9)

В пространстве состояний (фазовых координат) система (9) представляется структурой, показанной на рис. 3.

Матрица линейной части:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -1 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{1,2} = -1/2 \pm \sqrt{1-4\gamma}/2.$$

Тип особой точки ОТ — (0,0) — определяется величиной γ. Если корни действительные, т. е. $1 - 4\gamma \geqslant 0$, $\gamma \leqslant 1/4$, то имеем

$$C\{M\} = \frac{\sqrt{\dfrac{1+(1+\gamma)}{\sqrt{1+(\gamma-1)^2}}}}{\sqrt{\dfrac{1-(1+\gamma)}{\sqrt{1+(\gamma-1)^2}}}}.$$

Отсюда $\min C\{M\}$ будем иметь при $\gamma \to 0$, а именно $C\{M\} \to 2{,}4$ (система стремится к *максимальной грубости*), а $\max C\{M\} = \infty$ будет при $\gamma = 1/4$, при этом система стремится к минимальной грубости или, иначе, переходит к негрубой области (неработоспособна). Если корни комплексные, т. е. $\gamma > 1/4$, то $\min C\{M\} = 1{,}6$ будет достигнут при $\gamma = 1{,}5$, и система будет *максимально грубой*. Максимальное значение $C\{M\} \to \infty$ при $\gamma \to \infty$ (система стремится к *неработоспособному* негрубому состоянию).

Заключение

Рассмотренный в данной статье "метод топологической грубости" является методом количественного исследования грубости и бифуркаций ДС самого широкого класса и различной физической природы.

Возможности метода для исследований грубости и бифуркаций систем показаны на примерах только некоторых синергетических и технических систем, хотя, конечно же, метод был и может быть использован для исследований большого числа систем — как синергетических систем различной природы (Лоренца, Ресслера, Чуа и др.), так и ДС более широкого класса, в частности, при исследовании колебательных систем и бифуркаций Хопфа, аттрактора отображения Хенона [8—12, 15—17].

Таким образом, алгоритм исследований грубости и бифуркаций ДС методом топологической грубости по ОТ фазового пространства следующий:

1. Исследуемая система представляется в виде (1).
2. Определяются $ОТ_i$ системы (1) $F(z(t)) = 0$.
3. Находятся матрицы Якоби A_i (линейного приближения) в $ОТ_i$.
4. Вычисляются матрицы M_i приведения A_i к диагональному (квазидиагональному) виду.
5. Вычисляются числа обусловленности $C\{M_i\}$, которые в совокупности и определяют грубость системы по каким-либо варируемым параметрам.
6. При значениях варьируемых параметров, удовлетворяющих условиям (5) или (6), возникают возможные бифуркации в исследуемой системе (1).

Список литературы

1. **Андронов А. А., Понтрягин Л. С.** Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247—250.
2. **Аносов Д. В.** Грубые системы // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические си-

стемы: Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института (Труды МИАН СССР. Т. 169). М.: Наука, 1985. С. 59—93.

3. **Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.** Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. Т. 32. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 3—31.

4. **Peixoto M. M.** On structural stability // Ann. Math. 1959. Vol. 69, N. 1. P. 199—222.

5. **Оморов Р. О.** Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и Телемеханика. 1991. № 8. С. 36—45.

6. **Omorov R. O.** Maximal coarseness of dinamical systems // Automation and Remote Control. 1992. Vol. 52, N. 8 pt. 1. P. 1061—1068.

7. **Оморов Р. О.** Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Дис. докт. техн. наук. СПб.: Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики, 1992.

8. **Оморов Р. О.** Метод топологической грубости: Теория и приложения. I. Теория // Изв. НАН КР, 2009. № 3. С. 144—148.

9. **Оморов Р. О.** Синергетические системы: Проблемы грубости, бифуркаций и катастроф // Наука и новые технологии. 1997. № 2. С. 26—36.

10. **Оморов Р. О.** Топологическая грубость синергетических систем // Проблемы управления и информатики. 2012. № 2. С. 5—12.

11. **Omorov R. O.** Topological Roughness of Synergetic Systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2012. Vol. 44. P. 61—70.

12. **Оморов Р. О.** Теория топологической грубости систем. Бишкек: Илим, 2019.

13. **Пуанкаре А.** О кривых определяемых дифференциальными уравнениями / Пер. с франц., под ред. А. А. Андронова. М., Л.: Гостехиздат, 1947.

14. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование / Пер. с англ. М.: Мир, 1975.

15. **Хакен Г.** Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / Пер. с англ. М.: Мир, 1985.

16. **Николис Г., Пригожин И.** Познание сложного: Введение / Пер. с англ. М.: Мир, 1990.

17. **Haken H.** Synergetics: Introduction and Advanced Topics. London: Springer. 2004.

18. **Пенроуз Р.** Новый ум короля: О компьютерах, мышлении и законах физики / Пер. с англ. М.: ЛКИ, 2008.

19. **Занг В. Б.** Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / Пер. с англ. М.: Мир, 1999.

20. **Пригожин И., Кондепуди Д.** Современная термодинамика: От тепловых двигателей до диссипативных структур / Пер. с англ. М.: Мир, 2002.

21. **Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л.** Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // А и Т. 2003. № 5. С. 3—45.

22. **Колесников А. А.** Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза. 2-е изд. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2012.

23. **Странные** аттракторы / Сб. пер. с англ. под ред. Я. Г. Синая, Л. П. Шильникова. М.: Мир, 1981.

24. **Peak D., Frame M.** Chaos Under Control: The Art and Science of Complexity. New York: W. H. Freeman and Company. 1994.

25. **Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.** Синергетика и прогнозы будущего. 2-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2001.

26. **Петров В. В., Гордеев А. А.** Нелинейные сервомеханизмы. М.: Машиностроение, 1979.

Method of Topological Roughness in Tasks of Research and Control of Synergetic Systems

R. O. Omorov, romano_ip@list.ru,
Institute of Physics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic,
Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic,

Corresponding author: **Omorov R. O.,** Chief Research Officer,
Institute of Physics of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic,
Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, e-mail: romano_ip@list.ru

Accepted on January 20, 2020

Abstract

The method of a research of roughness of dynamic systems based on a concept of roughness according to Andronov—Pontryagin and named with "method of topological roughness" is considered. The concepts "roughness" and "bifurcation" of dynamic systems formulated at a dawn of formation of the scientific direction of mathematics — topology, are given by the great French scientist A. Poincare. Also the concept of roughness according to Andronov—Pontryagin is formulated and conditions of accessibility of required roughness of a dynamic system are defined. The definitions of concepts of the maximum roughness and minimum non roughness of dynamic systems entered by the author earlier are given. The corresponding theorems of necessary and sufficient conditions of accessibility of the maximum roughness and the minimum non roughness and also emergence of bifurcations of topological structures of dynamic systems, which were proved in the fundamental works of the author given in the list of references are formulated. At the same time it is claimed that sets of rough and not rough systems make roughnesses of a set, continuous on an indicator. As a roughness indicator in a method the number of conditionality of a matrix of reduction to a diagonal (quasidiagonal) type of a matrix of Jacobi in special points of phase space of a system is used. The method allows to controling roughness of control systems on the basis of the theorem formulated with use of the matrix equation of Sylvester and proved in works of the author which is also provided in this work. The main stages of researches of roughness and bifurcations of systems by means of the considered method are formulated in the form of the corresponding algorithm. In work questions of synergetic systems and chaos (strange attractors) in them, founders of science of synergetics — H. Haken, I. Prigozhin are briefly stated. The method can be used for researches of roughness and bifurcations of dynamic systems and also synergetic systems and chaos of the different physical nature. In works of the author the method is approved on examples of many synergetic systems, such as Lorenz *attractors and Rössler, Belousov-Zhabotinsky's systems, Chua, "predator-prey", Henon, Hopf's bifurcations, etc. In this work of a possibility of a method are illustrated on examples of synergetic system Chua and also a technical system in the form of the nonlinear servomechanism.*

Keywords: *a dynamic system, topological roughness, a synergetic system and chaos, roughness according to Andronov—Pontryagin, bifurcation, the maximum roughness and the minimum non roughness of systems, hyperbolic and not hyperbolic special points*

For citation:

Omorov R. O. Method of Topological Roughness in Tasks of Research and Control of Synergetic Systems, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2020, vol. 21, no. 5, pp. 259—265.

DOI: 10.17587/mau.21.259-265

References

1. **Andronov A. A., Pontrjagin L. S.** Grubye sistemy (Rough systems), *Dokl. AN SSSR*,1937, vol. 14, no. 5, pp. 247—250 (in Russian).
2. **Anosov D. V.** Rough systems. Topology, ordinary differential equations, dynamic systems: Collection of review articles. 2. To the 50 anniversary of institute, *Proceedings of MIAS SU*, vol. 169, Moscow, Nauka, 1985, pp. 59—93 (in Russian).
3. **Polyak B. T., Tsypkin Ya. Z.** Robust stability of linear systems. Results of science and technology, iss. *Technical Cybernetics*, vol. 32, Moscow, VINITI, 1991, pp. 3—31 (in Russian).
4. **Peixoto M. M.** On structural stability, *Ann. Math.*, 1959, vol. 69, no 1, pp. 199—222.
5. **Omorov R. O.** Maximum roughness of dynamic systems, *Avtomatika i Telemehanika,* 1991, no 8, pp. 36—45 (in Russian).
6. **Omorov R. O.** Maximal coarseness of dinamical systems, *Automation and Remote Control,* 1992, vol. 52, no. 8, pt. 1, pp. 1061—1068.
7. **Omorov R. O.** Quantitative measures of roughness of dynamic systems and their application to control systems: Diss. Doctor of Engineering Sciences, Saint Petersburg, Sankt-Peterburgskij institut tochnoj mehaniki i optiki, 1992.
8. **Omorov R. O.** Topological roughness method: Theory and applications. I. Theory, *Izv. NAN KR*, 2009, no. 3, pp. 144—148 (in Russian).
9. **Omorov R. O.** Synergetic systems: Problems of roughness, bifurcations and catastrophs, *Nauka i Novye Tehnologii*, 1997, no 2, pp. 26—36 (in Russian).
10. **Omorov R. O.** Topological roughness of synergetic systems, *Problemy Upravlenija i Informatiki*, 2012, no 2, pp. 5—12 (in Russian).
11. **Omorov R. O.** Topological Roughness of Synergetic Systems, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2012, vol. 44, pp. 61—70.
12. **Omorov R. O.** Theory of topological roughness of systems, Bishkek, Ilim, 2019 (in Russian).
13. **Puankare A.** About curves defined by differential equations, Moscow—Leningrad, Gostehizdat, 1947 (in Russian).
14. **Himmel'blau D.** Application nonlinear programming, Moscow, Mir, 1975 (in Russian).
15. **Haken H.** Synergetics: instability hierarchies in self-organizing systems and devices, Moscow, Mir, 1985 (in Russian).
16. **Nikolis G., Prigozhin I.** Exploring Complexity: An Introduction, Moscow, Mir, 1990 (in Russian).
17. **Haken H.** Synergetics: Introduction and Advanced Topics, London, Springer, 2004.
18. **Penrose R.** The Emperor's New Mind: On Computers, Minds and The Laws of Physics, Moscow, LKI, 2008 (in Russian).
19. **Zang V. B.** Synergetic economy. Time and change in nonlinear economic theory, Moscow, Mir, 1999 (in Russian).
20. **Prigozhin I., Kondepudi D.** Modern thermodynamics: From heat engines to dissipative structures, Moscow, Mir, 2002 (in Russian).

20. **Andrievskii B. R., Fradkov A. L.** Control of chaos: methods and applications. I. Methods, *Avtomatika i Telemehanika*, 2003, no. 5, pp. 3—45 (in Russian).

22. **Kolesnikov A. A.** Synergetic Management Methods for Complex Systems: Theory of System Synthesis, Moscow, Knizhnyj dom "LIBROKOM", 2012 (in Russian).
23. **Sinai Ya. G., Shilnikov L. P.** ed. Strange attractors, Moscow, Mir, 1981 (in Russian).
24. **Peak D., Frame M.** Chaos Under Control: The Art and Science of Complexity, New York, W. H. Freeman and Company, 1994.
25. **Kapitsa S. P., Kurdyumov S. P., Malinetskii G. G.** Synergetics and forecasts of the future, Moscow, Jeditorial URSS, 2001 (in Russian).
26. **Petrov V. V., Gordeev A. A.** Nonlinear servomechanisms, Moscow, Mashinostroenie, 1979 (in Russian).