

Т. Г. Рзаев, д-р техн. наук, проф., rzayev.tg@gmail.com,
Азербайджанский технический университет, г. Баку

Оптимальное управление переходными процессами объектов по быстродействию в многокритериальной среде

Статья посвящена анализу известных задач оптимального управления по быстродействию (ОУБ) и методам их решения. Показано, что использование в этих задачах единственного критерия — критерия быстродействия — недостаточно отражает реальные ситуации, так как решение задачи ОУБ в реальных ситуациях приводит к отклонению от номинальных или собственно оптимальных значений ряда других показателей, в частности, к увеличению затрат ресурсов для реализации оптимального управления, ухудшению количественных и качественных характеристик некоторых из выходных переменных рассматриваемого объекта и т.п. Исходя из этого рассмотрено обобщение задачи ОУБ с учетом других показателей как критерия оптимального управления. В этом аспекте проведен анализ трех обобщенных постановок задачи ОУБ, где в первой постановке задача ОУБ расширена с учетом дополнительных ограничений на другие показатели; во второй постановке в качестве критериев наряду с критерием быстродействия также использованы другие показатели; а в третьей постановке рассмотрено расширение второй постановки с введением ограничений также на сами критерии, сформированные из других учетных показателей. В последних двух многокритериальных задачах принимается, что критерии быстродействия имеют предпочтительность перед другими критериями и, разумеется, что степень такой предпочтительности в каждом конкретном случае определяется лицом, принимающим решение, или экспертным путем.

В статье в качестве предмета исследования рассмотрена третья многокритериальная задача и проведено обобщение (свертка) критериев при известных числовых значениях коэффициентов относительной важности (предпочтительности) последних. С исследованием обобщенного критерия рассматриваемая многокритериальная задача представлена как однокритериальная и получено необходимое условие оптимальности этой задачи в виде принципа максимума. Показано, что оптимальное управление, найденное из этого условия, в отличие от решения традиционной задачи оптимального управления по быстродействию, наряду с сопряженными переменными также зависит от коэффициентов относительной важности критериев, что проиллюстрировано на примере.

Ключевые слова: оптимальное управление, критерии, весовые коэффициенты, компромисс, быстродействие, ограничение, многокритериальное, обобщенный критерий, множители Лагранжа, сопряженные переменные

Введение

Задача быстродействия в открытых системах была одной из важных в вариационном исчислении, созданном еще в XVII—XVIII веках. Однако в системах управления (в системах программного управления с обратной связью) она начала свое бурное развитие с середины XX века. В этом существенную роль сыграли результаты научных исследований сотрудника института "Автоматики и телемеханики" СССР проф. А. А. Фельдбаума. В 1953 г. А. А. Фельдбаум в своем докладе на II Всесоюзной конференции по теории регулирования и в 1954 г. в нескольких докладах на семинаре, организованном Л. С. Понтрягиным, сформулировал некоторые задачи оптимального управления линейными объектами по быстродействию с ограничениями на управление в виде позиционных ограничений. Таким образом, было положено начало новому направлению — теории современных оптимальных систем управления [1, 2]. В этих работах А. А. Фельдбаум вначале рассматривал задачу оптимального быстродействия переходных процессов в объ-

ектах с двойным интегратором, представленную в виде

$$T \rightarrow \min \quad (1)$$

при

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u; \quad x(0) = x^{(0)}; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^{(0)}; \quad (2)$$

$$x(T) = x^{(T)}; \quad \dot{x}(T) = \dot{x}^{(T)}; \quad \underline{u} \leq u \leq \bar{u}, \quad (3)$$

где T — нефиксированное время переходного процесса в объекте; x — фазовая переменная объекта; u — скалярное управляющее воздействие; $\underline{u}, \bar{u}$ — ограничения на u ; $\bar{x}^{(0)}, \dot{x}^{(0)}, \bar{x}^{(T)}, \dot{x}^{(T)}$ — начальные и граничные значения $x(t), \dot{x}(t)$ соответственно.

В дальнейших исследованиях модель объекта постепенно усложнялась. Вначале она представлялась как модель механического колебания без трения:

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_0 x = u, \quad (4)$$

с трением

$$a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = u \quad (5)$$

и, наконец, как модель более общего вида

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = u. \quad (6)$$

Во всех случаях имело место позиционное ограничение на u . При расширении задачи быстрогодействия и реализации полученного решения использовалось представление уравнений (2)–(6) в виде уравнений Коши, т.е. в виде системы уравнений первого порядка, число которых соответствует старшему порядку исходного уравнения.

Основные результаты, полученные в работе А. А. Фельдбаума [1, 3], можно представить так:

- 1) оптимальное управление в линейных системах — знакопостоянная функция;
- 2) оптимальная траектория при использовании моделей (2), (4), (5) после определенного момента времени сходится к скользящему режиму;
- 3) теорема об n интервалах, где n — высший порядок производных в модели. Эта теорема утверждает, что знак знакопостоянного управления за период T меняется $n - 1$ раз. Следовательно, при использовании моделей (2), (4), (5) — один раз.

Доказательство этой теоремы основывалось на инженерной интуиции и логике.

Появление принципа максимума Понтрягина [4] создало благоприятное условие для бурного развития работ в данном направлении. Первая работа по принципу максимума, опубликованная в 1956 г. [5], содержала (в форме гипотезы) принцип, ведущий к решению общей задачи оптимально-программного управления по быстромудействию. В работе [10] Г. В. Гамкрелидзе более строго математически доказал теорему об n интервалах. Работы в этом направлении интенсивно развивались как в теоретическом, так и в прикладном аспекте.

Авторов, занимающихся теоретическими аспектами задач быстрогодействия, в основном интересуют вопросы выявления новых свойств, особенностей развития и обобщения данной задачи, усовершенствование имеющихся, разработка новых, более эффективных методов, алгоритмов их анализа и синтеза и т.п. В этом направлении большие заслуги имеют известные ученые Р. Габасов, Ю. М. Ермолов, Ф. М. Кириллова, В. Ф. Кротов и их учени-

ки. А авторов прикладных работ больше всего интересуют возможности использования полученных научных достижений в управлении конкретными объектами. В таких работах эффект от управления по быстромудействию определяется в виде сокращения времени ΔT_δ :

$$\Delta T_\delta = T_n - T_\delta, \quad (7)$$

где T_δ — период управления по быстромудействию; T_n — период переходного процесса при обычном (нормальном) режиме управления.

Публикация работ Дубовицкого, Милюткина в шестидесятых годах XX века [7, 8] сыграла важную роль в развитии и расширении области применения задач оптимального управления, в том числе быстрогодействия на основе принципа максимума. В этих работах был разработан и обоснован метод учета ограничений на текущие значения фазовых переменных в оптимальном управлении.

Несмотря на популярность задачи ОУБ и достигнутые успехи по анализу такой задачи [3–6], [9–15], в опубликованных работах недостаточное внимание уделяют обоснованию экономического эффекта такого управления. Следовательно, не обосновывается экономическая целесообразность постановки и решения задач быстрогодействия в каждой конкретной ситуации. Это связано с тем, что во многих ситуациях задача быстрогодействия не обладает абсолютной предпочтительностью перед другими задачами оптимального управления по другим показателям. Объекты управления характеризуются многими показателями, такими как, например, энергетические, метрологические, надежностные, экологические и т.п.; показателями переходных процессов — перерегулированием, степенью затухания колебаний, статическими и динамическими ошибками, временем переходных процессов и т.д. Существует ряд таких показателей, которые находятся в компромиссе между собой. Поэтому попытка оптимального управления по каждому из указанных показателей, в том числе по быстромудействию, приводит к отклонению от собственно оптимальных или номинальных значений других показателей, следовательно, к определенным потерям. Таким образом, ОУБ каждым объектом сопровождается определенными потерями в ряде других показателей. Поэтому известные задачи ОУБ применимы лишь при их абсолютной предпочтительности перед задачами оптимального управления по другим показателям. Такие обстоятельства возникают

при управлении некоторыми стратегическими объектами, особенно в экстремальных ситуациях, например, атомным реактором при его остановке в аварийных ситуациях, летательными аппаратами при военных операциях, пуском и выводом на орбиту спутника и т.д. При ОУБ такими объектами потери по другим показателям не принимаются во внимание. Однако в подавляющем большинстве случаев, например, в производственных, технических, информационных и других системах приходится учитывать и потери по другим показателям, полученные при ОУБ, и для таких систем задача ОУБ не обладает абсолютной предпочтительностью. Следовательно, экономический эффект, рассчитанный по ΔT_8 , будет завышенным.

Одним из эффективных путей учета имеющихся потерь по другим показателям при ОУБ является рассмотрение такой задачи в многокритериальной среде. Здесь под термином "многокритериальная среда" понимается задача многокритериального оптимального управления (ЗМОУ) с учетом и других показателей, в которых задача ОУБ имеет предпочтение перед задачами управления по другим показателям. В таком случае ЗМОУ можно называть обобщенной задачей ОУБ. В случае, когда степень предпочтения (важности) задачи ОУБ не превосходит наибольшую степень предпочтения задач оптимального управления по другим показателям, обобщенная задача ОУБ приобретает смысл обычной традиционной ЗМОУ.

Наряду с вышесказанным также следует отметить, что учет в традиционных задачах ОУБ только лишь позиционных ограничений вида (4) на управляющие воздействия снижает ее практическую значимость, так как реализация такой задачи ориентируется на свободное использование ресурсов для управления рассматриваемым объектом при условии (4), например, из складов (емкостей), сетей, трубопроводов и т.п. В то же время на практике часто имеются ограничения как на общие затраты ресурсов для реализации управляющих воздействий и других ресурсов на период управления, так и на количества некоторых продуктов, получаемых на данном объекте за этот период. А учет таких ограничений способствует значительному усложнению задачи ОУБ и снижает ее реализуемость.

В связи с вышесказанным обобщение и решение задачи ОУБ с ее неабсолютной предпочтительностью перед задачами оптимального управления по другим показателям представ-

ляются актуальными как в теоретическом, так и в прикладном аспектах.

Постановка задачи

Для математической формализации обобщенной задачи ОУБ с учетом вышесказанного принимается, что как период управления, так и рассматриваемые другие показатели объекта в общем случае зависят от переменных состояния (фазовых переменных) x_i , $i = \overline{1, n}$, управляющих u_j , $j = \overline{1, r}$, и контролируемых возмущающих z_l , $l = \overline{1, h}$, воздействий объекта. Показатели, подлежащие оптимизации, обозначим Q_α , $\alpha = \overline{1, M}$, где M — число показателей, причем Q_1 — период управления. Очевидно, что все показатели имеют определенные экономические значимости.

Учет показателей Q_α , $\alpha = \overline{2, M}$, в задаче быстрогодействия отвечает системным требованиям и делает ее многокритериальной. Такую задачу можно представить в следующих трех формах.

1. Однокритериальное представление задачи, где в качестве критерия используется период управления. В такой задаче экспертным путем либо исходя из определенного соображения, либо из регламентов нормального ведения процессов в объекте определяются ограничения на другие показатели $Q_\alpha : Q_\alpha \geq \underline{Q}_\alpha$, $\alpha = \overline{2, M}$, следовательно, сохраняется однокритериальность задачи быстрогодействия. Кстати, так поступали до появления теории многокритериальной оптимизации.

2. Многокритериальное представление задачи с явным предпочтением Q_1 перед Q_α , $\alpha = \overline{2, M}$:

$$Q_\alpha \rightarrow \min, \alpha = \overline{1, M}, \quad (8)$$

при условиях (3), (6) и $\rho_1 > \rho_\alpha$, $\alpha = \overline{2, M}$, где ρ_α — относительная важность (весовой коэффициент) Q_α , причем $\sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha = 1$, $\rho_\alpha \geq 0$.

3. Многокритериальное представление задачи с одновременным предъявлением ограничений на некоторые или все критерии (показатели) Q_α , $\alpha = \overline{2, M}$, т.е. задачи вида:

$$Q_\alpha \rightarrow \min, \alpha = \overline{1, M}, \quad (9)$$

при условии (3), (6), $\rho_1 > \rho_\alpha$ и

$$Q_\alpha \geq \underline{Q}_\alpha, \alpha = \overline{2, M}, \quad (10)$$

где $\underline{Q}_\alpha$ — ограничение на Q_α снизу. Такие ограничения позволяют учитывать желания лица,

принимаящего решения (ЛПР), относительно нижних предельных значений Q_α , $\alpha = \overline{2, M}$.

Из представленных задач наиболее общей и адекватной реальности является третья задача.

Из-за наличия компромисса между Q_1 и некоторыми из показателей Q_α , $\alpha = \overline{2, M}$, при любой форме учета показателей в представленных задачах справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Время $T_\delta(Q_\alpha)$ управления по быстрдействию при учете показателей Q_α , $\alpha = \overline{2, M}$, не меньше оптимального значения времени управления по быстрдействию T_δ :

$$T_\delta(Q_\alpha) \geq T_\delta. \quad (11)$$

Теорема 2. При существовании множества компромиссов (множество Парето) компромиссно-оптимальное значение времени управления по быстрдействию строго больше его оптимального значения:

$$T_\delta(Q_\alpha) > T_\delta. \quad (11')$$

Доказательство теорем

В первой задаче предъявление ограничений на показатели Q_α в общем случае сужает область управления по быстрдействию, следовательно, при этом справедливо отношение (11).

Во второй задаче наличие компромисса между Q_1 и Q_α , $\alpha = \overline{2, M}$, при $\rho_\alpha < 1$ приводит к увеличению оптимального значения Q_1 , следовательно, исходное множество сужается до множества компромиссов (Парето). Таким образом, в данном случае справедливо отношение (11').

В третьей задаче, помимо компромисса между Q_1 и Q_α , $\alpha = \overline{2, M}$, также существуют ограничения на эти показатели, определяемые исходя из технико-экономических требований. Эти ограничения только лишь могут усиливать утверждение по второй задаче.

Из теорем при соответствующих ограничениях в задачах 1—3 вытекает следующее следствие:

$$T_\delta^{(1)} \leq T_\delta^{(2)} \leq T_\delta^{(3)}, \quad (12)$$

где верхние индексы соответствуют номерам рассматриваемых форм представления многокритериальной задачи, т.е. обобщенных задач ОУБ.

При отсутствии контролируемых возмущающих воздействий в объекте z_l , $l = \overline{1, h}$, или при известном прогнозе последних при их наличии обобщенную задачу быстрдействия с учетом показателей Q_α , $\alpha = \overline{2, M}$, ограниче-

ний на эти и на другие показатели данного объекта управления можно представить в следующем общем виде:

$$Q_\alpha = \int_{t_0}^T F_\alpha(x(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad \alpha = \overline{1, M}, \quad (13)$$

при условиях

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x^{(0)}, \quad x(T) = x^{(T)}; \quad (14)$$

$$Q_\alpha = \int_{t_0}^T F_\alpha(x(t), u(t)) dt \geq b_\alpha, \quad \alpha = \overline{2, M}; \quad (15)$$

$$Q_i = \int_{t_0}^T g_i(x(t), u(t)) \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} l(x(t), u(t)) &\leq b_l(t), \quad i = \overline{1, m_t}, \\ |u(t)| &\leq \bar{u}(t); \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha = 1, \quad \rho_\alpha \geq 0, \quad \alpha = \overline{1, M}, \quad \rho_1 > \rho_\alpha, \quad \alpha = \overline{2, M}, \quad (18)$$

где x , u — n -, r -мерные векторы, $x \in R^n$, $u \in R^r$; $f(\cdot)$ — n -мерная непрерывная вектор-функция. Для линейного стационарного объекта

$$f(x(t), u(t)) = Ax + Bu,$$

в которой A , B — $n \times n$ -, $n \times r$ -мерные матрицы; F_α , g_i — непрерывные функции своих аргументов, из которых g_i выражают другие показатели объекта ($i \neq \alpha$); b_α , b_i — ограничения на интегралы функций $F_\alpha(\cdot)$, $g_i(\cdot)$, $l(\cdot)$ — функции локальных ограничений; $b_l(t)$ — ограничения на эти функции; $x^{(0)}$ — начальное значение $x(t)$.

Уравнение (14) является векторным представлением системы дифференциальных уравнений n -го порядка Коши рассматриваемого объекта.

Методы решения задачи

Для решения поставленной задачи более эффективным представляется принцип максимума. Для решения задачи (13)—(17) с применением принципа максимума удобно ее представить в виде задачи Майера. С этой целью вводятся новые переменные

$$\begin{aligned} x_\alpha(t) &= \int_{t_0}^t F_\alpha(x(t), u(t)) dt, \quad \alpha = \overline{1, M}; \\ x_i(t) &= \int_{t_0}^t g_i(x(t), u(t)) dt, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (19)$$

и соответствующие дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx_\alpha}{dt} &= F_\alpha(x(t), u(t)), x_\alpha(0) = x_\alpha^{(0)}, \alpha = \overline{1, M}; \\ \frac{dx_i}{dt} &= g_i(x(t), u(t)), x_i(0) = x_i^{(0)}, i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $x_\alpha^{(0)}, x_i^{(0)}$ — начальные значения x_α, x_i соответственно.

С учетом новых переменных задача Майера представляется в виде

$$x_\alpha(T) \rightarrow \min, \alpha = \overline{1, M}, \quad (21)$$

при условиях (14), (17), (20) и

$$x_\alpha(T) \geq b_\alpha, \alpha = \overline{2, M}, x_i(T) \leq b_i, i = \overline{1, m}. \quad (22)$$

Для простоты изложения целесообразно объединить дифференциальные уравнения (15), (20) и представить их в виде одной системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x(t), u(t)), x_i(0) = x_i^{(0)}, \\ i &= \overline{1, \tilde{n}}, \tilde{n} = n + m + M. \end{aligned} \quad (23)$$

Важным этапом в решении многокритериальной задачи (13)—(17) является обобщение критериев Q_α и сведение ее к однокритериальной. А способы обобщения критериев зависят от вида априорной информации об относительной важности критериев. По этому признаку можно выделить следующие ситуации [17, 18].

1. Известны весовые коэффициенты критериев — ρ_α , где

$$\sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha = 1, \rho_\alpha \geq 0.$$

2. Известны интервалы изменения ρ_α : $[\underline{\rho}_\alpha, \bar{\rho}_\alpha]$.

3. Известно, что критерии равнозначны:

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_M = \frac{1}{M}.$$

4. Известно ранжирование критериев: $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \dots > \rho_M$.

5. Известно бинарное отношение предпочтения критериев: $\mu_{\alpha\alpha'}, \alpha, \alpha' = \overline{1, M}$.

6. Отсутствует информация об относительной важности критериев.

Каждый из указанных видов информации, в свою очередь, по характеру информации можно разделить на следующие группы: детерминированную, стохастическую, нечеткую информацию.

Все указанные в п. 1—5 виды информации в основном определяются либо экспертным путем, либо с использованием аналитических выражений Q_α (функций полезности), либо

в диалоговом режиме с привлечением аналитических методов.

Как следует из вышеизложенного, в обобщенной задаче быстрогодействия (13)—(17) в обобщенном критерии по каждому виду информации имеется в виду, что наиболее предпочтительным является первый критерий: $Q_1 = T_\delta$. На примере обобщенного критерия по первому виду информации это означает, что $\rho_1 > \rho_\alpha, \alpha = \overline{2, M}$. Усиливая это отношение, можно усилить степень важности управления по быстромудействию, например $\rho_1 \geq \sum_{\alpha=2}^M \rho_\alpha$. При $\rho_1 = 1$ получаем традиционную задачу ОУБ, т.е. задачу управления по единственному критерию $Q_1 = T$. Таким образом, изменяя соотношения между ρ_1 и $\rho_\alpha, \alpha = \overline{2, M}$, можно получить задачу управления по быстромудействию с любой степенью предпочтения. А это является главным достоинством представления задачи оптимального управления по быстромудействию в среде многокритериальной оптимизации, т.е. обобщенной задачи ОУБ.

Существуют способы обобщения (свертки) критериев $Q_\alpha, \alpha = \overline{1, M}$, при указанных видах информации [16, 18]. Однако как при анализе многокритериальных задач оптимального управления (МЗОУ), так и в их практических приложениях широко используют аддитивный обобщенный критерий, составленный по первому виду информации о ρ_α . Это связано, с одной стороны, с тем, что довольно часто удается экспертным путем определить числовые значения $\rho_\alpha, \alpha = \overline{1, M}$, а с другой — такой обобщенный критерий имеет структуру, удобную для анализа соответствующих оптимизационных задач.

Обобщенный критерий, составленный по первому виду информации, представляется в виде

$$Q = \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha Q_\alpha \quad (24)$$

с учетом условий (18).

С использованием обобщенного критерия (24) многокритериальная задача (13)—(17) представляется как однокритериальная вида

$$Q = \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha Q_\alpha \rightarrow \min \quad (25)$$

при условиях (15)—(17), (23).

Соответствующая однокритериальная задача Майера имеет вид

$$x(T) = Q = \int_{t_0}^T \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha x_\alpha(T) \rightarrow \min \quad (26)$$

при условиях (17), (23) и

$$x_\alpha(T) \geq b_\alpha, \alpha = \overline{2, M}, x_i(T) \leq b_i, i = \overline{1, m}, \quad (27)$$

где $x(T)$ является интегрированным значением за период $\overline{t_0, T}$ обобщенной фазовой переменной:

$$x(t) = \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha x_\alpha(t) = \int_{t_0}^t \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha F_\alpha(x(t), u(t)) dt. \quad (28)$$

Уравнение движения по обобщенной фазовой переменной имеет вид

$$\dot{x} = \sum_{\alpha=1}^M \dot{x}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha F_\alpha(x(t), u(t)). \quad (29)$$

Из условия аддитивности уравнения (29) можно получить уравнение движения по составляющим x_α :

$$\dot{x}_\alpha = \rho_\alpha F_\alpha(x(t), u(t)), \alpha = \overline{1, M}, \quad (30)$$

т.е. соответствующие уравнения в соотношениях (20), где $F_1(x), u(t) = 1$.

Для решения рассматриваемой задачи, приведенной к виду задачи Майера, составляется обобщенная функция Лагранжа:

$$\begin{aligned} J(x, \psi, \lambda, u) = & \sum_{\alpha=1}^M \rho_\alpha x_\alpha(T) + \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \rho_i \psi_i(t) (\dot{x}_i - f_i(x(t), u(t))) + \\ & + \sum_{i=1}^m \lambda_i (b_i - x_i(T)) + \sum_{\alpha=2}^M \lambda_\alpha (x_\alpha(T) - b_\alpha) \end{aligned} \quad (31)$$

и ставится задача

$$J(x, \psi, \lambda, u) \rightarrow \min_{u(t)} \max_{\psi(t), \lambda} \quad (32)$$

при условиях (17), где ψ_i — сопряженные переменные, которые в соотношении (31) выступают как множители Лагранжа, учитывающие ограничения вида дифференциальных уравнений (23); $\lambda_i, \lambda_\alpha$ — множители Лагранжа, учитывающие граничные условия на $x_i, i = \overline{1, m}$, и $x_\alpha, \alpha = \overline{2, M}$, т.е. ограничение (27).

Для общности под второй суммой выражения (31) для всех индексов $x_i, i = \overline{1, \tilde{n}}$, введены множители ρ_i . Однако при этом имеется в виду, что $\rho_i = 1$ для индексов $i = \overline{1, n+m}$; $\rho_i = \rho_\alpha$ для индексов $i = \overline{n+m+1, \tilde{n}}$.

Учитывая, что в выражении (31) $u(t)$ зависит только лишь от функций f_i и эти функции входят в (31) аддитивно, задачу (32) при ограничениях (17) можно представить в виде последовательности более простых статических

задач оптимизации со своими специфическими особенностями:

$$\begin{aligned} H(x, \psi, u^0) = & \max_{u(t)} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \rho_i \psi_i(t) f_i(x(t), u(t)), \\ & t = \overline{t_0, T}, \end{aligned} \quad (33)$$

которые выражают необходимые условия оптимальности принципа максимума в соответствующие моменты времени, где u^0 — значение u , максимизирующее H (гамильтониан); сопряженные переменные ψ_i определяются из решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{\psi}_i(t) = \frac{\partial J}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\psi_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, i = \overline{1, \tilde{n}}. \quad (34)$$

При граничных условиях:

$$\psi_i(T) = \frac{\partial J}{\partial x_i(T)}$$

для индексов $i = \overline{n+1, n+m+M}$,

$$\psi_i(T) = 0 \text{ для индексов } i = \overline{1, n}, \quad (35)$$

$$\psi_i(T) = -1 \text{ для индексов } i = \alpha = \overline{1, M}. \quad (36)$$

В общем случае оптимальное значение управления — $u(t)$, доставляющее максимум функции H в (33), будет зависеть от значений $\rho_\alpha, x(t), \psi(t)$: $u^0(t) = \mu(\rho_\alpha, x(t), \psi(t))$. Такая зависимость представляет собой закон оптимального управления в обобщенной однокритериальной задаче (26).

Пример. Рассмотрим линейную задачу многокритериального оптимального управления следующего вида:

$$\begin{aligned} Q_1 = & \int_0^T dt = T \rightarrow \min; \\ Q_2 = & \int_0^T (cx(t) + du(t)) dt \rightarrow \min; \\ Q_3 = & \int_0^T u(t) dt \rightarrow \min \end{aligned} \quad (37)$$

при условиях

$$\dot{x} = ax(t) + bu(t), x(0) = x^{(0)}, \quad (38)$$

$$\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t), \quad (39)$$

где $u(t), x(t)$ — скалярные переменные; c, d, a, b — известные числа.

Необходимое условие оптимальности (33) для этой задачи имеет следующий вид:

$$H(x, \psi, u^0) = \max[\psi_0(t)Q + \psi_1(t)\rho_1 + \psi_2(t)\rho_2(cx(t) + du(t)) + \psi_3(t)\rho_3u(t) + \psi(t)(ax(t) + bu(t))]. \quad (40)$$

Учитывая, что в (40) $\psi_0 = -1$, и группируя слагаемые с $u(t)$, получим

$$H(x, \psi, u^0) = \max[-Q + \psi_1(t)\rho_1 + \psi_2(t)\rho_2cx(t) + \psi(t)ax(t) + (\psi_2(t)\rho_2d + \psi_3(t)\rho_3 + \psi(t)b)u(t)]. \quad (41)$$

Закон оптимального управления исходя из (41) можно записать в виде

$$u^0(t) = \text{sign}(-\psi_2(t)\rho_2d + \psi_3(t)\rho_3 + \psi(t)b) = \begin{cases} \bar{u}(t), & \text{если } (\psi_2(t)\rho_2d + \psi_3(t)\rho_3 + \psi(t)b) > 0; \\ \underline{u}(t), & \text{если } (\psi_2(t)\rho_2d + \psi_3(t)\rho_3 + \psi(t)b) < 0. \end{cases} \quad (42)$$

Здесь $\psi_2(t)$, $\psi_3(t)$, $\psi(t)$ определяются из решения следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_2 &= -\rho_2\psi_2(t), \quad \psi_2(T) = \lambda_2; \\ \dot{\psi}_3 &= 0, \quad \psi_3(T) = \lambda_3; \\ \dot{\psi} &= a\psi(t), \quad \psi(T) = 0, \end{aligned}$$

где λ_2 , λ_3 — множители Лагранжа, учитывающие ограничения на Q_2 и Q_3 соответственно в обобщенной функции Лагранжа (31), составленной для данного примера.

Из рассмотрения соотношения (42) можно заметить, что закон оптимального управления, полученный для многокритериальной задачи, в отличие от однокритериальной, наряду с $\psi(t)b$ также зависит от $\psi_2(t)\rho_2d$, $\psi_3(t)\rho_3$, следовательно, момент переключения управления из одного в другое граничное значение будет отличаться от момента переключения в однокритериальной задаче. В связи с этим оптимальное значение T будет отклоняться от его собственно оптимального значения, что будет приводить к потере оптимальности по T .

Заключение

Рассмотрены и проанализированы традиционные задачи ОУБ. Показано, что использование абсолютной предпочтительности критерия быстрогодействия во многих реальных ситуациях не оправдывает себя и приводит к завышенной оценке эффективности от такого управления. Предлагается обобщение традиционных задач ОУБ путем учета других показателей при рас-

смотрении задачи ОУБ как многокритериальной задачи при условиях, что степень важности задачи ОУБ больше степеней важности задач оптимального управления по другим показателям. Такое обобщение способствует повышению адекватности и качества задачи ОУБ.

Список литературы

1. Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1953. Т. 14, № 6. С. 712–728.
2. Фельдбаум А. А. О синтезе оптимальных систем автоматического регулирования. Труды II Всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. М.: АН СССР, 1955. С. 325–360.
3. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1963. 552 с.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961. С. 393.
5. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов // Доклады АН СССР. 1958. Т. 22, № 1.
6. Гамкрелидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах // Известия. АН СССР, Серия математических наук. 1958. Т. 22, № 4. С. 449–472.
7. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задача на экстремум при наличии ограничений // ДАН СССР, 1963. Т. 149, № 4. С. 759.
8. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журнал выч. мат. и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 52–58.
9. Габасов Р., Кириллова Ф. М. и др. Методы оптимизации: Учеб. пособ. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
10. Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в пяти томах // Под редакцией К. А. Пупкова, Н. Д. Екупова. Т. 4. Теория оптимизации систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2004. 743 с.
11. Афанасьев Б. Н., Колмоновский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1987. 447 с.
12. Atassi A. N., Khalil M. K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems // IEEE. Trans. Automat. Control. 1999. Vol. 44, N. 9. P. 1672–1687.
13. Constantinescu D., Croft E. A. Smooth and Time — Optimal Trajectory Planning for Industrial Manipulators along Specified Paths // Journal of Robotic Systems. University of British Columbia, Vancouver, BC. Canada V6T1Z4. 2000. January 21. 17(5). P. 233–249.
14. Lipra Th., Boydb S. Minimum—time speed optimization over a fixed path // Mechanical Engineering. Stanford University. CA. USA. Electrical Engineering. Stanford University. CA. USA. December 2013. P. 1–15.
15. Hartl R. E., Sethi S. P., Vikson R. G. A survey of maximum principle with state constants // SIAM Rev. 2013. Vol. 37. P. 181.
16. Абдуллаев А. А., Рзаев Т. Г. Оптимизация оперативного и календарного планирования в интегрированных АСУ предприятиями. Баку: Элм, 1983. 235 с.
17. Рзаев Т. Г. Многокритериальная структурная идентификация производственных процессов // Известия НАН Азерб., серия физико-технических и математических наук. 2005. Т. 14, № 8. С. 120–126.
18. Рзаев Т. Г. Идентификация систем. I часть. Баку: Элм, 2007. 518 с.
19. Рзаев Т. Г. Современные проблемы управления // Материалы республиканской конференции "Современные проблемы автоматизации и управления". Баку, 2012. С. 16–34.
20. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 488 с.

Optimal Control of Transition Processes of Objects on Quick-Speed in a Multi-Criteria Environment

T. G. Rzaev, rzayev.tg@gmail.com

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

Corresponding author: **Rzaev Tofik Heydar**, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Automation and Control of the Azerbaijan Technical University, Azerbaijan, Baku, AZ 1065, e-mail: rzayev.tg@gmail.com

Accepted on January 10, 2020

Abstract

We analyze the known problems of optimal control of speed (OCS) and methods for their solution. It is shown that the use of the one criteria in these tasks (the speed criterion) does not sufficiently reflect real situations. The solution of the OCS problem in real situations leads to a deviation from the nominal or optimal values of a number of other indicators. Proceeding from this, a generalization of the OCS problem is considered taking into account other indicators as a criterion for optimal control. In this aspect, three generalized statements of the OCS problem are analyzed, where in the first formulation, the OCS task is expanded with additional constraints on other indicators; in the second setting, other indicators were used as criteria alongside with the performance criterion; and in the third formulation, the expansion of the formulation is considered with the introduction of restrictions also on the criteria themselves, formed from other measured indicators. In the article, the most general — the third multicriteria problem is considered as the subject of research and the necessary condition for optimality of its solution in the form of the maximum principle is obtained. A traditional and iterative scheme for solving the generalized by OCS problem is presented, based on the obtained necessary optimality condition, in contrast to the traditional criteria, which are also dependent on the degree of preference.

Keywords: optimum control, criteria, weight coefficients, compromise, limitation, quickness, multicriterion generalized criterion, Lagrange multipliers, conjugate variables

For citation:

Rzaev T. G. Optimal Control of Transition Processes of Objects on Quick-Speed in a Multi-Criteria Environment, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 200—207.

DOI: 10.17587/mau.21.200-207

References

1. Feldbaum A. A. Optimal processes in systems of automatic control, *Automation and Telemekhanics*, 1953, vol. 14, no. 6, pp. 712—728 (in Russian).
2. Fieldbaum A. A. On the synthesis of optimal automatic control systems. Proceedings of the II All-Union meeting on the theory of automatic control, Moscow, Academy of Sciences of the USSR, 1955, pp. 325—360 (in Russian).
3. Feldbaum A. A., Pontryagin L. S., Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. Fundamentals of the theory of optimal automatic systems, Moscow, Fizmatgiz, 1963, 552 p. (in Russian).
4. Pontryagin L. S., Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. The mathematical theory of optimal processes. Moscow, Nauka, 1961, pp. 393 (in Russian).
5. Boltyansky V. G., Gamkrelidze R. V., Pontryagin L. S. To the theory of optimal processes, *Reports of Academy of science of the USSR*, 1958, vol. 22, no. 1, pp. 10 (in Russian).
6. Gamkrelidze R. V. The theory of speed-optimal processes in linear systems. News, *USSR Academy of Sciences, a series of mathematical sciences*, 1958, vol. 22, no. 4, pp. 449—472.
7. Dubovitsky A. Y., Milyutin A. A. The problem of extremum in the presence of restrictions, *DAS USSR*, 1963, vol. 149, no. 4, pp. 759 (in Russian).
8. Dubovitsky A. Y., Milyutin A. A. Tasks for an extremum in the presence of restrictions, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1965, vol. 5, no. 3, pp. 52—58 (in Russian).
9. Gabasov R., Kirillova F. M. and etc. Optimization methods. Tutorial, Minsk, Four quarters, 2011, 472 p. (in Russian).
10. Pupkov K. A., Ekupov N. D. Methods of the classical and modern theory of automatic control. The textbook in five volumes, vol. 4. Theory of optimization of automatic control systems, Publishing House MSTU Bauman, 2004, 743 p. (in Russian).
11. Afanasyev B. N., Kolmonovsky V. B., Nosov V. R. The mathematical theory of designing control systems, Moscow, Higher school, 1987, 447 p. (in Russian).
12. Atassi A. N., Khalil M. K. A separation principle for the stabilization of class of nonlinear systems, *IEEE. Trans. Automat. Control*, 1999, vol. 44, no. 9, pp. 1672—1687.
13. Constantinescu D., Croft E. A. Smooth and Time — Optimal Trajectory Planning for Industrial Manipulators along Specified Paths, *Journal of Robotic Systems*. University of British Columbia, Vancouver. BC. Canada V6T1Z4. January 21, 2000, vol. 17(5), pp. 233—249.
14. Lippa Th., Boydb S. Minimum—time speed optimization over a fixed path, *Mechanical Engineering*. Stanford University. CA. USA. *Electrical Engineering*. Stanford University. CA. USA. December, 2013, pp. 1—15.
15. Hartl R. E., Sethi S. P., Vikson R. G. A survey of maximum principle with state constants, *SIAM Rev.*, 2013, vol. 37, pp. 181.
16. Abdullaev A. A., Rzaev T. G. Optimization of operational and scheduling in integrated automated control systems by enterprises, Baku, Elm, 1983, 235 p. (in Russian).
17. Rzaev T. G. Multicriteria structural identification of production processes. *Izvestiya NAS Azer.*, A series of physical, technical and mathematical sciences, 2005, vol. 14, no. 8, pp. 120—126 (in Russian).
18. Rzaev T. G. System identification. I part. Baku, Elm, 2007, p. 518 (in Russian).
19. Rzaev T. G. Modern management issues, *Materials of the republican conference "Modern problems of automation and control"*, Baku, 2012, pp. 16—34 (in Russian).
20. Fedorenko R. P. An approximate solution to optimal control problems, Moscow, Science, Main Edition of the Physics and Mathematics Literature, 1978, 488 p. (in Russian).