УДК 621.391:519.24 DOI: 10.17587/mau.19.306-311

Ф. Г. Гаращенко, д-р техн. наук, проф., fedirf47@gmail.com,
В. Т. Матвиенко, канд. физ.-мат. наук, доц., matvienko.vt@gmail.com,
Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, г. Киев

Адаптивная аппроксимация сигналов

При решении ряда важных прикладных задач необходимо проводить аппроксимацию экспериментальных данных. В работе рассматривается задача адаптивной аппроксимации данных. Предложена общая итерационная схема. Эта процедура имеет два цикла: внутренний и внешний. Внешний цикл предусматривает изменение структуры базисных функций, их наращивание при необходимости. Внутренний цикл уточняет параметры аппроксимации по мере поступления экспериментальных данных. Предложенная схема базируется на форме представления псевдообратного оператора.

Ключевые слова: *адаптивная аппроксимация, динамическая система, оптимизация, псевдоинверсия, итерационная схема, вычислительный эксперимент, сходимость*

Введение

Эффективным методом аппроксимации измеряемых сигналов является их приближение линейными комбинациями базисных функций [1—4]. Неизвестные параметры можно определять на основе методов псевдообращения, составив при этом соответствующую систему линейных алгебраических уравнений. При этом учитывается следующее:

- как правило, информация о сигнале поступает в реальном времени;
- сами базисные функции и их число, которое необходимо взять для аппроксимации, неизвестны.

Задача состоит в том, чтобы разработать алгоритмы аппроксимации экспериментальных данных, с помощью которых можно было бы уточнять параметры аппроксимации, а не перевычислять их на каждом этапе в полном объеме. Это позволяет значительно быстрее решать сложные задачи информатики и прикладной математики.

В данной работе для аппроксимации экспериментальных данных рассматривается общая итерационная схема. Предложенная схема — это динамическая система разностных уравнений, которая записана относительно искомых параметров. Схема включает два этапа: внутренний и внешний. Внешний этап предусматривает изменение структуры базисных функций, их наращивание по мере необходимости. Внутренний — уточняет параметры аппроксимации по мере поступления экспериментальных данных. Сколько необходимо брать измерений для внутреннего этапа и как долго необходимо наращивать систему базисных функций — это проблема, которую можно решить при рассмотрении конкретных задач. Особенно хотелось бы обратить внимание на то, что для анализа устойчивости аппроксимации можно использовать методы практической устойчивости динамических систем.

Постановка задачи

Предположим, что измеряется в некоторые моменты

$$t_0 \le t_{1,1} < t_{1,2} < \ldots < t_{1,n_1} < t_{2,1} < t_{2,2} < \ldots$$
$$\ldots < t_{2,n_2} < t_{3,1} < \ldots < t_{N,1} < t_{N,2} < \ldots < t_{N,n_N} \leqslant T$$

скалярная величина $x(t)$, значит, нам известны значения

$$\begin{aligned} &x_{1,1} = x(t_{1,1}),\ x_{1,2} = x(t_{1,2}), \ldots, x_{1,n_1} = x(t_{1,n_1}),\\ &x_{2,1} = x(t_{2,1}),\ x_{2,2} = x(t_{2,2}), \ldots, x_{2,n_2} = x(t_{2,n_2}),\\ &x_{3,1} = x(t_{3,1}),\ \ldots, x_{N,1} = x(t_{N,1}), x_{N,2} = x(t_{N,2}), \ldots,\\ &x_{N,n_N} = x(t_{N,n_N})\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Задача состоит в том, чтобы аппроксимировать с заданной точностью ε поступающий в реальном режиме времени сигнал с помощью системы базисных функций

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$$

в виде линейной комбинации

$$x(t) \approx \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t). \tag{2}$$

При этом n может варьироваться от 1 до M. Важно асимптотическое изучение модели ($M \to \infty$).

Параметры аппроксимации α_1, α_2, ..., α_n будем определять, учитывая тот факт, что число базисных функций и размер выборки данных являются неизвестными для достижения указанной точности. Для вычисления коэффициентов α_i будем рассматривать систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t_{k,j_k}) = x_{k,j_k},\ k = \overline{1,N},\ j_k = \overline{1,m_k},\ m_k \leqslant n_k, \tag{3}$$

где m_k может принимать значения от 1 до n_k в зависимости от номера k, т.е. n_k — заранее заданные ограничения на число измерений на k-й итерации оценки параметров.

В описанной модели при использовании всех базисных функций и измерений получим систему высокой размерности, что значительно усложняет вычислительную процедуру. Поэтому для определения параметров модели $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ запишем динамическую разностную систему.

Перепишем систему (3) в векторно-матричной форме. Для этого введем обозначения

$$\mathbf{A}^{(n,m_k)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1(t_{k,1}) & \varphi_2(t_{k,1}) & \dots & \varphi_n(t_{k,1}) \\ \varphi_1(t_{k,2}) & \varphi_2(t_{k,2}) & \dots & \varphi_n(t_{k,2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_{k,m_k}) & \varphi_2(t_{k,m_k}) & \dots & \varphi_n(t_{k,m_k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}} \\ (\mathbf{a}_2^{(n)})^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_{m_k}^{(n)})^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \text{ —}$$

матрица размерности $m_k \times n$;

$(\mathbf{b}^{(m_k)})^{\mathrm{T}} = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,m_k})$ — m_k-мерный вектор измеряемых данных;

$(\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n)})^{\mathrm{T}} = (\alpha_{m_k,1}, \alpha_{m_k,2}, \dots, \alpha_{m_k,n})$ — вектор неизвестных параметров размерности n (здесь и далее буквой $^{\mathrm{T}}$ будем обозначать операцию транспонирования).

Тогда систему (3) можно записать в виде

$$\mathbf{A}^{(n,m_k)}\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n)} = \mathbf{b}^{(m_k)}. \qquad (4)$$

Решение системы (4) можно представить через псевдообратную матрицу $\mathbf{A}^{(n,m_k)+}$ размерности $n \times m_k$:

$$\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n)} = \mathbf{A}^{(n,m_k)+}\mathbf{b}^{(m_k)}.$$

Далее алгоритм предусматривает разбиение на два этапа: внешний и внутренний с соответствующими индексами циклов i и j_k. На этих этапах циклов увеличиваем систему базисных функций или измерений в целях уточнения параметров аппроксимации. Работа алгоритма прекращается при выполнении одного из нескольких условий:

- достигнута заданная точность ε;
- невозможно добавлять базисные функции или наращивать экспериментальные данные.

Предположим, что условия задачи требуют добавления базисных функций на внешнем этапе и измерений — на внутреннем.

Тогда, расширив систему благодаря еще одной точке экспериментальных данных x_{k,m_k+1} на внутреннем этапе, систему (3) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(t_{k,j_k}) = x_{k,j_k}, \\ k = \overline{1,N},\ j_k = \overline{1, m_k+1},\ m_k + 1 \leqslant n_k. \end{gathered} \qquad (5)$$

Переписав систему (5) в векторно-матричной форме, получим

$$\mathbf{A}^{(n,m_k+1)}\boldsymbol{\alpha}_{m_k+1}^{(n)} = \mathbf{b}^{(m_k+1)}, \qquad (6)$$

где $\mathbf{A}^{(n,m_k+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(n,m_k)} \\ (\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} & \mathbf{A}^{(n,m_k)} & \\ \varphi_1(t_{k,m_k+1}) & \varphi_2(t_{k,m_k+1}) & \varphi_n(t_{k,m_k+1}) \end{pmatrix} \text{ — мат-}$$

рица размерности $(m_k + 1) \times n$; $\mathbf{b}^{(m_k+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(m_k)} \\ x_{k,m_k+1} \end{pmatrix}$ — $(m_k + 1)$-мерный вектор свободных членов; $\boldsymbol{\alpha}_{m_k+1}^{(n)}$ — вектор искомых параметров размерности n на $(m_k + 1)$-й итерации.

Решение системы (6) можно записать, используя псевдообратную матрицу $(\mathbf{A}^{(n,m_k+1)})^+$:

$$\boldsymbol{\alpha}_{m_k+1}^{(n)} = (\mathbf{A}^{(n,m_k+1)})^+\mathbf{b}^{(m_k+1)}. \qquad (7)$$

Поскольку матрицу $(\mathbf{A}^{(n,m_k+1)})^+$ можно выразить через псевдообратную и проекционные матрицы на m_k-й итерации, то для поиска вектора искомых параметров запишем итерационную схему.

Для адаптивной коррекции вектора неизвестных параметров при последовательном наращивании измеряемых данных имеет место итерационная схема

$$\boldsymbol{\alpha}_{m_k+1}^{(n)} = \mathbf{L}_{m_k}^{(n,n)}\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n)} + \boldsymbol{\psi}_{m_k}^{(n)}, m_k = 1, 2, \dots \qquad (8)$$

со следующими начальными условиями:

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{(n)} = \frac{\mathbf{b}^{(1)}(\mathbf{A}^{(n,1)})^{\mathrm{T}}}{\mathbf{A}^{(n,1)}(\mathbf{A}^{(n,1)})^{\mathrm{T}}} = \frac{\mathbf{b}^{(1)}\mathbf{a}_1^{(n)}}{(\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_1^{(n)}}.$$

Из представления псевдообратной матрицы [5] следует запись линейной разностной схемы (8). Для этого необходимо представить матрицу $(\mathbf{A}^{(n,m_k+1)})^+$ через матрицу $(\mathbf{A}^{(n,m_k)})^+$ и проекционные матрицы $\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)}) = \mathbf{E}_n - (\mathbf{A}^{(n,m_k)})^+\mathbf{A}^{(n,m_k)}$, $\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)}) = \mathbf{A}^{(n,m_k)}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{+\mathrm{T}}$ на m_k-й итерации.

Приведем формулы для вычисления матрицы $\mathbf{L}_{m_k}^{(n,n)}$ и вектора $\boldsymbol{\psi}_{m_k}^{(n)}$ [5—8].

Случай 1. Предположим, что для матрицы $\mathbf{A}^{(n,m_k)}$ имеет место выражение

$$\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)} > 0.$$

Тогда матрица $\mathbf{L}_{m_k}^{(n,n)}$ и вектор $\boldsymbol{\psi}_{m_k}^{(n)}$ размерностей $n \times n$ и n соответственно имеют вид (с учетом представления псевдообратной матрицы)

$$\mathbf{L}_{m_k}^{(n,n)} = \left(\mathbf{E}_n - \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}}{(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}} (\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}} \right);$$

$$\boldsymbol{\psi}_{m_k}^{(n)} = \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_{k+1}}^{(n)}}{(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_{k+1}}^{(n)}} x_{k,m_k+1},$$

где $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица размерности n.

Для этого случая проекционные матрицы $\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k+1)})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k+1)})$ вычисляются итерационно по следующим формулам [5]:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k+1)}) = \mathbf{Z}\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(n,m_k)} \\ \left(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}\right)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)}) - \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})}{(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}}; \tag{9}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k+1)}) = \mathbf{R}\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(n,m_k)} \\ (\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)}) - \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})}{(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}} - \\ - \frac{\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})}{(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}} + \\ + \frac{\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})}{((\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^2} \times \\ \times (1 + (\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}). \tag{10}$$

Случай 2. Если для матрицы $\mathbf{A}^{(n,m_k)}$ выполняется равенство

$$(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)} = 0,$$

то матрица $\mathbf{L}_{m_k}^{(n,n)}$ и вектор $\boldsymbol{\psi}_{m_k}^{(n)}$ вычисляются по формулам

$$\mathbf{L}_{m_k}^{(n,n)} = \left(\mathbf{E}_n - \frac{\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\,\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}}{1 + (\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}} \right);$$

$$\boldsymbol{\psi}_{m_k}^{(n)} = \frac{\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\,\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}}{1 + (\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}} x_{k,m_k+1}.$$

Проекционные операторы в этом случае вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k+1)}) = \mathbf{Z}\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(n,m_k)} \\ (\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)}); \tag{11}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k+1)}) = \mathbf{R}\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(n,m_k)} \\ (\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} = \\ = \mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)}) - \frac{\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}(\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})}{1 + (\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)})\mathbf{a}_{m_k+1}^{(n)}}. \tag{12}$$

По определению, проекционные матрицы $\mathbf{Z}(\mathbf{A})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{A})$ для матрицы $\mathbf{A}$ определяются по формулам

$$\mathbf{Z}(\mathbf{A}) = \mathbf{E}_n - \mathbf{A}^{+}\mathbf{A},\ \ \mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{+}(\mathbf{A}^{+})^{\mathrm{T}}. \tag{13}$$

Согласно выражениям (13), для итерационного вычисления матриц (9), (10) и (11), (12), необходимо сначала вычислить $\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,\,1)})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,\,1)})$ по формулам

$$\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,1)}) = \mathbf{Z}((\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}}) = \mathbf{E}_n - \frac{(\mathbf{A}^{(n,1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{(n,1)}}{(\mathbf{A}^{(n,1)}(\mathbf{A}^{(n,1)})^{\mathrm{T}})^2} = \\ = \mathbf{E}_n - \frac{\mathbf{a}_1^{(n)}(\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}}}{((\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_1^{(n)})^2};$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,1)}) = \mathbf{R}((\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}}) = (\mathbf{A}^{(n,1)})^{+}((\mathbf{A}^{(n,1)})^{+})^{\mathrm{T}} = \\ = ((\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}})^{+}((\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}})^{+\mathrm{T}} = \frac{(\mathbf{A}^{(n,1)})^{\mathrm{T}}}{\mathbf{A}^{(n,1)}(\mathbf{A}^{(n,1)})^{\mathrm{T}}}\frac{\mathbf{A}^{(n,1)}}{\mathbf{A}^{(n,1)}(\mathbf{A}^{(n,1)})^{\mathrm{T}}} = \\ = \frac{\mathbf{a}_1^{(n)}}{(\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_1^{(n)}}\frac{(\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}}}{(\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_1^{(n)}} = \frac{\mathbf{a}_1^{(n)}(\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}}}{((\mathbf{a}_1^{(n)})^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_1^{(n)})^2}.$$

Итерационную схему (8) можно исследовать на сходимость с помощью аналога второго метода Ляпунова для разностных уравнений. При этом будем считать, что $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ — решение поставленной задачи, т. е. $\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n)} \to \bar{\boldsymbol{\alpha}}$ при $m_k \to \infty$. Тогда, сделав замену

$$\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n)} = \mathbf{y}_{m_k}^{(n)} + \bar{\boldsymbol{\alpha}},$$

систему (8) запишем в новых переменных:

$$\mathbf{y}_{m_k+1}^{(n)} = \mathbf{f}_{m_k}^{(n)}(\mathbf{y}_{m_k}^{(n)}),\ m_k = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Задача анализа сходимости итерационной процедуры (8) будет эквивалентна исследованию устойчивости разностной схемы (14). При этом $\mathbf{y}_{m_k}^{(n)} = 0, m_k = 1, 2, \ldots,$ называют невозмущенным решением.

Определение 1. Невозмущенное решение $\mathbf{y}_{m_k}^{(n)} = 0, m_k = 1, 2, \ldots,$ системы (14) называют устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что на решениях системы (14) выполняется неравенство $\left\|\mathbf{y}_{m_k}^{(n)}\right\| < \varepsilon,\ m_k = 1, 2, \ldots$ при условии $\left\|\mathbf{y}_1^{(n)}\right\| < \delta$ (здесь и далее $\left\|\mathbf{y}_{m_k}^{(n)}\right\|$ будем понимать евклидову норму вектора $\mathbf{y}_{m_k}^{(n)}$).

Если, кроме определения 1, на решениях системы (14) выполняется условие $\lim\limits_{m_k\to\infty} \mathbf{y}_{m_k}^{(n)} = 0$ при $\left\|\mathbf{y}_1^{(n)}\right\| < \delta,$ то невозмущенное движение системы (14) называют асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Справедливы следующие теоремы [8].

Теорема 1. Пусть в области

$$\mathbf{Y}_\rho = \{\mathbf{y}_{m_k}^{(n)} : \left\|\mathbf{y}_{m_k}^{(n)}\right\| < \rho\}$$

для системы разностных уравнений (14) можно указать положительно определенную последовательность функций Ляпунова $V_{m_k}(\mathbf{y}_{m_k}^{(n)})$, $m_k = 1,2,...$, а ее первая разница на решениях рассматриваемой системы неположительна, т. е.

$$\Delta V_{m_k} = V_{m_k+1}(\mathbf{y}_{m_k+1}^{(n)}) - V_{m_k}(\mathbf{y}_{m_k}^{(n)}) =$$
$$= V_{m_k+1}(\mathbf{f}_{m_k}^{(n)}(\mathbf{y}_{m_k}^{(n)})) - V_{m_k}(\mathbf{y}_{m_k}^{(n)}) \leqslant 0,$$

тогда невозмущенное решение является устойчивым по Ляпунову.

Теорема 2. Если при условиях предыдущей теоремы о последовательности функций Ляпунова $V_{m_k}(\mathbf{y}_{m_k}^{(n)})$, $m_k = 1, 2, \ldots,$ первая разница ΔV_{m_k}, $m_k = 1,2,...$, на решениях системы (17) является отрицательно определенной, то невозмущенное решение системы (17) является асимптотически устойчивым.

Необходимо отметить, что последовательность функций Ляпунова можно выбирать в виде

$$V_{m_k}^{(1)} = \mathbf{y}_{m_k}^{(n)\mathrm{T}} \mathbf{B}^{(n, m_k)} \mathbf{y}_{m_k}^{(n)}, m_k = 1, 2, \ldots,$$

где $\mathbf{B}^{(n, m_k)}$ — некоторые положительно определенные матрицы.

Если $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ — решение системы (3) для любого m_k, то система разностных уравнений для возмущенного движения, т. е. относительно векторов $\mathbf{y}_{m_k}^{(n)}$, имеет вид

$$\mathbf{y}_{m_k+1}^{(n)} = \mathbf{L}^{(n, m_k)} \mathbf{y}_{m_k}^{(n)}, m_k = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Таким образом, исследование сходимости итерационной процедуры (8) при возмущенных исходных данных эквивалентно анализу устойчивости линейной разностной системы (15). Согласно принципу сжатых отображений Банаха разностная система (15) будет асимптотически устойчивой, если

$$\left\|\mathbf{L}^{(n,m)} \mathbf{y}^{(n)}\right\| < \left\|\mathbf{y}^{(n)}\right\|, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим процедуру внешнего цикла алгоритма, когда к системе базисных функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ добавляем еще одну функцию $\varphi_{n+1}(t)$. При этом в системе (3) изменяется число неизвестных параметров:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_i(t_{k, j_k}) = x_{k, j_k},$$
$$k = \overline{1, N}, \ j_k = \overline{1, m_k}, \ m_k \leqslant n_k. \tag{16}$$

Запишем систему (16) в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{A}^{(n+1, m_k)} \boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n+1)} = \mathbf{b}^{(m_k)}, \tag{17}$$

где $\mathbf{A}^{(n+1, m_k)} = (\mathbf{A}^{(n, m_k)}, \mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})$ — матрица размерности $m_k \times (n + 1)$; $(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^\mathrm{T} = (\varphi_{n+1}(t_{k,1}), \varphi_{n+1}(t_{k,2}), \ldots, \varphi_{n+1}(t_{k,m_k}))$ — известный вектор размерности m_k; $(\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n+1)})^\mathrm{T} = (\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n)\mathrm{T}}, \alpha_{m_k, n+1})$ — $(n + 1)$ — мерный вектор искомых переменных на $(n + 1)$-й итерации оценивания.

Решение системы (17) можно записать через псевдообратную матрицу $(\mathbf{A}^{(n+1, m_k)})^+$:

$$\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n+1)} = (\mathbf{A}^{(n+1, m_k)})^+ \mathbf{b}^{(m_k)}.$$

Так как в этом случае псевдообратная матрица $(\mathbf{A}^{(n+1, m_k)})^+$ выражается через псевдообратную и проекционную матрицы на n-й итерации, то для поиска вектора неизвестных параметров можно записать разностную схему.

Для коррекции вектора неизвестных параметров при последовательном расширении системы базисных функций и постоянных измерениях сигнала справедлива следующая итерационная схема:

$$\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n+1)} = \mathbf{Q}^{(n, m_k)} \boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(n)} + \mathbf{u}_{m_k}^{(n)}, n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

со следующими начальными условиями для скалярной величины $\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(1)}$:

$$\boldsymbol{\alpha}_{m_k}^{(1)} = \frac{(\mathbf{A}^{(1, m_k)})^\mathrm{T}}{(\mathbf{A}^{(1, m_k)})^\mathrm{T} \mathbf{A}^{(1, m_k)}} \mathbf{b}^{(m_k)}.$$

Если выполняется условие

$$(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^\mathrm{T} \mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n, m_k)}) \mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)} > 0,$$

тогда матрица $\mathbf{Q}^{(n, m_k)}$ и вектор $\mathbf{u}_{m_k}^{(n)}$ имеют вид

$$\mathbf{Q}^{(n, m_k)} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{19}$$

$$\mathbf{u}_{m_k}^{(n)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{(\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{+}\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{b}^{(m_k)}}{(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}} \\ \dfrac{(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{b}^{(m_k)}}{(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}} \end{pmatrix}.$$

Для этого случая проекционные матрицы $\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n+1,m_k)})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n+1,m_k)})$ вычисляются итерационно по следующим формулам:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n+1,m_k)}) = \mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)}(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}) = \mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n+1,m_k)})^{\mathrm{T}}) - $$
$$-\frac{\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n+1,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n+1,m_k)})^{\mathrm{T}})}{(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n+1,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}};$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n+1,m_k)}) = \mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)}\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}) = \mathbf{R}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}}) -$$
$$-\frac{\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})}{(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}} -$$
$$-\frac{\mathbf{R}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})}{(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}} +$$
$$+\frac{\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})}{((\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^2} \times$$
$$\times (1 + (\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}).$$

В случае, когда для матрицы $\mathbf{A}^{(n,m_k)}$ и вектора $\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}$ выполняется условие

$$(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)} = 0,$$

матрица $\mathbf{Q}^{(n,m_k)}$ определяется по формуле (19),

$$\mathbf{u}_{m_k}^{(n)} = \begin{pmatrix} -\dfrac{(\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{+}\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}^{\mathrm{T}}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{b}^{(m_k)}}{1 + (\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}} \\ \dfrac{\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)\mathrm{T}}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{b}^{(m_k)}}{1 + (\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}} \end{pmatrix},$$

проекционные матрицы $\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n+1,m_k)})$ и $\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n+1,m_k)})$ вычисляются следующим образом:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n+1,m_k)}) = \mathbf{Z}(\mathbf{A}^{(n,m_k)} \quad \mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}) = \mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}});$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n+1,m_k)}) = \mathbf{R}(\mathbf{A}^{(n,m_k)} \quad \mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}) = \mathbf{R}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}}) -$$
$$-\frac{\mathbf{R}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}(\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})}{1 + (\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{R}((\mathbf{A}^{(n,m_k)})^{\mathrm{T}})\mathbf{a}_{m_k}^{(n+1)}};$$

$$\mathbf{Z}((\mathbf{A}^{(1,m_k)})^{\mathrm{T}}) = \mathbf{Z}((\mathbf{a}_{m_k}^{(1)})^{\mathrm{T}}) =$$
$$= \mathbf{E}_{m_k} - \frac{\mathbf{A}^{(1,m_k)}(\mathbf{A}^{(1,m_k)})^{\mathrm{T}}}{((\mathbf{A}^{(1,m_k)})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{(1,m_k)})^2} = \mathbf{E}_{m_k} - \frac{\mathbf{a}_{m_k}^{(1)}(\mathbf{a}_{m_k}^{(1)})^{\mathrm{T}}}{((\mathbf{a}_{m_k}^{(1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_{m_k}^{(1)})^2};$$

$$\mathbf{R}((\mathbf{A}^{(1,m_k)})^{\mathrm{T}}) = \mathbf{R}((\mathbf{a}_{m_k}^{(1)})^{\mathrm{T}}) =$$
$$= \frac{\mathbf{A}^{(1,m_k)}}{(\mathbf{A}^{(1,m_k)})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{(1,m_k)}} \frac{(\mathbf{A}^{(1,m_k)})^{\mathrm{T}}}{(\mathbf{A}^{(1,m_k)})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{(1,m_k)}} =$$
$$= \frac{\mathbf{A}^{(1,m_k)}(\mathbf{A}^{(1,m_k)})^{\mathrm{T}}}{((\mathbf{A}^{(1,m_k)})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{(1,m_k)})^2} = \frac{\mathbf{a}_{m_k}^{(1)}(\mathbf{a}_{m_k}^{(1)})^{\mathrm{T}}}{((\mathbf{a}_{m_k}^{(1)})^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_{m_k}^{(1)})^2}.$$

Заключение

Для дискретных последовательностей сигналов описана процедура субоптимальной аппроксимации временных рядов. Исследована сходимость процедур аппроксимации с помощью второго метода Ляпунова.

Список литературы

1. **Ахиезер Н. И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
2. **Евтушенко Ю. Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
3. **Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф.** Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. К.: Наукова думка, 1985. 304 с.
4. **Мартынюк Д. И.** Лекции по качественной теории разностных уравнений. К.: Наукова думка, 1972. 246 с.
5. **Гаращенко О. Ф., Кириченко Н. Ф.** Об одном методе последовательного построения матриц ортогональных преобразований // Проблемы управления и информатики. 2005. № 1. С. 75—87.
6. **Гаращенко Ф. Г., Дегтяр О. С., Швець О. Ф.** Адаптивные модели аппроксимации сигналов в структурно-параметрических классах функций // Проблемы управления и информатики. 2011. № 2. С. 69—77.
7. **Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П.** Применение псевдообратных и проекционных матриц к исследованию задач управления, наблюдения и идентификации // Кибернетика и системный анализ. 2002. № 4. С. 107—124.
8. **Кириченко Н. Ф., Лепеха Н. П.** Возмущение псевдообратных и проекционных матриц и их применение к идентификации линейных и не линейных зависимостей // Проблемы управления и информатики. 2001. № 1. С. 6—22.

Adaptive Approximation of Signals

F. G. Garashchenko, fedirf47@gmail.com, **V. T. Matvienko,** matvienko.vt@gmail.com,
National Taras Shevchenko University, Kyiv, 01033, Ukraine

Corresponding authors: **Matvienko Vladimir T.,** Ph. D., Associate Professor,
Faculty of Computer Science and Cybernetics of National Taras Shevchenko University,
Kyiv, Ukraine, e-mail: matvienko.vt@gmail.com

Accepted on August 07, 2017

A lot of works devoted to the problems of approximation both continuous and discrete signals. But, in spite of this, important practical problems arise, especially in the field of Informatics and applied mathematics, which require development and testing of new approaches of experimental data approximation. First of all it is connected with the fact that data processing is conducted in the majority in real time. Besides, strict conditions are laid down on the developed algorithms: they must be constructive in programming for optimal performance and real-time problem solving. Approaches to the approximation of the continuous processes are proposed, but on their basis it is easy to derive discrete counterparts. As a rule, in applied tasks signals into discrete moments are measured. Thats why differencing schemes can prove to be more effective for use. When using the proposed algorithms the questions of analysis of convergence of the following iterative procedures arise. It can be done on the basis of Lyapunov methods and special criteria of stability. Adaptive signals approximation models in structural-parametric classes of functions are considered. Approximation is made by using an iterative procedure in the form of an ordinary differential equations system. In order to confirm the effectiveness of the proposed approach, software for simulated examples and real problems testing was developed.

Conditions for the convergence of the iterative scheme for approximating signals, which are based on Lyapunov stability theory, are given. Suggested methods can be effectively applied for the detection of chemical and biological analysis of the spectral data. To demonstrate the effectiveness model examples for the approximation of the continuous signals are given.

Keywords: *adaptive approximation, dynamical system, optimization, pseudoinversion, iterative scheme, convergence*

For citation:

Garashchenko F. G., Matvienko V. T. Adaptive Approximation of Signals, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie,* 2018, vol. 19, no. 5, pp. 306—311.

DOI: 10.17587/mau.19.306-311

References

1. **Ahiezer N. I.** *Lektsii po teorii approksimatsii* (Lectures on the theory approximation), Moscow, Nauka, 1965, 407 p. (in Russian).
2. **Evtushenko U. G.** *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach i ikh primeneniye v sistemakh optimizatsii* (Methods for solving extremal problems and their application in optimization systems), Moscow, Nauka, 1982, 432 p. (in Russian).
3. **Bublik B. N., Garashchenko F. G., Kirichenko N. F.** *Strukturno-parametricheskaya optimizatsiya i ustoychivost' dinamiki puchkov* (Structural-parametric optimization and stability of beam dynamics), Kiev, Naukova dumka, 1985, 304 p. (in Ukraine).
4. **Martynuk D. I.** *Lektsii po kachestvennoy teorii raznostnykh uravneniy* (Lectures on the qualitative theory of difference equations), Kiev, Naukova dumka, 1972, 246 p. (in Ukraine).
5. **Garashchenko F. G., Kirichenko N. F.** *Ob odnom metode posledovatel'nogo postroyeniya matrits ortogonal'nykh preobrazovaniy* (On a method of sequential construction of matrices of orthogonal transformations), *Problemy Upravleniya i Informatiki*, 2005, no. 1, pp. 75—87 (in Ukraine).
6. **Garashchenko F. G., Dehtiar O. S., Shvets O. F.** *Adaptivnyye modeli approksimatsii signalov v strukturno-parametricheskikh klassakh funktsiy* (Adaptive models of signal approximation in structure-parametric classes of functions), *Problemy Upravleniya i Informatiki*, 2011, no. 2, pp. 69—77 (in Ukraine).
7. **Kirichenko N. F., Lepeha N. P.** *Primeneniye psevdoobratnykh i proyektsionnykh matrits k issledovaniyu zadach upravleniya, nablyudeniya i identifikatsii* (Application of pseudoinverse and projection matrices to the study of control, observation and identification problems), *Kibernetika i Sistemnyy Analiz*, 2002, no. 4, pp. 107—124 (in Ukraine).
8. **Kirichenko N. F., Lepeha N. P.** *Vozmushcheniye psevdoobratnykh i proyektsionnykh matrits i ikh primeneniye k identifikatsii lineynykh i ne lineynykh zavisimostey* (Perturbation of pseudoinverse and projection matrices and their application to the identification of linear and nonlinear dependencies), *Problemy Upravleniya i Informatiki*, 2001, no. 1, pp. 6—22 (in Ukraine).