

И. Б. Фуртат, д-р техн. наук, проф., вед. науч. сотр., cainenash@mail.ru,

П. А. Гущин, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., guschin.p@mail.ru,

А. А. Перегудин, аспирант, zeeless@mail.ru,

Институт проблем машиноведения РАН, Университет ИТМО, Санкт-Петербург

Подавление возмущений с минимизацией эллипсоидов, ограничивающих фазовые траектории системы в переходном и установившемся режимах¹

Предложен новый метод подавления внешних неизвестных ограниченных возмущений в линейных динамических системах с известными параметрами. В отличие от известных результатов разработанный статический закон управления обеспечивает нахождение фазовых траекторий системы в эллипсоиде, который достаточно близок к шару, в котором находятся начальные условия, а также обеспечивает наилучшую точность регулирования в установившемся режиме. Для решения задачи используется аппарат функций Ляпунова и техника линейных матричных неравенств. Дополнительно к разрешимости линейных матричных неравенств предложена схема поиска матрицы, которая обеспечивает наименьший эллипсоид в переходном режиме с малой погрешностью. Предложенная схема управления расширяется на управление линейными системами в условиях больших возмущений, для подавления которых используется интегральный закон управления. Приведены сравнительные примеры предложенного метода и метода инвариантных эллипсоидов. Показано, что при определенных условиях фазовые траектории замкнутой системы, полученные на базе метода инвариантных эллипсоидов, находятся недалеко от границ наименьшего эллипсоида для переходного режима, в то время как полученный закон управления гарантирует сходимость фазовых траекторий к наименьшему эллипсоиду в установившемся режиме.

Ключевые слова: подавление возмущений, оптимизация, линейное матричное неравенство

Введение

Несмотря на то что проблема подавления возмущений насчитывает несколько десятилетий, и ей посвящено достаточно большое число решений, до сих пор она является одной из центральных в теории автоматического управления. С одной стороны, интерес к данной задаче вызван множеством практических задач, которые связаны с управлением в условиях негативного действия внешней среды на процесс. С другой стороны, непрерывное развитие фундаментальных наук приводит к разработке новых и эффективных методов в теории управления. Одним из таких методов является метод линейных матричных неравенств (ЛМН) [1, 2].

Для задач подавления возмущений метод ЛМН позволил перейти от качественных условий устойчивости к количественным и решить ряд оптимизационных задач. Так, в работе [1] ищется решение задачи с минимизацией точности регулирования в установившемся режиме. Однако качество переходных процессов в работе [1] не затрагивается. В работах [3, 4] решена задача обеспечения переходных процессов в наименьшем эллипсоиде (осуществлялась минимизация следа матрицы эллипсоида). Однако точность регулирования в установившемся режиме в работах [3, 4] не рассматривалась. В данной работе будет предложен новый метод подавления возмущений, который будет учитывать качество переходных процессов и точность регулирования в установившемся режиме. Дополнительно будет исследована задача подавления неограниченных возмущений. В конце статьи будут приведены сравнительные примеры моделирования предложенного алгоритма и алгоритма, построенного на базе метода инвариантных эллипсоидов.

¹Исследование в разделе "Метод решения" выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в ИПМаш РАН. Исследование в разделе "Управление при больших возмущениях" выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00246) в ИПМаш РАН. Исследование в разделе "Примеры" выполнено в рамках гранта Президента Российской Федерации (МД-1054.2020.8) в ИПМаш РАН.

Постановка задачи

Рассмотрим объект управления, модель которого описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + Df, \quad (1)$$

где $x = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ — вектор состояния; $u = u(t) \in R^m$ — сигнал управления; $f = f(t) \in R^l$ — внешнее возмущение и $|f(t)| \leq \gamma$; $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ и $D \in R^{n \times l}$ — известные матрицы, пара (A, B) — управляема.

Рассмотрим шар, ограничивающий начальные условия (1) и заданный в виде

$$E_0 = \{x \in R^n: x^T x \leq R_0^2\}, \quad (2)$$

где $R_0^2 \geq x^T(0)x(0)$. Также рассмотрим эллипсоид, в котором находятся решения (1):

$$E = \{x \in R^n: x^T P^{-1} x \leq x_0^T P^{-1} x_0 + \delta\}, \quad (3)$$

где матрица $P = P^T > 0$ и точность регулирования $\delta > 0$, обусловленная наличием возмущений, будут определены в теореме 1. Требуется разработать алгоритм управления, который обеспечит устойчивость замкнутой системы и выполнение целевого условия

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} [x^T(t) P^{-1} x(t)] \leq \delta. \quad (4)$$

При этом разработанный алгоритм должен обеспечить минимизацию значения δ , а траектории (1) не должны выходить из эллипсоида (3), который должен быть достаточно близок к шару (2). Под достаточной близостью эллипсоида (3) к шару (2) понимается минимизация величины $\|P - I\|$.

Поясним более подробно идею поставленной задачи. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V = x^T Q x, \quad Q = P^{-1}. \quad (5)$$

Пусть $f \equiv 0$ и выполнено условие $\dot{V} \leq 0$ вдоль решений уравнения замкнутой системы при $P = I$. Следовательно, функция $V = x^T x$ невозрастающая, причем максимальное значение V соответствует значению $V(0) = x^T(0)x(0)$. Значит, траектории, начавшиеся в шаре (2), никогда его не покинут. Однако не всегда существует решение задачи в виде $P = I$, поэтому ставится задача поиска такой матрицы P , чтобы $\|P - I\| \rightarrow \min$. Если $f \neq 0$, то траектории, начавшиеся в шаре (2), могут покинуть его, а в установившемся режиме решения (1) не будут асимптотически стремиться к началу координат. Поэто-

му требуется дополнительно минимизировать величину δ , которая связана с наличием возмущенной составляющей в решении (1). Значение величины δ будет определено в теореме 1.

Вкратце рассмотрим отличие поставленной задачи от существующих решений. В работе [4] значение δ не определено, но отмечается, что оно может быть уменьшено за счет соответствующего выбора параметров алгоритма управления на этапе моделирования. В работах [5–7] приведена зависимость величины δ от параметров в замкнутой системы. В работе [1] ставилась задача минимизации величины δ , однако качество переходных процессов при этом не учитывалось, вследствие чего могли происходить большие отклонения регулируемой величины от положения равновесия. В работах [3, 4] предложенный алгоритм обеспечивал принадлежность решений (1) наименьшему эллипсоиду (минимизировался след матрицы эллипсоида), однако значение δ не регулировалось, поэтому оно могло принимать любые значения внутри эллипсоида. В отличие от работ [1, 3–6] в настоящей статье будет разработан алгоритм, обеспечивающий нахождение траекторий (1) в эллипсоиде (3) и обеспечивающий наилучшую точность регулирования в установившемся режиме.

Метод решения

Зададим статический регулятор в форме

$$u = Kx, \quad (6)$$

где $K^T \in R^n$, и перепишем уравнение замкнутой системы в виде

$$\dot{x} = (A + BK)x + Df. \quad (7)$$

Теорема 1. Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1) и закона управления (4). Пусть для заданного числа $\alpha > 0$ существует положительно определенная матрица P и число $\beta > 0$ такие, что

$$\beta + \|P - I\| \rightarrow \min; \quad (8)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} PA^T + AP + Y^T B^T + BY + \alpha P & D \\ * & -\beta I \end{bmatrix} \leq 0; \quad (9)$$

$$K = YP^{-1}. \quad (10)$$

Здесь "*" обозначает симметричный блок симметричной матрицы. Тогда траектории (1),

начавшиеся в шаре (2), не будут покидать эллипсоид (3), а при $t \rightarrow \infty$ траектории системы будут стремиться к предельному эллипсоиду (4), где

$$\delta = \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}. \quad (11)$$

Доказательство. Для исследования устойчивости замкнутой системы выберем функцию Ляпунова вида (5). Найдем условия, при которых будет выполнено неравенство

$$\dot{V} + \alpha V - \beta f^T f \leq 0. \quad (12)$$

Принимая во внимание соотношения (4) и (7), перепишем неравенство (12) в виде

$$[x^T \ f^T] \begin{bmatrix} (A+BK)^T Q + Q(A+BK) + \alpha Q & QD \\ * & -\beta I \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix} \leq 0. \quad (13)$$

Умножив матрицу в (13) слева и справа на $\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ * & I \end{bmatrix}$, получим матрицу Ψ . Тогда неравенство (13) будет выполнено, если выполнено условие (9). Следовательно, неравенство (12) также будет выполнено. Найдем решение (12) в виде

$$V \leq V(0)e^{-\alpha t} + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}). \quad (14)$$

Принимая во внимание (5) и оценку $V \leq V(0) + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}$, получим оценку $x^T P^{-1} x \leq x^T(0)P^{-1}x(0) + \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}$, которая определяет эллипсоид (3) с $\delta = \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}$. Вместе с тем, из неравенства (14) следует, что $\limsup_{t \rightarrow \infty} [x^T(t)P^{-1}x(t)] \leq \frac{\beta\gamma^2}{\alpha}$.

Это означает, что условие (4) выполнено, причем для заданных чисел α и γ минимальное значение β обеспечивает наименьшее значение δ в (3) и (4). В свою очередь, минимизация второго слагаемого в условии (8) обеспечивает "близость" эллипсоида (3) к шару (2). Теорема 1 доказана.

Замечание. В некоторых случаях результаты переходных процессов в замкнутой системе могут быть улучшены при замене (8) на условие $\beta \rightarrow \min$ и поиске матрицы P из следующих неравенств:

$$(1 + \varepsilon)[I - P] \geq 0 \text{ и } (1 - \varepsilon)[I - P] \leq 0, \quad (15)$$

где $\varepsilon \in [0; 1)$.

Управление при больших возмущениях

Далее найдем решение поставленной задачи, если закон управления задан в виде

$$u(t) = K_1 x(t) + K_2 \int_0^t x(s_1) ds_1 + K_2 \int_0^t \int_0^{s_1} x(s_2) ds_2 ds_1 + \\ + \dots + K_v \int_0^t \dots \int_0^{s_{v-1}} x(s_v) ds_1 \dots ds_{v-1}. \quad (16)$$

В отличие от (6) такой закон управления позволяет улучшить качество переходных процессов в замкнутой системе, если возмущение f неограниченно вместе с его $v - 1$ производными или возмущение принимает большие значения, в то время как его $v - 1$ производные принимают малые значения.

Обозначим:

$$z_1 = \int_0^t \dots \int_0^{s_{v-1}} x(s_v) ds_1 \dots ds_{v-1}, \\ z_2 = \int_0^t \dots \int_0^{s_{v-2}} x(s_{v-1}) ds_1 \dots ds_{v-1}, \dots, \\ z_{v-1} = \int_0^t x(s_1) ds_1, \quad z_v = x(t), \quad z_{v+1} = \dot{x}(t), \\ z = [z_1, z_2, \dots, z_v];$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A \end{bmatrix}; \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B \end{bmatrix};$$

$$K_p = [K_v \ \dots \ K_2 \ K_1]; \quad D_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ D \end{bmatrix}.$$

Подставив соотношение (16) в (1), перепишем результат в виде

$$\dot{z} = (A_p + B_p K_p)z + D_p f. \quad (17)$$

Теорема 2. Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1) и закона управления (16). Пусть для заданного числа $\alpha > 0$ существуют положительно определенная матрица P и число $\beta > 0$ такие, что выполнены условия (8) и

$$\Psi = \begin{bmatrix} PA_p^T + A_p P + Y^T B_p^T + B_p Y + \alpha P & D_p \\ * & -\beta I \end{bmatrix} \leq 0; \quad (18)$$

$$K_p = YP^{-1}. \quad (19)$$

Тогда траектории (1), начавшиеся в шаре (2), не будут покидать эллипсоид (3), а при $t \rightarrow \infty$ траектории системы будут стремиться к предельному эллипсоиду (4) с δ , заданной условием (14).

В силу идентичности структур уравнений (7) и (17) доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Примеры

Пример 1. Рассмотрим объект управления (1) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; B = D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и $f = 0,5 + 0,5 \cos t$.

На рис. 1 приведены результаты, полученные с помощью алгоритма из работы [4] и предложенного метода.

Из рис. 1 видно, что траектория системы, полученная с помощью алгоритма [4], не стремится к началу координат, а остается в эллипсе 1. Траектория системы, полученная с помощью разработанного метода, сходится в расчетную область с $\delta = 2,9 \cdot 10^{-4}$. Отметим также, что след матрицы эллипса 1 составляет 6,8, а след матрицы эллипса 3 составляет 2,0.

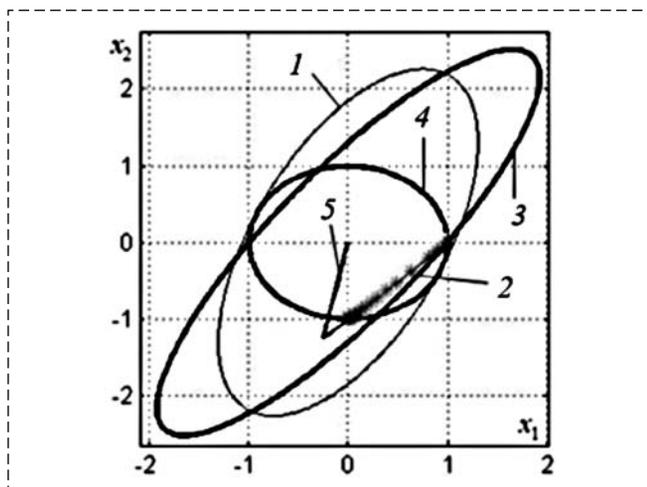


Рис. 1. Эллипс, полученный с помощью метода [4] (1); фазовая траектория системы, полученная с помощью метода [4] (2 (см. "*")); эллипс, полученный с помощью предложенного метода (3); окружность, ограничивающая начальные условия (4); траектория системы, полученная с помощью предложенного метода (5)

Fig. 1. The ellipse obtained by method [4] (1); the phase trajectory of the system obtained by method [4] (2 (see "*")); the ellipse obtained by the proposed method (3); the circle bounding the initial conditions (4); the system trajectory obtained by the proposed method (5)

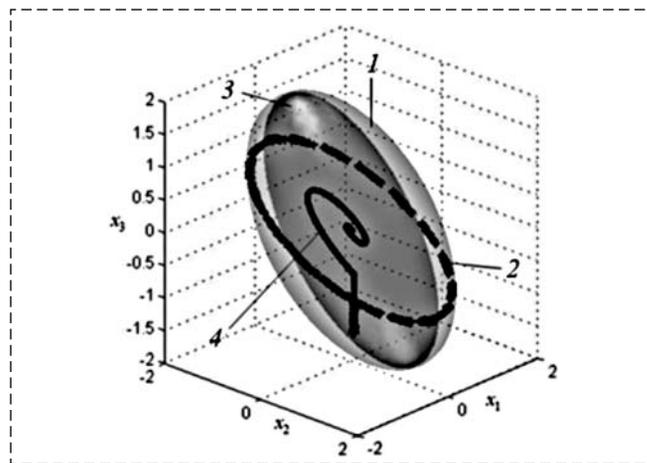


Рис. 2. Эллипсоид, полученный с помощью метода [4] (1); траектория системы, полученная с помощью метода [4] (2); эллипсоид, полученный с помощью предложенного метода (3); траектория системы, полученная с помощью предложенного метода (4)

Fig. 2. The ellipsoid obtained by method [4] (1); the trajectory of the system obtained by method [4] (2); the ellipsoid obtained by the proposed method (3); the system trajectory obtained by the proposed method (4)

Пример 2. Рассмотрим объект управления (1) со следующими параметрами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; B = D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

и $f = 0,5 + 0,5 \cos t$.

На рис. 2 приведены результаты, полученные с помощью алгоритма из работы [4] и с помощью предложенного метода.

Из рис. 2 видно, что траектория системы, полученная с помощью алгоритма [4], образует цикл. Траектория системы, полученная с помощью разработанного метода, сходится в расчетную область с точностью $\delta = 1,4 \cdot 10^{-4}$. Отметим также, что след матрицы эллипсоида 1 составляет 5, в то время как след матрицы эллипсоида 3 равен 2,8.

Заключение

Разработан новый метод подавления внешних неизвестных ограниченных возмущений в линейных динамических системах с обеспечением нахождения фазовых траекторий системы в эллипсоиде, достаточно близком к шару, в котором находятся начальные условия. Дополнительно обеспечивается наилучшая точность регулирования в установившемся режи-

ме. Получены достаточные условия устойчивости в виде разрешимости линейных матричных неравенств. Примеры моделирования показали эффективность предложенного метода по сравнению с методом инвариантных эллипсоидов.

Список литературы

1. Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities // System And Control Theory. Vol. 15 of SIAM studies in applied mathematics. SIAM, Philadelphia, 1994.
2. Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

3. Abedor J., Nagpal K., Poola K. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 1996. Vol. 6. P. 899–927.

4. Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. 2007. № 3. С. 106–125.

5. Цыкунов А. М. Алгоритмы робастного управления с компенсацией ограниченных возмущений // Автоматика и телемеханика. 2007. № 7. С. 103–115.

6. Фуртат И. Б. Алгоритм управления нелинейными системами в условиях возмущений и помех измерения // Автоматика и телемеханика. 2018. № 7 С. 41–58.

7. Furtat I. B. Control of nonlinear systems with compensation of disturbances under measurement noises // International Journal of Control. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1503723>.

Disturbance Attenuation with Minimization of Ellipsoids Restricting Phase Trajectories in Transition and Steady State

I. B. Furtat, cainenash@mail.ru, P. A. Gushchin, gushchin.p@mail.ru, A. A. Peregudin, zeekless@mail.ru, Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, 199178, St. Petersburg, Russia, ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia

Corresponding author: Furtat Igor B., Professor, Doctor of Technical Sciences, Institute of Problems of Mechanical Engineering Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 199178, Russian Federation, ITMO University, St. Petersburg, 197101, Russian Federation, e-mail: cainenash@mail.ru

Accepted on September 6, 2019

Abstract

A new method for attenuation of external unknown bounded disturbances in linear dynamical systems with known parameters is proposed. In contrast to the well known results, the developed static control law ensures that the phase trajectories of the system are located in an ellipsoid, which is close enough to the ball in which the initial conditions are located, as well as provides the best control accuracy in the steady state. To solve the problem, the method of Lyapunov functions and the technique of linear matrix inequalities are used. The linear matrix inequalities allow one to find optimal controller. In addition to the solvability of linear matrix inequalities, a matrix search scheme is proposed that provides the smallest ellipsoid in transition mode and steady state with a small error. The proposed control scheme extends to control linear systems under conditions of large disturbances, for the attenuation of which the integral control law is used. Comparative examples of the proposed method and the method of invariant ellipsoids are given. It is shown that under certain conditions the phase trajectories of a closed-loop system obtained on the basis of the invariant ellipsoid method are close to the boundaries of the smallest ellipsoid for the transition mode, while the obtained control law guarantees the convergence of phase trajectories to the smallest ellipsoid in the steady state.

Keywords: disturbance attenuation, optimization, linear matrix inequality

Acknowledgements: The research in Section "Design method" was performed in IPME RAS and was supported by the Russian Science Foundation, project no. 18-79-10104. The research in Section "Control under large disturbances" was performed in IPME RAS and was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 19-08-00246. The research in Section "Examples" was performed in IPME RAS and was supported by the grant of President of Russian Federation (МД-1054.2020.8).

For citation:

Furtat I. B., Gushchin P. A., Peregudin A. A. Disturbance Attenuation with Minimization of Ellipsoids Restricting Phase Trajectories in Transition and Steady State, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2020, vol. 21, no. 4, pp. 195–199.

DOI: 10.17587/mau.21.195-199

References

1. Boyd S., Ghaoui L. E., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities, *In System And Control Theory. Vol. 15 of SIAM studies in applied mathematics*, SIAM, Philadelphia, 1994.

2. Balandin D. V., Kogan M. M. Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities, Moscow, Fizmatlit, 2007 (in Russian).

3. Abedor J., Nagpal K., Poola K. A linear matrix inequality approach to peak-to-peak gain minimization, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 1996, vol. 6, pp. 899–927.

4. Nazin S. A., Polyak B. T., Topunov M. V. Rejection of bounded exogenous disturbances by the method of invariant ellipsoids, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 3, pp. 467–486.

5. Tsykunov A. M. Robust control algorithms with compensation of bounded perturbations, *Automation and Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 7, pp. 1213–1224.

6. Furtat I. B. An Algorithm to Control Nonlinear Systems in Perturbations and Measurement Noise, *Automation and Remote Control*, 2018, vol. 79, no. 7, pp. 1207–1221.

7. Furtat I. B. Control of nonlinear systems with compensation of disturbances under measurement noises, *International Journal of Control*, available: <https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1503723>.